Geração de semigrupos por operadores elípticos
em $L^2(\Omega)$ e $C_0(\Omega)$

Pedro David Huillca Leva

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Geração de semigrupos por operadores elípticos em $L^2(\Omega)$ e $C_0(\Omega)$

Pedro David Huilca Leva

***Orientador:* Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática. VERSÃO REVISADA.

USP - São Carlos
Abril de 2014

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação da Biblioteca Prof. Achille Bassi – ICMC/USP

H899g Huillca Leva, Pedro David
 Geração de semigrupos por operadores elípticos em L^2
 (ω) e C_0 (ω) / Pedro David Huillca Leva ;
 orientador Alexandre Nolasco de Carvalho. -- São Carlos,
 2014. _
 134 p.

 Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-Graduação em
 Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de
 Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

 1. Semigrupos holomorfos. 2. Operadores elípticos. 3.
 Geração do semigrupos. 4. Condição do cone exterior
 uniforme. I. Carvalho, Alexandre Nolasco, orient. II.
 Título.

*"A mente que se abre a uma nova
ideá jamais volta ao seu tamanho
original."*

Albert Einstein

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Gerardo e Fidelia, pelo apoio, motivação e força que sempre me brindam em todo momento, principalmente em tempos de fraqueza. A meus irmãos, e minha querida sobrinha, que me escutaram quando precisava.

A minha namorada, Elizabeth, pelo seu grande amor, paciência e motivação que me brindou, apesar da distância, em todo momento. Ela me deu a força necessária para poder seguir adiante durante todo estes dois anos. "Gracias por todo, mi amor".

A meu orientador, Alexandre Nolasco de Carvalho, por aceitar ser seu orientando, pelo apoio que me brindou, pela paciência que demonstrou em mim e pelas suas sugestões. É uma pessoa a qual a admiro muito e da qual tenho aprendido muito.

Ao professor Ederson Moreira Do Santos pelo apoio e confiança em mim. Eu estou muito agradecido pela grande experiência de ser monitor.

Aos professores do ICMC que me ensinaram. Apreciei muito a ensinância desses, sempre me motivando e brindando muito conhecimento.

Ao programa de Pós-graduação de ICMC-USP e a Universidade de São Paulo. Ao Brasil, foi uma bela experiência morar e conhecer mais deste país. Goste muito.

A meus amigos(as) que conheci no Brasil, omitirei escrever seus nomes para evitar esquecer o nome de alguns. A todo eles, obrigado por todo os momentos compartilhados.

A CAPES e a FAPESP pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a geração do semigrupos por operadores elípticos em dois espaços.

Em primeiro lugar estudaremos a geração de semigrupo no espaço $L^2(\Omega)$ por operadores elípticos de ordem $2m$ com Ω suficientemente regular. Mais precisamente, se Ω é um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe C^{2m} ,

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

é um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, com $a_\alpha \in C^j(\Omega)$, $j = \max\{0, |\alpha| - m\}$, e $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é o operador linear dado por

$$\begin{aligned} D(A) &= H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega), \\ (Au)(x) &= L(x, D)u, \end{aligned}$$

então $-A$ gera um C_0 -semigrupo holomorfo em $L^2(\Omega)$.

Em segundo lugar estudaremos a geração de semigrupo em $C_0(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ por operadores elípticos de ordem 2 com Ω satisfazendo uma propriedade geométrica. Mais precisamente, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) é um domínio limitado que satisfaz a condição de cone exterior uniforme, L é o operador

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu$$

com coeficientes reais a_{ij} , b_j , c que satisfazem

$$\begin{aligned} b_j &\in L^\infty(\Omega), \quad j = 1, \dots, n, \quad c \in L^\infty(\Omega), \quad c \geq 0, \\ a_{ij} &\in C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

e A_0 é parte de L em $C_0(\Omega)$, isto é,

$$D(A_0) = \{u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) : Lu \in C_0(\Omega)\}$$
$$A_0 u = Lu,$$

então $-A_0$ gera um C_0 -semigrupo holomorfo limitado em $C_0(\Omega)$.

Abstract

In this work we study the generation of semigroups by elliptic operators in two spaces.

Firstly we study the generation of semigroup in the space $L^2(\Omega)$ for elliptic operators of order $2m$ with Ω regular domain. More precisely, if Ω is a bounded domain with $\partial\Omega \in C^{2m}$,

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

is an elliptic differential operator of order $2m$, with $a_\alpha \in C^j(\Omega)$, $j = \max\{0, |\alpha| - m\}$, and $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ is linear operator given for

$$\begin{aligned} D(A) &= H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega) \\ (Au)(x) &= L(x, D)u \end{aligned}$$

then $-A$ generates a holomorphic C_0 -semigroup in $L^2(\Omega)$.

Secondly we study the generation of semigroup in $C_0(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ for elliptic operators of second order with Ω satisfying a geometric property. That is, if $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) is a bounded domain that satisfies the uniform exterior cone condition, L is the elliptic operator given by

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}u + \sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu$$

with real coefficients a_{ij} , b_j , c satisfying

$$\begin{aligned} b_j &\in L^\infty(\Omega), \quad j = 1, \dots, n, \quad c \in L^\infty(\Omega), \quad c \geq 0, \\ a_{ij} &\in C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

x

and A_0 is part of L in $C_0(\Omega)$, that is,

$$D(A_0) = \{u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) : Lu \in C_0(\Omega)\}$$
$$A_0 u = Lu,$$

then $-A_0$ generates a bounded holomorphic C_0 -semigroup on $C_0(\Omega)$.

Sumário

Introdução	1
Notações	3
1 Preliminares	5
1.1 C_0 -semigrupo	5
1.1.1 Propriedades semigrupos uniformemente contínuos	6
1.1.2 Propriedades básicas dos C_0 -semigrupos	8
1.1.3 Teorema de Hille-Yosida	11
1.1.4 Caracterização do gerador de um C_0 -semigrupo	15
1.2 Semigrupos holomorfos	20
1.2.1 Caracterização dos Semigrupos holomorfos	27
1.2.2 Propriedades	30
1.2.3 Teorema de perturbação	34
1.2.4 Operadores de resolvente positivo	35
2 Semigrupo em $L^2(\Omega)$	39
2.1 Desigualdade de Gårding	39
2.2 Problema de Dirichlet	45
2.3 Regularidade interior	47
2.4 Regularidade global	58
2.5 Geração do semigrupo	73
3 Semigrupo em $C_0(\Omega)$	89
3.1 Definições e resultado prévios	90
3.2 O Problema de Poisson	109
3.3 O problema de Dirichlet	113

3.4	Geração de semigrupo	117
A	Operador fechado	123
B	Espaço de Sobolev	125
C	Equações elípticas de segunda ordem	129
D	Espaço de Banach ordenado	131
	Referências	133
	Índice alfabético	134

Introdução

No primeiro capítulo estudamos os C_0 -semigrupos e semigrupos holomorfos, suas propriedades básicas e os teoremas que caracterizam os seus geradores (As referências para o Capítulo 1 são [2], [7], [11], [9]). Mostraremos que se A é setorial, então A gera semigrupo holomorfo. Como consequência temos, se A gera um C_0 -semigrupo holomorfo em X , então para cada $x \in X$ existe uma única função $u \in C^\infty((0, \infty), X) \cap C([0, \infty), X) \cap C((0, \infty), D(A))$ satisfazendo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & (t > 0) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

No capítulo 2 estudaremos a geração de semigrupo em $L^2(\Omega)$ por operadores elípticos sob certas hipóteses sob o domínio e os coeficientes do operador. As referências para este capítulo são [17], [18], [19]. Na seção 1, consideramos o operador diferencial fortemente elíptico de ordem $2m$ na forma divergente

$$Lu = \sum_{0 \leq |\rho|, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} D^\rho (a^{\rho\sigma} D^\sigma u)$$

e provaremos a desigualdade de Gårding. Na seção 2, estabelecemos o problema de Dirichlet $Lu = f$, $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0$, $0 \leq j \leq m-1$, onde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada direcional na direção do vetor normal à fronteira. Definimos solução fraca ou generalizada e se mostra que problema de Dirichlet verifica a Alternativa de Fredholm. Na seção 3 e 4, se mostram resultado de regularidade no interior e na fronteira das soluções fracas. O resultado importante nesta ultima seção é o Teorema 2.7.

Na ultima seção, consideraremos o operador L na forma $Lu = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u$. Estabelecemos primeiramente estimativas a priori (Teoremas 2.8, 2.9 e 2.10) e mostraremos que operador $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ com domínio $D(A) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, com Ω de classe C^{2m} e $a_\alpha \in C^j(\overline{\Omega})$ com $j = \max\{0, |\alpha| - m\}$ é sectorial e portanto gera

um C_0 -semigrupo holomorfo (veja Teorema 2.11).

No capítulo 3, consideramos o operador L dado por

$$\mathcal{A}u := \sum_{i,j=1}^n -a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_{j=1}^n b_j\partial_ju + cu$$

com coeficientes de valor real a_{ij} , b_j , c tais que $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $b_j, c \in L^\infty(\Omega)$ e Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$. A referências principais são [3], [14], [6]. Na seção 1 estabelecemos alguns resultados de equações elíticas de segundo ordem, principalmente o Teorema 3.8 que é uma consequência do Teorema de Harnack fraco (Teorema 3.4).

Na seção 2 mostramos a existência da solução do problema $\mathcal{A}u = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ em $C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$, onde $f \in L^n(\Omega)$, em dois casos. O primeiro é quando Ω é Wiener regular e a_{ij} são Lipschitz contínua (Teorema 3.9); e no segundo, Ω satisfaz a condição do cone exterior e $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$ (Teorema 3.10). Para isso nos apoiamos em os resultados da seção 1.

Na seção 3, mostraremos a equivalência entre o problema de Poisson $\mathcal{A}u = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ e o problema de Dirichlet $\mathcal{A}u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = g$, onde $f \in L^n(\Omega)$, $g \in C(\Omega)$ são dados, tal equivalência será dado pelo Teorema 3.11. Como consequência, quando Ω é Wiener regular e os a_{ij} são Lipschitz contínua, ou Ω satisfaz a condição do cone exterior uniforme, o problema $Lu = f$, $u|_{\partial\Omega} = g$ tem uma única solução em $C(\overline{\Omega}) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$, para cada $f \in L^n(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$.

Na seção 3, consideraremos a parte A_c e A_0 de A em $C(\overline{\Omega})$ e $C_0(\Omega)$ como segue

$$\begin{aligned} D(A_c) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) : Lu \in C(\overline{\Omega})\}, \\ A_c &= Lu, \\ D(A_0) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) : Lu \in C_0(\Omega)\}, \\ A_0 &= Lu, \end{aligned}$$

assim A_c é a parte de A em $C(\overline{\Omega})$ e A_0 é a parte de A_c em $C_0(\Omega)$. Se Ω satisfaz a condição de cone exterior uniforme então $-A_c$ gera um semigrupo holomorfo limitado T em $C(\overline{\Omega})$ e operador $-A_0$ gera um $C_0(\Omega)$ -semigrupo holomorfo limitado em $C_0(\Omega)$ (veja Teorema 3.14).

Notações

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto
- $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω
- $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R, x_n > 0\}$
- B_R é a bola de raio R e centro 0 .
- $\Omega_\infty := \Omega \times \mathbb{R}$
- $A \subset\subset \Omega$, isto é, A é um aberto limitado tal que $\overline{A} \subset \Omega$
- $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$
- $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
- $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$
- $\operatorname{Re} z$ é a parte real de $z \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{Im} z$ é a parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
- $\Sigma_\theta := \{r e^{i\gamma} \in \mathbb{C} : r > 0, -\theta < \gamma < \theta\}$
- $\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)! \beta!} = \frac{\alpha_1! \dots \alpha_n!}{((\alpha_1-\beta_1)! \dots (\alpha_n-\beta_n)!)(\beta_1! \dots \beta_n!)}$
- $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
- X é um espaço de Banach
- $\mathcal{L}(X)$ é o espaço das aplicações lineares contínuas em X
- A é um operador linear em X
- $D(A)$ é o domínio de A

- $\text{Ran } A$ é a imagen de A
- $\text{Ker } A$ é o núcleo de A
- $\rho(A)$ é o conjunto resolvente de A
- $R(\lambda, A) := \lambda I - A$ é o resolvente de A , onde $\lambda \in \rho(A)$
- $A_\lambda := \lambda A R(\lambda, A)$ é a aproximação Yosida
- $C^j(\Omega)$ o conjunto das funções j vezes continuamente diferenciáveis em Ω
- $C^j(\overline{\Omega})$ o conjunto das funções em $C^j(\Omega)$, cujas derivadas de ordem $\leq j$ tem extensão contínua sobre $\overline{\Omega}$
- $C_B^j(\Omega)$ o conjunto das funções em $C^j(\Omega)$, cujas derivadas de ordem $\leq j$ são limitadas sobre Ω
- $C^\alpha(\Omega) := \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$
- $C_0(\Omega) := \{ u \in C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0 \}$
- $\widehat{C}^{j,p}(\Omega) := \{ u \in C^j(\Omega) : \sum_{|\alpha| \leq j} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx < \infty \} \quad (1 \leq p < \infty)$
- $H^m(\Omega) := W^{2,m}(\Omega)$
- $H_0^m(\Omega) := W_0^{2,m}(\Omega)$
- $\|\cdot\|_{j,\Omega} := \|\cdot\|_{j,2,\Omega}$
- $\|\cdot\|_m := \|\cdot\|_{m,2,\Omega}$
- $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$
- $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$
- $K_R(y)$ é um cubo com centro em y e lados paralelos aos eixes coordenados e com longitud de lado R .
- $K_R := K_R(0)$
- Nf é o potencial newtoniano de f

Preliminares

Neste capítulo X denotará um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e usaremos a mesma notação para a norma do espaço $\mathcal{L}(X)$. O objetivo deste capítulo é caracterizar os operadores lineares $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ que geram um semigrupo holomorfo. O teorema central deste capítulo é o Teorema 1.14. Como consequência temos que o P.V.I

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x_0 \in X. \end{cases}$$

tem uma única solução (Corolário 1.8) para cada $x_0 \in X$.

Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [2], [11], [9].

1.1 C_0 -semigrupo

Definição 1.1. Denotaremos $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Uma função $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tal que

- a) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad s, t \geq 0$
- b) $T(0) = I \quad (I \text{ é o operador identidade em } X).$

é chamado um C_0 -semigrupo ou um semigrupo fortemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Se T satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

então T é chamado um semigrupo uniformemente contínuo.

Note que, se T é um semigrupo uniformemente contínuo então, é um semigrupo fortemente contínuo.

O operador A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \quad (1.1)$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ para } x \in D(A), \quad (1.2)$$

é chamado *gerador infinitesimal*, ou simplesmente *gerador*, do C_0 -semigrupo $T(t)$, $D(A)$ é o domínio de A .

1.1.1 Propriedades semigrupos uniformemente contínuos

Da definição e da propriedade de semigrupo, se $T(t)$ é semigrupo uniformemente contínuo então

$$\lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Teorema 1.1. *Um operador A é o gerador de um semigrupo uniformemente contínuo, se e só se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração. Seja A um operador linear limitado em X , e seja

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \quad (1.3)$$

A série do lado direito de (1.3) converge na norma de $\mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e define para cada t um operador linear limitado $T(t)$. Note que $T(0) = I$ e por um cálculo simples, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Estimando a série de potências temos

$$\|T(t) - I\| \leq t\|A\| e^{t\|A\|}$$

e

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \|A\| \|T(t) - I\|.$$

Isto implica que $T(t)$ é um semigrupo uniformemente contínuo cujo gerador é A .

Seja $T(t)$ um semigrupo uniformemente contínuo em X . Seja $\rho > 0$ fixo tal que $\|I - 1/\rho \int_0^\rho T(s) ds\| < 1$. Então $\rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds$ é inversível e, portanto, $\int_0^\rho T(s) ds$ também é

inversível. Agora

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\rho T(s) ds &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(h+s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{T(h) - I}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}.$$

Fazendo $h \rightarrow 0$, $\frac{T(h)-I}{h}$ converge na norma de $\mathcal{L}(X)$ para $(T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}$, que é o gerador de $T(t)$. $\square$

Teorema 1.2. Se $T(t)$ e $S(t)$ são semigrupos uniformemente contínuos e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}, \quad (1.4)$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Mostraremos que dado um $\tau > 0$, $S(t) = T(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$. Seja $\tau > 0$ fixo $C > 0$ tal que $\|T(t)\| \|S(s)\| \leq C$, $0 \leq t, s \leq \tau$. Dado $\epsilon > 0$ segue de (1.4) que existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|T(h) - S(h)\| < \epsilon h / C\tau, \quad 0 \leq h \leq \delta. \quad (1.5)$$

Escolhemos $n \geq 1$ tal que $t/n < \delta$ para todo $t \in [0, \tau]$. Da propriedade de semigrupos e de (1.5)

$$\begin{aligned} \|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \leq Cn \frac{\epsilon}{\tau C} \frac{t}{n} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário então $T(t) = S(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$ e a prova está completa. $\square$

Corolário 1.1. *Seja $T(t)$ um semigrupo uniformemente contínuo. Então*

- a) *Existe $w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$,*
- b) *Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$,*
- c) *O operador A em (b) é o gerador de $T(t)$,*
- d) *$t \mapsto T(t)$ é diferenciável em norma e*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Demonstração. Todas as afirmações seguem de b). Para provar b) note que o gerador de $T(t)$ é um operador linear limitado A . A também é o gerador de e^{tA} e portanto, pelo Teorema 1.2, $T(t) = e^{tA}$. $\square$

1.1.2 Propriedades básicas dos C_0 -semigrupos

Teorema 1.3. *Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo, então existem constantes $w \in \mathbb{R}$ e $M > 0$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Primeiro mostraremos que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado para $0 \leq t \leq \eta$. Caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria $t_n \in [0, 1/n]$ tal que $\|T(t_n)\| > n$. Pelo Princípio da Limitação Uniforme existiria $x \in X$ tais que $\{\|T(t_n)x\| : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitado, o que é uma contradição. Logo, existe $\eta > 0$ tais que $\sup_{t \in [0, \eta]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = M < \infty$. Dado $t \geq 0$ existe único $\delta \in [0, \eta]$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $t = n\eta + \delta$ onde $0 \leq \delta \leq \eta$. Da propriedade de semigrupo

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq M M^{t/\eta} = M e^{wt},$$

onde $w = \eta^{-1} \ln M$. $\square$

Definição 1.2. *Uma função $T : I \rightarrow \mathcal{L}(X)$ ($I \subset \mathbb{R}$) é chamada fortemente contínua se $I \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é contínua para todo $x \in X$.*

Corolário 1.2. *Se $T(t)$ é um C_0 -semigrupo então $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é fortemente contínua.*

Teorema 1.4. *Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador. Então*

a) Para $x \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x. \quad (1.6)$$

b) Para cada $x \in X$, $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x. \quad (1.7)$$

c) Para $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \quad (1.8)$$

d) Para $x \in D(A)$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax \, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x \, d\tau. \quad (1.9)$$

Demonstração. O item a) segue diretamente da continuidade de $t \mapsto T(t)$. Para provar b) note que, dado $x \in X$ $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x \, ds &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x) \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds \end{aligned}$$

que tende a $T(t)x - x$ quando $h \rightarrow 0$. Para provar c) note que, dados $x \in D(A)$ e $h > 0$,

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)x = T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) x \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} T(t)Ax. \quad (1.10)$$

segue que $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. (1.10) também implica que

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

provando que a derivada pela direita de $T(t)x$ é $T(t)Ax$. Para prova (1.8) temos que mostrar que para $t > 0$ a derivada pela esquerda de $T(t)x$ existe e é igual a $T(t)Ax$. Isto

segue de

$$\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax = T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) + (T(t-h) - T(t))Ax,$$

que quando $h \rightarrow 0^+$ tende a zero, visto que $x \in D(A)$, $\|T(t-h)\|$ é limitado em $0 \leq h \leq t$ e é fortemente contínuo $T(t)$. Isto conclui a prova de c). O item d) é obtido do item c) integrando de s a t . $\square$

Teorema 1.5. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador do C_0 -semigrupo $T(t)$. Então $D(A)$ é denso e A é fechado.*

Demonstração. Seja $x \in X$ e denotemos $x_t = 1/t \int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ ($t > 0$). Do Teorema 1.4 b), $x_t \in D(A)$ para $t > 0$, e do Teorema 1.4 a) $x_t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} x$. Então $x \in \overline{D(A)} = X$. Para provar que A é fechado, seja $x_n \in D(A)$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ e $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, do Teorema 1.4 d)

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \quad (1.11)$$

O integrando em (1.11) converge $T(s)y$ uniformemente em intervalos limitados. Portanto, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (1.11)

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds \quad (1.12)$$

Dividindo por t e fazendo $t \rightarrow 0^+$, usando Teorema 1.4 a), concluímos que $x \in D(A)$ e $Ax = y$. $\square$

Teorema 1.6. *Sejam $T(t)$ e $S(t)$ C_0 -semigrupos com geradores A e B , respectivamente. Se $A = B$ então $T(t) = S(t)$.*

Demonstração. Seja $x \in D(A) = D(B)$. A função $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é diferenciável e

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0. \end{aligned}$$

Portanto $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é constante e em particular seus valores em $s = 0$ e $s = t$ são iguais, isto é, $S(t)x = T(t)x$. Isto vale para todo $x \in D(A)$. Da densidade de $D(A)$ e da continuidade de $T(t)$ e $S(t)$ segue que $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$. $\square$

Teorema 1.7. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$. Se $D(A^n)$ é o domínio de A^n , então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X .*

Demonstração. Seja $x \in X$ e $\varphi \in C_0^\infty((0, \infty))$

$$y = x(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x \, ds. \quad (1.13)$$

Se $h > 0$ e suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h}y &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(s)[T(s+h)x - T(s)x] \, ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{h}[\varphi(s-h) - \varphi(s)]T(s)x \, ds \end{aligned} \quad (1.14)$$

O integrando do lado direito de (1.14) converge quando $h \rightarrow 0$ para $-\varphi'(s)T(s)x$ uniformemente em $[0, \infty)$. Portanto $y \in D(A)$ e

$$Ay = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h}y = - \int_0^\infty \varphi'(s)T(s)x \, ds$$

Repetindo o processo, temos

$$A^n y = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(s)T(s)x \, ds, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

segue $y \in \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$. Seja $Y = \{x(\varphi) : x \in X, \varphi \in C_0^\infty((0, \infty))\}$. Pelo que acabamos de provar $Y \subset \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$. Para concluir mostraremos que Y é denso em X . Se Y não é denso em X , pelo Teorema de Hahn Banach existe $0 \neq x^* \in X^*$ tal que $x^*(y) = 0$ para todo $y \in Y$. Então

$$\int_0^\infty \varphi(s)x^*(T(s)x) \, ds = x^*\left(\int_0^\infty \varphi(s)T(s)x \, ds\right) = 0 \quad (1.15)$$

para todo $x \in X, \varphi \in C_0^\infty((0, \infty))$. Isto implica que para cada $x \in X$ a função contínua $s \mapsto x^*(T(s)x)$ é identicamente nula em $[0, \infty)$. Em particular para $s = 0$, $x^*(x) = 0$ para todo $x \in X$, contradizendo a escolha de x^* . $\square$

1.1.3 Teorema de Hille-Yosida

Nesta seção caracterizaremos o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações. Daremos condições sobre o comportamento do resolvente de um operador A , que são necessárias e suficientes para que A seja um gerador de um C_0 -semigrupo de contrações.

Definição 1.3. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo, dizemos que T é uniformemente limitado se

existe um $M > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \geq 0$. Se, além disso, $M = 1$ diremos que T é um semigrupo de contrações.

Teorema 1.8 (Hille-Yosida). *Um operador linear A é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t)$, se e só se,*

i) A é fechado e densamente definido,

ii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Antes de fazer a prova do teorema provaremos os seguintes lemas.

Lema 1.1. *Se A satisfaz as condições i) e ii) do Teorema 1.8 então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. Seja $x \in D(A)$, então para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x\| \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Como $D(A)$ é denso em X e $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$, então $\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x$ quando $\lambda \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$. $\square$

Para $\lambda > 0$, definimos o *aproximação Yosida* de A por

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \quad (1.16)$$

A_λ é uma aproximação de A em o seguinte sentido:

Lema 1.2. *Se A satisfaz i) e ii) do Teorema 1.8. Se A_λ é a aproximação Yosida de A , então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \quad x \in D(A).$$

Demonstração. Para $x \in D(A)$, temos do Lema 1.1 e da definição de A_λ que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax. \quad \square$$

Lema 1.3. *Se A satisfaz i) e ii) do Teorema 1.8 e A_λ é aproximação Yosida de A , então A_λ é o gerador de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ} . Além disso, para cada*

$x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ temos

$$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração. É claro que A_λ é um operador linear limitado, consequentemente, é o gerador do semigrupo uniformemente contínuo e^{tA} (Teorema 1.1). Também temos

$$\|e^{tA_\lambda}\| = \|e^{t\lambda^2 R(\lambda:A) - t\lambda I}\| = \|e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)}\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda:A)\|} \leq 1$$

e portanto e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações. Note que e^{tA_λ} , e^{tA_μ} , A_λ e A_μ comutam entre se. Assim

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 t \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x)\| ds \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|. \quad \square \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 1.8. Se A é gerador de um C_0 -semigrupo então $i)$ segue do Teorema 1.5. Para $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e $x \in X$, definimos

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (1.17)$$

Como $t \mapsto T(t)x$ é contínua e uniformemente limitada a integral existe como integral imprópria de Riemann e define um operador linear limitado satisfazendo

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \|x\| dt \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \|x\|. \quad (1.18)$$

Note que, para $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T(t+h) - T(t)) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt, \end{aligned} \quad (1.19)$$

e o lado direito de (1.19) converge a $\lambda R(\lambda)x - x$ quando $h \rightarrow 0^+$. Então para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ e

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \quad (1.20)$$

Se $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax \, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t)x \, dt = \int_0^\infty A(e^{-\lambda t} T(t)x) \, dt \\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt\right) = AR(\lambda)x. \end{aligned} \quad (1.21)$$

De (1.20) e (1.21) segue

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = Ix, \quad \forall x \in D(A).$$

Assim $R(\lambda)$ é a inversa de $\lambda I - A$ para todo $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e satisfaz a estimativa desejada.

Reciprocamente, seja $x \in D(A)$,

$$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|A_\mu x - Ax\|$$

logo do Lema 1.2 $e^{tA_\lambda} x$ converge quando $\lambda \rightarrow \infty$ e a convergência é uniforme em intervalos limitados. Seja $x \in X$, por densidade temos que dado $\epsilon > 0$ existe um $y \in D(A)$ tal que $\|x - y\| < \epsilon$ e de fato $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| &\leq \|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\lambda} y\| + \|e^{tA_\lambda} y - e^{tA_\mu} y\| + \|e^{tA_\mu} y - e^{tA_\mu} x\| \\ &\leq 2\|x - y\| + \|e^{tA_\lambda} y - e^{tA_\mu} y\| \leq 2\epsilon + \|e^{tA_\lambda} y - e^{tA_\mu} y\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} x = T(t)x, \quad \forall x \in X \quad (1.22)$$

e o limite é uniforme em intervalos limitados. É fácil verificar que T satisfaz $T(0) = I$, $T(s+t) = T(s)T(t)$ e $\|T(t)\| \leq 1$. Além disso $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, \infty)$ pois é limite uniforme de funções contínuas $t \mapsto e^{tA_\lambda} x$. Então T é um C_0 -semigrupo de contrações em X . Para concluir a prova mostraremos que A é gerador de T . Seja $x \in D(A)$ usando (1.22) e Teorema 1.4

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{tA_\lambda} x - x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds = \int_0^t T(s)Ax \, ds \quad (1.23)$$

a última igualdade segue da convergência uniforme de $e^{sA_\lambda} A_\lambda x$ para $T(s)Ax$ em intervalos limitados. Seja B o gerador de T , seja $x \in D(A)$ dividindo (1.23) por t e tomando limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax$$

e assim $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$. Como B é gerador de $T(t)$ segue que $1 \in \rho(B)$. Por outro de ii) $1 \in \rho(A)$ e $(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$ ($D(A) \subset D(B)$). Logo $D(A) = D(B)$ e $A = B$. $\square$

Corolário 1.3 (Hille-Yosida). *Um operador linear A é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t)$, se e só se,*

(i) A é fechado e densamente definido,

(ii) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Corolário 1.4. *Seja A é gerador de um C_0 -semigrupo de contrações T . Se A_λ é aproximação Yosida de A então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}, \quad x \in X.$$

Demonstração. Da prova do Teorema 1.8 segue que $S(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}$ define um C_0 -semigrupo de contrações com gerador A . Do Teorema 1.6 segue que $S = T$. $\square$

Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ (para algum $w \in \mathbb{R}$). Considere $S(t) = e^{-wt} T(t)$. É claro que $S(t)$ é um C_0 -semigrupo de contrações. Se A é o gerador de $T(t)$ então $A - wI$ é o gerador de $S(t)$. Por outro lado, se A é gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ então $A + wI$ é o gerador de C_0 -semigrupo de $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, de fato $T(t) = e^{wt} S(t)$. Esta observação nos leva a seguinte caracterização o gerador de um C_0 -semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$.

Corolário 1.5. *Um operador linear A é gerador de um C_0 -semigrupo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, se e somente se,*

(i) A é fechado e densamente definido,

(ii) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > w\} \subset \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - w}, \quad \operatorname{Re} \lambda > w.$$

1.1.4 Caracterização do gerador de um C_0 -semigrupo

Nesta seção caracterizaremos os geradores dos C_0 -semigrupos em geral.

Lema 1.4. *Seja A um operador linear tal que $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Se*

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, \lambda > 0,$$

então existe uma norma $|\cdot|$ em X que satisfaz

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad x \in X, \quad (1.24)$$

$$|\lambda R(\lambda, A)x| \leq |x|, \quad x \in X, \lambda > 0. \quad (1.25)$$

Demonstração. Seja $\mu > 0$ e

$$\|x\|_\mu = \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\|.$$

Então

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\| \quad (1.26)$$

e

$$\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leq 1. \quad (1.27)$$

Afirmamos que $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leq 1$ para $0 < \lambda \leq \mu$. De fato, se $y = R(\lambda, A)x$ então $y = R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)y)$ e por (1.27)

$$\|y\|_\mu \leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\|y\|_\mu$$

logo $\lambda\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu$.

Disto e de (1.26)

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad 0 < \lambda \leq \mu. \quad (1.28)$$

Tomando supremo sobre n temos $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$, $0 < \lambda \leq \mu$. Finalmente, definimos

$$|x| = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|x\|_\mu.$$

Então, de (1.26) segue $\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$ para $x \in X$. Tomando $n = 1$ na segunda parte de (1.28) e fazendo $\mu \rightarrow \infty$ segue $|\lambda R(\lambda, A)| \leq 1$. $\square$

Teorema 1.9. *A é gerador de um C_0 -semigrupo T satisfazendo $\|T(t)\| \leq M$, se e somente se,*

i) A é fechado é densamente definido,

ii) $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \forall \lambda > 0, n = 1, 2, \dots$$

Demonstração. Seja A o gerador de um C_0 -semigrupo tal que $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$. Definimos

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\|.$$

Então

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\| \quad (1.29)$$

e portanto $|\cdot|$ é uma norma em X equivalente a $\|\cdot\|$. Além disso

$$|T(t)x| = \sup_{s \geq 0} \|T(s)T(t)x\| \leq \sup_{s \geq 0} \|T(s)x\| = |x|$$

e $T(t)$ é um C_0 -semigrupo de contrações em X com a norma $|\cdot|$, segue do Teorema de Hille-Yosida A é fechado e densamente definido em a topologia da norma $|\cdot|$ e $|R(\lambda, A)| \leq \lambda^{-1}$, para $\lambda > 0$. Da equivalência das normas, A é fechado e densamente definido. De (1.29)

$$\|R(\lambda, A)^n x\| \leq |R(\lambda, A)^n x| \leq \frac{1}{\lambda^n} |x| \leq \frac{M}{\lambda^n} \|x\|.$$

Se $i)$ e $ii)$ estão satisfeitas, do Lema 1.4, existe uma norma $|\cdot|$ em X que satisfaz (1.24) e (1.25). Considerando X com esta norma, A é fechado, densamente definido, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e $|R(\lambda, A)| \leq \lambda^{-1}$ para $\lambda > 0$. Do Teorema de Hille-Yosida, A é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações em X com a norma $|\cdot|$. Voltando a norma original A é gerador de $T(t)$ e

$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X. \quad \square$$

Corolário 1.6. A é gerador de um C_0 -semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq M$, se e somente se,

i) A é fechado e densamente definido,

ii) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda)^n}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, n = 1, 2, \dots$$

Demonstração. Segue do Corolário 1.3 e da primeira parte da prova de Teorema 1.9. $\square$

Se $T(t)$ é um C_0 -semigrupo em X com gerador A então $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$ onde $M \geq 1$, $w \in \mathbb{R}$. Se $S(t) = e^{wt} T(t)$, então $\|S(t)\| \leq M$ e $A - wI$ é o gerador de $S(t)$. Usando esta observação e Corolário 1.6 obtemos:

Teorema 1.10. *A é gerador de um C_0 -semigrupo T satisfazendo $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$, se e somente se*

i) *A é fechado é densamente definido*

ii) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > w\}$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n}, \quad \operatorname{Re} \lambda > w, \quad n = 1, 2, \dots$$

Teorema 1.11. *Seja A gerador de um C_0 -semigrupo $T(t)$ em X . Se A_λ é aproximação Yosida de A , isto é, $A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A)$, então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} x, \quad x \in X. \quad (1.30)$$

Demonstração. Começaremos com $w = 0$, isto é, $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$. Na prova do Teorema 1.9 tomamos uma norma $|\cdot|$ em X equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $T(t)$ é um C_0 -semigrupo de contrações. De Corolário 1.4 segue que $|e^{tA_\lambda} x - T(t)x| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$. Da equivalência de normas (1.29) vale que $\|e^{tA_\lambda} x - T(t)x\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$ uniformemente para todo compacto em $[0, \infty)$ e para todo $x \in X$. Para o caso geral temos que $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$, se $w \leq 0$ então $\|T(t)\| \leq M$ e já temos provado neste caso. Resta provar para $w > 0$. Para $\lambda > 2w$ temos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\| &\leq e^{-\lambda t} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2)^k t^k}{k!} \|R(\lambda, A)^k\| \\ &\leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2)^k t^k}{k! (\lambda - w)^k} M = M e^{-\lambda t} e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda - w}} \leq M e^{2wt}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Consideremos o C_0 -semigrupo uniformemente limitado $S(t) = e^{-wt} T(t)$ com gerador $A - wI$. Pela primeira parte da prova temos

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{t(A-wI)_\lambda + wt} x, \quad x \in X. \quad (1.32)$$

Vamos mostrar que

$$(A - wI)_\lambda + wI = A_{\lambda+w} + H(\lambda)$$

onde

$$H(\lambda) = 2wI - w(w + 2\lambda)R(\lambda + w, A) = w[wR(\lambda + w, A) - 2AR(\lambda + w, A)]$$

Além disso $\|H(\lambda)\| \leq 2w + (2w + \lambda^{-1}w^2)M$ e para $x \in D(A)$, $\|H(\lambda)x\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$. De fato,

$$\begin{aligned} (A - wI)_\lambda + wI &= \lambda^2 R(\lambda, A - wI) - \lambda I + wI = \lambda^2 R(\lambda + w, A) - \lambda I + wI \\ &= (\lambda + w)^2 R(\lambda + w, A) - 2w(\lambda + w)R(\lambda + w, A) \\ &\quad + w^2 R(\lambda + w, A) - (\lambda - w)I \\ &= (\lambda + w)^2 R(\lambda + w, A) - (\lambda + w)I + 2wI \\ &\quad - 2w(\lambda + w)R(\lambda + w, A) + w^2 R(\lambda + w, A) \\ &= A_{\lambda+w} + H(\lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|H(\lambda)\| &\leq 2w + w(w + 2\lambda)\|R(\lambda + w, A)\| \leq 2w + w(w + 2\lambda)M/\lambda \\ &= 2w + (2w + \lambda^{-1}w^2)M. \end{aligned}$$

Se $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \|H(\lambda)x\| &= w\|wR(\lambda + w, A)x - 2AR(\lambda + w, A)x\| \\ &= w\|wR(\lambda + w, A)x - 2R(\lambda + w, A)Ax\| \\ &\leq w^2\|R(\lambda + w, A)x\| + 2\|R(\lambda + w, A)Ax\| \\ &\leq \frac{M}{\lambda}(w^2\|x\| + 2w\|Ax\|) \rightarrow 0 \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto da densidade de $D(A)$ em X , $H(\lambda)x \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ para todo $x \in X$.

