Diferenciabilidade em espaços de Hilbert de
reprodução sobre a esfera

Thaís Jordão

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:

Diferenciabilidade em espaços de Hilbert de reprodução sobre a esfera

Thaís Jordão

Orientador: Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.
VERSÃO REVISADA.

USP – São Carlos
Março de 2012

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J82d Jordão, Thaís
Diferenciabilidade em espaços de Hilbert de
reprodução sobre a esfera / Thaís Jordão; orientador
Valdir Menegatto. -- São Carlos, 2012.
50 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2012.

1. Núcleos de Mercer. 2. Análise da esfera. 3.
Diferenciabilidade. I. Menegatto, Valdir , orient.
II. Título.

Ao Pedrinho...

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram para minha formação profissional e pessoal até esse momento. Dentre elas, meus familiares e amigos que fiz durante o mestrado e doutorado. Em particular, meus pais Luiz Roberto Jordão e Maria Cristina Franco Jordão, e meu orientador Valdir Antonio Menegatto.

Agradeço ainda o apoio financeiro concedido pela FAPESP.

Resumo

Um espaço de Hilbert de reprodução (EHR) é um espaço de Hilbert de funções construído de maneira específica e única a partir de um núcleo positivo definido. As funções do EHR tem a seguinte peculiaridade: seus valores podem ser reproduzidos através de uma operação elementar envolvendo a própria função, o núcleo gerador e o produto interno do espaço. Neste trabalho, consideramos EHR gerados por núcleos positivos definidos sobre a esfera unitária m -dimensional usual. Analisamos quais propriedades são herdadas pelos elementos do espaço, quando o núcleo gerador possui alguma hipótese de diferenciabilidade. A análise é elaborada em duas frentes: com a noção de diferenciabilidade usual sobre a esfera e com uma noção de diferenciabilidade definida por uma operação multiplicativa genérica. Esta última inclui como caso particular as derivadas fracionárias e a derivada forte de Laplace-Beltrami. Em cada um dos casos consideramos ainda propriedades específicas do mergulho do EHR em espaços de funções suaves definidos pela diferenciabilidade utilizada.

Abstract

A reproducing kernel Hilbert space (EHR) is a Hilbert space of functions constructed in a unique manner from a fixed positive definite generating kernel. The values of a function in a reproducing kernel Hilbert space can be reproduced through an elementary operation involving the function itself, the generating kernel and the inner product of the space. In this work, we consider reproducing kernel Hilbert spaces generated by a positive definite kernel on the usual m -dimensional sphere. The main goal is to analyze differentiability properties inherited by the functions in the space when the generating kernel carries a differentiability assumption. That is done in two different cases: using the usual notion of differentiability on the sphere and using another one defined through multiplicative operators. The second case includes the Laplace-Beltrami derivative and fractional derivatives as well. In both cases we consider specific properties of the embeddings of the reproducing kernel Hilbert space into spaces of smooth functions induced by notion of differentiability used.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	1
1.1 Núcleos e espaços de Hilbert de reprodução	1
1.2 Núcleos de Mercer	4
1.3 Séries de Fourier-Laplace	9
2 Diferenciabilidade usual em EHR sobre a esfera	11
2.1 Expansão em série para derivadas de núcleos de Mercer	12
2.2 Fórmulas de reprodução para derivadas	17
2.3 Fórmulas de reprodução no caso bizonal	21
2.4 Mergulho do EHR em espaços de funções suaves	23
2.5 Exemplos	26
3 Séries de Fourier-Laplace com pesos em EHR	31
3.1 A α -transformação	32
3.2 A α -transformação em $\mathcal{H}_K$	34
3.3 O mergulho $\mathcal{H}_K \hookrightarrow W_\alpha^p$: especificidades	40
3.4 Derivada Fracionária e de Laplace-Beltrami	42
Referências Bibliográficas	43
Índice Remissivo	47

Introdução

A teoria dos espaços de Hilbert de reprodução (EHR) se confunde com a teoria dos núcleos positivos definidos, também comumente chamados de núcleos de Mercer. Ela teve início no começo do século XX, muito provavelmente sob influência de algumas contribuições de S. Zaremba em problemas de valor de contorno para funções harmônicas e bi-harmônicas. Na verdade, na primeira metade daquele século, a teoria dos núcleos positivos definidos se desenvolveu através de contribuições de matemáticos importantes. Em particular, J. Mercer utilizou tais núcleos na teoria de equações integrais, I. J. Schoenberg e S. Bochner investigaram caracterizações para tais núcleos em várias situações e G. Szegő e S. Bergman estudaram tais núcleos no contexto complexo, onde famílias específicas de núcleos foram rotuladas com seus nomes. A sistematização da teoria dos núcleos positivos definidos ocorreu de fato com a publicação do famoso artigo de N. Aronszajn ([2]) in 1950. Neste trabalho, o termo espaços de Hilbert de reprodução aparece enfaticamente e todas as suas propriedades básicas são descritas e discutidas. Outras referências importantes sobre o tema surgiram ao longo do tempo, dentre elas [4, 5, 28, 29].

Os EHR formam uma classe ampla, relevante e interessante de funções, aparecendo em várias áreas da matemática. Um EHR carrega uma estrutura métrica bem definida atrelada à sua propriedade de reprodução, a qual torna-se uma ferramenta teórica muito importante em vários aspectos. Isto pode ser comprovado na moderna teoria do aprendizado (Learning Theory) onde tal fórmula tem papel significativo na implementação de processos e algoritmos. Referências recentes dentro desta área específica onde os EHR prevalecem são [8, 9] bem como outras nelas registradas.

Outra instância onde os EHR surgem naturalmente é na teoria da aproximação. Nesta teoria, EHR especiais aparecem como ferramenta no cálculo de erros na aproximação quando esta é implementada via métodos específicos, que usam núcleos positivos definidos. Estes EHR diferenciados são comumente denominados espaços nativos. Algu-

mas

refe-

rências recentes cobrindo este enfoque são [7, 19, 30, 31].

Na teoria do aprendizado, a implementação de algoritmos oriundos de alguns problemas específicos demandam que as funções nos EHR sejam regulares (suaves) em algum sentido. No caso em que os espaços são gerados por núcleos positivos definidos em subconjuntos de $\mathbb{R}^m$, a derivação usual determina tal regularidade. Dependendo do contexto, as funções do EHR são regulares e fórmulas de reprodução para certas derivadas das funções do EHR valem, fatos que permitem a imersão (mergulho) do EHR em espaços de funções suficientemente suaves ([10, 32, 33, 38]). Por outro lado, a compacidade deste mergulho entra na justificativa da existência do chamado número de cobertura (covering number), um conceito de considerável importância na teoria do aprendizado ([37]).

Neste trabalho, consideraremos questões semelhantes às aquelas descritas no parágrafo anterior, no caso em que o núcleo gerador é um núcleo de Mercer sobre a esfera unitária m -dimensional. Nenhum dos trabalhos acima citados considera este contexto. Como existem várias noções de diferenciabilidade para funções definidas sobre a esfera, neste trabalho consideraremos duas delas: a usual e uma diferenciabilidade definida através de pesos na expansão de Fourier-Laplace, a qual engloba dois tipos importantes de diferenciabilidade, a saber, a derivação fracionária e a derivação de Laplace-Beltrami. Especificamente, em qualquer um dos casos, as questões principais consideradas no trabalho são:

- (i) comprovação de que o EHR contém funções regulares quando o núcleo gerador é regular; provar uma propriedade de reprodução para as derivadas das funções do EHR via derivadas do núcleo de Mercer;
- (ii) justificativa da limitação e da compacidade do mergulho do EHR no espaços das funções regulares determinado pela regularidade utilizada.

No Capítulo 1 introduzimos os conceitos básicos pertinentes ao trabalho, incluindo propriedades elementares dos núcleos de Mercer e dos EHR. Descrevemos uma caracterização para o EHR de um núcleo de Mercer e exibimos uma base para este espaço. Finalizamos o capítulo apresentando algumas, poucas, informações sobre as séries de Fourier-Laplace para funções definidas na esfera.

No Capítulo 2, analisamos as duas questões mencionadas acima no caso em que a diferenciabilidade é a usual, ou seja, aquela definida via extensão radial, diferenciação usual e restrição da função à esfera. Essencialmente, provamos que se um núcleo de Mercer é suficientemente diferenciável, então as funções do EHR herdam a mesma ordem de diferenciabilidade. Neste processo obtemos fórmulas de reprodução para as derivadas de funções do EHR e mergulhamos este espaço em certos espaços de funções

diferenciáveis na esfera. Após justificar a limitação e a compacidade do mergulho, concluímos o capítulo com um exemplo comum, porém não trivial, envolvendo o núcleo Gaussiano.

No Capítulo 3, introduzimos o conceito de diferenciabilidade baseado nas séries de Fourier-Laplace com pesos determinados por uma sequência α : a α -transformação. Definimos suavidade via esta transformação e praticamente re-provamos todos os resultados do capítulo anterior neste contexto. No entanto observamos que os argumentos são totalmente diferentes. Concluímos o capítulo apresentando as sequências que justificam o fato das derivadas fracionária e de Laplace-Beltrami serem α -transformações específicas.

✓

Preliminares

Neste capítulo faremos um breve apanhado sobre núcleos de Mercer, espaços de Hilbert de reprodução e séries de Fourier-Laplace de funções definidas na esfera. Em particular, exploraremos o conceito de núcleos de reprodução e algumas de suas propriedades que são necessárias para o desenvolvimento do trabalho. As referências básicas para os resultados deste capítulo serão citadas ao longo das seções.

1.1 Núcleos e espaços de Hilbert de reprodução

Em geral, a palavra **núcleo** refere-se a uma função $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, onde Ω é um subconjunto não vazio. Neste trabalho, estamos interessados em núcleos definidos na esfera unitária S^m de $\mathbb{R}^{m+1}$, ou seja, no caso em que Ω é a esfera m -dimensional usual S^m , $m \geq 2$.

Dizemos que um núcleo K é **positivo definido** quando

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} K(x_i, x_j) \geq 0,$$

quaisquer que sejam o inteiro positivo n , o subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de S^m e o subconjunto $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ de $\mathbb{C}$.

Núcleos positivos definidos são automaticamente **hermitianos** ([4, p. 68]), ou seja,

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}, \quad x, y \in S^m.$$

A seguir, como ilustração, apresentamos exemplos de núcleos que se encaixam nas categorias descritas acima.

Exemplo 1.1.1. Seja $f : S^m \rightarrow \mathbb{C}$ uma função e considere o núcleo $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$K(x, y) = f(x) \overline{f(y)}, \quad x, y \in S^m.$$

Se n é um inteiro positivo, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um subconjunto de S^m e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são números complexos então

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} K(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} f(x_i) \overline{f(x_j)} = \left| \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \right|^2 \geq 0.$$

Em particular, K é positivo definido.

Exemplo 1.1.2. Sejam $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $K(x, y) = f(\|x - y\|^2)$, onde $\|\cdot\|$ indica a norma usual em $\mathbb{R}^{m+1}$. Um resultado descrito em [9, p. 38] garante que se f é completamente monotônica, então K é positivo definido. Agora, considere o **núcleo Gaussiano** dado por

$$K_\sigma(x, y) = \exp(-2\sigma^{-2}(1 - (x \cdot y))), \quad x, y \in S^m,$$

onde σ é um número real positivo e $x \cdot y$ representa o produto interno usual de $\mathbb{R}^{m+1}$. Observe que se $x, y \in S^m$ então, $\|x - y\|^2 = 2(1 - (x \cdot y))$. Tomando $f_\sigma(t) = \exp(-t\sigma^{-2})$, concluímos que o núcleo Gaussiano $K_\sigma(x, y) = f_\sigma(\|x - y\|^2)$, $x, y \in S^m$ é positivo definido.

Informações adicionais sobre núcleos e suas propriedades, principalmente aquelas relacionadas a positividade, podem ser encontradas em [4].

A teoria dos núcleos positivos definidos e afins caminha lado a lado com a teoria dos espaços de Hilbert. Estabelecemos esta conexão a seguir, já considerando o contexto que nos interessa.

Seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert formado por funções complexas com domínio S^m . Um núcleo $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ é chamado **núcleo de reprodução** de $\mathcal{H}$ quando as condições abaixo estão satisfeitas:

- (i) $K^x := K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$, $x \in S^m$;
- (ii) $f(x) = \langle f, K^x \rangle$, $f \in \mathcal{H}$, $x \in S^m$ (propriedade de reprodução).

Se K é o núcleo de reprodução de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, diremos que $\mathcal{H}$ é um **espaço de Hilbert de reprodução** (EHR) de K . Neste caso, utilizaremos a notação $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$, para representar o EHR do núcleo K .

A existência e unicidade dos espaços de Hilbert de reprodução são discutidas no teorema a seguir. A existência é garantida através de um processo de completamento de um espaço vetorial construído a partir do próprio núcleo. Logo, o processo é construtivo, e a unicidade deste espaço segue da unicidade do completamento. Incluímos uma prova destes fatos para a conveniência do leitor.

Teorema 1.1.3. *Se $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ é um núcleo positivo definido, então existe um único EHR associado a K .*

Demonstração: Seja $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido e considere o espaço vetorial

$$\mathcal{H} = \text{span}\{K^x : x \in S^m\}.$$

Para combinações lineares de elementos de $\mathcal{H}$, $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i K^{x_i}$ e $g = \sum_{j=1}^m \beta_j K^{y_j}$, definimos

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \overline{\beta_j} K(x_i, y_j).$$

A aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ acima está bem definida e é bilinear. Além disso, como K é hermitiano,

$$\langle g, f \rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j \overline{\alpha_i} K(y_j, x_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j \overline{\alpha_i} \overline{K(x_i, y_j)} = \overline{\langle f, g \rangle}.$$

Ainda,

$$\langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} K(x_i, x_j) \geq 0.$$

Logo, a fórmula

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle, \quad f \in \mathcal{H},$$

define uma seminorma em $\mathcal{H}$. Se $\langle f, f \rangle = 0$ então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i K(x_i, x) \right| = |\langle f, K(\cdot, x) \rangle| \leq \|f\| \|K(\cdot, x)\| = 0, \quad x \in S^m.$$

Logo, $f = 0$ e a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define então um produto interno em $\mathcal{H}$. É claro que o núcleo K satisfaz as propriedades de núcleo de reprodução em $\mathcal{H}$. Como o espaço $\mathcal{H}$ não é necessariamente de Hilbert, temos que considerar o seu complemento $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ com relação à norma induzida pelo produto interno. Quanto à unicidade, vamos assumir que K seja o núcleo de reprodução de outro espaço de Hilbert $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$. Pela primeira propriedade da definição de núcleo de reprodução, obtemos

$$\langle f, g \rangle_1 = \langle f, g \rangle_K, \quad f, g \in \mathcal{H}_K.$$

Logo, $\mathcal{H}_K \subset \mathcal{H}_1$. Se $\mathcal{H}_K \neq \mathcal{H}_1$, sendo $\mathcal{H}_K$ completo, podemos tomar uma função g não nula no complemento ortogonal de $\mathcal{H}_K$ em $\mathcal{H}_1$. Pela propriedade de reprodução do núcleo concluímos que

$$g(x) = \langle g, K^x \rangle_K = 0, \quad x \in S^m,$$

uma contradição. Portanto, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_K$. ■

Resultados mais finos, mas ainda relacionados ao teorema anterior, podem ser encontrados em [31].

