Hipoeliticidade global para campos vetoriais complexos no plano

Renato Andrielli Laguna

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

Renato Andrielli Laguna

Hipoeliticidade global para campos vetoriais complexos no plano

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
Agosto de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Laguna, Renato Andrielli
L181h Hipoeliticidade global para campos vetoriais complexos no plano / Renato Andrielli Laguna; orientador Sérgio Luís Zani. -- São Carlos, 2016.
71 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Hipoeliticidade global. 2. Campo vetorial complexo. I. Zani, Sérgio Luís, orient. II. Título.

Renato Andrielli Laguna

Global hypoellipticity for complex vector fields in the plane

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
August 2016

Agradecimentos

Sou grato ao meu orientador, Sérgio Luís Zani, pela paciência colossal e por não me deixar desistir. Ao orientador do meu orientador, Adalberto Bergamasco, que sugeriu o problema da hipoeliticidade global no plano — no qual ele havia anteriormente trabalhado com Jorge Hounie — e também ajudou em vários momentos críticos.

Agradeço especialmente ao CPNq e à Capes, pelo auxílio financeiro.

Por fim, mas sempre relevante, meu agradecimento a Deus, ao meu país e à minha família.

Resumo

Este trabalho consiste em um estudo sobre a propriedade de hipoeliticidade global para campos vetoriais complexos não singulares no plano.
As órbitas de Sussmann de um tal campo desempenham um papel fundamental nesta análise. Mostramos que se todas as órbitas são unidimensionais o campo não é globalmente hipoelítico. Quando o campo apresenta uma órbita bidimensional e ao menos uma órbita unidimensional mergulhada também foi demonstrado que este campo não é globalmente hipoelítico. No caso em que o plano é a única órbita, define-se, como em Hounie (1982), uma determinada relação de equivalência entre pontos em que o campo deixa de ser elítico. As classes de equivalência desta relação são homeomorfas a um ponto, a um intervalo compacto ou a uma semirreta. Se todas as classes de equivalência são compactas, o campo é globalmente hipoelítico. Caso haja uma classe de equivalência fechada e homeomorfa a uma semirreta, o campo não é globalmente hipoelítico.

Palavras-chave: hipoeliticidade global, campos vetoriais complexos.

Abstract

This work is a study about global hypoellipticity for nonsingular complex vector fields in the plane.
Sussmann's orbits play a fundamental role in this analysis. We show that if all the orbits are one-dimensional then the vector field is not globally hypoelliptic. When there exist a two-dimensional orbit and an embedded one-dimensional one then the vector field is not globally hypoelliptic. In the case when the plane is the only orbit, one defines, as in Hounie (1982), a certain equivalence relation between points where the vector field is not elliptic. The equivalence classes are homeomorphic to a single point, a compact interval or a ray. If all the equivalence classes are compact then the vector field is globally hypoelliptic. If there exists an equivalence class that is closed and homeomorphic to a ray then the vector field is not globally hypoelliptic.

Keywords: global hypoellipticity, complex vector fields.

Sumário

1 INTRODUÇÃO . . . 13

2 PRELIMINARES . . . 15

2.1 Hipoeliticidade e hipoeliticidade global . . . 15

2.1.1 Invariância da hipoeliticidade global . . . 15

2.2 L-órbitas e L-invariância . . . 20

2.2.1 Órbitas de Sussmann . . . 20

2.2.2 Órbitas de um campo complexo . . . 20

3 ESTUDO DO CASO TUBO . . . 23

3.1 Regularidade parcial . . . 23

3.2 Campos sem a condição ($\mathscr{P}$): L não é g.h. . . . 26

3.3 Campos com a condição ($\mathscr{P}$) . . . 27

3.3.1 Casos em que L não é G.H. . . . 28

3.3.2 Casos em que L é G.H. . . . 29

3.4 Resumo do caso tubo . . . 32

4 CAMPOS REAIS E ESSENCIALMENTE REAIS . . . 33

4.1 Caso real . . . 33

4.1.1 Nota sobre a compactificação de um ponto . . . 34

4.1.2 Órbitas com α e ω-limites vazios são boas . . . 34

4.1.3 Órbitas fechadas são boas . . . 35

4.1.4 L somente admite órbitas boas . . . 35

4.1.5 Construção da solução singular . . . 35

4.2 Caso essencialmente real . . . 38

5 CAMPOS COMPLEXOS, CASO NÃO-TRANSITIVO . . . 41

5.1 O caso bom . . . 41

5.1.1 Quando podemos garantir o caso bom? . . . 41

5.2 O caso remanescente: L essencialmente transitivo . . . 42

5.2.1 Algumas propriedades . . . 42

5.2.2 Um exemplo: o Campo do Adalberto . . . 48

5.2.3 Uma condição suficiente para que um campo essencialmente transitivo não seja globalmente hipoelítico . . . 55

5.2.4 Conjectura sobre os casos essencialmente transitivos . . . 57

6 CAMPOS COMPLEXOS, CASO TRANSITIVO . . . 59

6.1 A relação R 59
6.1.1 Formas equivalentes da definição 59
6.1.2 R-órbitas 63
6.2 Estudo do caso transitivo 65
6.2.1 Hipoeliticidade global de L em vizinhanças das R-órbitas 66
6.3 Conclusões e resumo 70

REFERÊNCIAS 71

1 Introdução

Neste trabalho estamos interessados no estudo da propriedade da hipoeliticidade global para campos vetoriais complexos não singulares definidos no plano. Esta é uma propriedade que todos operadores elíticos possuem, e de certa forma um campo hipoelítico (global) é como um campo elítico degenerado.

O caso em que um tal campo está definido em uma variedade bidimensional compacta, orientável e conexa foi estudado em (HOUNIE, 1982). Neste artigo o autor considera dois tipos de campos, a saber, um campo L é do tipo I se a variedade onde atua é o fecho de uma L-órbita unidimensional e é dito de tipo II caso contrário. No capítulo seguinte faremos uma breve introdução às L-órbitas (SUSSMANN, 1973). O resultado obtido em (HOUNIE, 1982) para campos do tipo I diz que L é globalmente hipoelítico se e somente se existir um difeomorfismo entre a variedade e o toro de modo que nas novas coordenadas o campo seja um múltiplo não nulo de um campo na forma $\frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial y}$ onde γ é um número irracional não-Liouville. Este fenômeno não ocorre no plano. Para um campo do tipo II que satisfaça a condição $(\mathscr{P})$ de Nirenberg-Treves, uma condição necessária e suficiente para que seja globalmente hipoelítico é que haja apenas uma L-órbita, a própria variedade.

Em (HOUNIE, 1984) o autor trata, entre outros assuntos, da hipoeliticidade global para operadores diferenciais parciais de ordem 1 definidos em um aberto, Ω, do plano, mas que tenham o seguinte formato

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i\,b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t)$$

onde $c \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e $b \in \mathscr{C}^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ não muda de sinal em qualquer segmento vertical contido Ω. Nesta situação, L é globalmente hipoelítico em Ω se e somente se para todo x_0 o conjunto $\{t; (x_0,t) \in \Omega, b(x_0,t) = 0\}$ só possui componentes conexas compactas.

No capítulo 3 consideramos o caso em que o campo é do *tipo tubo*, isto é, da seguinte forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - (a(t) + i\,b(t))\frac{\partial}{\partial x}, \quad a, b \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}).$$

Veremos naquele capítulo que após uma mudança de variáveis podemos supor que $a \equiv 0$. Desta forma, assumindo que b não muda de sinal, segue do resultado de Hounie mencionado acima, que L é globalmente hipoelítico se e somente se $\{t; b(t) = 0\}$ só possua componentes conexas compactas. No entanto, daremos uma demonstração alternativa por ser mais simples e que também mostra a necessidade da condição $(\mathscr{P})$, que neste caso se traduz por b não mudar de sinal. O resultado obtido foi

Teorema. *Seja*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \big(a(t) + i\,b(t)\big)\frac{\partial}{\partial x}$$

campo vetorial em $\mathbb{R}^2$*, com* a, b *funções* $\mathscr{C}^\infty$ *a valores reais. Então* L *é globalmente hipoelítico se e somente se* b *não muda de sinal e* $b^{-1}(0)$ *possui somente componentes conexas compactas.*

No capítulo 4 tratamos dos campos *reais* e dos *essencialmente reais*, ambos não singulares. Um campo L em $\mathbb{R}^2$ é real se $L(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})) \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ e é essencialmente real se suas partes real e imaginária são linearmente dependentes em cada ponto. Sendo assim, as L-órbitas de um campo essencialmente real não-singular são unidimensionais. Mostramos o seguinte

TEOREMA. *Seja* L *um campo vetorial complexo essencialmente real e não-singular, isto é, um campo em que a parte real e a parte imaginária são linearmente dependentes em cada ponto, mas sem jamais se anularem ao mesmo tempo.* L *não é globalmente hipoelítico.*

Quando um campo não é essencialmente real suas partes real e imaginária são linearmente independentes em algum ponto e, por continuidade, em algum aberto de $\mathbb{R}^2$. Campos desta natureza possuem pelo menos uma L-órbita bidimensional.

No capítulo 5 analisamos o caso de campos que têm pelo menos uma L-órbita bidimensional, mas que não seja todo o plano. Logo, um campo deste tipo, por ser não singular, possui uma L-órbita unidimensional. Provamos o seguinte

TEOREMA. *Se* L *é um campo não singular que possui uma* L*-órbita unidimensional mergulhada então* L *não é globalmente hipoelítico.*

Para mais detalhes veja o teorema 4.

No caso em que L é um campo analítico real não singular, é possível simplificar algumas hipóteses: bastando ter mais de uma L-órbita, L deixa de ser globalmente hipoelítico (inclusive para a versão analítica de hipoeliticidade global, pois a solução singular terá $Lu = 0$).

No capítulo 6 estudamos o caso em que L é transitivo, isto é, o caso em que $\mathbb{R}^2$ é a única L-órbita. Observe que mesmo em pontos pertencentes a uma L-órbita bidimensional pode ocorrer de as partes real e imaginária de L serem linearmente dependentes.

Denote por $\mathbb{R}^2_0$ o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ onde as partes real ($\Re L$) e imaginária ($\Im L$) de L são linearmente dependentes. Neste conjunto é possível definir uma relação de equivalência R do seguinte modo: Dados dois pontos $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2_1$ dizemos que $p_1 R p_2$ se e somente se existe uma curva suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ com $\gamma(a) = p_1$, $\gamma(b) = p_2$ e cujo vetor tangente $\gamma'(s)$ seja, em cada $s \in [a,b]$, paralelo a ambos $\Re L, \Im L$. As classes de equivalência desta relação, chamadas aqui de R-órbitas, são homeomorfas a um ponto, ao intervalo $[0,1]$ ou ao intervalo $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ (HOUNIE, 1982).

Temos

TEOREMA. *Seja* L *transitivo em* $\mathbb{R}^2$ *cujas* R*-órbitas são todas compactas. Então* L *é globalmente hipoelítico.*

TEOREMA. *Se* L *possui uma* R*-órbita do tipo* $[0,\infty)$ *que além disso é um conjunto fechado, então* L *não é globalmente hipoelítico.*

2 Preliminares

2.1 Hipoeliticidade e hipoeliticidade global

A hipoeliticidade é a propriedade de um operador "não suavizar" distribuições: seja L um operador diferencial linear $\mathscr{C}^\infty$ em Ω, onde Ω é algum aberto em $\mathbb{R}^N$. Dizemos que L é hipoelítico em Ω se, para todo aberto $\Omega' \subset \Omega$ e para toda $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

$$Lu|_{\Omega'} \in \mathscr{C}^\infty(\Omega') \implies u|_{\Omega'} \in \mathscr{C}^\infty(\Omega').$$

Já a hipoeliticidade global de L em Ω significa que, para toda $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

$$Lu \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \implies u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega).$$

Neste caso dizemos que L é *globalmente hipoelítico* (G.H.).

A hipoeliticidade implica a hipoeliticidade global, mas a recíproca pode não ser verdadeira: por exemplo, seja $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $\mathscr{C}^\infty$ tal que $b(t) = 0$ no intervalo $[0,1]$ mas $b(t) > 0$ em $\mathbb{R}\setminus[0,1]$. O operador

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - ib(t)\frac{\partial}{\partial x}$$

é globalmente hipoelítico (Capítulo 3) mas não é hipoelítico, pois ao tomarmos $\Omega' = (-1,1) \times (0,1)$ é possível tomar

$$u(x,t) = \begin{cases} |x|, & \text{se } t \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e ver que $u|_{\Omega'}$ não é $\mathscr{C}^\infty$ mas $(Lu)|_{\Omega'} = 0$.

Porém, dado um operador L, se pudermos tomar para cada $p \in \Omega$, um aberto $U \subset \Omega$ com $p \in U$ de forma que L seja globalmente hipoelítico em U, isto implicará a hipoeliticidade global de L em Ω: pois

$$Lu \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \implies Lu|_U \in \mathscr{C}^\infty(U) \forall U \implies u|_U \in \mathscr{C}^\infty(U), \forall U \implies u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega).$$

2.1.1 Invariância da hipoeliticidade global

Invariância após multiplicação por função não-nula

Suponha que $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ é não-nula em cada ponto e L é um operador diferencial linear $\mathscr{C}^\infty$ em Ω.

Proposição 2.1. *L é* G.H. *se e somente se fL é* G.H.

Demonstração. Suponha que L é G.H. e que $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é tal que $(fL)u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Então $Lu = f^{-1}(fL)u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e portanto $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, mostrando que fL é G.H. A volta é análoga. □

Invariância por mudança de variáveis

Vamos fazer esta demonstração supondo que o operador é um campo vetorial complexo.

Primeiro, vamos verificar que a aplicação de um campo vetorial a uma distribuição qualquer se comporta bem em relação à mudança de variáveis.

Seja $\Psi : U \to V$ um difeomorfismo $\mathscr{C}^\infty$ entre abertos de $\mathbb{R}^N$, para um $N \in \mathbb{N}$ fixado. Para simplificar as demonstrações, estamos supondo que Ψ é positivo (preserva orientação) e U, V são conexos.

A cada $f \in \mathscr{C}^\infty(V)$, associamos uma $f_* \in \mathscr{C}^\infty(U)$ pela regra

$$f_* = f \circ \Psi \in \mathscr{C}^\infty(U).$$

Por outro lado, uma $g \in \mathscr{C}^\infty(U)$ será associada a $g^* = g \circ \Psi^{-1}$. As operações $f \mapsto f_*$ e $g \mapsto g^*$ (que são mutuamente inversas) estabelecem um isomorfismo de álgebra entre $\mathscr{C}^\infty(U)$ e $\mathscr{C}^\infty(V)$.

Se considerarmos uma mudança de variáveis

$$(\xi_1, \dots, \xi_N) \in V \xmapsto{\Psi} (x_1, \dots, x_N) \in U,$$

teremos

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_*(\xi_1, \dots, \xi_N) \quad \text{e} \quad g^*(x_1, \dots, x_N) = g(\xi_1, \dots, \xi_N).$$

A mudança de variáveis de um campo vetorial $L : \mathscr{C}^\infty(V) \to \mathscr{C}^\infty(V)$ será da forma

$$L_* : g \in \mathscr{C}^\infty(U) \mapsto \left[L(g^*)\right]_* \in \mathscr{C}^\infty(U).$$

L_* se explicita usando a regra da cadeia da seguinte forma: dado $p \in U$,

$$\begin{aligned} L_* g(p) = \left[L\big(g \circ \Psi^{-1}\big)\right]\big(\Psi(p)\big) &= d\big(g \circ \Psi^{-1}\big)\big|_{\Psi(p)}\big(L|_{\Psi(p)}\big) \\ &= dg\big|_p\Big[D\big(\Psi^{-1}\big)\big|_{\Psi(p)}\big(L|_{\Psi(p)}\big)\Big] = \Big[D\left(\Psi^{-1}\right)\big|_{\Psi(p)}\big(L|_{\Psi(p)}\big)\Big]\big(g|_p\big) \end{aligned}$$

ou seja,

$$L_*|_p = D\left(\Psi^{-1}\right)\big|_{\Psi(p)}\big(L|_{\Psi(p)}\big).$$

De maneira análoga, se M é um campo vetorial em U,

$$M^* : f \in \mathscr{C}^\infty(V) \mapsto \left[M(f_*)\right]^* \in \mathscr{C}^\infty(V)$$

é um campo vetorial em V.

Seja $u \in \mathscr{D}'(U)$ uma distribuição em U. Se u for na verdade uma função localmente L^1, então para cada $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(V)$,

$$\begin{aligned} &\int_V u^*(x_1, \dots, x_N)\phi(x_1, \dots, x_N)\, dx_1 \cdots dx_N \\ &\qquad = \int_U u(\xi_1, \dots, \xi_N)\, \phi_*(\xi_1, \dots, \xi_N)\, \det\Big[D\Psi|_{(\xi_1, \dots, \xi_N)}\Big] d\xi_1 \cdots d\xi_N \end{aligned}$$

(lembrando que estamos supondo que a mudança de variáveis é *positiva*) e assim, mudando para o contexto de uma distribuição u qualquer, podemos definir

$$\langle u^*, \phi\rangle \doteq \langle u, \det[D\Psi]\cdot\phi_*\rangle, \quad \forall\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(V).$$

De maneira análoga, se $v\in\mathscr{D}'(V)$, definimos

$$\langle v_*, \phi\rangle \doteq \langle v, \det\left[D\Psi^{-1}\right]\cdot\phi_*\rangle, \quad \forall\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(U).$$

Voltando a discutir o campo vetorial M em U, dada $u\in\mathscr{D}'(U)$ a distribuição Mu é definida por $\langle Mu,\phi\rangle = \langle u, {}^tM\phi\rangle$, para $\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(U)$ e o transposto de M, ${}^tM$, é o operador linear de primeira ordem

$${}^tM = -M - \operatorname{div} M.$$

Afirmo que

$$(Mu)^* = M^* u^*. \tag{2.1}$$

Usando esta afirmação, podemos enunciar e provar a proposição:

PROPOSIÇÃO 2.2. *M é* G.H. *se e somente se M^* é* G.H.

Demonstração. Suponha primeiro que M é G.H. e que $v\in\mathscr{D}'(V)$ é tal que $M^*v\in\mathscr{C}^\infty(V)$. Por (2.1), $M^*v = (Mv_*)^*\in\mathscr{C}^\infty(V)$ e portanto $v_*\in\mathscr{C}^\infty(U)$, o que implica $v\in\mathscr{C}^\infty(V)$.

Por outro lado, se M^* é G.H. e $u\in\mathscr{D}'(U)$ é tal que $Mu\in\mathscr{C}^\infty$, $(Mu)^* = M^*u^*$ também é $\mathscr{C}^\infty$, logo u^* (e portanto u) é $\mathscr{C}^\infty$. □

Demonstração de (2.1)

Se $\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(V)$,

$$\begin{aligned}\langle (Mu)^*, \phi\rangle = \langle Mu, \det[D\Psi]\phi_*\rangle &= \langle u, {}^tM\{\det[D\Psi]\phi_*\}\rangle \\ &= \left\langle u, -\phi_* M\big(\det[D\Psi]\big) - \det[D\Psi]M\phi_* - \operatorname{div} M\det[D\Psi]\phi_*\right\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle M^*u^*, \phi\rangle = \langle u^*, {}^t(M^*)\phi\rangle &= \langle u, \det[D\Psi]\cdot\big({}^t(M^*)\phi\big)_*\rangle \\ &= \langle u, \det[D\Psi]\cdot\big(-M^*\phi - \operatorname{div} M^*\phi\big)_*\rangle \\ &= \langle u, -\det[D\Psi]\big[\big((M\phi_*)^*\big)_* + \big(\phi\operatorname{div} M^*\big)_*\big]\rangle \\ &= \langle u, -\det[D\Psi]M\phi_* - \det[D\Psi]\phi_*\big(\operatorname{div} M^*\big)_*\rangle \quad (\forall\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(V)).\end{aligned}$$

Visto isso, resta mostrarmos que vale

$$\det[D\Psi]\big(\operatorname{div} M^*\big)_* = M(\det[D\Psi]) + \operatorname{div} M\det[D\Psi]$$

ou, equivalentemente,

$$[\operatorname{div}(M^*)]_* = \operatorname{div} M + (\det[D\Psi])^{-1}M(\det[D\Psi]). \tag{2.2}$$

Vamos colocar isto em termos de variáveis e operadores em variáveis. Sejam $de_1, \dots, de_N$ a base canônica dual de $(\mathbb{R}^N)^*$ e sejam

$$m_j = L(de_j)(\xi_1, \cdots, \xi_N), \quad j = 1, \dots, N,$$

de forma que o vetor-coluna que representa os coeficientes de M em $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ será

$$\mathbf{m} \doteq \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_N \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} M^*(x_1, \dots, x_N) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_N} \end{pmatrix} \times \left[\frac{\partial(x_1, \dots, x_N)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_N)} \times \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_N \end{pmatrix} \right] \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} m_j \right) = \sum_{i,j=1}^N \left[m_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \right] \\
&= \left[\sum_{i,j=1}^N m_j \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right) \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right] + \left[\sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) m_j \right] \\
&= \left[\sum_{i,j,k=1}^N m_j \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_k \partial \xi_j} \right] + \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \xi_j} m_j \right] \\
&= \left\{ \sum_{i,k=1}^N \left[\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right] \right\} + \operatorname{div} M(\xi_1, \dots, \xi_N).
\end{aligned}$$

Para termos (2.2) falta mostrar que

$$\big[\det(D\Psi)\big]^{-1} M\big[\det(D\Psi)\big](\xi_1, \dots, \xi_N) = \sum_{i,k=1}^N \left[\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right] \tag{2.3}$$

Vamos calcular $M(\det D\Psi)$ explicitamente: seja $\mathbf{S}_N$ o conjunto das permutações do conjunto $1, \dots, N$ e, para cada $\sigma \in \mathbf{S}_N$, seja $(-1)^\sigma$ igual a 1 se σ for par ou -1 se σ for ímpar.

