**D_n -simetria em Bifurcação de
Ponto Estacionário**

Míriam Garcia Manoel

Orientação

Prof^a Dr^a Maria Aparecida Soares Ruas

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

**USP - São Carlos
dezembro 1991**

Agradeço aos meus pais pelo carinho desde o princípio. À Isabel Labouriau, que incentivou pontos importantes deste trabalho e ao Camilo, pela grande ajuda no desenvolvimento destes pontos. Um agradecimento especial à Cidinha, pela imensa dedicação.

Este trabalho conta com apoio parcial do CNPq

Abstract

The studies developed in this work are concerned with the analysis of the effect of symmetry in steady-state bifurcation problems. Lie groups and singularity theory are used to analyse bifurcation problems on $\mathbf{C}$ with the action of the dihedral group $\mathbf{D}_n$, $n \geq 3, n \neq 4$. The aim is to obtain results on the local behavior of such problems. Normal forms and unfoldings for two generic $\mathbf{D}_3$ -equivariant problems are studied and the results are applied in the traction problem for deformation of an elastic cube (Mooney-Rivlin Material). An interesting example showing the global dynamic of a $\mathbf{D}_5$ -equivariant bifurcation problem is worked out.

Conteúdo

0	Teoria dos Grupos de Lie	3
0.1	Definições básicas e exemplos	3
0.2	Algumas propriedades dos grupos de Lie	8
0.2.1	Decomposição de espaços vetoriais	8
0.2.2	Γ -invariância e Γ -equivariância	9
1	Teoria Γ-equivariante em Bifurcação de Ponto Estacionário	14
1.1	Subgrupos de isotropia e seus subespaços de ponto fixo	15
1.2	Lema dos Ramos Equivariantes	17
1.3	Estabilidade orbital	21
2	Problemas do Reconhecimento e Γ-desdobramento Universal	26
2.1	Estabilidade de Soluções	28
2.2	Uma condição para Γ -equivalência	29

2.3	Desdobramentos Γ -equivariantes	34
2.3.1	Uma condição de Γ -desdobramento universal	34
2.3.2	Cálculo de $T(h, \mathbf{D}_n), n \geq 3$	36
3	Bifurcação com $\mathbf{D}_n$-simetria	37
3.1	Forma geral de germes em $\varepsilon(\mathbf{D}_n)$ e em $\vec{\varepsilon}(\mathbf{D}_n)$	38
3.2	Subgrupos de Isotropia de $\mathbf{D}_n$ e seus subespaços de ponto fixo	44
3.3	Soluções de problemas de bifurcação com $\mathbf{D}_n$ -simetria, $n \geq 5$	50
3.3.1	Obtenção de ramos de soluções	50
3.3.2	Bifurcação com $\mathbf{D}_n$ -simetria, $n \geq 5$	53
3.3.3	Um exemplo de campo $\mathbf{D}_5$ -equivariante no plano	60
3.4	Problemas de bifurcação com $\mathbf{D}_3$ -simetria	71
3.4.1	Formas normais $\mathbf{D}_3$ -equivariantes	71
3.4.2	Desdobramentos Universais	81
3.4.3	Bifurcação com $\mathbf{D}_3$ -simetria	83
4	O Modelo de Mooney-Rivlin	94
4.1	Descrição do problema	94
4.2	Redução do problema para $\mathbf{D}_3$ -simetria no plano	95
4.3	Classificação do problema	100

Introdução

Os estudos desenvolvidos neste trabalho se baseiam em [6]. Tais estudos se concentram na análise dos efeitos da ocorrência de simetrias em problemas de bifurcação de ponto estacionário. Do ponto de vista de bifurcação, um efeito fundamental é quanto ao aparecimento de novas soluções das equações diferenciais ordinárias. Tal fenômeno é conhecido como quebra espontânea de simetria. Um outro ponto é a influência de simetria na estabilidade dessas soluções. O enfoque deste trabalho é para problemas de bifurcação equivariantes em $\mathbb{C}$ com a ação do grupo diedral com $2n$ elementos D_n , $n \geq 3$, $n \neq 4$. Os problemas com D_4 -simetria – embora mais complicados – admitem um tratamento algébrico análogo aos casos com D_3 -simetria (isto é feito em [6], Cap.XVII, §6).

As técnicas utilizadas em nossa análise se baseiam fundamentalmente em teoria de grupos de Lie e teoria de singularidades. Do ponto de vista de singularidades, resolvemos problemas do reconhecimento para singularidades equivariantes obtendo formas normais para certas singularidades genéricas e calculamos desdobramentos equivariantes de tais formas normais.

O Capítulo 0 contém resultados básicos sobre grupos de Lie. Numa primeira leitura deste trabalho, pode-se omitir este capítulo.

O Capítulo 1 tem como resultado principal o Lema dos Ramos Equivariantes (Teorema 1.1) devido a Vanderbauwhede, o qual garante a existência de soluções para certos problemas de bifurcação equivariantes genéricos.

No Capítulo 2, definimos uma relação de equivalência que preserva as simetrias dos problemas, enunciamos uma condição para que dois germes sejam equivalentes (Teorema 2.2) e obtemos a expressão de um desdobramento universal para germes de codimensão finita.

O Capítulo 3 é capítulo central de todo o trabalho. A Proposição 3.5 garante que genericamente as únicas soluções para problemas de bifurcação D_n -equivariantes são as obtidas pelo Lema dos Ramos Equivariantes. Verificamos também que para $n \geq 5$ o comportamento local das soluções de tais problemas em cada setor $2\pi/n$ do plano é um invariante quando n varia e que o mesmo não se altera com termos de ordem mais alta. Para um particular exemplo de problemas D_5 -equivariantes fazemos um estudo global das soluções no plano de fase. Foi utilizado um simulador gráfico “*Grapher*” cujos resultados auxiliaram em muitas conclusões. O caso $n = 3$ difere dos demais ($n \geq 5$) quanto a estabilidade; neste caso, estudamos duas classes de problemas D_3 -equivariantes, obtendo formas normais e seus desdobramentos.

Finalmente, o Capítulo 4 se destina à aplicação do estudo de problemas D_3 -equivariantes ao problema de obtenção de equilíbrios de um cubo elástico homogêneo e incompressível sujeito a tensões iguais em cada uma de suas faces (material de Mooney-Rivlin).

Capítulo 0

Teoria dos Grupos de Lie

Este capítulo contém os resultados centrais sobre grupos de Lie para o desenvolvimento deste trabalho.

0.1 Definições básicas e exemplos

Considerando $GL(n)$, grupo de todas as transformações lineares inversíveis de $\mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^n$ ou, equivalentemente, o grupo das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbf{R}$ não-singulares, se $M_n(\mathbf{R})$ denota o conjunto das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbf{R}$, então

$$GL(n) \subset M_n(\mathbf{R}) \text{ aberto,}$$

onde em $M_n(\mathbf{R})$ estamos considerando a topologia induzida pelo isomorfismo entre $M_n(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R}^{n^2}$. Desta forma, $GL(n)$ é um espaço topológico e podemos, portanto, dar a definição seguinte.

Definição 0.1 *Um Grupo de Lie é um subespaço fechado Γ de $GL(n)$.*

Formalmente, estes são os chamados grupos de Lie lineares, sendo grupo de Lie definido de uma forma mais geral. Entretanto, como trabalharemos com grupos de Lie compactos, esta definição nos é mais apropriada devido à propriedade de que todo grupo de Lie compacto no sentido mais geral é homeomorfo a um grupo de Lie linear [2].

Observação 0.1 *Apesar de termos definido grupo de Lie como subgrupo fechado de matrizes, às vezes trabalharemos com conjuntos que, desde que sejam isomorfos a algum conjunto satisfazendo a Definição 0.1, também serão ditos grupos de Lie.*

Por exemplo, o grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$, o qual é isomorfo a $\{I_n, -I_n\} \subset GL(n)$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$, $\forall n \geq 1$.

Abaixo damos quatro exemplos de grupos de Lie:

Exemplo 0.1) O grupo ortogonal

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / AA^t = I_n\}$$

Mostremos que, de fato, $O(n)$ é um grupo de Lie:

(i) $O(n) \subset GL(n)$ subgrupo:

$$\begin{aligned} A, B \in O(n) &\Rightarrow (AB)(AB)^t = (AB)(B^t A^t) = A(BB^t)A^t = \\ &AA^t = I_n \Rightarrow AB \in O(n). \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} A \in O(n) &\Rightarrow A^{-1}(A^{-1})^t = A^{-1}(A^t)^{-1} = (A^t A)^{-1} = \\ &I_n^{-1} = I_n \Rightarrow A^{-1} \in O(n). \end{aligned}$$

(ii) $O(n) \subset GL(n)$ fechado:

Tomando a aplicação contínua $\Phi : GL(n) \rightarrow GL(n)$ dada por $A \mapsto AA^t$, temos que $O(n) = \Phi^{-1}(I_n)$, isto é, $O(n) \subset GL(n)$ fechado.

Portanto, $O(n)$ é um grupo de Lie.

Exemplo 0.2) O grupo especial ortogonal

$$SO(n) = \{A \in O(n) / \det(A) = 1\}$$

Mostremos que $SO(n)$ é um grupo de Lie:

(i) $SO(n) \subset GL(n)$ subgrupo:

$$A, B \in SO(n) \Rightarrow A, B \in O(n) / \det(A) = \det(B) = 1 \Rightarrow AB \in O(n) \text{ e}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \Rightarrow AB \in SO(n).$$

(ii) $SO(n) \subset GL(n)$ fechado:

Consideremos a aplicação contínua $\det : O(n) \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$A \mapsto \det(A)$$

$$SO(n) = (\det)^{-1}(1) \Rightarrow SO(n) \subset O(n) \text{ fechado}$$

Mas $O(n) \subset GL(n)$ fechado; assim, $SO(n) \subset GL(n)$ fechado.

Portanto, $SO(n)$ é um grupo de Lie.

Observação 0.2 No caso $n = 2$,

$$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} / 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

Isto se verifica facilmente impondo a uma matriz genérica $A_{2 \times 2}$ as condições $AA^t = I_2$ e $\det(A) = 1$. Ainda, a aplicação $\phi : SO(2) \rightarrow S^1$ dada por

$$\phi(R_\theta) = \theta$$

é um isomorfismo; logo, devido à Observação 0.1, S^1 é um grupo de Lie.

Usando esta representação de $SO(2)$, desde que

$$O(2) = SO(2) \cup \{A \in O(2) / \det(A) = -1\},$$

segue que os geradores de $O(2)$ são R_θ , com $0 \leq \theta < 2\pi$, juntamente com o flip

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 0.3) O grupo cíclico com n elementos

$$\mathbf{Z}_n = \{a^i, i = 0, \dots, n-1 \text{ e } a^n = 1\}.$$

Mostremos que $\mathbf{Z}_n$ é um grupo de Lie:

Tomando $\langle R_{2\pi/n} \rangle = \{R_{2\pi k/n}, k = 0, \dots, n-1\}$, temos que $\mathbf{Z}_n$ e $\langle R_{2\pi/n} \rangle$ são isomorfos. Além disso, $\langle R_{2\pi/n} \rangle \subset GL(n)$ finito e, portanto, fechado (logo, é um grupo de Lie). Segue, assim, que $\mathbf{Z}_n$ é um grupo de Lie.

Exemplo 0.4) O grupo diedral (com $2n$ elementos) definido algebricamente como

$$\mathbf{D}_n = \{a^i b^j / i = 0, \dots, n-1, j = 0, 1, a^n = 1, b^2 = 1 \text{ e } ab = ba^{-1}\},$$

isto é, o grupo gerado por $\mathbf{Z}_n$ juntamente com um elemento de ordem 2 que não comuta com $\mathbf{Z}_n$.

O fato de $\mathbf{D}_n$ ser um grupo de Lie segue de sua identificação com o grupo gerado por $\langle R_{2\pi/n} \rangle$ e pelo flip k , definidos na Observação 0.2. Aliás, é com esta expressão que trabalharemos sempre que nos referirmos a $\mathbf{D}_n$. Este grupo é interpretado geometricamente como o grupo das simetrias do polígono regular com n lados.

Definição 0.2 *Seja Γ um grupo de Lie. Γ é dito compacto se for compacto como subconjunto de $\mathbf{R}^{n^2}$ (devido ao isomorfismo entre $M_n(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R}^{n^2}$).*

A partir desta definição, segue que Γ é compacto se, e somente se, as entradas nas matrizes de Γ são limitadas (pois Γ já é, por definição, fechado). São compactos: $O(n)$, $SO(n)$, $\mathbf{D}_n$. Não são compactos: $\mathbf{R}^n$, $GL(n)$.

Definição 0.3 *Seja Γ um grupo de Lie e V um espaço vetorial de dimensão finita.*

Uma aplicação $\Gamma \times V \rightarrow V, (\gamma, v) \mapsto \gamma \cdot v$ é dita uma ação de Γ em V se

(i) esta aplicação é contínua,

(ii) para cada γ , $\gamma \cdot (v_1 + v_2) = \gamma \cdot v_1 + \gamma \cdot v_2$, $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\gamma \cdot (\alpha v) = \alpha(\gamma \cdot v)$, $\forall v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$.

(iii) dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1(\gamma_2 \cdot v) = (\gamma_1 \gamma_2) \cdot v$, $\forall v \in V$.

Abaixo damos quatro exemplos de tais ações:

Exemplo 0.5) Ação de Γ (grupo de Lie), $\Gamma \subset GL(n)$, sobre $\mathbf{R}^n$:
 $\Gamma \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ dada por

$$(\gamma, x) \mapsto \gamma \cdot x = x$$

Esta é a chamada ação trivial de Γ em $\mathbf{R}^n$.

Exemplos 0.6) Ação de S^1 (grupo aditivo) em $\mathbf{C}$ ($S^1 \equiv SO(2)$):
 $S^1 \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ dada por

$$(\theta, z) \mapsto e^{i\theta} z$$

Exemplo 0.7) Ação de $O(2)$ em $\mathbf{C}$: $O(2) \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ dada como

$$(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z = \begin{cases} e^{ik\theta} z & \text{se } \gamma = e^{ik\theta} \in SO(2) \\ \bar{z} & \text{se } \gamma = k \end{cases}$$

Exemplo 0.8) Ação de D_n em $\mathbf{C}$ como no Exemplo 0.7, já que
 $D_n \subset O(2), \forall n \in \mathbf{N}$.

Todo grupo de Lie compacto Γ em $GL(n)$ que atua num espaço vetorial V pode ser identificado com um subgrupo de $O(2)$. Este resultado segue do fato de que podemos definir em V um produto interno tal que a matriz associada a cada $\gamma \in \Gamma$ é ortogonal. Este produto interno é definido a partir da integral de Haar. [Ver Apêndice].

Definição 0.4 *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão n e Γ grupo de Lie atuando em ambos os espaços. Dizemos que V e W são Γ -isomorfos se existe um isomorfismo $\Phi : V \rightarrow W$ tal que*

$$\Phi(\gamma \cdot v) = \gamma \cdot \Phi(v)$$

$\forall \gamma \in \Gamma, \forall v \in V$. *Notação:* $V \stackrel{\Gamma}{\simeq} W$.

0.2 Algumas propriedades dos grupos de Lie

Os resultados não demonstrados nesta seção se encontram em [6].

0.2.1 Decomposição de espaços vetoriais

A ação de um grupo de Lie compacto em um espaço vetorial V (real de dimensão finita) nos permite decompor V em subespaços mais simples. Vamos aqui descrever como são tais decomposições.

Definição 0.5 *Seja Γ um grupo de Lie atuando num espaço vetorial V . Um subespaço $W \subset V$ é dito Γ -invariante se $\forall w \in W, \forall \gamma \in \Gamma, \gamma \cdot w \in W$.*

Definição 0.6 *Uma ação de Γ em V é irredutível se $\{0\}$ e V são os únicos subespaços Γ -invariantes. Ainda, dizemos que um subespaço W é Γ -irredutível se W é Γ -invariante e a ação de Γ em W é irredutível.*

Exemplo 0.9 A ação de $SO(2)$ em $\mathbf{R}^2$ (definida na seção 1):

Desde que os elementos de $SO(2)$ são rotações, temos $\mathbf{R}^2$ como um espaço irredutível (por rotação). O mesmo argumento justifica $\mathbf{R}^2$ como irredutível pela ação de $O(2)$.

Teorema 0.1 (Teorema da Redutibilidade Completa) *Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando em V . Então, existem subespaços $V_1, \dots, V_s \subset V$ Γ -irredutíveis tais que*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s.$$

Teorema 0.2 *Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando em V . A menos de Γ -isomorfismo, existe um número finito de subespaços de V Γ -irredutíveis $U_1, \dots, U_k$.*

Ainda, se W_j é a soma (não necessariamente direta) de todos os subespaços irredutíveis de V que são Γ -isomorfos a U_j , então

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Nota - Cada W_j é dito *componente isotípica* de V (do tipo U_j). Cada $W \subset V$ Γ -invariante está em algum W_j (neste caso, $W \stackrel{\Gamma}{\simeq} U_j$).

O Teorema 0.2 é de fundamental importância no nosso estudo. Ele nos permite obter um caminho de como fazer com que a soma do Teorema 0.1 seja única. Isto é afirmado no corolário a seguir (cuja demonstração é imediata, a partir do Teorema 0.2).

Corolário 0.1 *Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando em $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$, com V_j Γ -irredutível $\forall j = 1, \dots, s$. Se tais subespaços desta decomposição são dois a dois não-isomorfos, então estes são os únicos subespaços Γ -irredutíveis não-nulos de V .*

0.2.2 Γ -invariância e Γ -equivariância

Definição 0.7 *Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando num espaço vetorial V .*

1. *Uma aplicação $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ é dita Γ -invariante se*

$$f(\gamma \cdot v) = f(v), \forall v \in V.$$

2. *Uma aplicação $g : V \rightarrow V$ é dita Γ -equivariante se*

$$g(\gamma \cdot v) = \gamma \cdot g(v), \forall v \in V.$$

Exemplo 0.10) $\Gamma = \mathbf{Z}_2$, $V = \mathbf{R}$. Ação de $\mathbf{Z}_2$ em $\mathbf{R}$:

$$1 \cdot x \mapsto x;$$

$$-1 \cdot x \mapsto -x.$$

- Se $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é um polinômio $\mathbf{Z}_2$ -invariante, então p possui somente parcelas com potências pares de x . Logo,

$$p(x) = h(x^2),$$

para algum polinômio h .

- Se $q : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é $\mathbf{Z}_2$ -equivariante, então $q(-x) = -q(x)$, isto é, q possui somente parcelas ímpares de x . Logo,

$$q(x) = h(x^2)x,$$

para algum polinômio h .

No Capítulo 3, seção 3.1, caracterizamos as aplicações $\mathbf{D}_n$ -equivariantes (Proposição 3.2) e $\mathbf{D}_n$ -invariantes (Proposição 3.3).

Definição 0.8 *A ação de Γ em V é dita absolutamente irredutível se as únicas aplicações lineares sobre V Γ -equivariantes são múltiplas da identidade.*

Lema 0.1 *Se a ação de um grupo de Lie compacto Γ em V é absolutamente irredutível, então ela é irredutível.*

Observação 0.3 *Para o lema anterior não vale a recíproca. De fato, a ação de $SO(2)$ em $\mathbf{R}^2$ é irredutível (ver Exemplo 0.9), mas as aplicações lineares sobre $\mathbf{R}^2$ $SO(2)$ -equivariantes têm matrizes*

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

com $a, b \in \mathbf{R}$

Lema 0.2 *Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando em V , $L : V \rightarrow V$ aplicação linear Γ -equivariante e $W \subset V$ subespaço Γ -irredutível. Então,*

- (i) $L(W)$ é Γ -invariante;
- (ii) $L(W) = \{0\}$ ou $L(W) \stackrel{\Gamma}{\cong} W$.

Teorema 0.3 *Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando em V , $L : V \rightarrow V$ aplicação linear Γ -equivariante. Para $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$, onde os W_j 's são as componentes isotópicas de V , temos*

$$L(W_j) \subset W_j, j = 1, \dots, s.$$

Prova:

W_j = soma dos subespaços Γ -irredutíveis que são Γ -isomorfos a U_j ; logo, pela dimensão finita de W_j ,

$$W_j = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

onde cada V_i é Γ -irredutível. Cada V_i satisfaz o Lema 0.2 (ii); assim, $L(V_i) \subset W_j$. Pela linearidade,

$$L(W_j) = L(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) = L(V_1) \oplus \cdots \oplus L(V_r) \subset W_j.$$

Definição 0.9 *Denotamos por*

$\wp(\Gamma)$ *o conjunto dos polinômios $p : V \rightarrow \mathbf{R}$ Γ -invariantes;*

$\vec{\wp}(\Gamma)$ *o conjunto das aplicações polinomiais $q : V \rightarrow V$ Γ -equivariantes;*

$\varepsilon(\Gamma)$ *o conjunto dos germes (na origem) $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ Γ -invariantes;*

$\vec{\varepsilon}(\Gamma)$ *o conjunto dos germes (na origem) $g : V \rightarrow V$ Γ -equivariantes.*

É fácil ver que a soma e o produto de aplicações Γ -invariantes são Γ -invariantes; ainda, se f é Γ -invariante e g é Γ -equivariante, então $f \cdot g$ é Γ -equivariante. Logo, $\wp(\Gamma)$ e $\varepsilon(\Gamma)$ são anéis, $\vec{\wp}(\Gamma)$ é módulo sob o anel $\wp(\Gamma)$ e $\vec{\varepsilon}(\Gamma)$ é módulo sob $\varepsilon(\Gamma)$.

Definição 0.10 *Um subconjunto finito $B = \{u_1(x), \dots, u_m(x)\}$ de $\wp(\Gamma)$ é dito uma base de Hilbert de $\wp(\Gamma)$ se $\forall p \in \wp(\Gamma)$, $\exists h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} / p(x) = h(u_1(x), \dots, u_m(x))$.*

Definição 0.11 *Dizemos que os polinômios $g_1, \dots, g_r \in \vec{\wp}(\Gamma)$ geram o módulo $\vec{\wp}(\Gamma)$ se $\forall g \in \vec{\wp}(\Gamma)$, $\exists f_1, \dots, f_r$ tal que*

$$g = f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r.$$

Pelo Exemplo 0.10, temos

$\{u_1(x) = x^2\}$ base de Hilbert de $\wp(\mathbb{Z}_2)$

e

$g_1(x) = x$ gerador de $\vec{\wp}(\mathbb{Z}_2)$ sob o anel $\wp(\mathbb{Z}_2)$.

Teorema 0.4 (Hilbert-Weyl) *Se Γ é um grupo de Lie compacto atuando em V , então existe base de Hilbert (finita) para o anel $\wp(\Gamma)$.*

Teorema 0.5 (Schwarz, 1975) *Se Γ é um grupo de Lie compacto atuando em V e $\{u_1, \dots, u_s\}$ é base de Hilbert para $\wp(\Gamma)$, então $\forall f \in \varepsilon(\Gamma)$, $\exists h \in \varepsilon_s =$ conjunto dos germes C^∞ na origem $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = h(u_1(x), \dots, u_s(x)).$$

Teorema 0.6 *Se Γ é um grupo de Lie compacto atuando em V , então $\vec{\wp}(\Gamma)$ admite um número finito de geradores.*

Teorema 0.7 (Poénaru, 1976) *Se Γ é um grupo de Lie compacto atuando em V e $g_1, \dots, g_r$ são os geradores de $\vec{\wp}(\Gamma)$ sob o anel $\wp(\Gamma)$, então estes também geram $\vec{\varepsilon}(\Gamma)$ sob o anel $\varepsilon(\Gamma)$.*

Definição 0.12 *Seja $B = \{u_1(x), \dots, u_s(x)\}$ base de Hilbert para $\wp(\Gamma)$. Dizemos que B tem uma relação se existe um polinômio não-nulo $r : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$r(u_1(x), \dots, u_s(x)) \equiv 0.$$

Definição 0.13 $\wp(\Gamma)$ é dito um anel polinomial se admite uma base de Hilbert sem relações.