1.2 Núcleos de Mercer

Nesta seção introduzimos a classe de núcleos positivos definidos que utilizaremos no decorrer do trabalho e caracterizamos o seu EHR convenientemente. Aqui, assumimos que a esfera S^m está munida da medida de Lebesgue usual normalizada σ_m ([25, p.16]), ou seja,

$$\int_{S^m} d\sigma_m = 1.$$

Se $p \in [1, \infty)$, escrevemos $L^p(S^m) := L^p(S^m, \sigma_m)$, para representar o espaço das funções complexas f , mensuráveis em S^m , tais que

$$\|f\|_p := \left(\int_{S^m} |f(x)|^p d\sigma_m(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Neste espaço, as funções representam classes de equivalência cuja relação se dá pela coincidência quase sempre de funções. Tal construção, faz do espaço $(L^p(S^m), \|\cdot\|_p)$ um espaço de Banach ([12, p. 175]).

No caso particular $p = 2$, $L^2(S^m)$ é um espaço de Hilbert separável com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_{S^m} f(x) \overline{g(x)} d\sigma_m(x), \quad f, g \in L^2(S^m).$$

Quando fizermos referência a núcleos integráveis, estaremos considerando $S^m \times S^m$ munida da medida produto $\sigma_m \times \sigma_m$. Escrevemos $L^p(S^m \times S^m) := L^p(S^m \times S^m, \sigma_m \times \sigma_m)$ e $\|\cdot\|_p$ para denotar a norma neste espaço.

Neste ponto, estamos habilitados a definir a classe de núcleos que será utilizada neste trabalho. Um núcleo $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ é dito ser um **núcleo de Mercer** quando existir uma sequência de números reais positivos $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ e uma base ortonormal $\{Y_k\}_{k=0}^\infty$ de $L^2(S^m)$ de modo que

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Y_k(x) \overline{Y_k(y)}, \quad x, y \in S^m. \quad (1.2.1)$$

A nomenclatura acima tem sua origem no conhecido Teorema de Mercer ([22]) demonstrado por James Mercer em 1909. Tal teorema exhibe condições para que um núcleo definido em $[a, b] \times [a, b]$ possua representação em série da forma (1.2.1). Casos mais gerais deste teorema podem ser encontrados em [11] e nas referências lá citadas.

Um núcleo de Mercer K representável como em (1.2.1) é positivo definido uma vez que

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} K(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Y_k(x_i) \overline{Y_k(x_j)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left| \sum_{i=1}^n c_i Y_k(x_i) \right|^2,$$

para todo inteiro positivo n , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^m$ e números complexos $c_1, c_2, \dots, c_n$. Em particular, existe um único EHR associado a K (Teorema 1.1.3). Desta forma, denotaremos por $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ o EHR associado a um núcleo de Mercer K .

Os próximos resultados objetivam uma caracterização do EHR de um núcleo de Mercer.

Lema 1.2.1. ([12, p. 178]) *Seja (X, μ) um espaço de medida, com $\mu(X) < \infty$. Se $0 < q \leq p \leq \infty$, então $L^p(X, \mu) \subset L^q(X, \mu)$ e $\|f\|_q \leq \|f\|_p \mu(X)^{(1/q)-(1/p)}$.*

Proposição 1.2.2. *Sejam $p \geq 2$ e $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ um núcleo em $L^p(S^m \times S^m)$. A aplicação*

$$L_K(f) = \int_{S^m} K(\cdot, y) f(y) d\sigma_m(y), \quad f \in L^p(S^m), \quad (1.2.2)$$

define um operador linear limitado em $L^p(S^m)$.

Demonstração: Se $f \in L^p(S^m)$, temos

$$\begin{aligned} \|L_K(f)\|_p^p &= \int_{S^m} |L_K(f)(x)|^p d\sigma_m(x) \\ &= \int_{S^m} \left| \int_{S^m} K(x, y) f(y) d\sigma_m(y) \right|^p d\sigma_m(x) \\ &\leq \int_{S^m} \left(\int_{S^m} |K(x, y) f(y)| d\sigma_m(y) \right)^p d\sigma_m(x). \end{aligned}$$

Se $q = p/(p-1)$, então a desigualdade de Hölder ([12, p. 174]) implica que

$$\int_{S^m} |K(x, y) f(y)| d\sigma_m(y) \leq \|K(x, \cdot)\|_p \|f\|_q.$$

Logo,

$$\|L_K(f)\|_p^p \leq \int_{S^m} (\|K(x, \cdot)\|_p \|f\|_q)^p d\sigma_m(x) = \|f\|_q^p \|K\|_p^p.$$

Sendo $p \geq 2$, temos que $q \leq p$ e o lema anterior garante que $\|f\|_q \leq \|f\|_p$. Esta desigualdade combinada ao cálculo anterior resulta em

$$\|L_K(f)\|_p^p \leq \|K\|_p^p \|f\|_p^p, \quad f \in L^p(S^m),$$

e a prova está completa. ■

Fixado um núcleo positivo definido $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$, utilizaremos com certa frequência a função auxiliar $\kappa_0 : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\kappa_0(x) = K(x, x), \quad x \in S^m.$$

Como K é hermitiano, a função κ_0 está, de fato, bem definida. A propriedade de reprodução de $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ revela que

$$|K(x, y)| = |\langle K^y, K^x \rangle_K| \leq \|K^y\|_K \|K^x\|_K = \kappa_0(y)^{1/2} \kappa_0(x)^{1/2}, \quad x, y \in S^m.$$

Logo, se $\kappa_0 \in L^{p/2}(S^m)$, então $K \in L^p(S^m \times S^m)$. Esta última implicação entra na justificativa do próximo resultado.

Proposição 1.2.3. *Fixe $p \geq 2$ e seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se $\kappa_0 \in L^{p/2}(S^m)$, então o EHR de K é*

$$\mathcal{H}_K = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^{1/2} Y_k : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}. \quad (1.2.3)$$

Se $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^{1/2} Y_k$ e $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda_k^{1/2} Y_k$ então

$$\langle f, g \rangle_K = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k.$$

Adicionalmente, $\mathcal{H}_K \subset L^p(S^m)$.

Demonstração: Considere o operador integral L_K definido em (1.2.2). Pelo afirmado no parágrafo que antecede a proposição, L_K é um operador limitado sobre $L^p(S^m)$. Na primeira etapa da prova mostraremos que a imagem $\text{Im}(L_K)$ de L_K é um subconjunto de $\mathcal{H}_K$. Para isso, tomemos $g \in L^p(S^m)$ e consideremos o funcional linear $\Phi_g : \mathcal{H}_K \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\Phi_g(h) = \int_{S^m} \overline{g(y)} h(y) d\sigma_m(y), \quad h \in \mathcal{H}_K.$$

A propriedade de reprodução do núcleo K juntamente com a desigualdade de Cauchy-Schwarz implicam

$$\begin{aligned} \int_{S^m} |h(y)|^p d\sigma_m(y) &= \int_{S^m} |\langle h, K^y \rangle_K|^p d\sigma_m(y) \\ &\leq \int_{S^m} \|h\|_K^p \|K^y\|_K^p d\sigma_m(y) \\ &= \|h\|_K^p \int_{S^m} \kappa_0(y)^{p/2} d\sigma_m(y) \\ &= \|h\|_K^p \|\kappa_0\|_{p/2}^{p/2} < \infty, \quad h \in \mathcal{H}_K. \end{aligned}$$

Escrevendo $q = p/(p-1)$ o lema anterior implica que $g \in L^q(S^m)$. Logo, podemos usar a desigualdade de Hölder ([12, p. 174]) para concluir a desigualdade

$$|\Phi_g(h)| \leq \int_{S^m} |\overline{g(y)}h(y)|d\sigma_m(y) \leq \|g\|_q \|h\|_p \leq \|g\|_q \|\kappa_0\|_{p/2}^{1/2} \|h\|_K, \quad h \in \mathcal{H}_K.$$

Desta forma, o funcional Φ_g é limitado e pelo teorema de representação de Riesz ([12, p. 166]), existe então $h^* \in \mathcal{H}_K$ tal que

$$\Phi_g(h) = \langle h, h^* \rangle_K, \quad h \in \mathcal{H}_K.$$

Agora, pela propriedade de reprodução do núcleo, temos que

$$h^*(x) = \langle h^*, K^x \rangle_K = \overline{\Phi_g(K^x)} = \int_{S^m} g(y) \overline{K^x(y)} d\sigma_m(y) = L_K(g)(x), \quad x \in S^m,$$

e, consequentemente, $L_K(g) \in \mathcal{H}_K$. Isto mostra que $\text{Im}(L_K) \subset \mathcal{H}_K$. Esta inclusão e o fato de cada λ_k ser positivo garantem que as autofunções Y_k do operador integral L_K são elementos de $\mathcal{H}_K$. Como os cálculos efetuados na primeira parte da prova justificam a igualdade

$$\langle h, L_K(g) \rangle_K = \langle h, g \rangle_2, \quad g \in L^2(S^m), \quad h \in \mathcal{H}_K,$$

o fato de $\{Y_k\}_{k=0}^\infty$ formar um sistema ortonormal em $L^2(S^m)$ nos permite fazer o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \left\langle \lambda_k^{1/2} Y_k, \lambda_j^{1/2} Y_j \right\rangle_K &= \left\langle \lambda_k^{1/2} Y_k, \lambda_j^{1/2} \lambda_j^{-1} L_K(Y_j) \right\rangle_K \\ &= \lambda_k^{1/2} \lambda_k^{-1} \lambda_j^{1/2} \langle Y_k, Y_j \rangle_2 \\ &= \delta_{k,j}. \end{aligned}$$

Isto demonstra a ortonormalidade de $\{\lambda_k^{1/2} Y_k\}_{k=0}^\infty$ em $\mathcal{H}_K$. Resta verificarmos que esta sequência é completa em $\mathcal{H}_K$. Mas, se $f \in \mathcal{H}_K$ é tal que $\langle f, \lambda_k^{1/2} Y_k \rangle_K = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, então

$$f(x) = \langle f, K^x \rangle_K = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{1/2} Y_k(x) \langle f, \lambda_k^{1/2} Y_k \rangle_K = 0, \quad x \in S^m,$$

ou seja, $f = 0$. Isto conclui a prova. ■

Observação 1.2.4. Se $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ é contínuo e positivo definido, o Teorema de Mercer (já citado anteriormente) garante uma representação em série para K como em (1.2.1). De fato, neste caso, K é automaticamente um elemento de $L^2(S^m \times S^m)$, o qual induz um operador integral $L_K : L^2(S^m) \rightarrow L^2(S^m)$, como demonstrado na Proposição 1.2.2. Este operador é compacto e a positividade definida do núcleo garante que ele é

auto-adjunto. Logo, o teorema espectral para tais operadores implica que L_K possui uma representação em série da forma

$$L_K(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle f, Y_k \rangle_2 Y_k, \quad f \in L^2(S^m),$$

onde $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ é uma sequência de números reais não negativos (podendo ser finita) decrescente para 0, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k < \infty$ e $\{Y_k\}_{k=0}^{\infty}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^m)$. Claramente, cada λ_k é um autovalor de L_K associado à autofunção Y_k e a imagem de L_K é um subconjunto de $C(S^m)$, o espaço das funções contínuas em S^m a valores complexos. A desigualdade de Bessel ([36, p. 34]) figura como argumento chave para mostrar que K pode então ser representado pela série abaixo

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Y_k(x) \overline{Y_k(y)}, \quad x, y \in S^m,$$

com convergência absoluta e uniforme em $S^m \times S^m$. Estes são os passos básicos da demonstração do resultado a seguir.

Proposição 1.2.5. *Se $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ é um núcleo contínuo e positivo definido, então K é um núcleo de Mercer. Adicionalmente, o EHR associado a K pode ser caracterizado por (1.2.3).*

Fechamos a seção utilizando o resultado anterior para exibir dois exemplos de núcleos de Mercer sobre S^m .

Exemplo 1.2.6. (*Núcleo polinomial homogêneo*) Seja d um número inteiro não negativo. Considere $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$K(x, y) = (x \cdot y)^d, \quad x, y \in S^m.$$

Este núcleo é contínuo, positivo definido e hermitiano, logo um núcleo de Mercer. Se para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}) \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$ escrevermos

$$C(d, \alpha) := \frac{d!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{m+1}!},$$

então o núcleo K pode ser escrito como a seguinte soma

$$K(x, y) = \sum_{|\alpha|=d} C(d, \alpha) x^\alpha y^\alpha, \quad x, y \in S^m.$$

Desta forma, o conjunto $\{C(d, \alpha)^{1/2} x^\alpha\}_{|\alpha|=d}$ forma uma base ortonormal para $\mathcal{H}_K$. Logo, $\mathcal{H}_K$ tem dimensão finita, a saber,

$$\dim \mathcal{H}_K = \binom{m+d}{m}.$$

Mais informações sobre núcleos deste tipo podem ser encontradas em [23, p. 26].

Exemplo 1.2.7. (*Núcleo Gaussiano*) Retomando o exemplo 1.1.2, tínhamos o núcleo Gaussiano dado por

$$K_\sigma(x, y) = \exp(-2\sigma^{-2}(1 - (x \cdot y))), \quad x, y \in S^m.$$

Vimos anteriormente que ele é positivo definido e a sua continuidade é clara. Portanto, é um núcleo de Mercer. A representação em série para este núcleo será postergada uma vez a mesma depende de algumas definições e notações ainda não introduzidas.

1.3 Séries de Fourier-Laplace

A análise na esfera descreve uma base especial para o espaço $L^2(S^m)$ inteiramente formada por elementos polinomiais. Nesta seção, consideramos tal base e algumas de suas propriedades. As referências básicas utilizadas aqui são [25, 26, 35].

Um **k -harmônico esférico de dimensão $m + 1$** , ou simplesmente k -harmônico esférico, é a restrição à S^m de um polinômio harmônico e homogêneo de grau k em $m + 1$ variáveis. O espaço formado pelos k -harmônicos esféricos será denotado por $\mathcal{H}_k^m$. Para cada k inteiro não negativo, o espaço $\mathcal{H}_k^m$ tem dimensão finita e esta será denotada por $N(k, m)$. Informamos que esta dimensão pode ser explicitada ([25]) mas isto não será necessário neste trabalho.

O primeiro resultado desta seção ratifica que os espaços de harmônicos esféricos, acima, são dois a dois ortogonais ([25, p. 17]).

Teorema 1.3.1. *Se $k \neq l$, $f \in \mathcal{H}_k^m$ e $g \in \mathcal{H}_l^m$, então*

$$\int_{S^m} f(x)g(x)d\sigma_m(x) = 0.$$

A decomposição ortogonal de $L^2(S^m)$ via espaços de harmônicos esféricos é o tema do próximo resultado ([25, p. 35]).

Teorema 1.3.2. *O espaço de Hilbert $L^2(S^m)$ admite a seguinte decomposição em soma direta*

$$L^2(S^m) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k^m.$$

Se escrevermos $\{Y_{k,l} : l = 1, 2, \dots, N(k, m)\}$ para denotar uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k^m$, $k = 0, 1, \dots$, então o resultado acima indica que o conjunto

$$\{Y_{k,l} : l = 1, 2, \dots, N(k, m); k = 0, 1, \dots\}, \quad (1.3.1)$$

forma uma base ortonormal de $L^2(S^m)$.

Fixado k , o Teorema 1.3.2 define uma projeção ortogonal $\mathcal{Y}_k : L^2(S^m) \rightarrow L^2(S^m)$ cuja imagem é exatamente $\mathcal{H}_k^m$. Uma fórmula fechada para a mesma é dada por

$$\mathcal{Y}_k(f) = \sum_{l=1}^{N(k,m)} \langle f, Y_{k,l} \rangle_2 Y_{k,l}.$$

Alternativamente,

$$\mathcal{Y}_k(f)(x) = N(k, m) \int_{S^m} f(y) P_k^m(x \cdot y) d\sigma_m(y), \quad x \in S^m, \quad (1.3.2)$$

onde P_k^m é o polinômio de Legendre de grau k e dimensão $m+1$. Uma prova para esta fórmula está disponível em [25, p. 25].