Como

$$\|e^{tH(\lambda)}x - x\| \leq t e^{tH(\lambda)}\|H(\lambda)x\|, \quad \forall x \in X \quad (1.33)$$

segue

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tH(\lambda)}x = x \quad x \in X. \quad (1.34)$$

Já que $H(\lambda)$ e $A_{\lambda+w}$ comutam temos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| &\leq \|e^{tA_\lambda+tH(\lambda-w)}x - T(t)x\| + \|e^{tA_\lambda+H(\lambda-w)}x - e^{tA_\lambda}x\| \\ &\leq \|e^{tA_\lambda+tH(\lambda-w)}x - T(t)x\| + \|e^{tA_\lambda}\|\|e^{tH(\lambda-w)}x - x\|. \end{aligned}$$

Quando $\lambda \rightarrow \infty$ o primeiro termo do lado direito da expressão acima tende a zero por (1.32) enquanto o segundo termo tende a zero por (1.31) e (1.34). Logo segue (1.30). $\square$

1.2 Semigrupos holomorfos

Começamos com um teorema de representação analítica que caracterizará o gerador de um semigrupo holomorfo. Denotaremos

$$\Sigma_\alpha := \{r e^{i\gamma} \in \mathbb{C} : r > 0, -\alpha < \gamma < \alpha\}$$

para algum $0 < \alpha \leq \pi$.

Teorema 1.12. *Seja $0 < \alpha \leq \pi/2$, $w \in \mathbb{R}$ e $q : (w, \infty) \rightarrow X$. São equivalentes*

i) *Existe uma função holomorfa $f : \Sigma_\alpha \rightarrow X$ tal que $\sup_{z \in \Sigma_\beta} \|e^{-wz} f(z)\| < \infty$ para todo $0 < \beta < \alpha$ e*

$$q(\lambda) = \hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt, \quad \text{para todo } \lambda > w.$$

ii) *A função q tem uma extensão holomorfa $\tilde{q} : w + \Sigma_{\alpha+\pi/2} \rightarrow X$ tal que*

$$\sup_{\lambda \in w + \Sigma_{\gamma+\pi/2}} \|(\lambda - w)\tilde{q}(\lambda)\| < \infty, \quad \text{para todo } 0 < \gamma < \alpha.$$

Demonstração. Suponha que vale i) e seja $0 < \beta < \alpha$. Então existe $M > 0$ tal que $\|f(z)\| \leq M e^{w \operatorname{Re} z}$ para todo $z \in \overline{\Sigma}_\beta \setminus \{0\}$. Definimos o caminho $\Gamma_\pm$ como $\Gamma_\pm = \{s e^{\pm i\beta} : 0 < s < \infty\}$. Pelo Teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt = \int_{\Gamma_+} e^{-\lambda z} f(z) dz \\ &= e^{i\beta} \int_0^\infty e^{-\lambda s e^{i\beta}} f(s e^{i\beta}) ds \end{aligned} \tag{1.35}$$

para todo $\lambda > w$. Seja $0 < \epsilon < \pi/2 - \beta$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ com $-\pi/2 - \beta + \epsilon < \arg(\lambda - w) < \pi/2 - \beta - \epsilon$. Então $-\pi/2 + \epsilon < \arg((\lambda - w) e^{i\beta}) < \pi/2 - \epsilon$. Assim $\operatorname{Re}((\lambda - w) e^{i\beta}) \geq |\lambda - w| \sin \epsilon$. Segue que

$$\|e^{-\lambda s e^{i\beta}} f(s e^{i\beta})\| \leq M e^{-s|\lambda - w| \sin \epsilon}. \tag{1.36}$$

Logo a integral

$$q_+(\lambda) := e^{i\beta} \int_0^\infty e^{-\lambda s e^{i\beta}} f(s e^{i\beta}) ds$$

é absolutamente convergente. Vamos a provar que q_+ define uma função holomorfa em a região $-\pi/2 - \beta + \epsilon < \arg(\lambda - w) < \pi/2 - \beta - \epsilon$. Se $q_n(\lambda) = e^{i\beta} \int_0^n e^{-\lambda s e^{i\beta}} f(s e^{i\beta}) ds$ então q_n é holomorfa. De (1.36) temos

$$\begin{aligned} \|q_n(\lambda) - q_+(\lambda)\| &\leq \int_n^\infty \|e^{\lambda s e^{i\beta}} f(s e^{i\beta})\| ds \leq \int_n^\infty M e^{-s|\lambda-w|\sin\epsilon} ds \\ &= M \frac{e^{-n|\lambda-w|\sin\epsilon}}{|\lambda-w|\sin\epsilon}. \end{aligned}$$

Logo, em qualquer compacto contido no domínio, $q_n \rightarrow q_+$ uniformemente quando $n \rightarrow \infty$. Então q_+ é holomorfa ([16], Teorema 3.1.8). Além disso, de (1.36) segue que

$$\|(\lambda - w)q_+(\lambda)\| \leq \frac{M}{\sin\epsilon}$$

em $-\pi/2 - \beta + \epsilon < \arg(\lambda - w) < \pi/2 - \beta - \epsilon$. Similarmente

$$q_-(\lambda) = e^{-i\beta} \int_0^\infty e^{-\lambda s e^{-i\beta}} f(s e^{-i\beta}) ds$$

define uma função holomorfa na região $-\pi/2 + \beta + \epsilon < \arg(\lambda - w) < \pi/2 + \beta - \epsilon$, com

$$\|(\lambda - w)q_-(\lambda)\| \leq \frac{M}{\sin\epsilon}.$$

De (1.35), ambos q_+, q_- são extensões holomorfas de q e juntos define uma extensão holomorfa $\tilde{q} : w + \Sigma_{\beta-\epsilon+\pi/2} \rightarrow X$ satisfazendo $\|(\lambda - w)\tilde{q}(\lambda)\| \leq \frac{M}{\sin\epsilon}$ nesse setor. Como $\beta < \alpha$ e $0 < \epsilon < \pi/2 - \beta$ são arbitrários e por Teorema de Identidade para funções holomorfas ([2], Proposição A.2) concluímos *ii*).

Agora suponha que vale *ii*). Se $0 < \gamma < \alpha$ e $\delta > 0$, então existe um $M > 0$ tal que $\|(\lambda - w)\tilde{q}(\lambda)\| \leq M$ para todo $\lambda \in (w + \overline{\Sigma}_{\gamma+\pi/2}) \setminus \{w\}$. Consideremos a curva orientada positivamente Γ (dependendo de γ e δ) dada por

$$\Gamma_\pm = \{w + r e^{\pm i(\gamma+\pi/2)} : \delta \leq r\}, \quad \Gamma_0 = \{w + \delta e^{i\theta} : -\gamma - \pi/2 \leq \theta \leq \gamma + \pi/2\}. \quad (1.37)$$

Seja $z \in \Sigma_\gamma$ e $0 < \epsilon < \gamma$ tal que $z \in \Sigma_{\gamma-\epsilon}$. Para $\lambda = w + r e^{\pm i(\gamma+\pi/2)} \in \Gamma_\pm$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda z) &= w \operatorname{Re} z + r|z| \cos(\arg z \pm (\gamma + \pi/2)) \\ &\leq w \operatorname{Re} z - r|z| \sin\epsilon. \end{aligned}$$

Logo

$$\|e^{\lambda z} \tilde{q}(\lambda)\| \leq e^{w \operatorname{Re} z} e^{-r|z| \sin \epsilon} \frac{M}{r}, \quad \forall \lambda \in \Gamma_{\pm}. \quad (1.38)$$

Isto mostra que

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} \tilde{q}(\lambda) d\lambda, \quad z \in \Sigma_{\gamma}, \quad (1.39)$$

é absolutamente convergente. Analogamente ao que foi provado em *i*) temos que f é holomorfa em Σ_{γ} e além disso

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n e^{\lambda z} \tilde{q}(\lambda) d\lambda, \quad z \in \Sigma_{\gamma}. \quad (1.40)$$

Pelo Teorema de Cauchy esta função é independente de $\delta > 0$. Logo, do Teorema de Identidade para funções holomorfas, f define uma função holomorfa em Σ_{α} .

Para estimar $f(z)$, seja $\delta = |z|^{-1}$ e escolhamos γ e ϵ tal que $\gamma < \alpha$ e $|\arg z| < \gamma - \epsilon$. Em Γ_0 , $\lambda = w + |z|^{-1} e^{i\theta}$, $-\gamma - \pi/2 \leq \theta \leq \gamma + \pi/2$. Assim

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda z} \tilde{q}(\lambda) d\lambda \right\| &\leq \frac{M e^{w \operatorname{Re} z}}{2\pi} \int_{-\gamma - \pi/2}^{\gamma + \pi/2} e^{\cos(\arg z + \theta)} d\theta \\ &\leq M e^{1 + w \operatorname{Re} z}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

Da estimativa (1.38)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} e^{\lambda z} \tilde{q}(\lambda) d\lambda \right\| &\leq \frac{M e^{w \operatorname{Re} z}}{2\pi} \int_{|z|^{-1}}^{\infty} e^{-r|z| \sin \epsilon} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{M e^{w \operatorname{Re} z}}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-r \sin \epsilon}}{r} dr \\ &\leq \frac{M e^{w \operatorname{Re} z}}{2\pi \sin \epsilon}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Logo (1.41) e (1.42) estabelece que

$$\sup_{z \in \Sigma_{\gamma - \epsilon}} \|e^{wz} f(z)\| < \infty$$

para qualquer $0 < \epsilon < \gamma < \alpha$.

Agora provaremos que $\hat{f}(\lambda) = q(\lambda)$ quando $\lambda > w$. Dado $\lambda > w$, seja $0 < \delta < \lambda - w$ e $0 < \gamma < \alpha$. Então λ está à direita da curva Γ , o Teorema de Fubini e Teorema de Resíduos implicam que

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\mu t} \tilde{q}(\mu) d\mu dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_0^{\infty} e^{(\mu - \lambda)t} \tilde{q}(\mu) dt d\mu$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{q}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu \\
&= \tilde{q}(\lambda) + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\tilde{q}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu
\end{aligned}$$

onde $\Gamma_R = \{w + R e^{i\theta} : -\gamma - \pi/2 \leq \theta \leq \gamma + \pi/2\}$. O resultado agora segue do fato que

$$\left\| \int_{\Gamma_R} \frac{\tilde{q}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu \right\| \leq \int_{-\gamma-\pi/2}^{\gamma+\pi/2} \frac{M}{|w + R e^{i\theta} - \lambda|} \rightarrow 0, \quad \text{quando } R \rightarrow \infty. \quad \square$$

Definição 1.4. Uma função fortemente contínua $T : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tal que satisfaz

- a) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad t, s > 0.$
- b) $\|T(t)\| \leq c, \quad t \in (0, 1].$
- c) $T(t)x = 0 \quad \forall t > 0$ implica $x = 0.$

é chamada semigrupo em X .

Prova-se de maneira similar ao Teorema 1.3 que

Lema 1.5. Se T é um semigrupo então existem $w \in \mathbb{R}$ e $M > 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$ para $t > 0$.

Proposição 1.1. Seja T um semigrupo então existe operador linear $A : D(A) \rightarrow X$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > w\} \subset \rho(A)$ para algum $w \in \mathbb{R}$ e

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > w.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.5 temos que $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$ para $t > 0$. Sejam $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > w\}$ e $R : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X)$ dado por $R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$. Usando o Teorema de Fubini com $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \lambda$

$$\begin{aligned}
\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\mu - \lambda} &= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} R(\lambda) dt - \int_0^\infty \frac{1}{\mu - \lambda} e^{(\lambda-\mu)t} e^{-\lambda t} T(t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds dt - \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) ds dt \\
&= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_t^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_t^\infty e^{-\lambda(s-t)} T(s) ds dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s+t) ds dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} T(t) dt \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds \\
&= R(\mu)R(\lambda) = R(\lambda)R(\mu).
\end{aligned}$$

Ou seja, R é um pseudo-resolvente. Seja $x \in \text{Ker } R(\lambda)$. Então da propriedade acima $R(\mu)x = 0$ para todo μ com $\text{Re } \mu > w$. Então $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt = 0$ para todo $\text{Re } \lambda > w$, segue que $T(t)x = 0$ para $t > 0$ ([16], Teorema 8.1.2). Logo pela propriedade c) temos que $x = 0$. Logo, pelo Teorema A.5, existe um operador A em X tal que $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ para $\lambda \in U$. $\square$

Definição 1.5. O operador A definido pelo teorema acima é chamado gerador de T .

Note que o gerador é único, além disso, se T é um C_0 -semigrupo as definições de geradores coincidem.

Teorema 1.13. Um semigrupo é um C_0 -semigrupo, se e só se, seu gerador A é densamente definido.

Demonstração. Suponhamos que o gerador de um semigrupo T seja A densamente definido. Como $R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$ para $\lambda > w$, então

$$R(\lambda, A)^{(n)} = \int_0^\infty (-t)^n e^{-\lambda t} T(t) dt, \quad \lambda > w.$$

Além disso $R(\lambda, A)^{n+1} = \frac{(-1)^n R(\lambda, A)^{(n)}}{n!}$, $\lambda \in \rho(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$R(\lambda, A)^{n+1} = \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t} T(t) dt$$

$\lambda > w$, $n \in \mathbb{N}$ e

$$\|R(\lambda, A)^{n+1}\| \leq M \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-(\lambda-w)t} dt.$$

Como $\int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-(\lambda-w)t} T(t) dt = \frac{1}{(\lambda-w)^{n+1}}$, temos

$$\|(\lambda - w)^{n+1} R(\lambda, A)^{n+1}\| \leq M.$$

Do Teorema 1.10 A é o gerador de um C_0 -semigrupo T_0 . Como $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_0(t) dt$ para $\lambda > w$, segue que $T = T_0$. $\square$

Definição 1.6. Seja $\theta \in (0, \pi/2]$. Um semigrupo T em X é chamado semigrupo holomorfo de ângulo θ se tem uma extensão holomorfa a Σ_θ que é limitada em $\Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ para todo $\theta' \in (0, \theta)$.

Denotaremos a extensão de T a Σ_θ também por T . Se não queremos especificar o ângulo θ da extensão na definição, diremos que um semigrupo T é holomorfo se ele é holomorfo de ângulo θ para algum $\theta \in (0, \pi/2]$.

Proposição 1.2. *Seja $\theta \in (0, \pi/2]$ e T um semigrupo em X com gerador A . Suponha que T é holomorfo de ângulo θ . Então vale o seguinte:*

a) $T(z + z') = T(z)T(z'), \forall z, z' \in \Sigma_\theta.$

b) Para cada $\theta' \in (0, \theta)$ existem $M > 0$ e $w \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|T(z)\| \leq M e^{w \operatorname{Re} z}, \quad \forall z \in \Sigma_{\theta'}.$$

c) Seja $\alpha \in (-\theta, \theta)$, então $T_\alpha(t) := T(e^{i\alpha} t)$ ($t > 0$) é semigrupo e $e^{i\alpha} A$ é o gerador de T_α .

d) Se T é um C_0 -semigrupo então

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Sigma_{\theta'}} T(z)x = x$$

para todo $x \in X$ e $\theta' \in (0, \theta)$.

Demonstração. a) Seja $z' \in (0, \infty)$ fixo considere as funções holomorfas $z \mapsto T(z + z')$ e $z \mapsto T(z)T(z')$ $z \in \Sigma_\theta$. Como as duas funções coincidem em $(0, \infty)$ o Teorema de Identidade para funções holomorfas implica que $T(z + z') = T(z)T(z') \forall z \in \Sigma_\theta$ e $z' \in (0, \infty)$. Para $z \in \Sigma_\theta$ fixo as funções holomorfas $z' \mapsto T(z + z')$ e $z' \mapsto T(z)T(z')$ definidos em Σ_θ coincidem para $z' \in (0, \infty)$. Logo pelo Teorema de Identidade para funções holomorfas, temos que $T(z + z') = T(z)T(z') \forall z, z' \in \Sigma_\theta$.

b) Seja $\theta' \in (0, \theta)$, $M \geq \sup_{|z| \leq 1, z \in \Sigma_{\theta'}} \|T(z)\|$ com $M \geq 1$ e $w_0 = \ln M$. Então $\|T(z)\| \leq M e^{w_0 |z|} \forall z \in \Sigma_{\theta'}$. De fato, se $z = t e^{i\beta}$, $|\beta| < \theta'$, $t > 0$, seja $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $s \in (0, 1)$ tal que $t = n + s$, então

$$\|T(z)\| = \|T(n e^{i\beta})T(s e^{i\beta})\| \leq M M^n \leq M e^{w_0 t} = M e^{w_0 |z|}.$$

Como $|z| \leq \frac{\operatorname{Re} z}{\cos \theta'} \forall z \in \Sigma_{\theta'}$, então tomando $w = \frac{w_0}{\cos \theta'}$ temos

$$\|T(z)\| \leq M e^{w \operatorname{Re} z}, \quad z \in \Sigma_{\theta'}.$$

c) Seja A_α o gerador de T_α . Consideremos $R > r > 0$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{t : r \leq t \leq R\}, & \Gamma_2 &= \{R e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq \alpha\}, \\ \Gamma_3 &= \{t e^{i\alpha} : r \leq t \leq R\}, & \Gamma_4 &= \{r e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda > \frac{w}{\cos \alpha}$, do Teorema de Cauchy $\int_{\Gamma} \exp(-\lambda e^{-i\alpha} z) T(z) x dz = 0$. Fazendo os cálculos temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_4} \exp(-\lambda e^{-i\alpha} z) T(z) dz = 0$$

e

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} \exp(-\lambda e^{-i\alpha} z) T(z) dz = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-\lambda e^{-i\alpha} t e^{i\alpha}) T(t e^{i\alpha}) e^{i\alpha} dt &= \int_0^\infty \exp(-\lambda e^{-i\alpha} t) T(t) dt, \\ e^{i\alpha} \int_0^\infty \exp(-\lambda t) T_\alpha(t) dt &= \int_0^\infty \exp(-\lambda e^{-i\alpha} t) T(t) dt, \end{aligned}$$

de onde $e^{i\alpha} R(\lambda, A_\alpha) = R(\lambda e^{-i\alpha}, A)$. Portanto $A_\alpha = e^{i\alpha} A$.

d) Seja $\theta' \in (0, \theta)$ e tomemos θ'' tal que $\theta' < \theta'' < \theta$, do item b) existe um $w \in \mathbb{R}$ tal que $\|e^{-wz} T(z)\| \leq M \forall z \in \Sigma_{\theta''}$. Seja $x \in X$ fixo, consideremos a sequência $f_n : \Sigma_{\theta''} \rightarrow X$ dada por $f_n(z) = e^{-w \frac{z}{n}} T(\frac{z}{n})x$. Temos que $(0, \infty) \subset \{z \in \Sigma_{\theta''} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \text{ existe}\}$. Logo pelo Teorema de Vitali ([2], Teorema A.5) existe uma função holomorfa $f : \Sigma_{\theta''} \rightarrow X$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\Sigma_{\theta''}$. Mas, se $z \in (0, \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = x$. Logo pelo Teorema de Identidade para funções holomorfas $f(z) = x \forall z \in \Sigma_{\theta''}$. Dado $\epsilon > 0$ existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_k(z) - x\| < \epsilon$ para todo $z \in \Sigma_{\theta'} \cap \{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$ e $k \geq k_0$. Se $z \in \Sigma_{\theta'} \cap \{z : |z| < 1/k_0\}$ então $1/(k+1) < |z| < 1/k$ para algum $k \geq k_0$. Segue que $1 < (k+1)|z| < 2$ e $\|f_{k+1}((k+1)z) - x\| = \|e^{-wz} T(z)x - x\| < \epsilon$. Portanto $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Sigma_{\theta'}} e^{-wz} T(z)x = x$. $\square$

Definição 1.7. *Seja $\theta \in (0, \pi/2]$. Um semigrupo T é chamado um semigrupo holomorfo limitado de ângulo θ se T tem uma extensão holomorfa a Σ_θ que é limitada em $\Sigma_{\theta'}$ para cada $\theta' \in (0, \theta)$.*

Denotaremos a extensão de T a Σ_θ por T novamente. Quando não queremos especificar o ângulo θ da extensão na definição, diremos simplesmente que T é semigrupo holomorfo limitado.

Proposição 1.3. *Um operador A gera um semigrupo holomorfo, se e só se, existe um $w \in \mathbb{R}$ tal que $A - w$ gera um semigrupo holomorfo limitado.*

Demonstração. Seja $T : \Sigma_\theta \rightarrow X$ semigrupo holomorfo gerado por A . Se $\theta' \in (0, \theta)$, do item b) da Proposição 1.2, existem um w e $M > 0$ tais que $\|T(z)\| \leq M e^{w \operatorname{Re} z} \forall z \in \Sigma_{\theta'}$.

Logo $T_w(z) = e^{-wz} T(z)$ é um semigrupo holomorfo limitado de ângulo θ' . Se A_w o gerador de T_w então $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$R(\lambda, A_w) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_w(t) dt = \int_0^\infty e^{-(\lambda+w)t} T(t) dt = R(\lambda + w, A), \quad \forall \lambda > 0.$$

Assim $A_w = A - w$.

Reciprocamente, se $T_w : \Sigma_\theta \rightarrow X$ é o semigrupo holomorfo limitado gerado por $A - w$ e $T : \Sigma_\theta \rightarrow X$ é dado por $T(z) = e^{wz} T_w(z)$ então T é um semigrupo holomorfo. Seja $\tilde{A}$ seu gerador, tomando $\lambda > 0$ suficientemente grande

$$R(\lambda, \tilde{A}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{wt} T_w(t) dt = R(\lambda - w, A - w),$$

portanto $\tilde{A} = A$. □

1.2.1 Caracterização dos Semigrupos holomorfos

Definição 1.8. Dados $w \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (0, \pi/2]$ dizemos que $A : D(A) \rightarrow X$ é setorial de tipo (w, θ) se

$$w + \Sigma_{\theta+\pi/2} \subset \rho(A)$$

e, para cada $\epsilon > 0$ existe uma $M_\epsilon > 0$ tal que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\epsilon}{|\lambda - w|}, \quad \forall \lambda \in w + \Sigma_{\theta+\pi/2-\epsilon}.$$

Se não quisermos especificar o tipo (w, θ) na definição, dizemos simplesmente que A é setorial.

Teorema 1.14. Seja A um operador em X . São equivalentes:

- i) A gera um semigrupo holomorfo limitado.
- ii) A é setorial (com $w = 0$).
- iii) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset \rho(A)$ e

$$M = \sup_{\operatorname{Re} z > 0} \|\lambda R(\lambda, A)\| < \infty.$$

Demonstração. i) $\rightarrow$ ii). Seja $T : \Sigma_\theta \rightarrow \mathcal{L}(X)$ o semigrupo holomorfo limitado gerado por A ($0 < \theta \leq \pi/2$). Como $R(\cdot, A) : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ e $R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$ para

$\lambda > 0$, do Teorema 1.12, existe uma extensão holomorfa $\tilde{R} : \Sigma_{\theta+\pi/2} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\sup_{\lambda \in \Sigma_{\gamma+\pi/2}} \|\lambda \tilde{R}(\lambda)\| < \infty, \quad \forall 0 < \gamma < \theta.$$

Do Teorema A.4, $\Sigma_{\theta+\pi/2} \subset \rho(A)$ e $R(\lambda, A) = \tilde{R}(\lambda)$ para $\lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}$. Portanto A é setorial.

ii) $\rightarrow$ i). Seja A setorial de tipo $(0, \theta)$, do Teorema 1.12 existe uma função holomorfa $T : \Sigma_{\theta} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ que é limitado em Σ_{α} com $0 < \alpha < \theta$ e

$$R(\lambda, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt, \quad \lambda > 0.$$

Mostraremos que T é um semigrupo. Como na prova da Proposição 1.1 temos

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu t} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} T(s+t) ds dt = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} T(t)T(s) ds dt,$$

daí $T(s+t) = T(t)T(s)$ para todo $s, t > 0$ ([16], Teorema 8.1.2). Se $T(t)x = 0$ para todo $t > 0$ segui que $R(\lambda, A)x = 0$ e portanto $x = 0$.

iii) $\rightarrow$ ii). Seja $c = \frac{1}{2M}$, para $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $-c|s| < r \leq 0$ seja $\lambda = c|s| + r + is$. Então $|\lambda - (r + is)| = c|s| \leq \frac{1}{2}\|R(\lambda, A)\|^{-1}$. Do Teorema A.2, $r + is \in \rho(A)$ e

$$\|(r + is)R(r + is, A)\| \leq \frac{|r + is|\|R(\lambda, A)\|}{1 - c|s|\|R(\lambda, A)\|} \leq \frac{2M|r + is|}{|s|}.$$

Agora tomando $\theta = \arctan c$ ($0 < \theta < \pi/2$), temos que para $r + is \in \Sigma_{\theta+\pi/2}$ com $r < 0$

$$\|(r + is)R(r + is, A)\| \leq \frac{2M|r + is|}{|s|} = \frac{2M}{\cos \beta},$$

onde $\beta = \arctan(-r/s)$. Como $\beta < \theta$ segui $\cos \beta > \cos \theta$ e

$$\|(r + is)R(r + is, A)\| \leq \frac{2M}{\cos \theta}, \quad r + is \in \Sigma_{\theta+\pi/2}, \quad r < 0.$$

Isto completa a prova. □

Observação 1.1. Note que o semigrupo T gerado por A é dado por

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda, A) dz, \quad z \in \Sigma_{\gamma}$$

onde $0 < \gamma < \theta$ e o caminho Γ é dado por a união de

$$\Gamma_{\pm} = \{r e^{i\delta} : \delta \leq r\} \quad e \quad \Gamma_0 = \{\delta e^{i\varphi} : |\varphi| < \gamma + \pi/2\}$$

onde $\delta > 0$.

Figura 1.1

Corolário 1.7. *Seja A um operador linear em X . São equivalentes:*

- i) A gera um semigrupo holomorfo em X .
- ii) A é setorial.
- iii) Existe $w \in \mathbb{R}$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > w\} \subset \rho(A)$ e

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda > w} \|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| < \infty.$$

- (iv) Existe um $r > 0$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda| > r\} \subset \rho(A)$ e

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda| > r} \|\lambda R(\lambda, A)\| < \infty.$$

Demonstração. A equivalência entre os itens *i)*, *ii)* e *iii)* segue da Proposição 1.3 e do teorema anterior. Vamos provar que *iii)* é equivalente a *iv)*. Como *iii)* implica *ii)* tomemos $0 < \gamma < \pi/2$ tal que $M = \sup_{\lambda \in w + \Sigma_{\gamma + \pi/2}} \|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| < \infty$. Se $w \leq 0$, então $|\lambda| \leq |\lambda - w|$ para $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e *iv)* segue facilmente. Se $w > 0$, tomando $r > \max\{2w + 1, w \tan \gamma\}$ é obvio que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda| > r\} \subset \rho(A)$. Para $|\lambda| > r$ temos que $|\lambda - w| > |w| + 1$. Assim, se $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e $|\lambda| > r$,

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq |\lambda - w| \|R(\lambda, A)\| + |w| \frac{M}{|w| + 1} < 2M.$$

Reciprocamente, se $M = \sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda| > r} \|\lambda R(\lambda, A)\|$, tomando $w = r$ temos que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > w\} \subset \rho(A)$. Para $\operatorname{Re} \lambda > w$ é claro que $|\lambda| > w$, e

$$\|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| \leq 2|\lambda| \|R(\lambda, A)\| < 2M,$$

Isto completa a prova do corolário. □

1.2.2 Propriedades

Seja $A : D(A) \rightarrow X$ gerador de um semigrupo holomorfo T , na proposição a seguir enunciaremos as principais propriedades de T .

Proposição 1.4. *i) $T(t)x \in D(A^k)$ para cada $t > 0$, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$. Se $x \in D(A^k)$, então*

$$A^k T(t)x = T(t)A^k x, \quad t > 0.$$

ii) A função $t \mapsto T(t)x$ pertence a $C^\infty((0, \infty), \mathcal{L}(X))$ e

$$\frac{d^k}{dt^k} T(t) = A^k T(t), \quad t > 0.$$

iii) Se $x \in \overline{D(A)}$, então $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$. Reciprocamente, se existe $y = \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x$, então $x \in \overline{D(A)}$ e $y = x$.

iv) Para $x \in X$ e $t > 0$, a integral $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e

$$A \int_0^t T(s)x ds = T(t)x - x.$$

v) Se $x \in D(A)$ e $Ax \in \overline{D(A)}$, então $\lim_{t \rightarrow 0^+} (T(t)x - x)/t = Ax$. Reciprocamente, se existe $z = \lim_{t \rightarrow 0^+} (T(t)x - x)/t$, então $x \in D(A)$ e $z = Ax \in \overline{D(A)}$.

Demonstração. Primeiramente provaremos $\int_{\Gamma} \lambda^k e^{\lambda t} d\lambda = 0$ para $k \in \mathbb{N}$, onde Γ é como (1.37). De fato, do Teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma} \lambda^k e^{\lambda t} d\lambda = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \lambda^k e^{\lambda t} d\lambda$$

onde $\Gamma_R = \{w + R e^{i\theta} : \gamma + \pi/2 \leq \theta \leq \gamma + 3\pi/2\}$. Assim

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Gamma_R} \lambda^k e^{\lambda t} d\lambda \right\| &\leq \int_{\gamma+\pi/2}^{\gamma+3\pi/2} |w + R e^{i\theta}|^k e^{wt} e^{tR \cos \theta} R d\theta \quad (|w| < R) \\ &\leq \int_{\gamma+\pi/2}^{\gamma+3\pi/2} 2^k R^{k+1} e^{wt} e^{tR \cos \theta} R d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Agora vamos provar o item *i)* e *ii)* por indução sobre k . Para $k = 1$, temos que $T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda$ e $T'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda$. De $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I$ ($\lambda \in \rho(A)$) segue

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} A(e^{\lambda t} R(\lambda, A)) d\lambda &= \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda - \int_{\Gamma} e^{\lambda t} d\lambda = \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \\ &= T'(t). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Logo $T(t)x \in D(A)$ e $A \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda = \int_{\Gamma} A(e^{\lambda t} R(\lambda, A)) d\lambda$ ([2], Proposição 1.1.7). Assim

$$AT(t) = T'(t). \tag{1.44}$$

Se $x \in D(A)$, $AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Suponhamos que o resultado seja válido para k , ou seja que $T(t)x \in D(A^k)$ e $A^k T(t)x = T^{(k)}(t)x$. Então

$$\int_{\Gamma} A(\lambda^k e^{\lambda t} R(\lambda, A))x d\lambda = \int_{\Gamma} \lambda^{k+1} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda - \int_{\Gamma} \lambda^k e^{\lambda t} d\lambda = T^{(k+1)}(t)x.$$

Da Proposição 1.1.7 ([2]), $T^k(t)x \in D(A)$ e

$$A \int_{\Gamma} \lambda^k e^{\lambda t} R(\lambda, A)x d\lambda = \int_{\Gamma} A(\lambda^k e^{\lambda t} R(\lambda, A))x d\lambda = T^{(k+1)}(t)x. \tag{1.45}$$

Assim $AT^{(k)}(t)x = T^{(k+1)}(t)x$, e da hipótese de indução segue que

$$A^{k+1}T(t)x = AA^kT(t)x = T^{(k+1)}(t)x.$$

Se $x \in D(A^{k+1})$ então de (1.45) $AT^{(k)}(t)x = T^{(k)}Ax = A^kTAx = TA^kAx = TA^{k+1}x$.

iii) Vamos provar que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = 1$. De fato, pelo Teorema de Cauchy

$$2\pi i = \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda$$

onde $\Gamma_R = \{w + R e^{i\theta} : \gamma + \pi/2 \leq \theta \leq \gamma + 3\pi/2\}$. Logo, como $\cos \theta < 0$ para $\theta \in [\gamma + \pi/2, \gamma + 3\pi/2]$, segue que

$$\left\| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda \right\| \leq e^{wt} \int_{\gamma+\pi/2}^{\gamma+3\pi/2} \frac{e^{tR \cos \theta} R}{R - |w|} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (1.46)$$

Se $x \in D(A)$, $R(\lambda, A)Ax = \lambda R(\lambda, A)x - x$ e

$$T(t)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \left(R(\lambda, A) - \frac{1}{\lambda} \right) x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Ax d\lambda. \quad (1.47)$$

Provaremos que $\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Ax$ é dominada por uma função integrável em Γ . De fato, em $\Gamma_{\pm}$,

$$\left\| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Ax \right\| \leq \frac{M}{|\lambda||\lambda - w|} e^{t \operatorname{Re} \lambda} \|Ax\| \leq \frac{M_1}{|\lambda||\lambda - w|} \|Ax\|$$

onde M é a constante da definição de sectorial e $M_1 = \sup_{\Gamma_{\pm}} \{e^{t \operatorname{Re} \lambda}, M\}$. Note $\frac{1}{|\lambda||\lambda - w|}$ é integrável em $\Gamma_{\pm}$ (Γ_0 é trivial).

Agora provaremos que $\int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax d\lambda = 0$. De fato, por Teorema de Cauchy

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax d\lambda + \int_{-\Gamma_R} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax d\lambda,$$

onde $\Gamma_R = \{w + R e^{i\theta} : -\gamma - \pi/2 \leq \theta \leq \gamma + \pi/2\}$. Estimando

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\Gamma_R} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax d\lambda \right\| &\leq \int_{-\gamma-\pi/2}^{\gamma+\pi/2} \frac{M}{|\lambda - w||\lambda|} \|Ax\| R d\theta = \int_{-\gamma-\pi/2}^{\gamma+\pi/2} \frac{M}{|\lambda|} \|Ax\| d\theta \\ &\leq \int_{-\gamma-\pi/2}^{\gamma+\pi/2} \frac{M}{|R| - |w|} \|Ax\| d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(M é a constante da definição de sectorial). Do Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Ax d\lambda = \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax d\lambda = 0,$$

portanto de (1.47) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$ para $x \in D(A)$. Por densidade, segue para todo $x \in \overline{D(A)}$.

Reciprocamente, se $y = \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x$, então $y \in \overline{D(A)}$ pois $T(t)x \in D(A)$ (item *i*). Seja $\xi > w$,

$$R(\xi, A)y = \lim_{t \rightarrow 0^+} R(\xi, A)T(t)x = \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)R(\xi, A)x = R(\xi, A)x \quad (R(\xi, A)x \in D(A)),$$

assim $y = x$.

iv) Seja $\xi \in \rho(A)$, $x \in X$. Para $s \in (0, t)$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^t T(s)x \, ds &= \int_{\epsilon}^t (\xi - A)R(\xi, A)T(s)x \, ds \\ &= \xi \int_{\epsilon}^t R(\xi, A)T(s)x \, ds - \int_{\epsilon}^t \frac{d}{ds}(R(\xi, A)T(s)x) \, ds \\ &= \xi \int_{\epsilon}^t R(\xi, A)T(s)x \, ds - R(\xi, A)T(t)x + R(\xi, A)T(\epsilon)x \end{aligned}$$

como $R(\xi, A)x \in D(A)$, do item *ii*) quando $\epsilon \rightarrow 0^+$ temos

$$\int_0^t T(s)x \, ds = \xi R(\xi, A) \int_0^t T(t)x \, ds - R(\xi, A)(T(t)x - x).$$

Logo, $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ e $(\xi - A) \int_0^t T(s)x \, ds = \xi \int_0^t T(s)x \, ds - (T(t)x - x)$ de onde

$$A \int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x.$$

v). Se $x \in D(A)$ e $Ax \in \overline{D(A)}$, então

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}A \int_0^t T(s)x \, ds = \frac{1}{t} \int_0^t AT(s)x \, ds = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax \, ds.$$

Como $s \mapsto T(s)Ax$ é contínua em $[0, t]$ (item *iii*)), segue $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax$. Se $z = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$, então $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$ e, do item (*iii*)), $x, z \in \overline{D(A)}$. Além disso, para $\xi \in \rho(A)$

$$R(\xi, A)z = \lim_{t \rightarrow 0^+} R(\xi, A) \left(\frac{T(t)x - x}{t} \right)$$

e do item (*iv*)

$$R(\xi, A)z = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} R(\xi, A)A \int_0^t T(s)x \, ds = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\xi R(\xi, A) - I) \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds.$$

Como $x \in \overline{D(A)}$ então $s \mapsto T(s)x$ é contínua em 0 e assim

$$R(\xi, A)z = (\xi R(\xi, A) - I)x,$$

portanto $x \in D(A)$ e $z = (\xi - (\xi - A))x = Ax$. $\square$

Definição 1.9. *Seja X_0 é um subespaço de X , a parte de A em X_0 é definido como*

$$\begin{cases} D(A_0) = \{x \in D(A) \cap X_0 : Ax \in X_0\}, \\ A_0 : D(A_0) \rightarrow X_0, A_0x = Ax. \end{cases}$$

Definição 1.10. *Dizemos que T é um C_0 -semigrupo holomorfo (limitado) se T é um semigrupo holomorfo (limitado) e um C_0 -semigrupo.*

Teorema 1.15. *Seja A o gerador de um semigrupo holomorfo, $X_0 = \overline{D(A)}$ e A_0 a parte de A em X_0 . Então A_0 gera um C_0 -semigrupo holomorfo T_0 em X_0 e $T_0 = T|_{X_0}$.*

Demonstração. Como A gera um semigrupo holomorfo T então A é setorial. Mais como $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ e $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{X_0}$, então A_0 gera um semigrupo holomorfo T_0 . Por construção temos

$$T_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A)|_{X_0} = T(t)|_{X_0}.$$

Da Proposição 1.4 *iii*), T_0 é um C_0 -semigrupo. $\square$

Como consequência da Proposição 1.4 e Teorema 1.15 segue o seguinte corolário.