As duas últimas definições fazem uma correspondência entre base de Hilbert sem relações para $\wp(\Gamma)$ e base para espaços vetoriais. Existe um teste simples para verificar se uma base $\{u_1, \dots, u_s\}$ de $\wp(\Gamma)$ o faz um anel polinomial:

Lema 0.3 *Tomemos a aplicação $\rho : V \rightarrow \mathbf{R}^s$ (chamada discriminante de Γ) definida como*

$$\rho(x) = (u_1(x), \dots, u_s(x)).$$

Se o jacobiano $(d\rho)_x$ é sobrejetor para algum x , então $\wp(\Gamma)$ é um anel polinomial.

No Capítulo 3, este lema é usado para verificar que $\wp(\mathbf{D}_n)$ é um anel polinomial.

Definição 0.14 $\vec{\varepsilon}(\Gamma)$ é dito um módulo livre sob $\varepsilon(\Gamma)$ se para $g_1, \dots, g_r$ seus geradores, a relação

$$f_1 g_1 + \dots + f_r g_r = 0$$

com $f_j \in \varepsilon(\Gamma), j = 1, \dots, r$, implica em

$$f_1 \equiv \dots \equiv f_r \equiv 0.$$

É fácil notar que se $\vec{\varepsilon}(\Gamma)$ é um módulo livre, então a representação de todo germe g é única, isto é, para $g_1, \dots, g_r$ geradores deste módulo, existem únicos $f_1, \dots, f_r \in \varepsilon(\Gamma)$ tais que

$$g = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r.$$

Capítulo 1

Teoria Γ -equivariante em Bifurcação de Ponto Estacionário

Definimos um problema de bifurcação Γ -equivariante como um germe

$$g : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$$

Γ -equivariante (na origem) satisfazendo as seguintes condições:

(i) $g(0, \lambda) = 0$

(ii) $(dg)_{0,0} \equiv 0$,

onde (dg) representa a diferencial de g com relação à variável x .

Neste trabalho, a questão de encontrar zeros da equação $g(x, \lambda) = 0$ é a questão de obter pontos estacionários para o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{dt} + g(x, \lambda) = 0. \tag{1.1}$$

Para especificarmos a essência deste capítulo, fazemos primeiramente algumas definições e observações:

Definição 1.1 Chamamos de subgrupo de isotropia de Γ de um ponto $x \in V$ o subgrupo

$$\Sigma_x = \{\sigma \in \Gamma / \sigma \cdot x = x\}$$

Definição 1.2 Dado $\Sigma \subset \Gamma$ subgrupo, o subespaço de ponto fixo de Σ é o seguinte subespaço vetorial de V :

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in V / \sigma \cdot x = x, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Observação 1.1 O conjunto solução da equação $g(x, \lambda) = 0$ é preservado pela simetria Γ , isto é, se x é solução então $\gamma \cdot x$ é solução, $\forall \gamma \in \Gamma$. Logo, é natural esperarmos uma relação entre subgrupos de isotropia de pontos numa mesma órbita, onde a órbita de x é o conjunto

$$\Gamma x = \{\gamma x, \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

De fato, dados dois pontos x e $\gamma \cdot x$ numa mesma órbita,

$$\Sigma_{\gamma x} = \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}$$

A demonstração desta igualdade é trivial: tomamos $\sigma \in \Sigma_x$ e verificamos que $\gamma \sigma \gamma^{-1} \in \Sigma_{\gamma x}$; reciprocamente, tomamos $\sigma \in \Sigma_{\gamma x}$ e verificamos que $\gamma^{-1} \sigma \gamma \in \Sigma_x$. Neste caso, dizemos que Σ_x e $\Sigma_{\gamma x}$ são subgrupos de isotropia conjugados.

Notemos que para cada λ , $(0, \lambda)$ é sempre solução de $g(x, \lambda) = 0$ (cujo subgrupo de isotropia é, obviamente, Γ). Em geral, para um tal problema pode ocorrer o aparecimento de outras soluções $x \neq 0$ mas satisfazendo $\Sigma_x < \Gamma$. Este fenômeno é usualmente denominado quebra espontânea de simetria (de Γ -simetria para Σ_x -simetria), e o termo “espontânea” significa que g permanece Γ -equivariante. Assim, ao invés de uma solução com toda simetria Γ , passamos a ter uma órbita de soluções com subgrupos de isotropia (conjugados) menores que Γ . O objetivo deste capítulo é determinar um critério (Lema dos Ramos Equivariantes) para ocorrência de quebra de simetria para determinados problemas de bifurcação.

1.1 Subgrupos de isotropia e seus subespaços de ponto fixo

Nesta seção, apresentamos as propriedades básicas de subgrupos de isotropia Σ e de $\text{Fix}(\Sigma)$ utilizadas em nosso estudo. (Ver definições 1.1 e 1.2).

Propriedade 1 - $Fix(\Sigma) \subset V$ é subespaço vetorial.

Prova: Segue diretamente da igualdade

$$Fix(\Sigma) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \ker(\sigma - Id).$$

Propriedade 2 - Se $h : V \rightarrow V$ é Γ -equivariante e $\Sigma \subset \Gamma$ subgrupo, então

$$h(Fix(\Sigma)) \subset Fix(\Sigma).$$

Prova: Basta notar que $h(x) = h(\sigma x) = \sigma h(x)$.

Propriedade 3 - Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando em V . São equivalentes:

(i) $Fix(\Gamma) = \{0\}$

(ii) $\forall g$ Γ -equivariante, $g(0) = 0$

(iii) A única aplicação linear Γ -invariante é a aplicação nula.

Em geral, em nossos exemplos temos $Fix(\Gamma) = \{0\}$ e, assim, vale (ii) o qual nos garante a existência da solução trivial. A partir da *Propriedade 2* podemos verificar (i) $\Rightarrow$ (ii) :

$$Fix(\Gamma) = \{0\} \Rightarrow g(\{0\}) \subset \{0\} \Rightarrow g(0) = 0.$$

Propriedade 4 - $Fix(\Sigma_{\gamma x}) = \gamma Fix(\Sigma_x), \forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in V$.

Prova:

$v \in Fix(\Sigma_x), \gamma \in \Gamma \Rightarrow$ desde que $\sigma \cdot v = v, \forall \sigma \in \Sigma_x, \gamma \sigma \gamma^{-1}(\gamma v) = \gamma v \Rightarrow \gamma v \in Fix(\gamma \Sigma_x \gamma^{-1})$, ou seja, $\gamma v \in Fix(\Sigma_{\gamma x})$.

$v \in Fix(\Sigma_{\gamma x}) \Rightarrow \gamma \sigma \gamma^{-1}(v) = v, \forall \sigma \in \Sigma_x \Rightarrow \gamma^{-1}(v) \in Fix(\Sigma_x) \Rightarrow v (= \gamma(\gamma^{-1}v)) \in \gamma Fix(\Sigma_x)$.

Propriedade 5 - $\Sigma_x \subset \Sigma_y \Leftrightarrow Fix(\Sigma_x) \supset Fix(\Sigma_y)$.

Propriedade 6 - Se Γ é um grupo de Lie atuando em V , então:

- (i) $|\Gamma| < \infty \Rightarrow |\Gamma| = |\Sigma_x| \cdot |\Gamma x|, \forall x \in V$
- (ii) $\dim \Gamma = \dim \Sigma_x + \dim \Gamma x, \forall x \in V$.

1.2 Lema dos Ramos Equivariantes

O resultado que descrevemos aqui estabelece que, genericamente, problemas de bifurcação com Γ -simetria admitem soluções correspondentes a todos os subgrupos de isotropia Σ com $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$. Antes de tudo, especifiquemos o significado do termo “genericamente”:

Consideremos em $C^\infty(M, N)$ a topologia C^∞ de Whitney. Um aberto básico nesta topologia é da forma

$$M(U) = \{f \in C^\infty(M, N) / j^r f(M) \subset U, \text{ com } U \subset J^r(M, N) \text{ aberto}\}.$$

Nosso objetivo é estudar e classificar aplicações com boas propriedades que formem um conjunto aberto e denso em $C^\infty(M, N)$ e, desde que $C^\infty(M, N)$ é de Baire, podemos dar então a seguinte definição:

Definição 1.3 *Uma propriedade P relativa a $f \in C^\infty(M, N)$ é dita genérica se o conjunto*

$$\{f \in C^\infty(M, N) / f \text{ satisfaz } P\}$$

é residual.

Exemplo - A propriedade $(dg)_\lambda(0, 0) \neq 0$ é genérica no conjunto de bifurcação

$$B = \{g \in \vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda}(\Gamma) / g(0, 0) = 0, (dg)_{0,0} = 0\},$$

pois $\forall r$,

$$\{j^r g / g \in B \text{ e } (dg)_{0,0} \neq 0\}$$

é aberto e denso em $J^r(V, V) \cap B$.

Teorema 1.1 (Lema dos Ramos Equivariantes - Vanderbauwhede) *Seja Γ um grupo de Lie atuando em V . Consideremos*

- (i) ação de Γ em V absolutamente irredutível*
- (ii) $g \in \vec{\epsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ problema de bifurcação satisfazendo $c'(0) \neq 0$, onde $(dg)_{0,\lambda} = c(\lambda)Id$*
- (iii) $\Sigma \subset \Gamma$ subgrupo de isotropia tal que $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$.*

Então, existe um único ramo de soluções para a equação $g(x,\lambda) = 0$ tal que o subgrupo de isotropia de cada solução neste ramo é Σ .

Observação 1.2 *A hipótese (i) do Teorema 1.1 garante que a igualdade*

$$(dg)_{0,\lambda} = c(\lambda)Id$$

está sempre satisfeita já que $(dg)_{0,\lambda}$ é linear Γ -equivariante (a Γ -equivariância segue do uso da regra da cadeia na igualdade $g(\gamma x, \lambda) = \gamma g(x, \lambda)$). A condição $c'(0) \neq 0$ da hipótese (ii) é uma condição genérica. Ainda, a Proposição 1.1 abaixo garante que (i) é também uma condição genérica.

Proposição 1.1 *Seja $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma família a um parâmetro de aplicações Γ -equivariantes com $G(0,0) = 0$. Seja $V = \ker (dG)_{0,0}$. Então, genericamente, a ação de Γ em V é absolutamente irredutível.*

Prova: [6]

Teorema 1.2 *Seja Γ um grupo de Lie atuando em V . Consideremos*

- (i) $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$*
 - (ii) $\Sigma \subset \Gamma$ subgrupo de isotropia tal que $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$*
 - (iii) $g \in \vec{\epsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ satisfazendo $((dg)_\lambda)_{0,0}(x_0) \neq 0$, para $x_0 \in \text{Fix}(\Sigma)$, $x_0 \neq 0$.*
- Então, existe um ramo C^∞ de soluções da forma*

$$(tx_0, \lambda(t))$$

para a equação $g(x, \lambda) = 0$.

Vamos provar este resultado e em seguida verificar que as hipóteses do Teorema 1.1 satisfazem as do Teorema 1.2.

Prova:

g é Γ -equivariante $\xRightarrow{\text{Propr.2}} g : \text{Fix}(\Sigma) \times \mathbf{R} \rightarrow \text{Fix}(\Sigma)$

$\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1 \Rightarrow \exists x_0 \neq 0, x_0 \in \text{Fix}(\Sigma) \Rightarrow g(tx_0, \lambda) = h(t, \lambda)x_0,$

com $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ germe na origem.

$\text{Fix}(\Gamma) = \{0\} \xRightarrow{\text{Propr.3}} g(0, \lambda) = 0 \Rightarrow h(0, \lambda) = 0 \Rightarrow$ por Taylor,

$h(t, \lambda) = k(t, \lambda) \cdot t \Rightarrow g(tx_0, \lambda) = k(t, \lambda) \cdot tx_0.$

Notemos que:

a) $k(0, 0) = 0$:

$g(tx_0, \lambda) = k(t, \lambda)tx_0 \Rightarrow$ pela regra da cadeia, $(dg)_{0,0}(x_0) = k(0, 0)x_0.$

Como $(dg)_{0,0} \equiv 0, k(0, 0) = 0$;

b) $k_\lambda(0, 0) \neq 0$:

$(dg)_{tx_0, \lambda}(x_0) = k_t(t, x_0)tx_0 + k(t, \lambda)x_0 \Rightarrow ((dg)_\lambda)_{0,0}x_0 = k_\lambda(0, 0)x_0 \Rightarrow k_\lambda(0, 0) \neq 0$;

De (a) e (b) temos, pelo Teorema da Função Implícita que $\exists! \lambda = \lambda(t)/k(t, \lambda(t)) = 0$. Logo, $(tx_0, \lambda(t))$ é o ramo de soluções procurado.

Finalmente, verifiquemos as hipóteses do Teorema 1.1 :

- Teorema 1.1, i $\Rightarrow$ Teorema 1.2, i:

$Fix(\Gamma)$ é Γ -invariante (pois para $x \in Fix(\Gamma)$, $\gamma x = x, \forall \gamma \in \Gamma$; logo, $\gamma x \in Fix(\Gamma)$) e a ação de Γ em V é absolutamente irredutível e, portanto, irredutível. Logo, $Fix(\Gamma) = \{0\}$ ou V ; mas como a ação não é a trivial, $Fix(\Gamma) = \{0\}$.

- Por Taylor,

$$((dg)_\lambda)_{0,0}(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow c'(0) \neq 0.$$

Logo, Teorema 1.1, ii e Teorema 1.2, iii são equivalentes.

Abaixo, citamos duas propriedades das soluções obtidas pelo Lema dos Ramos Equivariantes:

- Se as soluções para Σ_x são $(tx_0, \lambda(t))$, então as soluções para um seu conjugado $\Sigma_{\gamma x}$ são $(t\gamma x_0, \lambda(t))$.

Com efeito,

$Fix(\Sigma_x) = [x_0] \Rightarrow Fix(\Sigma_{\gamma x}) = [\gamma x_0]$ (Prop. 4, seção 1.1) $\Rightarrow$ o ramo de soluções para $g(x, \lambda) = 0$ com subgrupo de isotropia $\Sigma_{\gamma x}$ é $(t\gamma x_0, \beta(t))$, para alguma função β . Mas,

$$g(t\gamma x_0, \lambda(t)) = \gamma g(tx_0, \lambda(t)) = 0$$

Logo, pela unicidade de solução,

$$\beta(t) \equiv \lambda(t).$$

- Para dois geradores $x_0 \neq x_1$ de $Fix(\Sigma_x)$, obtemos o mesmo ramo de soluções em parametrizações distintas.

De fato,

Se $Fix(\Sigma_x) = [x_0]$, com ramo de soluções $(tx_0, \lambda(t))$, então $\forall x_1 \neq 0, x_1 = t_1 x_0$ e, assim, $(\frac{t}{t_1} x_1, \lambda(t))$ ou ainda,

$$(sx_1, \lambda(t_1 s))$$

é (o mesmo) ramo de soluções.

Existe um resultado devido a Cicogna [13] que generaliza o Teorema 1.1 para o caso em que $\dim Fix(\Sigma)$ é ímpar, com um argumento de grau topológico. Entretanto, para obter informações efetivas neste caso, devemos assumir Σ subgrupo de isotropia maximal. Caso contrário, as soluções em $Fix(\Sigma)$, cuja existência está sendo garantida poderiam, de fato, ter um subgrupo de isotropia maior que Σ .

1.3 Estabilidade orbital

A simetria imposta pela ação de um grupo de Lie Γ em V impõe restrições a problemas de bifurcação $g : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ Γ -equivariantes de forma que não é possível, em tais problemas, a ocorrência de pontos de equilíbrio x_0 assintoticamente estáveis ou linearmente estáveis (definições em [7]) desde que $\dim \Sigma_{x_0} < \dim \Gamma$. De fato,

- Pela Propriedade 6, seção 1.1, $\dim \Gamma = \dim \Sigma_{x_0} + \dim \Gamma x_0 \Rightarrow \dim \Gamma x_0 > 0 \Rightarrow tx_0 \in \Gamma x_0, \forall t \neq 0$, onde $tx_0 = \gamma_t x_0, \gamma_t \in \Gamma$. Como g é Γ -equivariante, $tx_0 (= \gamma_t x_0)$ é também ponto de equilíbrio, para cada t . Logo, temos pontos estacionários arbitrariamente próximos de x_0 . Segue deste fato, portanto, que x_0 não é assintoticamente estável.
- Para verificar que x_0 não é linearmente estável, observemos primeiramente que a órbita Γx_0 é subvariedade imersa de V [5] e, assim, podemos definir $T_{x_0} \Gamma x_0$ como o espaço tangente a Γx_0 em x_0 . Mostremos que $\ker (dg)_{x_0} \supset T_{x_0} \Gamma x_0$: Seja $y(t) = \gamma(t)x_0$ curva diferenciável em Γx_0 , com $\gamma(t)$ curva diferenciável em Γ , $\gamma(0) = Id$. Então,

$$g(y(t)) = g(\gamma(t)x_0) = \gamma(t)g(x_0) \equiv 0 \Rightarrow \frac{dg}{dt}(y(t)) \equiv 0 \Rightarrow \left[\frac{d}{dt} (g(\gamma(t)x_0)) \right]_{t=0} = 0$$

$$\Rightarrow (dg)_{x_0}(\gamma'(0)x_0) = 0, \text{ isto é,}$$

$$\gamma'(0)x_0 \in \ker (dg)_{x_0}$$

Notemos que existe tal $\gamma(t)$ com $\gamma'(0)x_0 \neq 0$, pois $\dim T_{x_0}\Gamma x_0 = \dim \Gamma x_0 > 0$; logo, $\dim \ker (dg)_{x_0} > 0$, isto é, existe auto-valor nulo de $(dg)_{x_0}$, o que significa que x_0 não é linearmente estável.

Concluimos, então, que a ação de um grupo de Lie Γ nos leva ao uso de conceitos de estabilidade onde possamos considerar as simetrias do problema:

Definição 1.4 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio do sistema de equações diferenciais ordinárias*

$$\frac{dx}{dt} + g(x) = 0,$$

ou, equivalentemente, um zero da equação $g(x) = 0$. Então, x_0 é uma estabilidade linear orbital se os auto-valores de $(dg)_{x_0}$ são nulos ou têm parte real positiva.

Como vimos, os auto-valores nulos correspondem a auto-vetores em $T_{x_0}\Gamma x_0$.

Definição 1.5 *Nas condições da Definição 1.4, definimos x_0 como uma estabilidade orbital se for estável e se $\forall$ trajetória $x(t)$, com $x(0)$ suficientemente próximo de x_0 , $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ e tal limite está em Γx_0 .*

Proposição 1.2 *Se x_0 é estabilidade linear orbital, então x_0 é estabilidade orbital.*

Desde que os auto-valores ξ de $(dg)_{x_0}$ sejam nulos ou $\text{Re}(\xi) > 0$, segue desta proposição a estabilidade orbital de x_0 e, portanto, x_0 é equilíbrio estável (no sentido antigo). Em outras palavras, mesmo quando $\dim \Sigma_{x_0} < \dim \Gamma$, podemos ter x_0 como um equilíbrio estável (porém, nunca assintoticamente estável).

Vamos agora enunciar resultados garantindo que, genericamente, as soluções de $g(x, \lambda) = 0$ dadas pelo Lema dos Ramos Equivariantes são instáveis.

Definição 1.6 Seja $(tx_0, \lambda(t))$ ramo de soluções de $g(x, \lambda) = 0$ dado pelo Lema dos Ramos Equivariantes. Então:

1. O ramo é transcrítico se $\lambda'(0) \neq 0$
2. O ramo é degenerado se $\lambda'(0) = 0$
3. O ramo é subcrítico se $\lim_{t \rightarrow 0} t\lambda'(t) < 0$
4. O ramo é supercrítico se $\lim_{t \rightarrow 0} t\lambda'(t) > 0$

Notemos que em (3.) e (4.) os ramos são degenerados. As figuras abaixo representam os tipos de ramos da Definição 1.6:

Figura (1.1)

A Figura (1.1,b) representa um ramo degenerado que não é do tipo (3.) ou do tipo (4.). A Figura (1.1,a) representa um ramo transcítico com sua parte subcrítica para $t < 0$ e parte supercrítica para $t > 0$.

Teorema 1.3 *Seja Γ um grupo de Lie cuja ação em V é absolutamente irredutível e seja $g \in \vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ problema de bifurcação. (Nestas condições, sabemos que $(dg)_{0,\lambda} = c(\lambda)Id$, $c(0) = 0$). Consideremos as seguintes hipóteses adicionais:*

1. $c'(0) > 0$
2. $\Sigma \subset \Gamma$ subgrupo de isotropia com $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$
3. *Algun termo da expansão em Taylor de $g /_{\text{Fix}(\Sigma) \times \{0\}}$ é não-nulo*
4. *Para $x_0 \in \text{Fix}(\Sigma)$, e Q termo quadrático de g , então $(dQ)_{x_0,0}$ tem auto-valores fora do eixo imaginário*

Nestas condições, o ramo de soluções para $g(x, \lambda) = 0$ em $\text{Fix}(\Sigma)$ dado pelo Lema dos Ramos Equivariantes consiste de soluções instáveis.

Observação 1.3 *Algumas considerações devem ser feitas com relação às hipóteses do Teorema 1.3:*

(a) Considerando somente as hipóteses (1.), (2.) e (3.), podemos provar que se $(tx_0, \lambda(t))$ é ramo supercrítico, então tais soluções são instáveis. A demonstração consiste em provar que x_0 é auto-vetor de $(dg)_{tx_0, \lambda(t)}$ cujo auto-valor ξ_0 satisfaz

$$\text{sinal}(\xi_0) = -\text{sinal}(t\lambda'(t))$$

e sendo o ramo supercrítico obtemos, assim, ξ_0 auto-valor negativo. Logo, $(tx_0, \lambda(t))$ é solução instável para cada t .

(b) Considerando somente as hipóteses (1.) e (2.), podemos provar que se o ramo $(tx_0, \lambda(t))$ é transcítico, então este ramo consiste de soluções instáveis. A demonstração para a parte supercrítica é idêntica à feita em (a); para a parte subcrítica, tomamos o $tr(dg)_{tx_0, \lambda(t)}$ e verificamos que (para t pequeno) ele é negativo. Assim, $\exists \xi$ auto-valor com $\text{Re}(\xi) < 0$.

(c) Se o ramo de soluções é degenerado, então com as hipóteses de (1.) a (4.) temos que tais soluções são instáveis. A prova novamente consiste em obter um auto-valor ξ com $\text{Re}(\xi) < 0$. Ainda, a condição (4.) é genérica.

(d) A partir de (a), (b) e (c) podemos verificar facilmente que os únicos ramos que podem admitir soluções estáveis são os subcríticos cujo problema de bifurcação satisfaz (1.), (2.) e (3.) mas não satisfaz (4.).

(e) A partir de (a) verificamos facilmente que trocando a hipótese $c'(0) > 0$ por $c'(0) < 0$ as conclusões para ramos supercríticos passam a valer para os subcríticos e vice-versa.

Capítulo 2

Problemas do Reconhecimento e Γ -desdobramento Universal

Neste capítulo vamos desenvolver as ferramentas básicas necessárias à seção 3.4, Cap.3 . A questão central consiste em resolver o problema do reconhecimento e o problema do Γ -desdobramento universal para classes especiais de problemas de bifurcação $g : V \times \mathbf{R} \rightarrow V$ Γ -equivariantes, com Γ grupo de Lie compacto. Em outras palavras,

1. Definiremos uma relação de equivalência ($\sim$) no conjunto dos problemas de bifurcação que identifica os germes qualitativamente equivalentes e queremos determinar todos os germes $h : V \times \mathbf{R} \rightarrow V$ tais que $h \sim g$. Vamos encontrar condições sobre as derivadas de h tais que se estas condições estão satisfeitas, então $h \sim g$. Este é o problema do reconhecimento.
2. O problema do Γ -desdobramento universal para g consiste em descrever todas as deformações qualitativamente distintas que aparecem por pequenas perturbações de g . O objetivo é definir uma família $(G(x, \lambda, \alpha))_{\alpha \in A}$ tal que $G(x, \lambda, \alpha_0) = g(x, \lambda)$ e para todo germe $h(x, \lambda) = g(x, \lambda) + p(x, \lambda)$, onde p é uma perturbação “pequena”, $\exists \alpha$ tal que $G(x, \lambda, \alpha) \sim h(x, \lambda)$. O termo Γ -desdobramento é usado para representar famílias de perturbações de g que preservam as simetrias de Γ .