Com as notações anteriores, dada uma função f em $L^2(S^m)$, a **série de Fourier-Laplace** de f é definida por

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Y}_k(f).$$

Mesmo sendo óbvio, observamos que a inclusão $L^p(S^m) \subset L^2(S^m)$ permite definir-mos da mesma maneira a série de Fourier-Laplace de funções em $L^p(S^m)$, $p \geq 2$. Ainda, a série de Fourier-Laplace de uma função em $L^2(S^m)$ converge na métrica deste espaço. Esta afirmação é de fácil verificação e decorre de um resultado clássico de convergência para séries em espaços de Hilbert ([36, p. 34]).

A proposição a seguir descreve algumas propriedades relevantes das projeções (1.3.2) e que serão utilizadas à frente. Observamos que o símbolo $\delta_{n,k}$ representa o delta de Kronecker.

Proposição 1.3.3. *Se n é um inteiro não negativo, então:*

(i) $\mathcal{Y}_n(f) = \delta_{n,k} f$, $f \in \mathcal{H}_k^m$, $k = 0, 1, \dots$

Ainda, se $p \geq 2$, então:

(ii) $|\mathcal{Y}_n(f)(x)| \leq N(n, m) \|f\|_p$, $f \in L^p(S^m)$, $x \in S^m$;

(iii) $\mathcal{Y}_n(\bar{f}) = \overline{\mathcal{Y}_n(f)}$, $f \in L^p(S^m)$.

Finalmente,

(iv) *Se $g \in L^2(S^m)$ tem série de Fourier-Laplace dada por $g \sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathcal{Y}_k(f)$, para alguma $f \in L^2(S^m)$ e alguma sequência $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ de números complexos, então $\mathcal{Y}_n(g) = \alpha_n \mathcal{Y}_n(f)$.*

Demonstração: A referência [21] detalha uma demonstração para os itens (i) e (ii). Analisando a representação (1.3.2) da projeção $\mathcal{Y}_n$, é fácil ver que funções a valores reais são projetadas em funções do mesmo tipo. Logo, decompondo uma função $f \in L^p(S^m)$ em suas partes real e imaginária e usando a linearidade da projeção, (iii) segue. A afirmação (iv) segue da definição da série de Fourier-Laplace. ■

Diferenciabilidade usual em EHR sobre a esfera

Resultados isolados sobre diferenciabilidade em EHR podem ser encontrados em referências que datam antes de 2005. Entretanto, o interesse efetivo sobre este tema surgiu nos últimos 5 anos com motivação clara vindo da teoria do aprendizado. Como exemplo, mencionamos a referência [38] que cobre diferenciabilidade usual em EHR gerados por núcleos de Mercer definidos em certos subconjuntos de $\mathbb{R}^m$. As hipóteses são tais que o caso em que o subconjunto é uma esfera não está incluído no contexto.

Neste capítulo, apresentamos resultados que de certa forma reproduzem alguns daqueles descritos em [38] para o contexto esférico, utilizando núcleos de Mercer como em (1.2.1). O conceito de diferenciabilidade que usamos em S^m é o usual, ou seja, diferenciação de uma função com domínio S^m deve ser entendido da seguinte forma: estendemos radialmente a função para quase todo o $\mathbb{R}^{m+1}$, diferenciamos esta extensão e voltamos à S^m tomando a restrição da função obtida no passo anterior. A nossa abordagem é consideravelmente diferente daquela empregada em [38]. Lá, os subconjuntos utilizados são compactos e coincidentes com o fecho de seu interior, algo que se perde no caso do compacto S^m de $\mathbb{R}^{m+1}$. Contornamos este aparente problema usando uma abordagem que envolve argumentos genuinamente esféricos.

Neste capítulo, os seguintes pontos específicos são tratados. A Seção 1 contém a notação básica adicional, incluindo derivadas para funções em S^m e também para núcleos. Em seguida, assumindo que o núcleo de Mercer K é suficientemente diferenciável, provamos uma fórmula de reprodução para as derivadas da extensão radial de elementos

da base ortonormal $\{Y_k\}_{k=0}^\infty$ de $L^2(S^m)$. Na Seção 2, exibimos uma representação em série para certas derivadas do núcleo K , em função das derivadas de Y_k . Na Seção 3, ainda sob o mesmo contexto, mergulhamos o EHR no espaço de funções suficientemente diferenciáveis em S^m e provamos fórmulas de reprodução para as derivadas das funções do EHR. A Seção 4 descreve propriedades adicionais na mesma linha da seção anterior, no caso em que o núcleo é adicionalmente bizonal. Na Seção 5, apresentamos exemplos relacionados ao núcleo polinomial homogêneo e ao núcleo Gaussiano.

2.1 Expansão em série para derivadas de núcleos de Mercer

Nesta seção, inicialmente verificamos que se o núcleo de Mercer K é suficientemente suave então podemos deduzir fórmulas para computar as derivadas correspondentes de cada Y_k , via as derivadas do núcleo. Ainda, deduzimos expansões em série para certas derivadas de K , em termos das derivadas de Y_k .

Começamos com uma notação: $\mathbb{R}_*^{m+1} := \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$. A **extensão radial** de uma função $f : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ é a função $\tilde{f} : \mathbb{R}_*^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = f(x\|x\|^{-1}), \quad x \in \mathbb{R}_*^{m+1}.$$

A derivada parcial de uma função $f : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ com relação a j -ésima coordenada de $y \in S^m$ é definida como sendo a derivada parcial da extensão radial $\tilde{f}$ de f . Se escrevermos $\partial\tilde{f}/\partial e_j$ para denotar a j -ésima derivada parcial de $\tilde{f}$, então

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(y) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial e_j}(y), \quad y \in S^m.$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1})$ é um multi-índice em $\mathbb{Z}_+^{m+1}$, empregamos a notação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial e_1^{\alpha_1} \dots \partial e_{m+1}^{\alpha_{m+1}}},$$

onde $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_{m+1}$. Por questões de uniformidade, escrevemos D^0 para denotar o operador identidade.

Podemos adaptar as definições anteriores para funções de duas variáveis na esfera e introduzir diferenciabilidade para núcleos. Se $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{R}$ é um núcleo, a extensão radial de K é o núcleo

$$\tilde{K}(x, y) := K(x\|x\|^{-1}, y\|y\|^{-1}), \quad x, y \in \mathbb{R}_*^{m+1}.$$

As funções projeções correspondentes $\tilde{K}^y$, $y \in \mathbb{R}_*^{m+1}$, são dadas pela fórmula

$$\tilde{K}^y(x) = \tilde{K}(x, y), \quad x \in \mathbb{R}_*^{m+1}.$$

O símbolo $\tilde{K}^y|_{S^m}$ indicará a restrição de $\tilde{K}^y$ a S^m .

Se $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{R}$ é um núcleo em S^m e α e β são multi-índices em $\mathbb{Z}_+^{m+1}$ então

$$D^{\alpha,\beta} K(x, y) := D^{(\alpha,\beta)} K(x_1, \dots, x_{m+1}, y_1, \dots, y_{m+1}),$$

onde (α, β) é o multi-índice de $\mathbb{Z}_+^{2(m+1)}$ obtido pela adjunção dos multi-índices α e β :

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}, \beta_1, \dots, \beta_{m+1}).$$

Todas as definições e notações introduzidas até agora podem ser transferidas para funções complexas e núcleos complexos através de suas partes real e imaginária. Agora, seguimos introduzindo mais notações e apresentando o espaço das funções suaves com o qual trabalharemos neste capítulo.

Denotamos por $C^n(S^m)$ o conjunto das funções $f : S^m \rightarrow \mathbb{C}$ para as quais $D^\alpha f$ existe e é contínua quando α é um multi-índice em $\mathbb{Z}_+^{m+1}$ e $|\alpha| \leq n$. Similarmente, para duas variáveis, $C^{n,n}(S^m \times S^m)$ representa o conjunto dos núcleos $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ para os quais $D^{\alpha,\beta} K$ existe e é contínua quando α e β satisfazem $|\alpha|, |\beta| \leq n$. Adicionalmente, escrevemos $C^\infty(S^m) = \bigcap_{n=0}^\infty C^n(S^m)$ e $C^{\infty,\infty}(S^m \times S^m) = \bigcap_{n=0}^\infty C^{n,n}(S^m \times S^m)$.

O primeiro resultado desta seção descreve uma fórmula de diferenciabilidade para as extensões radiais de Y_k quando impomos uma condição de diferenciabilidade sobre K . A referência [20] analisa a mesma questão em um contexto diferente.

Teorema 2.1.1. *Seja K um núcleo Mercer como em (1.2.1). Se $D^{0,\alpha} K$ existe e é contínua quando $|\alpha| \leq n$, então:*

- (i) $Y_k \in C^n(S^m)$, $k = 0, 1, \dots$;
- (ii) *vale a igualdade*

$$D^\alpha \tilde{Y}_k(x) = \frac{1}{\lambda_k} \langle Y_k, (D^{0,\alpha} \tilde{K})^x|_{S^m} \rangle_2, \quad x \neq 0, \quad |\alpha| \leq n.$$

Demonstração: É suficiente provarmos (ii). Assuma que $D^{0,\alpha} K$ existe e é contínua para todo multi-índice α em $\mathbb{Z}_+^{m+1}$ que satisfaz $|\alpha| \leq n$. Se $|\alpha| = 0$,

$$D^0 \tilde{Y}_k(x) = \tilde{Y}_k(x) = Y_k(x\|x\|^{-1}) = \frac{1}{\lambda_k} \int_{S^m} K(x\|x\|^{-1}, y) Y_k(y) d\sigma_m(y), \quad x \neq 0.$$

Como $\tilde{K}$ é hermitiano,

$$D^0 \tilde{Y}_k(x) = \frac{1}{\lambda_k} \int_{S^m} \tilde{K}(x, y) Y_k(y) d\sigma_m(y) = \frac{1}{\lambda_k} \int_{S^m} \overline{\tilde{K}^x(y)} Y_k(y) d\sigma_m(y), \quad x \neq 0,$$

e, consequentemente,

$$D^0 \tilde{Y}_k(x) = \frac{1}{\lambda_k} \langle Y_k, \tilde{K}^x|_{S^m} \rangle_2 = \frac{1}{\lambda_k} \langle Y_k, (D^{0,0} \tilde{K})^x|_{S^m} \rangle_2, \quad x \neq 0. \quad (2.1.1)$$

Se $\alpha_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, o dígito 1 aparecendo na j -ésima entrada, podemos usar (2.1.1) para obter

$$D^{\alpha_j} \tilde{Y}_k(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{Y}_k(x + te_j) - \tilde{Y}_k(x)}{t} = \frac{1}{\lambda_k} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle Y_k, \tilde{K}^{x+te_j}|_{S^m} - \tilde{K}^x|_{S^m} \rangle_2}{t}, \quad x \neq 0.$$

Sendo o último limite precisamente $\langle Y_k, (D^{0, \alpha_j} \tilde{K})^x|_{S^m} \rangle_2$, temos

$$D^{\alpha_j} \tilde{Y}_k(x) = \frac{1}{\lambda_k} \langle Y_k, (D^{0, \alpha_j} \tilde{K})^x|_{S^m} \rangle_2, \quad x \neq 0.$$

Para o próximo passo, vamos assumir que o resultado é válido para todos os multi-índices α tais que $|\alpha| < l$, para algum $l \leq n - 1$ e mostrar que a fórmula (ii) é válida pra um multi-índice β com $|\beta| = l$. Para isso, observe que existe uma entrada j tal que

$$\beta := (\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma_j + 1, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_{m+1}),$$

onde $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1})$ é algum multi-índice em $\mathbb{Z}_+^{m+1}$ tal que $|\gamma| = l - 1$. Pela nossa suposição, $D^\gamma Y_k$ existe, é contínua e satisfaz

$$D^\gamma \tilde{Y}_k(x) = \frac{1}{\lambda_k} \langle Y_k, (D^{0, \gamma} \tilde{K})^x|_{S^m} \rangle_2, \quad x \neq 0.$$

Pretendemos usar a fórmula anterior para calcular a derivada

$$D^\beta \tilde{Y}_k = \frac{\partial}{\partial e_j} D^\gamma \tilde{Y}_k,$$

para pontos em $\mathbb{R}_*^{m+1}$. Primeiramente, escrevemos

$$\begin{aligned} D^\beta \tilde{Y}_k(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_k} \left\langle Y_k, \frac{(D^{0, \gamma} \tilde{K})^{x+te_j}|_{S^m} - (D^{0, \gamma} \tilde{K})^x|_{S^m}}{t} \right\rangle_2 \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \left\langle Y_k, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(D^{0, \gamma} \tilde{K})^{x+te_j}|_{S^m} - (D^{0, \gamma} \tilde{K})^x|_{S^m}}{t} \right\rangle_2, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Lembrando da nossa hipótese sobre K , o último limite acima é precisamente $(D^{0, \beta} \tilde{K})^x$. Agora, é claro que

$$D^\beta \tilde{Y}_k(x) = \frac{1}{\lambda_k} \langle Y_k, (D^{0, \beta} \tilde{K})^x|_{S^m} \rangle_2, \quad x \neq 0,$$

e a demonstração está completa. ■

Nosso próximo passo é obter expansões convenientes para certas derivadas de K em termos de derivadas dos elementos da sequência $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$.

Teorema 2.1.2. *Se K pertence a $C^{n,n}(S^m \times S^m)$, então*

$$D^{\alpha,\beta}K(x,y) = \overline{D^{\beta,\alpha}K(y,x)}, \quad |\alpha|, |\beta| \leq n, \quad x, y \in S^m.$$

Em particular, os núcleos $D^{\alpha,\alpha}K$, $|\alpha| \leq n$, são hermitianos.

Demonstração: Seja $K \in C^{n,n}(S^m \times S^m)$. A fórmula é óbvia quando $|\alpha| = |\beta| = 0$. Se e_i é o multi-índice que tem a i -ésima componente 1 e zeros nas demais, temos

$$\begin{aligned} D^{e_i,0}K(x,y) = D^{e_i,0}\tilde{K}(x,y) &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(\tilde{K}(x + te_i, y) - \tilde{K}(x, y)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(\tilde{K}(y, x + te_i) - \tilde{K}(y, x)) \\ &= \overline{D^{0,e_i}K(y,x)}, \quad x, y \in S^m. \end{aligned}$$

Recursivamente, deduzimos que

$$D^{\alpha,0}K(x,y) = \overline{D^{0,\alpha}K(y,x)}, \quad |\alpha| \leq n, \quad x, y \in S^m.$$

Uma fórmula similar pode ser provada quando o primeiro multi-índice é fixado. O resultado segue. ■

Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.1.2, a fórmula

$$(D^{0,\alpha}K)^x(y) = D^\alpha K^y(x), \quad x, y \in S^m, \quad |\alpha| \leq n,$$

vale quando K é real e simétrico.

O seguinte lema é um resultado técnico e pode ser adaptado de resultados similares que podem ser encontrados na literatura (por exemplo, o Teorema 7.17 de [27] ou o Teorema 12 de [17]).

Lema 2.1.3. *Sejam X um subconjunto aberto não vazio de $\mathbb{R}^{m+1}$ e n um inteiro não negativo. Seja $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ uma sequência de funções em $C^n(X)$, pontualmente convergente para $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Se $\{D^\alpha f_k\}_{k=0}^\infty$ é uniformemente convergente em subconjuntos compactos de X sempre que $0 < |\alpha| \leq n$, então $f \in C^n(X)$ e*

$$D^\alpha f = \lim_{k \rightarrow \infty} D^\alpha f_k, \quad 0 < |\alpha| \leq n.$$

O próximo resultado pode ser interpretado como uma versão do teorema de Mercer para as diferentes derivadas de K . Os argumentos contidos na demonstração se assemelham aos usados em [10].