Corolário 1.8. *Seja $x \in X$ e assumamos que A gera um C_0 -semigrupo holomorfo em X . Então existe uma única função $u \in C^\infty((0, \infty), X) \cap C([0, \infty), X) \cap C((0, \infty), D(A))$ satisfazendo*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

1.2.3 Teorema de perturbação

Teorema 1.16 (Perturbação). *Seja A o gerador de um semigrupo holomorfo em X . Seja $B : D(A) \rightarrow X$ um operador linear tal que, $\forall \epsilon > 0$ existe $b \geq 0$ tais que*

$$\|Bx\| \leq \epsilon \|Ax\| + b\|x\|, \quad x \in D(A).$$

Então $A + B$ gera um semigrupo holomorfo.

Demonstração. Assumiremos primeiro que A gera um semigrupo holomorfo limitado em X . Do Teorema 1.14, existe $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que

$$\Sigma_{\theta+\pi/2} \subset \rho(A) \quad \text{e} \quad \sup_{\lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}} \|\lambda R(\lambda, A)\| = M < \infty.$$

Segue, da hipótese, que dado um $\epsilon > 0$ existe $b \geq 0$ tal que para $x \in X$

$$\begin{aligned} \|BR(\lambda, A)x\| &\leq \epsilon \|AR(\lambda, A)x\| + b \|R(\lambda, A)x\| \\ &= \epsilon \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| + b \|R(\lambda, A)x\| \\ &\leq \epsilon(M+1)\|x\| + \frac{bM}{|\lambda|}\|x\|, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2(M+1)}$ e $|\lambda| > 4bM$ temos que $\|BR(\lambda, A)\| < 3/4$. Segue que $I - BR(\lambda, A)$ é inversível com $\|(I - BR(\lambda, A))^{-1}\| < 4$ sempre que $|\lambda| > 4bM$, $\lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}$. Como

$$\lambda - (A + B) = (I - BR(\lambda, A))(\lambda - A), \quad \lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}.$$

Segue que $\lambda - (A + B)$ é inversível para $\lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}$, $|\lambda| > 4bM$ e

$$\|R(\lambda, A + B)\| \leq \frac{4M}{|\lambda|}.$$

Pelo Corolário 1.7 $A + B$ gera um semigrupo holomorfo. Se A gera um semigrupo holomorfo, escolhemos $w \in \mathbb{R}$ tal que $A - w$ gera um semigrupo holomorfo limitado em X . Da primeira parte da prova $A + B - w$ gera um semigrupo holomorfo e portanto $A + B$ gera um semigrupo holomorfo em X . $\square$

1.2.4 Operadores de resolvente positivo

Nesta secção assumiremos que X é um espaço de Banach ordenado com cone normal X_+ (Veja apêndice D).

Definição 1.11. Dizemos que um operador em X tem resolvente positivo quando existir $w \in \mathbb{R}$ tal que $(w, \infty) \subset \rho(A)$ e $R(\lambda, A) \geq 0$ para $\lambda > w$.

Seja A um operador de resolvente positivo, então para $\lambda > w$

$$(-1)^n R(\lambda, A)^{(n)} = n! R(\lambda, A)^{n+1} \geq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim a função $R(\lambda, A)$ é completamente monotônica.¹

Proposição 1.5. *Seja A um operador de resolvente positivo e $s(A) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ ² então*

- i) $s(A) < \infty$ e para $\mu > \lambda > s(A)$ temos que $\lambda, \mu \in \rho(A)$ e $R(\lambda, A) \geq R(\mu, A) \geq 0$.
- ii) Se $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$ com $R(\lambda, A) \geq 0$ então $\lambda > s(A)$.
- iii) Se $s(A) > -\infty$ então $s(A) \in \sigma(A)$.

Demonstração. Seja

$$s = \inf\{w : (w, \infty) \subset \rho(A) \text{ e } R(\lambda, A) \geq 0 \text{ para todo } \lambda > w\}.$$

a) Por hipótese $s < \infty$. Se $s < \lambda < \mu$, então

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \geq 0$$

Assim $R(\lambda, A) \geq R(\mu, A)$.

b) Seja $H_s = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > s\}$. Afirmamos que $H_s \subset \rho(A)$. De fato, seja Ω_0 a componente conexa de $H_s \cap \rho(A)$ contendo (s, ∞) . Se $H_s \not\subset \rho(A)$ então existe $\mu_n \in \Omega_0$ tal que $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \in H_s \setminus \rho(A)$. Então do Teorema A.2 temos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|R(\mu_n, A)\| = \infty.$$

Do Princípio de Limitação Uniforme ([10], Teorema 2.2), existe $x \in X$ e $x^* \in X^*$ tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\langle x^*, R(\mu_n, A)x \rangle\| = \infty$. Como $X = \operatorname{span} X_+$ e $X^* = \operatorname{span} X_+^*$ (Teorema D.1) podemos assumir que $x \in X_+$, $x^* \in X_+^*$. Além disso

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \langle x^*, R(\lambda, A)x \rangle = \langle x^*, \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x \rangle = \langle x^*, (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} x \rangle$$

então $(-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \langle x^*, R(\lambda, A)x \rangle = \langle x^*, n! R(\lambda, A)^{n+1} x \rangle \geq 0$ para todo $\lambda > s$. Do Teorema de Bernstein ([13], §4 Teorema 12a), existe uma função crescente e limitada $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle x^*, R(\lambda + s_0, A)x \rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\alpha(t) = \widehat{d\alpha}(\lambda)$$

¹ Veja [13], pag 144.

² $s(A)$ é chamado a cota espectral de A .

para $\lambda > 0$, onde $\operatorname{Re} \mu > s_0 > s$. Segue por extensão holomorfa que

$$\langle x^*, R(\mu_n, A)x \rangle = \widehat{d\alpha}(\mu_n - s_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} |\langle x^*, R(\mu_n, A)x \rangle| &\leq \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} \mu_n - s_0)t} d\alpha(t) = \widehat{d\alpha}(\operatorname{Re} \mu_n - s_0) = \langle x^*, R(\operatorname{Re} \mu_n - s_0, A)x \rangle \\ &\leq \langle x^*, R(\operatorname{Re} \lambda_0, A)x \rangle \end{aligned}$$

onde $\lambda_0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re} \mu_n - s_0 > 0$ ($\operatorname{Re} \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \mu_n > s_0$). Isto é uma contradição com $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\langle x^*, R(\mu_n, A)x \rangle\| = \infty$.

c) Suponha que $s > -\infty$, então $s \in \sigma(A)$. De fato, se $s \in \rho(A)$ então $R(s, A) \geq 0$. Mais ainda, para $\mu < s$ suficientemente perto de s tem-se do Teorema A.2 que

$$R(\mu, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (s - \mu)^n R(s, A)^{n+1} \geq 0.$$

Então $(\mu, \infty) \subset R(\lambda, A) \geq 0$ para todo $\lambda \geq \mu$, o que contradiz a definição de s .

d) $s = s(A)$. De fato, se $s = -\infty$ então $\rho(A) = \mathbb{C}$ e $s(A) = s$. Se $s > -\infty$ segue que $s(A) \leq s$. Do item (c) $s \in \sigma(A)$ e $s = \sigma(A)$.

e) Suponhamos que existe $\lambda \in \rho(A)$ tal que $\lambda < s(A)$ e $R(\lambda, A) \geq 0$. Seja $\mu_n \rightarrow s(A)$, como $s(A) \in \sigma(A)$, então

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|R(\mu_n, A)\| = \infty. \quad (1.48)$$

Logo, de (D.5) $\|R(\mu_n, A)\| \leq C\|R(\lambda, A)\|$ o que é uma contradição com (1.48). $\square$

Semigrupo em $L^2(\Omega)$

Seja m, n inteiros positivos, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^{2m} , $L(x, D)$ o operador diferencial uniformemente fortemente elíptico (que definiremos a seguir) dado por

$$L(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u,$$

onde $a_\alpha \in C^j(\overline{\Omega})$ com $j = \max\{0, |\alpha| - m\}$. Se $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é um operador linear dado por

$$D(A) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$$

$$Au = L(x, D)u,$$

mostraremos que $-A$ gera um C_0 -semigrupo holomorfo em $L^2(\Omega)$ (veja Teorema 2.11).

Os resultados principais deste capítulo pode ser encontrados em [17], [18], [19].

2.1 Desigualdade de Gårding

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Consideremos um operador diferencial de ordem $2m$,

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{2.1}$$

onde os coeficiente são funções $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. A parte principal de $L(x, D)$ é o operador

$$L'(x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

De agora em diante denotaremos $L := L(x, D)$ exceto quando houver risco de confusão.

Definição 2.1. Diremos que L é um operador fortemente elíptico em Ω se

$$(-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right\} \geq c_0 |\xi|^{2m}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \Omega$ onde $c_0 > 0$ é independente de $x \in \Omega$. Se os coeficientes a_α com $|\alpha| = 2m$ são limitados em Ω , então diremos que o operador (2.1) é uniformemente fortemente elíptico em Ω . Chamamos c_0 de módulo (ou constante) de elipticidade forte.

Diremos que o operador L esta na forma divergente se pode ser escrito

$$Lu = \sum_{0 \leq |\rho|, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} D^\rho (a^{\rho\sigma} D^\sigma u).$$

Neste caso a condição de elipticidade toma a forma

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \xi^\rho a^{\rho\sigma}(x) \xi^\sigma \right\} \geq c_0 |\xi|^{2m} \quad (c_0 > 0). \quad (2.2)$$

Observação 2.1. Se os coeficientes de L $a_\alpha \in C^{|\alpha|-m}$ para $m < |\alpha| \leq 2m$, então podemos escrever L na forma divergente.

A partir de agora, estaremos supondo que L esta na forma divergente. Definimos o adjunto formal de L por

$$L^*v = \sum_{0 \leq |\rho|, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} D^\rho (\overline{a^{\sigma\rho}} D^\sigma v)$$

e a forma bilinear associada a L

$$B[v, u] = \sum_{0 \leq |\rho|, |\sigma| \leq m} (D^\rho v, a^{\rho\sigma} D^\sigma u) \quad (2.3)$$

onde $(f, g) = \int_\Omega f \bar{g} dx$. Note que se $a^{\rho\sigma} \in C^{|\rho|}(\Omega)$ para $0 \leq |\rho| \leq m$ então $B[v, u] = (v, Lu) = (L^*v, u)$ para $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Consideraremos as seguintes condições:

- (A₁) L é uniformemente fortemente elíptico em Ω com módulo de elipticidade c_0 .
- (A₂) Os coeficientes $a^{\rho\sigma}$ de L pertencem a $L^\infty(\Omega)$ e são limitados por uma constante c_1 .
- (A₃) Os coeficientes principais de L tem módulo de continuidade $c_2(t)$, isto é,

$$|a^{\rho\sigma}(x) - a^{\rho\sigma}(y)| \leq c_2(|x - y|) \quad \text{se } |\rho| = |\sigma| = m, \quad x, y \in \Omega.$$

onde $c_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} c_2(t) = 0$.

Assumiremos as seguintes notações:

$$H^j(\Omega) = W^{j,2}(\Omega), \quad H_0^j(\Omega) = W_0^{j,2}(\Omega), \quad \|\cdot\|_{j,\Omega} = \|\cdot\|_{j,2,\Omega}.$$

Note que $H^j(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, seu produto escalar é denotado por $(\cdot, \cdot)_{j,\Omega}$ e, para $j = 0$ por $(\cdot, \cdot)_\Omega$. Quando não há possibilidade de confusão omitiremos o símbolo Ω na notação da norma e do produto escalar.

Agora estamos em condições de enunciar e demonstrar a *desigualdade de Gårding*. Esta desigualdade desempenha um papel fundamental em toda a teoria de operadores ellipticos e sua demonstração, reproduzida a seguir, é belíssima e elementar.

Teorema 2.1. *Se Ω é aberto limitado e $(A_1), (A_2)$ e (A_3) estão satisfeitas, existem constantes $c > 0$ e $k_0 \geq 0$, que dependem somente de c_0, c_1, c_2 e Ω , tais que*

$$\operatorname{Re} B[\phi, \phi] \geq c \|\phi\|_m^2 - k_0 \|\phi\|_0^2 \quad (2.4)$$

para todo $\phi \in H_0^m(\Omega)$.

Demonstração. É suficiente provar (2.4) para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Introduzimos a seminorma

$$|\widehat{\phi}|_j = \left\{ \sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} |D^\alpha \phi(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

A prova será feita em 3 casos.

Caso 1. L é homogêneo ($a^{\rho\sigma} = 0$ se $|\rho| + |\sigma| < 2m$) e os coeficientes são constantes. Utilizaremos a transformada de Fourier. Recorde que a transformada de Fourier de $\phi(x)$ é dada por

$$\widetilde{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \phi(x) dx. \quad (2.5)$$

Verifica-se facilmente

$$\widetilde{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widetilde{u}(\xi). \quad (2.6)$$

Recorde ainda que o Teorema de Plancherel estabelece que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{\phi}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 dx \quad (2.7)$$

que equivalentemente

$$(\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi}) = (2\pi)^n (\phi, \psi), \quad \forall \phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.8)$$

Usando (2.8) e (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} B[\phi, \phi] &= \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} (D^\rho \phi, a^{\rho\sigma} D^\sigma \phi) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} ((i\xi)^\rho \widetilde{\phi}, a^{\rho\sigma} (i\xi)^\sigma \widetilde{\phi}) \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{\phi}(\xi)|^2 \left[\sum_{|\rho|=|\sigma|=m} a^{\rho\sigma} \xi^\rho \xi^\sigma \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Usando (2.2) e o fato que $|\xi|^{2m} \geq \sum_{|\rho|=m} \xi^\rho \xi^\rho$ temos

$$\operatorname{Re} B[\phi, \phi] \geq c_0 (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{\phi}(\xi)|^2 \left[\sum_{|\rho|=m} \xi^\rho \xi^\rho \right] d\xi.$$

Repetindo as contas em (2.9) com $a^{\rho\sigma} = \delta^{\rho\sigma}$ ($\delta^{\rho\sigma} = 0$ se $\rho \neq \sigma$ e $\delta^{\rho\sigma} = 1$ se $\rho = \sigma$) obtemos

$$|\widehat{\phi}|_m^2 = \sum_{|\rho|=m} (D^\rho \phi, D^\rho \phi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{\phi}(\xi)|^2 \left[\sum_{|\rho|=m} \xi^\rho \xi^\rho \right] d\xi$$

e portanto

$$\operatorname{Re} B[\phi, \phi] \geq c_0 |\widehat{\phi}|_m^2. \quad (2.10)$$

Caso 2. L é homogêneo com coeficientes não são constantes.

Estimaremos $\operatorname{Re} B[\phi, \phi]$ no caso em que suporte de ϕ esteja contido em uma vizinhança W de $x_0 \in \Omega$ e o diâmetro $|W|$ de W é suficientemente pequeno. Note que

$$\begin{aligned} B[\phi, \phi] &= \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} (D^\rho \phi, a^{\rho\sigma}(x_0) D^\sigma \phi) + \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} (D^\rho \phi, [a^{\rho\sigma}(x) - a^{\rho\sigma}(x_0)] D^\sigma \phi) \\ &= I + J. \end{aligned}$$

De (2.10)

$$\operatorname{Re} I \geq c_0 |\widehat{\phi}|_m^2.$$

Do módulo de continuidade c_2 , existe $\delta > 0$ tal que se $|W| < \delta$

$$|J| \leq \frac{1}{2} c_0 |\widehat{\phi}|_m^2.$$

Assim,

$$\operatorname{Re} B[\phi, \phi] \geq \frac{1}{2} c_0 |\widehat{\phi}|_m^2, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(W). \quad (2.11)$$

Caso 3. Caso geral.

Seja δ um número real positivo escolhido no Caso 2. Cobrimos $\overline{\Omega}$ por um número finito de abertos W_j , cada um tendo diâmetro $< \delta$. Seja $\beta_j \in C^\infty$ tal que $\sum_j \beta_j^2 = 1$ com $\operatorname{supp} \beta_j \subset W_j$ (usando uma Partição da Unidade subordinada à cobertura $\{W_j\}$). Note que

$$\begin{aligned} B[\phi, \phi] &= \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \int_{\Omega} D^\rho \phi \overline{a^{\rho\sigma}} D^\sigma \overline{\phi} dx + \sum_{\substack{|\rho|, |\sigma| \leq m \\ |\rho|+|\sigma| < 2m}} \int_{\Omega} D^\rho \phi \overline{a^{\rho\sigma}} D^\sigma \overline{\phi} dx \\ &= H + K. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Claramente

$$|K| \leq C_1 \|\phi\|_m \|\phi\|_{m-1}$$

onde C_1 é uma constante que depende unicamente de c_1 . Continuando, da regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} H &= \sum_j \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \int_{\Omega} [\beta_j D^\rho \phi] \overline{a^{\rho\sigma}} [\beta_j D^\sigma \overline{\phi}] dx \\ &= \sum_j \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \int_{\Omega} D^\rho (\beta_j \phi) \overline{a^{\rho\sigma}} D^\sigma (\beta_j \overline{\phi}) dx + H_2 = H_1 + H_2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} H_2 &= - \sum_j \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \sum_{\substack{\beta \leq \sigma \\ \beta \neq \sigma}} \binom{\sigma}{\beta} \int_{\Omega} \overline{a^{\rho\sigma}} D^{\sigma-\beta} \beta_j D^\beta \overline{\phi} D^\rho (\beta_j \phi) dx \\ &\quad - \sum_j \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \sum_{\substack{\alpha \leq \rho \\ \alpha \neq \rho}} \binom{\rho}{\alpha} \int_{\Omega} \overline{a^{\rho\sigma}} D^{\rho-\alpha} \beta_j D^\alpha \phi D^\sigma (\beta_j \overline{\phi}) dx \end{aligned}$$

$$+ \sum_j \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \sum_{\substack{\alpha \leq \rho \\ \alpha \neq \rho}} \sum_{\substack{\beta \leq \sigma \\ \beta \neq \sigma}} \binom{\rho}{\alpha} \binom{\sigma}{\beta} \int_{\Omega} \overline{a^{\rho\sigma}} D^{\rho-\alpha} \beta_j D^{\sigma-\beta} \beta_j D^{\alpha} \phi D^{\beta} \overline{\phi} dx.$$

Logo

$$|H_2| \leq C_2 \|\phi\|_m \|\phi\|_{m-1} \quad (2.14)$$

onde C_2 é uma constante que depende somente de c_1 e dos β_j 's. H_1 é soma de termos

$$\sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \int_{\Omega} D^{\rho} \psi_j \overline{a^{\rho\sigma}} D^{\sigma} \overline{\psi_j} dx, \quad \text{com } \psi_j = \beta_j \phi \in C_0^{\infty}(W_j).$$

Usando (2.11) com $W = W_j$, segue que

$$\operatorname{Re} H_1 \geq \frac{1}{2} c_0 \sum_j |\widehat{\psi_j}|_m^2 = \frac{1}{2} c_0 \sum_j \sum_{|\rho|=m} \int_{\Omega} D^{\rho}(\beta_j \phi) D^{\rho}(\beta_j \overline{\phi}) dx.$$

Repetindo contas de (2.13) com $a^{\rho\sigma} = \delta^{\rho\sigma}$

$$\sum_j \sum_{|\rho|=m} \int_{\Omega} [\beta_j D^{\rho} \phi] [\beta_j D^{\rho} \overline{\phi}] dx = \sum_j \sum_{|\rho|=m} \int_{\Omega} D^{\rho}(\beta_j \phi) D^{\rho}(\beta_j \overline{\phi}) dx + H_2^1.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} H_1 &\geq \frac{1}{2} c_0 \sum_j \sum_{|\rho|=m} \int_{\Omega} [\beta_j D^{\rho} \phi] [\beta_j D^{\rho} \overline{\phi}] dx - \frac{1}{2} c_0 H_2^1 \\ &= \frac{1}{2} c_0 |\widehat{\phi}|_m^2 - \frac{1}{2} c_0 H_2^1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

De maneira análoga a (2.14) obtemos

$$\left| \frac{1}{2} c_0 H_2^1 \right| \leq C_3 \|\phi\|_m \|\phi\|_{m-1}, \quad (2.16)$$

onde C_3 depende apenas dos β_j 's. Combinando (2.12)-(2.16) obtemos

$$\operatorname{Re} B[\phi, \phi] \geq \frac{1}{2} c_0 |\widehat{\phi}|_m^2 - C_4 \|\phi\|_m \|\phi\|_{m-1}, \quad (2.17)$$

onde C_4 é uma constante que depende apenas de c_0, c_1, c_2, Ω . Usando a desigualdade de Cauchy temos

$$C_4 \|\phi\|_m \|\phi\|_{m-1} \leq \eta \|\phi\|_m^2 + \frac{C_4^2}{4\eta} \|\phi\|_{m-1}^2 \quad (\eta > 0).$$

Do Teorema B.10 segue que

$$C_4 \|\phi\|_m \|\phi\|_{m-1} \leq \eta \|\phi\|_m^2 + \frac{C_4^2}{4\eta} (\epsilon \|\phi\|_m^2 + C_5 \|\phi\|_0^2) \quad (\epsilon > 0). \quad (2.18)$$

onde C_5 depende apenas de ϵ, m, Ω . Do Teorema B.10 segue que

$$\frac{1}{2} c_0 |\hat{\phi}|_m^2 \geq \frac{1}{3} c_0 \|\phi\|_m^2 - C_6 \|\phi\|_0^2. \quad (2.19)$$

Assim

$$\frac{1}{2} c_0 |\hat{\phi}|_m^2 - C_4 \|\phi\|_m^2 \|\phi\|_{m-1}^2 \geq \left(\frac{1}{3} c_0 - \eta - \frac{C_4^2 \epsilon}{4\eta} \right) \|\phi\|_m^2 - \left(C_6 + \frac{C_5 C_4^2}{4\eta} \right) \|\phi\|_0^2. \quad (2.20)$$

Tomando $\eta = \frac{c_0}{9}$, $\epsilon < \frac{4\eta}{C_4^2} \frac{c_0}{9}$ e substituindo em (2.20), obtemos a desigualdade (2.4). $\square$

2.2 Problema de Dirichlet

Seja L operador fortemente elíptico de ordem $2m$ na forma divergente. Consideremos o seguinte problema de Dirichlet

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad (2.22)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada direcional na direção do vetor normal à fronteira e f é uma função localmente integrável.

Definição 2.2. Uma função $u \in W_{\text{loc}}^{m,p}(\Omega)$ é chamada solução fraca ou generalizada de (2.21) se

$$B[\phi, u] = (\phi, f) \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.23)$$

Uma função $u \in H_0^m(\Omega)$ que satisfaz (2.23) é chamada uma solução generalizada ou fraca do problema de Dirichlet (2.21), (2.22).

A definição de solução do problema de Dirichlet generalizado é motivada pela afirmação: Se $u \in C^m(\bar{\Omega})$ e $\partial\Omega \in C^m$ então

$$u \in H_0^m(\Omega), \quad \text{se e só se,} \quad \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad \forall j \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

a prova desta afirmação poder ser encontrada em [12].

Como consequência do Teorema de Lax Milgram e do Teorema 2.1 segue o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *Suponha que Ω é aberto limitado e que L satisfaça (A_1) , (A_2) e (A_3) . Então existe uma constante k_0 tal que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \lambda \geq k_0$ o problema de Dirichlet generalizado associado a $L + \lambda$ tem uma única solução generalizada para cada $f \in L^2(\Omega)$.*

Teorema 2.3. *Suponha que Ω é aberto limitado, L satisfaça (A_1) , (A_2) e (A_3) . Então a Alternativa de Fredholm se verifica para o problema de Dirichlet generalizado. Mais precisamente, vale uma das seguintes alternativas:*

i) *Para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe um único $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que*

$$B[\phi, u] = (\phi, f) \quad \text{para todo } \phi \in H_0^m(\Omega). \quad (2.24)$$

ii) *Existe um número finito de soluções linearmente independentes v_j ($j = 1, \dots, h$) de*

$$B[v, \phi] = 0 \quad \text{para todo } \phi \in H_0^m(\Omega), \quad v \in H_0^m(\Omega)$$

e (2.24) tem solução, se e só se, $(f, v_j) = 0$ para $1 \leq j \leq h$.

Demonstração. Tomemos $k > k_0$ fixo, onde k_0 é a constante que aparece em (2.4). Seja $L_k = L + k$. A forma bilinear associada a L_k é $B_k[u, v] = B[u, v] + k(u, v)$. Do Teorema 2.2, para cada $g \in L^2(\Omega)$ existe um único $w \in H_0^m(\Omega)$ tal que

$$B_k[\phi, w] = (\phi, g) \quad \text{para todo } \phi \in H_0^m(\Omega). \quad (2.25)$$

Seja $R : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ com $Rg = w$. Note que (2.24) é equivalente a

$$B_k[\phi, u] = (\phi, ku + f) \quad \text{para toda } \phi \in H_0^m(\Omega), u \in H_0^m(\Omega).$$

Então u satisfaz (2.24) se e somente se $u = R(ku + f)$, isto é, se e só se,

$$u - Tu = f_1 \quad (T = kR, \quad f_1 = Rf). \quad (2.26)$$

De (2.25) temos

$$c\|w\|_m^2 \leq |B_k[w, w]| = |(w, g)| \leq \|w\|_m \|g\|_0,$$

ou seja, $c\|w\|_m \leq \|g\|_0$ ($c = c(c_0, c_1, c_2)$). Daí, T leva limitados de $L^2(\Omega)$ em limitados em $H_0^m(\Omega)$. Tomando um domínio limitado Ω_0 com fronteira de C^1 tal que $\Omega \subset \Omega_0$, $H_0^m(\Omega)$ pode ser imerso isométricamente em $H_0^m(\Omega_0)$ por extensão de cada função por zero em

$\Omega_0 \setminus \Omega$. Aplicando o Teorema B.13 em Ω_0 , concluímos que T é compacto. Assim, da alternativa de Fredholm, segue que ou

a) para cada $f_1 \in L^2(\Omega)$ existe uma única solução de (2.26)

ou

b) existe uma solução não trivial de $u - Tu = 0$ e (2.26) tem solução se e somente se $(f_1, v_j) = 0$ para um número finito de funções v_j ($1 \leq j \leq h$) que formam uma base do espaço de soluções $v - T^*v = 0$.

Se a) se verifica, então existe uma solução de (2.24) para todo $f \in L^2(\Omega)$. Esta solução é única pois $f = 0$ implica $f_1 = 0$ e portanto $u = 0$ em (2.26).

Para o caso b), note que L^* também satisfaz (A_1) , (A_2) e (A_3) , e portanto os Teoremas 2.1 e 2.2 também são certos para L^* com uma constante k_0^* (não necessariamente igual a k_0). Tomemos $k > \max\{k_0, k_0^*\}$ fixo. Analogamente ao caso L , consideramos $R_* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ $R_*g = w$ onde $g \in L^2(\Omega)$, $w \in H_0^m(\Omega)$ satisfazem

$$B_k^*[\phi, w] = (\phi, g) \quad \text{para todo } \phi \in H_0^m(\Omega).$$

Seja $T_* = kR_*$. Mostraremos que $T^* = T_*$. De fato,

$$\begin{aligned} (Tf, g) &= k(Rf, g) = kB_k^*[Rf, R_*g] = k\overline{B_k[R_*g, Rf]} = k\overline{(R_*g, f)} \\ &= (f, kR_*g) = (f, T_*g). \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $v - T^*v = 0$ é equivalente a

$$B[v, \phi] = 0 \quad \text{para todo } \phi \in H_0^m(\Omega), v \in H_0^m(\Omega). \quad (2.27)$$

Assim, para completar a prova do teorema, basta mostrar que $(f, v_j) = 0$ equivale a $(f_1, v_j) = 0$. De fato, se $v_j \in H_0^m(\Omega)$ é uma solução de (2.27) então $v_j = T^*v_j$ e portanto

$$(f_1, v_j) = (Tf, v_j) = \frac{1}{k}(f, T^*v_j) = (f, v_j). \quad \square$$

2.3 Regularidade interior

Nesta seção mostraremos vários resultados sobre propriedades de regularidade local das soluções fracas $u \in H^m(\Omega)$ das equações elíticas de ordem $2m$.

Lema 2.1. *Seja $A \subset\subset \Omega$ e $h_0 = \text{dist}(A, \partial\Omega)$. Seja $u \in H^j(\Omega)$ para algum $j \geq 1$. Então*

$$u^h(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \quad (1 \leq i \leq n)$$

esta bem definida para $x \in A$, $0 < |h| < h_0$. Além disso,

$$\|u^h\|_{j-1,A} \leq \|u\|_{j,\Omega} \quad (2.28)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| u^h - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{j-1,A} = 0. \quad (2.29)$$

Demonstração. Por simplicidade, suponhamos que $i = 1$. Se $u \in \widehat{C}^{j,2}(\Omega)$ e $0 \leq |\alpha| < j$, então

$$\begin{aligned} \int_A |D^\alpha u^h(x)|^2 dx &= \int_A \left| \frac{1}{h} D^\alpha \int_{x_1}^{x_1+h} D_{\xi_1} u(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1 \right|^2 dx \\ &= \int_A \left| \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1+h} D^\alpha D_{\xi_1} u(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1 \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e substituindo $\xi_1 = \xi'_1 + x_1$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_A |D^\alpha u^h(x)|^2 dx &\leq \int_A \frac{1}{h} \int_0^h |D^\alpha D_{\xi'_1} u(\xi'_1 + x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 d\xi'_1 dx \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \left\{ \int_A |D^\alpha D_{\xi'_1} u(\xi'_1 + x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx \right\} d\xi'_1. \end{aligned}$$

Substituindo x_1 por $x_1 + \xi'_1$ na integral interna e notando que $A - h e_1 \subset \Omega$, concluímos que a integral interna é limitada por

$$\int_\Omega |D^\alpha D_{x_1} u(x)|^2 dx.$$

Assim,

$$\int_A |D^\alpha u^h(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |D^\alpha D_{x_1} u(x)|^2 dx.$$

Somando sobre todos os α 's, $|\alpha| < j$, (2.28) segue para $u \in \widehat{C}^{j,2}(\Omega)$. Assumamos agora que $u \in H^j(\Omega)$ e tomemos uma sequência (u_k) em $\widehat{C}^{j,2}(\Omega)$ com $\|u_k - u\|_{j,\Omega} \rightarrow 0$. Se $|\alpha| \leq j$

$$\begin{aligned} \int_A |D^\alpha u_k(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - D^\alpha u(x_1 + h, x_2, \dots, x_n)|^2 dx \\ \leq \int_\Omega |D^\alpha u_k(x) - D^\alpha u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u_k^h - u^h\|_{j,A} \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Se escrevemos (2.28) para cada u_k e fazemos $k \rightarrow \infty$, obtemos (2.28).

Para provar (2.29) observemos primeiro que esta vale para $u \in \widehat{C}^{j,2}(\Omega)$ pois $u^h \rightarrow \partial u / \partial x_1$, quando $h \rightarrow 0$, junto com suas $j - 1$ primeiras derivada, uniformemente em A . Se $u \in H^j(\Omega)$, dado $\epsilon > 0$, escolhamos $v \in \widehat{C}^{j,2}(\Omega)$ tal que $\|v - u\|_{j,\Omega} \leq \epsilon$. De (2.28) temos que $\|v^h - u^h\|_{j-1,A} \leq \epsilon$. Assim,

$$\left\| u^h - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{j-1,A} \leq \|u^h - v^h\|_{j-1,A} + \left\| v^h - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{j-1,A} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{j-1,A} \leq 3\epsilon$$

se h é suficientemente pequeno. Isto completa a prova. $\square$

Lema 2.2. *Seja Ω limitado e $u \in H_0^j(\Omega)$, estenda u por zero fora de Ω . Então*

$$\|u^h\|_{j-1,\Omega} \leq \|u\|_{j,\Omega} \quad (2.30)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| u^h - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{j-1,\Omega} = 0. \quad (2.31)$$

Demonstração. Para todo aberto $G \supset \supset \Omega$, $u \in H^j(G)$. Agora aplicamos o Lema 2.1 com A e Ω substituído por Ω e G , respetivamente. $\square$

Lema 2.3. *Seja $u \in H^j(\Omega)$. Se existe um $C > 0$ tal que $\|u^h\|_{j,A} \leq C$ para todo $A \subset \subset \Omega$ e para todo h suficientemente pequeno, então $D_i u \in H^j(\Omega)$ e $\|D_i u\|_{j,\Omega} \leq C$.*

Demonstração. Existe uma sequência (h_k) , $h_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, tal que (u^{h_k}) converge fracamente em $L^2(A)$ para uma função u_i . Dada $\phi \in C_0^\infty(A)$, temos

$$\int_A u_i \phi \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A u^{h_k} \phi \, dx = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A u \phi^{-h_k} \, dx = - \int_A u D_i \phi \, dx.$$

Assim u_i é a derivada fraca $D_i u$ de u . Como as duas últimas igualdades valem para qualquer sequência (h_k) , (u^h) converge fracamente em $L^2(A)$ a $D_i u$, quando $h \rightarrow 0$. Do Teorema B.3, $D_i u \in H^j(A)$ e $D^\alpha u^h$ (para $0 \leq |\alpha| \leq j$) converge fracamente para $D^\alpha D_i u$, quando $h \rightarrow 0$. Assim,

$$\|D^\alpha D_i u\|_{0,A} \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \|D^\alpha u^h\|_{0,A}.$$

Somando sobre todos os α 's, obtemos $\|D_i u\|_{j,A} \leq C$. Logo $D_i u \in H^j(\Omega)$ e $\|D_i u\|_{j,\Omega} \leq C$. $\square$

Considere a seguinte hipótese:

(A_4) Se $|\rho| = m$, então $|a^{\rho\sigma}(x) - a^{\rho\sigma}(y)| \leq c_3|x - y|$ para todo $|\sigma| \leq m$ e $x, y \in \Omega$.

Lema 2.4. Assumamos que (A_1), (A_2) e (A_4) se verificam, $u \in H^m(\Omega)$ e para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$|B[\phi, u]| \leq P\|\phi\|_{m-1} \quad (P \text{ constante}) \quad (2.32)$$

onde B é dado por (2.3). Então, para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$, $u \in H^{j+1}(\Omega')$ e

$$\|u\|_{m+1, \Omega'} \leq C(P + \|u\|_{m, \Omega}), \quad (2.33)$$

onde C é uma constante dependendo somente de $c_0, c_1, c_3, \Omega', \Omega$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $a^{\rho\sigma} = 0$ se $|\rho| < m$. De fato, se denotamos $\widehat{B}[\phi, u] = B[\phi, u] - \sum_{|\rho| < m, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, a^{\rho\sigma} D^\sigma u)$ então $|\widehat{B}[\phi, u]| \leq (P + c\|u\|_m)\|\phi\|_{m-1}$, onde c só depende de c_1 (da condição (A_2)). Assim a hipótese do lema se verifica para $\widehat{B}$ trocando P por $P + c\|u\|_m$.

Seja Ω'', Ω''' abertos tais que $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$ e $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\xi = 1$ em Ω'' , $\xi = 0$ fora de Ω'' . Seja $v = \xi u$, $v^h(x) = (v(x^h) - v(x))/h$ onde $x^h = x + he_i$ para algum i fixado ($1 \leq i \leq n$). Então é fácil verificar que $v, v^h \in H_0^m(\Omega)$ se $0 < |h| < h_0$, onde $h_0 = \text{dist}(\Omega''', \partial\Omega)$.

Agora em adiante c será uma constante genérica, isto é, uma constante que pode mudar de valor mais depende dos mesmos parâmetros.