$$\begin{aligned}
M[\det(D\psi)](\xi_1, \dots, \xi_N) &= \left(\sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \det \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_N)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_N)} \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \left(\sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial \xi_{\sigma(i)}} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} (-1)^\sigma \left(\sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \prod_{i=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial \xi_{\sigma(i)}} \\
&\overset{\text{Reg. Leib.}}{=} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} (-1)^\sigma \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\left(\sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial x_k}{\partial \xi_{\sigma(k)}} \right] \cdot \left[\prod_{\substack{i=1,\dots,N \\ i \neq k}} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_{\sigma(i)}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Deixemos $\sigma(k)$ em evidência:

$$
\begin{aligned}
&M[\det(D\Psi)](\xi_1,\dots,\xi_N) = \\
&\qquad \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{\substack{\sigma\in\mathbf{S}_N\\ \sigma(k)=l}}(-1)^{\sigma}\left\{\left[\left(\sum_{j=1}^{N} m_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)\frac{\partial x_k}{\partial\xi_l}\right]\cdot\left[\prod_{\substack{i=1,\dots,N\\ i\neq k}}\frac{\partial x_i}{\partial\xi_{\sigma(i)}}\right]\right\} \\
&\qquad\qquad = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} m_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)\frac{\partial x_k}{\partial\xi_l}\right]\cdot\left[\sum_{\substack{\sigma\in\mathbf{S}_N\\ \sigma(k)=l}}(-1)^{\sigma}\left(\prod_{\substack{i=1,\dots,N\\ i\neq k}}\frac{\partial x_i}{\partial\xi_{\sigma(i)}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Identifique $\mathbf{S}_{N-1}$ com o grupo das permutações de $\mathbf{S}_N$ que fixam o último elemento N, pela restrição de domínio e contra-domínio. Essa identificação preserva a paridade. Seja, para cada $k\in\{1,\dots,N-1\}$, $P_k\in\mathbf{S}_N$ a permutação

$$
P_k(i) = \begin{cases} i & \text{se } 1\le i<k \\ i+1 & \text{se } k\le i<N \\ k & \text{se } i=N. \end{cases}
$$

Em geral P_k (leia "pular k") é o ciclo $(k\ \ k+1\ \ \dots\ \ N)$, e seu sinal (paridade) é $(-1)^{(N-k)}$. Cada $\sigma\in\mathbf{S}_N$ com $\sigma(k)=l$ pode ser associada a $T\sigma = P_l^{-1}\circ\sigma\circ P_k$, e é fácil ver que T é uma bijeção de $\{\sigma\in\mathbf{S}_N;\sigma(k)=l\}$ em $\mathbf{S}_{N-1}$. O sinal de $T\sigma$ é:

$$
(-1)^{T\sigma} = (-1)^{N-l}(-1)^{\sigma}(-1)^{N-k} = (-1)^{2N-l-k}(-1)^{\sigma} = (-1)^{l+k}(-1)^{\sigma}.
$$

Faça a mudança de variável de σ para $\rho = T\sigma$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\sigma\in\mathbf{S}_N\\ \sigma(k)=l}}(-1)^{\sigma}\left(\prod_{\substack{i=1,\dots,N\\ i\neq k}}\frac{\partial x_i}{\partial\xi_{\sigma(i)}}\right) &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathbf{S}_N\\ \sigma(k)=l}}(-1)^{\sigma}\left(\prod_{i=1}^{N-1}\frac{\partial x_{P_k(i)}}{\partial\xi_{\sigma\circ P_k(i)}}\right) \\
&= \sum_{\substack{\sigma\in\mathbf{S}_N\\ \sigma(k)=l}}(-1)^{\sigma}\left(\prod_{i=1}^{N-1}\frac{\partial x_{P_k(i)}}{\partial\xi_{(P_l\circ T\sigma)(i)}}\right) = \sum_{\rho\in\mathbf{S}_{N-1}}(-1)^{l+k}(-1)^{\rho}\left(\prod_{i=1}^{N-1}\frac{\partial x_{P_k(i)}}{\partial\xi_{P_l(\rho(i))}}\right) \\
&= (-1)^{l+k}\det\left[\left(a_{ij}=\frac{\partial x_{P_k(i)}}{\partial\xi_{P_l(j)}}\right)_{(N-1)\times(N-1)}\right] = \left[\det\frac{\partial(x_1,\dots,x_N)}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_N)}\right]\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k},
\end{aligned}
$$

onde foi usada a fórmula da matriz inversa. Voltando onde estávamos,

$$
M[\det(D\Psi)](\xi_1,\dots,\xi_N) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} m_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)\frac{\partial x_k}{\partial\xi_l}\right]\underbrace{\left[\det\frac{\partial(x_1,\dots,x_N)}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_N)}\right]}_{=\det D\Psi(\xi_1,\dots,\xi_N)}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}
$$

e basta dividir os dois lados por $\det D\Psi$ para obter a igualdade (2.3) e, portanto (2.2), provando finalmente a afirmação (2.1).

2.2 L-órbitas e L-invariância

2.2.1 Órbitas de Sussmann

Dado um conjunto D de campos vetoriais reais em uma variedade paracompacta M, Sussmann (1973) definiu as D-órbitas como as classes de equivalência da seguinte relação:

Definição 2.1. *Dados dois pontos $p, q \in M$, dizemos que $p \approx q$ se existir um caminho contínuo $\alpha : [a, b] \to M$ admitindo uma partição $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ de forma que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe algum campo $X \in D$ tal que a restrição $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é curva integral de X ou $-X$.*

As curvas como a α desta definição se chamam curvas integrais por partes de D.

Uma D-órbita Σ é dotada da topologia mais fina que torna as seguintes aplicações, chegando em Σ, serem contínuas: dado um $p \in \Sigma$, e n campos quaisquer $X_1, \ldots, X_n$ com $X_i \in D$,

$$(s_1, \ldots, s_n) \in \Omega \to \Phi_{s_n}^{X_n}(\Phi_{s_{n-1}}^{X_{n-1}}(\cdots(\Phi_{s_1}^{X_1}(p))\cdots) \in \Sigma,$$

onde Φ_s^X denota o fluxo de X no parâmetro s e Ω, o conjunto de todos elementos de $\mathbb{R}^n$ em que a aplicação acima faz sentido, é um aberto conexo contendo a origem (LAGUNA, 2011, Prop. 2.37, p. 38). Na aplicação definida acima, se fixarmos os parâmetros $s_1, \ldots, s_n$ e deixarmos variar o ponto p, o resultado é um difeomorfismo entre abertos de M. O conjunto de todos difeomorfismos desta forma é chamado grupo dos difeomorfismos locais G_D, e dados quaisquer dois pontos da mesma órbita existe algum $\phi \in G_D$ que leva um ponto ao outro.

A topologia de Σ é mais fina do que a de M, e com ela as D-órbitas são subvariedades imersas conexas. Isto é, Σ admite uma estrutura $\mathscr{C}^\infty$ de tal forma que a inclusão $i : \Sigma \to M$ seja uma imersão injetiva. Esta estrutura é única, pois subvariedades imersas possuem no máximo uma estrutura $\mathscr{C}^\infty$ possível quando sua topologia é fixada (LAGUNA, 2011, Corolário 1.48, p. 23).

Uma D-órbita Σ é segundo-enumerável (BERHANU et al., 2008, Lema III.1.8, p. 106). Se $f : X \to M$ é suave com $f(X) \subset \Sigma$, então $f : X \to \Sigma$ também é suave. Por ter esta propriedade se diz que Σ é *fracamente mergulhada* (BERHANU et al., 2008, Propo. III.1.9, p. 107).

2.2.2 Órbitas de um campo complexo

No caso de um campo vetorial complexo L, tomamos o conjunto $D = \{\Re L, \Im L\}$ e chamamos de L-órbitas as órbitas da família D de campos vetoriais reais.

Uma órbita de dimensão zero, por ser variedade conexa, é sempre um ponto e é fácil ver que corresponde a uma singularidade de L, isto é, um ponto onde o campo L é nulo. Como vamos trabalhar somente com campos L não-singulares no plano, a dimensão das órbitas será 1 ou 2.

Uma órbita de dimensão dois é simplesmente um aberto no plano, com a topologia usual (LAGUNA, 2011, Prop. 1.45, p. 21). Além disso, se Σ tiver algum ponto p no qual $\Re L$ e $\Im L$ são linearmente independentes, Σ é de dimensão dois e portanto é um aberto.

Por outro lado, se Σ for de dimensão um, podemos usar a classificação de variedades de dimensão um (GALE, 1987) para concluir que Σ é difeomorfo a uma reta real imersa ou um círculo S^1 imerso. No segundo caso, Σ é uma subvariedade mergulhada (toda subvariedade imersa compacta é mergulhada) e sua topologia coincide com a usual. Já no primeiro caso, se Σ for um conjunto fechado de $\mathbb{R}^2$ então Σ é subvariedade mergulhada (BERHANU et al., 2008, Corolário III.1.2, p. 108). Também é concebível que Σ seja mergulhada sem ser fechada, ou que não seja nem sequer uma subvariedade mergulhada. Para um exemplo do segundo caso, ver a seção 5.2.2.

Se Σ é uma órbita de dimensão um e $p \in \Sigma$, podemos tomar uma vizinhança U de p dotada de coordenadas locais retangulares $\Psi : q \in U \to (x,t) \in (-1,1)^2$ em relação às quais o conjunto $\Psi(\Sigma \cap U) = P \times (-1,1)$, onde $P \subset (-1,1)$ é um conjunto enumerável (BERHANU et al., 2008, Lema III.1.7, p. 105). Em particular, isto significa que se tomarmos um segmento transversal a Σ que corta ela somente em um ponto, então Σ é uma subvariedade mergulhada (BERHANU et al., 2008, Prop. III.1.11, p. 108).

Chamamos um conjunto de L-invariante se ele é uma união de L-órbitas.

PROPOSIÇÃO 2.3. *Se C é um conjunto L-invariante então o fecho e o interior de C também o são.*

Demonstração. De fato, seja G_D o grupo de difeomorfismos locais de $D = \{\Re L, \Im L\}$. Dado um ponto p pertencente ao fecho (interior) de um conjunto C L-invariante, tome uma

$$\phi : U \to V, \quad \phi \in G_D,$$

onde U é uma vizinhança aberta de p. Se p está no fecho (interior) de C, então também está no fecho (interior) de $C \cap U$. Logo, $\phi(p)$ está no fecho (interior) de $\phi(C) \cap V$, que é o mesmo que $C \cap V$ e portanto $\phi(p)$ está no fecho (interior) de C. □

COROLÁRIO 2.1. *A fronteira de um conjunto L-invariante é L-invariante.*

3 Estudo do caso tubo

O *caso tubo* consiste dos campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$ da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \big[a(t) + ib(t)\big]\frac{\partial}{\partial x},$$

onde a e b são funções $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Neste capítulo mostraremos que L é globalmente hipoelítico se e somente se b não muda de sinal (a condição $(\mathscr{P})$) e, além disso, a imagem inversa $b^{-1}(0)$ só tem componentes conexas compactas. Este é um caso especial de um resultado de Hounie (1984, Teorema 3.1, p. 248), com a vantagem de ser mais simples de demonstrar. A demonstração que apresentaremos não é uma adaptação da demonstração encontrada naquele artigo.

Uma integral primeira de L, isto é, uma z tal que $Lz = 0$ e dz nunca se anula, é dada por

$$z = x + A(t) + iB(t),$$

onde $A(t)$ e $B(t)$ são primitivas de a e b. De fato,

$$Lz = (a(t) + ib(t)) - (a(t) + ib(t)) \cdot 1 = 0,$$

mas

$$dz = dx + \big[a(t) + ib(t)\big]dt \neq 0.$$

Existe uma mudança de variáveis global que sempre reduz L ao caso $a \equiv 0$:

$$\begin{array}{lll} \xi = x + A(t) & x = \xi - A(\tau) & \partial_x = \xi_x\partial_\xi + \tau_x\partial_\tau = \partial_\xi \\ \tau = t & t = \tau & \partial_t = \xi_t\partial_\xi + \tau_t\partial_\tau = a(t)\partial_\xi + \partial_\tau \end{array}$$

Com isto, vale

$$L = a(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} - [a(\tau) + ib(\tau)]\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \tau} - ib(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Se $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa, então $L(f(z)) = f'(z)Lz = 0$ (onde ela for definida). Mais geralmente, vale $L(f(z)u) = f(z)Lu$.

3.1 Regularidade parcial

Supomos agora que L já está na forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - ib(t)\frac{\partial}{\partial x},$$

com $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $\mathscr{C}^\infty$.

Vamos ver que, se $Lu \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, então u é, de uma certa forma, $\mathscr{C}^\infty$ em relação à variável t.

DEFINIÇÃO 3.1. *Seja $v = v(x,t)$ uma distribuição de suporte compacto em $\mathbb{R}^2$. Dizemos que v é de ordem (n,m) se, ao tomarmos um retângulo $R = I \times J$ com o suporte de v em seu interior, houver $C > 0$ tal que*

$$\left|\left\langle v, \phi(x)\psi(t)\right\rangle\right| \leq C\left(\sup_{i=0,\dots,n}\left\|\phi^{(i)}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(I)}\right)\cdot\left(\sup_{j=0,\dots,m}\left\|\psi^{(j)}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(J)}\right), \quad \forall \phi,\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

(onde $\phi^{(i)}$ denota a i-ésima derivada de ϕ). Note que o suporte de v está contido em R.

É sabido que toda distribuição $v = v(x,t)$ de suporte compacto tem ordem finita, i.e., existem $C > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e K compacto tais que

$$\left|\left\langle v, \phi(x,t)\right\rangle\right| \leq C \sup_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j\leq n}}\left\|\partial^{(i,j)}\phi\right\|_{\mathrm{L}^\infty(K)}, \quad \forall \phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2).$$

onde o compacto K contém o suporte de v. Isto implica que v é de ordem (n,n).

PROPOSIÇÃO 3.1. *Se $v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^2)$ é de ordem (n,m) e $b(t)$ é uma função suave, então o produto $b(t)v(x,t)$ é de ordem (n,m).*

Demonstração. Segue da regra de Leibniz para derivadas de produtos. □

DEFINIÇÃO 3.2. *Uma distribuição $u = u(x,t)$ de suporte compacto é de ordem zero em relação a t se existir algum $n \in \mathbb{N}$ tal que u é de ordem $(n,0)$.*

PROPOSIÇÃO 3.2. *Seja $u = u(x,t)$ uma distribuição de suporte compacto em $\mathbb{R}^2$ tal que Lu é de ordem 0 em relação a t. Então u também é de ordem 0 em relação a t.*

Demonstração. Tome um retângulo $R = I \times J$ compacto contendo o suporte de u em seu interior. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que u é de ordem (n,n). Se $n = 0$, não há nada a fazer. Assuma que $n > 0$.

$$u_t = ib(t)u_x + Lu,$$

e aqui notamos que $ib(t)u_x$ tem ordem $(n+1,n)$ e Lu tem ordem $(n',0)$ para algum n'. Com isto u será de ordem $(n+n'+1, n-1)$. Repetindo o argumento se necessário, chegamos a um $N \in \mathbb{N}$ tal que u terá ordem $(N,0)$. □

PROPOSIÇÃO 3.3. *Seja u distribuição de suporte compacto em $\mathbb{R}^2$ tal que Lu é $\mathscr{C}^\infty$. Então u, u_t, u_{tt}, etc. são todas de ordem zero em relação a t.*

Demonstração. Se Lu é $\mathscr{C}^\infty$, então Lu é de ordem zero em relação a t e portanto u também o é. Além disso,

$$u_t = ib(t)u_x + Lu$$

e u_x deverá ter ordem zero em relação a t, pois u o tem, e a multiplicação por b, derivada parcial em x e soma com Lu não alteram isto.

E quanto a u_{tt}? Note que

$$(Lu)_t = u_{tt} - ib(t)u_{tx} - ib'(t)u_x \quad \therefore \quad u_{tt} = (Lu)_t + ib(t)u_{tx} + ib'(t)u_x$$

e isto também terá ordem zero em relação a t, pois cada parcela o tem. Mais geralmente, seja $n > 2$ e suponha que, para $j = 0, \dots, n-1$, $(\partial_t)^j u$ seja de ordem zero em relação a t. Então

$$(\partial_t)^n u = (\partial_t)^{n-1}(Lu) + i(\partial_t)^{n-1}\big(b(t)u\big)$$

onde $(\partial_t)^{n-1}\big(b(t)u\big)$ será uma soma de termos de ordem zero em relação a t. Por indução finita, temos o resultado desejado. □

PROPOSIÇÃO 3.4. *Seja u uma distribuição em $\mathbb{R}$ com suporte contido em um intervalo (a,b). Se u' é de ordem zero, então $u \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Além disso,*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{C}_c^\infty((a,b)) \\ \psi \not\equiv 0}} \frac{\big|\langle u'(t), \psi(t)\rangle\big|}{\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}}.$$

Demonstração. Seja $\phi \in \mathscr{C}_{\mathrm{c}}^\infty((a,b))$. Como $\phi(x)$ é a derivada de $\int_a^x \phi(t)\,dt$,

$$\big\langle u, \phi \big\rangle = -\big\langle u'(x), \textstyle\int_a^x \phi(t)\,dt \big\rangle.$$

Mas u' é de ordem zero, assim existe $C > 0$ tal que

$$\big|\big\langle u'(x), \psi(x)\big\rangle\big| \leq C \sup_{x \in (a,b)} \big|\psi(x)\big|, \quad \forall \psi \in \mathscr{C}^\infty((a,b)).$$

Vamos tomar $\psi(x) = \int_a^x \phi(t)\,dt$. Note que

$$\sup_{x \in (a,b)} \big|\textstyle\int_a^x \phi(t)\,dt\big| \leq \sup_{x \in (a,b)} \int_a^x \big|\phi(t)\big|\,dt = \displaystyle\int_a^b \big|\phi(t)\big|\,dt = \|\phi\|_{\mathrm{L}^1((a,b))},$$

e assim

$$\big|\big\langle u, \phi \big\rangle\big| \leq C\,\|\phi\|_{\mathrm{L}^1((a,b))}.$$

Usando Hahn-Banach e o dual de L^1, conclui-se que $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq C$ e tomando o ínfimo dos C chegamos no resultado desejado. □

PROPOSIÇÃO 3.5. *Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ é tal que as derivadas $u, u', u'', \dots$ são todas de ordem zero, então $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.*

Demonstração. No caso em que u tem suporte compacto, basta aplicar a proposição anterior repetidas vezes, notando que, se u' é L^∞, então u é contínua, e assim por diante. Para u genérica, note que o produto ψu, onde ψ é qualquer função-teste, vai ser de ordem zero assim como todas as suas derivadas. Consequentemente, ψu é $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}^\infty$ para qualquer função-teste ψ, e isto implica $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. □

PROPOSIÇÃO 3.6. *Se Lu é $\mathscr{C}^\infty$, então podemos associar a cada $t \in \mathbb{R}$ uma distribuição em x, $U_t(x)$, tal que para toda $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ a função na variável t*

$$U_\phi(t) \doteq \langle U_t(x), \phi(x) \rangle$$

é $\mathscr{C}^\infty$ e além disso, para todo par $\phi, \psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle u, \phi(x)\psi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} U_\phi(t)\psi(t)\, dt.$$

Demonstração. Para cada $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, seja U_ϕ a distribuição

$$U_\phi : \psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto \langle U_\phi(t), \psi(t) \rangle \doteq \langle u, \phi(x)\psi(t) \rangle \in \mathbb{C}.$$

Como consequência da proposição, 3.3 é fácil ver que U_ϕ, e todas as suas derivadas, são de ordem zero. Pela proposição 3.5, $U_\phi(t)$ é uma função suave em relação a t.

Seja

$$U_t : \phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto U_\phi(t) \in \mathbb{C}.$$

Resta mostrar que $U_t(x)$, para cada t fixo, é (de fato) uma distribuição em x. Isto é, para toda sequência $n \in \mathbb{N} \mapsto \phi_n \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ que convergir para zero no sentido de $\mathscr{C}_c^\infty$, devemos mostrar que $n \mapsto \langle U_t(x), \phi_n(x) \rangle$ converge para zero. Mas $\langle U_t(x), \phi_n(x) \rangle = U_{\phi_n}(t)$, então na verdade devemos mostrar que a sequência de funções suaves $U_{\phi_0}, U_{\phi_1}, \ldots$ converge ponto-a-ponto para zero.

Examinando as derivadas de U_{ϕ_n} :

$$\left\langle U'_{\phi_n}(t), \psi(t) \right\rangle = -\langle U_{\phi_n}(t), \psi'(t) \rangle = -\langle u(x,t), \phi_n(x)\psi'(t) \rangle = \langle u_t, \phi_n(x)\psi(t) \rangle.$$

Tome $t_a < t_b$ arbitrários. Como u_t é de ordem zero em relação a t, existem $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left| \langle u_t, \phi_n(x)\psi(t) \rangle \right| \leq C \left(\sup_{j=0,\ldots,N} \left\| \phi_n^{(j)} \right\|_{\mathrm{L}^\infty} \right) \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \psi \in \mathscr{C}_c^\infty((t_a, t_b)). \tag{3.1}$$

Isto pode ser verificado multiplicando u_t por funções de corte apropriadas. Pela proposição 3.4, U_{ϕ_n} é limitada em (t_a, t_b) e vale

$$\sup_{t \in (t_a, t_b)} \left| U_{\phi_n}(t) \right| \overset{\text{p. 3.4}}{\leq} \sup_{\psi \neq 0} \frac{\left| U'_{\phi_n}(t), \psi(t) \right|}{\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}} \overset{(3.1)}{\leq} C \left(\sup_{j=0,\ldots,N} \left\| \phi_n^{(j)} \right\|_{\mathrm{L}^\infty} \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

□

3.2 Campos sem a condição ($\mathscr{P}$): L não é G.H.

A condição ($\mathscr{P}$), no caso tubo, significa que $b(t)$ nunca assume sinais opostos. Seja

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i b(t) \frac{\partial}{\partial x}$$

Suponha que $b(t_0) < 0$ e $b(t_1) > 0$ com $t_0 < t_1$. Seja B uma primitiva de b e sejam

$$m = \min\{B(t) \mid t \in [t_0, t_1]\} \quad \text{e} \quad E = B^{-1}(\{m\}) \cap [t_0, t_1]$$

Fica claro que E é um fechado e que existem $t_0 < t_0' < t_1' < t_1$ tais que $E \subset [t_0', t_1']$. Em particular, tome t_0' e t_1' de forma que $[t_0', t_1']$ seja o fecho convexo de E. Tome também $t_0 < t_0'' < t_0'$ e $t_1 > t_1'' > t_1'$.

Seja $z = x + iB(t)$, integral primeira de L. Ajustando a constante da primitiva B, podemos garantir que $m = 0$. Na faixa $\Omega = \mathbb{R} \times (t_0, t_1)$, z assumirá valores apenas em $\left\{z = \xi + i\eta \,\middle|\, \eta \geq 0\right\}$, sendo real somente quando $t \in E$. Tomemos a função $u : \Omega \to \mathbb{C}$

$$u = \sqrt{z},$$

onde o ramo da raiz quadrada é escolhido de forma a ser bem-definido em $\arg z \in (-\pi/2, 3\pi/2)$. u é suave em $\Omega \setminus (\{0\} \times E)$ e é contínua.