Teorema 2.1.4. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K pertence a $C^{n,n}(S^m \times S^m)$, então*

$$D^{\alpha,\beta}K(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k D^\alpha Y_k(x) \overline{D^\beta Y_k(y)}, \quad x, y \in S^m, \quad |\alpha|, |\beta| \leq n,$$

onde a convergência da série é uniforme e absoluta.

Demonstração: O primeiro passo é observar que estamos trabalhando com núcleos contínuos que são positivos definidos. Este conceito de positividade definida coincide com o conceito de L^2 -positividade definida, ou seja, com a positividade do operador integral L_K . Detalhes sobre o assunto e demonstração da equivalência citada podem ser encontrados em [11]. Para cada inteiro $j \geq 1$, o núcleo

$$K_j(x, y) := K(x, y) - \sum_{k=0}^j \lambda_k Y_k(x) \overline{Y_k(y)}, \quad x, y \in S^m$$

é L^2 -positivo definido. Se K pertence a $C^{n,n}(S^m \times S^m)$, o mesmo acontece com K_j e

$$D^{\alpha,\alpha} K_j(x, y) := D^{\alpha,\alpha} K(x, y) - \sum_{k=0}^j \lambda_k D^\alpha Y_k(x) \overline{D^\alpha Y_k(y)}, \quad x, y \in S^m.$$

Vale a desigualdade

$$I_j(f) = \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{m+1}} D^{\alpha,\alpha} \tilde{K}_j(x, y) f(y) d\mu(y) \right) f(x) d\mu(x) \geq 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^{m+1}, \mu),$$

onde μ é a medida de Lebesgue usual de $\mathbb{R}^{m+1}$. De fato, integração por partes e a L^2 -positividade definida de $\tilde{K}$ implicam que

$$I_j(f) = \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{m+1}} \tilde{K}_j(x, y) D^\alpha f(y) d\mu(y) \right) D^\alpha f(x) d\mu(x) \geq 0,$$

sempre que f é infinitamente diferenciável e possui suporte compacto em $\mathbb{R}_*^{m+1}$. Então, resultados de densidade ([1, p.38]) justificam que a mesma desigualdade vale para funções em $L^2(\mathbb{R}_*^{m+1})$. O passo principal para a demonstração do teorema consiste em justificar que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k D^\alpha \tilde{Y}_k(x) \overline{D^\beta \tilde{Y}_k(y)} \quad (2.1.2)$$

converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_*^{m+1} \times \mathbb{R}_*^{m+1}$, pois o resto segue do lema anterior. Claramente, o núcleo positivo definido $\tilde{K}_j$ é um elemento de $C^{n,n}(\mathbb{R}_*^{m+1} \times \mathbb{R}_*^{m+1})$ e

$$D^{\alpha,\alpha} \tilde{K}_j(x, y) = D^{\alpha,\alpha} \tilde{K}(x, y) - \sum_{k=0}^j \lambda_k D^\alpha \tilde{Y}_k(x) \overline{D^\alpha \tilde{Y}_k(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}_*^{m+1},$$

quando $|\alpha| \leq n$. Como $D^{\alpha,\alpha} \tilde{K}_j$ é positivo definido, temos

$$D^{\alpha,\alpha} \tilde{K}_j(x, x) = D^{\alpha,\alpha} \tilde{K}(x, x) - \sum_{k=0}^j \lambda_k |D^\alpha \tilde{Y}_k(x)|^2 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}_*^{m+1}, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

e, conseqüentemente,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |D^\alpha \tilde{Y}_k(x)|^2 \leq D^{\alpha, \alpha} \tilde{K}(x, x), \quad x \in \mathbb{R}_*^{m+1}.$$

A convergência da série anterior em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_*^{m+1}$ segue. Para o passo final da demonstração, utilizamos a convergência obtida acima, a desigualdade

$$\left| \sum_{k=j+1}^q \lambda_k D^\alpha \tilde{Y}_k(x) \overline{D^\beta \tilde{Y}_k(y)} \right| \leq \sum_{k=j+1}^q \lambda_k |D^\alpha \tilde{Y}_k(x)|^2 \sum_{k=j+1}^q \lambda_k |D^\beta \tilde{Y}_k(y)|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}_*^{m+1},$$

e o critério de Cauchy para convergência uniforme para justificar a convergência desejada em (2.1.2). $\blacksquare$

O resultado abaixo é uma consequência relevante do teorema anterior.

Corolário 2.1.5. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K pertence a $C^{m,n}(S^m \times S^m)$ e $|\alpha| \leq n$, então $D^{\alpha, \alpha} K$ é um núcleo de Mercer.*

2.2 Fórmulas de reprodução para derivadas

Nesta seção, continuaremos com núcleos de Mercer satisfazendo as mesmas hipóteses básicas utilizadas na seção anterior e buscaremos a diferenciabilidade das funções do EHR associado a K . O processo fornece, ao longo do caminho, fórmulas de reprodução para derivadas dos elementos do EHR. Estas, por sua vez, ajudam a justificar o mergulho do espaço em espaços de funções diferenciáveis em S^m . A caracterização do EHR de um núcleo de Mercer dada em (1.2.3) é essencial aqui.

Teorema 2.2.1. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K pertence a $C^{m,n}(S^m \times S^m)$, então*

$$(D^{0, \alpha} K)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \overline{D^\alpha Y_k(x)} Y_k, \quad x \in S^m, \quad |\alpha| \leq n,$$

e para cada $x \in S^m$ e $|\alpha| \leq n$, $(D^{0, \alpha} K)^x$ pertence a $\mathcal{H}_K$.

Demonstração: Do Teorema 2.1.4 sabemos que

$$D^{0, \alpha} K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Y_k(x) \overline{D^\alpha Y_k(y)}, \quad x, y \in S^m,$$

quando $|\alpha| \leq n$. Logo,

$$(D^{0, \alpha} K)^x(y) = D^{0, \alpha} K(y, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \overline{D^\alpha Y_k(x)} Y_k(y), \quad x, y \in S^m,$$

e a primeira afirmação do teorema segue. A segunda parte é consequência da caracterização (1.2.3) do EHR, da fórmula

$$(D^{0,\alpha}K)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{1/2} \overline{D^\alpha Y_k(x)} \lambda_k^{1/2} Y_k, \quad x \in S^m,$$

e da convergência de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \lambda_k^{1/2} \overline{D^\alpha Y_k(x)} \right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |D^\alpha Y_k(x)|^2 = D^{\alpha,\alpha}K(x, x), \quad x \in S^m,$$

a qual vale quando K pertence a $C^{n,n}(S^m \times S^m)$. ■

A inversão nas ordens de derivação no teorema anterior é permitida. Porém, a fórmula resultante coloca $D^{\alpha,0}K(x, \cdot)$ em $\mathcal{H}_{\overline{K}}$. Isto é justicado na seguinte observação.

Observação 2.2.2. A inversão nas ordens de derivação produz propriedades de reprodução conjugadas. De fato, seja

$$\mathcal{H} := \{\bar{f} : f \in \mathcal{H}_K\},$$

e defina neste espaço o seguinte produto interno:

$$\langle \bar{f}, \bar{h} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, h \rangle_K, \quad f, h \in \mathcal{H}_K.$$

O fato de $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ ser um espaço de Hilbert implica que $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ também é um espaço de Hilbert. Adicionalmente,

$$\overline{K^x} = \overline{K(\cdot, x)} = \overline{K^x} \in \mathcal{H}, \quad x \in S^m,$$

e

$$f(x) = \langle f, K^x \rangle_K = \langle \bar{f}, \overline{K^x} \rangle_{\mathcal{H}}, \quad f \in \mathcal{H}, \quad x \in S^m.$$

Em outras palavras, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}) = (\mathcal{H}_{\overline{K}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{K}})$, devido à unicidade do EHR de um núcleo positivo definido. Consequentemente, o EHR $\mathcal{H}_{\overline{K}}$ é completamente determinado por $\mathcal{H}_K$ via conjugação.

A ação do operador D^α nos elementos da base $\{Y_k\}_{k=0}^{\infty}$ que gera o núcleo de Mercer é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 2.2.3. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K pertence a $C^{n,n}(S^m \times S^m)$, então*

$$D^\alpha Y_k(x) = \langle Y_k, (D^{0,\alpha}K)^x \rangle_K, \quad x \in S^m, \quad k = 0, 1, \dots, \quad |\alpha| \leq n. \quad (2.2.1)$$

Demonstração: Fixe $x \in S^m$, $k \in \mathbb{Z}_+$ e α tal que $|\alpha| \leq n$. Se K pertence ao espaço $C^{n,n}(S^m \times S^m)$, o Teorema 2.2.1 implica que $(D^{0,\alpha}K)^x \in \mathcal{H}_K$. Agora, observe que as funções $(D^{0,\alpha}K)^x$ e Y_k pertencem a $L^2(S^m) \cap \mathcal{H}_K$. Esta observação nos permite fazer o seguinte cálculo

$$\begin{aligned} \langle Y_k, (D^{\alpha,0}K)^x \rangle_K &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \langle Y_k, \overline{D^{\alpha}Y_j(x)} Y_j \rangle_K \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^{1/2}}{\lambda_k^{1/2}} D^{\alpha}Y_j(x) \langle \lambda_k^{1/2} Y_k, \lambda_j^{1/2} Y_j \rangle_K. \end{aligned}$$

A ortonormalidade do sistema $\{\lambda_k^{1/2} Y_k\}_{k=0}^{\infty}$ no EHR $\mathcal{H}_K$ nos permite concluir que $D^{\alpha}Y_k(x) = \langle Y_k, (D^{0,\alpha}K)^x \rangle_K$. ■

O próximo resultado estende a conclusão do teorema anterior a todas as funções de $\mathcal{H}_K$. Parte da justificativa do teorema abaixo foi idealizada com base na demonstração do Teorema 2.1.4.

Teorema 2.2.4. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K pertence a $C^{n,n}(S^m \times S^m)$ então $\mathcal{H}_K$ pode ser mergulhado em $C^n(S^m)$. Adicionalmente,*

$$D^{\alpha}f(x) = \langle f, (D^{0,\alpha}K)^x \rangle_K, \quad f \in \mathcal{H}_K, \quad x \in S^m, \quad |\alpha| \leq n. \quad (2.2.2)$$

Demonstração: Assuma que $K \in C^{n,n}(S^m \times S^m)$. Seja $f \in \mathcal{H}_K$ e considere sua representação em série com relação a base $\{\lambda_k^{1/2} Y_k\}_{k=0}^{\infty}$ de $\mathcal{H}_K$:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^{1/2} Y_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

Para mostrar que $f \in C^n(S^m)$ é suficiente verificar que

$$D^{\alpha} \tilde{f} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^{1/2} D^{\alpha} \tilde{Y}_k, \quad |\alpha| \leq n,$$

com convergência absoluta e uniforme da série em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_*^{m+1}$. A expressão do lado direito na igualdade acima está bem definida, uma vez que a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^{1/2} D^{\alpha} \tilde{Y}_k(x) \right|^2 &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |D^{\alpha} \tilde{Y}_k(x)|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right) D^{\alpha,\alpha} \tilde{K}(x, x), \quad x \in \mathbb{R}_*^{m+1}. \end{aligned}$$

A seguir, considere a sequência de funções $\{\tilde{f}_j\}_{j=1}^\infty$ dada por

$$\tilde{f}_j(x) = \sum_{k=0}^j a_k \lambda_k^{1/2} \tilde{Y}_k(x), \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}_*^{m+1}.$$

A sequência converge pontualmente para $\tilde{f}$ e, além disso, $\{\tilde{f}_j\}_{j=1}^\infty \subset C^n(\mathbb{R}_*^{m+1})$. Observe que

$$\begin{aligned} |D^\alpha \tilde{f}_q(x) - D^\alpha \tilde{f}_p(x)|^2 &= \left| \sum_{k=p+1}^q a_k \lambda_k^{1/2} D^\alpha \tilde{Y}_k(x) \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=p+1}^q |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=p+1}^q \lambda_k |D^\alpha \tilde{Y}_k(x)|^2 \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=p+1}^q \lambda_k |D^\alpha \tilde{Y}_k(x)|^2 \right), \quad x \in \mathbb{R}_*^{m+1}, \end{aligned}$$

e que a convergência da série

$$\sum_{k=0}^\infty \lambda_k |D^\alpha \tilde{Y}_k(x)|^2 = D^{\alpha, \alpha} \tilde{K}(x, x),$$

é absoluta e uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_*^{m+1}$ (veja Teorema 2.1.4). Uma aplicação do critério de Cauchy para convergência uniforme nos dá então a convergência de $\{D^\alpha \tilde{f}_j\}_{j=1}^\infty$ em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_*^{m+1}$. Além disso, o Lema 2.1.3 pode ser aplicado para deduzir que $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}_*^{m+1})$ e que

$$D^\alpha \tilde{f} = \sum_{k=0}^\infty a_k \lambda_k^{1/2} D^\alpha \tilde{Y}_k,$$

com convergência absoluta e uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_*^{m+1}$. Agora, fica claro que $f \in C^n(S^m)$ e

$$D^\alpha f = \sum_{k=0}^\infty a_k \lambda_k^{1/2} D^\alpha Y_k, \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

Finalmente, a fórmula (2.2.1) implica

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^\infty a_k \lambda_k^{1/2} \langle Y_k, (D^{0, \alpha} K)^x \rangle_K \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^\infty a_k \lambda_k^{1/2} Y_k, (D^{0, \alpha} K)^x \right\rangle_K \\ &= \langle f, (D^{0, \alpha} K)^x \rangle_K, \quad x \in S^m. \end{aligned}$$

A demonstração está completa. ■

Uma fórmula semelhante à anterior foi demonstrada em [33]. Entretanto, a categoria de domínios envolvida naquele trabalho não inclui a esfera S^m .

Para núcleos que satisfazem as hipóteses do teorema anterior podemos fornecer uma demonstração alternativa para a fórmula do Teorema 2.1.2. Este é o conteúdo da observação que encerra esta seção.

Observação 2.2.5. Pelo Teorema 2.2.4 temos que

$$D^\alpha f(x) = \langle f, (D^{0,\alpha} K)^x \rangle_K, \quad f \in \mathcal{H}_K, \quad x \in S^m.$$

Por outro lado, já vimos que $(D^{0,\alpha} K)^x$ pertence a $\mathcal{H}_K$ quando $|\alpha| \leq n$ e $x \in S^m$. Logo,

$$D^{\alpha,\beta} K(x, y) = D^\alpha((D^{0,\beta} K)^y)(x) = \langle (D^{0,\beta} K)^y, (D^{0,\alpha} K)^x \rangle_K.$$

As duas igualdades

$$\langle (D^{0,\beta} K)^y, (D^{0,\alpha} K)^x \rangle_K = \overline{\langle (D^{0,\alpha} K)^x, (D^{0,\beta} K)^y \rangle_K}$$

e

$$\langle (D^{0,\alpha} K)^x, (D^{0,\beta} K)^y \rangle_K = D^\beta((D^{0,\alpha} K)^x)(y) = D^{\beta,\alpha} K(y, x),$$

implicam a fórmula do Teorema 2.1.2.

2.3 Fórmulas de reprodução no caso bizonal

Nesta seção continuamos com as investigações iniciadas nas seções anteriores, adicionando a bizonalidade do núcleo de Mercer como hipótese.