Afirmção. Para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$|B[\phi, v^h]| \leq c(P + \|u\|_m)\|\phi\|_m. \quad (2.34)$$

De fato, para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$B[\phi, v^h] = \sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, a^{\rho\sigma} D^\sigma (\xi u)^h).$$

Para $\gamma \leq \sigma$ (com $|\gamma| < |\sigma|$) segue do Lema 2.2 que

$$\|(D^{\sigma-\gamma} \xi \cdot D^\gamma u)^h\|_{0, \Omega} \leq \|D^{\sigma-\gamma} \xi \cdot D^\gamma u\|_{1, \Omega}. \quad (2.35)$$

Portanto, usando a regra de Leibniz e (2.35) obtemos

$$B[\phi, v^h] = \sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, a^{\rho\sigma} (\xi D^\sigma u)^h) + \sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} \sum_{\substack{\gamma \leq \sigma \\ \gamma \neq \sigma}} \binom{\sigma}{\gamma} (D^\rho \phi, a^{\rho\sigma} (D^{\sigma-\gamma} \xi D^\gamma u)^h)$$

e

$$|B[\phi, v^h]| \leq \left| \sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, a^{\rho\sigma} (\xi D^\sigma u)^h) \right| + c \|\phi\|_m \|u\|_m \quad (2.36)$$

onde c é um constante que depende somente de $c_1 ((A_2))$ e ξ_i . Usando

$$f(x)g^h(x) = (f(x)g(x))^h - f^h(x)g(x^h)$$

obtemos que o primeiro termo de lado direito de (2.36) é igual a

$$\left| \sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, (a^{\rho\sigma} \xi D^\sigma u)^h) - \sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, (a^{\rho\sigma})^h \xi(x^h) (D^\sigma u)(x^h)) \right|. \quad (2.37)$$

Usando a constante de Lipschitz de $a^{\rho\sigma}$ ($|\rho| = m$) e o fato que, para toda g com suporte em Ω'' ,

$$\int_{\Omega} |g(x^h)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx$$

temos $|\sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, (a^{\rho\sigma})^h \xi(x^h) (D^\sigma u)(x^h))| \leq c \|\phi\|_m \|u\|_m$. Então de (2.36) obtemos

$$|B[\phi, v^h]| \leq \left| \sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, (a^{\rho\sigma} \xi D^\sigma u)^h) \right| + c \|\phi\|_m \|u\|_m.$$

Usando $(f, g^h)_{\mathbb{R}^n} = -(f^{-h}, g)_{\mathbb{R}^n}$ (suporte de g é compacto) e que $\text{supp } \xi \subset \subset \Omega$ temos

$$|B[\phi, v^h]| \leq \left| \sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} (\xi D^\rho \phi^{-h}, a^{\rho\sigma} D^\sigma u) \right| + c \|\phi\|_m \|u\|_m. \quad (2.38)$$

Usando o Lema 2.2 e a regra de Leibniz obtemos que o primeiro termo do lado direito de (2.38) pode ser estimado por

$$\left| \sum_{|\rho|=m, |\sigma| \leq m} (D^\rho (\xi \phi^{-h}), a^{\rho\sigma} D^\sigma u) \right| + c \|\phi\|_m \|u\|_m.$$

Assim,

$$|B[\phi, v^h]| \leq |B[\xi \phi^{-h}, u]| + c \|\phi\|_m \|u\|_m.$$

Da hipótese (2.32), com ϕ substituída por $\xi \phi^{-h}$, e de $\|\xi \phi^{-h}\|_{m-1} \leq c \|\phi\|_m$ (Lema 2.2) segue (2.34). Isto prova a afirmação.

Por densidade, (2.34) também vale para cada $\phi \in H_0^m(\Omega)$. Tomando em (2.34) $\phi =$

v^h , usando a desigualdade de Garding e o fato que $\|v^h\| \leq c\|u\|_1$ (Lema 2.2) segue que

$$\begin{aligned}\|v^h\|_m^2 &\leq c|B[v^h, v^h]| + c\|v^h\|_0^2 \leq c(P + \|u\|_m)\|v^h\|_m + c\|v^h\|_0^2 \\ &\leq c(P + \|u\|_m)\|v^h\|_m.\end{aligned}$$

Logo

$$\|v^h\|_m \leq c(P + \|u\|_m).$$

Seja $0 < |h| < \min\{h_0, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega_1)\}$. Então, se $x \in \Omega'$ temos que $x + he_1 \in \Omega_1$ e portanto $v^h(x) = (\xi u)^h(x) = u^h(x)$. Logo

$$\|u^h\|_{m, \Omega'} \leq c(P + \|u\|_m)$$

e o resultado segue do Lema 2.3. $\square$

Consideremos a seguinte hipótese

(B_j) Os coeficientes $a^{\rho\sigma}$ pertencem a $C_B^{|\rho|+j-m}(\Omega)$ para $|\rho| + j - m > 0$, $|\sigma| \leq m$.

Denotamos por K a cota superior de todas as derivadas até ordem $|\rho| + j - m > 0$ de os coeficientes $a^{\rho\sigma}$ em Ω .

Lema 2.5. *Assumamos que (A_1) , (A_2) e (B_j) se verificam para algum $1 \leq j \leq m$, $u \in H^m(\Omega)$ e*

$$|B[\phi, u]| \leq P\|\phi\|_{m-j} \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.39)$$

$(P \text{ constante})$. Então, $u \in H^{m+j}(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ e

$$\|u\|_{m+j, \Omega'} \leq C(P + \|u\|_{m, \Omega}), \quad (2.40)$$

onde C é uma constante dependendo somente de $c_0, c_1, K, \Omega, \Omega'$.

Demonstração. A prova sera feita por indução. Para $j = 1$, segue do Lema 2.4. Suponhamos que resultado valha para $j - 1$ e provemos que vale para j ($2 \leq j \leq m$). Como na prova do Lema 2.4, podemos assumir que $a^{\rho\sigma} = 0$ se $|\rho| + j - m \leq 0$. Introduzimos um aberto Ω'' tal que $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. Note que se vale (2.39) vale para j , também vale para $j - 1$, isto é,

$$|B[\phi, u]| \leq P\|\phi\|_{m-(j-1)}.$$

Assim, da hipótese de indução $u \in H^{m+j-1}(\Omega'')$ e

$$\|u\|_{m+j-1, \Omega''} \leq c(P + \|u\|_m) \quad (2.41)$$

onde c é uma constante que só depende de $c_0, c_1, K, \Omega, \Omega'$.

Afirmção. Para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega'')$

$$|B[\phi, D_i u]| \leq c(P + \|u\|_m) \|\phi\|_{m-(j-1)}. \quad (2.42)$$

De fato, como $u \in H^{m+j-1}(\Omega'')$ ($j \geq 2$) temos que $u \in H^{m+1}(\Omega'')$. Portanto podemos escrever, para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega'')$ (regra de Leibniz e derivada fraca),

$$\begin{aligned} B[\phi, D_i u] &= \sum_{\substack{m-j < |\rho| \leq m \\ |\sigma| \leq m}} (D^\rho \phi, a^{\rho\sigma} D^\sigma D_i u)_{\Omega''} \\ &= \sum_{\substack{m-j < |\rho| \leq m \\ |\sigma| \leq m}} (D^\rho \phi, D_i(a^{\rho\sigma} D^\sigma u))_{\Omega''} - \sum_{\substack{m-j < |\rho| \leq m \\ |\sigma| \leq m}} (D^\rho \phi, D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u)_{\Omega''} \\ &= - \sum_{\substack{m-j < |\rho| \leq m \\ |\sigma| \leq m}} (D^\rho D_i \phi, a^{\rho\sigma} D^\sigma u)_{\Omega''} - \sum_{\substack{m-j < |\rho| \leq m \\ |\sigma| \leq m}} (D^\rho \phi, D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u)_{\Omega''} \\ &= -B[D_i \phi, u] - I \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde I é uma soma de termos da forma

$$I_{\rho\sigma} = (D^\rho \phi, D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u)_{\Omega''}.$$

Vamos a estimar $I_{\rho\sigma}$ transferindo derivadas do primeiro para o segundo fator do produto interno. Se $|\rho| - m + j > 0$, tomemos um multi-índice γ com $\gamma \leq \rho$ e $|\gamma| = |\rho| - m + j - 1$. Note que $D_i a^{\rho\sigma} \in C_B^{|\rho|-m+j-1}(\Omega)$ e $D^\sigma u \in H^{m+j-1-|\sigma|}(\Omega'') \subset H^{|\rho|-m+j-1}(\Omega'')$ (pois $m + j - 1 - |\sigma| \geq |\rho| - m + j - 1$). Integrando por partes

$$\begin{aligned} |I_{\rho\sigma}| &= \left| \int_{\Omega''} D^\gamma D^{\rho-\gamma} \phi D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u \, dx \right| = \left| \int_{\Omega''} D^{\rho-\gamma} \phi D^\gamma (D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u) \, dx \right| \\ &\leq c \|\phi\|_{m-(j-1), \Omega''} \|u\|_{m+j-1, \Omega''} \end{aligned}$$

onde c depende de K .

De (2.43), da estimativa para $I_{\rho\sigma}$ e de (2.39) obtemos

$$\begin{aligned} |B[\phi, D_i u]| &\leq P \|D_i \phi\|_{m-j, \Omega''} + c \|\phi\|_{m-(j-1), \Omega''} \|u\|_{m+j-1, \Omega''} \\ &\leq P \|\phi\|_{m-(j-1), \Omega''} + c \|\phi\|_{m-(j-1), \Omega''} \|u\|_{m+j-1, \Omega''} \\ &\leq c(P + \|u\|_{m+j-1, \Omega''}) \|\phi\|_{m-(j-1), \Omega''} \end{aligned} \quad (2.44)$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega'')$. Agora usando (2.41) em (2.44) obtemos a afirmação.

Logo, da hipótese de indução e de (2.42), podemos concluir que $D_i u \in H^{m+j-1}(\Omega')$ e

$$\|D_i u\|_{m+j-1, \Omega'} \leq c(P + \|u\|_m).$$

Isto completa a prova. $\square$

Como consequência do Lema 2.5 temos:

Corolário 2.1. *Suponha (A_1) , (A_2) e (B_j) , para algum $1 \leq j \leq m$. Se $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^m(\Omega)$ são tais que*

$$B[\phi, u] = (\phi, f) \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2.45)$$

então para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$, $u \in H^{m+j}(\Omega')$ e

$$\|u\|_{m+j, \Omega'} \leq C(\|f\|_{0, \Omega} + \|u\|_{m, \Omega}), \quad (2.46)$$

onde C é uma constante que depende somente de $c_0, c_1, K, \Omega', \Omega$.

Teorema 2.4. *Suponha (A_1) , (A_2) e (B_{m+k}) , para algum $k \geq 0$. Se $f \in H^k(\Omega)$ e $u \in H^m(\Omega)$ são tais que*

$$B[\phi, u] = (\phi, f) \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$, $u \in H^{2m+k}(\Omega')$ e

$$\|u\|_{2m+k, \Omega'} \leq C(\|f\|_{k, \Omega} + \|u\|_{m, \Omega}), \quad (2.47)$$

onde C é uma constante que depende somente de $c_0, c_1, K, \Omega, \Omega'$.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre k . O caso $k = 0$ segue do Corolário 2.1. Assumindo agora que o teorema é válido para $k - 1$, mostraremos que vale para k ($k \geq 1$). Note que (B_{m+k}) implica (B_{m+k-1}) , então por hipótese de indução $u \in H^{2m+k-1}(\Omega'')$ ($\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$) e

$$\|u\|_{2m+k-1, \Omega''} \leq c(\|f\|_{k-1, \Omega} + \|u\|_{m, \Omega}). \quad (2.48)$$

Afirmção. $B[\phi, D_i u] = (\phi, f_i)$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega'')$ e para algum $f_i \in H^{k-1}(\Omega'')$. De fato, para $\phi \in C_0^\infty(\Omega'')$

$$\begin{aligned} B[D_i \phi, u] &= \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (D_i D^\rho \phi, a^{\rho\sigma} D^\sigma u) = - \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, D_i (a^{\rho\sigma} D^\sigma u)) \\ &= -B[\phi, D_i u] - \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (D^\rho \phi, D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u). \end{aligned}$$

Da hipóteses (B_{m+k}) ($k \geq 1$) segue que $D_i a^{\rho\sigma} \in C_B^{|\rho|+k-1}(\Omega)$. Além disso $D^\sigma u \in H^{m+k-1}(\Omega'')$ para $|s\alpha| \leq m$. Então $D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u \in H^{|\rho|+k-1}(\Omega'')$ e

$$(D^\rho \phi, D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u) = (-1)^{|\rho|} (\phi, D^\rho (D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u)).$$

Assim $A_i = \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} D^\rho (D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma)$ é um operador diferencial de ordem $2m$ com coeficientes em $C_B^{k-1}(\Omega)$ e $A_i u \in H^{k-1}(\Omega)$. Logo

$$B[D_i \phi, u] = -B[\phi, D_i u] - (\phi, A_i u) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega''). \quad (2.49)$$

Substituindo $D_i \phi$ em lugar de ϕ em (2.45) e usando (2.49) obtemos

$$B[\psi, D_i u] = (\psi, f_i), \quad \text{onde } f_i = D_i f - A_i u. \quad (2.50)$$

Isto prova a afirmação.

De (2.48)

$$\begin{aligned} \|f_i\|_{k-1, \Omega''} &\leq \|D_i f\|_{k-1, \Omega''} + \|A_i u\|_{k-1, \Omega''} \leq c(\|f\|_{k, \Omega} + \|u\|_{2m+k-1, \Omega''}) \\ &\leq c(\|f\|_{k, \Omega} + \|u\|_{m, \Omega}). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Agora, aplicamos a hipóteses de indução para $D_i u$ concluímos que $D_i u \in H^{2m+k-1}(\Omega')$ e

$$\|D_i u\|_{2m+k-1, \Omega'} \leq c(\|f_i\|_{k-1, \Omega''} + \|D_i u\|_{m, \Omega'').} \quad (2.52)$$

Usando (2.51) e (2.48) (com $k = 1$), encontramos que o lado direito de (2.52) é limitado por $c(\|f\|_{k, \Omega} + \|u\|_{m, \Omega})$. Isto completa a prova do teorema. $\square$

Teorema 2.5. *Suponhamos que (A_1) vale, $a^{\rho\sigma} \in C_B^m(\Omega)$, $u \in H^0(\Omega)$ e que para algum inteiro j com $0 \leq j \leq 2m$*

$$|(L^* \phi, u)| \leq P \|\phi\|_{2m-j} \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.53)$$

Então, para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$, $u \in H^j(\Omega')$ e

$$\|u\|_{j, \Omega'} \leq C(P + \|u\|_{0, \Omega}). \quad (2.54)$$

C é uma constante que depende somente de c_0, K', Ω, Ω' , onde $K' \geq \sup\{|D^\alpha a^{\rho\sigma}(x)| : x \in \Omega, |\rho|, |\sigma|, |\alpha| \leq m\}$.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre j . Para $j = 0$ é trivial. Suponhamos

que o teorema é válido para $j - 1$ e provemos para j ($1 \leq j \leq 2m$). De (2.53)

$$|(L^*\phi, u)| \leq P\|\phi\|_{2m-(j-1)} \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da hipótese de indução $u \in H^{j-1}(\Omega''')$, onde $\Omega' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$. Além disso

$$\|u\|_{j-1, \Omega'''} \leq c(P + \|u\|_{0, \Omega}), \quad (2.55)$$

onde c é uma constante que depende de c_0, K', Ω, Ω' .

Caso 1. $m \leq j - 1$.

$$\begin{aligned} (L^*\phi, u) &= \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} (D^\rho (\overline{a^{\sigma\rho}} D^\sigma \phi), u) = \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (D^\sigma \phi, a^{\sigma\rho} D^\rho u) \\ &= B[\phi, u]. \end{aligned}$$

Fazendo $j' = j - m$ temos

$$|B[\phi, u]| \leq P\|\phi\|_{2m-j} = P\|\phi\|_{m-j'} \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Portanto segue do Lema 2.5 $u \in H^{m+j'}(\Omega') = H^j(\Omega')$ e

$$\|u\|_{j, \Omega'} = \|u\|_{m+j', \Omega'} \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega'''}) \leq c(P + \|u\|_{j-1, \Omega'''})$$

e usando (2.55) obtemos (2.54).

Caso 2. $m > j - 1$.

Para $q = m - j + 1$, seja $L_q = (-1)^q \Delta^q + I$, isto é,

$$L_q u = (-1)^q \sum_{|\tau|=q} D^{2\tau} u + u.$$

L_q é um operador fortemente elíptico de ordem $2q$. Do Teorema B.10 temos que

$$(\phi, L_q \phi) \geq c\|\phi\|_q^2, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega'''). \quad (2.56)$$

Do Teorema de Lax-Milgram, existe uma solução fraca $h \in H_0^q(\Omega''')$ de

$$L_q h = u \quad \text{em } \Omega'''.$$

Como $u \in H^{j-1}(\Omega''')$ e $h \in H_0^q(\Omega''')$, segue do Teorema 2.4 que $h \in H^{2q+j-1}(\Omega'') =$

$H^{m+q}(\Omega'')$ para qualquer $\Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega'''$ e

$$\|h\|_{m+q,\Omega''} \leq c(\|u\|_{j-1,\Omega'''} + \|h\|_{q,\Omega'''}). \quad (2.57)$$

De (2.56) (por densidade)

$$\|h\|_{q,\Omega'''}^2 \leq c|(h, L_q h)| \leq c\|h\|_{0,\Omega'''}\|u\|_{0,\Omega} \leq c\|h\|_{q,\Omega'''}\|u\|_{0,\Omega}.$$

Usando esta última desigualdade e (2.55) em (2.57), obtemos

$$\|h\|_{m+q,\Omega''} \leq c(P + \|u\|_{0,\Omega}). \quad (2.58)$$

Substituindo $u = L_q h$ em (2.53) obtemos

$$|(L^* \phi, L_q h)| \leq P\|\phi\|_{2m-j}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega''). \quad (2.59)$$

Agora, seja LL_q o operador elíptico de ordem $2m + 2q$, da forma

$$LL_q v = \sum_{0 \leq |\rho|, |\sigma| \leq m} \sum_{|\tau|=q} (-1)^{|\rho|+q} D^\rho (a^{\rho\sigma} D^\sigma D^{2\tau} v) + Lv.$$

Fazendo uso da regra da Leibniz obtemos para cada $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega'')$

$$\begin{aligned} (L^* \phi, L_q \psi) &= \sum_{\substack{|\rho| \leq m \\ |\sigma| \leq m}} \sum_{|\tau|=q} (-1)^{|\rho|+q} (D^\rho (\overline{a^{\sigma\rho}} D^\sigma \phi), D^{2\tau} \psi) + \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} (D^\rho (\overline{a^{\sigma\rho}} D^\sigma \phi), \psi) \\ &= \sum_{\substack{|\rho| \leq m \\ |\sigma| \leq m}} \sum_{|\tau|=q} (-1)^q (D^\sigma \phi, a^{\sigma\rho} D^\rho D^{2\tau} \psi) + \sum_{0 \leq |\rho|, |\sigma| \leq m} (D^\sigma \phi, a^{\sigma\rho} D^\rho \psi) \\ &= (\phi, LL_q \psi). \end{aligned}$$

Também temos $(\phi, LL_q \psi) = \widehat{B}[\phi, \psi]$ onde $\widehat{B}$ é a forma bilinear associada a LL_q . Note que por densidade $(L^* \phi, L_q \psi) = \widehat{B}[\phi, \psi]$ para todo $\phi, \psi \in H_0^{m+q}(\Omega'')$.

Afirmamos que $(L^* \phi, L_q \psi) = \widehat{B}[\phi, \psi]$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega'')$ e $\psi \in C^{m+q}(\Omega'')$. De fato, seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega'')$ e $\psi \in C^{m+q}(\Omega'')$ fixos. Seja $\text{supp } \phi \subset U \subset \subset V \subset \subset \Omega''$ e $\xi \in C_0^\infty(\Omega'')$ tal que $\xi = 1$ em U e $\xi = 0$ fora de V então $\xi\psi \in H_0^{m+q}(\Omega'')$. Logo por densidade, $(L^* \phi, L_q \xi\psi) = \widehat{B}[\phi, \xi\psi]$ e afirmação segue.

Tomando uma sequência $\psi_i \in C^{m+q}(\Omega'')$ que converge a h em $H^{m+q}(\Omega'')$, obtemos

$$(L^* \phi, L_q h) = \widehat{B}[\phi, h].$$

De (2.59)

$$|\widehat{B}[\phi, h]| \leq P\|\phi\|_{2m-j} = P\|\phi\|_{m+q-1}.$$

Como $h \in H^{m+q}(\Omega'')$, LL_q é de ordem $2(m+q)$ e $\widehat{B}$ satisfaz as condições do Lema 2.4 então $h \in H^{m+q+1}(\Omega')$ e

$$\|h\|_{m+q+1, \Omega'} \leq c(P + \|h\|_{m+q, \Omega''}). \quad (2.60)$$

Do fato que $\|u\|_{j, \Omega'} = \|L_q h\|_{j, \Omega'} \leq c\|h\|_{2q+j, \Omega'}$ e $2q+j = q+m-j+1+j = q+m+1$, obtemos

$$\|u\|_{j, \Omega'} \leq c(P + \|h\|_{m+q, \Omega''})$$

e usando (2.58) obtemos (2.54). $\square$

2.4 Regularidade global

Na seção anterior foram discutidos resultados de regularidade interior da solução, nesta seção obteremos propriedades de regularidade na fronteira do domínio.

Utilizaremos a seguinte notação nesta seção,

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R, x_n > 0\},$$

B_R a bola de raio R e centro 0. Para $0 < R' < R$, definimos $R'' = (R + R')/2$.

Lema 2.6. *Se $u \in H^j(\Omega_R)$, para algum $j \geq 1$, então*

$$\|u^h\|_{j-1, \Omega_{R'}} \leq \|u\|_{j, \Omega_R},$$

para qualquer $0 < R' < R$, h suficientemente pequeno e $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Demonstração. A prova é similar a Lema 2.1. $\square$

Lema 2.7. *Suponha $(A_1), (A_2), (A_4)$ e seja $u \in H^m(\Omega_R)$ tal que $\xi u \in H_0^m(\Omega_R)$ para todo $\xi \in C_0^\infty(B_R)$. Suponha que para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega_R)$*

$$|B[\phi, u]| \leq P\|\phi\|_{m-1} \quad (P \text{ constante}). \quad (2.61)$$

Então, para todo $0 < R' < R$ e $i = 1, 2, \dots, n-1$, $D_i u \in H^m(\Omega_{R'})$ e

$$\|D_i u\|_{m, \Omega_{R'}} \leq C(P + \|u\|_{m, \Omega_R}), \quad (2.62)$$

onde C é uma constante que depende de $c_0, c_1, c_3, \Omega, \Omega'$.

Demonstração. A prova é similar a prova do Lema 2.4. $\square$

Para tratar o caso $i = n$, necessitamos o seguinte lema.

Lema 2.8. *Seja $u \in L^2(\Omega_R)$ e assuma que para algum $j \geq 1$ as derivadas fracas $D_i^j u$ existem e pertençam a $L^2(\Omega_R)$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$. Suponha que, para algum $m \geq j$,*

$$|(D_n^m \phi, u)| \leq P \|\phi\|_{m-j}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_R). \quad (2.63)$$

Então, para qualquer $0 < R' < R$, $u \in H^j(\Omega_{R'})$ e

$$\|u\|_{j, \Omega_{R'}} \leq C \left(P + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_i^j u\|_{0, \Omega_R} + \|u\|_{0, \Omega_R} \right), \quad (2.64)$$

onde C é uma constante que depende de m, R, R' .

Demonstração. Note que por densidade (2.63) é válido para todo $\phi \in C_0^m(\Omega_R)$.

Afirmção 1. (2.63) válido para todo $\phi \in C^m(\overline{\Omega_R})$ tal que, para algum $\delta > 0$, $\phi(x) = 0$ em $R - \delta < |x| < R$ e $D^\alpha \phi = 0$ sobre $x_n = 0$ para $0 \leq |\alpha| \leq m$. De fato, defina

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} \phi(x - \epsilon e_n), & x \in \Omega_R, x_n \geq \epsilon \\ 0, & x \in \Omega_R, x_n < \epsilon. \end{cases}$$

Note que $\phi_\epsilon \in C_0^m(\Omega_R)$ e $D^\alpha \phi_\epsilon(x) \rightarrow D^\alpha \phi(x)$ uniformemente em $\overline{\Omega_R}$, então $\phi_\epsilon \rightarrow \phi$ em $H^m(\Omega_R)$. Como (2.63) se verifica para ϕ_ϵ então fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ segue a afirmação 1.

Agora estendamos u a B_R

$$\tilde{u}(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & (x', x_n) \in \Omega_R \\ \sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k u(x', -\frac{x_n}{k}), & (x', -x_n) \in \Omega_R. \end{cases} \quad (2.65)$$

As constantes λ_k são determinada pelas equações

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k (-k)^{-h} = 1 \quad (-1 \leq h \leq 2m-1). \quad (2.66)$$

O sistema tem solução pois a matriz associada o sistema é uma matriz equivalente a

matriz de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m+1 \\ 1 & 2^2 & \cdots & (2m+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2m+1} & \cdots & (2m+1)^{2m+1} \end{pmatrix},$$

cujo determinante é não nulo. É claro que $\tilde{u} \in L^2(B_R)$ e

$$\|\tilde{u}\|_{0,B_R} \leq c\|u\|_{0,\Omega_R}. \quad (2.67)$$

Afirmção 2. Se $|\alpha| \leq 2m-1$ com $\alpha_n = 0$ e se existe a derivada fraca $D^\alpha u$ em Ω_R , então existe a derivada fraca $D^\alpha \tilde{u}$ em B_R e é a extensão de $D^\alpha u$ a B_R dada por (2.65), isto é,

$$\int_{B_R} D^\alpha \phi \cdot \tilde{u} dx = (-1)^\alpha \left(\int_{x_n > 0} \phi D^\alpha u dx + \int_{x_n < 0} \phi \sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k (D^\alpha u)(x', -\frac{x_n}{k}) dx \right)$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(B_R)$. De fato, se $\phi \in C_0^\infty(B_R)$

$$\begin{aligned} \int_{B_R} D^\alpha \phi \cdot \tilde{u} dx &= \int_{x_n > 0} D^\alpha \phi \cdot u dx + \sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k \int_{x_n < 0} D^\alpha \phi \cdot u(x', -\frac{x_n}{k}) dx \\ &= \int_{x_n > 0} D^\alpha \phi \cdot u dx + \sum_{k=1}^{2m+1} k \lambda_k \int_{x_n > 0} (D^\alpha \phi)(x', -kx_n) \cdot u(x) dx \\ &= \int_{x_n > 0} D^\alpha \phi \cdot u dx + \sum_{k=1}^{2m+1} k \lambda_k \int_{x_n > 0} D^\alpha [\phi(x', -kx_n)] \cdot u(x) dx \end{aligned}$$

onde substituímos kx_n por x_n , lembrando que $\alpha_n = 0$. Então

$$\int_{B_R} D^\alpha \phi \cdot \tilde{u} dx = \int_{\Omega_R} D^\alpha \phi_0 \cdot u dx \quad (2.68)$$

onde

$$\phi_0 = \phi(x) + \sum_{k=1}^{2m+1} k \lambda_k \phi(x', -kx_n).$$

Note que, ϕ_0 não é, necessariamente, uma função teste em Ω_R pois seu suporte pode intersepar $x_n = 0$. Seja $g \in C^\infty$ com $g(t) = 0$ se $t \leq 1$ e $g(t) = 1$ se $t \geq 2$. Defina

$\xi_\epsilon(x) = g(\frac{|x_n|}{\epsilon})$. Então, $D_i \xi_\epsilon = 0$ se $i \neq n$, assim

$$\xi_\epsilon D^\alpha \phi_0 = D^\alpha (\xi_\epsilon \phi_0).$$

Como $\xi_\epsilon(x) = 0$ se $|x_n| < \epsilon$ e $\text{supp}(\phi_0) \subset B_R$ segue $\text{supp}(\xi_\epsilon \phi_0)|_{\Omega_R} \subset \Omega_R$ e $\xi_\epsilon \phi_0 \in C_0^\infty(\Omega_R)$. Portanto

$$\int_{B_R} \xi_\epsilon D^\alpha \phi_0 \cdot u \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_R} \xi_\epsilon \phi_0 D^\alpha u \, dx.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{B_R} D^\alpha \phi \cdot \tilde{u} \, dx &= \int_{\Omega_R} \xi_\epsilon D^\alpha \phi_0 \cdot u \, dx + \int_{\Omega_R} (1 - \xi_\epsilon) D^\alpha \phi_0 \cdot u \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_R} \xi_\epsilon \phi_0 D^\alpha u \, dx + \int_{\Omega_R} (1 - \xi_\epsilon) D^\alpha \phi_0 \cdot u \, dx. \end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada, o lado direito da expressão acima converge para $(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_R} \phi_0 D^\alpha u \, dx$, quando $\epsilon \rightarrow 0$. Daí

$$\begin{aligned} \int_{B_R} D^\alpha \phi \tilde{u} \, dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_R} \phi_0 D^\alpha u \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \left(\int_{\Omega_R} \phi D^\alpha u \, dx + \int_{\Omega_R} \sum_{k=1}^{2m+1} k \lambda_k \phi(x', -k x_n) D^\alpha u(x) \, dx \right) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \left(\int_{x_n > 0} \phi D^\alpha u \, dx + \int_{x_n < 0} \sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k \phi(x) (D^\alpha u)(x', -\frac{x_n}{k}) \, dx \right) \end{aligned}$$

e isto prova a afirmação 2.

Da Afirmação 2 segue, para $\lambda = j e_i$,

$$\|D_i^j \tilde{u}\|_{0, B_R} \leq c \|D_i^j u\|_{0, \Omega_R}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.69)$$

Afirmação 3. Para todo $\psi \in C_0^\infty(B_R)$

$$\begin{aligned} |(D_i^{2m} \psi, \tilde{u})_{0, B_R}| &\leq c \|D_i^j u\|_{0, \Omega_R} \|\psi\|_{2m-j, B_R} \quad (i \neq n), \\ |(D_n^{2m} \psi, \tilde{u})_{0, B_R}| &\leq c P \|\psi\|_{2m-j, B_R}. \end{aligned}$$

De fato, para $\psi \in C_0^\infty(B_R)$ temos

$$(D_n^{2m} \psi, \tilde{u})_{B_R} = \int_{x_n > 0} D_n^{2m} \psi \cdot u \, dx + \int_{x_n < 0} \sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k D_n^{2m} \psi \cdot u(x', -\frac{x_n}{k}) \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_n > 0} D_n^{2m} \psi \cdot u \, dx + \int_{x_n > 0} \sum_{k=1}^{2m+1} k \lambda_k (D_n^{2m} \psi)(x', -kx_n) \cdot u(x) \, dx \\
&= \int_{x_n > 0} D_n^{2m} \psi \cdot u \, dx - \int_{x_n > 0} \sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k (-k)^{-(2m-1)} D_n^{2m} [\psi(x', -kx_n)] \cdot u(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Ou seja, se

$$\psi^*(x) = \psi(x', x_n) - \sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k (-k)^{-(2m-1)} \psi(x', -kx_n),$$

então

$$(D_n^{2m} \psi, \tilde{u})_{B_R} = (D_n^{2m} \psi^*, u)_{\Omega_R}. \quad (2.70)$$

Note que

$$\|\psi^*\|_{2m-j, \Omega_R} \leq c \|\psi\|_{2m-j, B_R}. \quad (2.71)$$

Derivando $\psi^*(x', x_n)$ temos

$$D_n^h \psi^*(x', x_n) = D_n^h \psi(x', x_n) - \sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k (-k)^{-(2m-1-h)} D_n^h \psi(x', -kx_n),$$

assim $D_n^h \psi^*(x', 0) = D_n^h \psi(x', 0) (1 - \sum_{k=1}^{2m+1} \lambda_k (-k)^{-(2m-1-h)}) = 0$ para $0 \leq h \leq m$. Como $\psi^*(x', 0) = 0$, segue que $D^\alpha \psi^*(x', 0) = 0$ para todo $|\alpha| \leq 2m$, $\alpha_n = 0$. Fazendo $\phi = D_n^m \psi^*$, segue da Afirmação 1,

$$|(D_n^{2m} \psi^*, u)_{\Omega_R}| = |(D_n^m \phi, u)_{\Omega_R}| \leq P \|\phi\|_{m-j, \Omega_R} \leq P \|\psi^*\|_{2m-j, \Omega_R}. \quad (2.72)$$

De (2.70) e (2.71) concluímos que

$$|(D_n^{2m} \psi, \tilde{u})_{B_R}| \leq P \|\psi^*\|_{2m-j, \Omega_R} \leq cP \|\psi\|_{2m-j, B_R}.$$

Se $i \neq n$, da Afirmação 2 e de (2.69),

$$|(D_i^{2m} \psi, \tilde{u})_{B_R}| = |(D_i^{2m-j} \psi, D_i^j \tilde{u})_{B_R}| \leq c \|D_i^j u\|_{0, \Omega_R} \|\psi\|_{2m-j, B_R}.$$

Isto prova a afirmação 3.

Finalmente, consideremos o operador fortemente elíptico $A = (-1)^m \sum_{i=1}^m D_i^{2m}$. Da Afirmação 3

$$|(A\psi, \tilde{u})_{B_R}| \leq c \left(P + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_i^j u\|_{0, \Omega_R} \right) \|\psi\|_{B_R, 2m-j}, \quad \psi \in C_0^\infty(B_R).$$

Do Teorema 2.5, obtemos que, $\tilde{u} \in H^j(B_{R'}) \subset H^j(\Omega_{R'})$ para $0 < R' < R$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_{j,\Omega_{R'}} &\leq \|\tilde{u}\|_{j,B_{R'}} \leq c \left(P + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_i^j u\|_{0,\Omega_R} + \|\tilde{u}\|_{0,B_R} \right) \\ &\leq c \left(P + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_i^j u\|_{0,\Omega_R} + \|u\|_{0,\Omega_R} \right). \end{aligned}$$

Isto completa prova do lema. $\square$

Lema 2.9. *Seja $u \in H^{m+1}(\Omega_R)$ tal que $\xi u \in H_0^m(\Omega_R)$ para todo $\xi \in C_0^\infty(B_R)$, então $\xi D_i u \in H_0^m(\Omega_R)$ para todo $\xi \in C_0^\infty(B_R)$ e $i = 1, 2, \dots, n-1$.*

Demonstração. Seja $\xi \in C_0^\infty(B_R)$ e $i \neq n$. Para $x \in \Omega_R$ e h pequeno temos

$$\xi(x)u^h(x) = (\xi(x)u(x))^h - \xi^h(x)u(x^h). \quad (2.73)$$

Claramente $(\xi u)^h \in H_0^m(\Omega_R)$ e $\xi^h(x)u(x^h) \in H_0^m(\Omega_R)$ para $|h|$ pequeno, já que $\xi^h \in C_0^\infty(B_R)$. Portanto de (2.73) $\xi u^h \in H_0^m(\Omega_R)$ para $|h|$ pequeno. Seja $0 < R' < R$ tal que $\text{supp}(\xi) \cap \Omega_R \subset \Omega_{R'}$. Então, como $\xi u \in H^{m+1}(\Omega_R)$, do Lema 2.6

$$\begin{aligned} \|(\xi u)^h\|_{m,\Omega_R} &= \|(\xi u)^h\|_{m,\Omega_R} \leq \|\xi u\|_{m+1,\Omega_R} \\ &\leq c \|\xi\|_{m+1,\Omega_R} \|u\|_{m+1,\Omega_R}. \end{aligned}$$

Isto e (2.73) implicam

$$\|\xi u^h\|_{m,\Omega_R} \leq c \|u\|_{m+1,\Omega_R}$$

para h pequeno e c independente de h . Como $H_0^m(\Omega_R)$ é reflexivo, ξu^{h_k} converge fracamente em $H_0^m(\Omega_R)$ (para alguma sequência $h_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$). Em particular, para $\phi \in C_0^\infty(\Omega_R)$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_R} \xi u^{h_k} \cdot \phi \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} - \int_{\Omega_R} u(\xi \phi)^{-h_k} \, dx = - \int_{\Omega_R} u D_i(\xi \phi) \, dx \\ &= \int_{\Omega_R} \xi D_i u \cdot \phi \, dx. \end{aligned}$$

Logo, ξu^{h_k} converge fracamente em $H_0^m(\Omega)$ para $\xi D_i u$ e assim $\xi D_i u \in H_0^m(\Omega_R)$. $\square$

Com a ajuda dos Lemas 2.8, 2.9 provaremos um resultado que estende o Lema 2.5 ao caso onde $\Omega = \Omega_R$ é uma semi-bola.

Lema 2.10. *Suponha (A_1) , (A_2) e (B_j) , para algum $1 \leq j \leq m$. Se $u \in H^m(\Omega_R)$ é tal que*

$\xi u \in H_0^m(\Omega_R)$ para todo $\xi \in C_0^\infty(B_R)$ e

$$|B[\phi, u]| \leq P \|\phi\|_{m-j} \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega_R), \quad (2.74)$$

então para qualquer $0 < R' < R$, $u \in H^{m+j}(\Omega_{R'})$ e

$$\|u\|_{m+j, \Omega_{R'}} \leq C(P + \|u\|_{m, \Omega_R}), \quad (2.75)$$

onde C depende de c_0, c_1, K, R' e R .

Demonstração. A prova será feita por indução sobre j . Note que o lema é válido para $j = 0$. Como na prova do Lema 2.5, podemos assumir, sem perda de generalidade que $a^{\rho\sigma} = 0$ para $|\rho| + j - m \leq 0$. Suponhamos que o lema seja válido para $j - 1$ ($1 \leq j \leq m$) e provemos que vale para j .

Defina $R''' = (R + R'')/2$. Como

$$|B[\phi, u]| \leq P \|\phi\|_{m-j} \leq P \|\phi\|_{m-(j-1)}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_R),$$

segue da hipótese de indução que $u \in H^{m+j-1}(\Omega_{R''})$ e

$$\|u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}} \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}). \quad (2.76)$$

Mostremos que $D_i u \in H^{m+j-1}(\Omega_{R''})$ com seus correspondentes estimativas, para $i = 1, \dots, n$.