Afirmação: $L|_\Omega u = 0$.

Isto é verdade fora da reta $x = 0$, onde u é função analítica da integral primeira. Seja ϕ função-teste arbitrária em Ω. Para cada $\epsilon > 0$, tome uma ϕ_ϵ tal que ϕ_ϵ coincide com ϕ em alguma vizinhança de $\{0\} \times E$, mas cujo suporte é contido em uma faixa $V_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times (t_0'', t_1'')$. As funções ϕ_ϵ podem ser escolhidas de forma que $|{}^tL\phi_\epsilon| < \frac{C}{\epsilon}$, para $C > 0$ constante que não depende de ϵ.

Então

$$|\langle Lu, \phi\rangle| = |\langle Lu, \phi_\epsilon\rangle| = |\langle u, {}^tL\phi_\epsilon\rangle| \leq \sup_{V_\epsilon} |u| \int_{V_\epsilon} |{}^tL\phi| \leq \frac{C}{\epsilon} m(V_\epsilon) \sup_{V_\epsilon} |u|.$$

Como $m(V_\epsilon)/\epsilon$ é limitada e $\sup_{V_\epsilon} |u|$ se anula quando $\epsilon \to 0$, concluímos que $\langle Lu, \phi\rangle = 0$.

Apesar de contínua, u não é suave: quando $x > 0$ (mas próximo de zero) e ao fixarmos $t_0 \in E$, vale

$$u_x(x, t_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \to 0^+} \infty.$$

O suporte singular de u está contido em $\{0\} \times [t_0', t_1']$, que é um conjunto que não toca a fronteira de Ω. Podemos, então, "cortar suave e estender", multiplicando u por uma função de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ que valha 1 em vizinhança de $\{0\} \times [t_0', t_1']$ e zero no complemento de Ω.

3.3 Campos com a condição ($\mathscr{P}$)

Suponhamos que $b(t) \geq 0$ sempre (o caso ≤ 0 pode ser feito de forma análoga). Se b é nulo, L é trivial e existem soluções de $Lu = 0$ que nem são funções. Se $b > 0$ sempre, estamos no caso de um campo elítico (partes real e imaginária L.I.), valendo elítico $\implies$ hipoelítico.

Mais geralmente, no caso em que $b \geq 0$, a primitiva B de b é uma função monótona. A imagem $B(\mathbb{R})$ da primitiva de b será um intervalo de não-vazio, podendo ser:

- Compacto: do tipo $[a, b]$ com $a \leq b$ reais.

- Semi-aberto: um dos tipos $(a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,b]$ ou $[a,\infty)$, $a<b$ reais.
- Aberto: um dos tipos (a,b), $(-\infty,b)$, (a,∞), $(-\infty,\infty)$, $a<b$ reais.

3.3.1 Casos em que L não é G.H.

No primeiro e no segundo casos acima, o conjunto $b^{-1}(0)$ tem uma componente conexa infinita. Suponha que esta componente é da forma $(-\infty,a]$ (o outro caso pode ser demonstrado de forma análoga). Tomemos como $B(t)$ a primitiva $\int_a^t b(s)\,ds$, e como integral primeira $z=x+iB(t)$. Esta z tem parte real não-negativa e se anula somente em $x=0, t\le a$. Seja $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ a função contínua

$$u=\sqrt{z}=|z|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\arg z},\quad -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}.$$

Afirmo que $Lu=0$. Isto é válido em $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\times(-\infty,a]$, já que neste aberto u é uma função analítica de z, portanto temos $\operatorname{supp} Lu\subset\{0\}\times(-\infty,a]$. Seja $\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função teste cujo suporte intercepte a semirreta $x=0, t\le a$. Para mostrar que $\langle Lu,\phi\rangle=0$, considere uma função de corte $\psi\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ que valha 1 quando $|x|\le 1$ e 0 quando $|x|\ge 2$ e defina

$$\phi_\epsilon(x,t)=\psi(2x/\epsilon)\phi(x,t).$$

ϕ_ϵ coincide com ϕ em vizinhança da reta $x=0$ mas tem o suporte contido na faixa $[-\epsilon,\epsilon]\times\mathbb{R}$. É fácil ver que $\left\|{}^tL\phi_\epsilon\right\|_\infty\le\frac{C}{\epsilon}$ para algum $C>0$ que não depende de ϵ (mas depende da ϕ). Assim, se tomarmos $t_0<t_1$ tais que $\operatorname{supp}\phi\subset\mathbb{R}\times[t_0,t_1]$,

$$\begin{aligned}\left|\langle Lu,\phi\rangle\right|=\left|\langle Lu,\phi_\epsilon\rangle\right|=\left|\langle u,\ {}^tL\phi_\epsilon\rangle\right|&\le\left\|{}^tL\phi_\epsilon\right\|_\infty\cdot\|u\|_{\mathrm{L}^1(\operatorname{supp}\phi_\epsilon)}\\&\le\frac{C}{\epsilon}\int_{t_0}^{t_1}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}|u(x,t)|\,dx\,dt\le\frac{C}{\epsilon}(t_1-t_0)(2\epsilon)\sup_{|x|<\epsilon,t\in[t_0,t_1]}|u(x,t)|.\end{aligned}$$

Supondo que ϕ é suportada no semiplano inferior $t<a$, então podemos tomar $t_1=a$ e $u(x,t)$ vai se anular no segmento compacto $\{0\}\times[t_0,t_1]$. Pela continuidade de u, fazendo $\epsilon\to0^+$, que $|\langle Lu,\phi\rangle|=0$. Com isso temos $Lu=0$ em $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

Para concluir que $Lu=0$ em todo $\mathbb{R}^2$, a diferença é que agora definimos $\phi_\epsilon=\psi(2x/\epsilon)\psi(a+2t/\epsilon)\phi(x,t)$. Ainda vai existir $C>0$ tal que $\left\|{}^tL\phi_\epsilon\right\|_\infty<C/\epsilon$ e portanto

$$\begin{aligned}|\langle Lu,\phi\rangle|=|\langle Lu,\phi_\epsilon\rangle|=|\langle u,\ {}^tL\phi_\epsilon\rangle|&\\&\le\iint_{[-\epsilon,\epsilon]\times[a-\epsilon,a+\epsilon]}u(x,t)\ {}^tL\phi_\epsilon(x,t)\,dx\,dt\\&\le4\epsilon^2\sup_{[-\epsilon,\epsilon]\times[a-\epsilon,a+\epsilon]}|u|\frac{C}{\epsilon},\end{aligned}$$

que também vai a zero quando $\epsilon\to0$.

Resta verificar que u é singular. De fato, fixado um $t_0<a$,

$$u(x,t_0)=\sqrt{x}\quad\therefore\quad u_x(x,t_0)=1/2\sqrt{x}\xrightarrow{x\to0^+}\infty$$

e concluímos que o suporte singular de u é toda a semirreta $x=0, t\le a$.

3.3.2 Casos em que L é G.H.

Estes são os casos em que a imagem da primitiva B é um aberto, e assim $b^{-1}(0)$ é vazio ou suas componentes conexas são compactas.

Roteiro da demonstração: vamos cobrir o domínio ($\mathbb{R}^2$) com retângulos abertos R tais que:

- $L|_R u = 0 \implies u \in \mathscr{C}^\infty(R)$.
- L é $\mathscr{C}^\infty$-resolúvel em cada $\overline{R}$.

De forma que, dada $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ com $Lu = f$, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, poderemos tomar $v \in \mathscr{C}^\infty(R)$ tal que $L|_R v = f|_R$, então concluir que $L|_R(u|_R - v) = 0$, $u|_R - v \in \mathscr{C}^\infty(R)$ e portanto $u|_R \in \mathscr{C}^\infty(R)$.

Soluções de $Lu = 0$ são suaves

Seja $R = (x_a, x_b) \times (t_a, t_b)$ um retângulo tal que $b(t_a) > 0$ e $b(t_b) > 0$. Afirmo que toda solução de $Lu = 0$ em R é suave. Mais do que isso, toda solução será da forma $f(z)$ para alguma f holomorfa na imagem de z.

Encontrando a f

Por B ser monótona, $B\big((t_a, t_b)\big)$ é um intervalo, e este intervalo é aberto devido à condição de que $b(t_a) \neq 0$ e $b(t_b) \neq 0$ (lembrando que b não muda de sinal).

Sejam τ_a, τ_b tais que $B\big((t_a, t_b)\big) = (\tau_a, \tau_b)$. Seja $f : \mathscr{C}_c^\infty\big((x_a, x_b) \times (\tau_a, \tau_b)\big) \to \mathbb{C}$ o funcional linear dado por

$$\big\langle f(x,\tau), \phi(x,\tau)\big\rangle = \big\langle u(x,t), b(t)\phi(x, B(t))\big\rangle \tag{3.2}$$

A função $(x,t) \mapsto \phi(x, B(t))$ tem suporte compacto: pois, se (x_n, t_n) é uma sequência que tende para a fronteira de $(x_a, x_b) \times (t_a, t_b)$, então $(x_n, B(t_n))$ escapa para a fronteira de $(x_a, x_b) \times (\tau_a, \tau_b)$, e portanto $\phi\big(x_n, B(t_n)\big)$ é zero para todo n grande.

Com isto, podemos ver que f é uma distribuição em $(x_a, x_b) \times (\tau_a, \tau_b)$. Afirmação:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - i\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x,\tau) = 0.$$

De fato: denotando por ϕ_1, ϕ_2 as derivadas parciais de ϕ em relação à primeira e segunda variável,

$$\begin{aligned}
\big\langle \partial_\tau f(x,\tau), \phi(x,\tau)\big\rangle &= \big\langle f(x,\tau), -\phi_2(x,\tau)\big\rangle = \big\langle u(x,t), -b(t)\phi_2(x,B(t))\big\rangle \\
&= \big\langle u(x,t), -\partial_t\big(\phi(x,B(t))\big)\big\rangle = \big\langle u_t, \phi(x,B(t))\big\rangle = \big\langle i b(t) u_x, \phi(x,B(t))\big\rangle \\
&= \big\langle u, -i b(t)\phi_1(x,B(t))\big\rangle = \big\langle f(x,\tau), -i\phi_1(x,\tau)\big\rangle = \big\langle i\partial_x f(x,\tau), \phi(x,\tau)\big\rangle.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\partial_\tau f = i\partial_x f$. Isto implica que $f(x,\tau)$ é uma função holomorfa em relação à variável complexa $z = x + i\tau$. Em particular, $f \in \mathscr{C}^\infty\big((x_a, x_b) \times (\tau_a, \tau_b)\big)$.

Reduzindo o problema aos zeros não-isolados

Seja $v = u - f(x + iB(t))$. Nosso objetivo agora é mostrar que $v = 0$.

Afirmação: o suporte da distribuição $v = v(x,t)$ está contido no conjunto $(x_a, x_b) \times F$, onde F é o conjunto dos zeros não-isolados de b em (t_a, t_b).

Devido à regularidade de u na variável t (regularidade parcial) existe, para cada $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty((x_a, x_b))$, uma função suave $U_\phi : (t_a, t_b) \to \mathbb{C}$ tal que

$$\langle u(x,t), \phi(x)\psi(t)\rangle = \int_{t_a}^{t_b} U_\phi(t)\theta(t)\,dt, \quad \forall \theta \in \mathscr{C}_c^\infty\big((t_a, t_b)\big).$$

Estamos usando a letra θ para a função-teste em relação a t porque ψ será uma função-teste em relação à variável τ.

Afirmação: para qualquer $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty\big((x_a, x_b)\big)$ e para qualquer $\theta \in \mathscr{C}_c^\infty\big((t_a, t_b)\big)$ com suporte de θ contido em F^c, vale a igualdade

$$\langle u, \phi(x)\theta(t)\rangle = \iint_R f(x + iB(t))\phi(x)\theta(t)\,dx\,dt \quad \big(R = (x_a, x_b) \times (t_a, t_b)\big).$$

Para que isto seja verdade, é suficiente que

$$\int_{t_a}^{t_b} f_\phi(B(t))\theta(t)\,dt = \int_{t_a}^{t_b} U_\phi(t)\theta(t)\,dt, \quad f_\phi(\tau) \doteq \int_{x_a}^{x_b} f(x,\tau)\phi(x)\,dx$$

Antes de mostrar isto, vamos examinar um pouco o comportamento de B no aberto F^c, que carrega o suporte da θ.

- Em cada componente conexa I de F^c, B é um homeomorfismo sobre $B(I)$ e ambos são intervalos abertos.
- Na verdade, $B(F^c)$ é aberto e B é homeomorfismo de F^c em $B(F^c)$.
- $B(F)$ e $B(F^c)$ são complementares em (t_a, t_b), mesmo que B não seja injetiva. Em particular, $B(F)$ é fechado.
- $B(F)$ tem medida nula (Teorema de Sard).
- Em cada $B(I)$, componente de $B(F^c)$, B^{-1} é suave exceto em um número finito de pontos.
- A inversa de B, B^{-1}, é bem-definida (exceto no fechado de medida nula $B(F)$) e absolutamente contínua em compactos contidos em $B(F^c)$.

Como consequência destes fatos, a derivada $\big(B^{-1}\big)'$ no aberto $B(F^c)$ é uma função localmente Lebesgue-integrável. Com isso, faz sentido a seguinte mudança de variáveis quando θ é função-teste em F^c:

$$\int_{F^c} f_\phi\big(B(t)\big)\theta(t)\,dt = \int_{B(F^c)} f_\phi(\tau)\theta\big(B^{-1}(\tau)\big)\underbrace{\frac{1}{b\big(B^{-1}(\tau)\big)}\,d\tau}_{dB^{-1}(\tau)}. \tag{3.3}$$

Por outro lado, da maneira com que f foi definida (3.2) temos que, para toda $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty\big((\tau_a, \tau_b)\big)$,

$$\int_{t_a}^{t_b} U_\phi(t) b(t) \psi\big(B(t)\big) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} f_\phi(\tau)\psi(\tau)\, d\tau\, dt. \tag{3.4}$$

Em particular, se

$$\psi(\tau) = \theta\big(B^{-1}(\tau)\big)\frac{1}{b\big(B^{-1}(\tau)\big)} = \theta\big(B^{-1}(\tau)\big)\big(B^{-1}\big)'(\tau)$$

for uma função-teste em (τ_a, τ_b), então

$$\int_{t_a}^{t_b} U_\phi(t)\theta(t)\, dt = \int_{t_a}^{t_b} U_\phi(t) b(t)\psi\big(B(t)\big)\, dt$$
$$\overset{(3.4)}{=} \int_{\tau_a}^{\tau_b} f_\phi(\tau)\psi(\tau)\, d\tau \overset{(3.3)}{=} \int_{F^c} f_\phi\big(B(t)\big)\theta(t)\, dt.$$

Esta igualdade é a que precisamos para mostrar que v é suportada em F^c, porém ela precisa valer para $\theta \in \mathscr{C}_c^\infty(F^c)$ arbitrária, mas por enquanto só sabemos que vale quando ψ é uma função-teste. Em geral, ψ será apenas uma função de suporte compacto em $B(F^c)$, suave exceto em um número finito de singularidades e L^1 ao redor destas singularidades.

Afirmo que a igualdade (3.4) vale para qualquer ψ Lebesgue-integrável de suporte compacto contido em F^c.

De fato, tome uma sequência ψ_n de funções-teste que converge no sentido de L^1 para ψ, todas suportadas em um mesmo compacto $K \subset F^c$. Podemos supor que a sequência $\psi_n(\tau)$ (após passagem para uma subsequência, se necessário) é dominada uniformemente por alguma $g \geq 0$ L^1 suportada em K.

$$\int_{\tau_a}^{\tau_b} f_\phi(\tau)\psi(\tau)\, d\tau = \lim_{n\to\infty}\int_{\tau_a}^{\tau_b} f_\phi(\tau)\psi_n(\tau)\, d\tau = \lim_{n\to\infty}\int_{\tau_a}^{\tau_b} U_\phi(t) b(t)\psi_n(B(t))\, dt.$$

Mas $|b(t)\psi_n(B(t))|$ é dominada por $b(t)g(B(t))$, e esta é L^1 :

$$\int b(t)g(B(t))\, dt = \int g(\tau)\, d\tau < \infty$$

e com isso podemos concluir que a igualdade (3.4) é válida para qualquer ψ $\mathrm{L}_c^1(F^c)$, portanto v é suportada em $(x_a, x_b) \times F$.

Resolvendo o problema dos zeros não-isolados

Sabendo que o suporte de $v = u - f(x + iB(t))$ está contido no conjunto $t \in F$, resta-nos mostrar que $v \equiv 0$. De fato,

$$Lv = Lu - Lf\big(x + iB(t)\big) = 0 + 0,$$

(pois f é holomorfa em relação a $z = x + iB(t)$) o que implica

$$v_t = ib(t)v_x = 0,$$

onde a última igualdade é em virtude de $b(t)$ ser zero de maneira *flat* no suporte da v.

Como $v_t = 0$, $v = \tilde{v}(x)$. É fácil ver que $\tilde{v} = 0$ (bastando escolher $t \notin F$).

Conclusão: no retângulo aberto $R = (x_a, x_b) \times (t_a, t_b)$, toda solução de $Lu = 0$ homogênea é da forma $f(z)$ para $z = x + iB(t)$ e f holomorfa em $(x_a, x_b) \times B\big((t_a, t_b)\big)$.

Sobre a resolubilidade de L em retângulos

Em (BERHANU et al., 2008, p. 153) vemos que, dada $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e supondo que $b(t)$ não assume sinais opostos na faixa $[-T, T]$, existe $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \times (-T, T))$ tal que $Lu = f$, dada pela fórmula

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty \int_T^t + \int_{-\infty}^0 \int_{-T}^t\right] \mathrm{e}^{ix\xi + (B(t)-B(s))\xi} \widehat{f}(\xi, s)\, ds\, d\xi,$$

onde $\widehat{f}$ é a transformada de Fourier na variável x de f,

$$\widehat{f}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x,t)\, dx.$$

Se R é um retângulo aberto em $\mathbb{R}^2$, $R = (x_a, x_b) \times (t_a, t_b)$ com $b(t_a)$ e $b(t_b)$ não-nulos, e $f \in \mathscr{C}^\infty(\overline{R})$, isto significa que podemos estender f para uma função em $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ sem alterar seus valores em R, e tomar uma solução u de $Lu = f$ em R.

3.4 Resumo do caso tubo

Teorema 1. *Seja*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \big(a(t) + i\,b(t)\big)\frac{\partial}{\partial x}$$

campo vetorial em $\mathbb{R}^2$, com a, b funções $\mathscr{C}^\infty$ a valores reais. Então L é G.H. *se e somente se b não muda de sinal e $b^{-1}(0)$ é vazio ou possui somente componentes conexas compactas.*

Comentários:

1. $L = \partial_t - i\,t^k \partial_x$ é globalmente hipoelítico (na verdade hipoelítico) $\iff$ k par positivo.

2. Possibilidades do caso $b \geq 0$: Se $Z = b^{-1}(\{0\})$ não tiver nenhuma componente conexa ilimitada, L é globalmente hipoelítico. Se além disso Z não tiver nenhuma componente conexa com mais de um ponto, L é hipoelítico. Se além disso Z for vazio, L é elítico.

4 Campos reais e essencialmente reais

4.1 Caso real

Seja

$$L = A(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + B(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$$

com $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis e com $L \neq 0$ em todo (x,t).

Para fins de analisar a hipoeliticidade global de L real, sempre podemos supor que L é *completo*, isto é, que para cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$ a curva integral $\gamma(s)$ com $\gamma(0) = p$ se estende para todo $s \in \mathbb{R}$. Isto é devido à seguinte proposição, parafraseada do livro-texto de Godbillon (1983, p.11).

Proposição 4.1. *Seja L um campo vetorial real $\mathscr{C}^\infty$ na variedade paracompacta Ω. Então existe $f > 0$ suave que faz com que fL seja um campo completo.*

Definição 4.1. *Uma aplicação contínua entre espaços topológicos é dita própria quando a imagem inversa de todo compacto é compacta.*

Prova da proposição. Em virtude da paracompacidade de Ω, é possível tomar uma $g \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ estritamente positiva e própria. Por exemplo, se $\Omega = \mathbb{R}^2$, podemos tomar $g(x,t) = x^2 + t^2 + 1$. Para o caso geral, há uma demonstração no livro-texto de Guillemin e Pollack (1974, p. 53). Defina $f(x,t) = \mathrm{e}^{-(Lg)^2}$, e seja $\tilde{L} = fL$.

Afirmo que $\tilde{L}$ é um campo completo. De fato, seja $\gamma : [0,T) \to \Omega$ um raio de curva integral de $\tilde{L}$, com $0 < T < \infty$. Afirmo que γ pode ser estendida de forma a aumentar T.

$$(g \circ \gamma)'(t) = f\big(\gamma(t)\big)Lg\big(\gamma(t)\big) = \mathrm{e}^{-[Lg(\gamma(t))]^2} Lg\big(\gamma(t)\big).$$

Temos que

$$\big|(g \circ \gamma)'(t)\big| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left|\xi \mathrm{e}^{-\xi^2}\right| < \infty,$$

e assim $g \circ \gamma([0,T))$ é um intervalo limitado em $\mathbb{R}$ e, aplicando a pré-imagem g^{-1}, podemos concluir que $\gamma([0,T))$ está contida em um compacto em Ω. Por propriedades conhecidas de E.D.O., podemos estender o intervalo de parâmetros de γ aumentando T.

Para raios de curva integral da forma $\gamma : (-T, 0] \to \Omega$, basta mostrar (de maneira análoga) que as curvas integrais de $-\tilde{L}$ também se estendem até o parâmetro infinito. □

Definição 4.2. *Diremos que uma órbita Γ de L é* boa *se:*

(i) Γ *é um conjunto fechado em* $\mathbb{R}^2$.

(ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *é desconexo, com precisamente duas componentes.*

Perguntas:

1. Todo campo real não-singular tem alguma órbita boa?
2. Se existe uma órbita boa Γ, a função característica de uma das componentes de $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ é uma solução singular ?

4.1.1 Nota sobre a compactificação de um ponto

Se M é uma variedade Hausdorff e não-compacta, podemos definir um conjunto $M_e = M \cup \{\infty\}$, onde ∞ é o nome de um elemento novo que não pertence a M.

Tome a seguinte classe de conjuntos como topologia em M_e :

- Abertos de M quaisquer.
- Conjuntos da forma $U \cup \{\infty\}$, onde U é um aberto de M que tenha complemento compacto.