Dizemos que um núcleo $K : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ é **bizonal** quando existe uma função $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$K(x, y) = \varphi(x \cdot y), \quad x, y \in S^m. \quad (2.3.1)$$

Apesar de não demonstrarmos este fato aqui, informamos que K é zonal se, e somente se, ele é invariante por transformações ortogonais de $\mathbb{R}^{m+1}$ ([18, p. 17]), ou seja,

$$K(x, y) = K(A(x), A(y)), \quad x, y \in S^m,$$

qualquer que seja a transformação linear ortogonal $A : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. O termo bizonal vem na verdade desta propriedade.

O primeiro resultado descreve a ortogonalidade entre os elementos básicos K^x do EHR e certas derivadas de K .

Proposição 2.3.1. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K é bizonal, a função φ oriunda da definição de bizonalidade é um elemento de $C^1([-1, 1])$, $x \in S^m$ e $j \in \{1, 2, \dots, m+1\}$ então K^x e $(D^{0,e_j} K)^x$ são ortogonais em $\mathcal{H}_K$.*

Demonstração: Sejam K , φ , x e j como no enunciado da proposição. É imediato que $K \in C^{1,1}(S^m \times S^m)$. Então, o Teorema 2.2.4 implica que

$$\langle K^x, (D^{0,e_j} K)^x \rangle_K = D^{e_j} K^x(x), \quad x \in S^m.$$

Por outro lado, um cálculo direto revela que

$$D^{e_j} K^x(y) = \varphi'(x \cdot y)[(e_j \cdot x) - (e_j \cdot y)(x \cdot y)], \quad x, y \in S^m.$$

Em particular,

$$D^{e_j} K^x(x) = \varphi'(1)[(e_j \cdot x) - (e_j \cdot x)] = 0,$$

e a relação de ortogonalidade $\langle K^x, (D^{0,e_j} K)^x \rangle_K = 0$ segue. ■

Obviamente, a derivada de φ em $x = 1$ mencionada na demonstração acima refere-se à derivada à direita.

Quanto à ortogonalidade dos elementos da família

$$\mathcal{F}_x := \{(D^{0,e_j} K)^x : j = 1, 2, \dots, m+1\},$$

uma comparação é possível quando φ é um elemento de $C^2([-1, 1])$.

Proposição 2.3.2. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K é bizonal, a função φ oriunda da definição de bizonalidade é um elemento de $C^2([-1, 1])$ e $x \in S^m$ então a seguinte fórmula vale:*

$$\langle (D^{0,e_k} K)^x, (D^{0,e_j} K)^x \rangle_K = -\varphi'(1)(e_j \cdot x)(e_k \cdot x), \quad k \neq j. \quad (2.3.2)$$

Demonstração: Seja K , φ e x como descritos no enunciado da proposição. Considere a extensão $\tilde{K}$ de K . Cálculos diretos revelam que

$$\begin{aligned} D^{0,e_k} \tilde{K}(x, y) &= \varphi' \left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right) \left[\frac{(e_k \cdot x) \|x\| \|y\| - (x \cdot y)(e_k \cdot y) \|x\| \|y\|^{-1}}{\|x\|^2 \|y\|^2} \right] \\ &= \varphi' \left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right) \left[\frac{(e_k \cdot x)}{\|x\| \|y\|} - \frac{(x \cdot y)(e_k \cdot y)}{\|x\| \|y\|^3} \right], \quad x, y \neq 0. \end{aligned}$$

Segue que

$$D^{0,e_k} K(x, y) = \varphi'(x \cdot y)[(e_k \cdot x) - (x \cdot y)(e_k \cdot y)], \quad x, y \in S^m.$$

Um processo similar nos leva à seguinte fórmula para $D^{e_j, e_k} \tilde{K}(x, y)$

$$\begin{aligned} & \varphi'' \left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right) \left[\frac{(e_j \cdot y)}{\|x\| \|y\|} - \frac{(x \cdot y)(e_j \cdot x) \|x\|^{-1}}{\|x\|^2 \|y\|^2} \right] \left[\frac{(e_k \cdot x)}{\|x\| \|y\|} - \frac{(x \cdot y)(e_k \cdot y)}{\|x\| \|y\|^3} \right] \\ & + \varphi' \left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right) \left[\frac{-(e_k \cdot x)(e_j \cdot x)}{\|x\|^3 \|y\|} - \frac{(e_k \cdot y)}{\|y\|^3} \left(\frac{(e_j \cdot y)}{\|x\|} - \frac{(x \cdot y)(e_j \cdot x)}{\|x\|^3} \right) \right], \end{aligned}$$

sempre que $k \neq j$ e $x, y \neq 0$. Em particular,

$$\begin{aligned} D^{e_j, e_k} K(x, y) &= \varphi''(x \cdot y)[(e_k \cdot x) - (e_k \cdot y)(x \cdot y)][(e_j \cdot y) - (e_j \cdot x)(x \cdot y)] \\ &+ \varphi'(x \cdot y)[(e_j \cdot x)(e_k \cdot y)(x \cdot y) - (e_k \cdot x)(e_j \cdot x) - (e_k \cdot y)(e_j \cdot y)], \end{aligned}$$

para $k \neq j$ e $x, y \in S^m$. A afirmação da proposição segue destes cálculos e dos teoremas 2.2.1 and 2.2.4. ■

Corolário 2.3.3. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K é bizonal, a função φ oriunda da definição de bizonalidade é um elemento de $C^2([-1, 1])$ tal que $\varphi'(1) \neq 0$ e $x \in S^m$, então as funções $(D^{0, e_k} K)^x$ and $(D^{0, e_j} K)^x$ são ortogonais em $\mathcal{H}_K$ se, e somente se, x é ortogonal a ambos e_k e e_j .*

Para finalizar a seção, passamos para o cálculo de uma estimativa para a norma dos elementos considerados nos resultados anteriores.

Proposição 2.3.4. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K é bizonal, a função φ oriunda da definição de bizonalidade é um elemento de $C^2([-1, 1])$ e $x \in S^m$, então $\|(D^{0, e_j} K)^x\|_K \leq \sqrt{\varphi'(1)}$, $j = 1, 2, \dots, m+1$.*

Demonstração: Nas condições da proposição, o Corolário 2.1.5 implica que $\varphi'(1) \geq 0$. Um processo análogo ao usado na demonstração da Proposição 2.3.2 revela que

$$\begin{aligned} D^{e_j, e_j} K(x, y) &= \varphi''(x \cdot y)[(e_j \cdot x) - (e_j \cdot y)(x \cdot y)][(e_j \cdot y) - (e_j \cdot x)(x \cdot y)] \\ &+ \varphi'(x \cdot y)[1 + (e_j \cdot x)(e_j \cdot y)(x \cdot y) - (e_j \cdot x)^2 - (e_j \cdot y)^2], \quad x, y \in S^m. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|(D^{0, e_j} K)^x\|_K^2 = D^{e_j, e_j} K(x, x) = \varphi'(1)[1 - (e_j \cdot x)^2] \leq \varphi'(1).$$

Assim, a desigualdade da afirmação da proposição segue. ■

2.4 Mergulho do EHR em espaços de funções suaves

O objetivo nesta seção é descrever propriedades do mergulho $\iota : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C^m(S^m)$ garantido pelo Teorema 2.2.4. Logo, a menos de especificação em contrário, as hipóteses daquele teorema devem valer aqui.

Fixados um núcleo positivo definido K e um multi-índice α em $\mathbb{Z}_+^{m+1}$ para o qual $D^{0,\alpha}K$ existe, a função $\eta_\alpha : S^m \rightarrow \mathcal{H}_K$ dada por

$$\eta_\alpha(x) = (D^{0,\alpha}K)^x, \quad x \in S^m,$$

aparece naturalmente nos argumentos.

Um resultado geral provado em [34], que inclui o contexto deste trabalho, justifica que a continuidade de K é equivalente à continuidade de η_0 . Se $|\alpha| > 0$, a seguinte proposição complementa este resultado, pelo menos no caso esférico que estamos tratando.

Proposição 2.4.1. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K pertence a $C^{n,n}(S^m \times S^m)$ e $|\alpha| \leq n$, então η_α é contínua.*

Demonstração: Sejam K e α como na hipótese da proposição. Temos,

$$\begin{aligned} \|\eta_\alpha(x) - \eta_\alpha(y)\|_K^2 &= \langle \eta_\alpha(x) - \eta_\alpha(y), \eta_\alpha(x) - \eta_\alpha(y) \rangle_K \\ &= \langle (D^{0,\alpha}K)^x - (D^{0,\alpha}K)^y, (D^{0,\alpha}K)^x - (D^{0,\alpha}K)^y \rangle_K, \quad x, y \in S^m. \end{aligned}$$

Por outro lado, cálculos simples usando a fórmula do Teorema 2.2.4 implicam que

$$\|\eta_\alpha(x) - \eta_\alpha(y)\|_K^2 = D^{\alpha,\alpha}K(x, x) - D^{\alpha,\alpha}K(x, y) - D^{\alpha,\alpha}K(y, x) + D^{\alpha,\alpha}K(y, y).$$

A continuidade de η_α segue. ■

Observe que o resultado acima pode ser reproduzido em outros contextos, contanto que uma versão do Teorema 2.2.4 esteja disponível. Isso certamente inclui as configurações consideradas em [10, 38], onde o núcleo é definido sobre subconjuntos especiais de $\mathbb{R}^{m+1}$.

Na continuação, considere $C^n(S^m)$ munido da norma dada por

$$\|f\|_{C^n} = \max\{|D^\alpha f(x)| : |\alpha| \leq n, x \in S^m, f \in C^n(S^m)\}.$$

De maneira similar podemos introduzir uma norma $\|\cdot\|_{C^{n,n}}$ em $C^{n,n}(S^m \times S^m)$. Propriedades adicionais do mergulho $\iota : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C^n(S^m)$ são descritas no resultado a seguir. A demonstração foi inspirada nas ideias contidas em [38].

Teorema 2.4.2. *Seja K um núcleo de Mercer como em (1.2.1). Se K pertence a $C^{n,n}(S^m \times S^m)$, então o mergulho $\iota : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C^n(S^m)$ é limitado e compacto. Adicionalmente,*

$$\|f\|_{C^n} \leq \|K\|_{C^{n,n}}^{1/2} \|f\|_K, \quad f \in \mathcal{H}_K. \quad (2.4.1)$$

Demonstração: Se $K \in C^{n,n}(S^m \times S^m)$, então a fórmula (2.2.2) vale e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$|D^\alpha f(x)| = |\langle f, (D^{0,\alpha} K)^x \rangle_K| \leq \|(D^{0,\alpha} K)^x\|_K \|f\|_K.$$

Por outro lado,

$$\|(D^{0,\alpha} K)^x\|_K^2 = \langle (D^{0,\alpha} K)^x, (D^{0,\alpha} K)^x \rangle_K = D^{\alpha,\alpha} K(x, x) \leq \|K\|_{C^{n,n}}.$$

Combinando-se estas desigualdades chegamos à limitação de ι e à desigualdade (2.4.1). A demonstração da compacidade de ι é mais delicada. Fixando uma sequência limitada $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ em $\mathcal{H}_K$, pretendemos mostrar que pelo menos uma subsequência dela é convergente em $C^n(S^m)$. Para cada α satisfazendo $|\alpha| \leq n$, considere a sequência $\{D^\alpha f_j\}_{j=0}^\infty$. Aplicando a Proposição 2.4.1, podemos achar constantes $c_\alpha > 0$ tais que

$$\|\eta_\alpha(x)\|_K \leq c_\alpha, \quad x \in S^m.$$

Segue que

$$|D^\alpha f_j(x)| = |\langle f_j, \eta_\alpha(x) \rangle_K| \leq \|f_j\|_K \|\eta_\alpha(x)\|_K \leq M c_\alpha, \quad x \in S^m, \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde M é uma constante que limita a sequência $\{f_j\}_{j=0}^\infty$. Em particular, $\{D^\alpha f_j\}_{j=0}^\infty$ é uniformemente limitada. A desigualdade

$$|D^\alpha f_j(x) - D^\alpha f_j(y)| = |\langle f_j, \eta_\alpha(x) - \eta_\alpha(y) \rangle_K| \leq \|f_j\|_K \|\eta_\alpha(x) - \eta_\alpha(y)\|_K, \quad x, y \in S^m,$$

e a continuidade de η_α nos permite justificar a equicontinuidade de $\{D^\alpha f_j\}_{j=0}^\infty$. Agora, usando o teorema de Arzelá-Ascoli ([12, p. 131]) para passar a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ é uniformemente convergente para uma função $g \in C(S^m)$. Em seguida, escrevemos

$$S := \{\alpha : 0 < |\alpha| \leq n\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\},$$

ordenando de forma crescente com relação à $|\alpha|$. Como $\{D^{\alpha_1} f_j\}_{j=0}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua, podemos usar o mesmo procedimento, a fim de concluir que $\{D^{\alpha_1} f_j\}_{j=0}^\infty$ é uniformemente convergente. Podemos repetir este processo até exaurir o conjunto S . Terminamos com uma sequência $\{f_j\}_{j=0}^\infty$, uniformemente convergente para g e tal que $\{D^\alpha f_j\}_{j=0}^\infty$ é uniformemente convergente para todo α em S . Agora, o Lema 2.1.3 implica que $g \in C^n(S^m)$ e $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ converge para g em $C^n(S^m)$. ■

2.5 Exemplos

Nesta seção, reconsideramos os exemplos apresentados anteriormente, levando em conta alguns resultados provados neste capítulo.

Exemplo 2.5.1. (*Núcleo polinomial homogêneo*) Considere o núcleo introduzido no exemplo 1.2.6. Já vimos que este é um núcleo de Mercer representado por

$$K(x, y) = \sum_{|\alpha|=d} C(d, \alpha) x^\alpha y^\alpha, \quad x, y \in S^m$$

e que o conjunto $\{C(d, \alpha)^{1/2} x^\alpha\}_{|\alpha|=d}$ é uma base ortonormal para o EHR $\mathcal{H}_K$ associado ao núcleo K . É fácil ver que $K \in C^{\infty, \infty}(S^m \times S^m)$. Como $\mathcal{H}_K$ tem dimensão finita, temos a inclusão $\mathcal{H}_K \subset C^\infty(S^m)$. De fato, todas as funções de $\mathcal{H}_K$ são somas finitas de funções que estão em $C^\infty(S^m)$. Além disso, pela mesma razão, o mergulho $\mathcal{H}_K \subset C^\infty(S^m)$ é compacto ([16, p. 407]).

No restante da seção, consideramos o núcleo Gaussiano introduzido no exemplo 1.2.7, o qual já sabemos ser um núcleo de Mercer. Sua representação em série via harmônicos esféricos é dada por ([23, 24])

$$K_\sigma(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^\sigma \sum_{l=1}^{N(k, m)} Y_{k, l}(x) Y_{k, l}(y), \quad x, y \in S^m,$$

onde

$$\lambda_k^\sigma = e^{-2/\sigma^2} \sigma^{m-1} I_{k+(m-1)/2}(m+1, 2\sigma^{-2}) \Gamma((m+1)/2), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.5.1)$$

O símbolo $I_{k+(m-1)/2}(m+1, \cdot)$, $k = 0, 1, \dots$, representa a função de Bessel modificada de primeira espécie associada ao inteiro $m+1$, Γ é função gama usual e $\{Y_{k, l} : k = 1, 2, \dots, N(k, m)\}$ é uma base do espaço $\mathcal{H}_k^m$ dos harmônicos esféricos de grau k em $m+1$ variáveis como definido em (1.3.1). Em particular, o núcleo tem uma representação em série como descrito em (1.2.1). A sequência $\{\lambda_k^\sigma\}_{k=0}^\infty$ satisfaz a desigualdade

$$\frac{2\lambda_k^\sigma}{\lambda_{k+1}^\sigma} > (2k + m + 1)\sigma^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.5.2)$$

o que garante que ela é eventualmente decrescente. Em particular, convergente. Todas as informações fornecidas até momento podem ser ratificadas em [23, p. 312].