Caso 1. $1 \leq i \leq n - 1$

Para $j = 1$, do Lema 2.7 $D_i u \in H^{m+j-1}(\Omega_{R''})$ e $\|D_i u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}} \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R})$. Para estabelecer um resultado similar para $j > 1$, observe que $u \in H^{m+j-1}(\Omega_{R''}) \subset H^{m+1}(\Omega_{R''})$, logo do Lema 2.9 $\xi D_i u \in H_0^m(\Omega_{R''})$ para todo $\xi \in C_0^\infty(\Omega_{R''})$. Além disso, para $\phi \in C_0^\infty(B_{R''})$ temos, da prova do Lema 2.5,

$$|B[\phi, D_i u]| \leq c(P + \|u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}}) \|\phi\|_{m-(j-1), \Omega_{R''}}.$$

Portanto, $D_i u$ satisfaz as condições do lema para $j - 1$ e $\Omega_{R''}$. Da hipótese de indução segue que $D_i u \in H^{m+j-1}(\Omega_{R''})$ e

$$\begin{aligned} \|D_i u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}} &\leq c(P + \|u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}} + \|D_i u\|_{m, \Omega_{R''}}) \\ &\leq c(P + \|u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}}) \end{aligned}$$

(note que $m + 1 \leq m + j - 1$ pois $j > 1$). De (2.76)

$$\|D_i u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}} \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}). \quad (2.77)$$

Caso 2. $i = n$

Neste caso usaremos o Lema 2.8. Para $\phi \in C_0^\infty(\Omega_{R''})$

$$B[\phi, u] = (D_n^m \phi, \sum_{|\sigma| \leq m} a^{m e_n \sigma} D^\sigma u)_{\Omega_{R''}} + \sum_{\substack{m-j < |\rho| \leq m \\ \rho \neq m e_n, |\sigma| \leq m}} (D^\rho \phi, a^{\rho \sigma} D^\sigma u)_{\Omega_{R''}}. \quad (2.78)$$

Estimemos os termos $(D^\rho \phi, a^{\rho \sigma} D^\sigma u)_{\Omega_{R''}}$:

- Se $|\rho| < m$, como $H^{m+j-1}(\Omega_{R''}) \subset H^{|\sigma|+|\rho|-m+j}(\Omega_{R''})$ (pois $|\sigma| + |\rho| - m + j \leq m + j - 1$) e $a^{\rho \sigma} \in C_B^{|\rho|-m+j}(\Omega_R)$, podemos transferir $|\rho| - m + j$ derivadas de ϕ para $a^{\rho \sigma} D^\sigma u$. Então

$$\begin{aligned} |(D^\rho \phi, a^{\rho \sigma} D^\sigma u)| &\leq c \|\phi\|_{m-j, \Omega_{R''}} \|u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}} \\ &\leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}) \|\phi\|_{m-j, \Omega_{R''}}. \end{aligned}$$

- Se $|\rho| = m$, existe $i \neq n$ tal que $D^\rho \phi = D_i D^{\rho-e_i} \phi$, e do Caso 1

$$\begin{aligned} (D^\rho \phi, a^{\rho \sigma} D^\sigma u)_{\Omega_{R''}} &= -(D^{\rho-e_i} \phi, D_i(a^{\rho \sigma} D^\sigma u))_{\Omega_{R''}} \\ &= -(D^{\rho-e_i} \phi, D_i a^{\rho \sigma} D^\sigma u)_{\Omega_{R''}} - (D^{\rho-e_i} \phi, a^{\rho \sigma} D^\sigma D_i u)_{\Omega_{R''}}. \end{aligned}$$

Para o primeiro termo da direita, transferindo $|\rho| - m + j - 1$ derivadas de $D^{\rho-e_i} \phi$ para $D_i a^{\rho \sigma} D^\sigma u$ (isto é possível pois $|\rho| + |\sigma| - m + j - 1 \leq m + j - 1$ e $a^{\rho \sigma} \in C_B^{|\rho|+m-j}(\bar{\Omega}_R)$) obtemos

$$\begin{aligned} |(D^{\rho-e_i} \phi, D_i a^{\rho \sigma} D^\sigma u)| &\leq c \|\phi\|_{m-j, \Omega_{R''}} \|u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}} \\ &\leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}) \|\phi\|_{m-j, \Omega_{R''}}. \end{aligned}$$

Para o segundo termo, analogamente ao anterior, obtemos

$$\begin{aligned} |(D^{\rho-e_i} \phi, a^{\rho \sigma} D^\sigma D_i u)| &\leq c \|\phi\|_{m-j, \Omega_{R''}} \|D_i u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}} \\ &\leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}) \|\phi\|_{m-j, \Omega_{R''}}. \end{aligned}$$

Assim, de (2.78) e da hipótese,

$$\begin{aligned} |(D_n^m \phi, \sum_{|\sigma| \leq m} a^{me_n \sigma} D^\sigma u)_{\Omega''}| &\leq |B[\phi, u]| + c(P + \|u\|_{m, \Omega}) \|\phi\|_{m-j, \Omega_{R''}} \\ &\leq c(P + \|u\|_{m, \Omega}) \|\phi\|_{m-j, \Omega_{R''}}, \end{aligned}$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega_{R''})$. Se $v = \sum_{|\sigma| \leq m} a^{me_n \sigma} D^\sigma u$, então

$$|(D_n^m \phi, v)| \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}) \|\phi\|_{m-j, \Omega_{R''}}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_{R''}).$$

Para $i \neq n$, $D_i^j u \in H^m(\Omega_R)$, pois $D_i u \in H^{m+j-1}(\Omega_{R''})$, e portanto $D_i^j v \in L^2(\Omega_{R''})$. Aplicando o Lema 2.8, $v \in H^j(\Omega_{R'})$ e

$$\|v\|_{j, \Omega_{R'}} \leq c \left(P + \|u\|_{m, \Omega_R} + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_i^j v\|_{0, \Omega_{R''}} + \|v\|_{0, \Omega_{R''}} \right).$$

Como $D_i^j v = \sum_{|\sigma| \leq m} \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} D_i^{je_i - re_i} a^{me_n \sigma} D^{\sigma - (r-1)e_i} D_i u$ segue que

$$\|D_i^j v\|_{0, \Omega_{R''}} \leq c \|D_i u\|_{m+j-1, \Omega_{R''}} \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}).$$

Além disso, $\|v\|_{0, \Omega_{R''}} \leq c \|u\|_{m, \Omega_R}$. Assim

$$\|v\|_{j, \Omega_{R'}} \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}).$$

Da condição de elipticidade $a^{me_n me_n}(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$,

$$D_n^m u = \frac{1}{a^{me_n me_n}} \left(v - \sum_{|\sigma| \leq m, |\sigma| \neq me_n} a^{me_n \sigma} D^\sigma u \right).$$

Agora vamos mostrar que $D_n^m u \in H^j(\Omega_{R'})$ e $\|D_n^m u\|_{j, \Omega_{R'}} \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R})$. De fato, se $|\sigma| < m$, então $a^{me_n \sigma} D^\sigma u \in H^{m+j-1-|\sigma|} \subset H^j(\Omega_{R'})$ (pois $m \geq 1 + |\sigma|$) e

$$\|a^{me_n \sigma} D^\sigma u\|_{j, \Omega_{R'}} \leq c \|u\|_{m+j-1, \Omega_{R'}} \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}),$$

e se $|\sigma| = m$, então $\sigma \neq me_n$ e existe $i \neq n$ tal que $D^\sigma u = D^{\sigma - e_i} D_i u$. Assim $a^{me_n \sigma} D^{\sigma - e_i} D_i u \in H^{m+j-1-(|\sigma|-1)}(\Omega_{R'}) = H^{m+j-|\sigma|}(\Omega_{R'}) = H^j(\Omega_{R'})$ e

$$\|a^{me_n \sigma} D^{\sigma - e_i} D_i u\|_{j, \Omega_{R'}} \leq c \|D_i u\|_{m+j-1, \Omega_{R'}} \leq c(P + \|u\|_{m, \Omega_R}).$$

Deste modo, $D_n^m u \in H^j(\Omega_{R'})$ e $\|D_n^m u\|_{j,\Omega_{R'}} \leq c(P + \|u\|_{m,\Omega_R})$.

Dos Casos 1 e 2, $u \in H^{m+j}(\Omega_{R'})$ e temos (2.75). $\square$

Corolário 2.2. Suponha (A_1) , (A_2) e (B_j) , com $1 \leq j \leq m$, e $f \in L^2(\Omega_R)$. Se $u \in H^m(\Omega_R)$, $\xi u \in H_0^m(\Omega_R)$ para todo $\xi \in C_0^\infty(B_R)$ e

$$B[\phi, u] = (\phi, f) \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega_R),$$

então, para $0 < R' < R$, $u \in H^{m+j}(\Omega_{R'})$ e

$$\|u\|_{m+j,\Omega_{R'}} \leq C(\|f\|_{0,\Omega_R} + \|u\|_{m,\Omega_R}),$$

onde C depende somente de c_0 , c_1 , K , R e R' .

Demonstração. Segue do lema anterior. $\square$

Teorema 2.6. Suponha (A_1) , (A_2) e (B_{m+k}) , para algum $k \geq 0$, e seja $f \in H^k(\Omega_R)$. Se $u \in H^m(\Omega_R)$, $\xi u \in H_0^m(\Omega_R)$ para todo $\xi \in C_0^\infty(B_R)$ e

$$B[\phi, u] = (\phi, f) \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega_R),$$

então, para $0 < R' < R$, $u \in H^{2m+k}(\Omega_{R'})$ e

$$\|u\|_{2m+k,\Omega_{R'}} \leq C(\|f\|_{k,\Omega_R} + \|u\|_{m,\Omega_R}), \quad (2.79)$$

onde C é um constante que depende de c_0 , c_1 , K , R' e R .

Demonstração. A prova será feita por indução sobre k . Do corolário anterior o resultado vale para $k = 0$. Suponha que o teorema seja válido para $k - 1$ ($k \geq 1$) e provemos que vale para k .

Da hipótese de indução, $u \in H^{2m+k-1}(\Omega_{R''})$ e

$$\|u\|_{2m+k-1,\Omega_{R''}} \leq c(\|f\|_{k-1,\Omega_R} + \|u\|_{m,\Omega_R}). \quad (2.80)$$

Mostremos que $D_i u \in H^{2m+k-1}(\Omega_{R'})$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Caso 1. $1 \leq i \leq n - 1$

Repetindo as contas do Teorema 2.4 obtemos

$$B[\phi, D_i u] = (\phi, f_i) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_{R''}),$$

onde $f_i = D_i f - A_i u$ e $A_i u = \sum_{|\rho| \leq m, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} D^\rho (D_i a^{\rho\sigma} D^\sigma u)$. Como A_i é um operador de ordem $2m$ e $u \in H^{2m+k-1}(\Omega_{R''})$ então $f_i \in H^{k-1}(\Omega_{R''})$ e

$$\begin{aligned} \|f_i\|_{k-1, \Omega_{R''}} &\leq \|D_i f\|_{k-1, \Omega_{R''}} + \|A_i u\|_{k-1, \Omega_{R''}} \\ &\leq c(\|f\|_{k, \Omega_{R''}} + \|u\|_{2m+k-1, \Omega_{R''}}) \\ &\leq c(\|f\|_{k, \Omega_R} + \|u\|_{m, \Omega_R}). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Note que $H^{2m+k-1}(\Omega_{R''}) \subset H^{m+1}(\Omega_{R''})$ e $\xi u \in H_0^m(\Omega_{R''})$ para todo $\xi \in C_0^\infty(B_{R''})$. Então, do Lema 2.9, $\xi D_i u \in H_0^m(\Omega_{R''})$ para todo $\xi \in C_0^\infty(B_{R''})$. Logo $D_i u$ verifica as condições do teorema para $k-1$ e $\Omega_{R''}$. Da hipótese de indução segue que $D_i u \in H^{2m+k-1}(\Omega_{R'})$ e

$$\begin{aligned} \|D_i u\|_{2m+k-1, \Omega_{R''}} &\leq c(\|f_i\|_{k-1, \Omega_{R''}} + \|D_i u\|_{m, \Omega_{R''}}) \\ &\leq c(\|f\|_{k, \Omega_R} + \|u\|_{m, \Omega_R}). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Caso 2. $i = n$.

Como $a^{\rho\sigma} \in C_B^{|\rho|+k}(\Omega_R)$, $u \in H^{2m}(\Omega_{R''})$ e $B[\phi, u] = (\phi, f)$, podemos escrever

$$Lu = \sum_{|\rho| \leq m, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} D^\rho (a^{\rho\sigma} D^\sigma u) = f.$$

Da regra de Leibniz

$$(-1)^m a^{me_n me_n} D_n^m u = f + \sum_{|\tau| \leq 2m} b^\tau D^\tau u \quad (2.83)$$

onde $b^\tau \in C_B^k(\Omega_R)$ e $b^{2me_n} = 0$. Vamos a estimar os termos $b^\tau D^\tau u$ para $|\tau| \leq 2m$. Se $|\tau| = 2m$, existe $i \neq n$ tal que $D^\tau u = D^{\tau-e_i} D_i u$ e de (2.82)

$$\|b^\tau D^{\tau-e_i} D_i u\|_{k, \Omega_{R'}} \leq c\|D_i u\|_{2m+k-1, \Omega_{R'}} \leq c(\|f\|_{k, \Omega_R} + \|u\|_{m, \Omega_R}),$$

e se $|\tau| < 2m$,

$$\begin{aligned} \|b^\tau D^\tau u\|_{k, \Omega_{R'}} &\leq c\|u\|_{2m+k-1, \Omega_{R'}} \leq c(\|f\|_{k-1, \Omega_R} + \|u\|_{m, \Omega_R}) \\ &\leq c(\|f\|_{k, \Omega} + \|u\|_{m, \Omega_R}). \end{aligned}$$

Logo $D_n^{2m} u \in H^k(\Omega_{R'})$ e

$$\|D_n^{2m} u\|_{k, \Omega_{R'}} \leq c(\|f\|_{k, \Omega_R} + \|u\|_{m, \Omega_R}).$$

Dos Casos 1 e 2 obtemos que $u \in H^{2m+k}(\Omega')$ e (2.79). □

Até agora hemos estudado o caso especial da semi-bola Ω_R . Agora podemos estudar o caso geral, isto é, quando Ω é um domínio de classe C^{2m+k} . Para isso precisaremos primeiro do seguinte lema.

Lema 2.11. *Sejam Ω, W abertos limitados em $\mathbb{R}^n$ e $h : \Omega \rightarrow W$ um difeomorfismo de classe C^{2m+k} ($k \geq 0$), com $h \in C^{2m+k}(\overline{\Omega})$ e $h^{-1} \in C^{2m+k}(\overline{W})$. Sejam $f \in H^k(\Omega)$ e $u \in H^m(\Omega)$ tais que*

$$B[\phi, u] = (\phi, f)_\Omega \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

onde B é a forma bilinear associada a um operador $L(x, D)$ que satisfaz (A_1) , (A_2) e (B_j) , para algum $1 \leq j \leq m+k$. Então $g = |(\det h') \circ h^{-1}|^{-1} f \circ h^{-1} \in H^k(W)$ e $v = u \circ h^{-1} \in H^m(W)$ verificam

$$\widehat{B}[\phi, v] = (\phi, g)_W \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(W),$$

onde $\widehat{B}$ é a forma bilinear associada a um operador $\widehat{L}$ que satisfaz (A_1) , (A_2) e (B_j) .

Demonstração. Provaremos somente o caso $k = 0$. Denotaremos $\widetilde{w}(y) = w(x)$ onde $y = h(x)$ e $w : \Omega \rightarrow W$. Se $u \in C^{2m}(\Omega)$ então

$$D_i u(x) = \sum_{j=1}^n D_j \widetilde{u}(y) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x), \quad x \in \Omega, i = 1, 2, \dots, n.$$

Se $\rho = e_{i_1} + \dots + e_{i_{|\rho|}}$ com $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{|\rho|} \leq n$ e $1 \leq |\rho| \leq 2m$, então

$$D^\rho u(x) = \sum_{j_1 \dots j_{|\rho|=1}}^n D_{j_1} \dots D_{j_{|\rho|}} \widetilde{u}(y) \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}}(x) \dots \frac{\partial f_{j_{|\rho|}}}{\partial x_{i_{|\rho|}}}(x) + P_\rho(y, D) \widetilde{u}(y)$$

onde $P_\rho(y, D)$ é um operador diferencial linear de ordem $\leq |\rho| - 1$. Assim podemos escrever $D^\rho u(x) = L_\rho \widetilde{u}(y)$ onde $L_\rho(y, D)$ é o operador diferencial

$$L_\rho v = \sum_{|\alpha| \leq |\rho|} \widetilde{a}_\rho^\alpha D^\alpha v,$$

com parte principal $L'_\rho v = \sum_{\alpha \in A_\rho} \widetilde{a}_\rho^\alpha D^{\alpha'} v$, onde $A_\rho = \{(j_1, \dots, j_{|\rho|}) : 1 \leq j_i \leq n\}$, $\alpha' = e_{j_1} + \dots + e_{j_{|\rho|}}$ e $a_\rho^\alpha(x) = \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}}(x) \dots \frac{\partial f_{j_{|\rho|}}}{\partial x_{i_{|\rho|}}}(x)$, para $\alpha = (j_1, \dots, j_{|\rho|}) \in A_\rho$. Note que $\widetilde{a}_\rho^\alpha \in C^{2m-|\rho|}(\overline{W})$ para $\alpha \in A_\rho$.

Seja $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, por mudança de variável,

$$(D^\rho \phi, a^{\rho\sigma} D^\sigma \psi)_\Omega = \int_W L_\rho \widetilde{\phi}(y) \overline{b^{\rho\sigma}(y) L_\sigma \widetilde{\psi}(y)} dy = (L_\rho \widetilde{\phi}, b^{\rho\sigma} L_\sigma \widetilde{\psi})_W$$

onde $b^{\rho\sigma}(y) = \frac{a^{\rho\sigma}(h^{-1}(y))}{|\det h'(h^{-1}(y))|}$. Por outro lado

$$(L_\rho \tilde{\phi}, b^{\rho\sigma} L_\sigma \tilde{\psi})_W = \sum_{\substack{|\alpha| \leq |\rho| \\ |\beta| \leq |\sigma|}} (D^\alpha \tilde{\phi}, \tilde{a}_\rho^\alpha b^{\rho\sigma} \tilde{a}_\sigma^\beta D^\beta \tilde{\psi})_W.$$

Seja $\hat{L} = \hat{L}(y, D)$ dado por

$$\hat{L}\psi = \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} \sum_{\substack{|\alpha| \leq |\rho| \\ |\beta| \leq |\sigma|}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\tilde{a}_\rho^\alpha b^{\rho\sigma} \tilde{a}_\sigma^\beta D^\beta \psi).$$

Note que $\hat{L}$ pode ser escrito na forma divergente

$$\hat{L}\psi = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (c^{\alpha\beta} D^\beta \psi),$$

onde $c^{\alpha\beta} = \sum_{\substack{|\alpha| \leq |\rho| \\ |\beta| \leq |\sigma|}} \tilde{a}_\rho^\alpha b^{\rho\sigma} \tilde{a}_\sigma^\beta$. Então a forma bilinear associada a $\hat{L}$ é

$$\begin{aligned} \hat{B}[\tilde{\phi}, \tilde{\psi}] &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (D^\alpha \tilde{\phi}, c^{\alpha\beta} D^\beta \tilde{\psi}) = \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} \sum_{\substack{|\alpha| \leq |\rho| \leq m \\ |\beta| \leq |\sigma| \leq m}} (D^\alpha \tilde{\phi}, \tilde{a}_\rho^\alpha b^{\rho\sigma} \tilde{a}_\sigma^\beta D^\beta \tilde{\psi}) \\ &= \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (L_\rho \tilde{\phi}, b^{\rho\sigma} L_\sigma \tilde{\psi}) = B[\phi, \psi]. \end{aligned}$$

Assim $\hat{B}[\phi, v] = (\tilde{\phi}, g)_W$.

Agora vamos a mostrar que $\hat{L}$ satisfaz as condições (A_1) , (A_2) e (B_j) .

Suponhamos que a condição (B_j) seja válido. Se $|\alpha| + j - m > 0$ então $|\rho| + j - m > 0$ ($|\alpha| \leq |\rho|$) e $b^{\rho\sigma} \in C^{|\rho|+j-m}(\overline{W}) \subset C^{|\alpha|+j-m}(\overline{W})$. Como $\tilde{a}_\rho^\alpha \in C^{2m-|\rho|}(\overline{W})$ e $\tilde{a}_\sigma^\beta \in C^{2m-|\sigma|}(\overline{W})$ então $c^{\alpha\beta} = \tilde{a}_\rho^\alpha b^{\rho\sigma} \tilde{a}_\sigma^\beta \in C^{|\alpha|+j-m}(\overline{W})$.

A condição (A_2) esta claramente satisfeita. Note que a parte principal de $\hat{L}$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \hat{L}'(y, \xi) &= \sum_{\substack{\alpha \in A_\rho \\ \beta \in A_\sigma}} \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \xi^{\alpha'} \tilde{a}_\rho^\alpha b^{\rho\sigma} \tilde{a}_\sigma^\beta \xi^{\beta'} \\ &= \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \left[\sum_{\alpha \in A_\rho} \xi^{\alpha'} \tilde{a}_\rho^\alpha \right] b^{\rho\sigma} \left[\sum_{\beta \in A_\sigma} \tilde{a}_\sigma^\beta \xi^{\beta'} \right]. \end{aligned}$$

Se $T = (Jh(x))^t = \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x) \right)^t$, então $(T\xi)_i = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x)$. Para $\rho = e_{i_1} + \dots + e_{i_m}$

$(i_1 \leq i_2 \leq \dots i_m)$ e $\alpha = (j_1, \dots j_m) \in A_\rho$ temos

$$\begin{aligned} \xi^{\alpha'} \tilde{a}_\rho^\alpha &= \frac{\partial h_{j_1}}{\partial x_{i_1}}(h^{-1}(y)) \dots \frac{\partial h_{j_m}}{\partial x_{i_m}}(h^{-1}(y)) (\xi \cdot e_{j_1}) \dots (\xi \cdot e_{j_m}) \\ &= \left(\frac{\partial h_{j_1}}{\partial x_{i_1}}(x) (\xi \cdot e_{j_1}) \right) \dots \left(\frac{\partial h_{j_m}}{\partial x_{i_m}}(x) (\xi \cdot e_{j_m}) \right), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in A_\rho} \xi^{\alpha'} \tilde{a}_\rho^\alpha &= \sum_{\alpha \in A_\rho} \left(\frac{\partial h_{j_1}}{\partial x_{i_1}}(x) (\xi \cdot e_{j_1}) \right) \dots \left(\frac{\partial h_{j_m}}{\partial x_{i_m}}(h^{-1}(y)) (\xi \cdot e_{j_m}) \right) \\ &= (T\xi)_{i_1} \dots (T\xi)_{i_m} = (T\xi)^\rho. \end{aligned}$$

Logo, da condição (A_1) , da inversibilidade de T e do fato que $|\det h'|$ é limitada superiormente, temos

$$(-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \widehat{L}'(y, \xi) \right\} = (-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\rho|, |\sigma|=m} (T\xi)^\rho b^{\rho\sigma} (T\xi)^\sigma \right\} \geq c'_0 |\xi|^{2m}$$

para alguma $c'_0 > 0$ e assim $\widehat{L}$ verifica a condição (A_1) . $\square$

Teorema 2.7. *Seja Ω um aberto (limitado ou não) com $\partial\Omega \in C^{2m}$ e $\Omega' = \Omega \cap U \neq \emptyset$ onde U aberto limitado. Suponha (A_1) , (A_2) e (B_j) em Ω , para algum $1 \leq j \leq m$. Se $u \in H_0^m(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ e*

$$B[\phi, u] = (\phi, f) \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2.84)$$

então $u \in H^{m+j}(\Omega')$ e

$$\|u\|_{m+j, \Omega'} \leq C(\|f\|_{0, \Omega} + \|u\|_{0, \Omega}). \quad (2.85)$$

Além disso, se $\partial\Omega \in C^{2m+k}$, $f \in H^k(\Omega)$ e (B_{m+k}) se verifica para algum $k \geq 0$, então $u \in H^{2m+k}(\Omega')$ e

$$\|u\|_{2m+k, \Omega'} \leq C(\|f\|_{k, \Omega} + \|u\|_{0, \Omega}). \quad (2.86)$$

C é uma constante que depende c_0 , c_1 , K , Ω' e Ω .

Demonstração. Só provaremos o caso $k = 0$. Como Ω é de classe C^{2m} , qualquer ponto de $\overline{\Omega}$ tem uma vizinhança que pode ser transformada em uma bola ou em uma semi-bola por uma transformação de classe C^{2m} . Um número finito destas vizinhanças cobrem $\overline{\Omega'}$. Denotemos por Ω_i tais vizinhanças e por $\Omega'_i \subset \subset \Omega_i$ vizinhanças que ainda cobrem Ω' .

Para os Ω_i que cobrem $\partial\Omega \cap \overline{U}$, seja $h_i : \Omega_i \cap \Omega \rightarrow B_{R_i}^+$ a transformação de classe C^{2m} ,

Figura 2.1

onde $B_{R_i}^+ = B_{R_i} \cap \{x : x_n > 0\}$. Podemos tomar $0 < R'_i < R_i$ tal que $\Omega'_i \cap \Omega = h_i^{-1}(B_{R_i}^+)$. Como $u \in H^m(\Omega)$ então $u_i = u \circ h_i^{-1} \in H^m(B_{R_i}^+)$. Além disso, $\xi_i u \in H_0^m(\Omega_i \cap \Omega)$, onde $\xi_i = \xi \circ h_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ e $\xi \in C_0^\infty(B_{R_i})$. Logo $\xi v_i \in H_0^m(B_{R_i}^+)$ e portanto, do Teorema 2.6 e Lema 2.11, $v_i \in H^{2m}(B_{R_i}^+)$ e se verifica (2.79). Segue que $u|_{\Omega'_i \cap \Omega} \in H^{2m}(\Omega'_i \cap \Omega)$ e

$$\|u\|_{2m, \Omega'_i \cap \Omega} \leq C(\|f\|_{0, \Omega \cap \Omega_i} + \|u\|_{m, \Omega \cap \Omega_i}).$$

Os Ω_i 's que são transformados em B_{R_i} estão no interior de Ω . Aplicando o Teorema 2.4, temos que $u|_{\Omega'_i} \in H^{2m}(\Omega'_i)$ e

$$\|u\|_{2m, \Omega'_i} \leq C(\|f\|_{0, \Omega_i} + \|u\|_{m, \Omega_i}).$$

Do Teorema B.4, $u \in H^{2m}(\Omega')$. Logo

$$\|u\|_{2m, \Omega'} \leq C(\|f\|_{0, \Omega'} + \|u\|_{m, \Omega'}). \quad (2.87)$$

Da desigualdade de Garding, obtemos

$$\|u\|_{m, \Omega'} \leq c(\|f\|_{0, \Omega} + \|u\|_{0, \Omega}).$$

Substituindo esta última desigualdade em (2.87), obtemos (2.85). $\square$

Usando os Teoremas 2.7 e B.12 temos:

Corolário 2.3. *Seja Ω domínio limitado C^∞ e suponha $(A_1), (A_2)$. Se f e $a^{\rho\sigma} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então qualquer $u \in H_0^m(\Omega)$ solução generalizada de $Lu = f$ em Ω pertence a $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

2.5 Geração do semigrupo

Nesta seção escreveremos o operador uniformemente fortemente elíptico na forma

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha. \quad (2.88)$$

com constante de elipticidade c_0 . Usaremos o Teorema 2.7 para derivar umas desigualdades a priori.

Teorema 2.8. *Seja Ω um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{2m+k}$ para algum $k \geq 0$ e $\mathcal{A}$ um operador uniformemente fortemente elíptico em Ω com $a_\alpha \in C^k(\overline{\Omega})$. Então*

$$\|u\|_{2m+k, \Omega} \leq C(\|\mathcal{A}u\|_{k, \Omega} + \|u\|_{0, \Omega}) \quad (2.89)$$

para todo $u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, onde C é independente de u .

Demonstração. A prova será feita em três casos.

Caso 1. $\mathcal{A}$ é homogênea com coeficientes constantes.

Neste caso $\mathcal{A}$ pode ser escrito na forma $\sum_{|\rho|, |\sigma|=m} (-1)^{|\rho|} D^\rho (a^{\rho\sigma} D^\sigma)$. Se $f = \mathcal{A}u \in H^k(\Omega)$, então, para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$B[\phi, u] = (\phi, \mathcal{A}u) = (\phi, f)$$

onde B é a forma bilinear associada a $\mathcal{A}$. Como as hipóteses do Teorema 2.7 estão satisfeitas então

$$\|\mathcal{A}u\|_{k, \Omega}^2 \geq C_0 \|u\|_{2m+k, \Omega}^2 - \|u\|_{0, \Omega}^2, \quad \forall u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega). \quad (2.90)$$

Caso 2. $\mathcal{A}$ é homogênea com coeficientes não constantes.

Seja $x_0 \in \Omega$ e $W \subset \Omega$ uma vizinhança de x_0 . Se escrevemos

$$\mathcal{A}u = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x_0) D^\alpha u + \sum_{|\alpha|=2m} [a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)] D^\alpha u = \mathcal{A}_1 u + \mathcal{A}_2 u,$$

então

$$\|\mathcal{A}u\|_{k, W}^2 \geq \frac{1}{2} \|\mathcal{A}_1 u\|_{k, W}^2 - \|\mathcal{A}_2 u\|_{k, W}^2. \quad (2.91)$$

Estimando $\|\mathcal{A}_2 u\|_{k,W}^2$ temos para $u \in H^{2m+k}(W)$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_2 u\|_{k,W}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_W |D^\alpha \mathcal{A}_2 u|^2 dx = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_W \left| \sum_{|\beta|=2m} D^\alpha [(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)) D^\beta u] \right|^2 dx \\
&\leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta|=2m} \int_W |D^\alpha [(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)) D^\beta u]|^2 dx \\
&\leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta|=2m} \sum_{\gamma \leq \alpha} \int_W |D^{\alpha-\gamma} [a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)] D^\gamma D^\beta u|^2 dx \\
&= c \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta|=2m} \int_W |[a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)] D^{\alpha+\beta} u|^2 dx \\
&\quad + c \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta|=2m} \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \\ \gamma \neq \alpha}} \int_B |D^{\alpha-\gamma} [a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)] D^\gamma D^\beta u|^2 dx \\
&\leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta|=2m} \int_W |[a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)] D^{\alpha+\beta} u|^2 dx + c \|u\|_{2m+k-1,W}^2.
\end{aligned}$$

Pelo módulo de continuidade dos coeficientes principais, para $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ e uma vizinhança W de x_0 tal que $|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)|^2 < \epsilon/c$ para todo $x \in W$ com $\text{diam } W < \delta$, então

$$\|\mathcal{A}_2 u\|_{k,W}^2 \leq \epsilon/2 \|u\|_{2m+k,W}^2 + c \|u\|_{2m+k-1,W}^2, \quad \forall u \in H^{2m+k}(W).$$

Usando Teorema B.10

$$\|\mathcal{A}_2 u\|_{k,W}^2 \leq \epsilon/2 \|u\|_{2m+k,W}^2 + \epsilon/2 \|u\|_{2m+k,W}^2 + c_\epsilon \|u\|_{0,W}^2$$

para $u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ com $u = 0$ em $\Omega \setminus W$. Tomando $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < C_0/4$

$$\|\mathcal{A}_2 u\|_{k,W}^2 \leq \frac{1}{4} C_0 \|u\|_{2m+k,W}^2 + c_\epsilon \|u\|_{0,W}^2. \quad (2.92)$$

para $u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ com $u = 0$ em $\Omega \setminus W$. De (2.90), (2.91) e (2.92)

$$\|\mathcal{A} u\|_{k,W}^2 \geq \frac{1}{4} C_0 \|u\|_{2m+k,W}^2 - C_1 \|u\|_{0,W}^2, \quad (2.93)$$

para todo $u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ com $u = 0$ em $\Omega \setminus W$.

Caso 3. Caso geral.

Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}''$ onde $\mathcal{A}'$ é a parte principal de $\mathcal{A}$, temos que

$$\|\mathcal{A}u\|_{k,\Omega}^2 \geq \frac{1}{2}\|\mathcal{A}'u\|_{k,\Omega}^2 - \|\mathcal{A}''u\|_{k,\Omega}^2, \quad \forall u \in H^{2m+k}(\Omega).$$

Estimando $\|\mathcal{A}''u\|_{k,\Omega}^2$, com $u \in H^{2m+k}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}''u\|_{k,\Omega}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \left| \sum_{|\rho| < 2m} D^{\alpha}(a_{\rho} D^{\rho} u) \right|^2 dx \\ &\leq C_2 \|u\|_{2m+k,\Omega} \|u\|_{2m+k-1,\Omega}, \end{aligned}$$

onde C_2 depende de $\sup_{|\alpha| \leq 2m+k, |\rho| \leq 2m} |D^{\alpha} a_{\rho}|$ em $\bar{\Omega}$. Logo

$$\|\mathcal{A}u\|_{k,\Omega}^2 \geq \frac{1}{2}\|\mathcal{A}'u\|_{k,\Omega}^2 - C_2 \|u\|_{2m+k,\Omega} \|u\|_{2m+k-1,\Omega}. \quad (2.94)$$

para todo $u \in H^{2m+k}(\Omega)$.

Cobrimos $\bar{\Omega}$ com um número finito de bolas B_j de diâmetro δ (onde δ é do caso 2) e seja $\beta_j \in C_0^{\infty}(B_j)$ com $\sum_j \beta_j^2 = 1$ (como na prova da desigualdade de Gårding). Vamos estimar $\|\mathcal{A}'u\|_{k,\Omega}^2$ para $u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. Se $u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}'u\|_{k,\Omega}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \left(\sum_{|\rho|=2m} D^{\alpha}(a_{\rho} D^{\rho} u) \right) \left(\sum_{|\sigma|=2m} D^{\alpha}(\bar{a}_{\sigma} D^{\sigma} \bar{u}) \right) dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\rho|=|\sigma|=2m} \int_{\Omega} D^{\alpha}(a_{\rho} D^{\rho} u) D^{\alpha}(\bar{a}_{\sigma} D^{\sigma} \bar{u}) dx \\ &= \sum_j \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\rho|=|\sigma|=2m} \int_{\Omega} [\beta_j D^{\alpha}(a_{\rho} D^{\rho} u)] [\beta_j D^{\alpha}(\bar{a}_{\sigma} D^{\sigma} \bar{u})] dx \\ &= \sum_j \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\rho|=|\sigma|=2m} \int_{\Omega} D^{\alpha}[a_{\rho} D^{\rho}(\beta_j u)] D^{\alpha}[\bar{a}_{\sigma} D^{\sigma}(\overline{\beta_j u})] dx - H \\ &= H_1 - H \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde H satisfaz, como na prova da desigualdade de Gårding,

$$|H| \leq C_3 \|u\|_{2m+k,\Omega} \|u\|_{2m+k-1,\Omega}.$$

Continuando, para cada j ,

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\rho|=|\sigma|=2m} \int_{\Omega} D^{\alpha}(a_{\rho} D^{\rho}(\beta_j u)) (D^{\alpha}(\bar{a}_{\sigma} D^{\sigma}(\beta_j u))) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{B_j} |D^{\alpha}(\mathcal{A}'v_j)|^2 dx$$

$$= \|\mathcal{A}'v_j\|_{k,B_j}^2 \quad (2.96)$$

onde $v_j = \beta_j u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ com $u = 0$ em $\Omega \setminus W_j$. Do Caso 2 temos que

$$H_1 \geq \frac{C_0}{4} \sum_j \|v_j\|_{2m+k,\Omega \cap W_j}^2 - C_1 \sum_j \|v_j\|_{0,\Omega \cap W_j}^2.$$

Como $\|v_j\|_{0,\Omega \cap W_j}^2 \leq \|u\|_{0,\Omega}^2$, temos que

$$H_1 \geq \frac{C_0}{4} \sum_j \|v_j\|_{2m+k,\Omega \cap W_j}^2 - C_4 \|u\|_{0,\Omega}^2.$$

Logo

$$\|\mathcal{A}'u\|_{k,\Omega}^2 \geq \frac{C_0}{4} \sum_j \|v_j\|_{2m+k,\Omega \cap W_j}^2 - C_4 \|u\|_{0,\Omega}^2 - C_3 \|u\|_{2m+k,\Omega} \|u\|_{2m+k-1,\Omega}. \quad (2.97)$$

Como em (2.95)

$$\begin{aligned} \sum_j \|v_j\|_{2m+k,\Omega \cap W_j}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq 2m+k} \sum_j \int_{\Omega} |D^\alpha(\beta_j u)|^2 dx = \sum_{|\alpha| \leq 2m+k} \sum_j \int_{\Omega} \beta_j^2 |D^\alpha u|^2 dx + H_2 \\ &= \|u\|_{2m+k,\Omega}^2 + H_2 \end{aligned}$$

onde H_2 satisfaz

$$\frac{1}{4} C_0 |H_2| \leq C_5 \|u\|_{2m+k} \|u\|_{2m+k-1}.$$

Daí

$$\|\mathcal{A}'u\|^2 \geq \frac{C_0}{4} \|u\|_{2m+k,\Omega}^2 - C_4 \|u\|_0^2 - C_6 \|u\|_{2m+k} \|u\|_{2m+k-1},$$

para todo $u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. Desta estimativa e de (2.94) segue que

$$\|\mathcal{A}u\|_{k,\Omega}^2 \geq \frac{C_0}{8} \|u\|_{2m+k}^2 - \frac{C_4}{2} \|u\|_0^2 - C_7 \|u\|_{2m+k} \|u\|_{2m+k-1}. \quad (2.98)$$

Novamente como na prova de desigualdade de Gårding

$$\|\mathcal{A}u\|_{k,\Omega}^2 \geq C_8 \|u\|_{2m+k,\Omega}^2 - C_9 \|u\|_{0,\Omega}^2.$$

Isto implica

$$\|u\|_{2m+k,\Omega} \leq C(\|\mathcal{A}u\|_{k,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega}),$$

para todo $u \in H^{2m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. □

Observação 2.2. *Mais precisamente, a constante C do teorema acima depende somente de Ω , da constante de elipticidade de A , da cota superior das derivadas de ordem $\leq k$ de a_α em $\bar{\Omega}$ e do módulo de continuidade dos coeficiente principais.*

Denotamos por $\Omega_T = \Omega \times \{t : |t| < T\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $T \in (0, \infty]$. O seguinte teorema estende o Teorema 2.8 para domínios que não são de classe C^{2m+k} , mais exatamente para domínios cilíndricos Ω_T .