Nesta introdução nos resta especificar com qual relação de equivalência trabalharemos. É o que fazemos a seguir.

Definição 2.1 Definimos $L_\Gamma(V)$ como o conjunto das aplicações lineares $L : V \rightarrow V$ Γ -equivariantes e $L_\Gamma^0(V)$ como a componente conexa de $L_\Gamma(V) \cap GL(V)$ que contém Id .

Lema 2.1 (Lema de Schur) $L_\Gamma(V)$ é uma álgebra associativa sobre $\mathbf{R}$ e isomorfa a $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$, onde $\mathbf{H}$ é a álgebra (4-dimensional) dos quatérnios [6].

Exemplo 2.1 A ação de Γ em V é absolutamente irredutível se, e somente se, $L_\Gamma(V) \simeq \mathbf{R}$. De fato, $\forall L : V \rightarrow V$ linear Γ -equivariante é, neste caso, do tipo $c \cdot Id$, $c \neq 0$. Aqui, $L_\Gamma^0(V) = \{c \cdot Id / c > 0\}$.

Definição 2.2 Seja Γ um grupo de Lie compacto e $g, h \in \vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ problemas de bifurcação. Então, g e h são Γ -equivalentes – $g \stackrel{\Gamma}{\sim} h$ – se existe um difeomorfismo local $(x, \lambda) \mapsto (X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$ e um germe a valores matriciais $S(x, \lambda)$ tais que

$$g(x, \lambda) = S(x, \lambda)h(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)),$$

satisfazendo

- (i) $X(0, 0) = 0, \Lambda(0) = 0, \Lambda'(0) > 0$
- (ii) $X \in \vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$
- (iii) $S(\gamma x, \lambda)\gamma = \gamma S(x, \lambda)$
- (iv) $S(0, 0), (dX)_{0,0} \in L_\Gamma^0(V)$.

Ainda, se $\Lambda(\lambda) \equiv \lambda$, então dizemos que g e h são fortemente equivalentes ($g \stackrel{f}{\sim} h$).

As condições (ii) e (iii) da Definição 2.2 garantem que Γ -equivalência preserva Γ -equivariância. A condição (iv) se faz necessária na questão da estabilidade de soluções, como veremos no parágrafo seguinte.

2.1 Estabilidade de Soluções

Para germes $g, h \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$, $g \sim^\Gamma h$, e (x_0, λ_0) solução assintoticamente estável de g , o objetivo deste parágrafo é dar uma condição suficiente sobre tais germes para que $(X_0, \Lambda_0) = (X(x_0, \lambda_0), \Lambda(\lambda_0))$ seja solução também assintoticamente estável de h . Notemos que desde que (iv) se verifica, $S(x_0, \lambda_0)$ é inversível; logo, $g(x_0, \lambda_0) = 0 \Leftrightarrow h(X_0, \Lambda_0) = 0$.

Teorema 2.1 *Seja $\Sigma \subset \Gamma$ subgrupo de isotropia e (x_0, λ_0) solução de $g = 0$ com $\Sigma_{x_0} = \Sigma$. Se for possível decompor V como*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k,$$

onde cada V_j é Σ -absolutamente irredutível, então a estabilidade linear de (x_0, λ_0) é preservada por Γ -equivalência.

Para a demonstração deste teorema, usamos o seguinte lema:

Lema 2.2 *A estabilidade orbital linear de (x_0, λ_0) de g é preservada por Γ -equivalência se, e somente se, for preservada por Γ -equivalências da forma $S(x, \lambda)g(x, \lambda)$, onde $S(x, \lambda)$ é como na Definição 2.2.*

Prova (Teorema 2.1):

De início usamos o Lema 2.2 para provar o teorema somente para

$$h(x, \lambda) = S(x, \lambda)g(x, \lambda) \tag{2.1}$$

Pela regra da cadeia,

$$(dh)_{x_0, \lambda_0} = S(x_0, \lambda_0)(dg)_{x_0, \lambda_0}, \tag{2.2}$$

onde as três matrizes acima satisfazem (iii) da Definição 2.2.

$\forall \sigma \in \Sigma$,

$$S(x_0, \lambda_0)\sigma = S(\sigma x_0, \lambda_0)\sigma = \sigma S(x_0, \lambda_0),$$

ou seja, $S(x_0, \lambda_0)$ é Σ -equivariante. Como cada V_j é componente isotípica, segue do Teorema 0.3 que $S(x_0, \lambda_0)(V_j) \subset V_j$; ou ainda, como V_j é Σ -absolutamente irredutível,

$$S(x_0, \lambda_0)|_{V_j} = c_j \cdot Id_{V_j}, \forall j = 1, \dots, k.$$

Notemos que $c_j > 0$, pois $S(x_0, \lambda_0) \in L_\Gamma^0(V)$. Analogamente,

$$(dg)_{x_0, \lambda_0}|_{V_j} = d_j \cdot Id_{V_j}, \forall j = 1, \dots, k.$$

Assim, d_j 's são os auto-valores (reais) de $(dg)_{x_0, \lambda_0}$. A partir da igualdade (2.2), segue que os auto-valores de $(dh)_{x_0, \lambda_0}$ são $c_j d_j, j = 1, \dots, k$, onde $c_j > 0$, isto é,

$$\text{ sinal}(d_j) = \text{ sinal}(c_j d_j), \forall j = 1, \dots, k.$$

□

Observação 2.1 *O sinal do determinante de $(dh)_{x, \lambda}$ é um invariante por Γ -equivalência. De fato, para $g \sim^\Gamma h$,*

$$\det(dg)_{x, \lambda} = \det S(x, \lambda) \cdot \det(dh)_{X, \Lambda} \cdot \det(dX)_{x, \lambda},$$

e desde que o primeiro e o terceiro determinantes do segundo membro são positivos (ver Definição 2.2, iv), segue o resultado.

2.2 Uma condição para Γ -equivalência

O resultado básico desta seção é o Teorema 2.2 seguinte.

Definição 2.3 *Dado um germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda}(\Gamma)$, definimos o espaço tangente restrito de g – $RT(g, \Gamma)$ – como o conjunto dos germes do tipo*

$$Sg + (dg)X, \tag{2.3}$$

onde

- (i) $S(\gamma x, \lambda)\gamma = \gamma S(x, \lambda), \forall \gamma \in \Gamma$
- (ii) X é Γ -equivariante
- (iii) $X(0,0) = 0$.

A razão desta definição é o fato de que se tomamos uma família $G(x, \lambda, t)$ de equivalências fortes de g tal que $G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda)$ e cuja mudança de variáveis preserva a origem, a expressão do germe

$$\left(\frac{dG(x, \lambda, t)}{dt} \right)_{t=0}$$

é exatamente como (2.3).

Antes de enunciarmos o Teorema 2.2, damos uma descrição algébrica de $RT(g, \Gamma)$ a qual será útil em cálculos futuros:

Lema 2.3 *O conjunto de germes definido como*

$$\vec{M}_{x,\lambda}(\Gamma) = \{g \in \vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma) / g(0,0) = 0\}$$

é um módulo finitamente gerado sob o anel $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$; digamos,

$$\vec{M}_{x,\lambda}(\Gamma) = \langle X_1, \dots, X_s \rangle$$

Denotemos por $\vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ o conjunto de matrizes $n \times n$ $S(x, \lambda)$ que satisfazem (i) da Definição 2.3. Para tal conjunto, temos o seguinte lema:

Lema 2.4 *$\vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ é finitamente gerado sob o anel $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$; digamos,*

$$\vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma) = \langle S_1, \dots, S_r \rangle$$

Proposição 2.1 *Para cada $h \in \vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$, $RT(h, \Gamma)$ é um submódulo de $\vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ finitamente gerado sob $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$ da seguinte forma:*

$$RT(h, \Gamma) = \langle S_1 h, \dots, S_r h, (dh)X_1, \dots, (dh)X_s \rangle \quad (2.4)$$

A validade desta expressão segue diretamente dos Lemas 2.3 , 2.4 e da definição de $RT(h, \Gamma)$.

Teorema 2.2 *Se $h, p \in \vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$, com*

$$RT(h + tp, \Gamma) = RT(h, \Gamma), \quad (2.5)$$

$$\forall t \in [0, 1], \text{ então } (h + tp) \not\sim h.$$

A demonstração deste teorema é bastante técnica e damos aqui apenas as idéias gerais: primeiramente, provamos o resultado localmente construindo a equivalência forte entre h e $(h + tp)$ para t suficientemente pequeno; o passo seguinte é usar a conexidade de $[0, 1]$ para estender este resultado local.

Para o exemplo seguinte, usaremos a seguinte observação:

Observação 2.2 *Seja $g \in \vec{\varepsilon}(\mathbf{D}_n)$. Consideremos o jacobiano $(dg)_z$ nas variáveis $z, \bar{z}$, ou seja,*

$$(dg)_z = \begin{bmatrix} g_z & g_{\bar{z}} \\ \bar{g}_z & \bar{g}_{\bar{z}} \end{bmatrix}.$$

Assim, para cada $w \in \mathbf{C}$ temos:

$$(dg)_z(w, \bar{w}) = \begin{bmatrix} g_z & g_{\bar{z}} \\ \bar{g}_z & \bar{g}_{\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_z w + g_{\bar{z}} \bar{w} \\ \bar{g}_z w + \bar{g}_{\bar{z}} \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_z w + g_{\bar{z}} \bar{w} \\ g_z w + g_{\bar{z}} \bar{w} \end{bmatrix}.$$

A última igualdade segue pois $\bar{g}_{\bar{z}} = \bar{g}_z$ e $\bar{g}_z = g_{\bar{z}}$. Logo, podemos definir

$$(dg)_z w = g_z w + g_{\bar{z}} \bar{w}.$$

Exemplo 2.2 Vamos calcular $RT(h, \mathbf{D}_n)$, $n \geq 3$, com a ação de $\mathbf{D}_n$ sobre $\mathbf{C}$ definida no Exemplo 0.8

(i) Geradores de $\varepsilon(\mathbf{D}_n)$:

$$u = z\bar{z}, \quad v = z^n + \bar{z}^{n-1}$$

(ii) Geradores de $\vec{\varepsilon}(\mathbf{D}_n)$:

$$g_1(z) = z, \quad g_2(z) = \bar{z}^{n-1}$$

Os cálculos para obtenção de (i) e (ii) estão feitos no Capítulo 3, seção 3.1 .

(iii) Geradores de $\vec{\varepsilon}(\mathbf{D}_n)$:

$$S_1(z)(w) = w, \quad S_2(z)(w) = z^2\bar{w}, \quad S_3(z)(w) = \bar{z}^{n-2}\bar{w}, \quad S_4(z)(w) = z^n w$$

Os cálculos para obtenção de (iii) - puramente técnicos - serão omitidos.

(iv) Geradores de $\vec{M}(\mathbf{D}_n)$:

Por (ii) notamos facilmente que $\vec{M}(\mathbf{D}_n) = \vec{\varepsilon}(\mathbf{D}_n)$.

Vamos estabelecer a seguinte notação:

$$h = p(u, v)z + q(u, v)\bar{z}^{n-1} \equiv [p, q]. \quad (2.6)$$

Por (ii) e (iii) podemos obter os geradores de $RT(h, \mathbf{D}_n)$ do tipo Sh - os quais são tomados convenientemente, como podemos notar abaixo:

$$\begin{aligned} S_1(z)(h) &= [p, q] \\ (S_2 + uS_1)(z)(h) &= [2up + vq, 0] \\ S_3(z)(h) &= [u^{n-2}q, p] \\ (S_4 + uS_3)(z)(h) &= [2u^{n-1}q + vp, 0] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para obter os geradores do tipo $(dh)_z X$, com $X \in M(\mathbf{D}_n)$, usamos a expressão de $(dh)_z$ dada na Observação 2.2 anterior, ou seja,

$$(dh)_z X = h_z X + h_{\bar{z}} \bar{X} \quad (2.8)$$

Derivando (2.6) com relação a z e $\bar{z}$, obtemos:

$$\begin{aligned} h_z &= p + up_u + nu^{n-1}q_v + np_v z^n + q_u \bar{z}^n \\ h_{\bar{z}} &= p_u z^2 + (nup_v + (n-1)q + uq_u) \bar{z}^{n-2} + nq_v \bar{z}^{2n-2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Agora, usamos (2.8), (2.9) e (ii) :

$$\begin{aligned} (dh)_z(z) &= [p + 2up_u + nvp_v, (n-1)q + 2uq_u + nvq_v] \\ (dh)_z(\bar{z}^{n-1}) &= [vp_u + 2nu^{n-1}p_v + (n-1)u^{n-1}q_u, p + vq_u + 2nu^{n-1}q_v] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podemos, ainda, usar (2.7) para substituir tais geradores por outros dois mais simples:

$$(dh)_z(z) - S_1(z)(h) \text{ e } (dh)_z(\bar{z}^{n-1}) - S_3(z)(h)$$

Portanto, juntando os seis geradores de $RT(h, \mathbf{D}_n)$:

$$\begin{aligned} RT(h, \mathbf{D}_n) &= \langle [p, q], [2up + vq, 0], [u^{n-2}q, 0], [2u^{n-1}q + vp, 0], \\ &\quad [2up_u + nvp_v, nvq_v + 2uq_u + (n-2)q], \\ &\quad [vp_u + 2nu^{n-1}p_v + (n-2)u^{n-2}q, 2nu^{n-1}q_v + vq_u] \rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.3 Desdobramentos Γ -equivariantes

Seja Γ um grupo de Lie compacto e $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

Definição 2.4 *Um Γ -desdobramento a k parâmetros de g é um germe Γ -equivariante $G(x, \lambda, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}^k$, satisfazendo $G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda)$.*

Definição 2.5 *Para $H(x, \lambda, \beta)$ e $G(x, \lambda, \alpha)$ Γ -desdobramentos de $g(x, \lambda)$ a l e a k parâmetros respectivamente, dizemos que H se fatora através de G se*

$$H(x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta) \cdot G(X(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), A(\beta)), \quad (2.12)$$

com $S(x, \lambda, 0) = Id$, $X(x, \lambda, 0) = x$, $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$, $A(0) = 0$, $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma)$ e $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma)$.

Basicamente, esta definição afirma que para cada β , $H(\cdot, \cdot, \beta)$ é Γ -equivalente a $G(\cdot, \cdot, A(\beta))$.

Definição 2.6 *G é dito um Γ -desdobramento versal se todo Γ -desdobramento de g se fatora através de G . Tal Γ -desdobramento é dito universal se depende de um número mínimo de parâmetros; este número mínimo é chamado Γ -codimensão de g ($\text{codim}_{\Gamma} g$).*

2.3.1 Uma condição de Γ -desdobramento universal

Os resultados centrais deste parágrafo são o Teorema 2.3 e o Corolário 2.1. Começamos definindo um espaço tangente convenientemente: queremos acrescentar a $RT(h, \Gamma)$ os germes do tipo $(dh)_{x,\lambda}X(x, \lambda)$ com $X(0, 0) \neq 0$ e os germes do tipo $f(\lambda)h_\lambda$. Assim, considerando os germes $Y_1, \dots, Y_m$ geradores dos germes em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ que não se anulam na origem, ou seja, satisfazendo

$$\vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma) = \vec{M}_{x,\lambda}(\Gamma) \oplus \mathbf{R}\{Y_1, \dots, Y_m\}, \quad (2.13)$$

podemos dar a definição seguinte.

Definição 2.7 Definimos o espaço tangente Γ -equivariante de h por

$$T(h, \Gamma) = RT(h, \Gamma) + \mathbf{R}\{(dh)_{x,\lambda}(Y_1), \dots, (dh)_{x,\lambda}(Y_m), h_\lambda, \lambda h_\lambda, \lambda^2 h_\lambda, \dots\}, \quad (2.14)$$

com $Y_1, \dots, Y_m$ dados na expressão (2.13).

Teorema 2.3 (Teorema do desdobramento universal Γ -equivariante) *Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando em V , $g \in \vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ problema de bifurcação e $G \in \vec{\varepsilon}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma)$ um Γ -desdobramento a k parâmetros de g . Então, g é versal se, e somente se,*

$$\vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma) = T(g, \Gamma) + \mathbf{R}\{G_{\alpha_1}(x, \lambda, 0), \dots, G_{\alpha_k}(x, \lambda, 0)\} \quad (2.15)$$

Demonstração:

É fácil notar que (2.15) é uma condição necessária para que G seja versal: a inclusão do segundo membro em $\vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ é óbvia; por outro lado, para cada $p(x, \lambda) \in \vec{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$, tomamos o Γ desdobramento a um parâmetro ϵ dado por

$$g(x, \lambda) + \epsilon p(x, \lambda). \quad (2.16)$$

Como G é versal, (2.16) se fatora através de G como na expressão (2.12). Agora, basta derivar (2.12) com relação a ϵ em $\epsilon = 0$ para obter $p(x, \lambda)$ como um elemento de

$$T(g, \Gamma) + \mathbf{R} \cdot \{G_{\alpha_1}(x, \lambda, 0), \dots, G_{\alpha_k}(x, \lambda, 0)\}.$$

A recíproca é um resultado mais profundo e depende do Teorema de Preparação Equivariante [6]. $\square$

Na procura de Γ -desdobramentos *universais* de um germe g , precisamos encontrar complementos de $T(g, \Gamma)$ em $\vec{\varepsilon}_{x, \lambda}(\Gamma)$ (isto se verifica facilmente a partir da expressão (2.15)):

Corolário 2.1 *Seja $g \in \vec{\varepsilon}_{x, \lambda}(\Gamma)$ e $W \subset \vec{\varepsilon}_{x, \lambda}(\Gamma)$ subespaço vetorial tal que*

$$\vec{\varepsilon}_{x, \lambda}(\Gamma) = T(g, \Gamma) \oplus W,$$

com $\{p_1(x, \lambda), \dots, p_k(x, \lambda)\}$ base para W . Então,

$$G(x, \lambda, \alpha) = g(x, \lambda) + \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i(x, \lambda) \quad (2.17)$$

é um Γ -desdobramento universal de g .

Demonstração:

$G_{\alpha_i}(x, \lambda, 0) = p_i(x, \lambda)$. Logo, vale (2.15) e pelo Teorema 2.3 segue que G é versal. Ainda, k é o número mínimo de parâmetros, pois $\text{codim}_{\Gamma} g = k$. Portanto, G é universal. $\square$

2.3.2 Cálculo de $T(h, \mathbf{D}_n)$, $n \geq 3$

Para $h : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbf{D}_n$ -equivariante, temos sua expressão geral dada por

$$h(z, \lambda) = p(u, v, \lambda)z + q(u, v, \lambda)\bar{z}^{n-1},$$

onde $u = z\bar{z}$, $v = z^n + \bar{z}^n$ e $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ germes quaisquer. Vamos usar a notação $h = [p, q]$.

Desde que $\vec{\varepsilon}_{z, \lambda}(\mathbf{D}_n)$ é gerado por z e $\bar{z}^{n-1}$, $\vec{\varepsilon}_{z, \lambda}(\mathbf{D}_n) \setminus \vec{M}_{z, \lambda}(\mathbf{D}_n) = \{0\}$; logo, não temos $Y_1, \dots, Y_m$ da expressão (2.14), ou seja,

$$T(h, \mathbf{D}_n) = RT(h, \mathbf{D}_n) + \varepsilon_{\lambda}\{h_{\lambda}\}.$$

Assim,

$$T(h, \mathbf{D}_n) = RT(h, \mathbf{D}_n) + \varepsilon_{\lambda}\{[p_{\lambda}, q_{\lambda}]\}, \quad (2.18)$$

com a expressão de $RT(h, \mathbf{D}_n)$ dada em (2.11).

Capítulo 3

Bifurcação com D_n -simetria

Este é o capítulo central de todo o trabalho, no qual estudamos problemas de bifurcação D_n -equivariantes. Para resolver tais problemas, trabalhamos basicamente sob dois pontos de vista: um geométrico, com o qual resolvemos os problemas D_n -equivariantes genéricos quando $n \geq 5$, e um algébrico, baseado no problema do Reconhecimento e Desdobramento Universal para resolver problemas D_3 -equivariantes. Com o auxílio de análise numérica, foi desenvolvido um particular exemplo de campo D_5 -equivariante no plano para o qual foram obtidos resultados globais sobre a dinâmica para cada valor do parâmetro de bifurcação λ .

A ação canônica do grupo diedral D_n (com $2n$ elementos) sobre C é gerada por 2 elementos (ξ e k) da seguinte forma:

$$\xi \cdot z = e^{2\pi i/n} z \text{ e } k \cdot z = \bar{z}, \quad (3.1)$$

onde ξ é a rotação de $\frac{2\pi}{n}$ e k é a conjugação (ou reflexão com relação ao eixo real). Equivalentemente, usando a identificação $R^2 \simeq C$ e a definição de D_n como o grupo gerado pelas matrizes de rotação

$$R_{2\pi j/n} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi j/n) & -\sin(2\pi j/n) \\ \sin(2\pi j/n) & \cos(2\pi j/n) \end{bmatrix}, j = 0, \dots, n-1, \quad (3.2)$$

e pelo “flip”

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

a ação standard de D_n sobre C é definida através do produto matricial.

3.1 Forma geral de germes em $\varepsilon(D_n)$ e em $\vec{\varepsilon}(D_n)$

Começamos por obter a expressão geral para polinômios $f \in \wp(D_n)$:

Proposição 3.1 *Se $f : C \rightarrow R$ é um polinômio D_n -invariante, então existe um polinômio $h : R^2 \rightarrow R$ tal que*

$$f(z) = h(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n). \quad (3.4)$$

Demonstração:

Inicialmente, observemos que o polinômio $f(z)$ pode ser escrito como $f(z) = \sum_{j,k} a_{jk} z^j \bar{z}^k$, com $a_{jk} \in C$, pois usando a identificação

$$z = x + iy \in C \mapsto \left(x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) \in R^2 \quad (3.5)$$

temos:

$$f(z) \equiv f(x, y) = \sum_{r,s} b_{rs} x^r y^s, \quad b_{rs} \in R \Rightarrow$$

$$f(z) = \sum_{r,s} b_{rs} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^r \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^s = \sum_{j,k} a_{jk} z^j \bar{z}^k, \quad a_{jk} \in \mathbb{C}.$$

É suficiente impor a condição de invariância $f(\gamma \cdot z) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ somente para os geradores $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ e k :

- $f(e^{\frac{2\pi i}{n}} z) = \sum_{j,k} a_{jk} e^{\frac{2\pi i j}{n}} z^j e^{\frac{-2\pi i k}{n}} \bar{z}^k = \sum_{j,k} a_{jk} e^{\frac{2\pi i (j-k)}{n}} z^j \bar{z}^k.$
Então,

$$f(e^{\frac{2\pi i}{n}} z) = f(z) \Leftrightarrow a_{jk} = a_{jk} e^{\frac{2\pi i (j-k)}{n}} \quad (3.6)$$

- $f(k \cdot z) = f(\bar{z}) = \sum_{j,k} a_{jk} \bar{z}^j z^k = \sum_{j,k} a_{jk} z^k \bar{z}^j.$
Então,

$$f(k \cdot z) = f(z) \Leftrightarrow a_{kj} = a_{jk} \quad (3.7)$$

Ainda,

$$\overline{f(z)} = f(z), \text{ ou seja, } \sum_{j,k} a_{jk} \bar{z}^j z^k = \sum_{j,k} a_{jk} z^j \bar{z}^k.$$

Logo,

$$\overline{a_{jk}} = a_{kj}. \quad (3.8)$$

De (3.7) e (3.8) temos $a_{jk} = \overline{a_{jk}}$, isto é, $a_{jk} \in \mathbb{R}$.