O EHR $\mathcal{H}_{K_\sigma}$ associado ao núcleo Gaussiano K_σ pode ser caracterizado como em (1.2.3) da seguinte maneira

$$\mathcal{H}_{K_\sigma} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k, m)} a_{k, l} (\lambda_k^\sigma)^{1/2} Y_{k, l} : \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k, m)} a_{k, l}^2 < \infty \right\}. \quad (2.5.3)$$

Os resultados das seções anteriores revelam que $\mathcal{H}_{K_\sigma} \subset C^\infty(S^m)$. Entretanto, como ilustração, deduziremos a mesma informação via sequências rapidamente decrescentes.

Diremos que uma sequência $\{a_j\}_{j=0}^\infty$ de números reais não negativos é **rapidamente decrescente** quando $\sup\{n^k a_n : n \in \mathbb{Z}_+\} < \infty$, $k \in \mathbb{Z}_+$. A seguinte implicação está provada em [25, p.36].

Lema 2.5.2. *Seja $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ uma sequência de harmônicos esféricos com $f_k \in \mathcal{H}_k^m$, $k = 0, 1, \dots$. Se a sequência $\{\|f_k\|_2\}_{k=0}^\infty$ é rapidamente decrescente, então a função f dada por*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad x \in S^m,$$

é um elemento de $C^\infty(S^m)$.

Este lema entra nos argumentos da demonstração do próximo resultado.

Teorema 2.5.3. *Se uma função f possui uma representação*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} a_{k,l} (\lambda_k^\sigma)^{1/2} Y_{k,l}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(k,m)} a_{k,l}^2 < \infty,$$

então f é um elemento de $C^\infty(S^m)$.

Demonstração: Seja f como na hipótese do teorema e escreva

$$f_k = \sum_{l=1}^{N(k,m)} a_{k,l} (\lambda_k^\sigma)^{1/2} Y_{k,l}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Mostremos que $\{\|f_k\|_2\}_{k=0}^\infty$ é rapidamente decrescente. Claramente,

$$\|f_k\|_2^2 = \lambda_k^\sigma \left(\sum_{l=1}^{N(k,m)} a_{k,l}^2 \right),$$

e, conseqüentemente,

$$\|f_k\|_2^2 \leq \lambda_k^\sigma \|f\|_2^2, \quad k = 0, 1, \dots$$

Então, é suficiente verificarmos que $\{(\lambda_k^\sigma)^{1/2} : k = 0, 1, \dots\}$ é rapidamente decrescente. Para isso, primeiramente observe que a desigualdade (2.5.2) implica que

$$\frac{\lambda_k^\sigma}{\lambda_{k+1}^\sigma} > k + 1, \tag{2.5.4}$$

para $\sigma \geq 1$. Como $\{\lambda_k^\sigma\}_{k=0}^\infty$ converge, temos

$$\sup\{k\lambda_k^\sigma : k = 0, 1, \dots\} < \infty.$$

Em seguida aplicamos um argumento de indução. Assuma que

$$\sup\{k^n \lambda_k^\sigma : k = 0, 1, \dots\} < \infty, \quad n = 0, 1, \dots, p-1, \quad (2.5.5)$$

para algum $p \geq 1$. Usando (2.5.4), deduzimos que

$$(k+1)^p \lambda_{k+1}^\sigma = (k+1)^{p-1} (k+1) \lambda_{k+1}^\sigma \leq (k+1)^{p-1} \lambda_k^\sigma = \sum_{n=0}^{p-1} \binom{p-1}{n} k^{p-1-n} \lambda_k^\sigma, \quad k \geq 0.$$

Assim, (2.5.5) implica que

$$\sup\{k^p \lambda_k^\sigma : k = 0, 1, \dots\} < \infty.$$

No caso em que $\sigma < 1$, observe que a fórmula 2.5.2 implica a desigualdade

$$\frac{\lambda_k^\sigma}{\lambda_{k+1}^\sigma} > \frac{k+1}{N_0}, \quad k \geq N_0.$$

para algum $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^2 > \frac{1}{N_0}$. A mesma argumentação do caso em que $\sigma \geq 1$, é válida para demonstrarmos que

$$\sup\{k^p \lambda_k^\sigma : k = 0, 1, \dots\} < \infty.$$

Desta forma, provamos que $\{\lambda_k^\sigma\}_{k=0}^\infty$ é rapidamente decrescente. Portanto, a mesma conclusão é válida para a sequência $\{(\lambda_k^\sigma)^{1/2}\}_{k=0}^\infty$. ■

Agora, considere a expansão

$$K_{\sigma,r}(x, y) := \exp(r\sigma^{-2}(x \cdot y)) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(m+1, r\sigma^{-2}) \sum_{l=1}^{N(k,m)} Y_{k,l}(x) \overline{Y_{k,l}(y)}, \quad x, y \in S^m,$$

que é uma consequência de resultados provados em [26, p. 124] e da fórmula de adição para polinômios de Legendre ([25, p.27]). Introduzindo a sequência $\{\lambda_k^\sigma\}_{k=0}^\infty$ como definida em (2.5.1) temos

$$K_{\sigma,r}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} (\lambda_k^\sigma)^{1/2} I_k(m+1, r\sigma^{-2}) \overline{Y_{k,l}(y)} (\lambda_k^\sigma)^{1/2} Y_{k,l}(x), \quad x, y \in S^m.$$

Desta forma, se $y \in S^m$, a verificação de que $K_{\sigma,r}^y \in \mathcal{H}_{K_\sigma}$ depende da convergência da série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} |a_{k,l}|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k^\sigma)^{-1} I_k(m+1, r\sigma^{-2})^2 \sum_{l=1}^{N(k,m)} |Y_{k,l}(c)|^2.$$

Em outras palavras, devemos provar o seguinte resultado.

Proposição 2.5.4. *Se $y \in S^m$, então $K_{\sigma,r}^y$ é um elemento de $\mathcal{H}_{K_\sigma}$ se, e somente se,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^\sigma)^{-1} I_n(m+1, r\sigma^{-2})^2 N(k, m) < \infty.$$

Apesar da simplicidade deste critério, a sua aplicabilidade parece ser duvidosa devido à falta de uma fórmula fechada para a função $I_k(m+1, \cdot)$. De qualquer forma, podemos avançar um pouco no caso em que $m = 1$. Neste caso, os autovalores do operador integral geram a fórmula

$$\lambda_n^\sigma = e^{-2/\sigma^2} I_n(2, 2\sigma^{-2}), \quad n = 0, 1, \dots$$

A série da proposição anterior torna-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{2/\sigma^2} (1+2k) (I_k(2, 2\sigma^{-2}))^{-1} (I_k(r\sigma^{-2}))^2. \quad (2.5.6)$$

Agora, se $r \in [0, 2]$, então

$$(r2^{-1}\sigma^{-2})^{k+2l} \leq (\sigma^{-2})^{k+2l}, \quad l = 0, 1, \dots,$$

e, conseqüentemente,

$$I_k(2, r\sigma^{-2}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(k+j)!} \left(\frac{r}{2\sigma^2}\right)^{n+2j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(n+j)!} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n+2j} = I_n(2, 2\sigma^{-2}).$$

Desta forma, a série (2.5.6) pode ser limitada pela série

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{2/\sigma^2} (1+2k) I_k(2, r\sigma^{-2}).$$

Finalmente, usando a desigualdade

$$I_k(2, x) < \frac{(x/2)^k}{\Gamma(k+1)} e^{x^2/4},$$

vemos que (2.5.6) é no máximo

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{2/\sigma^2} (1+2n) \frac{(r/2\sigma^2)^n}{n!} e^{r^2/4\sigma^4}.$$

Esta série é claramente convergente se, e somente se, $r \in [0, 2\sigma^2]$. Por isso, $K_{\sigma,r}^y$ é um elemento de $\mathcal{H}_{K_\sigma}$ sempre que $r \in [0, \min\{2, 2\sigma^2\})$.

Séries de Fourier-Laplace com pesos em EHR

No capítulo anterior (veja também [13]), assumindo certas hipóteses de diferenciabilidade sobre um núcleo de Mercer K deduzimos propriedades de diferenciabilidade para funções de $\mathcal{H}_K$. Dentre as muitas noções de diferenciabilidade para funções definidas na esfera S^m , a diferenciabilidade usual foi a escolhida. Dentre outras coisas, provamos que as funções do EHR $\mathcal{H}_K$ herdaram a mesma ordem de diferenciabilidade do núcleo gerador K . Lembramos novamente que outras referências discutindo a diferenciabilidade usual em EHR, mas não necessariamente no contexto considerado no Capítulo 2, são [10, 33, 38].

Neste capítulo o objetivo é a obtenção de resultados similares aos anteriores, considerando agora outra noção de diferenciabilidade. Escolhemos uma nomenclatura que inclui dois conceitos importantes de diferenciabilidade: a derivada fracionária na esfera e a derivada de Laplace-Beltrami. O primeiro conceito é discutido em [35] e também em [3], onde informações a respeito da origem e motivação do conceito estão incluídos. Uma boa fonte para o segundo é o artigo survey [21] recentemente publicado, que inclui referências atuais onde o conceito entra de maneira decisiva (veja [6], por exemplo). O conceito aqui empregado juntamente com os resultados citados anteriormente podem ser encontrados em [14].

Na Seção 1, introduzimos algumas notações, o conceito de derivada a ser utilizado e os espaços de funções diferenciáveis correspondentes. Na Seção 2, assumindo que o núcleo tem derivada até certa ordem com respeito à uma das variáveis, mostramos que

todas as funções do $\mathcal{H}_K$ têm derivadas da mesma ordem. Deduzimos fórmulas de reprodução para as derivadas de funções do EHR e também fórmulas para certas derivadas do núcleo K , quando elas existem. Na Seção 3, descrevemos algumas propriedades do mergulho de $\mathcal{H}_K$ no espaço das funções diferenciáveis no sentido considerado na Seção 1. Para finalizar, na Seção 4, explicamos rapidamente porque o conceito de diferenciabilidade introduzido realmente engloba ambos, a derivada fracionária e a derivada de Laplace-Beltrami.

3.1 A α -transformação

Iniciaremos a seção fixando algumas notações e definindo o conceito de “diferenciabilidade” que pretendemos usar. Este pode ser considerado no contexto $L^p(S^m)$.

Sejam $\alpha := \{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ uma sequência de números reais não negativos e f um elemento de $L^p(S^m)$. Dizemos que uma função g em $L^2(S^m)$ é a α -transformação de f se a série de Fourier-Laplace de g tem a forma

$$g \sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathcal{Y}_k(f).$$

Em particular, a definição exige que

$$\mathcal{Y}_k(g) = \alpha_k \mathcal{Y}_k(f), \quad k = 0, 1, \dots$$

Ainda, a α -transformação é uma aplicação que leva uma função em sua série de Fourier-Laplace modificada pela sequência de pesos $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$. Escrevemos $D_\alpha f$ para indicar a α -transformação de f ($D_\alpha f := g$).

O espaço das funções α -suaves é

$$W_\alpha^p := \{f \in L^p(S^m) : D_\alpha f \in L^p(S^m)\}$$

o qual munimos com a norma

$$\|f\|_{W_\alpha^p} = \|f\|_p + \|D_\alpha f\|_p.$$

Exemplo 3.1.1. Seja $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ uma sequência de números reais não negativos. Se k é um número inteiro não negativo e $l \in \{1, 2, \dots, N(k, m)\}$, então o harmônico esférico $Y_{k,l}$ é um elemento de W_α^p . Esta é uma consequência imediata da série de Fourier-Laplace de $Y_{k,l}$ (que coincide com a própria função, neste caso) e da definição da α -transformação. Logo, $D_\alpha Y_{k,l} = \alpha_k Y_{k,l}$ e

$$\|Y_{k,l}\|_{W_\alpha^2} = 1 + \alpha_k.$$

O primeiro resultado desta seção é técnico e entra de maneira decisiva em alguns argumentos à frente. Ele também pode ser usado para ratificar que $(W_\alpha^p, \|\cdot\|_{W_\alpha^p})$ é um espaço de Banach. O conceito de operador fechado que empregamos é discutido em [12, p. 155].

Teorema 3.1.2. *Se α é uma sequência de números reais não negativos, então o operador $D_\alpha : W_\alpha^p \subset L^p(S^m) \rightarrow L^p(S^m)$ é fechado.*

Demonstração: Escreva $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$. Seja $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência em W_α^p tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|D_\alpha f_n - g\|_p = 0,$$

para $f, g \in L^p(S^m)$. Pela Proposição 1.3.3-(ii) obtemos a desigualdade

$$|\mathcal{Y}_k(f_n)(x) - \mathcal{Y}_k(f)(x)| \leq N(k, m) \|f_n - f\|_p, \quad x \in S^m, \quad k = 0, 1, \dots,$$

a qual implica a fórmula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_k(f_n)(x) = \mathcal{Y}_k(f)(x), \quad x \in S^m, \quad k = 0, 1, \dots$$

Analogamente,

$$|\mathcal{Y}_k(D_\alpha f_n)(x) - \mathcal{Y}_k(g)(x)| \leq N(k, m) \|D_\alpha f_n - g\|_p, \quad x \in S^m, \quad k = 0, 1, \dots,$$

e, por conseguinte,

$$|\alpha_k \mathcal{Y}_k(f_n)(x) - \mathcal{Y}_k(g)(x)| \leq N(k, m) \|D_\alpha f_n - g\|_p, \quad x \in S^m, \quad k = 0, 1, \dots$$

Segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k \mathcal{Y}_k(f_n) = \alpha_k \mathcal{Y}_k(f) = \mathcal{Y}_k(g), \quad k = 0, 1, \dots$$

Portanto, a série de Fourier-Laplace de g é

$$g \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Y}_k(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathcal{Y}_k(f).$$

Assim, $D_\alpha f = g \in L^p(S^m)$ e $f \in W_\alpha^p$. ■

Para finalizar a seção mencionamos uma fórmula para a α -transformação da conjugada de uma função, a qual pode ser deduzida via a Proposição 1.3.3-(iii): se f é um elemento de W_α^p , então $\bar{f}$ também é, e vale a igualdade

$$D_\alpha \bar{f} = \overline{D_\alpha f}.$$

Por último, explicamos como interpretar a ação da α -transformação em núcleos. Se α e β são sequências de números reais não negativos, a (α, β) -**transformação** de K é o núcleo

$$D_{\alpha, \beta} K := D_{\beta}^y D_{\alpha}^x K,$$

onde $D_{\alpha}^x K$ (respect., $D_{\alpha}^y K$) significa a ação de D_{α} em K , mantendo-se y (respect. x) fixado. O espaço dos núcleos (α, β) -suaves são definidos da seguinte maneira:

$$W_{\alpha, \beta}^p = \{K \in L^p(S^m \times S^m) : D_{\alpha, \beta} K \in L^p(S^m \times S^m)\}.$$

3.2 A α -transformação em $\mathcal{H}_K$

Como vimos anteriormente, núcleos de Mercer são núcleos em $L^2(S^m \times S^m)$ possuindo uma representação como em (1.2.1). O conceito de diferenciabilidade que pretendemos usar aqui demanda que a expansão do núcleo seja aquela via harmônicos esféricos. Assim sendo, vamos assumir a representação

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k, m)} \lambda_{k, l} Y_{k, l}(x) \overline{Y_{k, l}(y)}, \quad x, y \in S^m, \quad (3.2.1)$$

onde $\lambda_{k, l} > 0$, $l = 1, 2, \dots, N(k, m)$, $k = 0, 1, \dots$. Como informado anteriormente (Teorema 1.3.2) o conjunto $\{Y_{k, l} : l = 1, 2, \dots, N(k, m); k = 0, 1, \dots\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^m)$. Retornando ao Teorema 1.2.3, se $\kappa_0 : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ é um elemento de $L^{p/2}(S^m)$, então o EHR associado a K pode ser caracterizado por

$$\mathcal{H}_K = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k, m)} a_{k, l} \lambda_{k, l}^{1/2} Y_{k, l} : \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k, m)} |a_{k, l}|^2 < \infty \right\}. \quad (3.2.2)$$

Este é o contexto que assumiremos neste capítulo.