M_e, dotada desta topologia, é chamada de compactificação de um ponto ou compactificação de Alexandroff de M, é compacto. M_e é Hausdorff (podemos separar pontos do infinito tomando uma bola aberta na carta local). Se M é conexa, então M_e também é conexa (em virtude de M ser não-compacto e conexo).

Os seguintes fatos serão usados: a compactificação de um ponto do plano é homeomorfa à esfera S^2 (pela projeção estereográfica) e a compactificação de um ponto de um intervalo (a, b) é homeomorfa a S^1.

4.1.2 Órbitas com α e ω-limites vazios são boas

Suponha que uma órbita $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ tenha as seguintes propriedades:

$$\lim_{s\to\infty} \|\gamma(s)\| = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{s\to-\infty} \|\gamma(s)\| = \infty.$$

Em outras palavras, γ vem do infinito e vai para o infinito. Isto equivale a dizer que a aplicação γ é própria, bastando observar que a imagem inversa de fechados é fechada e que a imagem inversa de conjuntos limitados será limitada.

É fácil ver, com argumentos usuais de compacidade, que toda órbita com α-limite e ω-limite vazios é própria e vice-versa.

Tome as compactificações de um ponto de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{R}^2$. Podemos estender γ para uma aplicação γ_e de $\mathbb{R}_e$ em $\mathbb{R}^2_e$, definindo $\gamma_e(\infty) = \infty$. É fácil ver que tal aplicação é contínua. Além disso, a imagem de γ_e é fechada em $\mathbb{R}^2_e$, por ser um compacto em espaço Hausdorff. Isto implica que a imagem de γ é um fechado em $\mathbb{R}^2$. Também sabemos que γ (também γ_e) não é sobrejetora pois, se fosse, poderíamos construir um homeomorfismo entre S^2 e S^1.

Afirmação: γ_e divide $\mathbb{R}^2_e$ em duas partes. Para verificar isto, remova um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2_e$ pelo qual γ não passa. O espaço resultante $\mathbb{R}^2_e \backslash \{p_0\}$ é homeomorfo a um plano, pela projeção

estereográfica com p_0 fazendo a função do infinito. Seja $\Gamma_e = \Gamma \cup \{\infty\}$. Pelo teorema da curva de Jordan, $\left(\mathbb{R}^2_e \backslash \{p_0\}\right) \backslash \Gamma_e$ tem duas componentes conexas, U_1 e U_2, ambas abertas em $\mathbb{R}^2_e \backslash \{p_0\}$. Um desses abertos (seja o U_1) tem fecho compacto com fronteira Γ_e. Este fecho não toca $\{p_0\}$, que é a fronteira de $\mathbb{R}^2_e \backslash \{p_0\}$. Afirmo sem demonstrar que $\left\{U_1, U_2 \cup \{p_0\}\right\}$ é uma cisão não-trivial de $\mathbb{R}^2_e \backslash \Gamma_e$. Como $\mathbb{R}^2_e \backslash \Gamma_e$ é igual a $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$, fica provado que Γ divide o plano em duas partes.

4.1.3 Órbitas fechadas são boas

Seja $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ uma órbita que é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$. Γ é subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^2$ (BERHANU et al., 2008, p. 108, Cor. III.1.12). Como γ não pode ser um ciclo (campos reais não-singulares não possuem ciclos) γ é injetiva e, portanto, é um homeomorfismo sobre a sua imagem. Em particular, γ é aplicação própria: se $K \subset \mathbb{R}^2$ é um compacto, $\gamma^{-1}(K)$ é compacto. Isto implica que $\alpha(\gamma)$ e $\omega(\gamma)$ são vazios, e portanto γ é *boa*.

4.1.4 L somente admite órbitas boas

Suponha que L admita uma órbita não-fechada $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$. Então (GODBILLON, 1983, Prop. 2.10, p. 17–18) existirá uma curva fechada que é transversal a L em cada ponto e intersecta Γ. Pelo teorema da curva de Jordan, tal transversal divide o plano em duas partes, chamadas a partir de agora de *dentro* e *fora*, onde o lado de dentro é aquele que é limitado. O campo L, em relação à transversal fechada, aponta sempre uniformemente para dentro ou para fora, por um argumento envolvendo continuidade e compacidade. Começando em um ponto p da transversal, uma das semi-órbitas de p aponta para dentro e portanto, pelo teorema de Poincaré-Bendixson, implicará na existência de um ponto singular ou um ciclo na parte de dentro, mas isto contradiz a hipótese de que L é não-singular em $\mathbb{R}^2$.

4.1.5 Construção da solução singular

Proposição 4.2. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função constante em cada órbita de Sussmann de um campo vetorial complexo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Supondo que u seja limitada e mensurável (de forma a fazer sentido como distribuição e como elemento de $L^\infty(\Omega)$), então $Lu = 0$.*

Demonstração. Como u é real e $\Re L, \Im L$ são campos vetoriais reais, $(\Re L)u$ e $(\Im L)u$ são funções que assumem somente valores reais e

$$Lu = (\Re L + i\Im L)u \quad \therefore \quad \Re(Lu) = (\Re L)u \quad \text{e} \quad (\Im L)u = \Im(Lu).$$

Desta forma, para mostrar que $Lu = 0$, basta mostrar que $\Re Lu = 0$ e $\Im Lu = 0$.

Seja $M \in \{\Re L, \Im L\}$. Para mostrar que $Mu = 0$, podemos supor sem perda de generalidade que as curvas integrais de M sejam todas definidas com parâmetro em $(-\infty, \infty)$ (ver a

proposição 4.1). Seja

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \Omega\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega \\ & (x_0,t_0,s) & \longmapsto & (x,t)=\Phi(x_0,t_0,s) \end{array}$$

o fluxo de M e seja, para cada $s\in\mathbb{R}$, $\Phi_s:\Omega\to\Omega$ o difeomorfismo (que preserva orientação) definido por $\Phi_s(x_0,t_0)=\Phi(s,x_0,t_0)$. Como u é constante nas órbitas, temos $u\circ\Phi_s=u$ para todo $s\in\mathbb{R}$. Dado $\theta\in\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$, denote $\theta_s=\theta\circ\Phi_s$.

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\theta_s(x_0,t_0) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\theta(\Phi(x_0,t_0,s)) \\ &= d\theta|_{\Phi(x_0,t_0,0)}[\mathrm{D}\Phi(x_0,t_0,0)[0,0,1])] = d\theta|_{(x_0,t_0)}[M|_{(x_0,t_0)}] = M\theta(x_0,t_0).\end{aligned}$$

Afirmo que, ao denotarmos $u_s=u\circ\Phi_s$,

$$\langle Mu,\theta\rangle = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\langle u_s,\theta\rangle$$

e assim, como temos da hipótese que $u_s=u$ para todo s, valerá $Mu=0$. Ao tomarmos u_s como distribuição e fazermos a mudança de variáveis na integral, vemos que

$$\langle u_s,\theta\rangle = \big\langle u,(\det\mathrm{D}\Phi_{(-s)})\theta_{(-s)}\big\rangle$$

e, se $s\neq 0$,

$$\left\langle\frac{u_s-u}{s},\theta\right\rangle = \left\langle u,\frac{(\det\mathrm{D}\Phi_{(-s)})\theta_{(-s)}-\theta}{s}\right\rangle.$$

O limite ponto-a-ponto das funções-teste à direita, quando $s\to 0$, é

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\frac{(\det\mathrm{D}\Phi_{(-s)})\theta_{-s}-\theta}{s} &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(\det\mathrm{D}\Phi_{(-s)})\theta_{(-s)} = \\ &\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\theta_{(-s)}\right)\det\mathrm{D}\Phi_{(-0)}+\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\det\mathrm{D}\Phi_{(-s)}\right)\theta_{(-0)} \\ &= -M\theta+\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\det\mathrm{D}\Phi_{(-s)}\right)\theta \qquad (4.1)\end{aligned}$$

A derivada do determinante pode ser calculada usando a fórmula de Jacobi: seja $\mathbf{A}(s)=\mathrm{D}\Phi_{(-s)}(x,t)$ (a matriz jacobiana do fluxo no parâmetro $-s$) e então

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\det\mathbf{A}(s)=\operatorname{tr}\Big(\underbrace{\big(\operatorname{adj}\mathbf{A}(0)\big)}_{=\mathrm{I}}\mathbf{A}'(0)\Big)=\operatorname{tr}\mathbf{A}'(0)$$

Sejam $(x,t)=\Phi(p,q,s)$ ou, equivalentemente, $(p,q)=\Phi(x,t,-s)$. Sejam também $m_1(x,t)=Mx$ e $m_2(x,t)=Mt$, de forma que $M=m_1(x,t)\partial_x+m_2(x,t)\partial_t$. Da definição de fluxo,

$$\frac{\partial p}{\partial s}=-m_1(p,q),\quad \frac{\partial q}{\partial s}=-m_2(p,q)$$

e então

$$\mathbf{A}(s)=\begin{pmatrix}\frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial t}\\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial t}\end{pmatrix}\quad\therefore\quad \mathbf{A}'(s)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 p}{\partial s\partial x} & \frac{\partial^2 p}{\partial s\partial t}\\ \frac{\partial^2 q}{\partial s\partial x} & \frac{\partial^2 q}{\partial s\partial t}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}[m_1(p,q)] & \frac{\partial}{\partial t}[m_1(p,q)]\\ \frac{\partial}{\partial x}[m_2(p,q)] & \frac{\partial}{\partial t}[m_2(p,q)]\end{pmatrix}$$

mas em $s = 0$ temos $(p, q) = (x, t)$ e portanto

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}'(0) = -\left[\frac{\partial}{\partial x} m_1(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} m_2(x,t)\right] = -\operatorname{div} M.$$

Assim, de (4.1), vale o limite ponto-a-ponto de funções

$$\lim_{s\to 0} \frac{(\det \mathrm{D}\Phi_{(-s)})\theta - \theta}{s} = -M\phi - \phi \operatorname{div} M = {}^t M.$$

Resta mostrar que este limite converge no sentido L^1: suponha que $\theta \in \mathscr{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$ é de valores reais (como u é real, só precisamos examinar funções-testes reais) e então, pelo teorema do valor médio,

$$\left|\frac{\left[\det \mathrm{D}\Phi_{(-s)}\theta_{(-s)} - \theta\right](x,t)}{s}\right| = \left|\frac{d}{ds}\Big|_{s=\xi}\left(\det \mathrm{D}\Phi_{(-s)}\theta_{(-s)}\right)(x,t)\right| \quad (\xi \text{ entre } 0 \text{ e } s)$$

Seja K o compacto $\Phi(\operatorname{supp}\theta \times [-1,1])$. O suporte de $\theta_{(-s)}$, com $s \in [-1,1]$ qualquer, está contido em K: pois se $(x,t) \notin K$ então $\Phi(x,t,-s) \notin \operatorname{supp}\theta$, logo $\theta_{-s}(x,t) = 0$. Seja $C = \pi(K)$ onde $\pi : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega$ é a projeção canônica e então teremos, para todo $s \in [-1,1]$,

$$\left|\frac{\left[\det \mathrm{D}\Phi_{(-s)}\theta_{(-s)}\right](x,t) - \theta(x,t)}{s}\right| \le (\chi_C)(x,t) \sup_{(x,t,s)\in K}\left|\frac{d}{ds}\left(\det \mathrm{D}\Phi_{(-s)}\theta_{(-s)}\right)(x,t)\right|$$

que está em $\mathrm{L}^1(\Omega)$, suficiente para mostrar a convergência dominada e o resultado desejado. □

OBSERVAÇÃO 4.1. *Esta proposição pode ser generalizada para dimensões maiores que dois.*

PROPOSIÇÃO 4.3. *Seja u a função característica de um conjunto mensurável $X \subset \mathbb{R}^2$ de medida positiva tal que o complemento $X^c = \mathbb{R}^2 \setminus X$ também tenha medida positiva. Então $u \notin \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ (como distribuição).*

Demonstração. É claro que a função u é descontínua, pois $u(\mathbb{R}^2)$ é o conjunto $\{0,1\}$, que não é conexo enquanto $\mathbb{R}^2$ é conexo. Mas precisamos mostrar um pouco mais do que isto, pois u é considerada como distribuição (em particular, $u \in \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$) e seu valor é definido a menos de conjuntos de medida nula.

Afirmo que u é descontínua, mesmo após modificarmos u em qualquer conjunto de medida nula. De fato, seja $\tilde{u}$ igual a u, exceto em um conjunto E de medida nula. Considere a imagem inversa $\tilde{u}^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0,1\})$. Pela lei do terceiro excluído, este conjunto é aberto ou não-aberto. No primeiro caso ele é vazio, por ser um aberto contido em E (de medida nula) assim $\tilde{u}(\mathbb{R}^2) = \{0,1\}$ e concluímos que $\tilde{u}$ não é contínua. No segundo caso, $\tilde{u}$ também não é contínua, pois a imagem inversa de um aberto deveria ser aberta. □

TEOREMA 2. *Seja L um campo real não-singular em $\mathbb{R}^2$. L não é* G.H.

Demonstração. Vimos que toda órbita de L é um conjunto fechado que divide o plano em duas partes. Fixe uma órbita Γ e seja U uma das componentes conexas de $\mathbb{R}^2\backslash\Gamma$. U é um aberto em $\mathbb{R}^2$, por ser uma componente conexa de duas no aberto $\mathbb{R}^2\backslash\Gamma$. Além disso U é L-invariante: pois dado $p \in U$, a órbita de p é um conexo em $\mathbb{R}^2\backslash\Gamma$ e portanto está contida em uma das componentes, que só pode ser U. Tomando $u = \chi_U$, temos $Lu = 0$ em razão de u ser constante nas órbitas (proposição 4.2) mas também, pela proposição 4.3, $u \notin \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. □

4.2 Caso essencialmente real

TEOREMA 3. *Seja L um campo vetorial complexo essencialmente real e não-singular, isto é, um campo em que a parte real e a parte imaginária são* L.D. *em cada ponto, mas sem jamais se anularem ao mesmo tempo. L não é globalmente hipoelítico.*

Demonstração. Já sabemos (teorema 2) que isto é verdade no caso em que L é real. Então será suficiente mostrarmos que L pode ser multiplicada por alguma função $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, que não se anula em nenhum ponto, de forma que gL seja um campo real. Dado $p \in \mathbb{R}^2$, sejam $\mathbf{v}_1 = (a, b)$ e $\mathbf{v}_2 = (c, d)$ as partes real e imaginária de $L|_p$, vistas como vetores de $\mathbb{R}^2$. Por serem vetores reais linearmente dependentes, existe algum par de números reais

$$(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0) \quad \text{tal que} \quad \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = 0.$$

tal propriedade, escrita de outra forma, é equivalente a

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 c &= 0 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 d &= 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e podemos argumentar pelo teorema do núcleo e da imagem que o conjunto dos (λ_1, λ_2) com essa propriedade é um subespaço vetorial de dimensão um de $\mathbb{R}^2$.

Se tratarmos o par (λ_1, λ_2) como coordenadas homogêneas, isto define um único elemento $f(p) = [\lambda_1, \lambda_2]$ na reta projetiva.

A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{RP}^1$ é $\mathscr{C}^\infty$: tomando como referência um ponto inicial p_0, um dos dois vetores $\Re L|_{p_0}, \Im L|_{p_0}$ será não-nulo. Chame de M a parte (real ou imaginária) de L que é não-nula em p_0. Por continuidade, M também será não-nula em algum aberto que envolve p_0. Denomine $(a(p), b(p))$ o par das coordenadas de M visto como vetor, ambas $\mathscr{C}^\infty$ em relação a p. Uma dessas (suponha que é a) será não-nula em p_0, e restringindo o aberto podemos supor que ela é sempre não-nula. Assim, perto de p_0, temos

$$f(p) = [-b(p), a(p)] = \left[\frac{-b(p)}{a(p)}, 1\right]$$

e isto é claramente suave se considerarmos a carta $[x, 1] \to x$, conforme a construção usual da variedade $\mathbb{RP}^1$. Se b for não-nula, o argumento é análogo.

Seja $\pi : S^1 \to \mathbb{RP}^1$ a projeção canônica do círculo unitário na reta projetiva. π é um recobrimento e, por argumentos usuais de topologia, existe função contínua

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to S^1.$$

tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$. Tal função é suave, pois a projeção canônica π admite inversas locais suaves. Chame $\tilde{f}(p) = (\lambda_1(p), \lambda_2(p))$. Se definirmos $g = \lambda_2 + i\lambda_1$,

$$\begin{aligned} gL = (\lambda_2 + i\lambda_1)(\Re L + i\Im L) &= \lambda_2 \Re L + i\lambda_2 \Im L + i\lambda_1 \Re L - \lambda_1 \Im L \\ &= \lambda_2 \Re L - \lambda_1 \Im L + i\cancel{(\lambda_1 \Re L + \lambda_2 \Im L)}, \end{aligned}$$

que é campo real não-singular e portanto gL não é globalmente hipoelítico, nem L. $\square$

5 Campos complexos, caso não-transitivo

Consideraremos aqui campos vetoriais complexos não-singulares

$$L : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$$

com mais de uma órbita de Sussmann (não-transitivos), que não sejam essencialmente reais. Ou seja, em algum ponto $\Re L$ e $\Im L$ são linearmente independentes, e portanto a L-órbita que contém este ponto é de dimensão dois. Como existe mais de uma órbita, isto vai implicar a existência de órbitas de dimensão um: pois se todas as órbitas fossem de dimensão dois, $\mathbb{R}^2$ se decomporia como uma união disjunta de abertos não-triviais, coisa impossível em virtude de sua conexidade.

5.1 O caso bom

Estes são os casos em que podemos achar uma solução singular que é simplesmente a função característica de algum conjunto L-invariante, concluindo que u não é G.H.

Suponha que L é campo vetorial complexo possuindo ao menos uma órbita Ω de dimensão dois. Se o complementar $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ possuir medida não-nula, então podemos definir

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x,t) \in \Omega; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela proposição 4.2, $Lu = 0$ e pela proposição 4.3, $u \notin \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

5.1.1 Quando podemos garantir o caso bom?

Considere as órbitas de dimensão um de L. Por Sussmann (1973), toda órbita é uma subvariedade imersa $\mathscr{C}^\infty$, sem bordo e conexa por caminhos. Além disso, é sabido (BERHANU et al., 2008, Lema III.1.8, p. 106) que toda órbita de Sussmann é segundo-enumerável. Pela classificação de variedades de dimensão um (ver Gale (1987) para uma demonstração) as órbitas de dimensão um deverão ser cópias imersas de S^1 ou de $\mathbb{R}$. O primeiro caso é uma curva de Jordan: se houver uma órbita deste tipo, ela vai dividir o plano em duas partes conexas (e abertas) com medida positiva, de forma que a órbita de dimensão 2 está contida em somente uma delas (e portanto é "boa").

No segundo caso, vamos primeiro supor que a órbita é fechada. Então (BERHANU et al., 2008, Cor. III.1.12, p. 108) podemos tomar $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ um mergulho tal que $m(\mathbb{R})$ é a órbita. Afirmo que m é uma aplicação própria. De fato, se $K \subset \mathbb{R}^2$ é compacto, então a intersecção $K \cap m(\mathbb{R})$ é compacta (pois $m(\mathbb{R})$ é fechado). Em virtude de m ser mergulho, $m^{-1}(K \cap m(\mathbb{R}))$ é compacto em $\mathbb{R}$. De modo análogo ao que fizemos na seção 4.1 (usando a compactificação de

um ponto) podemos ver que nossa órbita divide o plano em duas, e assim estamos no caso bom e L não é G.H.

Veremos em breve que a existência de qualquer órbita de dimensão um que seja *mergulhada* já garante que estejamos no caso bom.

5.2 O caso remanescente: L essencialmente transitivo

Nos resta examinar campos L não-transitivos, não-singulares com as seguintes propriedades:

- Uma das órbitas de L, e somente uma, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tem dimensão 2.
- O complemento $\Lambda \doteq \Omega^c = \partial\Omega$ é não-vazio, mas tem medida nula.

Com estas condições, não pode haver nenhuma órbita de dimensão um que seja um conjunto fechado: tal órbita, se fosse um ciclo, dividiria o plano em duas partes de medida não-nula; se não fosse um ciclo, de acordo com o argumento usado no estudo de campos reais (subseção 4.1.3) também dividiria o plano em dois.

O conjunto Λ é fechado e L-invariante por ser o complemento de uma órbita aberta.

5.2.1 Algumas propriedades

Proposição 5.1. *Cada componente conexa por caminhos de Λ consiste de precisamente uma órbita.*

Demonstração. Suponha que $\alpha : [0,1] \to \Lambda$ é um caminho contínuo com $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$ em órbitas diferentes.

Subdividindo o intervalo, podemos encontrar um parâmetro s_0 tal que $\alpha(s)$ muda de órbita sempre que o parâmetro s varia em qualquer vizinhança de s_0.

Seja M a parte real ou imaginária de L, desde que esta seja não-nula em $p_0 = \alpha(s_0)$, e tome coordenadas locais $\mathscr{C}^\infty$ (ξ, τ) definidas perto de p_0, em relação às quais o campo M se reduz a ∂_τ. Tome uma vizinhança V_0 de p_0 que seja retangular em relação a (ξ, τ), e nesta Λ vai ser uma união de segmentos paralelas do tipo $\xi = \text{cte}$. Como esta tem medida nula (a mudança para coordenadas locais é um difeomorfismo $\mathscr{C}^\infty$ e preserva medida nula) a projeção de $\partial\Lambda \cap V_0$ no eixo dos ξ tem interior vazio.

Mas o caminho α, quando o parâmetro está próximo o bastante de s_0, está contido em $\partial\Omega \cap V_0$ e muda de órbita, logo a sua coordenada ξ não é constante, e a sua projeção na coordenada ξ contém um intervalo (ξ_0, ξ_1), o que contradiz a conclusão do parágrafo anterior. □

Em particular, isto implica que nenhuma componente conexa por caminhos de $\partial\Omega$ é fechada.

PROPOSIÇÃO 5.2. *A união de duas órbitas quaisquer de Λ não é um fechado.*

Demonstração. Tome duas órbitas Γ_1 e Γ_2 em Λ e suponha que a união $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ seja fechada. Como cada uma delas é não-fechada, o fecho de cada uma delas contém algum ponto da outra. Mas ambas são L-invariantes, logo o fecho de cada uma delas também o é, tendo que conter inteiramente a outra órbita. Temos $\overline{\Gamma_1} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \overline{\Gamma_2}$.