De (3.6) temos $a_{jk} = 0$ ou $j \equiv k \pmod{n}$.

Assim,

$$f(z) = \sum_{j \leq k} c_{jk} (z^j \bar{z}^k + \bar{z}^j z^k), \quad (3.9)$$

$$\text{onde } c_{jk} = \begin{cases} a_{jk} & \text{se } j \neq k \\ a_{jk}/2 & \text{se } j = k \end{cases}$$

Fatorando $(z\bar{z})$ e usando o fato de que $(j-k)$ é múltiplo de n , temos:

$$f(z) = \sum_{m,n} d_{mn} (z\bar{z})^m (z^{ln} + \bar{z}^{ln}) \quad (3.10)$$

para determinados d_{mn} . Finalmente, usamos a identidade

$$z^{ln} + \bar{z}^{ln} = (z^n + \bar{z}^n)(z^{(l-1)n} + \bar{z}^{(l-1)n}) - z\bar{z}(z^{(l-2)n} + \bar{z}^{(l-2)n})$$

indutivamente para obtermos

$$f(z) = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\alpha (z^n + \bar{z}^n)^\beta, \quad (3.11)$$

para certos coeficientes $p_{\alpha\beta}$. Agora, basta definir

$$h(x, y) = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Observação 3.1 *Segue da Proposição 3.1 que $u(z) = z\bar{z}$ e $v(z) = z^n + \bar{z}^n$ formam base de Hilbert de $\wp(\mathbf{D}_n)$.*

Proposição 3.2 *Dado um germe $f \in \varepsilon(\mathbf{D}_n)$, existe um germe diferenciável $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que*

$$f(z) = h(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n).$$

Demonstração:

Segue diretamente do Teorema de Schwarz (Teorema 0.5) e da Observação 3.1 anterior.

Consequência: O discriminante de $\mathbf{D}_n$ é $\rho(z, \bar{z}) = (z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n)$ (ver Lema 0.3) e

$$(d\rho)_z = \begin{bmatrix} \bar{z} & z \\ n\bar{z}^{n-1} & n\bar{z}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Então, $\det(d\rho)_z = n(\bar{z}^n - z^n) \neq 0$ para certos valores de z . Logo, pelo Lema 0.3, $\wp(\mathbf{D}_n)$ é um anel polinomial.

Proposição 3.3 *Se $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um germe $\mathbf{D}_n$ -equivariante, então existem germes $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$g(z) = p(u, v)z + q(u, v)\bar{z}^{n-1}, \quad (3.12)$$

com $u = z\bar{z}, v = z^n + \bar{z}^n$.

Demonstração:

Primeiramente, vejamos a forma geral de um polinômio $g_1 \in \vec{\varepsilon}(\mathbf{D}_n)$.

$$g_1(z) = \sum_{j,k} b_{jk} z^j \bar{z}^k, \quad b_{jk} \in \mathbb{C}. \quad (3.13)$$

- Ação do flip: $g_1(k \cdot z) = k \cdot g_1(z)$, isto é, $\overline{g_1(\bar{z})} = g_1(z) \Rightarrow \sum \overline{b_{jk} \bar{z}^j z^k} = \sum b_{jk} z^j \bar{z}^k \Rightarrow \sum \overline{b_{jk}} z^j \bar{z}^k = \sum b_{jk} z^j \bar{z}^k$.

Logo,

$$b_{jk} \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

- Ação de $\xi = e^{\frac{2\pi}{n}}$: $g_1(\xi \cdot z) = \xi \cdot g_1(z) \Rightarrow g_1(z) = \xi^{-1} \cdot g_1(\xi \cdot z) \Rightarrow \sum b_{jk} z^j \bar{z}^k = \sum b_{jk} e^{(j-k-1)\frac{2\pi}{n}i} z^j \bar{z}^k \Rightarrow b_{jk} = b_{jk} e^{(j-k-1)\frac{2\pi}{n}i}$.

Logo,

$$b_{jk} = 0 \quad \text{ou} \quad j \equiv k + 1 \pmod{n} \quad (3.15)$$

$$g_1(z) = \sum_{j \leq k} b_{jk} (z\bar{z})^j \bar{z}^{k-j} + \sum_{j > k} b_{jk} (z\bar{z})^k z^{j-k}.$$

Por (3.15),

$$g_1(z) = \sum_{j \leq k} b_{jk}(z\bar{z})^j \bar{z}^{ln-1} + \sum_{j > k} b_{jk}(z\bar{z})^k z^{ln+1}, l = 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots$$

Logo,

$$\sum_{\substack{j,k \\ l=1,2,\dots}} (c_{jl}(z\bar{z})^j \bar{z}^{(l+1)n-1} + d_{kl}(z\bar{z})^k z^{ln+1}), \quad (3.16)$$

para determinados coeficientes c_{jl} e d_{kl} . Como cada parcela $c_{jl}(z\bar{z})^j$ e $d_{kl}(z\bar{z})^k$ são $\mathbf{D}_n$ - invariantes, segue de (3.16) que $\bar{z}^{(l+1)n-1}$ e z^{ln+1} , $l = 0, 1, \dots$, geram $\vec{\epsilon}(\mathbf{D}_n)$. Entretanto, a partir das identidades

$$\begin{aligned} z^{(l+2)n+1} &= (z^n + \bar{z}^n)z^{(l+1)n+1} - (z\bar{z})^n z^{ln+1} \\ \bar{z}^{(l+3)n-1} &= (z^n + \bar{z}^n)\bar{z}^{(l+1)n-1} - (z\bar{z})^n \bar{z}^{ln-1} \end{aligned}$$

observamos que para $l = 0$ temos z^{2n+1} em função de z^{n+1} e z , $\bar{z}^{3n-1}$ em função de $\bar{z}^{2n-1}$ e $\bar{z}^{n-1}$. Concluimos, então, que os geradores z^{ln+1} e $\bar{z}^{(l+1)n-1}$ são redundantes para $l \geq 2$. Ainda,

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= (z^n + \bar{z}^n)z - (z\bar{z})\bar{z}^{n-1} \\ \bar{z}^{2n-1} &= (z^n + \bar{z}^n)\bar{z}^{n-1} - (z\bar{z})^{n-1}z, \end{aligned}$$

e, portanto, os geradores com $l = 1$ são também redundantes. Logo, temos

$$z \text{ e } \bar{z}^{n-1} \quad (3.17)$$

como os geradores de $\vec{\wp}(\mathbf{D}_n)$. Assim, a partir da Observação 3.1 e do Teorema de Poénaru (Teorema 0.7) segue que

$$g(z) = p(u, v)z + q(u, v)\bar{z}^{n-1}.$$

Consequência: A igualdade $g(z) = p(u, v)z + q(u, v)\bar{z}^{n-1} \equiv 0$ implica em $p \equiv q \equiv 0$. De fato:

Supondo $q \not\equiv 0$, isto é, se $\exists z / q(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n) \neq 0$, segue da continuidade de q que o mesmo ocorre numa vizinhança de z . Logo, nesta vizinhança,

$$\frac{-p(u, v)}{q(u, v)}(z\bar{z}) = \bar{z}^n$$

o que é absurdo, pois $\bar{z}^n$ não é real em todos os pontos de uma vizinhança. Assim, $q \equiv 0$ e, conseqüentemente, $p \equiv 0$. Concluimos, então, que $\vec{\varepsilon}(\mathbf{D}_n)$ é um módulo livre sobre $\varepsilon(\mathbf{D}_n)$.

3.2 Subgrupos de Isotropia de D_n e seus subespaços de ponto fixo

Nesta seção, descrevemos o subgrupo de isotropia Σ_z em D_n , para todo $z \in \mathbb{C}$ nos casos n par e n ímpar. As propriedades abaixo nos levam a algumas simplificações nos cálculos:

Propriedade 1. Pontos numa mesma órbita têm subgrupos de isotropia conjugados (cf. Observação 1.1); assim, podemos escolher um representante de cada órbita.

Propriedade 2. Considerando a ação de um grupo de Lie Γ num espaço vetorial V , para $t \neq 0$ real e para todo $x \in V$, $\Sigma_{tx} = \Sigma_x$. De fato,

$$\Sigma_{tx} = \{\gamma \in \Gamma / \gamma \cdot (tx) = tx\} = \{\gamma \in \Gamma / t(\gamma \cdot x) = tx\} = \Sigma_x.$$

Isto é, pontos numa mesma reta pela origem – exceto a origem – têm mesmo subgrupo de isotropia. Assim, podemos nos restringir a calcular $\Sigma_z, z = e^{i\theta}$ no círculo unitário.

Propriedade 3. Todo $z = e^{i\theta}$ está na órbita de um elemento $e^{i\varphi}$, para $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}$.

Prova:

Primeiro, notamos que podemos escolher $l \in \mathbb{N}$ tal que $\xi^{-l}z = e^{(\theta - \frac{2\pi l}{n})i}$, com $0 \leq \varphi = \theta - \frac{2\pi l}{n} \leq \frac{2\pi}{n}$. Logo, z está na órbita de $e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{n}$. Agora, se $\frac{\pi}{n} < \theta \leq \frac{2\pi}{n}$, tomamos $(\xi k) \cdot z = e^{\frac{2\pi k}{n}} \cdot \bar{z} = e^{(\frac{2\pi k}{n} - \theta)i}$ que satisfaz $0 \leq \frac{2\pi k}{n} - \theta < \frac{\pi}{n}$.

Nota. Para o caso n ímpar, verifiquemos que podemos assumir $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{n}$. Basta mostrar que $e^{\frac{\pi i}{n}}$ está na órbita de -1 (pois como $\Sigma_{-1} = \Sigma_1$, $\Sigma_{e^{\frac{\pi i}{n}}}$ é conjugado de Σ_1). De fato,

$$n = 2m + 1 \Rightarrow \text{para este } m, \xi^m \cdot e^{\frac{\pi i}{n}} = e^{\frac{2\pi m i}{n}} \cdot e^{\frac{\pi i}{n}} = e^{\frac{(2m+1)\pi i}{n}} = e^{\pi i} = -1.$$

Vamos, então, calcular $\Sigma_{e^{i\theta}}$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$:

$$\boxed{\theta = 0}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \mathbf{Z}_2(\mathbf{k}) = \{Id, \mathbf{k}\} \\ \text{Fix}(\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})) &= \{z \in \mathbf{C} / z = \bar{z}\} = \mathbf{R}\end{aligned}$$

A primeira expressão segue do fato de que $\mathbf{D}_n$ é formado de rotações e reflexão $\mathbf{k}$.

$$\boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{n}}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{e^{\theta i}} &= \{\gamma \in \mathbf{D}_n / \gamma e^{\theta i} = e^{\theta i}\} = \mathbf{1} = \{Id\} \\ \text{Fix}(\mathbf{1}) &= \mathbf{C}\end{aligned}$$

A primeira expressão segue trivialmente por argumento de ângulos.

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{n}} \text{ (para o caso } n \text{ par)}$$

Tomando $\xi^s \mathbf{k}$, vemos que $(\xi^s \mathbf{k}) \cdot e^{\frac{\pi i}{n}} = e^{\frac{\pi i}{n}}$ se $s = 1$; logo, $(\xi \mathbf{k}) \in \Sigma_{e^{\frac{\pi i}{n}}}$, e é fácil ver que não existe outro elemento exceto Id . Portanto,

$$\begin{aligned}\Sigma_{e^{\frac{\pi i}{n}}} &= \mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k}) \\ \text{Fix}(\mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k})) &= \{z \in \mathbf{C} / (\xi \mathbf{k})z = z\} = \{z = |z|e^{\theta i} / e^{\frac{2\pi i}{n} - \theta i} |z| = |z|e^{\theta i}\} = \\ &= \{z = |z|e^{\theta i} / \theta = \frac{\pi i}{n}\} = e^{\frac{\pi i}{n}} \mathbf{R}\end{aligned}$$

$$\boxed{z=0}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \mathbf{D}_n \\ \text{Fix}(\mathbf{D}_n) &= \{0\}\end{aligned}$$

Para todos os demais valores de $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, temos $z = \gamma \cdot w$, onde γ é dado pela Propriedade 3. tal que $\gamma \cdot w$ tem seu argumento no intervalo $[0, \frac{\pi}{n}]$. Neste caso,

$$\Sigma_z = \gamma \Sigma_w \gamma^{-1}$$

e este subgrupo de isotropia é não-trivial somente quando $\Sigma_w = \mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ ou $\mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k})$ (este segundo aparecendo somente no caso n par). Assim, temos os subgrupos de isotropia

$$\gamma \mathbf{Z}_2(\mathbf{k}) \gamma^{-1}, \text{ para cada } \gamma \in \mathbf{D}_n,$$

e para n par temos também

$$\gamma \mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k}) \gamma^{-1}, \text{ para cada } \gamma \in \mathbf{D}_n.$$

Usando a igualdade $\text{Fix}(\Sigma_{\gamma x}) = \gamma \text{Fix}(\Sigma_x)$ (seção 1.1, Propriedade 5), temos:

$$\text{Fix}(\gamma \mathbf{Z}_2(\mathbf{k}) \gamma^{-1}) = \gamma \text{Fix}(\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})) = \gamma \mathbf{R}.$$

Geometricamente, $\text{Fix}(\gamma \mathbf{Z}_2(\mathbf{k}) \gamma^{-1})$ é a reta em $\mathbb{C}$ dada como imagem do eixo real pela ação de $\gamma \in \mathbf{D}_n$. Para n par, temos também

$$\text{Fix}(\gamma \mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k}) \gamma^{-1}) = \gamma \text{Fix}(\mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k})) = \gamma(e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot \mathbf{R}).$$

Geometricamente, $\text{Fix}(\gamma \mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k}) \gamma^{-1})$ é a reta em $\mathbb{C}$ dada como imagem da reta $e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot \mathbf{R}$ pela ação de $\gamma \in \mathbf{D}_n$.

Observação 3.2 Sabemos – pela nota da Propriedade 3 – que $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ e $\mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k})$ são conjugados no caso n ímpar. Para o caso em que n é par isto não ocorre, ou seja, a menos de conjugação tem-se quatro subgrupos de isotropia. Mostramos tal fato a seguir.

Primeiro, mostremos que os elementos de $\mathbf{D}_n$ conjugados da reflexão $\mathbf{k}$ são do tipo $\xi^s \mathbf{k}$, com s par: Se $\gamma \mathbf{k} \gamma^{-1}$ é um conjugado genérico de $\mathbf{k}$, então $\gamma = \xi^l \mathbf{k}^m$, $l = 0, \dots, n-1$, $m = 0, 1$, (e, neste caso, $\gamma^{-1} = \mathbf{k}^m \xi^{-l}$).

$$\begin{aligned}
(\gamma k \gamma^{-1}) \cdot e^{\theta i} &= \left(e^{\frac{2l\pi i}{n}} k^m k k^m e^{-\frac{2l\pi i}{n}} \right) e^{\theta i} = \left(e^{\frac{2l\pi i}{n}} k e^{-\frac{2l\pi i}{n}} \right) e^{\theta i} \\
&= e^{\frac{2l\pi i}{n}} e^{(-\theta + \frac{2l\pi}{n})i} = e^{\frac{4l\pi i}{n}} e^{-\theta i} = (\xi^{2l} k) \cdot e^{\theta i} \Rightarrow \\
\gamma k \gamma^{-1} &= \xi^{2l} k.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\xi k = \xi^{2l} k \Leftrightarrow \xi = \xi^{2l} \Leftrightarrow e^{\frac{2\pi(2l-1)i}{n}} = 1;$$

mas esta última igualdade vale se, e somente se, $2l - 1$ é múltiplo de n , o que é absurdo para n par.

Portanto, para o caso n par, ξk e k não são conjugados, ou seja, $Z_2(k)$ e $Z_2(\xi k)$ não são subgrupos de isotropia conjugados.

É fácil notar geometricamente que, tanto para n par quanto para n ímpar, pontos sobre o eixo real ou sobre a reta $e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot \mathbb{R}$ têm órbitas com n elementos – tais órbitas são descritas como os vértices de um n -ágono regular; os demais pontos de $\mathbb{C}$, exceto a origem, têm órbitas com $2n$ elementos – estes são exatamente os pontos cujo subgrupo de isotropia é 1 . Nas figuras (2.1 a,b) temos as órbitas para os casos $n=4$, $n=5$.

(a) $n=4$

(b) $n=5$

Figura (2.1)

Ainda, usando a ação de D_n sobre C como as simetrias do n -ágono regular no plano, obtemos duas propriedades importantes:

1. Em D_{2m+1} as reflexões por retas pelos vértices do polígono regular com $2m+1$ lados centrado na origem e pela origem são todas conjugadas;
2. Em D_{2m} temos dois tipos de reflexões: por retas pelos vértices e retas pelos pontos médios dos lados do polígono.

Demonstração de (1.):

Observando a figura (2.1,b) temos que toda reflexão em D_{2m+1} é do tipo

$$\sigma = \xi^l k \xi^{-l}, \quad l = 0, 1, \dots, (2m+1) - 1;$$

Assim, se σ_1 e σ_2 são duas reflexões quaisquer,

$$\sigma_1 = \xi^{l_1} k \xi^{-l_1}, \quad \sigma_2 = \xi^{l_2} k \xi^{-l_2} \Rightarrow \sigma_2 = \xi^{l_2-l_1} \sigma_1 \xi^{-(l_2-l_1)},$$

ou seja, σ_1 e σ_2 são conjugados.

Nota. Para o caso n ímpar é importante observar que as retas pela origem e pelo ponto médio de cada aresta encontram o vértice oposto a esta aresta; logo, as reflexões coincidem. Por exemplo, no caso $n = 5$, a reflexão de um ponto z próximo a $e^{\frac{\pi i}{5}}$ é representada por $\xi^3 k \xi^{-3}$, (isto é, $Z_2(\xi k) = \xi^3 Z_2(k) \xi^{-3}$):

Figura (2.2)

Demonstração de (2.):

Basta notar que $\sigma_1 = k$ (reflexão com relação ao eixo real) e $\sigma_2 = \xi k$ (reflexão com relação à reta $e^{\frac{\pi i}{2m}} \cdot \mathbf{R}$) não são conjugadas, pois, como já vimos, os conjugados de k são $\xi^s k$, com s par.

Nota. É fácil mostrar que reflexões $\xi^l k \xi^{-l}$ para l par são conjugadas entre si, o mesmo valendo para o caso l ímpar.

3.3 Soluções de problemas de bifurcação com D_n -simetria, $n \geq 5$

A partir da forma geral de um germe D_n -equivariante

$$g(z, \lambda) = p(u, v, \lambda)z + q(u, v, \lambda)\bar{z}^{n-1} \quad (3.18)$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = z^n + \bar{z}^n$, usamos nesta seção basicamente o Lema dos Ramos Equivariantes (Teorema 1.1) para obter soluções para a equação $g(z, \lambda) = 0$. Obtemos também diagramas de bifurcação contendo informações sobre a estabilidade das soluções. Finalmente, fazemos a descrição da dinâmica de um especial campo D_5 -equivariante com a variação do parâmetro de bifurcação λ .

3.3.1 Obtenção de ramos de soluções

Começamos por analisar quais germes $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ D_n -equivariantes estão nas hipóteses do Lema dos Ramos Equivariantes:

Proposição 3.4 *Para $n \geq 3$, a ação de D_n sobre $\mathbb{C}$ é absolutamente irredutível.*

Demonstração:

Partindo da Definição 0.8 de ação absolutamente irredutível, devemos tomar uma matriz genérica 2×2

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

que comuta com D_n (para isto, basta comutar com os geradores de D_n). Então:

$$(i) Mk = kM \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & -d \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = c = 0 \Leftrightarrow M \text{ diagonal}.$$

$$(ii) M\xi = \xi M \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \xi = \xi \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \text{ com } \xi = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$a \sin(2\pi/n) = d \sin(2\pi/n).$$

Mas como $n \geq 3$, temos $\sin(2\pi/n) \neq 0$; logo, $a = d$. Portanto, a ação é absolutamente irredutível.

Observação 3.3 Para g como em (3.18) ser um problema de bifurcação D_n -equivariante é necessário e suficiente que $p(0, 0, 0) = 0$. Para verificar esta afirmação, devemos calcular o jacobiano $(dg)_{0,0}$ e, para isto, vamos considerá-lo nas variáveis $z, \bar{z}$, ou seja,

$$(dg)_{z,\lambda} = \begin{bmatrix} g_z & g_{\bar{z}} \\ \bar{g}_z & \bar{g}_{\bar{z}} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Assim, temos:

$$(dg)_{0,0} = \begin{bmatrix} p(0, 0, 0) & 0 \\ 0 & p(0, 0, 0) \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

A partir de (3.20) a conclusão é imediata.

Observação 3.4 Todo problema de bifurcação D_n -equivariante, com $n \geq 3$ tal que $p_\lambda(0, 0, 0) \neq 0$ satisfaz as hipóteses do Lema dos Ramos Equivariantes.

Proposição 3.5 Dado um problema de bifurcação $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como em (3.18) satisfazendo $p_\lambda(0, 0, 0) \neq 0$, se $q(0, 0, 0) \neq 0$ então não existe solução não-nula da equação $g(z, \lambda) = 0$ diferente das soluções dadas pelo Lema dos Ramos Equivariantes. Em outras palavras, o Lema nos dá todas as soluções possíveis de tal equação.

Demonstração:

Usando os resultados da seção 3.2, basta mostrar que não existe solução $z \neq 0$ tal que $\Sigma_z = 1$ ou D_n :

- $\Sigma_z = D_n \Rightarrow z = 0$: solução trivial
- $\Sigma_z = 1$: Neste caso, pelas Propriedades (2.) e (3.) seção 3.2, $z = |z|e^{i\theta}$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{n}$; logo, $\text{Im}(z) \neq 0$. Mas desde que $\text{Im}(z) \neq 0$, z e $\bar{z}^{n-1}$ não são colineares (de fato, se $z = \alpha\bar{z}^{n-1}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, então $z\bar{z} = \alpha\bar{z}^n$, ou seja, $\bar{z}^n = \frac{|z|^2}{\alpha} \in \mathbf{R}$, o que é absurdo). Assim, resolver $g = 0$ é equivalente a resolver $p = q = 0$, e isto não é possível em nenhuma vizinhança de $(0, 0, 0)$ pois $q(0, 0, 0) \neq 0$. Portanto, não existe solução $z \neq 0$ com $\Sigma_z = 1$.

Agora, suponhamos $g \in \vec{\varepsilon}_{z,\lambda}(D_n)$ nas hipóteses do Lema dos Ramos Equivariantes (ver Observação 3.4 anterior). Usando este Lema, temos:

1. Para o subgrupo de isotropia $Z_2(\mathbf{k})$:

$\text{Fix}(Z_2(\mathbf{k})) = \mathbf{R} = [1] \Rightarrow$ o ramo de soluções no espaço $\text{Fix}(Z_2(\mathbf{k})) \times \mathbf{R}$ é dado por

$$(t, \lambda(t))$$

para uma única função $\lambda = \lambda(t), t \in \mathbf{R}, t \neq 0$.

2. Para os subgrupos $\gamma Z_2(\mathbf{k}) \gamma^{-1}$ conjugados de $Z_2(\mathbf{k})$:

Usando a Propriedade 4, seção 1.1, temos $\text{Fix}(\gamma Z_2(\mathbf{k}) \gamma^{-1}) = \gamma \text{Fix}(Z_2(\mathbf{k})) = \gamma \cdot \mathbf{R}$. Logo, o ramo de soluções contido em $\gamma \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ é dado por

$$(t\gamma, \lambda(t))$$

para λ dada como em (1.), $t \in \mathbf{R}, t \neq 0$ (cf. propriedades obtidas na seção 1.2 garantindo que λ é a mesma que em (1.)).