Com as notações acima, mostraremos que as autofunções $Y_{k, l}$ do operador integral (1.2.2) pertencem a W_{α}^p quando o núcleo de Mercer K é um elemento de $W_{\alpha, 0}^p$, $p \geq 2$. Em seguida, vamos estender esta conclusão a todas as funções do EHR associado a K . Finalmente, vamos deduzir fórmulas de reprodução para as α -transformações de funções em $\mathcal{H}_K$.

Começamos com um lema técnico que fornece uma descrição alternativa para a projeção dos elementos básicos $Y_{k, l}$.

Lema 3.2.1. *Se K é um núcleo de Mercer em $L^2(S^m \times S^m)$ e k é um inteiro não negativo, então*

$$\mathcal{Y}_k(Y_{k, l})(x) = \frac{1}{\lambda_{k, l}} \int_{S^m} \mathcal{Y}_k(K^w)(x) Y_{k, l}(w) d\sigma_m(w), \quad x \in S^m, \quad l = 1, 2, \dots, N(k, m).$$

Demonstração: Fixado k , seja $K \in L^2(S^m \times S^m)$ um núcleo de Mercer como em (3.2.1). Se $l \in \{1, 2, \dots, N(k, m)\}$, então a definição da projeção $\mathcal{Y}_k$ dada em (1.3) e o fato de $Y_{k,l}$ ser uma autofunção do operador integral (1.2.2) implicam que

$$\mathcal{Y}_k(Y_{k,l}) = \sum_{i=1}^{N(k,m)} \left[\int_{S^m} \left(\frac{1}{\lambda_{k,l}} \int_{S^m} K(y, w) Y_{k,l}(w) d\sigma_m(w) \right) \overline{Y_{k,i}(y)} d\sigma_m(y) \right] Y_{k,i}.$$

Como $\sigma_m(S^m) < \infty$, o teorema de Fubini pode ser aplicado para deduzir que

$$\mathcal{Y}_k(Y_{k,l}) = \sum_{i=1}^{N(k,m)} \left[\int_{S^m} \left(\frac{1}{\lambda_{k,l}} \int_{S^m} K(y, w) \overline{Y_{k,i}(y)} d\sigma_m(y) \right) Y_{k,l}(w) d\sigma_m(w) \right] Y_{k,i},$$

ou seja,

$$\mathcal{Y}_k(Y_{k,l}) = \sum_{i=1}^{N(k,m)} \left[\int_{S^m} \left(\frac{1}{\lambda_{k,l}} \int_{S^m} K^w(y) \overline{Y_{k,i}(y)} d\sigma_m(y) \right) Y_{k,l}(w) d\sigma_m(w) \right] Y_{k,i}.$$

A fórmula anterior é precisamente

$$\mathcal{Y}_k(Y_{k,l})(x) = \frac{1}{\lambda_{k,l}} \sum_{i=1}^{N(k,m)} \left(\int_{S^m} \langle K^w, Y_{k,i} \rangle_2 Y_{k,l}(w) d\sigma_m(w) \right) Y_{k,i}(x), \quad x \in S^m,$$

e a troca entre integral e série nos permite concluir a fórmula do enunciado do lema. ■

Teorema 3.2.2. *Sejam K um núcleo de Mercer e α uma sequência de números reais não negativos. Se K é um elemento de $W_{\alpha,0}^p$, então cada $Y_{k,l}$ pertence a W_{α}^p . Adicionalmente, a igualdade*

$$D_{\alpha} Y_{k,l} = \frac{1}{\lambda_{k,l}} \int_{S^m} D_{\alpha,0} K(\cdot, y) Y_{k,l}(y) d\sigma_m(y), \quad l = 1, 2, \dots, N(k, m), \quad k = 0, 1, \dots,$$

vale em $L^p(S^m)$.

Demonstração: Escreva $\alpha := \{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $q := p/(p-1)$. Assuma que $K \in W_{\alpha,0}^p$ e, para cada l e j , considere a função $g_{l,j}$ dada por

$$g_{l,j}(x) = \frac{1}{\lambda_{l,j}} \int_{S^m} D_{\alpha} K^y(x) Y_{l,j}(y) d\sigma_m(y), \quad x \in S^m.$$

A p -norma da função acima pode ser estimada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{S^m} |g_{l,j}(x)|^p d\sigma_m(x) &= \int_{S^m} \left| \frac{1}{\lambda_{l,j}} \int_{S^m} D_{\alpha,0} K(x, y) Y_{l,j}(y) d\sigma_m(y) \right|^p d\sigma_m(x) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{l,j}^p} \int_{S^m} \left(\int_{S^m} |D_{\alpha,0} K(x, y) Y_{l,j}(y)| d\sigma_m(y) \right)^p d\sigma_m(x). \end{aligned}$$

Como $Y_{l,j} \in L^p(S^m)$ e $Y_{l,j} \in L^q(S^m)$, podemos aplicar a desigualdade de Hölder para escrever

$$\int_{S^m} |D_{\alpha,0}K(x,y)Y_{l,j}(y)|d\sigma_m(y) \leq \|D_{\alpha,0}K(x,\cdot)\|_p \|Y_{l,j}\|_q.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \int_{S^m} |g_{l,j}(x)|^p d\sigma_m(x) &\leq \left(\frac{\|Y_{l,j}\|_q}{\lambda_{l,j}} \right)^p \int_{S^m} \|D_{\alpha,0}K(x,\cdot)\|_p^p d\sigma_m(x) \\ &= \left(\frac{\|Y_{l,j}\|_q}{\lambda_{l,j}} \right)^p \|D_{\alpha,0}K\|_p^p, \end{aligned}$$

e, consequentemente, $g_{l,j} \in L^p(S^m)$. A fim de completarmos a prova devemos analisar a série de Fourier-Laplace de $g_{l,j}$. Como a série de Fourier-Laplace de $D_{\alpha,0}K(x,\cdot)$ converge em $L^2(S^m)$ (observação feita imediatamente após a fórmula (1.3)) e o produto interno em $L^2(S^m)$ preserva convergência, temos

$$\frac{1}{\lambda_{l,j}} \int_{S^m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathcal{Y}_k(K^y) \right) Y_{l,j}(y) d\sigma_m(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{\lambda_{l,j}} \left(\int_{S^m} \mathcal{Y}_k(K^y) Y_{l,j}(y) d\sigma_m(y) \right).$$

A fórmula provada no lema anterior justifica o próximo passo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{\lambda_{l,j}} \left(\int_{S^m} \mathcal{Y}_k(K^y) Y_{l,j}(y) d\sigma_m(y) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathcal{Y}_k(Y_{l,j}).$$

Desta forma, concluímos que

$$g_{l,j} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathcal{Y}_k(Y_{l,j}),$$

e, consequentemente, $D_{\alpha}Y_{l,j} = g_{l,j} \in L^p(S^m)$. Isto é suficiente para mostrar que $Y_{l,j} \in W_{\alpha}^p$. A última afirmação do teorema segue do fato que $g_{l,j} \in L^p(S^m)$. ■

Observação 3.2.3. No caso $p = 2$, a fórmula do teorema anterior implica na igualdade

$$D_{\alpha}Y_{k,l}(x) = \frac{1}{\lambda_{k,l}} \left\langle Y_{k,l}, \overline{D_{\alpha,0}K(x,\cdot)} \right\rangle_2, \quad x \in S^m \quad \text{q.s..}$$

Infelizmente, a fórmula do teorema anterior nos dá tão somente uma representação integral para a α -transformação dos elementos básicos $Y_{k,l}$ enquanto que o que realmente almejamos são fórmulas de reprodução para estes elementos. O próximo resultado nos dá uma clara descrição de como devemos calcular a $(\alpha, 0)$ -transformação de um núcleo de Mercer. Esta representação é essencial para a demonstração de fórmulas de reprodução para a α -transformação dos elementos básicos $Y_{k,l}$. A demonstração requer uma hipótese adicional envolvendo a função κ_{α} dada por

$$\kappa_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} |D_{\alpha}Y_{k,l}(x)|^2, \quad x \in S^m.$$

Tal função engloba a função κ_0 previamente introduzida quando a sequência α é a nula.

A hipótese mencionada acima será determinada por uma restrição na sequência α . Uma sequência $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ de números reais não negativos é dita ser **admissível** se

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 k^{m-1} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} < \infty.$$

Observação 3.2.4. A desigualdade

$$|f_k(x)|^2 \leq N(k, m) \|f_k\|_2^2, \quad f \in \mathcal{H}_k^m$$

pode ser ratificada em [25, p.28]. Como a dimensão $N(k, m)$ do espaço dos harmônicos esféricos de grau k satisfaz ([25, p.17])

$$N(k, m) \leq C k^{m-1},$$

para alguma constante $C > 0$, segue a limitação

$$|f_k(x)|^2 \leq C k^{m-1} \|f_k\|_2^2, \quad f \in \mathcal{H}_k^m.$$

Ainda, como $D_\alpha Y_{k,l} = \alpha_k Y_{k,l}$ (exemplo 3.1.1), temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} |D_\alpha Y_{k,l}(x)|^2 \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 k^{m-1} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l}. \quad (3.2.3)$$

Portanto, sendo α admissível, temos

$$\kappa_\alpha(x) \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 k^{m-1} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} < \infty, \quad x \in S^m.$$

Em particular, $\kappa_\alpha \in L^p(S^m)$.

Teorema 3.2.5. *Seja K um núcleo de Mercer em $W_{\alpha,0}^p$, onde α é uma sequência admissível. Se κ_0 pertence a $L^{p/2}(S^m)$, então cada função $\overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)}$ pertence a $\mathcal{H}_K$.*

Demonstração: Fixe $x \in S^m$ e assumamos que κ_0 é um elemento de $L^{p/2}(S^m)$. A demonstração será feita mostrando que $\overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)}$ se encaixa na descrição de $\mathcal{H}_K$ dada em (3.2.2), em consequência da proposição 1.2.3. Escreva $\alpha := \{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ e fixe um inteiro não negativo n . Como $D_{\alpha,0}K(x, \cdot) = D_\alpha^x K(x, \cdot)$ e K é hermitiano, temos a igualdade

$$\mathcal{Y}_n(D_{\alpha,0}K(x, \cdot)) = \alpha_n \mathcal{Y}_n(K(x, \cdot)) = \alpha_n \mathcal{Y}_n(\overline{K(\cdot, x)}) = \alpha_n \overline{\mathcal{Y}_n(K(\cdot, x))}.$$

Observando que

$$\mathcal{Y}_n(K(\cdot, x)) = \sum_{l=1}^{N(n,m)} \lambda_{n,l} \overline{Y_{n,l}(x)} Y_{n,l},$$

a fórmula anterior se torna

$$\mathcal{Y}_n(D_{\alpha,0}K(x, \cdot)) = \alpha_n \sum_{l=1}^{N(n,m)} \lambda_{n,l} Y_{n,l}(x) \overline{Y_{n,l}}.$$

Por outro lado, é fácil ver que

$$\mathcal{Y}_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} \overline{D_{\alpha} Y_{k,l}(x)} Y_{k,l} \right) = \sum_{l=1}^{N(n,m)} \lambda_{n,l} \overline{D_{\alpha} Y_{n,l}(x)} Y_{n,l}.$$

A igualdade $D_{\alpha} Y_{n,l} = \alpha_n Y_{n,l}$ (exemplo 3.1.1), $l = 1, 2, \dots, N(n, m)$, nos permite escrever

$$\mathcal{Y}_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} \overline{D_{\alpha} Y_{k,l}(x)} Y_{k,l} \right) = \alpha_n \sum_{l=1}^{N(n,m)} \lambda_{n,l} \overline{Y_{n,l}(x)} Y_{n,l},$$

e isto implica que

$$\mathcal{Y}_n(\overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)}) = \overline{\mathcal{Y}_n(D_{\alpha,0}K(x, \cdot))} = \mathcal{Y}_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} \overline{D_{\alpha} Y_{k,l}(x)} Y_{k,l} \right).$$

Logo,

$$\overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} \overline{D_{\alpha} Y_{k,l}(x)} Y_{k,l}. \quad (3.2.4)$$

Finalmente, como a sequência α é admissível, a desigualdade (3.2.3) nos dá

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} |D_{\alpha} Y_{k,l}(x)|^2 \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 k^{m-1} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} < \infty,$$

e a demonstração fica completa. ■

O próximo resultado descreve uma forma alternativa para a igualdade do Teorema 3.2.2.

Teorema 3.2.6. *Sejam K um núcleo de Mercer e α uma sequência admissível. Se κ_0 pertence a $L^{p/2}(S^m)$, então*

$$D_{\alpha} Y_{k,l}(x) = \langle Y_{k,l}, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K, \quad l = 1, 2, \dots, N(k, m), \quad k = 0, 1, \dots, \quad x \in S^m.$$

Demonstração: Esta demonstração requer a fórmula (3.2.4) deduzida no Teorema 3.2.5. Usando-a juntamente com a ortonormalidade da base

$$\{\lambda_{k,l}^{1/2} Y_{k,l} : l = 1, 2, \dots, N(k, m); k = 0, 1, \dots\}$$

de $\mathcal{H}_K$ obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Y_{\mu,j}, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K &= \left\langle Y_{\mu,j}, \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \lambda_{k,l} \overline{D_{\alpha}Y_{k,l}(x)} Y_{k,l} \right\rangle_K \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} \frac{\lambda_{k,l}^{1/2}}{\lambda_{\mu,j}^{1/2}} D_{\alpha}Y_{k,l}(x) \langle \lambda_{\mu,j}^{1/2} Y_{\mu,j}, \lambda_{k,l}^{1/2} Y_{k,l} \rangle_K \\
&= D_{\alpha}Y_{\mu,j}(x), \quad j = 1, 2, \dots, N(k, m), \quad \mu = 0, 1, \dots, \quad x \in S^m.
\end{aligned}$$

Isso completa a demonstração. ■

No próximo teorema estendemos as conclusões obtidas até o momento para todas as funções de $\mathcal{H}_K$.