Consideremos isto localmente: tome uma vizinhança de qualquer ponto de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, tal vizinhança sendo retangular em relação a coordenadas locais (ξ, τ) que retificam Γ naquela região. Γ_1 e Γ_2 (na carta local) serão, cada uma, uma união no máximo enumerável de segmentos paralelos, e a união de ambos será fechada. Nenhum destes segmentos poderá ser isolado, pois se um dado segmento estiver em Γ_1, pode ser aproximado por segmentos de Γ_2 e vice-versa. Projetando a união $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ em um segmento de reta transversal, obtemos um conjunto enumerável *perfeito* (um fechado sem pontos isolados) neste segmento.

Mas é sabido que tal coisa não existe: pois um conjunto F fechado e enumerável é um espaço métrico completo, e portanto (pelo teorema da categoria de Baire) um dos pontos dele, considerado como subconjunto, sempre terá interior não-vazio na topologia de F, o que significa ser um ponto isolado. □

PROPOSIÇÃO 5.3. *A união de uma quantidade finita de órbitas de Λ não pode ser fechada.*

Demonstração. Seja n a quantidade de órbitas a ser unida. Suponha que vale a proposição quando $n = n_0$, e agora devemos mostrar para $n = n_0 + 1$. Seja F_0 a união das primeiras n_0 órbitas, e Γ_n a órbita restante. Ambos F_0 e Γ_n são não-fechados e disjuntos. Supondo por absurdo que $F_0 \cup \Gamma_n$ seja fechado, o fecho de F_0 deverá ser $F_0 \cup \Gamma_n$. Como F_0 (visto em coordenadas locais apropriadamente escolhidas) é uma união enumerável de segmentos paralelos, e Γ_n também o é, podemos repetir o argumento da demonstração anterior para concluir que $F_0 \cup \Gamma_n$ não é fechado. □

PROPOSIÇÃO 5.4. *Cada L-órbita contida em Λ é ilimitada.*

Demonstração. Tome por absurdo uma órbita $\Gamma_0 \subset \Lambda$ limitada. O fecho de Γ_0 é compacto, logo ele contém um conjunto L-minimal, isto é, um fechado L-invariante C que não contém nenhum outro fechado L-invariante menor, exceto o vazio. O jeito usual de encontrar C é usando o lema de Zorn, em conjunção com a propriedade da intersecção finita do compacto $\overline{\Gamma}_0$.

Podemos tomar um mergulho próprio e suave $F : \mathbb{R}^2 \to U \subset \mathbb{T}^2$ do plano em um aberto U do toro, com U o interior de uma cópia mergulhada do retângulo $[0,1]^2$, e assim jogar nosso problema para uma superfície compacta.

O campo $F(L)$ não é definido em todo o toro, mas o conjunto que nos interessa — $F(C)$ — tem distância positiva da fronteira de U, assim podemos "cortar suave e estender" $F(L)$, sem modificá-lo na proximidade de $F(C)$, para obter um campo M definido em todo $\mathbb{T}^2$.

Desta forma pode-se confirmar que $F(C)$ é um conjunto minimal de M. Por Hounie (1981), $F(C)$ será uma órbita periódica contida em $\overline{\Gamma}$ ou um ponto singular, mas ambos os casos (após voltar para $\mathbb{R}^2$ por F^{-1}) contradizem as hipóteses do caso que estamos estudando. $\square$

Em geral, ao tomarmos uma L-órbita de dimensão um, pela classificação de variedades ela será um mergulho de S^1 ou imersão de $\mathbb{R}$. No segundo caso, ao remover um ponto p a órbita se divide em duas e vamos chamar os raios que se formam, junto com o ponto-base p, de *semiórbitas*.

PROPOSIÇÃO 5.5. *Cada semiórbita de dimensão um contida em Λ é ilimitada.*

Demonstração. Dado $p_0 \in \Lambda$, seja Γ a órbita passando por p_0. Podemos tomar uma parametrização injetiva e regular $\gamma : \mathbb{R} \to \Gamma$. Podemos ainda supor que $\gamma(0) = p_0$.

Afirmação: os fechados

$$\omega(\gamma) = \bigcap_{M\in[0,\infty)} \overline{\gamma\big([M,\infty)\big)} \quad \text{e} \quad \alpha(\gamma) = \bigcap_{M\in(-\infty,0)} \overline{\gamma\big((-\infty,M]\big)}$$

são ambos conjuntos L-invariantes. Para mostrar isto, basta mostrar que cada um deles é $\Re L$-invariante e também $\Im L$-invariante. De fato, seja M um dentre $\Re L$ e $\Im L$, arbitrariamente escolhido. Pela proposição 4.1, podemos tomar f suave e estritamente positiva tal que o fluxo por um parâmetro ξ, ϕ_ξ de fM seja globalmente definido para todo $\xi \in \mathbb{R}$. As órbitas de M e fM coincidem, logo se $\omega(\gamma)$ ($\alpha(\gamma)$) for fM-invariante, também será M-invariante.

Seja $p_\infty \in \omega(\gamma)$ e

$$p_1 = \gamma(s_1), p_2 = \gamma(s_2), \ldots$$

uma sequência de pontos em Γ tal que $p_n \to p_\infty$, com $s_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Dado $\xi \in \mathbb{R}$, sejam $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ os parâmetros da sequência $\phi_\xi(p_n)$, ou seja,

$$\phi_\xi(p_1) = \gamma(\sigma_1), \phi_\xi(p_2) = \gamma(\sigma_2), \ldots .$$

A sequência dos $\phi_\xi(p_n)$ converge para $\phi_\xi(p_\infty)$, por continuidade do fluxo. Resta mostrar que $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \to \infty$. Observe que $\sigma_n = (\gamma^{-1} \circ \phi_\xi \circ \gamma)(s_n)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: $\gamma^{-1} \circ \phi_\xi \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente. Considere o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\Phi:(\xi,p)\mapsto\phi_\xi(p)", "\mathscr{C}^\infty"'] & \mathbb{R}^2 \\
\mathbb{R}\times\Gamma \arrow[u, "\mathrm{I}_{\mathbb{R}}\times i"] \arrow[r, "A"] & \Gamma \arrow[u, "i"'] \\
\mathbb{R}\times\mathbb{R} \arrow[u, "\mathrm{I}_{\mathbb{R}}\times\gamma"] \arrow[r, "B"] & \mathbb{R} \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

onde Φ é o fluxo de fM e $i : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ é a inclusão, que é uma imersão $\mathscr{C}^\infty$. A é uma restrição de Φ a Γ, que pode ser feita em duas etapas: primeiro a restrição do domínio a $\mathbb{R}\times\Gamma$, e isto

será suave em virtude de ser a composição de duas flechas suaves no diagrama acima. Em seguida, a restrição do contra-domínio para Γ. Em virtude de Γ ser fracamente mergulhada (BERHANU et al., 2008, Prop. III.1.9, p. 107) A é uma aplicação $\mathscr{C}^\infty$. Mas γ e $\mathrm{I}_\mathbb{R} \times \gamma$ são difeomorfismos $\mathscr{C}^\infty$, logo concluímos que B é $\mathscr{C}^\infty$.

Temos que

$$F_\xi : p \mapsto B(\xi, p) = \gamma^{-1} \circ \phi_\xi \circ \gamma$$

é uma família de funções $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, também $\mathscr{C}^\infty$ em relação ao parâmetro ξ e por termos $F_{-\xi} = F_\xi^{-1}$, cada uma delas é um difeomorfismo. Como $F_0'(0) = 1$ (pois F_0 é a identidade) e $F_\xi'(0)$ varia continuamente em relação a ξ sem nunca poder se anular, $F_\xi'(0) > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Isto basta para vermos que F_ξ é uma função estritamente crescente e portanto a sequência $\sigma_n = F_\xi(s_n)$ vai ao infinito.

Por analogia, $\alpha(\gamma)$ é L-invariante.

Se $\alpha(\gamma)$ ou $\omega(\gamma)$ for limitada, então o seu fecho é um compacto L-invariante e portanto conteria órbitas limitadas, mas já sabemos da proposição 5.4 que este não é o caso. □

Um parêntese sobre caminhos poligonais

PROPOSIÇÃO 5.6. *Sejam $p_0, \ldots, p_n$ pontos no plano. Após uma perturbação arbitrariamente pequena, o polígono formado pelas arestas $\overline{p_0 p_1}$, $\overline{p_1 p_2}$, até $\overline{p_{n-1} p_n}$ e depois $\overline{p_n p_0}$ não terá nenhuma aresta paralela a nenhuma outra, nem terá arestas nulas.*

Demonstração. As arestas podem ser representadas como vetores:

$$a_1 = p_1 - p_0, a_2 = p_2 - p_1, \ldots, a_n = p_n - p_{n-1}, a_{n+1} = p_0 - p_n.$$

Afirmação: podemos perturbar um pouco a posição dos pontos p_1 até p_{n-1} de forma que nenhuma aresta seja nula, e nenhuma aresta sejam paralela a nenhuma outra. De fato, seja

$$P(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} \det[a_i, a_j].$$

Isto é um polinômio em relação a $p_0, \ldots, p_n$ que vale zero se e somente se algum par distinto de arestas é paralelo, ou também se alguma aresta é nula. O conjunto dos zeros de um polinômio não-trivial tem interior vazio. Mas P é não-trivial porque podemos construir um polígono com qualquer número de lados que não possua arestas paralelas ou degeneradas. Assim, se $P = 0$, basta uma perturbação arbitrariamente pequena dos vértices para obter $P \neq 0$. □

PROPOSIÇÃO 5.7. *Um polígono contido em U (aberto no plano) continua contido em U após qualquer perturbação suficientemente pequena.*

Demonstração. Basta observar que um segmento de reta contido em U pode sofrer uma pequena perturbação nos vértices sem deixar de estar contido em U. De fato, por compacidade

do segmento, podemos cobri-lo com um único retângulo aberto paralelo a este e inteiramente contido em U. Como retângulos são convexos, podemos perturbar os vértices sem que o segmento inteiro saia dele. Como um polígono tem somente um número finito de vértices e arestas, podemos tomar um $\epsilon > 0$ para cada aresta e tomar o mínimo de todos eles. □

PROPOSIÇÃO 5.8. *A perturbação da proposição 5.6 ainda pode ser feita, mesmo que fixemos previamente um vértice ou uma aresta não-nula.*

Demonstração. Basta fixar algumas variáveis na função polinomial P da demonstração da proposição 5.6 e verificar que o conjunto dos zeros (nas variáveis livres que sobrarem) ainda é não-trivial. Seja $\tilde{P}$ a função polinomial obtida após fixar um vértice (ou aresta) e deixar os outros como variáveis. Afirmo que o conjunto dos zeros de $\tilde{P}$ ainda é não-trivial, e portanto tem interior vazio. De fato, para ver isto basta construir um polígono a partir do vértice inicial (ou aresta) que tem o número certo de lados e todos os lados são segmentos não-paralelos entre si. □

DEFINIÇÃO 5.1. *Uma auto-intersecção de um caminho $\alpha : [0,1] \to X$ (X espaço métrico) é um par $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ com $s < t$, $(s,t) \neq (0,1)$ e $\alpha(s) = \alpha(t)$.*

PROPOSIÇÃO 5.9. *Seja U um aberto em $\mathbb{R}^2$. Um caminho poligonal em U pode ser perturbado, sem modificar os pontos inicial e final, de forma que tenha somente um número finito de auto-intersecções.*

Demonstração. Ideia: perturbar os vértices de α de forma que nenhuma aresta seja paralela a nenhuma outra, e nenhuma aresta seja nula. Se o caminho for fechado, faça isto deixando fixo o vértice correspondente aos pontos inicial e final. Caso contrário, deixe fixa a aresta (que não pertence ao caminho α) ligando o ponto final ao inicial. Pelos axiomas de incidência, o polígono obtido terá um número no máximo finito de auto-intersecções □

PROPOSIÇÃO 5.10. *Um caminho α com finitas auto-intersecções admite um subcaminho $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ($\beta(0) = \alpha(0)$, $\beta(1) = \alpha(1)$) sem nenhuma auto-intersecção.*

Demonstração. Seja $\alpha : [0,1] \to X$ (X espaço métrico) o caminho dado pelo enunciado e sejam

$$(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_n, t_n)$$

toda as auto-intersecções de α. Faremos uma indução finita em n. Quando $n = 0$, a proposição é satisfeita trivialmente. Suponha que a proposição é verdadeira quando $n \leq n_0$, e tome $n = n_0 + 1$. Tomando (s,t) a primeira auto-intersecção, seja β a concatenação $\alpha_0 * \alpha_R$, onde α_0 é a restrição de α ao subintervalo $[0,s]$ e α_R é a restrição de α a $[t,1]$. β é um subcaminho de α, e afirmo sem demonstrar que β possui no máximo n_0 auto-intersecções, de forma que podemos tomar um γ sem nenhuma auto-intersecção, subcaminho de β, provando a proposição. □

Mais algumas propriedades

PROPOSIÇÃO 5.11. *Nenhuma L-órbita contida em Λ é mergulhada.*

Demonstração. Seja Γ uma L-órbita mergulhada em $\mathbb{R}^2$, contida em $\partial\Omega$. Construa um segmento de reta $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, transversal a Γ e que a cruza somente uma vez (em um ponto p) e cujos extremos $q_0 = \beta(0), q_1 = \beta(1)$ estão contidos em Ω. Pela conexidade por caminhos de Ω, existe um caminho $\alpha : [0,1] \to \Omega$ que começa em q_1 e termina em q_0. Podemos tomar α como um caminho poligonal. Façamos isto, e a concatenação $\delta = \alpha * \beta$ será um caminho poligonal que cruza Γ somente uma vez. Ao perturbar os vértices de δ, podemos garantir que este não possua nenhum par de arestas paralelas e também nenhuma aresta nula, mantendo fixa a aresta q_0q_1. Este procedimento pode ser feito de forma que δ ainda cruze com Γ somente uma vez, pois o resto do polígono (removendo a aresta q_0q_1 mas mantendo os vértices) é um compacto e tem distância positiva de Γ. Façamos isto.

Reposicione o ponto-base de δ para que tenhamos $\delta(0) = \delta(1) = p$, onde (lembrando) $\{p\} = \Gamma \cap \delta([0,1])$.

Em seguida, troque δ por um sub-caminho que não se auto-intercepta. Este novo caminho ainda cruza Γ, de maneira transversal, no ponto p e somente nele, e é uma curva de Jordan. As semiórbitas de Γ que começam no ponto p são ambas conexas e (após remover p) jamais interceptam δ, assim uma delas está contida na região limitada que é delimitada por δ. Mas já sabemos, por hipótese, que nenhuma semiórbita é limitada. Contradição. □

PROPOSIÇÃO 5.12. *A única L-órbita de dimensão dois, Ω, é simplesmente conexa.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo que Ω não é simplesmente conexo. Tome um caminho fechado $\alpha : [0,1] \to \Omega$ não-contrátil. Podemos supor que α é um mergulho do círculo S^1. Pelo teorema de Jordan-Schoenflies, existe um homeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva $\alpha([0,1])$ em $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$, a parte de dentro de α na bola aberta $B_1(0)$ e a parte de fora no complementar da bola fechada $\overline{B}_1(0)$. Podemos contrair o círculo S^1 reduzindo o raio para zero, mas como Ω não é contrátil (e, portanto, nem $F(\Omega)$) em algum momento este círculo vai esbarrar em algum ponto do complemento de $F(\Omega)$, e aplicando F^{-1} neste ponto obtemos um elemento $p \in \Lambda = \mathbb{R}^2 \backslash \Omega$ no interior da área delimitada por α.

A L-órbita de p é um conexo que não intercepta $\alpha([0,1])$, logo está inteira na parte de dentro da curva e só pode ser limitada, mas da proposição 5.4 sabemos que isto não ocorre. Contradição. □

Vimos que o caso essencialmente transitivo (mas não-transitivo) tem infinitas órbitas de dimensão um, que nenhuma delas é fechada, nenhuma delas é mergulhada, nenhuma delas é limitada e também, se dividida em dois pela remoção de um ponto, nenhuma das semiórbitas é limitada.

Resumindo:

TEOREMA 4. *Seja L um campo vetorial complexo não-transitivo com uma órbita Ω de dimensão dois. Então, se qualquer das propriedades abaixo for verdadeira:*

(i) O complemento de Ω tem medida não-nula.

(ii) Existe uma órbita de dimensão um mergulhada.

(iii) Existe uma órbita limitada.

(iv) O número de órbitas de dimensão um é finito.

então L não é globalmente hipoelítico.

COROLÁRIO 5.1. *Se L é um campo analítico real com mais de uma órbita, L deixa de ser globalmente hipoelítico.*

Demonstração. Se L estiver no caso bom, a demonstração termina. Suponha então que L é essencialmente transitivo. Vimos que as componentes conexas por caminhos de Λ são as órbitas de dimensão um, e que nenhuma delas é um conjunto fechado. Vamos supor que Λ seja localmente conexa por caminhos. Então as componentes conexas de Λ coincidem com as componentes conexas por caminhos, e como as primeiras são fechadas, chegaríamos à conclusão de que todas as órbitas em Γ são fechadas, uma contradição. Mas de fato Λ é localmente conexa por caminhos: pois é o conjunto dos zeros da função analítica real $\Re L \wedge \Im L$, e este tipo de conjunto é localmente homeomorfo a um vértice do qual sai um número par de arestas (SCHWARTZMAN, 1994). □

5.2.2 Um exemplo: o Campo do Adalberto

Este campo foi apresentado pelo professor Adalberto Bergamasco, que trouxe uma ilustração de uma órbita unidimensional no plano que se enrola sobre si mesma de tal forma que a seção transversal gera o conjunto de Cantor, e outras mostrando como se contruiria um campo vetorial complexo que tivesse uma órbita como aquela.

Vamos construir de forma detalhada um campo essencialmente transitivo baseado naquele modelo.

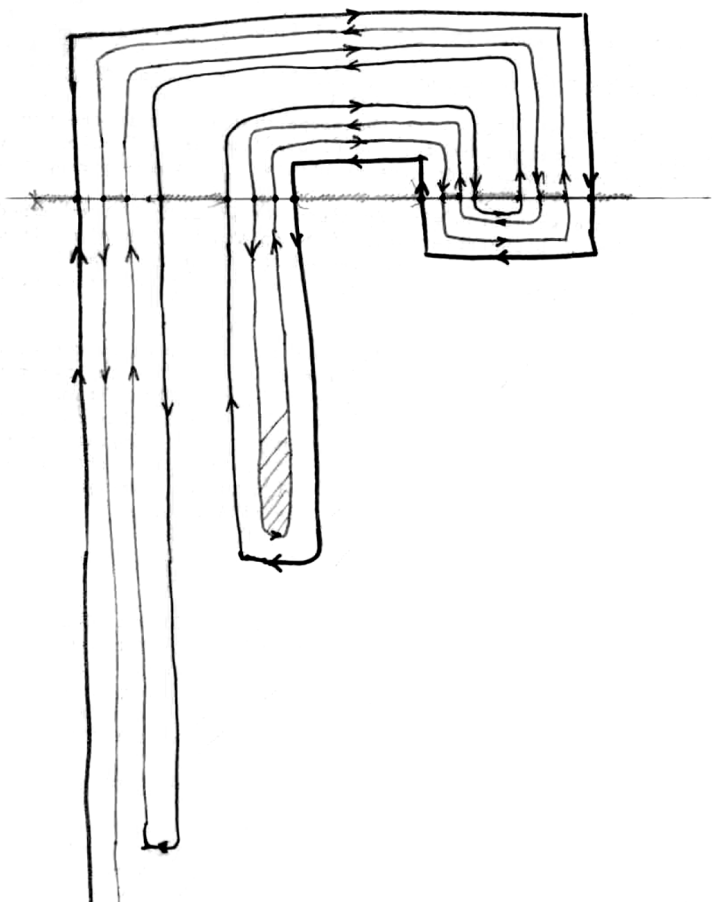
O conjunto de Cantor C

Sejam $r(x) = 1 - x$ e $s(x) = x/3$ funções na reta real. Mnemônico: r de *reflect* e s de *shrink*. Seja C o menor conjunto *fechado* contendo a origem tal que $r(C) \subset C$ e $s(C) \subset C$.

PROPOSIÇÃO 5.13. *C é o menor fechado contendo a origem tal que $s(C) \subset C$ e $rsr(C) \subset C$.*

Demonstração. Seja $\tilde{C}$ o menor fechado contendo 0 satisfazendo $s(\tilde{C}) \subset \tilde{C}$ e $rsr(\tilde{C}) \subset \tilde{C}$. Em particular, $\tilde{C} \subset C$.

Figura 1 – Uma órbita que se enrola sobre si mesma



Autoria: Adalberto Bergamasco, usado com permissão

Por outro lado, afirmo que $r(\tilde{C}) \subset \tilde{C}$. Em primeiro lugar, $s(r(\tilde{C})) = rrsr(\tilde{C}) \subset r(\tilde{C})$ e também $rsr(r(\tilde{C})) = rs(\tilde{C}) \subset r(\tilde{C})$. Por isso (e porque $r(\tilde{C})$ é fechado) $\tilde{C} \subset r(\tilde{C})$. Aplicando r a isto, $r(\tilde{C}) \subset rr(\tilde{C}) = \tilde{C}$ e portanto (usando a definição de C) $C \subset \tilde{C}$. □

PROPOSIÇÃO 5.14. *C é o fecho do menor* conjunto *B contendo a origem tal que $r(B) \subset B$ e $rsr(B) \subset B$.*

Demonstração. É claro que $B \subset C$, e portanto (pois C é fechado) $\overline{B} \subset C$. Porém, como r e rsr são homeomorfismos, $s(\overline{B}) = \overline{s(B)} \subset \overline{B}$ e analogamente $rsr(\overline{B}) \subset \overline{B}$. $C \subset \overline{B}$ e temos a igualdade. □

Vejamos agora que C corresponde à construção usual do conjunto de Cantor.

PROPOSIÇÃO 5.15. *Sejam $F_0 = [0,1]$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = s(F_n) \cup rsr(F_n)$. Seja também F_∞ a intersecção de todos os F_n. Então $C = F_\infty$.*

Demonstração. Dado $p \in F_\infty$, $p \in F_n$ para n arbitrariamente grande. Cada F_n é uma união disjunta de intervalos fechados, cada um com comprimento 3^{-n}. Tomando em sequência os intervalos que contêm p, o ponto esquerdo de cada um desses intervalos é da forma $w(0)$, onde w é uma composição das aplicações s e rsr. Tais pontos convergem para p e estão contidos em C. Como p é arbitrário, conclui-se que $F_\infty \subset C$.