Se n é par, temos ainda:

3. Para o subgrupo de isotropia $\mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k})$:

$\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k})) = e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot \mathbf{R} = [e^{\frac{\pi i}{n}}] \Rightarrow$ o ramo de soluções em $[e^{\frac{\pi i}{n}}] \times \mathbf{R}$ é dado por

$$(te^{\frac{\pi i}{n}}, \beta(t))$$

para uma única função $\beta = \beta(t), t \neq 0$.

4. Para os subgrupos $\gamma \mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k}) \gamma^{-1}$ conjugados de $\mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k})$:

Novamente, assim como em (2.), temos: $\text{Fix}(\gamma \mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k}) \gamma^{-1}) = \gamma \text{Fix}(\mathbf{Z}_2(\xi \mathbf{k})) = \gamma[e^{\frac{\pi i}{n}}]$. Logo, o ramo de soluções contido em $\gamma[e^{\frac{\pi i}{n}}] \times \mathbf{R}$ é dado por

$$(t\gamma e^{\frac{\pi i}{n}}, \beta(t))$$

para $\beta = \beta(t)$ dada como em (3.), $t \neq 0$ (cf. propriedades obtidas na seção 1.2 garantindo que λ é a mesma que em (3.)).

3.3.2 Bifurcação com $\mathbf{D}_n$ -simetria, $n \geq 5$

Os resultados obtidos aqui serão esquematizados num diagrama que descrevemos a seguir:

(i) Para soluções tz_0 e $t\gamma z_0$ numa mesma órbita temos o mesmo valor do parâmetro $\lambda(t)$, isto é,

$$g(tz_0, \lambda(t)) = 0 \Leftrightarrow g(t\gamma z_0, \lambda(t)) = 0,$$

$\forall \gamma \in \mathbf{D}_n$ (cf. propriedades obtidas na seção 1.2 garantindo que, de fato, λ é a mesma para z_0 e para $\gamma \cdot z_0$).

Assim podemos tomar nosso diagrama como $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$, onde na primeira coordenada representamos o parâmetro de bifurcação λ e na segunda coordenada a norma das soluções, identificando, portanto, todos os pontos numa mesma órbita;

(ii) Pontos numa mesma órbita têm subgrupos de isotropia conjugados. Assim, cada ramo neste diagrama representa um subgrupo de isotropia bem como

todos os seus conjugados;

(iii) Para cada (órbita de) solução z_0 , os auto-valores positivos de $(dg)_{z_0, \lambda_0}$ são indicados com “+” no diagrama e os negativos com “-”.

Esta análise é feita para um problema de bifurcação $g \in \vec{\varepsilon}_{z, \lambda}(\mathbf{D}_n)$ (equação (3.18)) satisfazendo as hipóteses do Lema dos Ramos Equivariantes, ou seja, $p(0, 0, 0) = 0$ e $p_\lambda(0, 0, 0) \neq 0$. Ainda, supomos também que $q(0, 0, 0) \neq 0$ para que as soluções dadas pelo Lema sejam todas as soluções possíveis para a equação $g(z, \lambda) = 0$ (Proposição 3.5). Finalmente, queremos também que $p_u(0, 0, 0) \neq 0$ a fim de que seja suficiente uma expansão em Taylor de $g(z, \lambda) = 0$ até grau 2, como vemos a seguir.

a) Soluções com $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ -simetria

Começamos expandindo a equação $g(x, \lambda) = 0$ e tomamos termos de grau ≤ 2 para analisar o comportamento do ramo $\lambda = \lambda(t)$ (como transcrito, subcrítico ou supercrítico – Definição 1.6).

$$\begin{aligned} g(x, \lambda) &= p(u, v, \lambda)x + q(u, v, \lambda)x^{n-1} = 0 \Leftrightarrow p(u, v, \lambda) + q(u, v, \lambda)x^{n-2} = 0 \\ &\Leftrightarrow p(u, v, \lambda) + o(3) = 0 \\ &\Leftrightarrow p(0, 0, 0) + p_u(0, 0, 0)u + p_\lambda(0, 0, 0)\lambda + o(2) = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\lambda(x) \simeq \frac{-p_u(0,0,0)}{p_\lambda(0,0,0)} x^2} \quad (3.21)$$

A partir desta expressão para $\lambda(x)$, temos:

$p_u(0, 0, 0) \cdot p_\lambda(0, 0, 0) < 0 \Rightarrow$ os ramos com $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ -simetria são supercríticos.

$p_u(0, 0, 0) \cdot p_\lambda(0, 0, 0) > 0 \Rightarrow$ os ramos com $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ -simetria são subcríticos.

Nota. Segue diretamente da expressão (3.21) que todo ramo com $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ -simetria de $g(z, \lambda) = 0$ satisfaz $\lambda'(0) = 0$. Logo, ramos transcíticos não ocorrem.

Estabilidade- Passamos a analisar agora a estabilidade desses ramos através dos auto-valores de $(dg)_x$. Primeiramente, vamos provar que tais auto-valores devem ser reais:

Os auto-valores de $\mathbf{k}$ são 1 e -1, cujos auto-espacos correspondentes são o eixo real e o eixo imaginário. Tais espacos não são $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ -isomorfos (Definição 0.4), pois se $\varphi : \mathbf{Re} \rightarrow \mathbf{Im}$ é linear $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ -equivariante, então

$$\varphi(\mathbf{k}x) = \mathbf{k}\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = \mathbf{k}\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = -\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = 0,$$

ou seja, φ não é isomorfismo. Assim, $\mathbf{Re}$ e $\mathbf{Im}$ são duas componentes isotópicas de $\mathbf{C}$ segundo $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ (ver nota do Teorema (0.2)). Mas, pelo Teorema 0.3, para cada $x \in \mathbf{R}$, sabemos que $(dg)_{x,\lambda}$ deixa estas componentes invariantes, isto é, leva real em real e imaginário puro em imaginário puro. Portanto, seus auto-valores devem ser reais (e estas componentes são os auto-espacos de $(dg)_{x,\lambda}$).

Vamos usar a expressão de $(dg)_{z,\lambda}$ dada no Capítulo 2, Observação 2.2, ou seja,

$$(dg)_{z,\lambda}(w) = g_z w + g_{\bar{z}} w, \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned} g_z &= p + p_u z \bar{z} + n p_v z^n + (q_u \bar{z} + n q_v z^{n-1}) \bar{z}^{n-1} \\ g_{\bar{z}} &= p_u z^2 + n p_v z \bar{z}^{n-1} + (n-1) q \bar{z}^{n-2} + (q_u z + n q_v \bar{z}^{n-1}) \bar{z}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

- Auto-valor de $(dg)_{x,\lambda}$ relativamente ao eixo real:

$$w = \bar{w} \Rightarrow (dg)_{x,\lambda}(w) = (g_z + g_{\bar{z}})_{z=x} w.$$

Logo, neste caso temos o auto-valor $\alpha_1 = (g_z + g_{\bar{z}})_{z=x}$.

- Auto-valor de $(dg)_{x,\lambda}$ relativamente ao eixo imaginário:

$$w = -\bar{w} \Rightarrow (dg)_{x,\lambda}(w) = (g_z - g_{\bar{z}})_{z=x}w.$$

Logo, neste caso o auto-valor é $\alpha_2 = (g_z - g_{\bar{z}})_{z=x}$.

Usando (3.23) podemos determinar os sinais dos auto-valores:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= p(0, 0, 0) + 2p_u(0, 0, 0)x^2 + o(3) = 2p_u(0, 0, 0)x^2 + o(3) \\ \alpha_2 &= p(0, 0, 0) - (n-1)q(0, 0, 0)x^{n-2} + o(n-1) = \\ &\quad -(n-1)q(0, 0, 0)x^{n-2} + o(n-1)\end{aligned}$$

Portanto, para as soluções com $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ -simetria, temos:

$$\begin{aligned}\text{sinal}(\alpha_1) &= \text{sinal}(p_u(0, 0, 0)) \\ \text{sinal}(\alpha_2) &= \begin{cases} \text{sinal}(-q(0, 0, 0)x) & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \text{sinal}(-q(0, 0, 0)) & \text{se } n \text{ par} \end{cases}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Observação 3.5 Para n par, x e $-x$ estão na mesma órbita; logo, podemos, neste caso, nos restringir a $x > 0$ em (3.24).

b) Soluções com $\mathbf{Z}_2(\xi\mathbf{k})$ -simetria

Notemos que

$$\begin{aligned}g(xe^{\frac{\pi i}{n}}, \beta) &= p(u, v, \beta)xe^{\frac{\pi i}{n}} + q(u, v, \beta)(xe^{\frac{\pi i}{n}})^{n-1} = 0 \Leftrightarrow \\ &\quad p(u, v, \beta)xe^{\frac{\pi i}{n}} - q(u, v, \beta)x^{n-1}e^{\frac{\pi i}{n}} = 0 \Leftrightarrow \\ &\quad p(u, v, \beta) - q(u, v, \beta)x^{n-2} = 0\end{aligned}$$

Assim, analogamente como em 3.3.2 a), obtemos:

$$\beta(e^{\frac{\pi i}{n}} x) \simeq \frac{-p_u(0,0,0)}{p_\lambda(0,0,0)} e^{\frac{2\pi i}{n}} x^2 \quad (3.25)$$

Comparando (3.21) e (3.25) podemos observar que, desde que $|x| = |e^{\frac{2\pi i}{n}} x|$, as curvas $\lambda(x)$ e $\beta(e^{\frac{\pi i}{n}} x)$ são representadas igualmente no diagrama de bifurcação. Ainda, a classificação deste ramo como supercrítico ou subcrítico é a mesma como para o subgrupo $Z_2(k)$.

Estabilidade- Usando o fato de ξk ter auto-valores 1 e -1 cujos auto-espacos correspondentes são $e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot \mathbf{R}$ e $ie^{\frac{\pi i}{n}} \cdot \mathbf{R}$ (os quais não são $Z_2(\xi k)$ -isomorfos), segue analogamente como em (3.3.2 a) que $(dg)_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda}$ tem auto-valores reais. Partindo da equação (3.22), temos:

- Auto-valor de $(dg)_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda}$ relativamente a $e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot \mathbf{R}$:

$$(dg)_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda}(e^{\frac{\pi i}{n}} y) = (g_z)_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} e^{\frac{\pi i}{n}} y + (g_{\bar{z}})_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} e^{\frac{-\pi i}{n}} y = (g_z + g_{\bar{z}} e^{\frac{-2\pi i}{n}})_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} e^{\frac{\pi i}{n}} y.$$

Logo, neste caso temos o auto-valor $\alpha_1 = (g_z)_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} + (g_{\bar{z}})_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} e^{\frac{-2\pi i}{n}}$.

- Auto-valor de $(dg)_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda}$ relativamente a $ie^{\frac{\pi i}{n}} \cdot \mathbf{R}$:

$$(dg)_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda}(ie^{\frac{\pi i}{n}} y) = (g_z)_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} ie^{\frac{\pi i}{n}} y - (g_{\bar{z}})_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} ie^{\frac{-\pi i}{n}} y = (g_z - g_{\bar{z}} e^{\frac{-2\pi i}{n}})_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} ie^{\frac{\pi i}{n}} y.$$

Logo, neste caso temos o auto-valor $\alpha_2 = (g_z)_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} - (g_{\bar{z}})_{xe^{\frac{\pi i}{n}}, \lambda} e^{\frac{-2\pi i}{n}}$.

Finalmente, usamos (3.23) para determinar o sinal dos auto-valores α_1 e α_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left((p + p_u x^2 + o(3)) + (p_u x^2 - (n-1)q + o(3)) \right)_{0,0} e^{\frac{2\pi i}{n}} e^{\frac{-2\pi i}{n}} \\ &= 2p_u(0,0,0)x^2 + o(3) \\ \alpha_2 &= \left(p + (n-1)qx^{n-2} + o(n-1) \right)_{0,0} = \left(qx^{n-2} + (n-1)qx^{n-2} + o(n-1) \right)_{0,0} \\ &= nq(0,0,0)x^{n-2} + o(n-1), \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos o fato de que $g(xe^{\frac{it}{n}}, \beta(t)) = p - qx^{n-2} \equiv 0$.

Portanto, para as soluções com $Z_2(\xi \mathbf{k})$ -simetria, temos:

$$\begin{aligned} \text{sinal}(\alpha_1) &= \text{sinal}(p_u(0, 0, 0)) \\ \text{sinal}(\alpha_2) &= \text{sinal}(q(0, 0, 0)) \end{aligned} \quad (3.26)$$

c) Solução com D_n -simetria (solução trivial)

Sabemos que as únicas soluções com D_n -simetria são $(0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Pelas expressões de (3.23),

$$z = 0 \Rightarrow g_z = p, \quad g_{\bar{z}} = 0$$

Desta forma,

$$(dg)_{0,\lambda}(w) = p(0, 0, \lambda)w = (p + p_\lambda \lambda + o(2))_{0,0,0}w = (p_\lambda(0, 0, 0)\lambda + o(2))w.$$

Portanto, $(dg)_{0,\lambda}$ é múltiplo da identidade cujo auto-valor (de multiplicidade 2) tem sinal de

$$p_\lambda(0, 0, 0)\lambda \quad (3.27)$$

Juntando as informações das subseções (3.3.2 a,b,c) anteriores, podemos fazer os diagramas de bifurcação. Notemos que variando-se os sinais de $p_u(0, 0, 0)$, $q(0, 0, 0)$ e $p_\lambda(0, 0, 0)$, teremos oito diagramas diferentes – tanto para n par quanto para n ímpar – e a diferença entre eles sendo quanto à estabilidade de soluções. Assim, vamos nos restringir a $p_\lambda(0, 0, 0) > 0$ reduzindo este número à metade. Com esta restrição, temos as soluções triviais $(0, \lambda)$ supercriticamente estáveis, ao passo

que $p_\lambda(0, 0, 0) < 0$ implica em $(0, \lambda)$ subcriticamente estáveis. Esta última afirmação se verifica da seguinte forma:

A equação do ramo $(0, \lambda)$ é $\Lambda(t) = t$. Logo,

$$t\Lambda'(t) = t,$$

ou seja, o ramo é transcítico com sua parte supercrítica em $\lambda > 0$. Agora, por (3.27) temos que na parte supercrítica do ramo o auto-valor é positivo, ou seja, tais soluções são assintoticamente estáveis.

Figura (3.1) Diagr. de bif. com D_n -simetria, $n \geq 5$, $p_\lambda(0) > 0$

Observação 3.6 Para o caso n par, os diagramas são exatamente como para n ímpar quando trocamos $Z_2(k), x > 0$ por $Z_2(k)$ e $Z_2(k), x < 0$ por $Z_2(\xi k)$. A conclusão deste fato é imediata: basta analisar a variação dos auto-valores nas expressões (3.24) e (3.26).

Observação 3.7 A direção dos ramos com $Z_2(k)$ -simetria e $Z_2(\xi k)$ -simetria nos dá informações sobre estabilidade. Especificamente, se o ramo é supercrítico (figuras 3.1 c, d) não podemos esperar soluções estáveis (cf. Observação 1.3, a). Logo, soluções estáveis só aparecem em ramos subcríticos (figuras 3.1 a, b).

3.3.3 Um exemplo de campo D_5 -equivariante no plano

Consideremos a aplicação $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ D_5 -equivariante dada por

$$g(z, \lambda) = (az\bar{z} + b\lambda)z + c\bar{z}^4,$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0, c < 0$. Usando o isomorfismo $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \mapsto (x, y)$, a expressão de g fica

$$g(x, y, \lambda) = (a(x^2 + y^2) + b\lambda)(x, y) + c((x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2, -4xy(x^2 - y^2)). \quad (3.28)$$

Queremos obter informações globais sobre as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias abaixo com a variação do parâmetro λ :

$$\begin{cases} \dot{x} + g_1(x, y, \lambda) = 0 \\ \dot{y} + g_2(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

onde

$$\begin{aligned} g_1(x, y, \lambda) &= (a(x^2 + y^2) + b\lambda)x + c((x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2) \\ g_2(x, y, \lambda) &= (a(x^2 + y^2) + b\lambda)y - 4cxy(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Esta aplicação g dada em (3.28) é de fundamental importância pelo fato de que numa vizinhança de $(0, \lambda)$ ela representa um germe $h : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ D_n -equivariante genérico ($\forall n \geq 5$) nas condições dadas na subseção (3.3.2), onde

$$a = p_u(0, 0, 0), \quad b = p_\lambda(0, 0, 0), \quad c = q(0, 0, 0)$$

cujos diagramas são dados na figura (3.1).

Vamos começar procurando os pontos de equilíbrio deste sistema, ou seja, as soluções de $g(x, y, \lambda) = 0$: pela Proposição 3.5, as soluções são as triviais ou, a menos de conjugação, as com $Z_2(k)$ -simetria $(x, 0, \lambda(x))$. Estas últimas satisfazem $\dot{y} = 0$ (pois $y \equiv 0$) e devemos impor a condição $g_1(x, 0, \lambda(x)) = 0$:

$$g_1(x, 0, \lambda) = 0 \Leftrightarrow a(x^2 + b\lambda)x + cx^4 = 0 \Leftrightarrow ax^2 + b\lambda + cx^3 = 0.$$

Portanto,

$$\lambda(x) = \frac{-cx^3 - ax^2}{b}, \quad (3.30)$$

cujo gráfico está na figura (3.2):

Figura (3.2) $\lambda(x) = \frac{-cx^3 - ax^2}{b}$

Podemos notar que numa vizinhança da origem, $\lambda = \lambda(x)$ é aproximada por uma função quadrática cujo diagrama de bifurcação está na figura (3.1,b). Portanto, de uma maneira geral, podemos ter – além da solução trivial – uma, duas ou três soluções, dependendo do valor do parâmetro λ . Passamos, assim, a analisar as soluções com a variação de λ :

$$\boxed{\frac{-4a^3}{27bc^2} < \lambda < 0}$$

Para λ suficientemente pequeno, usamos o diagrama da figura (3.1,b) para concluir que a origem é instável – tipo fonte –, que há um equilíbrio $x_1 < 0$ instável – tipo sela – e um equilíbrio $x_2 > 0$ assintoticamente estável. Assim, só nos resta determinar a estabilidade de um terceiro equilíbrio $x_3 > \frac{-2a}{3c}$ (cf. figura (3.2)):

$$(dg)_{x,0,\lambda} = \begin{bmatrix} 3ax^2 + b\lambda + 4cx^3 & 0 \\ 0 & ax^2 + b\lambda - 4cx^3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Então:

- (i) $a > 0, c < 0 \Rightarrow$ para $x = x_3$, auto-valor $\xi_2 = ax_3^2 + b\lambda - 4cx_3^3$ é positivo.
- (ii) x_2 é assintoticamente estável; logo, $\xi_1 = 3ax_2^2 + b\lambda + 4cx_2^3$ não pode ser positivo, pois x_2 e x_3 estão no eixo- x e, portanto, têm mesmos auto-vetores.

De (i) e (ii) concluímos que x_3 é instável do tipo sela.

Usando o fato de que x_1 está na órbita de $|x_1|e^{\frac{\pi i}{5}}$, podemos esboçar a situação local das

soluções, próximas aos pontos de equilíbrio, no setor $0 < \theta < \frac{\pi}{5}$:

Figura (3.3) Equilíbrios do sistema (3.29) para $\lambda < 0$, $|c| < |a|$

- (1) A variedade estável de x_3 não pode ser a variedade instável de x_2 (que é vazia).
- (2) Para $\bar{x} > x_3$ fixado (secção transversal do campo) e λ suficientemente pequeno, $g_1(\bar{x}, y, \lambda) = 0$ admite duas raízes $y_1, y_2 > 0$ com $(\bar{x}, y_1)$ dentro do setor $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$ e $(\bar{x}, y_2)$ fora do setor $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{5}$; assim, concluímos que existe um único ponto de retorno $(\bar{x}, y_1)$ do campo nesta secção transversal dentro da região $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{5}$. Ainda, para λ suficientemente pequeno, $x, y > 0$ e $(x^2 - y^2) < 2xy$, temos que

$$-g_1(x, y, \lambda) \leq c[(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2] < 0$$

e, portanto, no setor $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{5}$, $g_1(\bar{x}, y, \lambda) < 0$: isto significa que nesta região o campo “aponta” para a esquerda e que o ponto de retorno está abaixo da reta $y = \tan(\frac{\pi}{8})x$.

De (1) e (2) concluímos que a variedade estável de x_3 é como na figura (3.4,a) (a inclinação desta trajetória é baseada no seu gráfico obtido por um simulador gráfico).

Figura (3.4)

Com isto, completamos a análise da dinâmica sob a variedade estável de x_3 .

(3) Devido à direção do campo dada em (2), podemos garantir que o ω -limite de toda trajetória Δ que passa próximo a x_1 é x_2 (ver figura (3.4,b)). Ainda, a variedade instável de x_1 não converge para x_0 (fonte) e pela inexistência de outros pontos de equilíbrio segue pelo teorema de Poincaré-Bendixson [8] que esta variedade converge para x_2 . Desta maneira, fica determinado o comportamento de toda trajetória dentro da região limitada pela variedade instável de x_1 e pelos segmentos $\overline{x_0x_1}$ e $\overline{x_0x_2}$.

(4) Devido à simetria do grupo D_5 , as soluções no plano (x, y) se comportam simetricamente com relação aos 10 setores

$$\frac{\pi k}{5} \leq \theta \leq \frac{\pi(k+1)}{5}, \quad k = 0, \dots, 9$$

Este fato segue da Propriedade 3, seção 3.2 .

O comportamento global das soluções para $\frac{-4a^3}{27bc^2} < \lambda < 0$ e $|c| < |a|$ está na figura (3.5).

Figura(3.5) Dinâmica do sistema (3.29) com $\frac{-4a^3}{27bc^2} < \lambda < 0$ e $|c| < |a|$

$$\boxed{\lambda = 0}$$

Para $\lambda = 0$, temos, além da solução trivial um equilíbrio $x_3 = \frac{-a}{c}$, cuja estabilidade é analisada a seguir. Usando a expressão (3.31), temos

$$(dg)_{x_3,0,0} = \begin{bmatrix} \frac{-a^3}{c^2} & 0 \\ 0 & \frac{5a^3}{c^2} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Logo, temos os auto-valores de $(dg)_{x_3,0,0}$ com sinais contrários. Portanto, x_3 é equilíbrio instável do tipo sela, e desde que $\frac{-a^3}{c^2} < 0$, as soluções sobre o eixo- x têm α -limite em x_3 (e ω -limite em x_0).

Análise global da dinâmica:

O estudo do campo de vetores é exatamente análogo ao caso $\frac{-4a^3}{27bc^2} < \lambda < 0$. Da mesma maneira, temos em cada secção transversal ao campo do tipo $x = \bar{x} > x_3$ um único ponto de retorno. Novamente, usamos a simetria imposta pela ação de D_5 no plano para estender estes resultados ao plano todo. O comportamento global das soluções está na figura (3.6).