Teorema 2.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{2m+k}$, $T \in \mathbb{R}^+$ e A um operador uniformemente fortemente elíptico em $\Omega_\infty \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $a_\alpha \in C_B^k(\Omega_\infty)$. Então*

$$\|u\|_{2m+k, \Omega_T} \leq C(\|\mathcal{A}u\|_{k, \Omega_T} + \|u\|_{0, \Omega_T}) \quad (2.99)$$

para todo $u \in H^{2m+k}(\Omega_\infty) \cap H_0^m(\Omega_\infty)$ com $u = 0$ para todo $|t| \geq T$, onde C é uma constante como na observação 2.2 (também depende de T).

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $c_\epsilon > 0$ tal que

$$\|v\|_{2m+k-1, \Omega_T}^2 \leq \epsilon \|v\|_{2m+k, \Omega_T}^2 + c_\epsilon \|v\|_{0, \Omega_T}^2, \quad \forall v \in H^m(\Omega_T). \quad (2.100)$$

De fato, se $v \in H^m(\Omega_T)$ então para cada $x \in \Omega$, $t \mapsto v(x, t)$ pertence $H^m(I)$, onde $I = (-T, T)$, cuja derivada fraca de ordem β ($|\beta| \leq m$) é $t \mapsto D^\alpha v(x, t)$. Analogamente, se verifica para $x \mapsto v(x, t)$ pertence $H^m(\Omega)$ para $t \in \mathbb{R}$. Logo, do Teorema B.10, para $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} \|v\|_{2m+k-1, \Omega_T}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq 2m+k-1} \int_{\Omega} \left[\sum_{|\beta| \leq 2m+k-1-|\alpha|} \int_I |D_{n+1}^\beta D^\alpha v(x, t)|^2 dt \right] dx \\ &\leq \epsilon_1 \|v\|_{2m+k, \Omega_T}^2 + c_{\epsilon_1} \int_I \sum_{|\alpha| \leq 2m+k-1} \int_{\Omega} |D^\alpha v(x, t)|^2 dx dt \\ &\leq \epsilon_1 \|v\|_{2m+k, \Omega_T}^2 + \epsilon_2 c_{\epsilon_1} \|v\|_{2m+k, \Omega_T}^2 + c_{\epsilon_1} c_{\epsilon_2} \|v\|_{0, \Omega_T}^2 \\ &\leq (\epsilon_1 + \epsilon_2 c_{\epsilon_1}) \|v\|_{2m+k, \Omega_T}^2 + c_{\epsilon_1} c_{\epsilon_2} \|v\|_{0, \Omega_T}^2, \end{aligned}$$

de onde segue (2.100).

Os cálculos na demonstração do Teorema 2.8 também são válidos para este teorema até a estimativa (2.98), isto é, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$\|\mathcal{A}u\|_{k, \Omega_T} \geq C_1 \|u\|_{2m+k, \Omega_T} - C_2 (\|u\|_{0, \Omega_T} + \|u\|_{2m+k, \Omega_T} \|u\|_{2m+k-1, \Omega_T})$$

para todo $u \in H^{2m}(\Omega_\infty) \cap H_0^m(\Omega_\infty)$ com $u = 0$ quando $|t| \geq T$. De esta última desigualdade e de (2.100) segue (2.99). $\square$

Teorema 2.10. *Se Ω é um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{2m}$ e $\mathcal{A}$ um operador uniformemente fortemente elíptico em Ω com $a_\alpha \in C(\bar{\Omega})$. Então, dado $0 < \epsilon < \pi/2$, existem constantes positivas C, Λ_0 tais que*

$$\sum_{j=0}^{2m} |\lambda|^{\frac{(2m-j)}{2m}} \|u\|_{j,\Omega} \leq C \|(\mathcal{A} + \lambda I)u\|_{0,\Omega}, \quad (2.101)$$

para todo $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ e para todo λ em $-\frac{\pi}{2} + \epsilon \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon$, $|\lambda| \geq \Lambda_0$.

Demonstração. Dado $0 < \epsilon < \pi/2$, introduzimos o operador

$$\mathcal{A}_\theta = \mathcal{A} + (-1)^m e^{i\theta} \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} \quad (-\pi/2 + \epsilon \leq \theta \leq \pi/2 - \epsilon)$$

que é uniformemente elíptico (aqui usamos que $0 < \epsilon < \pi/2$) em qualquer cilindro Ω_T e tem módulo de elipticidade independente de θ . Seja $\xi \in C^\infty$ tal que $\xi(t) = 1$ se $|t| \leq 1$, $\xi(t) = 0$ se $|t| \geq 3/2$ e considere a função

$$v(x, t) = u(x) e^{i\mu t} \xi(t) \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Afirmamos que $v \in H^{2m}(\Omega_\infty) \cap H_0^m(\Omega_\infty)$ com $u = 0$ para $|t| > 2$. De fato, como $u \in H^{2m}(\Omega)$ então existe $(u_k) \in \widehat{C}^{2m,2}(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $H^{2m}(\Omega)$. Então $v_k = u_k e^{t\mu i} \xi(t) \in H^{2m}(\Omega_\infty)$ e $D^{(\alpha,\beta)} v_k = D^\alpha u_k D^\beta (e^{t\mu i} \xi(t))$ onde $|(\alpha, \beta)| \leq 2m$ ($\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}$). Assim $D^{(\alpha,\beta)} v_k$ é limitado em $H^{2m}(\Omega_\infty)$. Como $v_k \rightarrow v$ em $L^2(\Omega_2)$ então, do Teorema B.3, $v \in H^{2m}(\Omega_\infty)$ e $D^{(\alpha,\beta)} v = D^\alpha u D^\beta (e^{i\mu t} \xi(t))$. A prova do que $v \in H_0^m(\Omega_\infty)$ é similar.

Do Teorema 2.9, existe uma constante c (independente de θ) tal que

$$\|v\|_{2m,\Omega_2} \leq c(\|\mathcal{A}_\theta v\|_{0,\Omega_2} + \|v\|_{0,\Omega_2}).$$

Vamos estimar $\|\mathcal{A}_\theta v\|_{0,\Omega_2}$. Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\theta v &= \mathcal{A}u \cdot e^{i\mu t} \xi(t) + (-1)^m e^{i\theta} u \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} (e^{i\mu t} \xi(t)) \\ &= \mathcal{A}u \cdot e^{i\mu t} \xi(t) + (-1)^m e^{i\theta} u \left[(-1)^m \mu^{2m} e^{i\mu t} \xi(t) + \sum_{r \geq 1}^{2m} \binom{2m}{r} i^{2m-r} \mu^{2m-r} e^{i\mu t} \xi^{(r)}(t) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\mathcal{A}u + \mu^{2m} e^{i\theta} u] e^{i\mu t} \xi(t) + (-1)^m e^{i\theta} u \sum_{r \geq 1}^{2m} \binom{2m}{r} i^{2m-r} \mu^{2m-r} e^{i\mu t} \xi^{(r)}(t) \\
&= I + J
\end{aligned}$$

onde

$$\|I\|_{0,\Omega_2} \leq c \|\mathcal{A}u + \mu^{2m} e^{i\theta} u\|_{0,\Omega}$$

e

$$\|J\|_{0,\Omega_2} \leq c \sum_{j \geq 1}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{0,\Omega}.$$

Logo

$$\|\mathcal{A}_\theta v\|_{0,\Omega_2} \leq c \|\mathcal{A}u + \mu^{2m} e^{i\theta} u\|_{0,\Omega} + c \sum_{j \geq 1}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{0,\Omega}.$$

Como $\|v\|_{2m,\Omega_1} = \|u e^{i\mu t}\|_{2m,\Omega_1}$ e $\|v\|_{0,\Omega_2} \leq c \|u\|_{0,\Omega}$, segue que

$$\|u e^{i\mu t}\|_{2m,\Omega_1} \leq c \|\mathcal{A}u + \mu^{2m} e^{i\theta} u\|_{0,\Omega} + \frac{c}{|\mu|} \sum_{j \geq 0}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{j,\Omega} \quad (\mu \neq 0). \quad (2.102)$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\|u e^{i\mu t}\|_{2m,\Omega_1}^2 &= \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq 2m} \int_{\Omega_1} |D^\alpha u D^\beta (e^{i\mu t})|^2 = \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq 2m} \int_{\Omega_1} |D^\alpha u|^2 |\mu|^{2\beta} \\
&= 2 \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq 2m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 |\mu|^{2\beta} = 2 \sum_{\beta=0}^{2m} \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2m-\beta} |D^\alpha u|^2 |\mu|^{2\beta} \\
&= 2 \sum_{\beta=0}^{2m} \|u\|_{2m-\beta,\Omega}^2 |\mu|^{2\beta} = 2 \sum_{j=0}^{2m} |\mu|^{2(2m-j)} \|u\|_{j,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

assim

$$\sqrt{2^{1-2m}} \sum_{j=0}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{j,\Omega} \leq \|u e^{i\mu t}\|_{2m,\Omega_1}. \quad (2.103)$$

De (2.102) e (2.103)

$$\sum_{j=0}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{j,\Omega} \leq c \|\mathcal{A}u + \mu^{2m} e^{i\theta} u\|_{0,\Omega} + \frac{c}{|\mu|} \sum_{j=0}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{j,\Omega}$$

de onde

$$\left(1 - \frac{c}{|\mu|}\right) \sum_{j=0}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{j,\Omega} \leq c \|\mathcal{A}u + \mu^{2m} e^{i\theta} u\|_{0,\Omega}.$$

Tomando $|\mu| > 2c$ segue

$$\sum_{j=0}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{j,\Omega} \leq C \|\mathcal{A}u + \mu^{2m} e^{i\theta} u\|_{0,\Omega}.$$

Finalmente fazendo $\lambda = \mu^{2m} e^{i\theta}$ com $|\mu| \geq 2c$ obtemos (2.101) para $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. $\square$

Definição 2.3. Assumamos que Ω é um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^{2m}$, definimos o operador linear $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ com domínio $D(A) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ dado por

$$(Au)(x) = \mathcal{A}(x, D)u, \quad u \in D(A),$$

onde $\mathcal{A}$ é operador dado em (2.88) com $a_\alpha \in (\overline{\Omega})$.

Dos Teoremas 2.8 e 2.10, segue que

$$\|u\|_{2m} \leq C(\|Au\|_0 + \|u\|_0) \quad (2.104)$$

$$|\lambda| \|u\|_0 \leq C(\|(A + \lambda I)u\|_0, \quad (2.105)$$

para todo $u \in D(A)$ onde λ é restrito como em Teorema 2.10.

Lema 2.12. A é um operador fechado.

Demonstração. Seja $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $u_i \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$ e $Au_i \rightarrow w$ em $L^2(\Omega)$. Aplicando (2.104) a $u_i - u_j$ temos que (u_i) é de Cauchy em $H^{2m}(\Omega)$, portanto existe $v \in H^{2m}(\Omega)$ tal que $u_i \rightarrow v$ em $H^{2m}(\Omega)$, também $v \in H_0^m(\Omega)$. Em particular $u_i \rightarrow v$ em $L^2(\Omega)$, assim $u = v \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. É claro que $Au_i \rightarrow Au$ em $L^2(\Omega)$, logo $Au = w$. $\square$

Lema 2.13. a) Existem $\tilde{a}_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{a}_\alpha = a_\alpha e$

$$(-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} \tilde{a}_\alpha(x) \xi^\alpha \right\} \geq \frac{c_0}{2} |\xi|^{2m}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$.

b) Existem $a_\alpha^i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $a_\alpha^i \rightarrow a_\alpha$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ quando $i \rightarrow \infty$ e

$$(-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^i(x) \xi^\alpha \right\} \geq \frac{c_0}{2} |\xi|^{2m}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $b_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma extensão contínua e limitada de a_α . Consideremos a função $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi(x, \xi) = (-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x) \xi^\alpha \right\}.$$

Denotemos $S = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$ e consideremos o conjunto

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x, \xi) > \frac{c_0}{2}, \forall \xi \in S\}.$$

Note que Ω_1 é aberto, $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$ e $\varphi(x, \xi) \geq \frac{c_0}{2} |\xi|^{2m}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega_1$. Logo, do Teorema de Partição da Unidade, existem funções $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_1(x) = 1$ em $\overline{\Omega}$ e $\varphi_2(x) = 1$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$.

Seja $\tilde{a}_\alpha = \varphi_1 b_\alpha + \frac{c_0}{2} \varphi_2 (-1)^m \delta_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ onde $\delta_\alpha = 1$ se $\alpha = 2\rho$ para algum $|\rho| = m$ e $\delta_\alpha = 0$ caso contrário. Então, se $x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(-1)^m \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} \tilde{a}_\alpha(x) \xi^\alpha \right\} &= \varphi_1(x) (-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x) \xi^\alpha \right\} + \frac{c_0}{2} \varphi_2(x) \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=2m} \delta_\alpha \xi^\alpha \\ &= \varphi_1(x) \varphi(x, \xi) + \frac{c_0}{2} \varphi_2(x) \sum_{|\rho|=m} \xi^{2\rho} \\ &= \varphi_1(x) \varphi(x, \xi) + \frac{c_0}{2} \varphi_2(x) |\xi|^{2m}. \end{aligned}$$

Se $x \in \Omega_1^c$ segue que $\varphi_1(x) = 0$ e $\operatorname{Re}(-1)^m \{\sum_{|\alpha|=2m} \tilde{a}_\alpha(x) \xi^\alpha\} = \frac{c_0}{2} |\xi|^{2m}$. Se $x \in \Omega_1$, $\operatorname{Re}(-1)^m \{\sum_{|\alpha|=2m} \tilde{a}_\alpha(x) \xi^\alpha\} \geq \varphi_1(x) \frac{c_0}{2} |\xi|^{2m} + \varphi_2(x) \frac{c_0}{2} |\xi|^{2m} = \frac{c_0}{2} |\xi|^{2m}$.

Seja $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequencia regularizante. Então $a_\alpha^i = \tilde{a}_\alpha * \rho_i = \rho_i * \tilde{a}_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $a_\alpha^i \rightarrow a_\alpha$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ quando $i \rightarrow \infty$. Se $x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$(-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^i(x) \xi^\alpha \right\} = (-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{a}_\alpha(x-y) \rho_i(y) \xi^\alpha dy \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{B_{1/i}(0)} (-1)^m \operatorname{Re} \left\{ \sum_{|\alpha|=2m} \tilde{a}_\alpha(x-y) \xi^\alpha \right\} \rho_i(y) dy \\
&\geq \frac{c_0}{2} |\xi|^{2m} \int_{B_{1/i}(0)} \rho_i(y) dy = \frac{c_0}{2} |\xi|^{2m}. \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 2.14. Para todo λ com $-\pi/2 + \epsilon \leq \arg \lambda \leq \pi/2 - \epsilon$, $|\lambda| \geq \Lambda_0$ (ϵ arbitrariamente pequeno, $|\Lambda_0|$ suficientemente grande) o operador $A + \lambda I : D(A) \rightarrow L^2(\Omega)$ é inversível.

Demonstração. Como $A + \lambda I$ é fechado e injetivo é suficiente provar que $A + \lambda I$ é sobrejetivo. Seja a_α^i uma sequência como no Lema 2.13 b), e consideremos o operador

$$A_i = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha^i D^\alpha.$$

Note que a_α^i com $|\alpha| = 2m$ e $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($a_\alpha^0 = a_\alpha$) estão limitados em $L^\infty(\Omega)$ por uma mesma constante e tem um mesmo módulo de continuidade. Mais exatamente $w(R) = \sup\{|a_\alpha^i(x) - a_\alpha^j(y)| : |x-y| \leq R, x, y \in \Omega, |\alpha| = 2m, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ é um módulo de continuidade para a_α^i . Também A e A_i tem módulo de elipticidade forte $c_0/2$. Então do Teorema 2.10

$$\|u\|_{2m} \leq C \|(A_i + \lambda I)u\|_0, \quad u \in D(A). \quad (2.106)$$

para todo λ como na tese do Teorema 2.10, onde C e Λ_0 são independentes de i .

Como $a_\alpha^i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ então A_i pode ser escrito na forma $\sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} D^\rho (b^{\rho\sigma} D^\sigma)$ com $b^{\rho\sigma}$ satisfazendo as condições (A_1) , (A_2) e (A_3) . Consideremos o operador $L = A_i + \lambda$. Afirmamos que a primeira alternativa do Teorema 2.3 vale. De fato, se $w \in H_0^m(\Omega)$ tal que $B[\phi, w] = 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ onde B é a forma bilinear associada a L , então do Teorema 2.7 $w \in H^{2m}(\Omega)$. Segue que $(\phi, (A_i + \lambda)w) = 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e assim $(A_i + \lambda)w = 0$. Aplicando (2.106) a w , obtemos $w = 0$ e a primeira alternativa do Teorema 2.3 vale.

Segue que para $f \in L^2(\Omega)$ existe uma única u_i solução do problema generalizado de Dirichlet

$$A_i u_i + \lambda u_i = f \quad \text{em } \Omega, \quad u_i \in H_0^m(\Omega). \quad (2.107)$$

Também temos que $u_i \in H^{2m}(\Omega)$. Escrevemos

$$(A_i + \lambda I)(u_i - u_j) = f_{ij},$$

onde $f_{ij} = (A_j - A_i)u_j$. De (2.106),

$$\|u_i\|_{2m} \leq C\|f\|_0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

segue que

$$\|f_{ij}\|_0 = \|(A_i - A_j)u_i\|_0 \leq C \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|a_\alpha^j - a_\alpha^i\|_{C(\Omega)} \|f\|_0$$

então $\|f_{ij}\| \rightarrow 0$ quando $i, j \rightarrow \infty$. Aplicando (2.106) a $u_i - u_j$ obtemos

$$\|u_i - u_j\|_{2m} \rightarrow 0, \quad \text{se } i, j \rightarrow \infty.$$

Logo existe $u \in H^{2m}(\Omega)$ tal que $u_j \rightarrow u$ em $H^{2m}(\Omega)$, além disso $u \in H_0^m(\Omega)$. Segue que $u \in D(A)$ e

$$u_i \rightarrow u, \quad Au_i \rightarrow Au \quad \text{em } L^2(\Omega) \text{ se } i \rightarrow \infty.$$

Além disso

$$\begin{aligned} \|A_i u - Au\|_0 &\leq \|A_i u_i - Au_i\|_0 + \|Au_i - Au\|_0 \\ &\leq c\|f\|_0 \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|a_\alpha^i - a_\alpha\|_{C(\overline{\Omega})} + \|Au_i - Au\|. \end{aligned}$$

Assim $A_i u \rightarrow Au$, quando $i \rightarrow \infty$. Portanto de (2.107) segue que $Au + \lambda u = f$. $\square$

Antes de enunciar o teorema que estabelece que $-A$ gera um C_0 -semigrupo holomorfo limitado enunciaremos e provaremos os seguintes lemas.

Lema 2.15. *Seja B um operador linear em um espaço de Banach X . Suponhamos que para alguma constante C e uma sequência de números complexos $\lambda_k \in \rho(B)$ tal que $|\lambda_k| \rightarrow \infty$, a seguinte estimativa se verifica*

$$\|(\lambda_k - B)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda_k|}.$$

Então $C \geq 1$.

Demonstração. Segue que $\|(\lambda_k - B)^{-1}\|^{-1} \geq C^{-1}|\lambda_k|$, daí, se $|\lambda - \lambda_k| < C^{-1}|\lambda_k|$ então $\lambda \in \rho(B)$ e

$$\begin{aligned} \|(\lambda - B)^{-1}\| &\leq \frac{C|\lambda_k|^{-1}}{1 - |\lambda - \lambda_k|C|\lambda_k|^{-1}} \\ &= \frac{1}{C^{-1}|\lambda_k| - |\lambda - \lambda_k|}. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Suponhamos que $C < 1$, então $C = (1 + 2\epsilon)^{-1}$ para algum $\epsilon > 0$. Note que os círculos $C_k = \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| < (1 + \epsilon)|\lambda_k|\} \subset \rho(B)$, e do fato que $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ segue $\cup_{k \in \mathbb{N}} C_k = \mathbb{C}$. Para $\lambda \in C_k$, (2.108) implica

$$\|(\lambda - B)^{-1}\| < \frac{1}{(1 + 2\epsilon)|\lambda_k| - (1 + \epsilon)|\lambda_k|} = \frac{1}{\epsilon|\lambda_k|}.$$

Assim a função $\lambda \rightarrow (\lambda - B)^{-1}$ com domínio $\mathbb{C}$ é uniformemente limitado é analítica, o Teorema de Liouville implica que $(\lambda - B)^{-1}$ é constante o qual é absurdo. $\square$

Lema 2.16. *Seja $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $k_0 \in \mathbb{R}$ e $\Lambda_0 > 0$ tal que para todo λ com $\arg(\lambda - k_0) = \theta_0$ e $|\lambda - k_0| \geq \Lambda_0$*

$$\|(\lambda - B)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda - k_0|}. \quad (2.109)$$

Então existe um $\delta > 0$ tal que para todo λ com $|\theta_0 - \arg(\lambda - k_0)| < \delta$ e $|\lambda - k_0| \geq \Lambda_0$ também verificam uma estimativa como (2.109).

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ que verifica as condições do lema. Se $|\mu - \lambda| < C^{-1}|\lambda - k_0|$ então, do Teorema A.2, $\mu \in \rho(A)$ e

$$\|(\mu - B)^{-1}\| \leq \frac{C|\lambda - k_0|^{-1}}{1 - |\lambda - \mu|C|\lambda - k_0|^{-1}}.$$

Então, se $|\mu - \lambda| < \frac{1}{2}C^{-1}|\lambda - k_0|$

$$\|(\mu - B)^{-1}\| \leq 2C|\lambda - k_0|^{-1},$$

como $|\mu - k_0| \leq |\lambda - k_0| + |\mu - \lambda| \leq (1 + 1/2C)|\lambda - k_0|$, segue

$$\|(\mu - B)^{-1}\| \leq \frac{2C + 1}{|\mu - k_0|}.$$

Esta estimativa vale para todo μ tal que $|\mu - \lambda| < \frac{1}{2}C^{-1}|\lambda - k_0|$. Agora, do Lema 2.15, escolhemos $\delta = \arcsin(\frac{1}{2C})$ o lema conclui. $\square$

Lema 2.17. *Seja X espaço de Banach, Y um espaço normado e $L_0, L_1 : X \rightarrow Y$ operadores lineares limitados. Para cada $t \in [0, 1]$ seja*

$$L_t = (1 - t)L_0 + tL_1$$

e suponha que existe C tal que

$$\|x\|_X \leq C\|L_t x\|_Y \quad (2.110)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Então L_1 é sobrejetivo se e somente se L_0 o é.

Demonstração. Suponha que L_s é sobrejetivo para algum $s \in [0, 1]$. De (2.110), L_s é injetivo, daí existe seu inverso $L_s^{-1} : Y \rightarrow X$. Para $t \in [0, 1]$ e $y \in Y$ fixo, a equação $L_t x = y$ equivalente a equação

$$\begin{aligned} L_s(x) &= y + (L_s - L_t)x \\ &= y + (t - s)L_0x - (t - s)L_1x \end{aligned}$$

que também é equivalente a equação

$$x = L_s^{-1}y + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$$

A aplicação $T : X \rightarrow X$ dada por $Tx = L_s^{-1}y + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$ é uma contração se

$$|s - t| < \delta = [C(\|L_0\| + \|L_1\|)]^{-1}.$$

Então L_t é sobrejetiva para todo $t \in [0, 1]$ satisfazendo $|s - t| < \delta$. Dividindo o intervalo $[0, 1]$ em subintervalos de longitude menor que δ , vemos que L_t é sobrejetiva para todo $t \in [0, 1]$ sabendo que é sobrejetiva para algum $t \in [0, 1]$ fixo. Em particular para $t = 0$ ou $t = 1$. $\square$

Teorema 2.11. *Se os coeficientes do operador A satisfazem: $a_\alpha \in C^j(\overline{\Omega})$ onde $j = \max\{0, |\alpha| - m\}$, então $-A$ gera um C_0 -semigrupo holomorfo em $L^2(\Omega)$.*

Demonstração. Provaremos que existe $w > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > w\} \subset \rho(-A)$ e

$$\sup_{\operatorname{Re} z > w} \|(\lambda - w)R(\lambda, -A)\| < \infty.$$

Portanto do Corolário 1.7 concluiremos que $-A$ gera um C_0 -semigrupo holomorfo em $L^2(\Omega)$.

Passo 1. Existem constantes positivas σ_0, c tais que

$$\|[A + (\sigma_0 + i\tau)I]u\|_0 \geq c|\tau|\|u\|_0, \quad (2.111)$$

para todo $u \in D(A)$ e $\tau \in \mathbb{R}$.

Como $a_\alpha \in C^j(\overline{\Omega})$, $j = \max\{0, |\alpha| - m\}$, então A pode ser escrito na forma $A = \sum_{|\rho|, |\sigma| \leq m} (-1)^{|\rho|} D^\rho (b^{\rho\sigma} D^\sigma)$ com $b^{\rho\sigma} \in C^{|\rho|}(\overline{\Omega})$ e se B é sua forma bilinear associada então

$B[u, u] = (u, Au)$ para todo $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. Logo da desigualdade de Gårding

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}([A + (\sigma + i\tau)I]u, u) &= \operatorname{Re}(Au, u) + \sigma_0 \|u\|_0^2 \\ &\geq \sigma_0 \|u\|_0^2 + c_0 \|u\|_m^2 - k_0 \|u\|_0^2 \\ &= c_0 \|u\|_m^2, \end{aligned}$$

se tomamos $\sigma_0 \geq k_0$. Também temos que $|(Au, u)| \leq C \|u\|_m^2$ para todo $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, assim

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}([A + (\sigma_0 + i\tau)I]u, u)| + \frac{C}{c_0} \operatorname{Re}([A + (\sigma_0 + i\tau)I]u, u) &\geq |\tau| \|u\|_0^2 \\ &\quad - \operatorname{Im}(Au, u) + C \|u\|_m^2 \\ &\geq |\tau| \|u\|_0^2. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$|([A + (\sigma_0 + i\tau)I]u, u)| \geq c|\tau| \|u\|_0^2 \quad (c > 0),$$

de onde segue (2.111).

Passo 2. Existem constantes positivas k, Λ_0, δ tais que $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - k) - \pi/2| < \delta, |\lambda - k| \geq \Lambda_0\} \subset \rho(-A)$ e

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C_2}{|\lambda - k|}, \quad \forall \lambda \in \Gamma.$$

Seja $\theta_0 = \arctan(2/c)$, do Lema 2.14, para $\epsilon_0 = \pi/2 - \theta_0$ temos que $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : -\theta_0 \leq \arg \lambda \leq \theta_0, |\lambda| \geq \Lambda_0\} \subset \rho(-A)$ e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Gamma_0.$$

Se $k = \max\{\sigma_0, \Lambda_0\}$, então $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq k\} \subset \rho(-A)$. De fato, seja $\lambda = \sigma + i\tau$ com $\sigma \geq k, |\tau| \geq \sigma \tan \theta_0$ e $\lambda_0 = \sigma + i\sigma \tan \theta_0$, então de (2.111)

$$\begin{aligned} \|[A + \lambda I]u\| &\geq \|[A + (\sigma_0 + i\tau)I]u\| - |\sigma - \sigma_0| \|u\| \\ &\geq (c|\tau| - \sigma + \sigma_0) \|u\| = (c\sigma \tan \theta_0 - \sigma + \sigma_0) \|u\| \\ &\geq \sigma_0 \|u\|, \end{aligned} \tag{2.112}$$

como $A + \lambda_0 I$ é sobrejetivo, então do Lema 2.17 $A + \lambda I$ é sobrejetivo. De (2.112) $A + \lambda I$

é injetivo e do fato que A é fechado segue que $A + \lambda I$ é inversível.

Seja $\lambda = k + i\tau$ com $|\tau| \geq k \tan \theta_0$, como em (2.112)

$$\|[A + \lambda I]u\| \geq (c|\tau| - (k - \sigma_0))\|u\|.$$

Note que $2\frac{k-\sigma_0}{c} \leq k \tan \theta_0 \leq |\tau|$, assim

$$\|[A + \lambda I]u\| \geq \frac{c}{2}|\tau|\|u\| = \frac{c}{2}|\lambda - k|\|u\|$$

o que implica

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{c}{2|\lambda - k|}, \quad \lambda = k + i\tau, \quad |\tau| \geq k \tan \theta_0.$$

Do Lema 2.16, se conclui o Passo 2.

Passo 3. Finalmente tomando $\epsilon = \delta$ e $w = \max\{k, \Lambda(\delta)\}$ ($\Lambda(\delta)$ é dado pelo Lema 2.14) concluimos a prova do teorema.

□

Semigrupo em $C_0(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $n \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$. Consideraremos o operador $\mathcal{A}$ dado por

$$\mathcal{A}u := \sum_{i,j=1}^n -a_{ij}D_{ij}u + \sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu \quad (3.1)$$

com coeficientes de valor real a_{ij}, b_j, c satisfazendo

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C(\overline{\Omega}), b_j \in L^\infty(\Omega), j = 1, \dots, n, c \in L^\infty(\Omega), c \geq 0, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j &\geq \lambda_0|\xi|^2 \quad (x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^m). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se A_0 é a parte de $\mathcal{A}$ em $C_0(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$, isto é,

$$\begin{aligned} D(A_0) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) : \mathcal{A}u \in C_0(\Omega)\} \\ A_0 u &= \mathcal{A}u \end{aligned}$$

então mostraremos que se Ω satisfaz condição do cone exterior uniforme, $-A_0$ gera um C_0 -semigrupo holomorfo limitado em $C_0(\Omega)$ (veja Teorema 3.14).

Os resultados principais deste capítulo pode ser encontrados em [3], [6], [7], [14].

Nas seções 3.1, 3.2 e 3.3 todos os espaços de funções são espaços vetoriais reais de funções a valores reais

3.1 Definições e resultado prévios

Nesta seção $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será um domínio (limitado ou não).

Definição 3.1. *Seja $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo, e para cada $x \neq 0$ seja $\angle(x, v)$ o ângulo entre os vetores x e v . Para $v, \rho > 0$ e κ satisfazendo $0 < \kappa \leq \pi$, o conjunto*

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : x = 0 \text{ ou } 0 < |x| \leq \rho, \angle(x, v) \leq \kappa/2\}$$

é chamado cone circular reto de altura ρ , direção v e abertura de ângulo κ com vértice na origem. Note que $V_x = x + V$ é um cone circular reto com vértice em x com as mesmas dimensões e direção de V .

Definição 3.2. *a) Diremos que Ω satisfaz a condição de cone exterior em $x_0 \in \partial\Omega$, se existe um cone V_{x_0} com vértice em x_0 satisfazendo $\overline{V}_{x_0} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$.*

b) Se Ω satisfaz a a condição de cone exterior em cada ponto $\partial\Omega$ diremos que Ω satisfaz condição de cone exterior .

c) Diremos que Ω satisfaz a condição de cone exterior uniforme se satisfaz a condição de cone exterior em cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ e todo os cones V_{x_0} são congruentes a um cone fixo V .

Definição 3.3. *a) Diremos que $z \in \partial\Omega$ é ponto regular se existe uma uma função barreira, isto é,*

$$v \in C(\overline{\Omega'}), \quad \Delta v \leq 0 \text{ em } \mathcal{D}(\Omega')^1, \quad v(z) = 0 \quad e \quad v(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega'.$$

onde $\Omega' = \Omega \cap B$ e B é uma bola de centro z .

b) Diremos que Ω é Wiener regular (ou Dirichlet regular) se todo seus pontos de fronteira são regulares.

Observação 3.1. *Se Ω é limitado, Wiener regular (ou Dirichlet regular) é equivalente ao seguinte: se para cada $g \in C(\partial\Omega)$ existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ do problema de Dirichlet*

$$\Delta u = 0$$

$$u|_{\partial\Omega} = g$$

([6], Teorema 2.15).

¹ Isto é, $\int_{\Omega} v \Delta \varphi \leq 0$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, $\varphi \geq 0$.

Lema 3.1. *Se Ω satisfaz a condição do cone exterior então Ω é Wiener regular .*

Demonstração. Consideremos o caso $n > 2$. Seja $z \in \partial\Omega$ então existe um $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{z\}$, $0 < \theta_0 < \pi$, $r_0 > 0$ tal que

$$\Omega \cap B(z, r_0) \subset \{x : \angle(z - x_0, x - z) < \theta_0\}$$

Nos procuraremos uma função barreira da forma

$$v(x) = r^\lambda f(\theta),$$

onde $r = |x - z|$ e $\theta = \angle(z - x_0, x - z) \in [0, \theta_0)$ com $\lambda > 0$ e f contínua e estritamente positiva em $[0, \theta_0]$, que serão determinadas.

Sem perda de generalidade podemos supor que $z = 0$. Seja $D = \mathbb{R}x_0$, calculando Δv em $\mathcal{D}(\Omega' \setminus D)$ temos

$$\Delta v = r^{\lambda-2} \left(\lambda(\lambda + n - 2)f(\theta) + f''(\theta) + (n - 2) \cot \theta f'(\theta) \right)$$

equivalentemente

$$\Delta v = r^{\lambda-2} \left(\lambda(\lambda + n - 2)f(\theta) + \frac{1}{\sin^{n-2} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^{n-2} \theta \frac{df}{d\theta}(\theta) \right) \right).$$

Fixando $\theta_0 < \theta'_0 < \pi$ e escolhendo

$$f(\theta) = \int_{\theta}^{\theta'_0} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^{n-2} dt$$

resulta

$$f \in C^1([0, \theta_0]) \cap C^2((0, \theta_0]), \quad f \geq f(\theta_0) > 0 \text{ em } [0, \theta_0]$$

e

$$\Delta v = -r^{\lambda-2} \left(\frac{(n-2)\theta^{n-3}}{\sin^{n-2} \theta} - \lambda(\lambda + n - 2)f(\theta) \right) \text{ em } \Omega' \setminus D.$$

Como $f(\theta) \leq f(0)$ e $\frac{(n-2)\theta^{n-3}}{\sin^{n-2} \theta} \geq \frac{n-2}{\theta} \geq \frac{n-2}{\theta_0}$, então

$$\Delta v \leq -r^{\lambda-2} \left(\frac{n-2}{\theta_0} - \lambda(\lambda + n - 2)f(0) \right) \text{ em } \Omega' \setminus D.$$

Escolhendo

$$\lambda = \frac{n-2}{2} \left(\left(1 + \frac{4}{(n-2)\theta_0 f(0)} \right)^{1/2} - 1 \right)$$

temos $\Delta v \leq 0$ em $\Omega' \setminus D$. Para completar a prova devemos mostrar que $\Delta v \leq 0$ em $\mathcal{D}(\Omega')$. Seja $h(x) = \text{dist}(x, D) \in C^\infty(\Omega' \setminus D)$ e $g_\epsilon \in C^\infty$ dado por $g_\epsilon(t) = 1$ se $|t| > \epsilon$ e $g_\epsilon(t) = 0$ se $|t| < \epsilon/2$. Então $g_\epsilon(h(x)) \in C^\infty(\Omega' \setminus D)$. Seja $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi \geq 0$, definimos $\xi_\epsilon(x) = g_\epsilon(h(x))\xi(x) \in C_0^\infty(\Omega' \setminus D)$, então $\xi_\epsilon \geq 0$ e

$$\int_{\Omega'} v \Delta \xi_\epsilon = \int_{\Omega'} \Delta v \xi_\epsilon.$$

Como $\Delta \xi_\epsilon \rightarrow \Delta \xi$ c.t.p em Ω' , segue

$$\int_{\Omega'} v \Delta \xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega'} v \Delta \xi_\epsilon \leq 0.$$

Para o caso $n = 2$, a função

$$v(x) = \frac{-\ln r}{(\ln r)^2 + \theta^2}$$

é uma função barreira de z em $\Omega \cap B(z, r_0)$, onde $0 < r_0 = |x_0 - z| < 1$ e $r = |x - z|$. $\square$

O seguinte teorema é demonstrado em [6], Teorema 8.31.