Por outro lado, dado $p \in C$, p pode ser aproximado por uma sequência de elementos do tipo $w(0)$, onde w é uma composição finita de elementos s e rsr. Como cada um destes pertence a F_∞, $p \in F_\infty$ e assim $C \subset F_\infty$. □

Nomeação dos pontos e cópias menores de C

Sejam $C_A = s(C)$ e $C_B = rsr(C) = rs(C) = r(C_A)$.

PROPOSIÇÃO 5.16. $C = C_A \cup C_B$.

Demonstração. De fato, por construção $C_A \cup C_B \subset C$. Por outro lado, $C_A \cup C_B$ é fechado, $r(C_A \cup C_B) = r(C_A) \cup r(C_B) = C_B \cup C_A$ e também $s(C_A \cup C_B) \subset s(C) \subset C_A \cup C_B$. Da definição de C, temos $C \subset C_A \cup C_B$. □

Chame $\pi_A = s$ e $\pi_B = rsr$. Estes são homeomorfismos positivos (preservam orientação) que levam C em C_A e C em C_B, respectivamente.

Para cada palavra $w = l_1 l_2 \cdots l_n$ onde cada $l_j \in \{A, B\}$, sejam

$$\pi_w = \pi_{l_1} \circ \pi_{l_2} \circ \cdots \circ \pi_{l_n} \quad \text{e} \quad C_w = \pi_w(C).$$

Por exemplo, $C_{BA} = \pi_B \circ \pi_A(C) = rsrs(C)$, que é a cópia de C cujos pontos extremos são $6/9$ e $7/9$, e $\pi_{BA} = \pi_B \circ \pi_A = rsrs$ é a única aplicação afim na reta que leva 0 em $6/9$ e 1 em $7/9$.

Como cada π_w é injetiva, é fácil ver que, por exemplo, $C_A = C_{AA} \cup C_{AB}$ e assim por diante.

PROPOSIÇÃO 5.17. *Seja w uma sequência infinita de letras A, B e $l \in \{A, B\}$. Então $C_{wl} \subset C_w$.*

Demonstração. $C_{wl} = \pi_w(C_l) \subset \pi_w(C)$. □

C_w é um conjunto de diâmetro 3^{-n}, onde n é o número de letras da palavra w. Dada w uma sequência *infinita* formada pelas letras A e B, seja para cada $n \in \mathbb{N}$, w_n a lista formada das n primeiras letras de w e então definamos

$$C_w = \cap_{n \in \mathbb{N}} C_{w_n}.$$

Por se tratar do limite de uma sequência decrescente de compactos não-vazios, C_w é não-vazio. Além disso o diâmetro de C_w é zero, logo C_w possui somente um ponto. Chame este ponto de 0_w.

PROPOSIÇÃO 5.18. *A aplicação $w \in \{A, B\}^{\mathbb{N}} \mapsto 0_w \in C$ é injetiva e sobrejetiva.*

Demonstração. Sejam w e w' sequências não-iguais de letras A, B. Se elas são diferentes na primeira letra, então 0_w e $0'_w$ estão contidos em C_A e C_B (respectivamente) ou em C_B e C_A, de forma que são diferentes. Se w e w' são diferentes na segunda letra, então aplicando p_l^{-1} (onde l é a primeira letra) em 0_w e $0_{w'}$ chegamos em pontos diferentes na primeira letra, e portanto diferentes. Continuando desta forma, vemos que sequências w diferentes levam a pontos 0_w diferentes.

Por outro lado, dado $p \in C$, tome $l_1 = A$ se $p \in C_A$ ou B se $p \in C_B$, $l_2 = A$ se $\pi_{l_1}^{-1} \in C_A$ ou B se $\pi_{l_1}^{-1} \in C_B$ e assim por diante para formar uma sequência $w = l_1 l_2 l_3 \cdots$. O ponto 0_w é tal que $p - 0_w < 3^{-n}$ para todo n, portanto $p = 0_w$. □

Por abuso de notação, identificaremos sequências $w \in \{A, B\}^{\mathbb{N}}$ com os pontos 0_w.

Exemplo: $1/4 = ABABAB\cdots \in C$. De fato: $\pi_{AB} = srsr$ e

$$sr(x) = \frac{1}{3}(1-x) \quad \therefore \quad \pi_{AB}(x) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}(1-x)\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(1-x)\right) = \frac{2+x}{9}.$$

Como $0_{ABABAB\cdots} = \pi_{AB}(0_{ABABAB\cdots})$, concluímos que tal valor é ponto fixo de $x \mapsto (2+x)/9$, portanto é $1/4$.

PROPOSIÇÃO 5.19. *$s(l_1 l_2 \cdots) = A l_1 l_2 \cdots$ e $r(l_1 l_2 \cdots) = l'_1 l'_2 \cdots$, onde $l'_j = B$ se $l_j = A$ e vice-versa.*

Demonstração. Para a aplicação s, isto é trivial. Para r, note que $r \circ \pi_A = rs = rsrr = \pi_B \circ r$, e também $r \circ \pi_B = rrsr = sr = \pi_A \circ r$. Sejam $w = l_1 l_2 \cdots$ uma sequência de letras A, B e $w' = l'_1 l'_2 \cdots$ a mesma sequência, mas com as letras A e B trocadas.

$$\begin{aligned} r(C_{l_1 l_2 \cdots l_n}) &= r\big(\pi_{l_1} \circ \cdots \circ \pi_{l_n}(C)\big) = (r \circ \pi_{l_1}) \circ \cdots \circ \pi_{l_n}(C) \\ &= (\pi_{l'_1} \circ r) \circ \pi_{l_2} \circ \cdots \circ \pi_{l_n}(C) = \cdots = \pi_{l'_1} \circ \pi_{l'_2} \circ \cdots \circ (\pi_{l'_n} \circ r)(C) \\ &= \pi_{l'_1} \circ \pi_{l'_2} \circ \cdots \circ \pi_{l'_n}(C) = C_{l'_1 \cdots l'_n} \end{aligned}$$

O ponto $l_1 l_2 \cdots$ pertence a todos os $C_{l_1 l_2 \cdots l_n}$, logo $r(l_1 l_2 \cdots)$ pertence a todos os $C_{l'_1 l'_2 \cdots l'_n}$. Isto é, $r(0_w) = 0_{w'}$, que é o que queremos demonstrar. □

Um par de involuções que gera C

PROPOSIÇÃO 5.20. *$C = \{0\} \cup C_B \cup C_{AB} \cup C_{AAB} \cup \cdots$. A união é disjunta.*

Demonstração. De fato, dado $w \in C$, se $w \neq 0$ então $w \neq AAAAA\cdots$ e existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que o segmento inicial w_n é uma sequência de n letras A seguidas de uma letra B. A união é disjunta: se $n < m$ e $p \in C_{A^n B}$ então $\pi_{A^n}^{-1}(p) \in C_B$, enquanto $\pi_{A^n}^{-1}(C_{A^m B}) \subset C_A$. □

Sejam

$$u(p) = \begin{cases} 0, & p = 0 \\ r_B(p), & p \in C_B \\ r_{AB}(p), & p \in C_{AB} \\ r_{AAB}(p), & p \in C_{AAB} \\ \vdots & \end{cases}, \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi_w"'] & C \arrow[d, "\pi_w"'] \\ C_w \arrow[r, "r_w"] & C_w \end{tikzcd}$$

onde $u : C \to C$ e, para cada $w \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\{A,B\}^n$, $r_w : C_w \to C_w$ é a aplicação tal que o diagrama acima comuta. Por construção, $uu = \mathrm{I}_C$. Considerando a identificação de C com $\{A,B\}^{\mathbb{N}}$, u é a aplicação que inverte todas as letras após o primeiro B.

u é contínua em $C\backslash\{0\}$: de fato, pois é contínua nas partes $C_B, C_{AB}, \ldots$ e estas são uma cobertura aberta de $C\backslash\{0\}$. u também é contínua na origem, pois pontos próximos da origem são levados a pontos próximos da origem.

Proposição 5.21. *Seja $S \subset C$ o menor fechado de C contendo $\{0\}$ tal que $r(S) \subset S$ e $u(S) \subset S$. Com estas hipóteses, $S = C$.*

Demonstração. Tome S' o menor conjunto contendo 0 tal que $r(S') \subset S'$ e $u(S') \subset S'$. Se tomarmos $p \in S'$ arbitrário, $p = 0$ ou então $p = (ur)^n(0)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Afirmo que $\overline{S'} = S$: de fato, pois $r(\overline{S'}) \subset \overline{S'}$ e $u(\overline{S'}) \subset \overline{S}'$ (da continuidade). Pela definição de S, $S \subset \overline{S'}$. Mas pela definição de S', $S' \subset S$ e então $\overline{S'} \subset S$.

Afirmação: $\overline{S'} = C$. Basta mostrar que S' contém algum elemento da cópia menor C_{w_0} onde $w_0 \in \{A,B\}^n$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Equivalentemente, queremos mostrar que S' contém algum elemento $w \in \{A,B\}^{\mathbb{N}}$ que começa com a palavra arbitrária de n letras w_0. Considere a sequência $a_n = (ur)^n(0)$ (onde a potência indica composição n vezes) contida em S' :

$$\begin{aligned} a_0 &= AAAAA\cdots \\ a_1 = u(BBBBB\cdots) &= BAAAA\cdots \\ a_2 = u(ABBBB\cdots) &= ABAAA\cdots \\ a_3 = u(BABBB\cdots) &= BBAAA\cdots \\ a_4 = u(AABBB\cdots) &= AABAAA\cdots \\ a_5 = u(BBABBB\cdots) &= BABAAA\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se substituirmos A por zero, B por um e invertermos a ordem das letras, fica aparente que esta sequência é a contagem no sistema binário, isto é $a_0 = \cdots 00000$, $a_1 = \cdots 00001$, $a_2 = \cdots 00010$ e assim por diante. Isto é suficiente para mostrar a densidade. □

Construção de um campo com órbitas do tipo curva em U

Seja $\varepsilon > 0$ (a ser escolhido depois) e definamos

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > \varepsilon; \\ -x, & x < -\varepsilon; \\ \mathscr{C}^\infty, \text{par, positiva e estritamente convexa}, & |x| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Com base nesta f montamos um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$

$$R_0 = \frac{\partial}{\partial x} + f'(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

cujas órbitas são todas cópias paralelas do gráfico $y = f(x)$, transladadas na direção do eixo y.

Seja R_1 o campo obtido após rotacionar R_0 em 45 graus no sentido anti-horário e cortar os fatores $\sqrt{2}$ (o que pode ser feito mexendo no ε e multiplicando o campo por constante positiva).

$$R_1 = \begin{cases} \cancel{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}, & \cancel{\sqrt{2}}(x+y) < -\varepsilon; \\ \cancel{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}, & \cancel{\sqrt{2}}(x+y) > \varepsilon; \\ \mathscr{C}^\infty, & \text{em } \cancel{\sqrt{2}}|x+y| \leq \varepsilon; \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}, & (x+y) < -\varepsilon; \\ \frac{\partial}{\partial y}, & (x+y) > \varepsilon; \\ \mathscr{C}^\infty, & \text{em } |x+y| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

As curvas integrais de R_1 são como a letra L espelhada ("⌋") e suavizada, escrita da esquerda para a direita e de baixo para cima.

Por exemplo, supondo $\varepsilon < 1$, a órbita do ponto $(-1,0)$ contém a semireta $(-\infty,\varepsilon) \times \{0\}$, a semireta $\{0\} \times (\varepsilon,\infty)$ e uma curva que conecta as duas de maneira suave. Todas as outras órbitas são cópias paralelas desta, transladadas na direção da reta diagonal $x + y = 0$.

Seja $-R_2$ a reflexão de R_1 em torno do eixo y, de forma que as curvas integrais de R_2 sejam do tipo da letra "L", percorridas de cima para baixo e da esquerda para a direita.

Para formar um campo "curva em U", colamos R_1 com R_2 da seguinte forma: seja $F = \{(x,y) \big| |x+y| \leq \varepsilon\} \cup [-\varepsilon,\varepsilon] \times [0,\infty)$ e, para cada $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash F$, defina

$$R_3|_p = \begin{cases} R_1|_p, x > 0; \\ R_2|_p, x < 0 \end{cases}$$

e note que a colagem funciona de maneira $\mathscr{C}^\infty$. Todas as curvas integrais de R_3 partindo de algum ponto $(x_0,0)$ com $|x_0| > \varepsilon$ o ligam com $(-x_0,0)$, passando pelo semiplano inferior, e são linhas verticais no semiplano superior. Porém R_3 não é definido no plano inteiro (pois foi retirado um conjunto F com forma de lápis apontado) e além disso existem órbitas de R_3 (próximas da "ponta" do lápis) que colidem com F.

R_3 é um campo real e não-singular, mas não é definido em todo o plano. Queremos um campo complexo não-singular definido em todo o plano. Tomando inspiração em R_3, seja

$$R_4 = \phi(x+\varepsilon)R_1 + i\phi(\varepsilon - x)R_2,$$

onde $\phi(x)$ é $\mathscr{C}^\infty$, não-negativa e se anula precisamente quando $x \leq 0$.

Ao tomarmos $p = (x_0, 0)$ com $|x_0| \geq 2\varepsilon$, a órbita de p por R_4 coincide com a do campo R_3. Por outro lado, se $|x_0| < 2\varepsilon$, a órbita de $(x_0, 0)$ é de dimensão dois e na verdade esta órbita é única e contém toda a parte de dentro do "U" formado pela órbita de $(2\varepsilon, 0)$.

No semiplano $y > 2\varepsilon$, é verdade que R_4 é da forma $\lambda(x)\partial_y$, onde o escalar complexo $\lambda(x)$ nunca se anula. Seja $R_5 = \frac{1}{\lambda(x)} R_4$. R_5 é exatamente ∂_y quando $y > 2\varepsilon$. Seja $x < -\varepsilon$. Se tomarmos $y > 2\varepsilon$, $R_4 = -\frac{\partial}{\partial y}$ e portanto $\lambda(x) = -1$. Por outro lado, se pegarmos um $x > \varepsilon$, $\lambda(x) = i$ e é fácil ver que R_5 é um campo real em $|x| > \varepsilon$, coincidindo nesta faixa com $\operatorname{sgn}(x) R_3$.

Finalmente, seja $R_U = \phi(|x| - 6\varepsilon)\frac{\partial}{\partial y} + i\phi(7\varepsilon - |x|)R_5$. R_U é suave e coincide com $\frac{\partial}{\partial y}$ exceto no retângulo infinito $[-7\varepsilon, 7\varepsilon] \times (-\infty, 2\varepsilon]$. As R_U-órbitas de pontos $(x_0, 0)$ com $|x_0| \leq 6\varepsilon$ coincidem com as de R_5. Há uma órbita de dimensão dois nova, compreendendo a região abaixo da órbita de $(6\varepsilon, 0)$ e as faixas $6\varepsilon < |x| < 7\varepsilon$. Todas as outras órbitas são retas verticais com $|x| \geq 7\varepsilon$.

Construção do campo

Tome o campo R_U construído anteriormente e fixe $\varepsilon = 1/12$. Seja L_0 o campo, definido em cada $p = (x, y)$, por:

$$L_0|_p = -R_U|_{(x-1/2, 1/6-y)}.$$

Tal campo faz uma curva em forma de "$\cap$", de forma que o primeiro retorno do ponto $(x_0, 0)$ com $x_0 \in [0, 1/3]$, ao sairmos na direção "cima", é o ponto $(1 - x_0, 0)$. No semiplano inferior $y < 0$, L_0 coincide com $\frac{\partial}{\partial y}$.

Agora vamos colar novas cópias de R_U, no quarto quadrante, de forma que o primeiro retorno ao eixo x, saindo por baixo de um ponto $(x_0, 0)$ com $x_0 \in C$, seja $(u(x_0), 0)$. Aqui u é a função de C em C definida na seção 5.2.2.

Ainda com $p = (x, y)$, seja

$$L_1|_p = L_0 + \Big[\underbrace{R_U|_{(3x-5/2, y-1/6)}}_{\doteq R_B} - \frac{\partial}{\partial y}\Big].$$

O campo R_B é uma cópia do R_U encolhida e posicionada de forma que dos pontos $(x_0, 0)$ com $x_0 \in C_B$, ao se partir para baixo, o primeiro retorno ao eixo x por R_B é $(r_B(x_0), 0)$, e com $R_B = \frac{\partial}{\partial y}$ nos pontos em $y \geq 0$.

L_1 ainda coincide com $\frac{\partial}{\partial y}$ quando $y < 0$ e $x < 1/3 - 1/36$ ou $x > 1 + 1/36$. Definamos recursivamente $L_{n+1} = L_n + [R_{A^n B} - \frac{\partial}{\partial y}]$, onde $R_{A^0 B} = R_B$ e, para $n = m + 1$,

$$R_{A^n B}|_{(x,y)} = R_{A^m B}|_{(3x, y+1)}.$$

O suporte de cada parcela $[R_{A^n B} - \frac{\partial}{\partial y}]$ é o retângulo infinito

$$3^{-n}[2/3 - 1/36, 1 + 1/36] \times (-\infty, -n],$$

de forma que a soma infinita

$$L_\infty = L_0 + \left[R_B - \frac{\partial}{\partial y}\right] + \left[R_{AB} - \frac{\partial}{\partial y}\right] + \left[R_{AAB} - \frac{\partial}{\partial y}\right] + \cdots$$

é na verdade localmente finita, e portanto define um campo vetorial suave.

O campo L_∞ ainda não é o desejado por conter órbitas que são retas verticais quando $x \le -1/12$ ou $x \ge 13/12$. É fácil consertar isto:

$$L = i\theta(x)\frac{\partial}{\partial x} + L_\infty,$$

onde $\theta(x)$ é alguma função real, $\mathscr{C}^\infty$ e suportada em $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Esta última mudança não afeta a órbita do $(0,0)$, mas garante que toda a área à esquerda e à direita desta órbita seja uma só órbita de dimensão dois, e também as regiões acima e abaixo.

5.2.3 Uma condição suficiente para que um campo essencialmente transitivo não seja globalmente hipoelítico

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ seja uma L-órbita bidimensional cujo complementar Λ seja não vazio e tenha medida nula. Já vimos que nestas condições Ω é simplesmente conexo. Note que $\partial\Omega = \Lambda$. Vamos admitir que L restrito a Ω seja elítico e que exista uma integral primeira de $L_{|\Omega}$, $Z : \Omega \to \mathbb{C}$, que seja um biholomorfismo entre Ω e o disco unitário, D. Vamos mostrar que L não pode ser globalmente hipoelítico.

Estenda Z a uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ colocando $u = 0$ em Λ. Mostremos que $Lu = 0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$. É suficiente mostrar esta igualdade em alguma vizinhança de cada ponto de Λ.

Dado $p_0 \in \Lambda$ é possível encontrar uma mudança de coordenadas de forma que L nestas novas coordenadas se escreva como

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \quad (x,t) \in U \doteq (-a,a) \times (-T,T), p_0 = (0,0).$$

Seja F o subconjunto dos pontos em U onde b se anula. Como L é elítico em Ω, F é da forma $F_0 \times (-T,T)$ com $F_0 \subset (-a,a)$ fechado e de medida nula. Sejam (a_n, b_n), $n \in \mathbb{N}$ as componentes conexas de $(-a,a) \setminus F_0$.

Seja $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(U)$. Temos

$$\langle Lu, \varphi\rangle = -\iint_{U\setminus F} Z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + ib\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial b}{\partial x}\varphi\right) dxdt$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T}^{T}\int_{a_n}^{b_n} Z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + ib\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial b}{\partial x}\varphi\right) dxdt. \tag{5.1}$$

Vamos mostrar que

$$\int_{-T}^{T}\int_{a_n}^{b_n} Z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + ib\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial b}{\partial x}\varphi\right) dxdt = 0, \qquad n \ge 1.$$

Seja $[r,s] \subset (a_n, b_n)$.

Como $\varphi(x, \pm T) = 0$ para todo $x \in (-a,a)$, invertendo a ordem da integração e integrando por partes, obtemos

$$\int_{-T}^{T}\int_{r}^{s} Z\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dxdt = -\int_{-T}^{T}\int_{r}^{s} \frac{\partial Z}{\partial t}\varphi\, dxdt. \tag{5.2}$$

Temos

$$\int_{-T}^{T}\int_{r}^{s} bZ\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dxdt = \int_{-T}^{T}\left[b(s,t)Z(s,t)\varphi(s,t) - b(r,t)Z(r,t)\varphi(r,t)\right]dt-$$

$$-\int_{-T}^{T}\int_{r}^{s}\left[\frac{\partial b}{\partial x}Z\varphi + b\frac{\partial Z}{\partial x}\varphi\right]dxdt. \tag{5.3}$$

Combinando (5.2) e (5.3) obtemos

$$-\int_{-T}^{T}\int_{r}^{s} Z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + ib\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial b}{\partial x}\varphi\right)dxdt =$$

$$= -i\int_{-T}^{T}\left[b(s,t)Z(s,t)\varphi(s,t) - b(r,t)Z(r,t)\varphi(r,t)\right]dt+$$

$$+\int_{-T}^{T}\int_{r}^{s}\left[\frac{\partial Z}{\partial t}\varphi + i\frac{\partial b}{\partial x}Z\varphi + ib\frac{\partial Z}{\partial x}\varphi - i\frac{\partial b}{\partial x}Z\varphi\right]dxdt$$

$$= -i\int_{-T}^{T}\left[b(s,t)Z(s,t)\varphi(s,t) - b(r,t)Z(r,t)\varphi(r,t)\right]dt + \int_{-T}^{T}\int_{r}^{s}(LZ)\varphi\,dxdt$$

$$= -i\int_{-T}^{T}\left[b(s,t)Z(s,t)\varphi(s,t) - b(r,t)Z(r,t)\varphi(r,t)\right]dt$$

pois $LZ = 0$ em Ω.

Como $b(a_n,t) = b(b_n,t) = 0$ e Z é limitada, podemos utilizar o teorema da convergência dominada para ver que

$$\lim_{(r,s)\to(a_n,b_n)}\int_{-T}^{T}\left[b(s,t)Z(s,t)\varphi(s,t) - b(r,t)Z(r,t)\varphi(r,t)\right]dt = 0.$$

Segue do mesmo teorema que

$$\int_{-T}^{T}\int_{a_n}^{b_n} Z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + ib\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial b}{\partial x}\varphi\right)dxdt =$$

$$= \lim_{(r,s)\to(a_n,b_n)}\int_{-T}^{T}\int_{r}^{s} Z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + ib\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial b}{\partial x}\varphi\right)dxdt =$$

$$= \lim_{(r,s)\to(a_n,b_n)}\int_{-T}^{T}\left[b(s,t)Z(s,t)\varphi(s,t) - b(r,t)Z(r,t)\varphi(r,t)\right]dt = 0,$$

como queríamos.