Figura (3.6) Dinâmica do sistema (3.29) com $\lambda = 0$

$$\boxed{\lambda > 0}$$

Para $\lambda > 0$, além da solução trivial temos um equilíbrio $x_3 > \frac{-a}{c}$. Vamos analisar os auto-valores de $(dg)_{x_3,0,\lambda}$ cuja expressão é dada em (3.31) e $\lambda = \lambda(x)$ como em (3.30) :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 3ax_3^2 + b\lambda + 4cx_3^3 = x_3^2(2a + 3cx_3) \\ \xi_2 &= ax_3^2 + b\lambda - 4cx_3^3 \end{aligned}$$

$\xi_1 < 0$, pois $x_3 > \frac{-2a}{3c}$ com $c < 0$ e $\xi_2 > 0$ pois é soma de parcelas positivas. Assim, $\forall \lambda > 0$, x_3 é um equilíbrio instável do tipo sela e as soluções sobre o semi-eixo x positivo têm α -limite x_3 . Neste caso, o comportamento das soluções no plano é exatamente como

na figura (3.6).

$$\lambda < \frac{-4a^3}{27bc^2}$$

Para um tal valor de λ (ver figura (3.2)) além da solução trivial temos um equilíbrio $x_1 < \frac{a}{3c} < 0$. Determinemos os sinais dos auto-valores de $(dg)_{x_1,0,\lambda}$. Para tanto, notemos que

$$x_1 = \frac{a}{3c} - \epsilon, \epsilon > 0 \text{ e } \lambda(x_1) = \frac{-4a^3}{27bc^2} + \frac{a^2\epsilon}{3bc} + \frac{c\epsilon^3}{b}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 3ax_1^2 + b\lambda x_1 + 4cx_1^3 = \frac{a^3}{3c^2} - \frac{3a^2\epsilon}{c} + 7a\epsilon^2 - 4c\epsilon^3 + a^3 > 0 \\ \xi_2 &= ax_1^2 + b\lambda - 4cx_1^3 = \frac{-5a^3}{27c^2} + \frac{a^2\epsilon}{3c} - 3a\epsilon^2 + 4c\epsilon^3 < 0 \end{aligned}$$

Logo, x_1 é do tipo sela com soluções sobre o semi-eixo x negativo com α -limite x_1 . O comportamento das soluções no plano está na figura (3.7).

Figura (3.7) Dinâmica do sistema (3.29) com $\lambda < \frac{-4a^3}{27bc^2}$

$$\lambda = \frac{-4a^3}{27bc^2}$$

Para este caso, temos 3 equilíbrios: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{a}{3c}$ e $\bar{x} = \frac{-2a}{3c} > 0$ (ver figura (3.2)). Pela expressão de $(dg)_{\bar{x},0,\lambda}$ dada em (3.31), concluímos que o auto-valor ξ_1 é nulo e ξ_2 é positivo. Assim, $\bar{x}$ é do tipo sela-nó. Ou seja, $(\bar{x} = \frac{a}{3c}, \lambda = \frac{-4a^3}{27bc^2})$ corresponde a outro ponto de bifurcação do problema. Os auto-valores de $(dg)_{x_1,0,\lambda}$ são $\xi_1 = \frac{a^3}{3c^2} > 0$ e

$\xi_2 = \frac{-5a^3}{27c^2} < 0$; logo, x_1 é do tipo sela. O comportamento global das soluções é como na figura (3.8).

Figura (3.8) Dinâmica do sistema (3.29) com $\lambda = \frac{-4a^3}{27bc^2}$

Observação 3.8 *Um problema interessante e que pretendemos analisar é a influência dos termos de ordem mais alta na dinâmica global desta equação. Para isto, é necessário resolver o problema do reconhecimento na origem para problemas de bifurcação D_5 -equivariantes genéricos, isto é, com*

$$p_\lambda(0,0,0) \neq 0, \quad q(0,0,0) \neq 0$$

na equação (3.18) e analisar o efeito dos termos de ordem mais alta sobre os pontos de equilíbrio longe da origem.

Os gráficos a seguir representam a dinâmica global do sistema (3.29) para $a = 5$, $b = 1$, $c = -1$ para diferentes valores do parâmetro λ :

PARÂMETRO = 0

PARÂMETRO = 5.41

$$\lambda < -\frac{4a^3}{27bc^2}$$

$$\lambda = -\frac{4a^3}{27bc^2}$$

$$-\frac{4a^3}{27bc^2} < \lambda < 0$$

$$\lambda \geq 0$$

3.4 Problemas de bifurcação com D_3 -simetria

A razão de estudarmos problemas de bifurcação D_3 -equivariantes separadamente é a de que, genericamente, soluções de tais problemas dadas pelo Lema dos Ramos Equivariantes são instáveis (o que não ocorre com os D_n -equivariantes, $n \geq 5$). Ver Definição 1.3 para o termo “genericamente”. Isto se deve ao fato de que tais funções são do tipo

$$g(z, \lambda) = p(u, v, \lambda)z + q(u, v, \lambda)\bar{z}^2, \quad (3.34)$$

com $u = z\bar{z}$ e $v = z^3 + \bar{z}^3$ e, portanto, têm um fator quadrático não-nulo desde que $q(0, 0, 0) \neq 0$. Verifique hipótese (4) do Teorema 1.3 . Logo, se procuramos ramos de soluções estáveis para tais problemas, devemos considerar a situação em que $q(0, 0, 0) = 0$ e usar teoria de desdobramentos. Todo estudo deste parágrafo se baseia nos resultados do Capítulo 2. Vamos obter formas normais para duas classes de problemas D_3 -equivariantes, desdobramentos universais para tais formas normais e finalmente descrevemos os diagramas de bifurcação para estes casos.

3.4.1 Formas normais D_3 -equivariantes

As duas classes de problemas de bifurcação D_3 -equivariantes para as quais obtemos formas normais estão separadas em duas proposições que enunciamos a seguir.

Proposição 3.7 *Seja $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ problema de bifurcação D_3 -equivariante tal que $p(0, 0, 0) = 0$, $p_\lambda(0, 0, 0) \neq 0$ e $q(0, 0, 0) \neq 0$. Então, g é D_3 -equivalente a*

$$k(z, \lambda) = \epsilon\lambda z + \delta\bar{z}^2, \quad (3.35)$$

onde $\epsilon = \text{ sinal}(p_\lambda(0, 0, 0))$ e $\delta = \text{ sinal}(q(0, 0, 0))$.

Prova:

Vamos usar a notação $g = [p, q]$ para $g = pz + q\bar{z}^2$, $p, q \in \varepsilon_{z, \lambda}(D_3)$. Para o submódulo

$I \subset \bar{\varepsilon}_{z,\lambda}(\mathbf{D}_3)$ definido como

$$I = [M_{u,v,\lambda}, \varepsilon_{u,v,\lambda}] = [[u, 0], [v, 0], [\lambda, 0], [0, 1]], \quad (3.36)$$

mostremos que

$$RT(g, \mathbf{D}_3) = I. \quad (3.37)$$

Do Cap.2, Exemplo 2.3, temos os 6 geradores de $RT(g, \mathbf{D}_3)$:

$$[p, q], [2up + vq, 0], [uq, p], [vp + 2u^2q, 0],$$

$$[2up_u + 3vp_v, q + 2uq_u + 3vq_v], [vp_u + 6u^2p_v + uq, vq_u + 6u^2q_v]$$

Então: $[p, q] \in I$, pois $p(0, 0, 0) = 0$ (e a segunda coordenada pode ser qualquer); os demais geradores têm nas primeiras coordenadas múltiplos de u e v , ou seja, estão todos em I . Logo, $RT(g, \mathbf{D}_3) \subset I$. Para mostrar a inclusão $I \subset RT(g, \mathbf{D}_3)$, basta mostrar que

$$I \subset RT(g, \mathbf{D}_3) + M_{u,v,\lambda} \cdot I \quad (3.38)$$

e usar o Lema de Nakayama [4].

Na tabela abaixo, temos os geradores de $RT(g, \mathbf{D}_3) \setminus M \cdot I$ – na primeira coluna – expressos como combinação linear dos geradores de I – na primeira linha. Denotemos por M a matriz 4×5 dos coeficientes.

(Daqui para frente indicamos o ponto ($u = 0, v = 0, \lambda = 0$) simplesmente por 0)

	$[u, 0]$	$[v, 0]$	$[\lambda, 0]$	$[0, 1]$
$[p_u(0)u + p_\lambda(0)\lambda + p_v(0)v, q(0)]$	$p_u(0)$	$p_v(0)$	$p_\lambda(0)$	$q(0)$
$[vq(0), 0]$	0	$q(0)$	0	0
$[uq(0), 0]$	$q(0)$	0	0	0
$[vp(0), 0] \equiv [0, 0]$	0	0	0	0
$[2up_u(0) + 3vp_v(0), q(0)]$	$2p_u(0)$	$3p_v(0)$	0	$q(0)$
$[vp_u(0) + uq(0), 0]$	$q(0)$	$p_u(0)$	0	0

Tomando as linhas 1,2,3 e 5 e as colunas de M obtemos um menor 4×4 cujo determinante é $(-q(0))^3 \cdot p_\lambda(0) \neq 0$, e, portanto, M é inversível. Daí segue que $I \subset RT(g, \mathbf{D}_3) + M_{u,v,\lambda} \cdot I$ e, por Nakayama, obtemos a inclusão $I \subset RT(g, \mathbf{D}_3)$.

Assim, temos a igualdade (3.37).

Agora, tomemos a família

$$g_t = [p_\lambda(0)\lambda + t(p_u(0)u + p_v(0)v + \varphi(u, v, \lambda)), q(0) + t(\psi(u, v, \lambda))],$$

satisfazendo $g_1 = g$, $\varphi \in M_{u,v,\lambda}^2$ e $\psi \in M_{u,v,\lambda}$. Notemos que g é do tipo $g_0 + t\mathbf{p}$, $\mathbf{p}$ = perturbação $\mathbf{D}_3$ -equivariante. Como g_t satisfaz as hipóteses da proposição, $\forall t$, segue que

$$RT(g_t, \mathbf{D}_3) = I, \forall t.$$

Logo, pelo Teorema 2.2, temos $g_t \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} g_0, \forall t$, e, portanto,

$$g = g_1 \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} g_0.$$

Finalmente, mostremos que $g_0 \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} k$, usando novamente o Teorema 2.2 : tomemos

$$k_s = [((1-s)\epsilon + sp_\lambda(0))\lambda, (1-s)\delta + sq(0)],$$

para $s \in [0, 1]$. Notemos que $k_s = [\epsilon\lambda, \delta] + s\mathbf{p}$, com $\mathbf{p}$ = perturbação dada por $[(p_\lambda(0) - \epsilon)\lambda, q(0) - \delta]$. Denotando k_s por $[p^s, q^s]$, temos

$$\begin{aligned} p_\lambda^s(0) &= (1-s)\epsilon + sp_\lambda(0) \\ q^s(0) &= (1-s)\delta + sq(0) \end{aligned}$$

Mostremos que $RT(k_s, \mathbf{D}_3) = I, \forall s \in [0, 1]$; para isto, basta mostrar que $p_\lambda^s(0) \neq 0, q^s(0) \neq 0, \forall s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} s = 0 &\Rightarrow \begin{cases} p_\lambda^s(0) = \epsilon = \pm 1 \neq 0 \\ q^s(0) = \delta = \pm 1 \neq 0 \end{cases} \\ s \neq 0 &\Rightarrow \begin{cases} \text{se } p_\lambda^s(0) = 0, p_\lambda(0) = \frac{1-s}{s}(-\epsilon) : \text{absurdo, pois } \epsilon = \text{sinal}(p_\lambda(0)) \\ \text{se } q^s(0) = 0, q(0) = \frac{1-s}{s}(-\delta) : \text{absurdo, pois } \delta = \text{sinal}(q(0)) \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $RT(k_s, \mathbf{D}_3) = I, \forall s \in [0, 1]$. Assim, pelo Teorema 2.2,

$$g_0 = k_1 \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} k_0 = k.$$

Vamos agora especificar a segunda classe de germes $\mathbf{D}_3$ -equivariantes para os quais obtemos uma forma normal:

Definição 3.1 Um problema de bifurcação $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbf{D}_3$ -equivariante com $p(0) = q(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} p(u, v, \lambda) &= Au + Bv + \alpha\lambda + \dots \\ q(u, v, \lambda) &= Cu + Dv + \beta\lambda + \dots \end{aligned}$$

é dito não-degenerado se

$$\begin{aligned} (a) \quad & \alpha \neq 0 \\ (b) \quad & A \neq 0 \\ (c) \quad & \alpha C - \beta A \neq 0 \\ (d) \quad & AD - BC \neq 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Proposição 3.8 Seja $g \in \vec{\varepsilon}_{z,\lambda}(\mathbf{D}_3)$ com $p(0) = q(0) = 0$ não-degenerado. Então, g é $\mathbf{D}_3$ -equivalente à forma normal

$$h(z, \lambda) = (\epsilon u + \delta \lambda)z + (\sigma u + m v)\bar{z}^2, \tag{3.40}$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{sinal}(A) \\ \delta &= \text{sinal}(\alpha) \\ \sigma &= \text{sinal}(\alpha C - \beta A) \cdot \text{sinal}(\alpha) \\ m &= \text{sinal}(A) \frac{AD - BC}{(\alpha C - \beta A)^2} \alpha^2 \end{aligned}$$

Prova:

A demonstração é feita em duas partes: na primeira, mostramos que $g \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} h + \varphi$, para um certo germe φ contruindo a $\mathbf{D}_3$ - equivalência. Na segunda parte, mostramos que $h + \varphi \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} h$ usando o Teorema 2.2 .

1ª parte:

Podemos escrever $g = [Au + Bv + \alpha\lambda + \varphi_1, Cu + Dv + \beta\lambda + \varphi_2]$. A $\mathbf{D}_3$ -equivalência geral de g é da forma

$$h'(z, \lambda) = S(z, \lambda)g(Z(z, \lambda), \Lambda(\lambda)). \tag{3.41}$$

Escrevendo os termos de ordem intermediária de h' , temos:

$$h'(z, \lambda) = [A'u + B'v + \alpha'\lambda, C'u + D'v + \beta'\lambda] + \dots$$

O fato fundamental desta 1ª parte é conseguir estes termos de h' em função de $A, B, \alpha, C, D, \beta$ não importante φ_1 e φ_2 .

Vamos tomar os termos de ordem baixa da $\mathbf{D}_3$ -equivalência (S, Z, Λ) :

$$\begin{aligned} (a) \quad Z(z, \lambda) &= \xi z + \eta \bar{z}^2 + \dots, \quad \xi > 0 \\ (b) \quad \Lambda(\lambda) &= \theta \lambda + \dots, \quad \theta > 0 \\ (c) \quad S &= \rho S_1 + \varphi S_2 + \tau S_3 + \psi S_4 + \dots, \quad \rho > 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

A primeira igualdade de (3.42) segue do fato de Z ser $\mathbf{D}_3$ -equivariante e, desde que $(dZ)_{0,0} = \xi Id \in L_C^0$, então $\xi > 0$. A validade de (3.42,b) segue do fato de que $\Lambda(0) = 0$ e $\Lambda'(0) > 0$. Os S_j 's em (3.42,c) são os geradores de $\vec{\varepsilon}_{z,\lambda}(\mathbf{D}_3)$ ($S_1 w = w$, $S_2 w = z^2 w$, $S_3 w = \bar{z} w$, $S_4 w = z^3 w$) (cf. Exemplo 2.3) e como $S(0,0) = \rho S_1 = \rho Id$, temos $\rho > 0$.

Afirmção (*):

$$\begin{aligned} A' &= \rho \xi^3 A \\ B' &= \rho \xi^2 (\eta A + \xi^2 B) \\ \alpha' &= \rho \xi \theta \alpha \\ C' &= (\tau \xi + \rho \eta) \xi^2 A + \rho \xi^4 C \\ D' &= (\tau \xi + \rho \eta) (\xi \eta A + \xi^3 B) + \rho \xi^3 (\eta C + \xi^2 D) \\ \beta' &= (\tau \xi + \rho \eta) \theta \alpha + \rho \xi^2 \theta \beta \end{aligned}$$

(Estas igualdades são demonstradas no final da 1ª parte). Mostremos, então, que $g^{\mathbf{D}_3} h + \varphi$.

Primeiro escolhemos η e τ para que $B' = \beta' = 0$: basta tomar

$$\eta = -\xi^2 B/A,$$

obtido da segunda igualdade acima, e

$$\tau = \frac{1}{\xi} \left(\frac{-\rho \xi_2 \beta}{\alpha} + \frac{\rho \xi_2 B}{A} \right),$$

obtido da última igualdade. Substituindo estes valores de η e τ nas igualdades acima, obtemos novas igualdades:

$$\begin{aligned} A' &= \rho \xi^3 A \\ \alpha' &= \rho \xi \theta \alpha \\ C' &= \frac{\rho \xi^4}{\alpha} (\alpha C - \beta A) \\ D' &= \frac{\rho \xi^5}{A} (AD - BC) \\ B' &= \beta' = 0 \end{aligned}$$

Ainda, escolhendo

$$\begin{aligned} \rho &= 1/\xi^3 |A| \\ \theta &= \xi^2 |A|/|\alpha| \\ \xi &= |\alpha A|/|\alpha C - \beta A| \end{aligned}$$

temos

$$|A'| = |\alpha'| = |C'| = 1.$$

Substituindo estas expressões nas igualdades anteriores, temos:

$$\begin{aligned} \text{sinal}(A') &= \text{sinal}(A), |A'| = 1 \\ \text{sinal}(\alpha') &= \text{sinal}(\alpha), |\alpha'| = 1 \\ \text{sinal}(C') &= \text{sinal}(\alpha) \cdot \text{sinal}(\alpha C - \beta A), |C'| = 1 \\ D' &= \text{sinal}(A) \frac{\alpha^2}{(\alpha C - \beta A)^2} (AD - BC) \end{aligned}$$

Chamando D' de m , $\epsilon = \text{sinal}(A)$, $\delta = \text{sinal}(\alpha)$, $\sigma = \text{sinal}(C')$, a expressão de h' fica:

$$h'(z, \lambda) = [\epsilon u + \delta \lambda, \sigma u + m v] + \dots,$$

e este é exatamente $h + \varphi$, com h como no enunciado. Assim,

$$g \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} h + \varphi,$$

com $\varphi =$ germe com termos de ordem ≥ 2 em u, v, λ .

Agora, provemos as igualdades da afirmação (*) anterior:
Seja $J = [M_{u,v,\lambda}^2, M_{u,v,\lambda}^2]$ e vamos escrever $g = [a, b] \text{ mod } J$. Assim,

$$\begin{aligned} a &= Au + Bv + \alpha\lambda \\ b &= Cu + Dv + \beta\lambda \end{aligned}$$

Vamos calcular $h'(z, \lambda) = S(z, \lambda)g(Z(z, \lambda), \Lambda(\lambda))$ em coordenadas $\mathbf{D}_3$ -invariantes $\text{mod } J$, isto é, vamos calcular a' e b' , sendo $h' = [a', b'] \text{ mod } J$. Seja $h'' = g(Z, \Lambda) = [a'', b''] \text{ mod } J$, Então, “módulo J ” temos

$$\begin{aligned} S_1 h'' &= [a'', b''] \\ S_2 h'' &= [ua'' + vb'', -ub''] \\ S_3 h'' &= [ub'', a''] \\ S_4 h'' &= [va'' + u^2 b'', -ua''], \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$h' = S h'' = \rho S_1 h'' + \varphi S_2 h'' + \tau S_3 h'' + \psi S_4 h'' + \dots = [\rho a'', \rho b'' + \tau a''],$$

onde a última igualdade segue do fato de que a'' e b'' se anulam na origem, isto é, $a'', b'' \in M_{u,v,\lambda}$ e estas igualdades são válidas “módulo J ”. Assim, $a' = \rho a''$ e $b' = \rho b'' + \tau a''$. Passemos a calcular a'' e b'' :

$$h''(z, \lambda) = g(Z, \Lambda) = (Au(Z) + Bv(Z) + \alpha\lambda)Z + (Cu(Z) + Dv(Z) + \beta\Lambda)\bar{Z}^2 + \dots$$

onde

$$\begin{aligned} u(Z) &= Z\bar{Z} = (\xi^2 u + \xi\eta z^3 + \xi\eta\bar{z}^3 + \eta^2 u^2) + [M_{u,v,\lambda}^2, M_{u,v,\lambda}^2] \\ &= (\xi^2 u + \xi\eta v) \text{ mod } J \\ v(Z) &= Z^3 + \bar{Z}^3 = (\xi z + \eta\bar{z}^2 + [M_{u,v,\lambda}^2, M_{u,v,\lambda}^2])^3 + \\ &\quad + (\xi\bar{z} + \eta z^2 + [M_{u,v,\lambda}^2, M_{u,v,\lambda}^2])^3 \\ &= \xi^3 z^3 + \xi^3 \bar{z}^3 + \dots = (\xi^3 v) \text{ mod } J \\ \Lambda(\lambda) &= (\theta\lambda) \text{ mod } J \\ Z(z, \lambda) &= (\xi z + \eta\bar{z}^2) \text{ mod } [M_{u,v,\lambda}, M_{u,v,\lambda}] \\ \bar{Z}^2(z, \lambda) &= (\xi\bar{z} + \eta z^2 + [M_{u,v,\lambda}, M_{u,v,\lambda}])^2 = (\xi^2 \bar{z}^2) \text{ mod } [M_{u,v,\lambda}, M_{u,v,\lambda}] \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
h''(z, \lambda) &= (A\xi^2u + A\xi\eta v + B\xi^3v + \theta\alpha\lambda)(\xi z + \eta\bar{z}^2) + \\
&\quad + (C\xi^2u + C\xi\eta v + D\xi^3v + \beta\theta\lambda)(\xi^2\bar{z}^2) + [M_{u,v,\lambda}^2, M_{u,v,\lambda}^2] \\
&= [(A\xi^2u + (\xi\eta A + \xi^3B)v + \alpha\theta\lambda)(\xi z + \eta\bar{z}^2) + \\
&\quad + (C\xi^2u + (\xi\eta C + \xi^3D)v + \beta\theta\lambda)(\xi^2\bar{z}^2)] \bmod J
\end{aligned}$$

Então, a partir desta última expressão para h'' , temos:

$$\begin{aligned}
a' &= A'u + B'v + \alpha'\lambda = \rho a'' \Rightarrow \begin{cases} A' = \rho\xi^3A \\ B' = \rho\xi^2(\eta A + \xi^2B) \\ \alpha' = \rho\xi\theta\alpha \end{cases} \\
b' &= C'u + D'v + \beta'\lambda = \rho b'' + \tau a'' \Rightarrow \begin{cases} C' = (\tau\xi + \rho\eta)\xi^2A + \rho\xi^4C \\ D' = (\tau\xi + \rho\eta)(\xi\eta A + \xi^3B) + \rho\xi^3(\eta C + \xi^2D) \\ \beta' = (\tau\xi + \rho\eta)\alpha\theta + \rho\xi^2\beta\theta \end{cases}
\end{aligned}$$

Concluimos, assim, a 1ª parte da demonstração.

2ª parte:

Consiste em provar que

$$RT(h + t\varphi, \mathbf{D}_3) = RT(h, \mathbf{D}_3).$$

Vamos começar provando que $J \subset RT(h + t\varphi, \mathbf{D}_3)$ (para esta inclusão, mostramos que $J \subset RT(h + t\varphi, \mathbf{D}_3) + M_{u,v,\lambda}J$ e depois usamos Nakayama).