Teorema 3.1. *Seja $Lu := -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j u) + \sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu$ fortemente elíptico com coeficientes em $L^\infty(\Omega)$ de valores reais e $c \geq 0$. Se $f \in L^{q/2}(\Omega)$ para algum $q > n$ e Ω é Wiener regular, então para $\varphi \in C(\partial\Omega)$ existe uma única função $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $Lu = f$ em Ω e $u = \varphi$ em $\partial\Omega$.*

Consideremos o operador

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n -a_{ij}D_{ij}u + \sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu$$

satisfazendo

(B_1) Existem constantes $\lambda_0, \Lambda_0 > 0$ tais que

$$\lambda_0 |x|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda_0 |x|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(B_2) Os coeficientes de L são funções a valores reais que pertencem a $L^\infty(\Omega)$ e $\|a_{ij}\|_{\infty, \Omega}, \|b_j\|_{\infty, \Omega}, \|c\|_{\infty, \Omega} \leq \Lambda$.

(B_3) Existem constantes $\gamma, \nu > 0$ tais que $\frac{\Lambda_0}{\lambda_0} \leq \gamma$, $\max\left\{\left(\frac{|b|}{\lambda_0}\right)^2, \frac{|c|}{\lambda_0}\right\} \leq \nu$, onde $|b| = (\sum_{i=1}^n b_i^2)^{1/2}$.

Teorema 3.2. *Seja $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, uma solução de $Lu = f$ em Ω , onde $f \in L^p(\Omega)$ e $a_{ij} \in C(\Omega)$. Se $f \in L^q(\Omega)$ para algum $q \in (p, \infty)$ então $u \in W_{\text{loc}}^{2,q}(\Omega)$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $a_{ij} = a_{ji}$, o caso geral segue tomando $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $0 < R < R' < R''$ tal que $B_{R''} \subset \Omega$ ($B_R = B_R(x_0)$). Tomemos $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\eta = 1$ em $B_{R'}$ e $\eta = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_{R''}$. Seja $v = \eta u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ e $g = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} v$. Do Teorema B.11, $u \in W^{1,r}(B_{R'})$ onde $1/r = \max\{1/q, 1/p - 1/n\}$. Como $Lu = f \in L^q(\Omega)$ segue que $g \in L^r(\Omega)$. Escrevemos

$$L_0 v = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)) D_{ij} v + g.$$

Se $Q = (q_{ij})$ é uma matriz que define uma transformação inversível $y = Qx$, fazendo $u(x) = \tilde{u}(y)$ temos

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) D_{ij} u(x) = \sum_{k,l=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n q_{li} a_{ij}(x_0) q_{kj} \right] D_{kl} \tilde{u}(y).$$

Assim

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) D_{ij} u(x) = \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl} D_{kl} \tilde{u}(y)$$

onde $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] = QAQ^t$ e $A = [a_{ij}(x_0)]$. Podemos escolher uma matriz inversível Q tal que $I = QAQ^t$, assim a transformação $y = Qx$ leva $L_0 v(x)$ em $\Delta \tilde{v}(y)$. Logo

$$\Delta \tilde{v} = \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - \tilde{a}_{ij}) D_{ij} \tilde{v} + \tilde{g}$$

onde $\tilde{v}$, $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{g}$ correspondem a v , a_{ij} , g respectivamente. Tomando potencial Newtoniano (Apêndice C), obtemos a equação

$$tdv = N \left[\sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - \tilde{a}_{ij}) D_{ij} \tilde{v} \right] + N \tilde{g}.$$

Consequentemente a função $\tilde{v}$ satisfaz a equação

$$\tilde{v} = T\tilde{v} + h. \quad (3.3)$$

Afirmamos que T é uma aplicação linear contínua de $W^{2,p}(\tilde{B}_R)$ em si mesmo, onde $\tilde{B}_R = Q(B_R)$, para qualquer $1 < p < \infty$. Do fato, do Teorema C.1, temos T leva

$W^{2,p}(\tilde{B}_R)$ em se mesmo. Do Teorema B.10, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Tw\|_{2,p,\tilde{B}_R} \leq c \left(|Tw|_{2,p,\tilde{B}_R} + \|Tw\|_{p,\tilde{B}_R} \right)$$

para todo $w \in W^{2,p}(\tilde{B}_R)$. Logo do Teorema C.1 temos

$$\|Tw\|_{2,p,\tilde{B}_R} \leq c \left(\left\| \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - \tilde{a}_{ij}) D_{ij} w \right\|_{p,\tilde{B}_R} \right) \quad (3.4)$$

pela continuidade de a_{ij} segue que T é contínuo.

De (3.4) e da continuidade dos a_{ij} , existe um $\delta > 0$ tal que $\|T\| < 1$ se $R < \delta$. Como $h = N\tilde{g} \in L^r(\tilde{B}_R)$, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (3.3) tem uma única solução $w \in W^{2,p}(\tilde{B}_R)$ para qualquer $p \in [1, r]$. Assim $\tilde{v} = w \in W^{2,r}(\tilde{B}_R)$, portanto $\tilde{v} \in W_{\text{loc}}^{2,r}(Q(\Omega))$ ou equivalentemente $u \in W_{\text{loc}}^{2,r}(\Omega)$.

Agora, se $p \geq n$ então $r = q$. Por outro lado, se $p < n$, existe um $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $mp < n \leq (m+1)p$, escrevendo $r_i = np/(n - ip)$, $i = 1, \dots, m$, temos $1/r_{i+1} = 1/r_i - 1/n$. Se $i_0 = \max\{i : r_i < q\}$ então $u \in W_{\text{loc}}^{2,r_{i_0}}(\Omega)$ e $1/q > 1/r_{i_0} - 1/n$. Portanto $u \in W_{\text{loc}}^{2,q}(\Omega)$. $\square$

Teorema 3.3. *Seja $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, uma solução do $Lu = f$ em Ω onde $a_{ij} \in C(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$. Então para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$,*

$$\|u\|_{2,p,\Omega'} \leq C(\|u\|_{p,\Omega} + \|f\|_{p,\Omega}), \quad (3.5)$$

onde C depende de $n, p, \lambda_0, \Lambda, \Omega', \Omega$ e do módulo de continuidade de a_{ij} em Ω' .

Demonstração. Vamos supor que $a_{ij} = a_{ji}$. Seja $x_0 \in \Omega'$ e denotemos por L_0 o operador com coeficientes constantes

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) D_{ij} u.$$

Por meio de uma transformação Q , como na prova Teorema 3.2, temos $\Delta \tilde{u}(y) = L_0 u(x)$. Fazendo cálculos obtemos $|u|_{2,p,\Omega} \leq \frac{n^3}{\lambda_0 |\det Q|^{1/p}} |\tilde{u}|_{2,p,Q(\Omega)}$, para todo $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Do Corolário C.1

$$\begin{aligned} |u|_{2,p,\Omega} &\leq \frac{n^3 c}{\lambda_0 |\det Q|^{1/p}} \|\Delta \tilde{u}\|_{p,Q(\Omega)} \quad (c = c(n, p)) \\ &= \frac{C}{\lambda_0} \|L_0 u\|_{p,\Omega} \end{aligned} \quad (3.6)$$

para todo $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$, onde $C = C(n, p)$. Consequentemente para todo u com suporte

compacto em $B_R = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$, escrevendo

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x_0) - a_{ij}) D_{ij} u + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} u,$$

temos de (3.6)

$$|u|_{2,p,\Omega} \leq \frac{C}{\lambda_0} \left(\sup_{B_R} |a - a(x_0)| |u|_{2,p,\Omega} + \left\| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} u \right\|_{p,\Omega} \right),$$

onde $a = [a_{ij}]$. Usando o módulo de continuidade dos a_{ij} em Ω' , existe um número positivo tal que

$$|a - a(x_0)| \leq \frac{\lambda_0}{2C}$$

se $|x - x_0| < \delta$, logo

$$|u|_{2,p,\Omega} \leq C \left\| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} u \right\|_{p,\Omega}$$

sempre que $R \leq \delta$, onde $C = C(n, p, \lambda_0)$.

Para $\sigma \in (0, 1)$, introduzimos a função $\eta \in C_0^2(B_R)$ satisfazendo $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ em $B_{\sigma R}$, $\eta = 0$ para $|x - x_0| > \sigma' R$, $\sigma' = (1 + \sigma)/2$, $\sup_{B_R} |D_i \eta| \leq (1 - \sigma)R/4$, $\sup_{B_R} |D_{ij} \eta| \leq (1 - \sigma)^2 R^2/16$ (tal função pode ser construída como em [20], §7.4). Então, se $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$ satisfaz $Lu = f$ em Ω e $v = \eta u$, obtemos

$$\begin{aligned} |u|_{2,p,B_{\sigma R}} &\leq C \left\| \eta \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} u + 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i \eta D_j u + u \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta \right\|_{p,B_R} \\ &\leq C \left(\|f\|_{p,B_R} + \frac{1}{(1 - \sigma)R} |u|_{1,p,B_{\sigma' R}} + \frac{1}{(1 - \sigma)^2 R^2} \|u\|_{p,B_R} \right) \end{aligned}$$

sempre que $R \leq \delta \leq 1$, onde $C = C(n, p, \lambda_0, \Lambda_0)$. Introduzimos a seminorma

$$\phi_k = \sup_{0 < \sigma < 1} (1 - \sigma)^k R^k |u|_{k,p,B_{\sigma R}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

portanto temos

$$\phi_2 \leq C(R^2 \|f\|_{p,B_R} + \phi_1 + \phi_0). \quad (3.7)$$

Afirmamos que ϕ_k satisfaz a desigualdade de interpolação

$$\phi_1 \leq \epsilon \phi_2 + \frac{C}{\epsilon} \phi_0 \quad (3.8)$$

para qualquer $\epsilon > 0$, onde $C = C(n, p)$. De fato, para $\gamma > 0$, tomemos um $\sigma = \sigma(\gamma)$, tal que

$$\phi_1 \leq (1 - \sigma)R|u|_{1,p,B_{\sigma R}} + \gamma,$$

do Teorema B.10

$$\phi_1 \leq \epsilon(1 - \sigma)^2 R^2 |u|_{2,p,B_{\sigma R}} + \frac{C}{\epsilon} \|u\|_{p,B_R} + \gamma,$$

fazendo $\gamma \rightarrow 0$, obtemos (3.8).

Usando (3.8) em (3.7), conseguimos

$$\phi_2 \leq C(R^2 \|f\|_{p,B_R} + \phi_0),$$

isto é,

$$|u|_{2,p,B_{\sigma R}} \leq \frac{C}{(1 - \sigma)^2 R^2} (R^2 \|f\|_{p,B_R} + \|u\|_{p,B_R}),$$

onde $C = C(n, p, \lambda_0, \Lambda_0)$ e $0 < \sigma < 1$.

Tomando $\sigma = 1/2$ e cobrindo Ω' por um número finito de bolas de radio $R/2$ para $R \leq \min\{\delta, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)\}$ e usando Teorema B.10 obtemos a estimativa (3.5). $\square$

Usaremos K_0 e $K_R(y)$ para denotar cubos com lado paralelos aos eixes coordenados. $K_R(y)$ é um cubo de centro y e lado R .

Lema 3.2. *Seja K_0 um cubo em $\mathbb{R}^n$. Suponha que Γ seja um subconjunto mensurável de K_0 . Para $0 < \delta < 1$, seja*

$$\Gamma_\delta = \bigcup \{K_{3R}(y) \cap K_0 : K_R(y) \subset K_0, |\Gamma \cap K_R(y)| \geq \delta |K_R(y)|\}.$$

Se $\Gamma_\delta \neq K_0$, então $|\Gamma| \leq \delta |\Gamma_\delta|$.

Demonstração. Se $|K_0 \cap \Gamma| > \delta |K_0|$, então obviamente $\Gamma_\delta = K_0$. Portanto, se $\Gamma_\delta \neq K_0$, $|K_0 \cap \Gamma| \leq \delta |K_0|$. Dividamos K_0 em 2^n cubos congruentes e o denotamos por $(K(i_1))_{i_1=1}^{2^n}$. Para cada $K(i_1)$ existem 2 possibilidades

$$(1) |\Gamma \cap K(i_1)| \leq \delta |K(i_1)|,$$

$$(2) |\Gamma \cap K(i_1)| > \delta |K(i_1)|.$$

Denotamos por $\mathcal{F}_1$ a coleção de todos os cubos $K(i_1)$ pertencendo ao caso (2). Para cada cubo $K(i_1)$ pertencendo ao caso (1) o dividimos em 2^n cubos congruentes e o denotamos por $K(i_1, i_2)$ ($i_2 = 1, \dots, 2^n$). Existem também dois possibilidades para $K(i_1, i_2)$. Denotemos por $\mathcal{F}_2$ a coleção de todos os cubos $K(i_1, i_2)$ pertencendo ao caso

(2). Continuando este processo, conseguimos uma sequência $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_m, \dots$ de coleção de cubos pertencendo ao caso (2). Agora denotamos

$$\mathcal{F} = \{K(i_1, \dots, i_{m-1}) : K(i_1, \dots, i_{m-1}, i_m) \in \mathcal{F}_m\}. \quad (3.9)$$

Para $K(i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{F}_m$ é claro que

$$|K(i_1, \dots, i_m) \cap \Gamma| > \delta |K(i_1, \dots, i_m)| \quad (3.10)$$

$$|K(i_1, \dots, i_{m-1}) \cap \Gamma| \leq \delta |K(i_1, \dots, i_{m-1})| \quad (3.11)$$

A definição de Γ_δ implica que $K(i_1, \dots, i_{m-1}) \subset \Gamma_\delta$. Segue que

$$\tilde{\Gamma}_\delta = \bigcup_{K \in \mathcal{F}} K \subset \Gamma_\delta$$

Por outro lado, (3.11) implica que

$$\begin{aligned} |\tilde{\Gamma}_\delta \cap \Gamma| &= \left| \bigcup_{K \in \mathcal{F}} (K \cap \Gamma) \right| = \sum_{K \in \mathcal{F}} |K \cap \Gamma| \\ &\leq \delta \sum_{K \in \mathcal{F}} |K| = \delta |\tilde{\Gamma}_\delta| \leq \delta |\Gamma_\delta| \end{aligned}$$

É claro, da divisão anterior, que qualquer ponto de densidade ² de Γ pertence a $\tilde{\Gamma}_\delta$. Como Γ é mensurável, quase todo ponto de Γ é um ponto de densidade ([21], Corolário 6.2.6). Segue que

$$|\Gamma| = |\tilde{\Gamma}_\delta \cap \Gamma| \leq \delta |\Gamma_\delta|. \quad \square$$

Teorema 3.4 (Desigualdade de Harnack fraca). *Seja $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ satisfazendo $Lu \geq f$ em Ω , onde $f \in L^n(\Omega)$, e suponha que u é não negativa na bola $B_{2R}(y) \subset \Omega$. Então existe $p > 0$ e $C > 1$ tais que*

$$\left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(y)} u^p \right)^{1/p} \leq C \left(\inf_{B_R(y)} u + \frac{R}{\lambda_0} \|f\|_{n, B_{2R}(y)} \right) \quad (3.12)$$

onde p e C são constantes positivas dependendo somente de n, γ e ν .

Demonstração. Sim perda de generalidade podemos tomar $\lambda_0 = 1$. Primeiramente assumiremos que $R = 1/2$ e y é o origem. Como a prova é longa, o dividiremos em cinco passos.

² Veja [21], §6.2.

Passo 1. Se

$$\tilde{u} = u + \|f\|_{n,B_1}, \quad \Gamma = \{x \in B_1 : \tilde{u} \geq 1\},$$

provaremos que existe $C > 1$ e $0 < \delta < 1$ tal que, se $|\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta|K_{2\alpha}|$, então

$$\inf_{K_{6\alpha}} \tilde{u} \geq C^{-1}, \quad (3.13)$$

onde K_α denota o cubo centrado no origem com lado de comprimento α e paralelos a os eixes coordenados, $\alpha = 1/(6\sqrt{n})$, C e δ depende somente de n , γ e ν .

Para $\epsilon > 0$, denotamos $w = \ln \frac{1}{\tilde{u}+\epsilon}$, $g = \frac{f}{\tilde{u}+\epsilon}$ e $v = \eta w$ onde $\eta(x) = (1 - |x|^2)^\beta$. Derivando e usando a desigualdade de Schwartz temos

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} v &= -\eta \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} w - 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i \eta D_j w - w \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta \\ &\leq \eta \left(- \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i w D_j w - \sum_{i=1}^n b_i D_i w + |c| + |g| \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i \eta D_j w - w \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta \\ &\leq \eta \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i w D_j w + |b|^2 + |c| + |g| \right) - 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i \eta D_j w \\ &\quad - w \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(-\frac{1}{2} \eta a_{ij} D_i w D_j w - 2 a_{ij} D_i \eta D_j w - w a_{ij} D_{ij} \eta \right) + \eta (|b|^2 + |c| + |g|). \end{aligned}$$

Pelo condição de elipticidade

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\eta/2 D_i w + D_i \eta) (\eta/2 D_j w + D_j \eta) \\ &= \frac{\eta}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{1}{2} \eta a_{ij} D_i w D_j w + 2 a_{ij} D_i \eta D_j w + \frac{2}{n} a_{ij} D_i \eta D_j \eta \right), \end{aligned}$$

então

$$- \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} v \leq \frac{2}{\eta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i \eta D_j \eta - w \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta + \eta (|b|^2 + |c| + |g|).$$

Como

$$\begin{aligned} D_i \eta &= -2\beta x_i (1 - |x|^2)^{\beta-1} \\ D_{ij} \eta &= -2\beta \delta_{ij} (1 - |x|^2)^{\beta-1} + 4\beta(\beta-1) x_i x_j (1 - |x|^2)^{\beta-2}, \end{aligned}$$

temos

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta = - \sum_{i=1}^n 2\beta a_{ii} (1 - |x|^2)^{\beta-1} + \sum_{i,j=1}^n 4\beta(\beta-1) a_{ij} x_i x_j (1 - |x|^2)^{\beta-2}$$

e $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta \geq 0$ sempre que

$$\sum_{i,j=1}^n 2(\beta-1) a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n a_{ii} |x|^2 \geq \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

e, em particular, se

$$2\beta |x|^2 \geq n\Lambda_0.$$

Consequentemente, se $0 < \alpha < 1$ e β são escolhidos tais que

$$\beta \geq \frac{n\gamma}{2\alpha^2}$$

temos $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta \geq 0$ para todo $|x| \geq \alpha$. Logo, em $B^+ = \{x \in B_1 : w(x) > 0\}$,

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} v &\leq \sum_{i,j=1}^n 8\beta^2 a_{ij} x_i x_j (1 - |x|^2)^{\beta-2} + v \left(\frac{- \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta}{\eta} \right) + (|b|^2 + |c| + |g|) \\ &\leq 8\beta^2 \Lambda_0 + v \chi(B_\alpha) \sup_{B_\alpha} \left(\frac{- \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} \eta}{\eta} \right) + (|b|^2 + |c| + |g|) \end{aligned}$$

onde $\chi(B_\alpha)$ é a função característica em B_α . Como

$$\|g/\lambda_0\|_{n,B_1} \leq 1,$$

o Princípio de Máximo de Alexandroff-Bakelman-Pucci (Teorema C.2) implica que

$$\sup_{B^+} v \leq \sup_{\partial B^+} v + C(1 + \|v^+\|_{n,B_\alpha})$$

onde C depende somente de n, α, γ e ν . Como $\sup_{B^+} v = \sup_{B_1} v$ e $\sup_{\partial B^+} v = 0$, então

$$\sup_{B_1} v \leq C(1 + \|v^+\|_{n, B_\alpha}). \quad (3.14)$$

Para poder usar o Lema 3.2, trabalharemos com cubos em lugar de bolas. De (3.14),

$$\sup_{B_1} v \leq C[1 + \|v^+\|_{n, K_\alpha}] \leq C \left[1 + |K_\alpha^+|^{1/n} \sup_{B_1} v \right],$$

onde $K_\alpha^+ = \{x \in K_\alpha : v > 0\} = \{x \in K_\alpha : \tilde{u} + \epsilon < 1\}$. Se

$$\frac{|K_\alpha^+|}{|K_\alpha|} \leq \theta = \frac{1}{(2C)^n |K_\alpha|} = \frac{1}{(2C\alpha)^n},$$

então

$$\sup_{B_1} v \leq 2C,$$

isto é,

$$\inf_{B_{1/2}} (\tilde{u} + \epsilon) \geq \frac{1}{C}. \quad (3.15)$$

onde C depende somente de n, α, γ e ν . Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ em (3.15), deduzimos que se

$$\frac{|K_\alpha^+|}{|K_\alpha|} \leq \theta$$

onde $K_\alpha^+ = \{x \in K_\alpha : \tilde{u} < 1\}$, então

$$\inf_{B_{1/2}} \tilde{u} \geq C^{-1}.$$

Tomemos $\delta = 1 - \theta$ e $\alpha = 1/(6\sqrt{n})$. Portanto, se $|\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta |K_{2\alpha}|$, então

$$|K_{2\alpha}^+| = |K_{2\alpha} \setminus (\Gamma \cap K_{2\alpha})| \leq (1 - \delta) |K_{2\alpha}| = \theta |K_{2\alpha}|.$$

Segue que

$$\inf_{K_{6\alpha}} \tilde{u} \geq \inf_{B_{1/2}} \tilde{u} \geq C^{-1}.$$

Passo 2. Afirmamos que para cada inteiro positivo m , se

$$|\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta^m |K_{2\alpha}|, \quad (3.16)$$

então

$$\inf_{K_{2\alpha}} \tilde{u} \geq C^{-m}. \quad (3.17)$$

onde C é a constante determinada no Passo 1.

(3.17) é válido quando $m = 1$. Agora usaremos indução sobre m . Suponhamos válido para m , mostraremos que também é válido para $m + 1$. Suponha que

$$|\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta^{m+1} |K_{2\alpha}|. \quad (3.18)$$

Definamos $\tilde{K}_0 = K_{2\alpha}$ e

$$\Gamma_\delta = \bigcup \{K_{3r}(x) \cap \tilde{K}_0 : K_r(x) \subset \tilde{K}_0, |\Gamma \cap K_r(x)| \geq \delta |K_r(x)|\}.$$

Do Lema 3.2

$$\Gamma_\delta = \tilde{K}_0 \quad \text{ou} \quad |\Gamma \cap \tilde{K}_0| \leq \delta |\Gamma_\delta|.$$

Da definição de Γ_δ e Passo 1 temos que

$$\inf_{\Gamma_\delta} \tilde{u} \geq C^{-1}. \quad (3.19)$$

De fato, consideremos $\epsilon = \|f\|_{n, B_1} - \frac{r}{2\alpha} \|f\|_{n, B_{\frac{r}{2\alpha}}}(x) \geq 0$, a transformação $y \xrightarrow{T} \frac{2\alpha}{r}(y - x)$ e $v = u \circ T^{-1}$. Denotemos $\hat{K}_{2\alpha}^+ = \{x \in K_{2\alpha} : \tilde{v} + \epsilon < 1\}$, não é difícil ver que $\hat{K}_{2\alpha}^+ \subset T(K_r^+(x))$. Como $|\Gamma \cap K_r(x)| \geq \delta |K_r(x)|$, então $|K_r^+(x)| \leq \theta |K_r|$. Assim, $|\hat{K}_{2\alpha}^+| \leq |T(K_r^+(x))| \leq \theta |T(K_r(x))| = \theta |K_{2\alpha}|$. Logo, do Passo 1, $\inf_{K_{3r}(x)} \tilde{u} \geq \inf_{K_{6\alpha}} (\tilde{v} + \epsilon) \geq C^{-1}$.

Se $\Gamma_\delta = \tilde{K}_0 = K_{2\alpha}$, então (3.19) implica (3.17). Agora assumamos que $|\Gamma \cap \tilde{K}_0| \leq \delta |\Gamma_\delta|$. A função $v = Cu$ satisfaz

$$Lv \geq Cf.$$

Usando a notação do Passo 1, obtemos

$$\tilde{v} = v + \|Cf\|_{n, B_1} = C\tilde{u}.$$

Segue de (3.19) que

$$\Gamma_\delta \subset \tilde{\Gamma} = \{x \in B_1 : \tilde{v} \geq 1\}.$$

Combinando este fato e (3.18), obtemos

$$|\tilde{\Gamma} \cap \tilde{K}_0| \geq |\Gamma_\delta| \geq \frac{1}{\delta} |\Gamma \cap \tilde{K}_0|$$

$$= \frac{1}{\delta} |\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta^m |K_{2\alpha}| = \delta^m |\tilde{K}_0|.$$

Por indução

$$\inf_{K_{2\alpha}} \tilde{v} \geq C^{-m},$$

isto é,

$$\inf_{K_{2\alpha}} \tilde{u} \geq C^{-(m+1)}.$$

Passo 3. Se

$$\Gamma_t = \{x \in B_1 : \tilde{u} > t\}. \quad (3.20)$$

Afirmamos que existe $C > 1, \mu > 0$ tais que para todo $t > 0$,

$$|B_\alpha \cap \Gamma_t| \leq C |B_\alpha| \left[\inf_{B_\alpha} \frac{\tilde{u}}{t} \right]^\mu, \quad (3.21)$$

onde C, μ depende somente de n, γ e ν .

Seja $v = \frac{u}{t}$. Usando a notação do Passo 1, $\tilde{v} = \frac{\tilde{u}}{t}$. Seja

$$\tilde{\Gamma} = \{x \in B_1 : \tilde{v}(x) > 1\} = \Gamma_t.$$

Se $|K_{2\alpha} \cap \Gamma_t| = 0$, então (3.21) é claramente válido. Agora assumamos que $|K_{2\alpha} \cap \Gamma_t| \neq 0$, então existe um inteiro positivo m tal que

$$\delta^m |K_{2\alpha}| \leq |\tilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}| \leq \delta^{m-1} |K_{2\alpha}|,$$

isto é,

$$\ln \frac{|\tilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}|}{|K_{2\alpha}|} \cdot (\ln \delta)^{-1} \leq m \leq 1 + \ln \frac{|\tilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}|}{|K_{2\alpha}|} \cdot (\ln \delta)^{-1}.$$

De (3.17), deduzimos que

$$\inf_{K_{2\alpha}} \tilde{v} \geq C^{-m} \geq C^{-1} \left[\frac{|\tilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}|}{|K_{2\alpha}|} \right]^{\ln C / \ln \delta^{-1}}.$$

Tomando $\mu = \ln \delta^{-1} / \ln C$,

$$|\tilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}| \leq \left(C \inf_{K_{2\alpha}} \tilde{v} \right)^\mu |K_{2\alpha}|.$$

Desta desigualdade segue (3.21).

Passo 4. Agora provaremos que existe $p > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|B_\alpha|} \int_{B_\alpha} u^p dx \right)^{1/p} \leq C \left[\inf_{B_\alpha} u + \|f\|_{n, B_1} \right]. \quad (3.22)$$

Por propriedade ([14], Lema 1.1, pag. 37)

$$\begin{aligned} \int_{B_\alpha} u^p dx &= p \int_0^\infty t^{p-1} |B_\alpha \cap \Gamma_t| dt \\ &= p \int_0^d t^{p-1} |B_\alpha \cap \Gamma_t| dt + p \int_d^\infty t^{p-1} |B_\alpha \cap \Gamma_t| dt, \end{aligned}$$

onde d será determinado. Aplicando a estimativa do Passo 3 ao segundo termo do lado direito da equação acima, obtemos

$$\int_{B_\alpha} u^p \leq p \int_0^d t^{p-1} |B_\alpha \cap \Gamma_t| dt + p \int_d^\infty C m_0^\mu |B_\alpha| t^{p-\mu-1} dt$$

onde $m_0 = \inf_{B_\alpha} \tilde{u}$. Tomando $p = \mu/2$,

$$\int_{B_\alpha} u^p dx \leq d^p |B_\alpha| + C m_0^{2p} d^{-p} |B_\alpha|.$$

Se escolhermos $d = C^{1/(2p)} m_0$, então

$$\frac{1}{|B_\alpha|} \int_{B_\alpha} u^p dx \leq 2C^{1/2} m_0^p \leq 2C^{1/2} \left(\inf_{B_\alpha} u + \|f\|_{n, B_1} \right)^p.$$

Passo 5. Usando um argumento de recobrimento finito, provaremos que

$$\left(\frac{1}{|B_{1/2}|} \int_{B_{1/2}} u^p dx \right)^{1/p} \leq C \left(\inf_{B_{1/2}} u + \|f\|_{n, B_1} \right). \quad (3.23)$$

Como $u \in W^{2,n}(B_{1/2})$, existe $x_0 \in \overline{B_{1/2}}$ tal que

$$u(x_0) = \inf_{B_{1/2}} u. \quad (3.24)$$

Claramente,

$$\int_{B_{(2+\alpha)/4}} dy \int_{B_{\alpha/4}(y)} u^p dx = \int_{B_{\alpha/4}} d\xi \int_{B_{(2+\alpha)/4}} u(y + \xi)^p dy \geq |B_{\alpha/4}| \int_{B_{1/2}} u(y)^p dy.$$

Pelo teorema de valor médio, existe $y_0 \in \overline{B}_{(2+\alpha)/4}$ tal que

$$\int_{B_{(2+\alpha)/4}} dy \int_{B_{\alpha/4}(y)} u^p dx = |B_{(2+\alpha)/4}| \int_{B_{\alpha/4}(y_0)} u^p dy.$$

Daí

$$\int_{B_{\alpha/4}(y_0)} u^p dx \geq \left(\frac{\alpha}{2+\alpha} \right)^n \int_{B_{1/2}} u^p dx. \quad (3.25)$$

Queremos cobrir o segmento de reta que coneta x_0 a y_0 por uma sequência de bolas de raio $\alpha/4$. Tomemos uma sequência de bolas $\{B_{\alpha/4}(x_k)\}_{k=1}^N$ tais que

$$x_k \in \overline{B}_{(2+\alpha)/4}, \quad x_{k+1} \in B_{\alpha/4}(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad x_N = y_0, \quad N \leq \frac{8}{\alpha}.$$

Afirmamos que (3.22) também se verifica para cada $B_{\alpha/4}(x_k)$, isto é,

$$\left(\frac{1}{|B_{\alpha/4}|} \int_{B_{\alpha/4}(x_k)} u^p dx \right)^{1/p} \leq C \left[\inf_{B_{\alpha/4}(x_k)} u + \|f\|_{n, B_{1/4}(x_k)} \right]. \quad (3.26)$$

De fato, considerando a transformação $x \xrightarrow{T} 4(x - x_k)/\alpha$ e $v = u \circ T^{-1}$, temos

$$L_0 v = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} v + \sum_{j=1}^n (\alpha/4) b_j D_j v + (\alpha/4)^2 c v \geq f \circ T^{-1} \quad \text{em } B_1,$$

onde L_0 satisfaz as mesmas condições de L . Logo usando (3.22) segue o afirmado.

Assim segue que

$$\begin{aligned} \inf_{B_{\alpha/4}(x_k)} u &\geq \frac{1}{C} \left[\frac{1}{|B_{\alpha/4}(x_k)|} \int_{B_{\alpha/4}(x_k)} u^p dx \right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n, B_{1/4}(x_k)} \\ &\geq \frac{1}{C} \left[\frac{1}{|B_{\alpha/4}|} \int_{B_{\alpha/4}(x_k) \cap B_{\alpha/4}(x_{k+1})} u^p dx \right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n, B_1} \\ &\geq \frac{1}{C} \left[\frac{|B_{\alpha/4}(x_k) \cap B_{\alpha/4}(x_{k+1})|}{|B_{\alpha/4}|} \right]^{1/p} \inf_{B_{\alpha/4}(x_{k+1})} u - \|f/\lambda_0\|_{n, B_1} \\ &\geq \frac{1}{\widetilde{C}} \inf_{B_{\alpha/4}(x_{k+1})} u - \|f/\lambda_0\|_{n, B_1}. \end{aligned}$$

Já que podemos tomar os $B_{\alpha/4}(x_k)'$ tais que $B_{\alpha/4}(x_k) \cap B_{\alpha/4}(x_{k+1})$ contém uma bola de

raio $\alpha/2^r$ com $r > n/p + 1$, então $\tilde{C} \geq 2$. Iterando a desigualdade acima, obtemos

$$\inf_{B_{\alpha/4}(x_0)} u \geq \frac{1}{\tilde{C}^N} \inf_{B_{\alpha/4}(y_0)} u - 2\|f/\lambda_0\|_{n,B_1}. \quad (3.27)$$

Usando (3.26) outra vez em $B_{\alpha/4}(y_0)$ e de (3.25) obtemos

$$\begin{aligned} \inf_{B_{\alpha/4}(y_0)} u &\geq \frac{1}{C} \left[\frac{1}{|B_{\alpha/4}(y_0)|} \int_{B_{\alpha/4}(y_0)} u^p dx \right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n,B_{\alpha/4}(y_0)} \\ &\geq \frac{1}{C} \frac{1}{|B_{\alpha/4}(y_0)|} \left(\frac{\alpha}{2+\alpha} \right)^{n/p} \left[\int_{B_{1/2}} u^p dx \right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n,B_1} \\ &= \frac{1}{C} \left[\frac{1}{|B_{1/2}|} \int_{B_{1/2}} u^p dx \right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n,B_1} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Combinando (3.27) e (3.28) obtemos (3.23).

Finalmente a desigualdade (3.12) segue usando a transformação $x \mapsto \frac{x-y}{2R}$. $\square$

Lema 3.3. *Seja ω uma função não decrescente em $(0, R_0]$ satisfazendo, para todo $R \leq R_0$, a desigualdade*

$$\omega(\tau R) \leq \kappa \omega(R) + \sigma(R)$$

onde σ é também não decrescente e $0 < \kappa, \tau < 1$. Então, para qualquer $\mu \in (0, 1)$ e $R \leq R_0$, temos

$$\omega(R) \leq C \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \omega(R_0) + \sigma(R^\mu R_0^{1-\mu}) \right) \quad (3.29)$$

onde $C = C(\kappa, \tau)$ e $\alpha = \alpha(\kappa, \tau, \mu)$ são constantes positivas.

Demonstração. Primeiro fixemos um $R_1 \leq R_0$. Então para qualquer $R \leq R_1$ temos

$$\omega(\tau R) \leq \kappa \omega(R) + \sigma(R_1)$$

pois σ é não decrescente. Agora iterando esta desigualdade conseguimos, para qualquer inteiro positivo m ,

$$\begin{aligned} \omega(\tau^m R_1) &\leq \kappa^m \omega(R_1) + \sigma(R_1) \sum_{i=0}^{m-1} \kappa^i \\ &\leq \kappa^m \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\kappa}. \end{aligned}$$

Para $R \leq R_1$, podemos escolher m tal que $\tau^m R_1 < R \leq \tau^{m-1} R_1$, então

$$\begin{aligned} \omega(R) &\leq \omega(\tau^{m-1} R_1) \leq \kappa^{m-1} \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\kappa} \\ &\leq \frac{1}{\kappa} \left(\frac{R}{R_1} \right)^{\ln \kappa / \ln \tau} \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\kappa}. \end{aligned}$$

Agora fazendo $R_1 = R_0^{1-\mu} R^\mu$ temos

$$\omega(R) \leq \frac{1}{\kappa} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{(1-\mu) \ln \kappa / \ln \tau} \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_0^{1-\mu} R^\mu)}{1-\kappa}. \quad \square$$

Teorema 3.5. *Seja $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ satisfazendo a equação $Lu = f$ em Ω , com $c \geq 0$ e $f \in L^n(\Omega)$. Então, para qualquer bola $B_{R_0}(y) \subset \Omega$ e $R \leq R_0$, temos*

$$\text{osc}_{B_R(y)} u \leq C \left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \left(\text{osc}_{B_{R_0}(y)} u + k R_0 \right), \quad (3.30)$$

onde $C = C(n, \gamma, \nu)$ e $\alpha = \alpha(n, \gamma, \nu)$ são constantes positivas e $k = \|f - cu\|_{n, B_{R_0}(y)}$.