Se L fosse globalmente hipoelítico, teríamos $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, isto é, seria possível redefinir u em Λ de modo a resultar numa função suave. Os pontos de Λ são levados por u no círculo unitário. De fato, claramente a imagem de u está contida em $\overline{D}$. Suponha que para algum $p_1 \in \Lambda$ tivéssemos $u(p_1) \in D$. Tome $p_2 \in \Omega$ tal que $\zeta \doteq Z(p_2) = u(p_1)$. Sejam $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ e $D_2 \subset \Omega$ discos abertos e disjuntos centrados em p_1 e p_2, respectivamente. Por Z ser um biholomorfismo, $Z(D_2)$ é uma vizinhança de ζ. Tome agora uma vizinhança U_1 de p_1 contida em D_1 de modo que $u(U_1) \subset Z(D_2)$. Como $\Lambda = \partial\Omega$ existe $p_3 \in \Omega \cap U_1$. Temos $u(p_3) = Z(p_3) \in Z(D_2)$ e, pela injetividade de Z, devemos ter $p_3 \in D_2$. Um absurdo, pois $U_1 \cap D_2 \subset D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

Multiplicando u por um fator da forma $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ podemos assumir que $u(p) = -1$ para algum $p \in \Lambda$. Em termos do ramo principal da raiz quadrada podemos definir $Z_0(x,t) = (1 + u(x,t))^{3/2}$, que é uma função de classe $\mathscr{C}^1$ mas não de classe $\mathscr{C}^2$ que satisfaz $LZ_0 = 0$. Uma contradição.

OBSERVAÇÃO 5.1. *Foi demonstrado no apêndice do artigo (BERGAMASCO et al., 1988) que se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto simplesmente conexo e L é hipoelítico em Ω então existe $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ injetora satisfazendo $LZ = 0$ e $dZ \neq 0$. Veja também, para mais detalhes, a dissertação de mestrado Campana (2013).*

5.2.4 Conjectura sobre os casos essencialmente transitivos

No plano, órbitas de dimensão dois são sempre mergulhadas, mas uma órbita de dimensão um pode não ser mergulhada. Além disso, se houver um segmento transversal que intercepta uma órbita de dimensão um somente em um ponto, então esta órbita é mergulhada (BERHANU et al., 2008, Prop. III.1.1, p. 108)

Seja X um conjunto qualquer na reta real, e diremos que um ponto $x_0 \in X$ é isolado pela esquerda se existir $\epsilon > 0$ tal que $X \cap (x_0 - \epsilon, x_0] = \{x_0\}$. Pontos isolados pela direita são definidos analogamente. Um ponto isolado pela esquerda ou pela direita será chamado de semi-isolado, e se uma L-órbita de dimensão um tiver um ponto semi-isolado em seu corte transversal diremos que ela é semimergulhada.

Conjecturamos que todo campo não-transitivo mas essencialmente transitivo em $\mathbb{R}^2$ possui alguma órbita de dimensão um semimergulhada, e que em torno desta órbita existe espaço o suficiente para fabricar uma u singular com $Lu \in \mathscr{C}^\infty$.

6 Campos complexos, caso transitivo

Antes de começar a estudar a hipoeliticidade global nos casos em que o campo L só tem uma L-órbita, vamos introduzir uma noção de órbita mais fina que as L-órbitas, mas que só faz sentido nos pontos em que L deixa de ser elítico.

6.1 A relação R

Seja L um campo vetorial complexo, não singular e $\mathscr{C}^\infty$ em $\mathbb{R}^2$. Chamaremos de $\mathbb{R}^2_0$ o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais $\Re L$ e $\Im L$ são linearmente independentes, e $\mathbb{R}^2_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2_0$ a região do plano na qual L deixa de ser elítico. Em $\mathbb{R}^2_1$ seja R a seguinte relação, conforme definida no artigo de Hounie (1982, Definição 2.1, p. 348):

Definição 6.1. *Dados dois pontos p_1, p_2 dizemos que $p_1 R p_2$ se e somente se existe uma curva suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ com $\gamma(a) = p_1$, $\gamma(b) = p_2$ e cujo vetor tangente $\gamma'(s)$ seja, em cada $s \in [a,b]$, paralelo a ambos $\Re L, \Im L$.*

Observação 6.1. *Por paralelismo entre dois vetores, entendemos que eles são linearmente dependentes.*

Observação 6.2. *Por "curva suave" $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, entendemos que existe $\delta > 0$ tal que γ pode ser estendida a uma $\gamma_e : (a-\delta, b+\delta) \to \mathbb{R}^2$ que é uma aplicação $\mathscr{C}^\infty$. A derivada $\gamma'(s)$ é definida como $\gamma'_e(s)$ para todo $s \in [a,b]$, valor que não depende da escolha da γ_e.*

Observação 6.3. *Tome $L = \partial_t - i\,b(t)\partial_x$, com $b \geq 0$ não-identicamente-nula. Tal campo é transitivo e satisfaz $(\mathscr{P})$. Dados $p_0 = (x_0, t_0)$ e $p_1 = (x_1, t_1)$, $p_0 R\, p_1 \iff x_0 = x_1$ e b é nula no intervalo que une os pontos t_0 e t_1.*

Isto é uma relação de equivalência: a simetria é trivial pois basta tomar o caminho γ invertido. Para mostrar que R é transitiva precisamos concatenar dois caminhos γ_1, γ_2 de maneira $\mathscr{C}^\infty$. Uma maneira de fazer isto é reparametrizando os dois de forma a chegar no ponto de colagem com todas as derivadas nulas, ou seja, nosso caminho concatenado pode fazer uma parada ao mudar do trajeto de γ_1 para o de γ_2.

6.1.1 Formas equivalentes da definição

A definição da relação R sugere algumas perguntas: e se tomássemos a curva γ como uma curva integral por partes contida em $\mathbb{R}^2_1$? Ou se exigíssimos que γ fosse regular e injetiva? Na verdade, veremos em seguida que a relação R seria a mesma.

PROPOSIÇÃO 6.1. *Se $p_1 R p_2$, então p_1 e p_2 podem se unir por uma curva integral por partes de L contida em $\mathbb{R}^2_1$. Tal curva integral por partes pode ser escolhida de forma que a sua imagem esteja contida na imagem de $\gamma([a,b])$, para qualquer γ que seja conforme a definição 6.1.*

Demonstração. Para começar, tome $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ unindo p_1 e p_2 com as propriedades da definição 6.1. Como L é não-singular, sobre cada ponto de $\gamma([a,b])$ algum dentre os campos $\Re L, \Im L$ é não-nulo. Escolha, para cada $s \in [a,b]$ um intervalo aberto (relativo) $I_s \subset [a,b]$ tal que algum dos campos $\Re L, \Im L$ seja não-nulo sobre $\gamma(I_t)$. Use a compacidade de $[a,b]$ para tomar uma subcobertura finita, e a partir desta uma partição $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ tal que, sobre a imagem de cada subintervalo $[s_i, s_{i+1}]$ por γ, algum dos campos $\Re L$ ou $\Im L$ seja inteiramente não-nulo.

Considere a restrição de γ ao subintervalo $[s_0, s_1]$. Afirmo que s_0 e s_1 estão em um mesmo segmento de curva integral de $\Re L$ ou $\Im L$. Suponha que estamos no caso em que $\Re L$ é não-nulo em todo $\gamma([s_0, s_1])$ e seja $\alpha : (l, r) \to \mathbb{R}^2$ uma curva integral maximal de $\Re L$ com $-\infty \le l < 0 < r \le \infty$, $\alpha(0) = \gamma(s_0)$. Afirmo, e desejo mostrar, que $\gamma([s_0, s_1]) \subset \alpha((l, r))$. A derivada γ' é da forma

$$\gamma'(s) = \lambda(s)(\Re L)|_{\gamma(s)}$$

onde λ é $\mathscr{C}^\infty$, por ser localmente um quociente de coordenadas $\mathscr{C}^\infty$ com denominador não-nulo. Por outro lado a derivada de α é

$$\alpha'(\sigma) = (\Re L)|_{\alpha(\sigma)}$$

Seja $\Lambda : [s_0, s_1] \to \mathbb{R}$ a primitiva $\Lambda(s) = \int_{s_0}^{s} \lambda(\bar{s})\, d\bar{s}$. Isto não é necessariamente uma função injetiva. A curva $\alpha \circ \Lambda$, definida de $\Lambda^{-1}((l, r))$ em $\mathbb{R}^2$, tem derivada

$$(\alpha \circ \Lambda)'(s) = \lambda(s)\alpha'(\Lambda(s)) = \lambda(s)(\Re L)|_{\alpha\circ\Lambda(s)}$$

e pelo teorema de existência e unicidade para problemas de Cauchy, $\alpha \circ \Lambda(s)$ coincide com $\gamma(s)$ para $s \in \Lambda^{-1}((l, r))$.

Resta mostrar que $[s_0, s_1] \subset \Lambda^{-1}((l, r))$. Em outras palavras, que $\Lambda([s_0, s_1]) \subset (l, r)$, e aqui note que $\Lambda([s_0, s_1]) = [\sigma_a, \sigma_b]$ é um intervalo compacto contendo a origem. Sabemos, das propriedades de soluções maximais de E.D.O., que se l for finito então $\alpha(\sigma)$ escapa para sempre de qualquer compacto quando $\sigma \to l$, e analogamente se r for finito. Vamos supor que $[\sigma_a, \sigma_b] \not\subset (l, r)$, então $l \in [\sigma_a, \sigma_b]$ ou $r \in [\sigma_a, \sigma_b]$. Suponha que é o l (o outro caso sendo análogo) e tome uma sequência $\sigma_n \to l$ contida em $[\sigma_a, \sigma_b] \cap (l, r)$. Por estar na imagem de Λ, podemos tomar então sequência s_n tal que $\Lambda(s_n) = \sigma_n$ e assim $\gamma(s_n) = \alpha(\Lambda(s_n)) = \alpha(\sigma_n)$ é uma sequência ilimitada em $\mathbb{R}^2$. Mas a imagem de γ é um compacto, absurdo.

Assim $a = \gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ se unem por um pedaço de curva integral de L, contido na imagem de γ, e podemos seguir, repetindo o argumento, até chegar em $\gamma(s_n) = b$. □

PROPOSIÇÃO 6.2. *Sejam $p_1 \neq p_2$ pontos de $\mathbb{R}^2_1$ tais que $p_1 R p_2$ e seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva unindo p_1 com p_2, segundo a definição 6.1. Então a imagem de γ, com a topologia herdada*

de $\mathbb{R}^2$, é uma subvariedade mergulhada (potencialmente com bordo) cujo espaço tangente é sempre paralelo aos campos $\Re L$ e $\Im L$.

Demonstração. Queremos mostrar que, para cada $p \in \gamma([a,b])$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ dotado de uma aplicação $\Psi : U \to V$, onde $V = (-\epsilon,\epsilon) \times (-\epsilon,\epsilon)$, $\epsilon > 0$ tendo as seguintes propriedades:

(i) Ψ é um difeomorfismo $\mathscr{C}^\infty$ sobre V;

(ii) $\Psi(\gamma([a,b]) \cap U) = \{0\} \times (-\epsilon,\epsilon)$ ou $\Psi(\gamma([a,b]) \cap U) = \{0\} \times (-\epsilon,0]$.

Fixe um $s \in [a,b]$ arbitrário. Seja $X \in \{\Re L, \Im L\}$ tal que X seja não-nulo em $\gamma(s)$. Tome uma $\Psi : U \to V$, com U, V abertos em $\mathbb{R}^2$ tais que $\gamma(s) \in U$ e $V = (-3\epsilon, 3\epsilon)^2$ e que, em relação às coordenadas locais

$$(\xi,\tau) = \Psi(x,t),$$

valha $X = \frac{\partial}{\partial \tau}$. Podemos ainda tomar Ψ de forma que $\Psi(\gamma(s)) = (0,0)$. Dentro de U, sejam $W = \Psi^{-1}\big((-\epsilon,\epsilon)^2\big)$ e $W_2 = \Psi^{-1}\big((-2\epsilon,2\epsilon)^2\big)$. Note que $\overline{W} \subset \overline{W}_2 \subset U$.

$\gamma^{-1}(W \cap \gamma([a,b]))$, por ser aberto, é uma união enumerável de intervalos I que são abertos relativos de $[a,b]$, e para cada um desses I, $\Psi(\gamma(I))$ tem a primeira coordenada ξ constante.

Tome para análise um desses I. Se $I = [a,b]$, então a proposição é verdadeira e não há mais o que fazer, então vamos supor que $I \neq [a,b]$. A curva $\Psi \circ \gamma|_I$ é um caminho em V com a primeira coordenada constante. Tal curva tem a imagem da forma $\{\xi\} \times J$ onde $\xi \in (-\epsilon,\epsilon)$ e J é um intervalo contido em $(-\epsilon,\epsilon)$. Como $I \neq [a,b]$, um dos pontos da fronteira de I pertence a (a,b) — chame-o de s_0. Pelo "teorema da alfândega", podemos ver que $\Psi(\gamma(s_0)) \in \{\xi\} \times \{\epsilon, -\epsilon\}$ e concluir que o intervalo J toca ϵ ou $-\epsilon$. O importante desta conclusão é que a união arbitrária de intervalos desta forma é igual à união de no máximo dois do tipo de J.

Seja C uma componente conexa de $W \cap \gamma([a,b])$. É fácil ver que C é igual a uma união de elementos da forma $\gamma(I)$, onde I é uma componente conexa de $\gamma^{-1}(W \cap \gamma([a,b]))$ e concluir que existem no máximo enumeráveis C. Como C é conexo, a projeção na primeira coordenada de $\Psi(C)$ será conexa e enumerável (portanto só um ponto) logo $\Psi(C)$ é da forma $\{\xi_0\} \times J$, onde $J \subset (-\epsilon,\epsilon)$ é obrigatoriamente um intervalo que toca ϵ ou $-\epsilon$. C, por ser componente conexa, é fechado em $W \cap \gamma([a,b])$ e portanto J só pode ser de três tipos: $(-\epsilon,\tau]$, $[\tau,\epsilon)$ ou $(-\epsilon,\epsilon)$.

Quando a curva γ está dentro de U (e isso inclui W), vale a equação

$$\gamma'(s) = \lambda(s) X_|\gamma(s)$$

onde $\lambda(s)$ é uma função $\mathscr{C}^\infty$ que mede a "velocidade" da curva γ em relação ao fluxo de X, que é também a velocidade de $\Psi \circ \gamma$. Como $\overline{W}_2$ é compacto, esta velocidade é limitada em W_2. Cada componente conexa de $\gamma([a,b]) \cap W$ é subconjunto de alguma componente de $\gamma([a,b]) \cap U$, e na verdade tal componente será da forma $\Psi(\{\xi\} \times J)$, com J intervalo tocando -3ϵ ou 3ϵ, por um argumento análogo ao que fizemos em W.

Afirmo que $\gamma([a,b]) \cap W$ possui uma quantidade finita de componentes conexas: de fato, para cada componente conexa de W o conjunto $\Psi(\gamma([a,b] \cap W_2))$ vai conter ao menos um segmento de comprimento ϵ, de forma que se houvessem infinitas componentes em $\gamma([a,b] \cap W)$, o comprimento do conjunto $\Psi(\gamma([a,b]) \cap W_2)$ seria infinito. Mas isto não pode ocorrer, pois $\Psi \circ \gamma$ tem velocidade limitada dentro do aberto W_2.

Sabendo disto, basta restringir Ψ para obter uma carta que satisfaça a definição de subvariedade mergulhada. Por construção, o espaço tangente desta variedade é sempre paralelo a $\Re L$ e $\Im L$. □

PROPOSIÇÃO 6.3. *Ainda supondo que $p_1 R p_2$ e $p_1 \neq p_2$, é possível tomar uma curva $\gamma_r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regular e injetiva satisfazendo a definição 6.1.*

Demonstração. Seja γ a curva da definição 6.1. Já vimos que $\gamma([a,b])$ é uma 1-subvariedade compacta, com ou sem bordo em $\mathbb{R}^2$, e pela classificação de variedades de dimensão um (GALE, 1987) vale um dos dois casos:

- $\gamma([a,b])$ é difeomorfo ao intervalo $[0,1]$.
- $\gamma([a,b])$ é difeomorfo ao círculo S^1.

Em ambos os casos, basta restringirmos o difeomorfismo a um segmento de arco (ou subintervalo) cujo bordo seja levado aos pontos p_0 e p_1. □

A seguinte proposição detalha uma afirmação em (HOUNIE, 1982, p. 348).

PROPOSIÇÃO 6.4. *Dados $p_1 \neq p_2$ tais que $p_1 R p_2$, seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva conforme a definição 6.1 e seja $\mathscr{L}$ o $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$-módulo de campos reais suaves gerado por $\Re L$ e $\Im L$. Então*

(i) Existe um campo $Z \in \mathscr{L}$ que é não-nulo sobre a imagem de γ.

(ii) Se γ é regular e injetiva, existe um campo em $Z \in \mathscr{L}$ que coincide com γ' em cada ponto de $\gamma([a,b])$.

Demonstração. Primeiro caso: pela classificação das variedades de dimensão um, a imagem de γ é um círculo S^1 mergulhado ou um intervalo fechado $[0,1]$ mergulhado. Em ambos os casos, podemos tomar um campo vetorial suave, real e não-nulo Z definido na variedade $\gamma([a,b])$.

Para cada $p \in \gamma([a,b])$, desejamos escolher constantes λ_1, λ_2 reais tais que $\lambda_1 \Re L|_p + \lambda_2 \Im L|_p = Z|_p$. As constantes (λ_1, λ_2) com essa propriedade não são únicas: seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{T}_p\mathbb{R}^2$ a aplicação que leva $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ em $\alpha \Re L|_p + \beta \Im L|_p$. A imagem inversa $T^{-1}(Z|_p)$ é uma reta arbitrária em $\mathbb{R}^2$ (pois o núcleo de T tem dimensão um). Seja (λ_1, λ_2) o ponto que jaz mais próximo da origem na reta $T^{-1}(Z|_p)$.

Afirmação: λ_1 e λ_2 variam de maneira $\mathscr{C}^\infty$ em relação a p. Mostremos isto primeiro no aberto relativo $U = \{p \in \gamma([a,b]) | \Re L|_p \neq 0\} \subset \gamma([a,b])$. Em U valem

$$\Im L = h\Re L \quad \text{e} \quad Z = z(p)\Re L$$

onde $h, z \in \mathscr{C}^\infty(U;\mathbb{R})$ com z jamais nula. A imagem inversa $T^{-1}(Z|_p)$ é o conjunto

$$\left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \alpha\Re L|_p + \beta h(p)\Re L|_p = z(p)\Re L\right\} = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \alpha + h(p)\beta = z(p)\right\},$$

que pode ser parametrizado por $\xi \mapsto (z(p) - h(p)\xi, \xi)$. A distância quadrada à origem, $\xi^2 + z^2(p) - 2z(p)h(p)\xi + h^2(p)\xi^2$, atinge o seu valor mínimo quando

$$2\xi - 2z(p)h(p) + 2h^2(p)\xi = 0 \quad \text{i.e.} \quad \xi(1 + h^2(p)) = z(p)h(p) \quad \text{i.e.} \quad \xi = \frac{z(p)h(p)}{1 + h^2(p)}$$

e assim

$$\lambda_1 = z(p) - \frac{z(p)h^2(p)}{1 + h^2(p)}, \quad \lambda_2 = \frac{z(p)h(p)}{1 + h^2(p)} \quad \therefore \quad (\lambda_1, \lambda_2) = \frac{z(p)}{1 + h^2(p)}\big(1, h(p)\big)$$

e isto é obviamente um vetor não-nulo que varia suavemente com p. A suavidade no aberto $V = \left\{p \in U \,\middle|\, \Im L|_p \neq 0\right\}$ é demonstrada de forma análoga.

Definindo $f(p) = \lambda_1$ e $g(p) = \lambda_2$, temos $f, g \in \mathscr{C}^\infty\big((\gamma([a,b]);\mathbb{R}\big)$ tais que $Z = f\Re L + g\Im L$. As funções f, g podem ser estendidas de maneira suave para $\mathbb{R}^2$: usando uma partição da unidade finita, podemos decompor f, g em somas de forma que cada parcela fique suportada em uma carta local que seja conforme a definição de subvariedade mergulhada. É fácil estender cada parcela para funções reais definidas em todo $\mathbb{R}^2$, e somar as extensões. Assim Z fica definido em todo o plano e é elemento de $\mathscr{L}$.

Para demonstrar a segunda afirmação, basta tomar $Z|_p = \gamma'(s)$, $s = \gamma^{-1}(p)$ e repetir a construção anterior para estender Z. □

6.1.2 R-órbitas

Dado $p \in \mathbb{R}^2_1$, chame de $[p]$ a classe de equivalência de p pela relação R. Tais conjuntos são as R-órbitas de L. Seja Σ a L-órbita do ponto p. Vimos o suficiente para poder afirmar que $[p] \subset \Sigma$.

Vamos dotar $[p]$ com uma topologia apropriada: seja τ a topologia mais fina em $[p]$ que faz com que todas as curvas γ, segundo a definição 6.1 para pontos de $[p]$, sejam contínuas. τ é mais fina do que a topologia herdada de Σ : de fato, pois cada γ, por ser curva suave em $\mathbb{R}^2$ de imagem contida em $[p] \subset \Sigma$, é também suave (e, portanto, contínua) em relação à estrutura $\mathscr{C}^\infty$ de Σ, pois Σ é fracamente mergulhada (BERHANU et al., 2008, Prop. III.1.9, p. 107).

PROPOSIÇÃO 6.5. *$[p]$ é subvariedade imersa, conexa e paracompacta de $\mathbb{R}^2$ (e de Σ), com ou sem bordo.*

OBSERVAÇÃO 6.4. *Isto é, queremos dizer que o espaço topológico* $[p]$ *admite uma estrutura* $\mathscr{C}^\infty$ *com estas propriedades. A unicidade desta estrutura, dada a topologia, é uma propriedade geral de subvariedades imersas (LAGUNA, 2011, p. 21–23).*

Demonstração. O caso em que $[p]$ consiste de um ponto só é variedade de dimensão zero, que terá de maneira trivial as propriedades desejadas.