Os 12 geradores de J são:

$$\begin{aligned}
&[u^2, 0], [uv, 0], [v^2, 0], [u\lambda, 0], [v\lambda, 0], [\lambda^2, 0], \\
&[0, u^2], [0, uv], [0, v^2], [0, u\lambda], [0, v\lambda], [0, \lambda^2]
\end{aligned}$$

Usando a notação $h = [p, q]$, com $p = \epsilon u + \delta\lambda$, $q = \sigma u + mv$, podemos escrever os geradores de $RT(h + t\varphi, \mathbf{D}_3) \bmod (M_{u,v,\lambda} \cdot J)$:

$$\begin{aligned}
g_1 &= [u^2p_u + uv p_\lambda, u^2q_u + uvq_v] \\
g_2 &= [uv p_u + v\lambda p_\lambda, uvq_u + v^2q_v]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3 &= [u\lambda p_u + \lambda^2 p_\lambda, u\lambda q_u + v\lambda q_v] \\
g_4 &= [2u^2 p_u + 2u\lambda p_\lambda + 2uvq_u + v^2 q_v, 0] \\
g_5 &= [0, u^2 p_u + u\lambda p_\lambda] \\
g_6 &= [0, uv p_u + v\lambda p_\lambda] \\
g_7 &= [0, u\lambda p_u + \lambda^2 p_\lambda] \\
g_8 &= [uv p_u + v\lambda p_\lambda, 0] \\
g_9 &= [2u^2 p_u, 3u^2 q_u + 4uvq_v] \\
g_{10} &= [2uv p_u, 3uvq_u + 4v^2 q_v] \\
g_{11} &= [2u\lambda p_u, 3u\lambda q_u + 4v\lambda q_v] \\
g_{12} &= [uv p_u, uvq_u] \\
g_{13} &= [v^2 p_u, v^2 q_u] \\
g_{14} &= [v\lambda p_u, v\lambda q_u]
\end{aligned}$$

Consideremos agora a seguinte tabela:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}
$[u^2, 0]$	ϵ			2ϵ					2ϵ					
$[uv, 0]$		ϵ		σ				ϵ		2ϵ		ϵ		
$[v^2, 0]$			ϵ	m									ϵ	
$[u\lambda, 0]$	δ			2δ							2ϵ			
$[v\lambda, 0]$		δ						δ						ϵ
$[\lambda^2, 0]$			δ											
$[0, u^2]$	σ				ϵ				3σ					
$[0, uv]$	m	σ				ϵ			$4m$	3σ		σ		
$[0, v^2]$		m								$4m$			σ	
$[0, u\lambda]$			σ		δ		ϵ				3σ			
$[0, v\lambda]$			m			δ					$4m$			σ
$[0, \lambda^2]$							δ							

Esta tabela mostra os 14 geradores de $\text{RT}(h + t\varphi, \mathbf{D}_3) \text{mod}(M_{u,v,\lambda} \cdot J)$ – na primeira linha – escritos em função dos geradores de J – na primeira coluna –, isto é, os 14 geradores de $\text{RT}(h + t\varphi, \mathbf{D}_3)$ escritos em função dos geradores de J módulo termos de ordem ≥ 3 em u e v . A matriz dos coeficientes é uma matriz 14×12 cujo rank é 12; logo, por Nakayama, $J \subset \text{RT}(h + t\varphi, \mathbf{D}_3)$.

Portanto, $RT(h + t\varphi, \mathbf{D}_3) = J \oplus H$, onde H tem somente termos de grau 1. Para obter os geradores de H expandimos os de $RT(h + t\varphi, \mathbf{D}_3)$ até grau 1:

$$\begin{aligned} [p, q] &\equiv [\epsilon u + \delta \lambda, \sigma u + mv] \\ [2up + vq, 0] &\equiv [0, 0] \\ [uq, p] &\equiv [0, \epsilon u + \delta \lambda] \\ [vp + 2u^2q, 0] &\equiv [0, 0] \\ [2up_u + 3vp_v, q + 2uq_u + 3vq_v] &\equiv [2\epsilon u, 3\sigma u + 4mv] \\ [vp_u + 6u^2p_v + uq, vq_u + 6u^2q_v] &\equiv [\epsilon v, \sigma v] \end{aligned}$$

Assim, os geradores de H são:

$$[\epsilon u + \delta \lambda, \sigma u + mv], [0, \epsilon u + \delta \lambda], [2\epsilon u, 3\sigma u + 4mv], [\epsilon v, \sigma v]$$

A partir da expressão desses geradores e do fato de que $J = [M_{u,v,\lambda}^2, M_{u,v,\lambda}^2]$, temos que $RT(h + t\varphi, \mathbf{D}_3)$ independe dos termos de $t\varphi$. Portanto,

$$RT(h + t\varphi, \mathbf{D}_3) = RT(h, \mathbf{D}_3).$$

E, assim, pelo Teorema 2.2 segue que $h + t\varphi \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} h$.

Juntando a 1ª parte e a 2ª parte da demonstração, temos concluído que

$$g \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} h.$$

□

Observação 3.10 A $\mathbf{D}_3$ -equivalência mantém a propriedade de um problema de bifurcação $\mathbf{D}_3$ -equivariante ser não-degenerado, isto é, se g é um germe como na Definição 3.1 então podemos verificar facilmente que todo germe $S(z, \lambda) \cdot g(Z(z, \lambda), \Lambda(\lambda))$ $\mathbf{D}_3$ -equivalente a ele também satisfaz a Definição 3.1 .

Observação 3.11 *Dadas as formas normais $\mathbf{D}_3$ -equivariantes*

$$\begin{aligned} h_1 &= [\epsilon u + \delta \lambda, \sigma_1 u + m_1 v] \\ h_2 &= [\epsilon u + \delta \lambda, \sigma_1 u + m_2 v], \end{aligned}$$

com $\epsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$, $\sigma, m_1, m_2 \neq 0$, então

$$h_1 \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} h_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

Isto se verifica facilmente notando que $h_1 \stackrel{\mathbf{D}_3}{\sim} h_2$ se, e somente se, os coeficientes desses dois germes estão relacionados pelas igualdades da afirmação () feita na demonstração da Proposição 3.7.*

3.4.2 Desdobramentos Universais

Para obter desdobramentos universais das formas normais dadas nas equações (3.35) e (3.40) usamos basicamente o Teorema do Desdobramento Universal Γ -equivariante (Teorema 2.3) e o Corolário 2.1 no caso em que $\Gamma = \mathbf{D}_3$. Estes resultados estão nas duas proposições a seguir.

Proposição 3.9 *O germe $\mathbf{D}_3$ -equivariante*

$$k(z, \lambda) = \delta \lambda z + \epsilon \bar{z}^2$$

tem $\mathbf{D}_3$ -codimensão igual a zero (ver Definição 2.6).

Prova:

Como demonstrado na Proposição 3.5, $\text{RT}(k, \mathbf{D}_3) = [M_{u,v,\lambda}, \epsilon_{u,v,\lambda}]$. Ainda, $p_\lambda = \delta$, $q_\lambda = 0$; logo, $h_\lambda = [\delta, 0]$. Assim, podemos obter a expressão do espaço tangente de k (ver Definição 2.7):

$$T(h, \mathbf{D}_3) = [M_{u,v,\lambda}, \epsilon_{u,v,\lambda}] + \epsilon_\lambda \{[\delta, 0]\} = \vec{\epsilon}_{z,\lambda}(\mathbf{D}_3)$$

Com isto, $\text{codim}_{\mathbf{D}_3}(k) = 0$. □

Nota. Dizer que $\text{codim}_{\mathbf{D}_3}(k) = 0$ significa dizer que k é infinitesimalmente estável, ou seja, toda perturbação $\mathbf{D}_3$ -equivariante suficientemente pequena é $\mathbf{D}_3$ -equivalente a k .

Proposição 3.10 *O germe D_3 -equivariante*

$$h(z, \lambda) = (\epsilon u + \delta \lambda)z + (\sigma u + mv)\bar{z}^2$$

$\epsilon, \delta, \sigma = \pm 1$, $m \neq 0$, tem D_3 -codimensão 2 e um D_3 -desdobramento universal de h é

$$H(z, \lambda, \eta, \mu) = (\epsilon u + \delta \lambda)z + (\sigma u + \eta v + \mu)\bar{z}^2,$$

com (η, μ) próximo de $(m, 0)$.

Prova:

Como calculado na Proposição 3.7 ,

$$RT(h, D_3) = [M_{u,v,\lambda}^2, M_{u,v,\lambda}^2] \oplus \mathbf{R} \{ [\epsilon u + \delta \lambda, \sigma u + mv], [0, \epsilon u + \delta \lambda], [2\epsilon u, 3\sigma u + 4mv], [\epsilon v, \sigma v] \}$$

Logo, a expressão para o espaço tangente estendido fica:

$$\begin{aligned} T(h, D_3) &= RT(h, D_3) + \epsilon_\lambda \{ [p_\lambda, q_\lambda] \} \\ &= RT(h, D_3) + \epsilon_\lambda \{ [\delta, 0] \} \\ &= RT(h, D_3) + \mathbf{R} \cdot \{ [\delta, 0], [\delta \lambda, 0] \} \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de que $[\delta \lambda^j, 0] \in [M_{u,v,\lambda}^2, M_{u,v,\lambda}^2] \subset RT(h, D_3)$, $\forall j \geq 2$.

Mostremos que o complementar W de $T(h, D_3)$ em $\vec{\epsilon}_{z,\lambda}(D_3)$ é gerado por $[0, 1]$ e $[0, v]$:

É fácil ver que os 6 geradores de grau 1 de $T(h, D_3)$ mais $[0, 1]$ e $[0, v]$ podem, cada um, ser escritos como combinação linear dos 8 elementos de grau 1 de $\vec{\epsilon}_{z,\lambda}(D_3)$ e que a matriz 8×8 formada pelos coeficientes destas combinações lineares tem rank 8 (seu determinante é $\delta^3 \epsilon^2 \sigma \neq 0$). Isto significa que

$$\vec{\epsilon}_{z,\lambda}(D_3) = T(h, D_3) \oplus \mathbf{R} \cdot \{ [0, 1], [0, v] \}$$

Podemos, agora, usar o Corolário 2.1 para construir um D_3 -desdobramento universal de h :

$$\begin{aligned} H(z, \lambda, \eta, \mu) &= h(z, \lambda) + \mu[0, 1] + \eta[0, v] \\ &= [\epsilon u + \delta \lambda, \sigma u + \eta v + \mu], \end{aligned}$$

com $(\eta, \mu) \simeq (m, 0)$.

3.4.3 Bifurcação com D_3 -simetria

A menos de conjugação (entre subgrupos de isotropia), sabemos que os ramos de soluções para $g(z, \lambda) = 0$ são dados por

- (i) $z = 0$ (solução com D_3 -simetria)
- (ii) $p(x^2, 2x^3, \lambda) + q(x^2, 2x^3, \lambda)x = 0$ (soluções com $Z_2(k)$ -simetria)
- (iii) $p \equiv q \equiv 0$ (soluções com simetria trivial)

A partir destas equações podemos obter os auto-valores de $(dg)_{z,\lambda}$ em cada um dos casos:

Para o caso (i):

$(dg)_{z,\lambda} = p(0, 0, \lambda)Id$; então, neste caso temos $p(0, 0, \lambda)$ auto-valor duplo.

Para o caso (ii):

Desde que os auto-valores são $\xi_1 = g_z + g_{\bar{z}}$ e $\xi_2 = g_z - g_{\bar{z}}$, obtemos

$$\begin{aligned}\xi_1 &= qx + 2p_u x^2 + (6p_v + 2q_u)x^3 + 6q_v x^4 \\ \xi_2 &= -3qx\end{aligned}$$

Para o caso (iii):

Os auto-valores são dados implicitamente como soluções da equação

$$\xi^2 - \text{tr}(dg)_{p=0,q=0}\xi + \det(dg)_{p=0,q=0} = 0$$

onde

$$\begin{aligned}\text{tr}(dg)_{p=0,q=0} &= 2p_u u + (3p_v + q_u)v + 6q_v u^2 \\ \det(dg)_{p=0,q=0} &= 3(z^3 - \bar{z}^3)^2(p_v q_u - p_u q_v)\end{aligned}$$

3.4.3 A. Diagrama de bifurcação para $k(z, \lambda) = \epsilon\lambda z + \delta\bar{z}^2$

Desde que $p(0, 0, \lambda) = \epsilon\lambda$ é o auto-valor duplo de $(dg)_{0,\lambda}$, escolhendo $\epsilon = 1$ vemos que $(0, 0, \lambda)$ é solução assintoticamente estável quando $\lambda > 0$. Vamos escolher ainda $\delta = 1$. Assim, nosso germe é

$$k(z, \lambda) = \lambda z + \bar{z}^2$$

- Solução $z = 0$ (com D_3 -simetria) :
 - Auto-valor duplo $p(0, 0, \lambda) = \lambda$. Então:
 - $\lambda > 0 \Rightarrow$ auto-valores positivos
 - $\lambda < 0 \Rightarrow$ auto-valores negativos
- Soluções com $Z_2(k)$ -simetria:
 - Equação dos ramos:
 - $p + qx = 0, x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = -x, x \neq 0$ (ramo transcítico)
 - Auto-valores:

$$\xi_1 = qx = x$$

$$\xi_2 = -3qx = -3x$$

- Soluções com simetria trivial 1 :
 - Neste caso tais soluções não ocorrem, pois $q(0) \neq 0$.

Figura (3.8) Bifurcação de $k(z, \lambda) = \lambda z + \bar{z}^2$

3.4.3 B. Diagrama de bifurcação para $h(z, \lambda) = (\epsilon u + \delta \lambda)z + (\sigma u + mv)\bar{z}^2$

Para este caso vamos considerar $\epsilon = 1, \delta = \sigma = -1$, pois são tais valores que ocorrem no Cap.4. Assim, nosso germe é

$$h(z, \lambda) = (u - \lambda)z + (-u + mv)\bar{z}^2$$

- Solução $z = 0$ (com D_3 -simetria) :

- Auto-valor duplo $p(0, 0, \lambda) = -\lambda$. Então:

- $\lambda > 0 \Rightarrow$ auto-valores negativos

- $\lambda < 0 \Rightarrow$ auto-valores positivos

- Soluções com $Z_2(k)$ -simetria:

- Equação dos ramos:

$(x^2 - \lambda)x + (-x^2 + 2mx^3)x^2 = 0, x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(x) = x^2 - x^3 + 2mx^4$ (ramo supercrítico)

- Auto-valores de $(dg)_{x,\lambda}$:

$$\xi_1 = 2x^2 - 3x^3 + 8mx^4$$

$$\xi_2 = 3x^3(1 - 2mx)$$

ramo $Z_2(k)$, $x > 0$: $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$

ramo $Z_2(k)$, $x < 0$: $\xi_1 > 0$, $\xi_2 < 0$

- Soluções com simetria trivial 1 :

- Equação dos ramos:

$p = q = 0 \Rightarrow -u + mv = 0 \Rightarrow x^2(-1 + 2mx) + y^2(-1 - 6mx) = 0 \Rightarrow x = y = 0$
já que x, y variam numa vizinhança da origem. Assim, para este caso não temos soluções não-triviais.

Figura (3.9) Bifurcação de $h(z, \lambda) = (u - \lambda)z + (-u + mv)\bar{z}^2$

Notemos que os ramos $x > 0$ e $x < 0$ são assimétricos pois são ramos com um termo cúbico. Esta bifurcação é chamada *pitchfork assimétrico*.

3.4.3 C. Diagramas de bifurcação para $H(z, \lambda, \eta, \mu) = (u - \lambda)z + (-u + \eta v + \mu)\bar{z}^2$ (D_3 -desdobramento do germe h dado em 3.4.3 B.)

- Solução $z = 0$ (com D_3 -simetria) :
 - Auto-valor duplo $p(0, 0, \lambda) = -\lambda$. Então:
 - $\lambda > 0 \Rightarrow$ auto-valores negativos
 - $\lambda < 0 \Rightarrow$ auto-valores positivos
- Soluções com $Z_2(k)$ -simetria:
 - Equação dos ramos:

$$(x^2 - \lambda) + (-x^2 + 2\eta x^3 + \mu)x = 0, \quad x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(x) = \mu x + x^2 - x^3 + 2\eta x^4 \text{ (ramo transcrito, desde que } \mu \neq 0)$$
 - Neste caso, temos um ponto-limite x_0 :

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_{x=x_0} \Leftrightarrow x_0 \simeq \frac{-\mu}{2}, \text{ para } x \text{ pequeno}$$

- Soluções com simetria trivial 1 :
 - Equação dos ramos:

$$p = q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x^2 + y^2 \\ \mu = x^2(1 - 2\eta x) + y^2(1 + 6\eta x) \end{cases}$$

Logo, numa vizinhança da origem, só aparecem tais soluções para $\lambda, \mu > 0$ formando uma curva no plano x, y do tipo de um círculo com raio $\sqrt{\mu}$ (esta curva é um círculo quando $\eta = 0$).

Antes de prosseguir com a análise dos auto-valores, vamos estudar como são as intersecções da curva com subgrupo de isotropia trivial com as curvas com subgrupo de isotropia $Z_2(k)$ no espaço (x, y, λ) .

Geometricamente, podemos garantir que num plano paralelo ao plano (x, y) temos dois pontos de intersecção : um ponto $x_- < 0$ e outro $x_+ > 0$, ou seja um em cada

ramo com simetria $Z_2(k)$, já que tais ramos satisfazem $y = 0$.

Figura (3.10) $x_- \simeq -\sqrt{\mu}$, $x_+ \simeq \sqrt{\mu}$

Então:

$$\begin{aligned} \text{ramo} - 1 : & \begin{cases} \lambda = x^2 + y^2 \\ \mu = x^2(1 + 2\eta x) + y^2(1 - 6\eta x) \end{cases} \\ \text{ramo} - Z_2(k) : & \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = \mu x + x^2 - x^3 + 2\eta x^4 \end{cases} \end{aligned}$$

Na intersecção, $\lambda(x) = x^2$; portanto, os pontos de intersecção são:

$$(z = x_-, \lambda_- = (x_-)^2) \text{ e } (z = x_+, \lambda_+ = (x_+)^2)$$

Assim, podemos dizer que o ramo-1 conecta os dois ramos $Z_2(k)$, $x > 0$ e $Z_2(k)$, $x < 0$. Ainda, podemos obter a inclinação deste ramo no diagrama de bifurcação através da igualdade

$$\text{sinal}(\lambda_+ - \lambda_-) = \text{sinal}(\eta)$$

Esta igualdade segue de

$$\lambda_+ - \lambda_- = \frac{2\mu\eta(x_+ - x_-)}{(1 + 2\eta x_-)(1 + 2\eta x_+)},$$

a qual se verifica facilmente a partir das expressões dos ramos com simetrias 1 e $Z_2(k)$. As diferentes possibilidades para o ramo-1 estão esquematizadas na figura

(3.11) (nesta figura, os ramos- $Z_2(k)$ são aproximados pela sua parte quadrática) :

Figura (3.11) Inclinação do ramo-1 no diagrama de bifurcação

Finalmente, vamos analisar os auto-valores de $(dH)_{z,\lambda}$ em cada ramo de soluções:

- Auto-valores quando $z = 0$:

Auto-valor duplo $p(0, 0, \lambda) = -\lambda$

- Auto-valores dos ramos- $Z_2(k)$:

$$\xi_1 = \mu x + 2x^2 - 3x^3 + 8\eta x^4$$

$$\xi_2 = -3(\mu x - x^3 + 2\eta x^4)$$

- Auto-valores do ramo-1 :

Dados implicitamente:

$$\text{senal}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \text{senal}(\det(dH)_{z,\lambda}) = \text{senal}(-p_u q_v) = \text{senal}(-\eta)$$

$$\text{senal}(\xi_1 + \xi_2) = \text{senal}(\text{tr}((dH)_{z,\lambda})) = \text{senal}(2p_u u) = \text{senal}(2(x^2 + y^2)) > 0$$

1º caso : $\mu < 0$

- Ramo $z = 0$ (com D_3 -simetria) :

Como já analisado anteriormente,

$$\lambda > 0 \Rightarrow p(0, 0, \lambda) > 0$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow p(0, 0, \lambda) < 0$$

- Ramos- $Z_2(k)$:

- O ponto-limite $x_0 \simeq -\mu/2$ está no ramo ($x > 0$)

$$x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sinal}(\xi_1) = \text{sinal}(\mu x) > 0 \\ \text{sinal}(\xi_2) = \text{sinal}(-3\mu x) < 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = x \frac{d\lambda}{dx} \Rightarrow \begin{cases} x > -\mu/2 \Rightarrow \xi_1 > 0 \\ x < -\mu/2 \Rightarrow \xi_1 < 0 \end{cases} \\ \text{sinal}(\xi_2) = \text{sinal}(-3\mu x) > 0 \end{cases}$$

- Ramo com simetria trivial 1:

Neste caso, tais ramos não aparecem.

Figura (3.12) Diagrama de bifurcação de H para $\mu < 0$

2º caso : $\mu > 0$, $\eta < 0$

- Solução $z = 0$ (subgrupo de isotropia $\mathbf{D}_3$) :

Exatamente como no 1º caso.

- Ramos $\mathbf{Z}_2(k)$:

- O ponto limite $x_0 \sim -\mu/2$ está no ramo ($x < 0$)

- Auto-valor $\xi_1 = x \frac{d\lambda}{dx}$:

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow \xi_1 < 0 \\ x < 0 &\Rightarrow \begin{cases} x > -\mu/2 \Rightarrow \xi_1 < 0 \\ x < -\mu/2 \Rightarrow \xi_1 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Auto-valor $\xi_2 = -3(\mu x - x^3 + 2\eta x^4)$:

Desde que $\xi_2 = 3(x^2 - \lambda(x))$, segue que $x = 0$, x_- e x_+ são raízes da equação $\xi_2(x) = 0$. Analisando os sinais de $\xi_2'(x)$ no intervalo $[x_-, x_+]$ podemos concluir que seu gráfico (numa vizinhança de $x = 0$) é como na figura (3.13) e, através deste gráfico, temos os sinais de ξ_2 com a variação de x .

Figura (3.13) Auto-valor $\xi_2(x)$

- Soluções com simetria trivial **1** :

$$\begin{aligned} \text{senal}(\xi_1 \cdot \xi_2) &= \text{senal}(-\eta) > 0 \\ \text{senal}(\xi_1 + \xi_2) &> 0 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que ξ_1 e ξ_2 são positivos.

Ainda,

$$\text{senal}(\lambda_+ - \lambda_-) = \text{senal}(\eta) < 0,$$

isto é $\lambda_+ < \lambda_-$.

Figura (3.14) Diagrama de bifurcação de H para $\mu > 0$, $\eta < 0$

3º caso : $\mu > 0$, $\eta > 0$

- Solução $z = 0$ (subgrupo de isotropia D_3) :
Exatamente como no 2º caso.
- Ramos $Z_2(k)$:
Idêntico ao 2º caso.
- Soluções com simetria trivial **1** :

$$\text{ sinal}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \text{ sinal}(-\eta) < 0$$

Logo, ξ_1 e ξ_2 têm sinais contrários.

Ainda,

$$\text{ sinal}(\lambda_+ - \lambda_-) = \text{ sinal}(\eta) > 0$$

Assim, $\lambda_+ > \lambda_-$.

Figura (3.15) Diagrama de bifurcação de H para $\mu > 0$, $\eta > 0$

Terminamos este estudo sobre o D_3 -desdobramento H com um resultado sobre a estabilidade de suas soluções:

Teorema 3.1 *A estabilidade linear das soluções de $H(z, \lambda, \eta, \mu) = (u - \lambda)z + (-u + \eta v + \mu)\bar{z}^2$ é preservada por D_3 -equivalência. Em outras palavras, para $g = S(z, \lambda)H(Z(z, \lambda), \Lambda(\lambda), \eta, \mu)$ D_3 -equivalente a H , vale:*

$$(Z_0, \Lambda_0) \text{ é estabilidade linear de } H \Leftrightarrow (z_0, \lambda_0) \text{ é estabilidade linear de } g$$

Prova:

Fazemos a prova considerando cada subgrupo de isotropia de D_3 .

(i) Solução $z = 0$ (subgrupo de isotropia D_3) :

A ação de D_3 em C é absolutamente irredutível; logo, pelo Teorema 2.1 , a estabilidade de tais soluções é preservada por D_3 -equivalência.

(ii) Soluções com $Z_2(k)$ -simetria:

$C = \mathbf{R} \cdot \{1\} \oplus \mathbf{R} \cdot \{i\}$ e ambos os subespaços desta decomposição são absolutamente irredutíveis pela ação de $Z_2(k)$. Logo, como em (i) o resultado segue.

(iii) Soluções com simetria trivial 1 :

Primeiramente, observemos que

$$\det(dg)_{z_0, \lambda_0} = \det S(z_0, \lambda_0) \cdot \det(dH)_{Z_0, \Lambda_0} \cdot \det(dX)_{z_0, \lambda_0}$$

e como $\det S(z_0, \lambda_0)$ e $\det(dX)_{z_0, \lambda_0}$ são positivos, segue que o sinal de $\det(dH)_{Z_0, \Lambda_0}$ é um invariante por D_3 -equivalência.