Teorema 3.2.7. *Seja K um núcleo de Mercer em W_{α}^p , onde α é uma sequência admissível. Se κ_0 pertence a $L^{p/2}(S^m)$, então podemos mergulhar $\mathcal{H}_K$ em W_{α}^p . Adicionalmente,*

$$D_{\alpha}f(x) = \langle f, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K, \quad f \in \mathcal{H}_K, \quad x \in S^m. \quad (3.2.5)$$

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{H}_K$ e escreva esta função na forma

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} a_{k,l} \lambda_{k,l}^{1/2} Y_{k,l},$$

onde $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} |a_{k,l}|^2 < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ defina a soma truncada

$$f_n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^{N(k,m)} a_{k,l} \lambda_{k,l}^{1/2} Y_{k,l}.$$

Sabemos que cada f_n pertence a W_{α}^p . Em seguida, para $\mu > j$, vamos estimar

$$\|D_{\alpha}f_{\mu} - D_{\alpha}f_j\|_p^p = \int_{S^m} \left| \sum_{k=j+1}^{\mu} \sum_{l=1}^{N(k,m)} a_{k,l} \lambda_{k,l}^{1/2} D_{\alpha}Y_{k,l} \right|^p d\sigma_m(x).$$

Uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz implica

$$\|D_{\alpha}f_{\mu} - D_{\alpha}f_j\|_p^p \leq \left(\sum_{k=j+1}^{\mu} \sum_{l=1}^{N(k,m)} |a_{k,l}|^2 \right)^{p/2} \int_{S^m} \kappa_{\alpha}(x)^{p/2} d\sigma_m(x),$$

e, conseqüentemente, $\{D_{\alpha}f_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(S^m)$. Como D_{α} é fechado em W_{α}^p , segue que $f \in W_{\alpha}^p$ e

$$D_{\alpha}f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} a_{k,l} \lambda_{k,l}^{1/2} D_{\alpha}Y_{k,l}.$$

Adicionalmente, introduzindo a fórmula dada no Teorema 3.2.6, concluímos que

$$\begin{aligned} D_\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} a_{k,l} \lambda_{k,l}^{1/2} D_\alpha Y_{k,l}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N(k,m)} a_{k,l} \lambda_{k,l}^{1/2} \langle Y_{k,l}, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K, \quad x \in S^m, \end{aligned}$$

ou seja,

$$D_\alpha f(x) = \langle f, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K, \quad x \in S^m.$$

A demonstração está completa. ■

3.3 O mergulho $\mathcal{H}_K \hookrightarrow W_\alpha^p$: especificidades

Nesta seção exploramos a limitação e a compacidade do mergulho $\mathcal{H}_K \hookrightarrow W_\alpha^p$ definido na seção anterior. Isto será feito sob as mesmas condições do Teorema 3.2.7.

Teorema 3.3.1. *Seja K um núcleo de Mercer em W_α^p , onde α é uma sequência admissível. Se κ_0 pertence a $L^{p/2}(S^m)$, então*

$$\|f\|_{W_\alpha^p} \leq \left(\|\kappa_0\|_{p/2}^{1/2} + \|\kappa_\alpha\|_{p/2}^{1/2} \right) \|f\|_K, \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

Em particular, o mergulho $\iota : \mathcal{H}_K \hookrightarrow W_\alpha^p$ é limitado.

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{H}_K$, usando a propriedade de reprodução juntamente com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\|f\|_p^p = \int_{S^m} |\langle f, K^x \rangle_K|^p d\sigma_m(x) \leq \|f\|_K^p \int_{S^m} \|K^x\|_K^p d\sigma_m(x).$$

A propriedade de reprodução nos permite estimar a integral acima da seguinte forma

$$\|K^x\|_K^p = (\|K^x\|_K^2)^{\frac{p}{2}} = (\langle K^x, K^x \rangle_K)^{p/2} = K(x, x)^{p/2} = \kappa_0(x)^{p/2}, \quad x \in S^m.$$

Isto, por sua vez, implica

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_K^p \int_{S^m} \kappa_0(x)^{p/2} d\sigma_m(x) = \|\kappa_0\|_{p/2}^{p/2} \|f\|_K^p. \quad (3.3.1)$$

Olhando para a α -transformação de f , se K pertence a $W_{\alpha,0}^p$, então o Teorema 3.2.7 implica

$$\|D_\alpha f\|_p^p = \int_{S^m} |\langle f, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K|^p d\sigma_m(x) \leq \|f\|_K^p \int_{S^m} \|\overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)}\|_K^p d\sigma_m(x),$$

enquanto que a propriedade de reprodução (3.2.5) nos dá

$$\|\overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)}\|_K^p = \left(\langle \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)}, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K \right)^{p/2} = \kappa_\alpha(x)^{p/2}, \quad x \in S^m.$$

Portanto,

$$\|D_\alpha f\|_p^p \leq \|f\|_K^p \int_{S^m} \kappa_\alpha(x)^{p/2} d\sigma_m(x) = \|\kappa_\alpha\|_{p/2}^{p/2} \|f\|_K^p. \quad (3.3.2)$$

A partir disso, fica claro que

$$\|f\|_{W_\alpha^p} = \|f\|_p + \|D_\alpha f\|_p \leq \left(\|\kappa_0\|_{p/2}^{1/2} + \|\kappa_\alpha\|_{p/2}^{1/2} \right) \|f\|_K,$$

e o teorema segue. ■

Teorema 3.3.2. *Seja K um núcleo de Mercer em W_α^p , onde α é uma sequência admissível. Se κ_0 pertence a $L^{p/2}(S^m)$, então o mergulho $\iota : \mathcal{H}_K \hookrightarrow W_\alpha^p$ é compacto.*

Demonstração: Seja $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência $\mathcal{H}_K$ para a qual $\|f_n\|_K \leq M$, $n = 0, 1, \dots$, e algum $M > 0$. Aplicando o teorema de Banach-Alaoglu ([15, p. 179]) podemos assumir que tal sequência é fracamente convergente para uma função $f \in \mathcal{H}_K$. Pretendemos mostrar que $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge para f em W_α^p . Como feito na demonstração do resultado anterior, escrevemos

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_{S^m} |\langle f_n - f, K^x \rangle_K|^p d\sigma_m(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.3.3)$$

e

$$\|D_\alpha f_n - D_\alpha f\|_p^p = \int_{S^m} \left| \langle f_n - f, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K \right|^p d\sigma_m(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.3.4)$$

Para $x \in S^m$, definimos $g_n(x) := |\langle f_n - f, K^x \rangle_K|^p$ e $h_n(x) := |\langle f_n - f, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K|^p$, $n = 0, 1, \dots$. Tanto $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ quanto $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ são sequências em $L^1(S^m)$, pontualmente convergentes para a função nula. Como $\|K^x\|_K^p = (\kappa_0(x))^{p/2}$, $x \in S^m$, a primeira sequência pode ser controlada da seguinte maneira

$$|g_n(x)| \leq \|f_n - f\|_K^p \|K^x\|_K^p \leq (M + \|f\|_K)^p \kappa_0(x)^{p/2}, \quad x \in S^m, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Analogamente, a igualdade $\|\overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)}\|_K^p = \kappa_\alpha(x)^{p/2}$, $x \in S^m$, implica que

$$|h_n(x)| \leq \|f_n - f\|_K^p \|\overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)}\|_K^p \leq (M + \|f\|_K)^p \kappa_\alpha(x)^{p/2}, \quad x \in S^m, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A convergência fraca da sequência $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ para f juntamente com o teorema da convergência dominada garantem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S^m} |\langle f_n - f, K^x \rangle_K|^p d\sigma_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S^m} |\langle f_n - f, \overline{D_{\alpha,0}K(x, \cdot)} \rangle_K|^p d\sigma_m(x) = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{W_\alpha^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p + \lim_{n \rightarrow \infty} \|D_\alpha f_n - D_\alpha f\|_p = 0$$

e a compacidade do mergulho segue de uma caracterização padrão de operadores compactos em espaços de Hilbert ([16, p. 407]). ■

3.4 Derivada Fracionária e de Laplace-Beltrami

O objetivo desta seção é explicar rapidamente como o contexto das seções anteriores engloba duas noções importantes de derivação em S^m .

Começamos com a derivada fracionária. Se $r > 0$, uma função g em $L^2(S^m)$ é chamada **derivada fracionária de ordem r** de f se a série de Fourier-Laplace de g é da forma

$$g \sim \sum_{k=1}^{\infty} (k(k+m-1))^r \mathcal{Y}_k(f). \quad (3.4.1)$$

Então a derivada fracionária de ordem r de uma função f corresponde a $D_\beta f$, onde β é a sequência

$$\beta_k = k^r (k+m-1)^r, \quad k = 0, 1, \dots$$

Por outro lado, se r é um inteiro positivo e $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$, onde $\gamma_k = m^{-r} \beta_k$, $k = 0, 1, \dots$, então D_γ corresponde à **derivada (forte) de Laplace-Beltrami** de ordem r . Se $f \in L^p(S^m)$, $D_\gamma^1 f$ é o único elemento de $L^p(S^m)$ satisfazendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} \|(1-\epsilon)^{-1}(I - T_\epsilon^m(f)) - D_\gamma^1 f\|_p = 0, \quad (3.4.2)$$

onde I é o operador identidade e T_ϵ^m é o operador translação esférica usual ([21]) definido pela fórmula

$$T_\epsilon^m(f)(x) := \frac{1}{\sigma_{m-1}(1-\epsilon^2)^{(m-1)/2}} \int_{x \cdot y = \epsilon} f(y) dy, \quad x \in S^m. \quad (3.4.3)$$

Aqui, $\epsilon \in (-1, 1)$ e dy denota o elemento do bordo $\{y \in S^m : x \cdot y = \epsilon\}$ da calota esférica $\{y \in S^m : x \cdot y \geq \epsilon\}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F., *Sobolev spaces*. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] Aronszajn, N., *Theory of Reproducing Kernels*. Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), no. 3, 337–404.
- [3] Askey, R.; Wainger, S., *On the behavior of special classes of ultraspherical expansions. I, II*. J. Analyse Math. 15 (1965), 193–220.
- [4] Berg, C.; Christensen, J. P. R.; Ressel, P., *Harmonic analysis on semigroups. Theory of positive definite and related functions*. Graduate Texts in Mathematics, 100. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [5] Berlinet, A.; Thomas-Agnan, C., *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics*. With a preface by Persi Diaconis. Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, 2004.
- [6] Castro, M. H.; Menegatto, V. A., *Eigenvalue decay of positive integral operators on the sphere*. Math. Comp., a aparecer.
- [7] Chen, Zhixiang, *On approximation by spherical reproducing kernel Hilbert spaces*. Anal. Theory Appl. 23 (2007), no. 4, 325–333.
- [8] Cucker, F.; Zhou, Ding-Xuan, *Learning theory: an approximation theory viewpoint. With a foreword by Stephen Smale*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [9] Cucker, F.; Smale, S., *On the mathematical foundations of learning*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 39 (2002), no. 1, 1–49.

- [10] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A., *Reproducing properties of differentiable Mercer-like kernels*, Math. Nach., a aparecer.
- [11] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A., *Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels*. Integral Equations Operator Theory 64 (2009), no. 1, 61–81.
- [12] Folland, G. B., *Real analysis*. Modern techniques and their applications. Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [13] Jordão, T.; Menegatto, V. A., *Reproducing properties of differentiable Mercer-like kernels on the sphere*, Num. Funct. Anal. Optim., a aparecer.
- [14] Jordão, T.; Menegatto, V. A., *Weighted Fourier-Laplace transforms in reproducing kernel Hilbert spaces on the sphere*, submetido.
- [15] Kantorovich, L. V.; Akilov, G. P., *Functional analysis*. Translated from the Russian by Howard L. Silcock. Second edition. Pergamon Press, Oxford-Elmsford, N.Y., 1982.
- [16] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [17] Lang, S., *Real analysis*. Second edition. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1983.
- [18] Le Gia, Q.T., *Multivariate approximation on spheres, a reproducing kernel approach*. Thesis (Ph.D.). University of New South Wales (1998).
- [19] Levesley, J.; Sun, X., *Approximation in rough native spaces by shifts of smooth kernels on spheres*. J. Approx. Theory 133 (2005), no. 2, 269–283.
- [20] Menegatto, V. A.; Oliveira, C. P.; Peron, A. P., *Differentiable positive definite kernels on spheres*. J. Appl. Anal. 15 (2009), no. 1, 101–117.
- [21] Menegatto, V. A.; Piantella, A. C., *Old and new on the Laplace-Beltrami derivative*. Numer. Funct. Anal. Optim. 32 (2011), no. 3, 309–341.
- [22] Mercer, J., *Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser., A 209 (1909), 415–446.

- [23] Minh, Ha Quang, *Reproducing kernel Hilbert spaces in learning theory*. Thesis (Ph.D.). Brown University (2006).
- [24] Minh, Ha Quang, *Some properties of Gaussian reproducing kernel Hilbert spaces and their implications for function approximation and learning theory*. Constr. Approx. 32 (2010), no. 2, 307–338.
- [25] Morimoto, M., *Analytic functionals on the sphere*. Translations of Mathematical Monographs, 178. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [26] Müller, C., *Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces*. Applied Mathematical Sciences, 129. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [27] Rudin, W., *Principles of mathematical analysis*. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.
- [28] Saitoh, S., *Integral transforms, reproducing kernels and their applications*. Longman, Gunna University, Japan, 1997.
- [29] Saitoh, S., *Theory of reproducing kernels and its applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 189. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [30] Schaback, R., *A unified theory of radial basis functions. Native Hilbert spaces for radial basis functions II*. Numerical analysis in the 20th century, Vol. I, Approximation theory. J. Comput. Appl. Math. 121 (2000), no. 1-2, 165–177.
- [31] Schaback, R., *Native Hilbert spaces for radial basis functions. I*. New developments in approximation theory (Dortmund, 1998), 255–282, Internat. Ser. Numer. Math., 132, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [32] Shi, Lei; Guo, Xin; Zhou, Ding-Xuan, *Hermite learning with gradient data*. J. Comput. Appl. Math. 233 (2010), no. 11, 3046–3059.
- [33] Sun, Hong-Wei; Zhou, Ding-Xuan, *Reproducing kernel Hilbert spaces associated with analytic translation-invariant Mercer kernels*. J. Fourier Anal. Appl. 14 (2008), no. 1, 89–101.
- [34] Sun, Hongwei; Wu, Qiang, *Application of integral operator for regularized least-square regression*. Math. Comput. Modelling 49 (2009), no. 1-2, 276–285.

- [35] Wang, Kunyang; Li, Luoqing, *Harmonic analysis and approximation on the unit sphere*, Beijing Science Press, 2000.
- [36] Young, N., *An introduction to Hilbert space*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [37] Zhou, Ding-Xuan, *The covering number in learning theory*. J. Complexity 18 (2002), no. 3, 739–767.
- [38] Zhou, Ding-Xuan, *Derivative reproducing properties for kernel methods in learning theory*. J. Comput. Appl. Math. 220 (2008), no. 1-2, 456–463.

Índice Remissivo

(α, β) -transformação, 34

D^α , 12

D_α , 33

K^x , 2

K_σ , 2, 9, 26

$L^2(S^m)$, 4

$L^p(S^m)$, 4

L_K , 5, 8

$N(k, m)$, 9, 34

$Y_{k,l}$, 9, 26, 34

α -transformação, 32

η_α , 24

ι , 23, 24, 40, 41

κ_0 , 6, 37, 38, 40

κ_α , 36

λ_k^σ , 26, 27

$\langle \cdot, \cdot \rangle_K$, 2

$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, 4

$\mathcal{H}_K$, 2, 6, 18, 24, 34

$\mathcal{H}_k^m$, 9

$\mathcal{H}_{K_\sigma}$, 26

$\mathcal{H}_{\overline{K}}$, 18

$\mathcal{Y}_k$, 10, 32, 34, 42

bizonal, 21

derivada, 12

de Laplace-Beltrami, 42

fracionária, 42

EHR, 2, 6, 18, 34

espaço de Hilbert

de reprodução, 2, 4

extensão radial, 12

k-harmônico esférico, 9

mergulho, 23, 24, 40, 41

compacto, 24, 41

limitado, 24, 40

núcleo, 1

bizonal, 21

de Mercer, 4, 6, 13, 34

de reprodução, 2

Gaussiano, 2, 9, 26

hermitiano, 1

polinomial homogêneo, 8, 26

positivo definido, 1

projeção ortogonal, 10

série

de Fourier-Laplace, 10, 32, 42

sequência

admissível, 37

rapidamente decrescente, 27