Vamos supor a partir de agora que $[p]$ possui mais de um ponto. Se existir alguma $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ satisfazendo a definição 6.1 tal que a imagem de γ é toda $[p]$, então, pela proposição 6.2, o conjunto $[p]$ é uma subvariedade mergulhada (potencialmente com bordo) unidimensional em $\mathbb{R}^2$ cujo espaço tangente é paralelo a $\Re L$ e $\Im L$.

Além disso, neste caso τ coincide com a topologia usual herdada de $\mathbb{R}^2$. De fato, tome $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regular e suave tal que $\alpha([a,b]) = [p]$ e que $\alpha^{-1}(V)$ aberto implique V aberto (na topologia herdada de $\mathbb{R}^2$) para todo $V \subset [p]$. Isto é sempre possível: $[p]$ (como conjunto) é a imagem de um mergulho $\mathscr{C}^\infty$ de $[0,1]$ ou de S^1, e no segundo caso basta compor este mergulho com a parametrização que dá uma volta no círculo. α satisfaz a definição 6.1 e portanto é contínua em relação a τ. Se tomarmos $V \subset [p]$ um membro da topologia τ, então $U = \alpha^{-1}(V)$ terá que ser aberto em relação a $[0,1]$ e portanto V também será aberto na topologia usual, o que prova a igualdade entre as topologias. Neste caso, $[p]$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^2$, sempre paralela a $\Re L$ e $\Im L$.

Se Σ tem dimensão um, então Σ é uma curva integral maximal contida em $\mathbb{R}^2_1$ e é fácil ver que $\Sigma \subset [p]$, portanto a R-órbita e a L-órbita são iguais como conjuntos. Se Σ for periódica, caímos no caso em que $[p]$ é a imagem de uma γ, e este caso já está demonstrado. Assim, vamos olhar o caso em que Σ é uma reta mergulhada. Para mostrar a igualdade das topologias, tome $\alpha : \mathbb{R} \to \Sigma$ carta global de Σ. A restrição de α a qualquer intervalo $[a,b]$ satisfaz a definição 6.1 e assim é contínua sobre τ, sendo fácil concluir que $\alpha : \mathbb{R} \to [p]$ é continua em relação à topologia τ. Isto implica que, se $V \subset \Sigma$ é aberto na topologia de τ, $\alpha^{-1}(V)$ é aberto e portanto V é aberto na topologia de Σ. Temos a igualdade $[p] = \Sigma$ como espaços topológicos, portanto $[p]$ pode ser dotada da estrutura $\mathscr{C}^\infty$ de Σ, provando a proposição neste caso.

Resta o caso em que Σ tem dimensão dois e $[p]$ não é a imagem de nenhuma $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ao estilo da definição 6.1. Neste caso existe alguma curva integral por partes que liga p ao exterior de $\mathbb{R}^2_1$, e esta curva pode ser cortada de forma a obter uma $\alpha : [a,b_0] \to \mathbb{R}^2$, de imagem contida em $\mathbb{R}^2_1$, com b_0 sendo o supremo dos x tal que $\alpha([a,x]) \subset \mathbb{R}^2_1$. Se $p_0 \doteq \alpha(b_0) = p$, escolha algum outro ponto da órbita $[p_0]$, chame-o de p e comece de novo. Temos $p_0 R p$ e portanto $\alpha([a,b_0]) \subset [p]$. Isto é uma ponta de $[p]$.

Por outro lado existe $q \in [p]$ que não está em $\alpha([a,b_0])$, e concatenando α com um caminho que liga p a q, obtemos um caminho maior $\beta : [a_0,b_0] \to \mathbb{R}^2_1$, que passará por p, p_0 e q, paralelo sempre a $\Re L, \Im L$ e podemos ver que p não estará em nenhuma das pontas de $\beta([a_0,b_0])$. β é uma curva integral por partes de L, mas é fácil ver que podemos tomar uma $\gamma : [a_1,b_1]$ ao estilo da definição 6.1 que tenha o mesmo conjunto como imagem, e de acordo com a proposição 6.3 podemos supor que γ é injetiva e regular.

Tome $x \in [a_1, b_1]$ o único valor tal que $\gamma(x) = p$, podemos pegar um aberto $(x-\delta, x+\delta)$ tal que γ deste aberto possa ser retificado em relação a uma certa carta local de $\mathbb{R}^2$, pela forma local das imersões. O mesmo pode ser feito em vizinhança da ponta p_0, obtendo uma carta que é de acordo com a definição de subvariedade imersa em um ponto de bordo. Assim, $[p]$ é uma subvariedade imersa com o bordo consistindo somente do ponto $\{p_0\}$.

A conexidade segue de como a topologia τ é definida. Para mostrar que $[p]$ é paracompacta, basta adaptar o argumento de (BERHANU et al., 2008, Lema III.1.8, p. 106). □

PROPOSIÇÃO 6.6. *A topologia τ é a mesma que aquela induzida em $[p]$ pela topologia usual de Σ.*

Demonstração. Nos casos em que Σ tem dimensão um, a demonstração da proposição anterior já inclui este resultado. Suponha então que Σ é uma órbita de dimensão dois, isto é, um aberto em $\mathbb{R}^2$ com a topologia usual.

Já vimos que neste caso $[p]$ tem bordo, e pela classificação de variedades de dimensão um o bordo tem no máximo dois pontos. Se o bordo tiver dois pontos, $[p]$ é compacta e portanto é subvariedade mergulhada, que implica a igualdade das topologias. Se o bordo tiver um ponto só, $[p]$ é a imagem de uma imersão injetiva $\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$. Devemos mostrar que este α é um mergulho.

A ponta $\alpha(0)$ está na fronteira de $\mathbb{R}^2_1$. Tomemos uma vizinhança aberta V de $\alpha(0)$ de forma que V seja o domínio de coordenadas locais retangulares que retificam o campo $Z \in \{\Re L, \Im L\}$, escolhido de forma a ser não-nulo em V. A vizinhança V pode ser encolhida de modo que cada ponto de $V \cap \mathbb{R}^2_1$ esteja na mesma R-órbita que algum ponto da fronteira de $\mathbb{R}^2_1$, e aqui usaremos o fato de que o bordo de $[p]$ só possui um ponto para concluir que α só passa uma vez por V. Para concluir que $[p]$ é subvariedade mergulhada, podemos adaptar o argumento de propagação de *embeddedness* de Berhanu et al. (2008, Prop III.1.11, p. 108). □

COROLÁRIO 6.1. *$[p]$ é subvariedade mergulhada (com ou sem bordo) de Σ.*

PROPOSIÇÃO 6.7. *Se $[p]$ é sem bordo (tipo $\mathbb{R}$ ou tipo S^1) então $[p] = \Sigma$.*

Demonstração. Se Σ tiver algum ponto $q \in \Sigma$ que não pertence a $[p]$, então existirá algum caminho integral por partes de L ligando p a q. Tal caminho não pode ter a imagem contida em $\mathbb{R}^2_1$ (caso contrário teríamos pRq) logo Σ contém um ponto de $\mathbb{R}^2_0$. Conforme visto na demonstração da proposição anterior, no caso em que Σ tem dimensão dois, $[p]$ é variedade com bordo. □

6.2 Estudo do caso transitivo

A partir de agora vamos supor que L seja transitivo, isto é, a única L-órbita é o plano $\mathbb{R}^2$. Também vamos supor que L satisfaz a condição $(\mathscr{P})$ de Nirenberg-Treves, que neste contexto é equivalente à seguinte afirmação: o produto exterior $\Re L \wedge \Im L$ não muda de sinal

(HOUNIE, 1982, Teorema 3.1, p. 354–355). Isto significa que a orientação do par ordenado de vetores $(\Re L, \Im L)$, se for positiva em algum ponto do plano, não é negativa em nenhum outro e vice-versa. Esta propriedade não varia ao multiplicarmos o campo por funções não-nulas, nem por mudanças de coordenada. Se L, em algum sistema de coordenadas local, ficar da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x},$$

então

$$\Re L \wedge \Im L = b(x,t)\frac{\partial}{\partial t} \wedge \frac{\partial}{\partial x}$$

e então b nunca assume sinais opostos.

6.2.1 Hipoeliticidade global de L em vizinhanças das R-órbitas

As seguintes duas proposições são parafraseadas de Hounie (1982, p. 364–365). Lembre-se que estamos pressupondo que L satisfaz $(\mathscr{P})$ em toda esta seção.

Proposição 6.8. *Seja $p \in \mathbb{R}^2_1$ tal que a R-órbita $[p]$ é um único ponto. Então p pertence a um aberto U no qual L é globalmente hipoelítico.*

Demonstração. Tome uma carta local $\Psi : U \to V$ (V retângulo aberto) com $p \in U$, $\Psi(p) = (0,0)$ em cujas coordenadas L assume a forma

$$L = g(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

com b não mudando de sinal ao variarmos t e g uma função complexa suave que não se anula. Isto é sempre possível (BERHANU et al., 2008, p. 150).

Restringindo a vizinhança U, podemos garantir que $b(x,t) \neq 0$ quando (x,t) se aproxima das bordas superior e inferior de V, isto é, as bordas em que a coordenada t assume valor máximo ou mínimo. Com isto as componentes conexas de cada conjunto $\{\, t \in V \mid b(x,t) = 0\}$, para qualquer x fixado, serão intervalos compactos e pelo teorema 3.1 de Hounie (1984, p. 248), L será globalmente hipoelítico no aberto U. □

Proposição 6.9. *Seja $p \in \mathbb{R}^2_1$ tal que a R-órbita $[p]$ é do tipo $[0,1]$. Então $[p]$ admite uma vizinhança U tal que $L|_U$ é globalmente hipoelítica.*

Demonstração. Pela proposição 2.3 de Hounie (1982, p. 350), podemos tomar uma vizinhança U de $[p]$ na qual existe uma carta local $\Psi : U \to V$, onde $V = (\xi_0, \xi_1) \times (\tau_0, \tau_1)$ contém a origem, $\Psi(p) = (0,0)$ e, nas coordenadas $(\xi, \tau) = \Psi(x,t)$,

$$L|_U = g(\xi,\tau)\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + ib(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}\right)$$

onde $g \in \mathscr{C}^\infty(R)$ nunca se anula e $b \in \mathscr{C}^\infty(V;\mathbb{R})$. Diminua o intervalo (τ_0, τ_1) de forma que V ainda contenha $[p]$ mas que $b(0,\tau_0)$ e $b(0,\tau_1)$ sejam positivos, e em seguida diminuia

o intervalo (ξ_0, ξ_1) de forma a garantir que $b(\xi, \tau)$ seja não-nulo sempre que $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$ e $\tau \in \{\tau_0, \tau_1\}$. O campo $L|_U$, visto em relação às coordenadas (ξ, τ), a menos de um produto por função não-nula, está na forma do teorema 3.1 de Hounie (1984, p. 248) e satisfaz as hipóteses necessárias para ser globalmente hipoelítico. □

TEOREMA 5. *Seja L transitivo em $\mathbb{R}^2$ cujas R-órbitas são todas compactas. Então L é globalmente hipoelítico.*

Demonstração. Basta cobrir $\mathbb{R}^2$ com abertos nos quais L é globalmente hipoelítico.

Dado $p \in \mathbb{R}^2$, se $\Re L|_p$ e $\Im L|_p$ são L.I. então podemos tomar um retângulo aberto U contendo p no qual L é elítico, e é sabido que campos elíticos em dimensão dois, após uma mudança de coordenada e multiplicação por função não-nula, se reduzem ao operador de Cauchy-Riemann, $\partial_t - i\partial_x$, que é hipoelítico.

Caso $\Re L|_p$ e $\Im L|_p$ sejam L.D., então a R-órbita de p é um ponto ou um mergulho do intervalo $[0, 1]$, e pelas proposições 6.8 e 6.9 também poderemos cobrir p com um aberto no qual L é G.H.. □

R-órbitas do tipo semirreta

TEOREMA 6. *Se L possui uma R-órbita do tipo $[0, \infty)$ que além disso é um conjunto fechado, então L não é globalmente hipoelítico.*

Demonstração. A ideia da demonstração é obter dois ingredientes:

(i) Uma vizinhança aberta U de $[p]$ dotada de uma carta local ao estilo da proposição 2.3 de Hounie (HOUNIE, 1982), ou seja, um difeomorfismo $\Psi : U \to V$ com U vizinhança de $[p]$, V vizinhança da semirreta $\{0\} \times (-\infty, 0]$, $\Psi([p]) = \{0\} \times (-\infty, 0]$ tal que, ao fazermos $\Psi(x, t) = (\xi, \tau)$, $L|_U$ se reduza à forma $g(\xi, \tau)\big(\partial_\tau - ib(\xi, \tau)\partial_\xi\big)$, com b assumindo somente valores reais e g função que nunca se anula.

(ii) Uma função suave λ com suporte contido em U, que vale 1 em toda uma vizinhança de $[p]$.

Com o primeiro ingrediente, podemos aplicar o teorema 3.1 de Hounie (1984, p. 248) para obter uma distribuição u definida em U que tenha suporte singular não-vazio contido em $[p]$ (página 251, ao final da demonstração do teorema) mas que tenha $Lu \in \mathscr{C}^\infty(U)$. O segundo ingrediente permite "cortar suave e estender" u, chegando assim a uma solução singular global: pois $L(\lambda u) = uL\lambda + \lambda Lu$, que será $\mathscr{C}^\infty$ em todo plano.

Para obter o primeiro ingrediente precisamos generalizar a demonstração da proposição 2.3 de Hounie (HOUNIE, 1982), que segue os seguintes passos:

1. Produzir um campo real Z, da forma $f\Re L + g\Im L$, que seja não-nulo e tangente sobre $[p]$.

2. Obter coordenadas locais que reduzem L a uma forma intermediária que é um múltiplo complexo de $\partial_s + C\partial_r = \partial_s + (C_1 + iC_2)\partial_r$, com C_1, C_2 a valores reais.

3. Com uma nova mudança de coordenada, eliminar o fator C_1.

Seja $\alpha : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização regular de $[p]$ e sejam f, g funções reais definidas sobre $[p]$ tais que $(f\Re L + g\Im L)|_{\alpha(s)} = \alpha'(s)$ (obtidas de maneira similar à demonstração da proposição 6.4). Pelo resultado conhecido como Teorema da ϵ-Vizinhança (GUILLEMIN; POLLACK, 1974, p. 69–70) existe $\epsilon : [p] \to (0, \infty)$ suave tal que a seguinte vizinhança aberta de $[p]$,

$$U_\epsilon = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists r \in [p] : d(q, r) < \epsilon(r) \right\} = \bigcup_{r \in [p]} B_{\epsilon(r)}(r)$$

possui a seguinte propriedade: para cada $q \in U_\epsilon$, existe um único $\pi(q) \in [p]$ que é o ponto de $[p]$ com distância mínima a q, e além disso $\pi : U_\epsilon \to [p]$ é uma submersão $\mathscr{C}^\infty$.

Pela composição com π, podemos estender f, g para funções reais definidas em U_ϵ, e com o auxílio da versão $\mathscr{C}^\infty$ do lema de Urysohn (GUILLEMIN; POLLACK, 1974, p. 56, Ex. 15) podemos estender f, g de U_ϵ para todo o plano.

Já temos $Z = f\Re L + g\Im L$; defina também $W = -g\Re L + f\Im L$, de forma que

$$Z + iW = (f - ig)\Re L + (g + if)\Im L = f(\Re L + i\Im L) - ig(\Re L + i\Im L) = (f - ig)L.$$

Seja $\beta : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ um segmento transversal a $[p]$ que só intercepta $[p]$ uma vez, no ponto $\beta(0) = \alpha(0)$ e tal que o segmento seja curto o bastante para que Z não se anule sobre ele. Defina

$$\Psi(r, s) = \Phi_s(\beta(r))$$

onde Φ_s é o fluxo em parâmetro s de Z. Vale $\Psi(0, s) = \alpha(s)$ quando $s \in (-\infty, 0]$ e também nestes pontos o diferencial $D\Psi$ é um isomorfismo. Por uma versão fortalecida do teorema da função inversa (GUILLEMIN; POLLACK, 1974, p. 56, Ex. 14) existe toda uma vizinhança de $\{0\} \times (-\infty, 0]$ que é levada por Ψ, difeomorficamente, em uma vizinhança de $[p]$. Tomando $(x, t) = \Psi(r, s)$ como as coordenadas locais desta vizinhança, $Z + iW = (f - ig)L$ se reduz à forma

$$\frac{\partial}{\partial s} + iW = \frac{\partial}{\partial s} + i\left(B_1 \frac{\partial}{\partial s} + B_2 \frac{\partial}{\partial r}\right) = (1 + iB_1)\frac{\partial}{\partial s} + iB_2 \frac{\partial}{\partial r}$$

(onde B_1, B_2 são reais) e portanto

$$\frac{f - ig}{1 + iB_1} L = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{iB_2}{1 + iB_1}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial s} + (C_1 + iC_2)\frac{\partial}{\partial r}.$$

Seja ξ a solução do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \xi_s & = -C_1(r, s)\xi_r \\ \xi|_{s=0} & = r. \end{cases}$$

Tomando $\tau = s$, valem:

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial s}\right|_{r=0,s<0} = 0 \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial \xi}{\partial r}\right|_{r,s=0} = 1$$

e se chamarmos $\eta = \xi_r(0,s)$, valem

$$\begin{cases} \eta_s & = -(C_1)_r(0,s)\eta - \cancel{C_1(0,s)\eta_r} \\ \eta|_{s=0} & = 1 \end{cases} \qquad (s \leq 0)$$

e resolvendo isto temos $\eta(s) = \mathrm{e}^{\int_0^s -(C_1)_r(0,\sigma)\,d\sigma} > 0 \quad (s \leq 0)$. O diferencial de (ξ,τ) é sempre um isomorfismo quando estamos sobre $r = 0, s \leq 0$:

$$\left.\frac{\partial(\xi,\tau)}{\partial r, s}\right|_{r=0,s\leq 0} = \begin{pmatrix} \eta(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e também temos a injetividade da aplicação restrita a esta subvariedade: $(\xi,\tau)|_{r=0,s<0} = (0,s)$ de forma que podemos aplicar a versão fortalecida do teorema da função inversa de novo (GUILLEMIN; POLLACK, 1974, p. 56 Ex. 14) para obter uma vizinhança de $[p]$ na qual (ξ,τ) são coordenadas bem-definidas.

Temos

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial \xi}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \tau} = -C_1(r,s)\xi_r\frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial s}}_{=1}\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \xi_r\frac{\partial}{\partial \xi} + \cancel{\frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \tau}},$$

assim na vizinhança de $[p]$ em que as coordenadas (ξ,τ) são bem-definidas vale

$$\frac{f-ig}{1+iB_1}L = \cancel{-C_1(r,s)\xi_r\frac{\partial}{\partial \xi}} + \frac{\partial}{\partial \tau} + \cancel{C_1(r,s)\xi_r\frac{\partial}{\partial \xi}} + iC_2\xi_r\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \tau} + iC_2\xi_r\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Diminuindo a vizinhança de $[p]$ se necessário, podemos garantir que $f - ig \neq 0$, e assim temos o primeiro ingrediente que procurávamos.

Esta vizinhança não precisa coincidir com a U_ϵ original, mas diminuindo a função ϵ podemos garantir isto, e assim poderemos usar o teorema 3.1 de Hounie (1984, p. 248) para obter uma $u \in \mathscr{D}'(U_\epsilon)$ tal que $Lu \in \mathscr{C}^\infty(U_\epsilon)$ mas cujo suporte singular é não-vazio e contido em $[p]$.

Resta estendermos esta u para uma distribuição definida em todo o plano. Como $[p]$ é um fechado contido no aberto U_ϵ, use o lema de Urysohn $\mathscr{C}^\infty$ (GUILLEMIN; POLLACK, 1974, Ex. 15 pag. 56) para obter $\lambda_0 : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ suave valendo 1 em $[p]$ e 0 no complementar de U_ϵ. Em seguida seja $F = \lambda_0^{-1}([1/2,1])$. F é um fechado de $\mathbb{R}^2$ que contém $[p]$ no seu interior, mas está contido em U_ϵ. Aplicando o lema de Urysohn $\mathscr{C}^\infty$ pela segunda vez, tome λ que vale 1 em F e 0 no complemento de U_ϵ. Esta λ é o segundo ingrediente de que estávamos precisando, e assim λu é a nossa distribuição singular com $L(\lambda u) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. □

6.3 Conclusões e resumo

Dado um campo vetorial complexo não-singular L em $\mathbb{R}^2$, deixamos em aberto os seguintes casos:

1. O caso essencialmente transitivo, em que L tem uma órbita de dimensão dois cujo complemento tenha medida nula mas seja não-vazio. Este caso é exemplificado pelo campo do Adalberto e encontramos algumas propriedades que sempre deve possuir.

2. O caso transitivo com R-órbitas do tipo semirreta, mas sem que nenhuma delas seja fechada. Não sabemos se existe algum exemplo deste caso.

3. Campos transitivos em geral que não satisfaçam a condição $(\mathscr{P})$.

Retirados estes casos, então L é globalmente hipoelítico se e somente se L é transitivo e todas as R-órbitas são compactas.

Referências

BERGAMASCO, A.; CORDARO, P.; HOUNIE, J. Global properties of a class of vector fields in the plane. *Journal of Differential Equations*, v. 74, p. 179–199, 1988.

BERHANU, S.; CORDARO, P. D.; HOUNIE, J. *An Introduction to Involutive Structures (New Mathematical Monographs)*. New York: Cambridge University Press, 2008.

CAMPANA, C. *Campos hipoelíticos no plano*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, abril 2013.

GALE, D. The classification of 1-manifolds: A take-home exam. *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, v. 94, n. 2, p. 170–175, feb. 1987.

GODBILLON, C. *Dynamical Systems on Surfaces*. Traduzido do francês por H.G. Helfenstein. New York: Springer-Verlag, 1983.

GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential Topology*. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.

HOUNIE, J. Minimal sets of families of vector fields on compact surfaces. *Journal of Differential Geometry*, v. 16, p. 739–744, 1981.

HOUNIE, J. Globally hypoelliptic vector fields on compact surfaces. *Communications in Partial Differential Equations*, v. 7(4), p. 343–370, 1982.

HOUNIE, J. Global Cauchy problems modulo flat functions. *Advances in Mathematics*, v. 51, p. 240–252, 1984.

LAGUNA, R. A. *Órbitas de Sussmann e aplicações*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, abril 2011.

SCHWARTZMAN, S. Topological transitivity on the torus. *Canadian Mathematical Bulletin*, v. 37, p. 549–551, 1994.

SUSSMANN, H. J. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 180, p. 171–188, june 1973.