Então:

- se $\det(dH)_{Z_0, \Lambda_0} < 0$, então $(dH)_{Z_0, \Lambda_0}$ tem dois auto-valores com sinais contrários e, como acabamos de observar, este fato se mantém por $\mathbf{D}_3$ -equivalência.

- se $\det(dH)_{Z_0, \Lambda_0} > 0$, então os auto-valores têm mesmo sinal. Neste caso, olhamos para

$$\text{tr}(dH_{Z_0, \Lambda_0}) = 2p_u u + (3p_v + q_u)v + 6q_v u^2$$

cujo sinal é o de $p_u(0)$. Mas já sabemos que $\text{sign}(p_u(0))$ é invariante por $\mathbf{D}_3$ -equivalência. E isto completa a demonstração.

Capítulo 4

O Modelo de Mooney-Rivlin

4.1 Descrição do problema

O modelo de Mooney-Rivlin consiste de um cubo elástico de arestas unitárias ($l_1 = l_2 = l_3 = 1$) sujeito à ação de uma força λ aplicada em cada face na direção perpendicular. Tal cubo é homogêneo (a deformação de cada face é a mesma em cada um de seus pontos) e incompressível (o volume se mantém constante). É suposto também que os estados de deformação do cubo são paralelepípedos; assim, temos – a menos de permutações de l_1, l_2 e l_3 – as seguintes configurações possíveis:

$$\begin{aligned} l_1 &= l_2 = l_3 \quad (\text{cubo}) \\ l_1 &> l_2 = l_3 \quad (\text{barra}) \\ l_1 &= l_2 > l_3 \quad (\text{chapa}) \\ l_1 &> l_2 > l_3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

O problema central é estabelecer outras situações de equilíbrio diferentes do seu formato inicial de cubo pela ação de λ em cada face deste corpo e dizer quais delas são estáveis.

A energia armazenada do cubo de Mooney-Rivlin é dada pela função

$$\Phi(l_1, l_2, l_3) = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^3 (l_i^2 - 1) + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^3 (1/l_i^2 - 1), \quad (4.2)$$

com $\alpha, \beta > 0$. Esta expressão para a energia armazenada foi sugerida pela primeira vez por Mooney [9] como adequada para descrever as propriedades elásticas do material. Seja Ω o trabalho realizado pelas forças externas, ou seja,

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \lambda (l_i - 1).$$

Desta forma, o que queremos é minimizar a diferença

$$\Phi - \Omega$$

Isto é feito da seguinte maneira: derivando a expressão de $\Phi - \Omega$ e usando um multiplicador de Lagrange p , obtemos um problema de bifurcação com parâmetro λ . Mais precisamente,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial l_i} - \lambda = \frac{p}{l_i}, & i = 1, 2, 3 \\ l_1 l_2 l_3 = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Assim, os valores (l_1, l_2, l_3) para o qual a diferença é mínima são pontos de equilíbrio de (4.3). Nosso objetivo é resolver tal problema usando técnicas do Cap.3. A maneira como fazemos isto é descrita na seção 4.2 seguinte.

4.2 Redução do problema para D_3 -simetria no plano

Vamos aqui reduzir a questão de encontrar os equilíbrios de (4.3) à questão de encontrar zeros de um problema de bifurcação $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ D_3 -equivariante. Resumidamente, começamos com uma mudança de coordenadas (não-linear) para mudar o domínio $\{(l_1, l_2, l_3)/l_1 l_2 l_3 = 1\}$ para um subespaço

vetorial W de $\mathbf{R}^3$ de dimensão 2. Em seguida, substituímos (4.3) por uma equação $\tilde{g} = 0$, onde $\tilde{g} : W \times \mathbf{R} \rightarrow W$ é S_3 -equivariante, com S_3 o grupo das permutações. Finalmente, identificamos W e $\mathbf{C}$ de maneira que a ação de S_3 em W corresponda à ação de D_3 em $\mathbf{C}$; daí, escrevemos $\tilde{g}$ nas coordenadas de $\mathbf{C}$ para obter a aplicação g .

1. Mudança de coordenadas

Vamos passar das coordenadas (l_1, l_2, l_3) para (w_1, w_2, w_3) considerando a seguinte mudança:

$$w_i = \log(l_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

Desta forma, $l_1 l_2 l_3 = 1$ se, e somente se, $w_1 + w_2 + w_3 = 0$. Logo, com tal mudança de coordenadas passamos ao subespaço

$$W = \{(w_1, w_2, w_3) / w_1 + w_2 + w_3 = 0\}.$$

2. Obtenção de $\tilde{g} : W \times \mathbf{R} \rightarrow W$ S_3 -equivariante

Usando a notação $\varphi_i(l) = \frac{\partial \Phi}{\partial l_i}(l)$, $i = 1, 2, 3$, eliminando p de (4.3) e usando a mudança de coordenadas (4.4), definimos $h : W \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ por

$$h(w_1, w_2, w_3, \lambda) = \begin{bmatrix} e^{w_1}(\varphi_1(e^{w_1}, e^{w_2}, e^{w_3}) - \lambda) \\ e^{w_2}(\varphi_2(e^{w_1}, e^{w_2}, e^{w_3}) - \lambda) \\ e^{w_3}(\varphi_3(e^{w_1}, e^{w_2}, e^{w_3}) - \lambda) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e, assim, a equação (4.3) fica

$$h(w_1, w_2, w_3, \lambda) = p \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Consideremos a projeção ortogonal sobre W $\rho : \mathbf{R}^3 \rightarrow W$,

$$\rho(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{1}{3}(x + y + z)(1, 1, 1). \quad (4.7)$$

É imediato que $\rho(\mathbf{R}^3) \subset W$ e que $\ker(\rho) = \mathbf{R} \cdot \{(1, 1, 1)\}$. Assim, podemos definir $\tilde{g} : W \times \mathbf{R} \rightarrow W$ por

$$\tilde{g}(w, \lambda) = \rho \circ h(w, \lambda) \quad (4.8)$$

Como ρ e h são S_3 -equivariantes temos $\tilde{g}$ também S_3 -equivariante (a razão de h ser S_3 -equivariante é que Φ é S_3 -invariante).

Finalmente, notemos que vale (4.6) se, e somente se, $h(w, \lambda)$ é múltiplo de $(1, 1, 1)$, ou seja, se $h(w, \lambda) \in \ker(\rho)$, o que equivale a dizer que $\tilde{g}(w, \lambda) = 0$. Logo, o nosso problema passa a ser o problema de resolver $\tilde{g} = 0$.

3. Obtenção de $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ D_3 -equivariante

Consideremos o isomorfismo $T : W \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$T(w) = \frac{1}{2}[w_1 + \frac{i}{\sqrt{3}}(w_2 - w_3)],$$

cujo isomorfismo inverso é

$$T^{-1}(x + iy) = (2x, -x + \sqrt{3}y, -x - \sqrt{3}y).$$

Vamos verificar que a cada permutação p_j de S_3 , $j = 1, \dots, 6$, corresponde um elemento γ_j de D_3 tal que

$$\gamma_j \cdot T(w) = T(p_j \cdot w), \quad \forall w \in W,$$

ou seja, que $T : W \rightarrow \mathbb{C}$ é um isomorfismo que faz a ação de S_3 em W corresponder à ação de D_3 em $\mathbb{C}$:

- Começamos especificando cada permutação p_j de S_3 e cada γ_j de D_3 , para $j = 1, \dots, 6$:

S_3	D_3
$p_1 = (1, 2, 3) = Id$	$\gamma_1 = Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$p_2 = (1, 3, 2)$	$\gamma_2 = k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$p_3 = (3, 1, 2)$	$\gamma_3 = R_{\frac{2\pi}{3}}$
$p_4 = (2, 3, 1)$	$\gamma_4 = R_{\frac{4\pi}{3}}$
$p_5 = (3, 2, 1)$	$\gamma_5 = k \cdot R_{\frac{2\pi}{3}}$
$p_6 = (2, 1, 3)$	$\gamma_6 = k \cdot R_{\frac{4\pi}{3}}$

- Correspondência entre as ações dos grupos:

$$1. \gamma_1 \cdot T(w) = T(w) = T(p_1 \cdot w)$$

$$2. \gamma_2 \cdot T(w) = \overline{T(w)} = \frac{1}{2}(w_1 - \frac{i}{\sqrt{3}}(w_2 - w_3)) = \frac{1}{2}(w_1 + \frac{i}{\sqrt{3}}(w_3 - w_2)) = T(p_2 \cdot w)$$

$$3. \gamma_3 \cdot T(w) = [\frac{-w_1}{4} - \frac{1}{4}(w_2 - w_3)] + i[\frac{\sqrt{3}}{4}w_1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}(w_2 - w_3)] = \frac{w_3}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}(w_1 - w_2) = T(p_3 \cdot w),$$

onde na segunda igualdade usamos a relação $w_1 + w_2 + w_3 = 0$.

$$4. \gamma_4 \cdot T(w) = (\gamma_3 \cdot \gamma_3)T(w) = \gamma_3 \cdot (\gamma_3 T(w)) = T(p_4 \cdot w),$$

onde na segunda igualdade usamos (3.).

$$5. \gamma_5 \cdot T(w) = k \cdot T(p_3 \cdot w) = T(p_5 \cdot w)$$

$$6. \gamma_6 \cdot T(w) = k \cdot T(p_4 \cdot w) = T(p_6 \cdot w)$$

Assim, T^{-1} e T são mudanças de coordenadas na fonte e na meta de $\tilde{g}$ que o transforma num germe g D_3 -equivariante. Podemos, portanto, tomar $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(z, \lambda) = T \circ \tilde{g} \circ T^{-1}(z, \lambda). \quad (4.9)$$

(i) g é D_3 -equivariante :

Para cada $\gamma_j \in D_3$,

$$\begin{aligned} g(\gamma_j(z, \lambda)) &= T \circ \tilde{g} \circ T^{-1}(\gamma_j z, \lambda) = T \circ \tilde{g}(p_j T^{-1}(z, \lambda)) \\ &= T(p_j(\tilde{g} \circ T^{-1}(z, \lambda))) = \gamma_j g(z, \lambda) \end{aligned}$$

(ii) O conjunto dos zeros de g é isomorfo ao conjunto de zeros de $\tilde{g}$ pelo isomorfismo T ; de fato,

$$(z, \lambda) \text{ é zero de } g \Leftrightarrow T^{-1}(z, \lambda) \text{ é zero de } \tilde{g}.$$

Portanto, podemos substituir o problema de encontrar equilíbrios de (4.3) onde Φ é S_3 -invariante pelo problema de encontrar zeros para o problema de bifurcação D_3 -equivariante $g : C \times R \rightarrow C$ dado por

$$g(z, \lambda) = T \circ \rho \circ h \circ T^{-1}(z, \lambda), \quad (4.10)$$

para h dada em (4.5) e ρ dada em (4.7).

Observação 4.1 *Concluimos esta seção com três resultados que estabelecem a relação entre os zeros de g e os equilíbrios do material de Mooney-Rivlin:*

1. *Uma solução $x_0 > 0$ de (4.10) com $Z_2(k)$ -simetria representa uma configuração de equilíbrio em forma de barra para o material de Mooney-Rivlin. De fato:*

$$w^0 = T^{-1}(x_0) = (2x_0, -x_0, -x_0) \Rightarrow l_1^0 = e^{2x_0}, l_2^0 = e^{-x_0}, l_3^0 = e^{-x_0}, x_0 > 0 \Rightarrow$$

$$l_1^0 > l_2^0 = l_3^0 : \text{barra}$$

2. *Uma solução $x_1 < 0$ de (4.10) com $Z_2(k)$ -simetria representa uma configuração de equilíbrio em forma de chapa para o material de Mooney-Rivlin. De fato:*

$$w^1 = T^{-1}(x_1) = (2x_1, -x_1, -x_1) \Rightarrow l_1^1 = e^{2x_1}, l_2^1 = e^{-x_1}, l_3^1 = e^{-x_1}, x_1 < 0 \Rightarrow$$

$$l_1^1 < l_2^1 = l_3^1 : \text{chapa}$$

3. *Uma solução x_2 de (4.10) com 1-simetria representa uma configuração de equilíbrio em forma de paralelepípedo do tipo $l_1 < l_2 < l_3$.*

4.3 Classificação do problema

Notemos que a energia armazenada do modelo dada em (4.2) pode ser expressa como

$$\Phi(l_1, l_2, l_3) = \psi(l_1) + \psi(l_2) + \psi(l_3), \quad (4.11)$$

para

$$\psi(t) = \frac{\alpha}{2}(t^2 - 1) + \frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right). \quad (4.12)$$

Consideremos a expansão em Taylor de ψ em torno de $t = 1$:

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} (t - 1)^n. \quad (4.13)$$

O objetivo desta seção é encontrar condições sobre Φ para se classificar os tipos de equilíbrio dentro dos casos estudados no Cap.3, seção 3.4 . Tais condições serão extraídas dos coeficientes c_n 's de (4.13), onde cada c_n , por sua vez, depende, obviamente, de α e de β .

Com base na redução feita na seção 4.2 anterior, vamos considerar o problema de bifurcação $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ D_3 -equivariante

$$g(z, \lambda) = p(u, v, \lambda)z + q(u, v, \lambda)\bar{z}^2, \quad (4.14)$$

com uma singularidade em $(z = 0, \lambda = \lambda_0)$, isto é $p(0, 0, \lambda_0) = 0$.

A partir das formas normais obtidas nas proposições (3.7) e (3.8) verificamos imediatamente que a classificação de (4.14) em um de tais casos está vinculada à análise de

$$p, p_u, p_v, p_\lambda, q, q_u, q_v, q_\lambda \quad (4.15)$$

calculados no ponto $(u = 0, v = 0, \lambda = \lambda_0)$. Já podemos notar que λ_0 será determinado pela condição $p(0, 0, \lambda_0) = 0$ necessária à existência de singularidade em $(z = 0, \lambda = \lambda_0)$. As relações entre cada elemento de (4.15) e os coeficientes de Taylor de ψ são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} p &= c_1 + c_2 - \lambda_0 \\ p_u &= (3c_3 + c_4)/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_v &= (18c_3 + 10c_4 + c_5)/24 \\
p_\lambda &= -1 \\
q &= (2c_2 + c_3)/2 \\
q_u &= (18c_3 + 10c_4 + c_5)/8 \\
q_v &= (75c_3 + 65c_4 + 15c_5 + c_6)/120 \\
q_\lambda &= -1/2
\end{aligned}$$

Estas igualdades não serão demonstradas devido ao seu carácter extremamente técnico. Como mencionado acima, a primeira igualdade nos dá λ_0 :

$$\lambda_0 = c_1 + c_2 = 2(\alpha + \beta) \quad (4.16)$$

Desde que $p_\lambda = -1$, a quinta igualdade e a Proposição 3.7 garantem que se $2c_2 + c_3 \neq 0$, então g é $\mathbf{D}_3$ -equivalente à forma normal

$$k(z, \lambda) = -(\lambda - \lambda_0)z + \delta \bar{z}^2,$$

com $\delta = \text{senal}(q(0, 0, \lambda_0))$. No estudo de tais singularidades foi constatado que as soluções não-triviais (ramos com $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ -simetria) são instáveis. Vamos então considerar a situação em que $q(0, 0, \lambda_0) = 0$, isto é,

$$2c_2 + c_3 = 0 \quad (4.17)$$

ou ainda,

$$\alpha = 3\beta. \quad (4.18)$$

Observação 4.2 Por (4.16) e (4.18) segue que para o caso $q(0, 0, \lambda_0) = 0$ devemos ter $\lambda_0 = 8\beta$.

Para este caso $q(0, 0, \lambda_0) = 0$, queremos ainda que g seja não-degenerado : no Capítulo 3, Proposição 3.8 verificamos que g é $\mathbf{D}_3$ -equivalente a

$$h(z, \lambda) = (\epsilon u + \delta(\lambda - \lambda_0))z + (\sigma u + mv)\bar{z}^2, \quad (4.19)$$

onde

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \text{senal}(p_u) \\
\delta &= \text{senal}(p_\lambda) \\
\sigma &= \delta \text{senal}(p_\lambda q_u - p_u q_\lambda) \\
m &= \epsilon \frac{p_u q_v - p_v q_u}{(p_\lambda q_u - p_u q_\lambda)^2} p_\lambda^2
\end{aligned}$$

são todos não nulos (ver Definição 3.1). Ainda, podemos facilmente checar que

$$\begin{aligned}\epsilon &= \text{sinal}(3c_3 + c_4) \\ \delta &= -1 \\ \sigma &= -\text{sinal}(18c_3 + 10c_4 + c_5) \\ m &= \epsilon \text{sinal}(-5c_5^2 - 40c_4c_5 - 240c_4^2 - 720c_3c_4 + 720c_3^2 + 12c_3c_6 + 4c_4c_6)\end{aligned}$$

onde

$$c_1 = \alpha - \beta, \quad c_2 = \alpha + 3\beta, \quad c_3 = -12\beta, \quad c_4 = 60\beta, \quad c_5 = -360\beta, \quad c_6 = 2520\beta.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\epsilon &= \text{sinal}(\beta) = 1 \\ \delta &= -1 \\ \sigma &= -\text{sinal}(24\beta) = -1 \\ \text{sinal}(m) &> 0.\end{aligned}$$

Portanto, a forma normal para o modelo de Mooney-Rivlin é

$$h(z, \lambda) = (u - (\lambda - \lambda_0))z + (-u + mv)\bar{z}^2, \quad (4.20)$$

com $m > 0$ cujo desdobramento universal é

$$H(z, \lambda, \eta, \mu) = (u - (\lambda - \lambda_0))z + (-u + \eta v + \mu)\bar{z}^2, \quad (4.21)$$

com $\eta \simeq m$ e $\mu \simeq 0$.

Conclusões:

A análise de h e de seu $\mathbf{D}_3$ -desdobramento H está desenvolvida na subseção 3.4, Cap.3 . Devemos apenas salientar que agora partimos da singularidade em $(0, 0, \lambda_0)$ e não mais em $(0, 0, 0)$ como feito no Cap.3 . Com base naqueles diagramas e na Observação 3, temos:

– Para h :

Com as medidas $l_1 = 2l_2 = 2l_3$ ($l_1 > l_2 = l_3$) – correspondendo à forma de barra – temos uma posição de equilíbrio estável. Ver figura (3.9).

- Para H ($m > 0 \Rightarrow \eta > 0$) :
 - se $\mu < 0$: com base na figura (3.12) podemos concluir que não existem soluções com 1-simetria; só temos as com $\mathbf{Z}_2(\mathbf{k})$ -simetria correspondendo a equilíbrios do tipo *barra* (se $x > 0$) e do tipo *chapa* (se $x < 0$). Para alguns valores de $x > 0$ o formato de barra é assintoticamente estável; mais especificamente, se $x > -\mu/2$.
 - se $\mu > 0$: com base na figura (3.15) concluímos que para este caso surgem outras configurações de equilíbrios distintas de *barra* e de *chapa*, mas que, devido ao fato de termos $\eta > 0$, não são estáveis. Os equilíbrios estáveis aparecem para $-\frac{\mu}{2} < x < x_-$ (*chapa*) e para $x > x_+$ (*barra*).

Observação 4.3 Quando a constante β da energia armazenada Φ dada em (4.2) é nula, o material elástico é dito neo-Hookeano. Tal material foi também estudado por Rivlin [10], [11] num caso mais geral onde as tensões aplicadas em cada face do cubo são distintas entre si.

Apêndice

Integral de Haar

Definição 4.1 *Seja $\Gamma \subset GL(n)$ um grupo de Lie e $f : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ função contínua a valores reais. A operação*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \text{ ou } \int_{\Gamma} f \text{ ou } \int_{\Gamma} f d\gamma \in \mathbf{R} \quad (1)$$

é uma integral de Haar se satisfaz:

(a) *Linearidade:*

$$\int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\Gamma} f + \beta \int_{\Gamma} g$$

com $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ contínuas e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

(b) *Positividade: Se $f(\gamma) \geq 0, \forall \gamma \in \Gamma$, então*

$$\int_{\Gamma} f \geq 0.$$

(c) *Invariância por translação:*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma), \forall \delta \in \Gamma \text{ fixo.}$$

Duas propriedades para a integral de Haar que usamos na proposição seguinte são:

– Se Γ é compacto, então $\int_{\Gamma} 1$ é finito e, neste caso, definimos $\int_{\Gamma} 1 = 1$ (chamada integral de Haar normalizada).

– Se Γ é compacto, temos

$$\int_{\Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\Gamma} f(\gamma), \forall \delta \in \Gamma$$

(translação à direita).

Proposição 4.1 *Seja Γ um grupo de Lie compacto atuando num espaço vetorial de dimensão finita V . Denotemos por ρ_γ a matriz associada a $\gamma \in \Gamma$. Então, existe um produto interno em V tal que para cada $\gamma \in \Gamma$ tem-se ρ_γ ortogonal.*

Demonstração:

A idéia é usar a integral de Haar para construir um produto interno *invariante* $\langle, \rangle_\Gamma$ sobre V , isto é, satisfazendo

$$\langle \rho_\gamma v, \rho_\gamma w \rangle_\Gamma = \langle v, w \rangle_\Gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (2)$$

Então: Seja “ $\cdot$ ” um produto interno em V . Definamos

$$\langle v, w \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \rho_\gamma v \cdot \rho_\gamma w$$

Por (a) e (b) da definição anterior segue que $\langle, \rangle$ é um produto interno. Finalmente,

$$\langle \rho_\delta v \cdot \rho_\delta w \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \langle \rho_\gamma \rho_\delta v \cdot \rho_\gamma \rho_\delta w \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \rho_\gamma v \cdot \rho_\gamma w = \langle v, w \rangle_\Gamma$$

onde na segunda igualdade usamos a invariância à direita. Logo, temos também a validade de (2) concluindo a demonstração. $\square$

Bibliografia

- [1] Ball, J. M., Schaeffer, D. G. [1983]. Bifurcation and stability of homogeneous equilibrium configurations of an elastic body under dead-load tractions. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **94**, 315–339.
- [2] Bourbaki, N. [1960]. *Groupes et Algebras de Lie*, Cap. I, Act. Sc. et Ind.
- [3] Boyce, W. E., Di Prima, R. C. [1965]. *Elementary Differential Equations*. John Wiley and Sons, Inc.
- [4] Gibson, C. G. [1979]. *Singular points of smooth mappings*. Research Notes in Mathematics, **25**. London, Pitman.
- [5] Golubitsky, M., Guillemin, V. [1973]. *Stable Mappings and their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics **14**. Springer-Verlag, New York Inc.
- [6] Golubitsky, M., Stewart, I. e Shaeffer, D. G. [1985]. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol.2. Applied Mathematical Sciences, **69**. Springer-Verlag.
- [7] Hirsch, M. W., Smale, S. [1974]. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press.
- [8] Palis, J. Jr. [1975]. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. 10o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, pp. 24, 33.
- [9] Rivlin, R. S. [1947]. Torsion of a Rubber Cylinder. *Journal of Applied Physics*. Vol.18, 315–339.
- [10] Rivlin, R. S. [1948]. Large elastic deformations of isotropic materials, II. Some uniqueness theorems for pure, homogenous deformations. *Phil. Trans. R. Soc. London. A* **240**, 491–508.
- [11] Rivlin, R. S. [1974]. Stability of pure homogenous deformations of an elastic cube under dead loading. *Quart. Appl. Math.* **32**, 265–271.

- [12] Stewart, I. [1987]. Bifurcations with Symmetry. Em: *New Directions in Dynamical Systems* (T. Bedford and J. W. Swift, Eds.) Cambridge University Press, 235–283.
- [13] Cicogna, G. [1981]. Symmetry Breakdown from Bifurcations. *Lettere al Nuovo Cimento* **31**, 600-602.