Demonstração. Seja R_0 tal que $B_{R_0}(y) \subset \Omega$. Para $0 < R \leq R_0/2$ escrevemos $M_2 = \sup_{B_{2R}(y)} u$, $m_2 = \inf_{B_{2R}(y)} u$, $M_1 = \sup_{B_R(y)} u$ e $m_1 = \inf_{B_R(y)} u$. Então temos

$$\begin{aligned} L(M_2 - u) &= M_2 c - f \geq cu - f \\ L(u - m_2) &= f - m_2 c \geq f - cu \end{aligned}$$

em $B_{2R}(y)$. Aplicando o Teorema 3.4 as funções $M_2 - u$, $u - m_2$ em $B_R(y)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B_R(y)|} \int_{B_R(y)} (M_2 - u)^p \right)^{1/p} &\leq C \left(\inf_{B_R(y)} (M_2 - u) + \frac{R}{\lambda_0} k \right) \\ \left(\frac{1}{|B_R(y)|} \int_{B_R(y)} (u - m_2)^p \right)^{1/p} &\leq C \left(\inf_{B_R(y)} (u - m_2) + \frac{R}{\lambda_0} k \right). \end{aligned}$$

Isto implica que

$$M_2 - m_2 \leq C \left(M_2 - m_2 - (M_1 - m_1) + \frac{2R}{\lambda_0} k \right),$$

escrevendo $\omega(R) = \text{osc}_{B_R(y)} u$, temos

$$\omega(R) \leq \kappa \omega(2R) + \frac{2R}{\lambda_0} k, \quad (0 < R \leq R/2).$$

Equivalentemente

$$\omega(1/2R) \leq \kappa\omega(R) + \frac{R}{\lambda_0}k$$

para todo $0 < R \leq R_0$. Do Lema 3.3, tomando μ tal que $\alpha = (1 - \mu)\frac{\ln \kappa}{\ln 1/2} < \mu$, temos

$$\begin{aligned} \omega(R) &\leq C \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \omega(R_0) + \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha R_0 k \right) \\ &\leq C \left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \left(\omega(R_0) + \frac{k}{\lambda_0} R_0 \right) \end{aligned}$$

de onde segue (3.30). $\square$

A desigualdade de Harnack fraca (Teorema 3.4) admite a seguinte extensão à fronteira.

Teorema 3.6. *Seja $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $Lu \geq f$ em Ω , $u \geq 0$ em $B_{2R}(y) \cap \Omega$, onde $y \in \partial\Omega$. Se $m = \inf_{B_{2R}(y) \cap \partial\Omega} u$ e*

$$u_m^-(x) = \begin{cases} \inf\{u(x), m\}, & x \in B_{2R}(y) \cap \Omega \\ m, & x \in B_{2R}(y) \setminus \Omega. \end{cases}$$

Então

$$\left(\frac{1}{|B_R(y)|} \int_{B_R(y)} (u_m^-)^p \right)^{1/p} \leq C \left(\inf_{\Omega \cap B_R(y)} u + \frac{R}{\lambda_0} \|f\|_{n,\Omega \cap B_{2R}(y)} \right), \quad (3.31)$$

onde p e C são constantes positivas dependendo somente de n, γ e ν .

Demonstração. A demonstração do teorema é semelhante a o Teorema 3.4. Consideremos $\lambda_0 = 1$, $R = 1/2$ e $y = 0$. Denotando $u_0 = u_m^-$,

$$\tilde{u}_0 = u_0 + \|f\|_{n,B_1 \cap \Omega} \quad \text{e} \quad \Gamma = \left\{ x \in B_1 : \frac{\tilde{u}_0}{m} \geq 1 \right\},$$

temos que os passos 1, 2 e 3 seguem para $\tilde{u}_0/m$. Note que $|\Gamma_t| = 0$ para $t < m_0/m$ onde $m_0 = \inf_{B_\alpha} \tilde{u}_0$, assim tomando $p = \mu/2$ segue

$$\left(\frac{1}{|B_\alpha|} \int_{B_\alpha} u_0^p dx \right)^{1/p} \leq C \left(\inf_{B_\alpha} u_0 + \|f\|_{n,B_1 \cap \Omega} \right).$$

Logo, como no passo 5, segue (3.23) para u_0 . Finalmente fazendo a transformação $x \mapsto \frac{x-y}{2R}$ concluí-se a demonstração do teorema. $\square$

Teorema 3.7. *Seja $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $Lu = f$ em Ω onde $f \in L^n(\Omega)$, $c \geq 0$, e suponha que Ω satisfaz a condição do cone exterior em $x_0 \in \partial\Omega$. Então, existe R_0 tal que para qualquer $0 < R \leq R_0$, temos*

$$\text{osc}_{\Omega \cap B_R(x_0)} u \leq C \left\{ \left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \left(\text{osc}_{B_{R_0}(x_0)} u + kR_0 \right) + \sigma(\sqrt{RR_0}) \right\} \quad (3.32)$$

onde $C = C(n, \gamma, \nu, V_{x_0})$ e $\alpha = \alpha(n, \gamma, \nu, V_{x_0})$ são constante positivas, V_{x_0} é o cone exterior a x_0 , $\sigma(r) = \text{osc}_{\partial\Omega \cap B_r} u$ para $0 < r \leq R_0$ e k é como no Teorema 3.5.

Demonstração. Seja $R_0 = \text{altura } V_{x_0}$. Para $R \leq R_0/2$ escrevemos

$$\begin{aligned} M_2 &= \sup_{\Omega \cap B_{2R}(x_0)} u, & M_1 &= \sup_{\Omega \cap B_R(x_0)} u, & M_0 &= \sup_{B_R(x_0) \cap \partial\Omega} u, \\ m_2 &= \inf_{\Omega \cap B_{2R}(x_0)} u, & m_1 &= \inf_{B_R(x_0) \cap \Omega} u, & m_0 &= \inf_{B_R(x_0) \cap \partial\Omega} u. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} L(M_2 - u) &= M_2 c - f \geq cu - f \\ L(u - m_2) &= f - m_2 c \geq f - cu \end{aligned}$$

em $B_{2R}(x_0) \cap \Omega$. Como $M_2 - M_0 = \inf_{B_R(x_0) \cap \partial\Omega} (M_2 - u)$, $m_0 - m_2 = \inf_{B_R(x_0) \cap \partial\Omega} (u - m_2)$, do Teorema 3.6,

$$\begin{aligned} (M_2 - m_0) \left(\frac{|B_R(x_0) - \Omega|}{|B_R(x_0)|} \right)^{1/p} &\leq \left(\frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} ((M_2 - u)_{M_2 - m_0}^-)^p \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\inf_{\Omega \cap B_R(x_0)} (M_2 - u) + \frac{R}{\lambda_0} k \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (m_0 - m_2) \left(\frac{|B_R(x_0) - \Omega|}{|B_R(x_0)|} \right)^{1/p} &\leq \left(\frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} ((u - m_2)_{m_0 - m_2}^-)^p \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\inf_{\Omega \cap B_R(x_0)} (u - m_2) + \frac{R}{\lambda_0} k \right). \end{aligned}$$

Usando a condição do cone exterior temos

$$\begin{aligned} (M_2 - m_0) &\leq C \left(M_2 - M_1 + \frac{R}{\lambda_0} k \right) \\ (m_0 - m_2) &\leq C \left(m_1 - m_2 + \frac{R}{\lambda_0} k \right). \end{aligned}$$

e somando obtemos

$$\operatorname{osc}_{\Omega \cap B_R(x_0)} u \leq \left(1 - \frac{1}{C}\right) \operatorname{osc}_{\Omega \cap B_{2R}(x_0)} u + \frac{1}{C} \sigma(R) + \frac{2R}{\lambda_0} k,$$

para todo $R \leq R_0/2$. Podemos assumir que $C > 2$, tomando $\mu = 1/2$ e aplicando o Lema 3.3 obtemos (3.32). $\square$

Teorema 3.8. *Seja Ω domínio limitado que satisfaz a condição do cone exterior uniforme, $f \in L^n(\Omega)$ e $c \geq 0$. Se $u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ satisfaz $Lu = f$ em Ω , então $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e*

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C(\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|_{n,\Omega}) \quad (3.33)$$

onde $\alpha = \alpha(n, \lambda_0, \Lambda_0, V)$ e $C = C(n, \lambda_0, \Lambda_0, V)$.

Demonstração. Por compacidade $\overline{\Omega}$ pode ser coberto por um número finito de bolas $\{B_i\}$ tais que, ou B_i é uma bola com centro em um ponto de $\partial\Omega$ e de raio $R_0 = \text{altura } V$, ou $B_i \subset \subset \Omega$. Do Teoremas 3.6 e 3.4, $u \in C^\alpha(\overline{B_i})$ e

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{B_i})} \leq C_i(\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|_{n,\Omega}).$$

Então $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e segue (3.33). $\square$

3.2 O Problema de Poisson

A partir desta seção em diante, Ω é um domínio limitado e $\mathcal{A}$ é o operador dado por (3.1) satisfazendo (3.2).

Nesta seção mostraremos a existência de solução para o problema

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

em $C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$, onde $f \in L^n(\Omega)$, em dois casos. O primeiro é quando Ω é Wiener regular e a_{ij} são Lipschitz contínua (Teorema 3.9), e no segundo, Ω satisfaz a condição do cone exterior e $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$ (Teorema 3.10).

Lema 3.4. *Seja $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua Lipschitz. Então $h \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Em particular $hu \in W^{1,2}(\Omega)$ para todo $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $D_j(hu) = (D_j h)u + hD_j u$.*

Demonstração. Seja $H(x) = \inf_{y \in \Omega} [h(y) + K|x - y|]$ onde K é a constante de Lipschitz de h , então H é uma extensão de h a $\mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição de Lipschitz (com constante de Lipschitz K). De fato, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \Omega$

$$\begin{aligned} h(y) + K|x - y| &= h(z) + K|x - y| + (h(y) - h(z)) \geq h(z) + K(|x - y| - |y - z|) \\ &\geq h(z) - K|x - z| \end{aligned} \quad (3.34)$$

para todo $y \in \Omega$, assim H está bem definido. Em particular de (3.34) com $y = x$ temos $H(x) = h(x)$ para todo $x \in \Omega$. Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, dado $\epsilon > 0$ existe $y \in \Omega$ tal que $H(x_1) \geq h(y) + |x_1 - y| - \epsilon$. Então

$$\begin{aligned} H(x_2) - H(x_1) &\leq h(y) + K|x_2 - y| - [h(y) + K|x_1 - y| - \epsilon] \\ &= K(|x_2 - y| - |x_1 - y|) + \epsilon \leq K|x_2 - x_1| + \epsilon \end{aligned}$$

Similarmente $H(x_1) - H(x_2) \leq K|x_2 - x_1| + \epsilon$, logo $|H(x_2) - H(x_1)| \leq K|x_1 - x_2|$.

Tomemos uma bola tal que $\Omega \subset B$, então $H|_B \in W^{1,\infty}(B)$ (Teorema B.6) em particular $h \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Também $h \in W^{1,2}(\Omega)$. Assim, existe uma sequência $h_k \in \widehat{C}^{1,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que $h_k \rightarrow h$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Note que $D_i(h_k u)$ é limitado em $W^{1,2}(\Omega)$, $h_k u \rightarrow hu$ em $L^2(\Omega)$ e $D_i(h_k u) = u D_i h_k + h_k D_i u \rightarrow u D_i h + h D_i u$ em $L^2(\Omega)$, logo do Teorema B.3 segue $uh \in W^{1,2}(\Omega)$ e $D_i(hu) = u D_i h + h D_i u$. $\square$

Seja $B[u, v]$ a forma bilinear auxiliar

$$B[u, v] := \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} D_j u D_i v + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i D_i u v + \int_{\Omega} c u v.$$

Pela desigualdade de Gårding (Teorema 2.1), existem constantes $c, k > 0$ tal que

$$B[u, v] \geq c \|u\|_{1,2,\Omega}^2 - k \|u\|_{2,\Omega}^2 \quad (3.35)$$

para todo $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Lema 3.5. Se $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$ são tais que $B[\varphi, u] = (\varphi, v)$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como $u \in C_0(\Omega)$ e Ω é limitado então temos que $\text{supp}(u - \epsilon)^+ \subset \subset \Omega$. Seja ω aberto tal que $\text{supp}(u - \epsilon)^+ \subset \omega \subset \subset \Omega$ então $(u - \epsilon)^+ \in W^{1,2}(\omega)$ pois $u \in W^{1,2}(\omega)$. Além disso, do fato que $\text{supp}(u - \epsilon)^+$ é compacto segue que $(u - \epsilon)^+ \in$

$W_0^{1,2}(\omega)$ (Teorema B.8) . Logo $(u - \epsilon)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e

$$B[u, (u - \epsilon)^+] = \int_{\Omega} v(u - \epsilon)^+ \leq \|v\|_{2,\Omega} \|u\|_{2,\Omega}. \quad (3.36)$$

Calculando

$$\begin{aligned} B[u - (u - \epsilon)^+, (u - \epsilon)^+] &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} D_j [u - (u - \epsilon)^+] D_i (u - \epsilon)^+ \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i D_i [u - (u - \epsilon)^+] (u - \epsilon)^+ + \int_{\Omega} c [u - (u - \epsilon)^+] (u - \epsilon)^+ \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{u>\epsilon} a_{ij} (D_j u - D_j (u - \epsilon)^+) D_i (u - \epsilon)^+ \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{u>\epsilon} b_i (D_i u - D_i (u - \epsilon)^+) (u - \epsilon)^+ + \int_{u>\epsilon} \epsilon c (u - \epsilon)^+ \\ &= \int_{\Omega} \epsilon c (u - \epsilon)^+. \end{aligned}$$

Assim

$$B[u, (u - \epsilon)^+] = B[(u - \epsilon)^+, (u - \epsilon)^+] + \int_{\Omega} \epsilon c (u - \epsilon)^+.$$

Como $\int_{\Omega} \epsilon c (u - \epsilon)^+ \geq 0$, então $B[u, (u - \epsilon)^+] \geq B[(u - \epsilon)^+, (u - \epsilon)^+]$. De (3.35) e (3.36),

$$\begin{aligned} c \|(u - \epsilon)^+\|_{1,2,\Omega}^2 &\leq B[u, (u - \epsilon)^+] + k \|(u - \epsilon)^+\|_{2,\Omega}^2 \\ &\leq \|v\|_{2,\Omega} \|u\|_{2,\Omega} + k \|u\|_{2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Logo $\{(u - \epsilon)^+ : 0 < \epsilon < 1\}$ é limitado em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Como $W_0^{1,2}(\Omega)$ é reflexivo podemos encontrar uma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) tal que $(u - \epsilon_n)^+$ converge fracamente em $W_0^{1,2}(\Omega)$ a $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Então $(u - \epsilon_n)^+$ converge fracamente a v em $L^2(\Omega)$. Como $(u - \epsilon_n)^+ \rightarrow u^+$ em $L^2(\Omega)$ segue que $u^+ = v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Analogamente temos $u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$. $\square$

Teorema 3.9. *Assuma que os coeficientes a_{ij} são globalmente Lipschitz contínuos. Se Ω é Wiener regular, então para cada $f \in L^n(\Omega)$ existe um único $u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ tal que*

$$\mathcal{A}u = f.$$

Demonstração. Primeiro provaremos a existência. Substituímos o operador $\mathcal{A}$ por um operador na forma divergente da seguinte maneira. Do Lema 3.4, podemos escrever

$\tilde{b}_j := b_j - \sum_{i=1}^n D_i a_{ij}$ com $\tilde{b}_j \in L^\infty(\Omega)$, para $j = 1, \dots, n$. Consideremos o operador elíptico $\mathcal{A}_d$ na forma divergente dado por

$$\mathcal{A}_d u = - \sum_{i,j=1}^n D_i (a_{ij} D_j u) + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j D_j u + cu.$$

Do Teorema 3.1, dada $f \in L^n(\Omega)$, existe uma única solução $u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ tal que $\mathcal{A}_d u = f$ em Ω fracamente, isto é,

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} D_j u D_i v + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \tilde{b}_j D_j u v + \int_{\Omega} cuv = \int_{\Omega} f v \quad (3.37)$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Do Lema 3.5 temos $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Logo do Lema 2.4, $u \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$. Como a_{ij} são Lipschitz contínuas, do Lema 3.4 segue que $a_{ij} D_j u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ e $D_i(a_{ij} D_j u) = D_i a_{ij} D_j u + a_{ij} D_{ij} u$. Então aplicando este fato em (3.37) obtemos $\mathcal{A}u = f$ c.t.p em Ω . Como $f \in L^n(\Omega)$ e $n > 1$ segue, do Teorema 3.2, $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$. A unicidade segue do Teorema C.2. $\square$

Para provar um teorema semelhante ao anterior com a condição que $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$ precisaremos que Ω satisfaça condição do cone exterior uniforme.

Teorema 3.10. *Assuma que Ω satisfaz a condição do cone exterior uniforme. Então para todo $f \in L^n(\Omega)$ existe um único $u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ tal que*

$$\mathcal{A}u = f.$$

Demonstração. Seja $a_{ij}^k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ como no Lema 2.13 b), note que podemos assumir que a_{ij}^k são globalmente Lipschitz. Seja $\mathcal{A}_k$ operador elíptico dado por

$$\mathcal{A}_k u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k D_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu.$$

Como no Lema 2.14, a_{ij}^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_{ij}^0 = a_{ij}$), b_j e c estão limitados por uma mesma constante em $L^\infty(\Omega)$, a_{ij}^k tem um mesmo módulo de continuidade. Também $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_k$ tem módulo de elipticidade $\lambda_0/2$.

Seja $f \in L^n(\Omega)$, do Lema 3.1 temos que Ω é Wiener regular, e do Teorema 3.9 para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um único $u_k \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ tal que $\mathcal{A}_k u_k = f$. Note que $u_k \in$

$W^{1,2}(\Omega)$ (Lema 3.5). Do Teorema 3.8 existe $c > 0$ (que no depende de k) tal que

$$\|u_k\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leq c(\|f\|_{n,\Omega} + \|u_k\|_{C(\Omega)}).$$

Como os coeficientes de primeiro ordem de $\mathcal{A}_k$ são independentes de k , do Teorema C.2 temos $\|u_k\|_{\infty,\Omega} \leq c_1\|f\|_{n,\Omega}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e alguma constante $c_1 > 0$. Assim $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $C^\alpha(\bar{\Omega})$. Segue facilmente que (u_k) é uniformemente equicontínua. Logo do Teorema de Arzelá-Ascoli, (u_k) converge uniformemente a $u \in C(\bar{\Omega})$ (passando a uma subsequencia). Em particular $u \in C_0(\Omega)$.

Se $\Omega' \subset\subset \Omega$, do Teorema 3.3,

$$\|u_k\|_{2,n,\Omega'} \leq c_2(\|u_k\|_{n,\Omega} + \|f\|_{n,\Omega})$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e alguma constante c_2 (independente de k). Como $u_k \rightarrow u$ em $L^n(\Omega)$, então (u_k) é limitada em $W^{2,n}(\Omega')$. Por reflexividade, passando a uma subsequencia, existe um $v \in W^{2,n}(\Omega')$ tal que $u_k \rightharpoonup v$ fracamente em $W^{2,n}(\Omega')$. Isto implica que $u_k \rightharpoonup v$ em $L^n(\Omega')$, então $u = v \in W^{2,n}(\Omega')$. Como $u_k \rightharpoonup u$ em $W^{2,n}(\Omega')$, segue que $D_{ij}u_k \rightharpoonup D_{ij}u$ em $L^n(\Omega')$. Além disso $\sup \|D_{ij}u_k\|_{n,\Omega'} < \infty$ então $(a_{ij}^k - a_{ij})D_{ij}u_k \rightarrow 0$ em $L^n(\Omega')$. Como

$$a_{ij}^k D_{ij}u_k - a_{ij} D_{ij}u = (a_{ij}^k - a_{ij})D_{ij}u_k + a_{ij}(D_{ij}u_k - D_{ij}u),$$

segue $a_{ij}^k D_{ij}u_k \rightharpoonup a_{ij} D_{ij}u$ em $L^n(\Omega')$. Assim $\mathcal{A}_k u_k \rightharpoonup \mathcal{A}u$, ou seja, $\mathcal{A}u = f$ em $L^n(\Omega')$. Como Ω' é arbitrário, $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ e $\mathcal{A}u = f$. A unicidade segue do Teorema C.2. $\square$

3.3 O problema de Dirichlet

Nesta seção mostraremos a equivalência entre o problema de Poisson

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{P}$$

e o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned} \tag{D}$$

onde $f \in L^n(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ são dados e $u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$. O significado desta equivalência será dado pelo Teorema 3.11.

Definimos o operador A em $L^n(\Omega)$ por

$$D(A) := \{u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) : Au \in L^n(\Omega)\},$$

$$Au := \mathcal{A}u.$$

Assim o problema de Poisson (P) pode ser formulado da seguinte forma, sob que condições o operador A é inversível.

Observação 3.2. Note que para $\mu \geq 0$ o operador $A + \mu$ tem os mesmos coeficientes de A exceto o coeficiente de ordem 0 que é substituído por $c + \mu$.

Proposição 3.1. O operador A é fechado e injetivo. Assim, A será inversível se for sobrejetivo. Se $A + \mu_0$ for inversível para algum $\mu_0 \geq 0$ então $A + \mu$ será inversível para todo $\mu \geq 0$.

Demonstração. Como $Au + \mu u \in L^n(\Omega)$ para todo $u \in D(A)$, da Observação 3.2 e do Teorema C.2, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{\infty, \Omega} \leq c\|\mu u + Au\|_{n, \Omega} \quad (3.40)$$

para todo $u \in D(A)$ e $\mu \geq 0$. Primeiro provemos que A é fechado. Seja $u_k \in D(A)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $L^n(\Omega)$ e $Au_k \rightarrow f$ em $L^n(\Omega)$ quando $k \rightarrow \infty$. De (3.40) temos

$$\|u_k - u_l\|_{\infty, \Omega} \leq c(\|\mu(u_k - u_l)\|_{n, \Omega} + \|Au_k - Au_l\|_{n, \Omega})$$

Assim (u_k) é de Cauchy em $C(\overline{\Omega})$ e existe $v \in C_0(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow v$ uniformemente. Segue que $u = v$. Se $\Omega' \subset \subset \Omega$, do Teorema 3.3,

$$\|u_k\|_{2, n, \Omega'} \leq c(\|u_k\|_{n, \Omega} + \|Au_k\|_{n, \Omega}).$$

onde C é independente de k . Assim u_k é limitado em $W^{2,n}(\Omega')$. De maneira análoga a demonstração do Teorema 3.10 temos que $u \in W^{2,n}(\Omega')$ e $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{2,n}(\Omega')$ (passando a uma subsequência). Portanto $Au_k \rightharpoonup Au$ em $L^n(\Omega')$. Assim por unicidade de limite $Au = f$ em Ω' . Como Ω' é arbitrário temos $u \in D(A)$ e $Au = f$.

A injetividade de A segue do Teorema C.2. Se A é sobrejetivo, do fato que A é fechado e Teorema A.1, A é inversível.

Agora assumamos que $\mu_1 + A$ é inversível para algum $\mu_1 \geq 0$. Se $\mu_2 \geq 0$, definimos $A(t) = t(\mu_1 + A) + (1 - t)(\mu_2 + A) = t\mu_1 + (1 - t)\mu_2 + A$ para $t \in [0, 1]$. $A(0), A(1) \in \mathcal{L}(D(A), L^n(\Omega))$ onde $D(A)$ é um espaço de Banach com respeito a norma $\|u\|_{D(A)} =$

$\|u\|_{n,\Omega} + \|Au\|_{n,\Omega}$. Do (3.40),

$$\begin{aligned} c\|A(t)u\|_{n,\Omega} &\geq \|u\|_{\infty,\Omega} \\ &\geq \frac{1}{|\Omega|^{1/n}} \|u\|_{n,\Omega} \end{aligned} \quad (3.41)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Usando (3.41),

$$\begin{aligned} \|u\|_{D(A)} &\leq \|u\|_{n,\Omega} + \|A(t)u\|_{n,\Omega} + \|(t\mu_1 + (1-t)\mu_2)u\|_{n,\Omega} \\ &\leq \|u\|_{n,\Omega} + \max\{\mu_1, \mu_2\} \|u\|_{n,\Omega} + \|A(t)u\|_{n,\Omega} \\ &\leq (c|\Omega|^{1/n} (\max\{\mu_1, \mu_2\} + 1) + 1) \|A(t)u\|_{n,\Omega}. \end{aligned}$$

Assim $\|u\|_{D(A)} \leq c_1 \|A(t)u\|_{n,\Omega}$ para alguma c_1 e para todo $t \in [0, 1]$. Logo, do Lema 2.17, $A(0)$ é sobrejetivo pois $A(1)$ é sobrejetivo. Do (3.41) $A(0)$ é injetivo, então $A(0)$ é bijetiva e portanto inversível. $\square$

Definição 3.4. Uma função u é chamada $\mathcal{A}$ -harmônica se $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$ para algum $p > 1$ e $\mathcal{A}u = 0$

Do Teorema 3.2 temos que cada função $\mathcal{A}$ -harmônica u está em $\bigcap_{p \geq 1} W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$.

Definição 3.5. Dado $g \in C(\partial\Omega)$, uma solução do problema de Dirichlet (D) é uma função $u \in C(\overline{\Omega})$, $\mathcal{A}$ -harmônica tal que $u|_{\partial\Omega} = g$. Diremos que Ω é $\mathcal{A}$ -regular se para cada $g \in C(\partial\Omega)$ existe uma função $\mathcal{A}$ -harmônica $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u|_{\partial\Omega} = g$.

A unicidade do problema de Dirichlet (D) segue do seguinte lema.

Lema 3.6. Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ uma função $\mathcal{A}$ -harmônica então

$$-\|u^-|_{\partial\Omega}\|_{C(\partial\Omega)} \leq u(x) \leq \|u^+|_{\partial\Omega}\|_{C(\partial\Omega)} \quad (3.42)$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. Em particular

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|u\|_{C(\partial\Omega)}. \quad (3.43)$$

Demonstração. Seja $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ com $\mathcal{A}u = 0$. Do Teorema C.2 temos $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$ e $\sup_{\Omega} (-u) \leq \sup_{\partial\Omega} (-u)^+$. Assim $u(x) \leq \|u^-|_{\partial\Omega}\|_{C(\partial\Omega)}$ e $-u(x) \leq \|(-u)^+|_{\partial\Omega}\|_{C(\partial\Omega)}$ para $x \in \Omega$. Note que $(-u)^+ = u^-$, então

$$-\|u^-|_{\partial\Omega}\|_{C(\partial\Omega)} \leq u(x) \leq \|u^+|_{\partial\Omega}\|_{C(\partial\Omega)}, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad \square$$

Teorema 3.11. O operador A é inversível se e somente se Ω é $\mathcal{A}$ -regular.

Demonstração. Assumamos que A é inversível.

Caso 1. Seja $g \in C(\partial\Omega)$ tal que $g = G|_{\partial\Omega}$ onde $G \in C^2(\overline{\Omega})$. Então $AG \in L^n(\Omega)$ e se $v = A^{-1}(AG)$, temos que $u = G - v$ satisfaz $Au = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Caso 2. Seja $g \in C(\partial\Omega)$ arbitrário. Se $\tilde{g}$ é uma extensão contínua a $\mathbb{R}^n$ de g , tomando uma sequência regularizante (ρ_k) temos $g_k = \rho_k * \tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, em particular $g_k \in C(\partial\Omega)$ e além disso $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = g$ uniformemente em $\partial\Omega$. Seja $u_k \in C(\overline{\Omega})$ funções $\mathcal{A}$ -harmônica satisfazendo $u_k|_{\partial\Omega} = g_k$ (Caso 1). Do (3.43),

$$\|u_k - u_l\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|g_k - g_l\|_{C(\partial\Omega)}$$

Assim (u_n) é de Cauchy em $C(\overline{\Omega})$, logo existe um $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Em particular, $u|_{\partial\Omega} = g$. Se $\Omega' \subset\subset \Omega$, do Teorema 3.3

$$\|u_k\|_{2,n,\Omega'} \leq c \|u_k\|_{n,\Omega}.$$

Assim u_k é limitado em $W^{2,n}(\Omega')$. Segue, como na prova do Teorema 3.10, $u \in W^{2,n}(\Omega')$ e $u_k \rightharpoonup u$ em $W^{2,n}(\Omega')$. Assim $Au_k \rightharpoonup Au$ em $L^n(\Omega')$ de onde $Au = 0$ em Ω' . Como Ω' é arbitrário, então $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $Au = 0$ em Ω .

Reciprocamente, assumamos que Ω é $\mathcal{A}$ -regular. Seja $f \in L^n(\Omega)$, B é uma bola tal que $\overline{\Omega} \subset B$, $\tilde{a}_{ij}$ a extensão de a_{ij} obtida no Lema 2.13 e $\tilde{f}, \tilde{b}_j, \tilde{c}$ a extensão de f, b_j, c a B por 0 fora de Ω . Considerando o operador $\tilde{A}v = -\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} D_{ij}v + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j D_j v + \tilde{c}v$, do Teorema 3.10 existe um $v \in C_0(B) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(B)$ tal que $\tilde{A}v = \tilde{f}$. Se $g = v|_{\partial\Omega}$ então, da hipótese, existe uma função $\mathcal{A}$ -harmônica $w \in C(\overline{\Omega})$ tal que $w|_{\partial\Omega} = g$. Tomando $u = v - w$ segue $u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$, $Au = f$ em Ω e $u|_{\partial\Omega} = 0$, isto é, $u \in D(A)$ e $Au = f$. $\square$

Corolário 3.1. Assuma que uma das seguintes condições está satisfeita

- a) Ω é Wiener regular e os coeficientes a_{ij} são globalmente Lipschitz contínuo, ou
- b) Ω satisfaz a condição do cone exterior uniforme.

Então Ω é $\mathcal{A}$ -regular. Mais geralmente, para todo $f \in L^n(\Omega)$ e $g \in C(\partial\Omega)$ existe um único $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ satisfazendo

$$Au = f$$

$$u|_{\partial\Omega} = g.$$

Demonstração. Da Proposição 3.40, Teorema 3.9 (para a)) e Teorema 3.10 (para b)) temos que A é inversível. Assim, do Teorema 3.11, Ω é $\mathcal{A}$ -regular. Seja $f \in L^n(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$, como Ω é $\mathcal{A}$ -regular, existe uma função $\mathcal{A}$ -harmônica $u_1 \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u_1|_{\partial\Omega} = g$. Como

A é inversível, existe uma função $u_0 \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ tal que $\mathcal{A}u_0 = f$. Tomando $u = u_0 + u_1$, então $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$, $\mathcal{A}u = f$ e $u|_{\partial\Omega} = g$. A unicidade segue do Teorema C.2. $\square$

Observação 3.3. Para o caso em que $\mathcal{A} = \Delta$, Δ -regularidade é a regularidade usual de Ω com respeito a problema de Dirichlet clássico, isto é, Ω é Δ -regular se só se Ω é Wiener regular. Este fato segue do Lema de Weyl³.

3.4 Geração de semigrupo

Nesta seção consideraremos a parte A_c e A_0 de A em $C(\overline{\Omega})$ e $C_0(\Omega)$ como segue

$$\begin{aligned} D(A_c) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) : \mathcal{A}u \in C(\overline{\Omega})\}, \\ A_c &= \mathcal{A}u, \\ D(A_0) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) : \mathcal{A}u \in C_0(\Omega)\}, \\ A_0 &= \mathcal{A}u. \end{aligned}$$

Assim A_c é a parte de A em $C(\overline{\Omega})$ e A_0 é a parte de A_c em $C_0(\Omega)$.

Da agora em diante trabalharemos sob a complexificação dos espaços vectoriais reais de funções a valores reais.

Lema 3.7. Seja $B \subset \Omega$ uma bola de centro em x_0 e $u \in W^{2,p}(B)$ $p > n$ uma função complexa tal que $\mathcal{A}u \in C(B)$. Se $|u(x_0)| \geq |u(x)|$ para todo $x \in B$, então

$$\text{Re}[\overline{u(x_0)}(\mathcal{A}u)(x_0)] \geq 0.$$

Demonstração. Assumamos que $x_0 = 0$. Temos $W^{2,p}(B) \subset C^1(B)$ (Teorema B.12). Suponhamos que a afirmação seja falsa, então por continuidade existe um $\epsilon > 0$ e uma bola $B_l \subset B$ tal que $\text{Re}[\overline{u(x)}(\mathcal{A}u)(x)] \leq -\epsilon$ em B_l .

Afirmamos que $|u|^2 \in W^{2,p}(B_l)$. De fato, existe uma sequencia $u_k \in \widehat{C}^{2,p}(B_l) \cap C_B^2(B_l)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $W^{2,p}(B_l)$. Então $(u_k \bar{u})$ é limitado em $W^{2,p}(B_l)$ e $u_k \bar{u} \rightarrow u \bar{u}$ em $L^p(B_l)$ (note que $p' < p$ pois $p > 2$). Além disso, $D_i(u_k \bar{u})$ e $D_{ij}(u_k \bar{u})$ convergem para $D_i u \bar{u} + u D_i \bar{u}$ e $D_{ij} u \bar{u} + D_i u D_j \bar{u} + D_j u D_i \bar{u} + u D_{ij} \bar{u}$ em $L^p(\Omega)$, respectivamente. Logo do Teorema B.3 segue $u \bar{u} \in W^{2,p}(B_l)$, $D_i(u \bar{u}) = D_i u \bar{u} + u D_i \bar{u}$ e $D_{ij}(u \bar{u}) = D_{ij} u \bar{u} + D_i u D_j \bar{u} + D_j u D_i \bar{u} + u D_{ij} \bar{u}$.

³ Veja [22], Teorema 1.16.

Simplificando, $D_{ij}(u\bar{u}) = 2 \operatorname{Re}[D_{ij}u\bar{u} + D_i u D_j \bar{u}]$ e $D_i(u\bar{u}) = 2 \operatorname{Re}[D_i u \bar{u}]$. Por elipticidade $\operatorname{Re} \sum_{i,j} a_{ij} D_i u \overline{D_j u} \geq 0$. Logo, em B_l ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}|u|^2 &= \sum_{i,j=1}^n -a_{ij} D_{ij}|u|^2 + \sum_{j=1}^n b_j D_j|u|^2 + c|u|^2 \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{i,j=1}^n -a_{ij} D_{ij}u\bar{u} + \sum_{j=1}^n D_j u \bar{u} + c|u|^2 \right] - 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}u\bar{u} \right] - c|u|^2 \\ &\leq 2 \operatorname{Re}[\mathcal{A}u\bar{u}] \leq -2\epsilon. \end{aligned}$$

Seja $\psi(x) = |u|^2 - \tau|x|^2$, $\tau > 0$ e $c_1 = \inf_{B_l} \mathcal{A}|x|^2$, então $\mathcal{A}\psi = \mathcal{A}|u|^2 - \tau \mathcal{A}|x|^2 \leq -2\epsilon - \tau c_1$ em B_l para todo $\tau > 0$. Escolhendo τ suficientemente pequeno temos que $\mathcal{A}\psi \leq -\epsilon$ em B_l . Como $\psi \in W^{2,n}(B_l) \cap C(\overline{B_l})$, do Teorema C.2, segue que

$$\begin{aligned} |u(0)|^2 = \psi(0) &\leq \sup_{\partial B_l} \psi^+ = \sup_{\partial B_l} (|u|^2 - \tau l^2)^+ \\ &\leq |u(0)|^2 - \tau l^2 < |u(0)|^2, \end{aligned}$$

o qual é uma contradição. $\square$

Proposição 3.2 (Princípio Máximo Complexo). *Seja $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ tal que $\lambda u + \mathcal{A}u = 0$ onde $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $|u(x)| \leq |u(x_0)|$ para todo $x \in \Omega$, então $u \equiv 0$. Consequentemente,*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{D\Omega} |u(x)|.$$

Demonstração. Note que $\operatorname{Re} \mathcal{A}u = \mathcal{A} \operatorname{Re} u$. Como $\lambda u = -\mathcal{A}u$ segue que $\mathcal{A} \operatorname{Re} u \in C(\Omega)$. Do Teorema 3.2, $\operatorname{Re} u \in \cap_{p>1} W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$, analogamente para a parte imaginária, portanto $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$ com $p > n$. Do lema anterior $\operatorname{Re}[\overline{u(x_0)} \mathcal{A}u(x_0)] \geq 0$. Mais ainda,

$$\operatorname{Re}[\overline{u(x_0)} \mathcal{A}u(x_0)] = -\operatorname{Re} \lambda |u(x_0)|^2 \leq 0.$$

Logo $u(x_0) = 0$, assim $u \equiv 0$. $\square$

Proposição 3.3. *Assuma que Ω é $\mathcal{A}$ -regular.*

i) $\rho(-A_c) \supset (0, \infty)$ e

$$\lambda \|(\lambda + A_c)^{-1}\|_{\mathcal{L}(C(\overline{\Omega}))} \leq 1, \quad \forall \lambda > 0.$$

ii) $-A_c$ tem resolvente positivo com $w = 0$ (Definição 1.11).

Demonstração. Seja $\lambda > 0$, da Proposição 3.1 e Teorema 3.11 temos que $\lambda + A$ é bijetivo, então $\lambda + A_c$ também é bijetivo.

a) Primeiro mostraremos que se $f \in C(\overline{\Omega})$ com $f \leq 0$ e $u = (\lambda + A_c)^{-1}f$, então $u \leq 0$. Assumamos que $u^+ \neq 0$. Como $u \in C_0(\Omega)$, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\Omega} u > 0$. Do Lema 3.7, $\mathcal{A}u(x_0) \geq 0$. Como $\lambda u + \mathcal{A}u = f$ segue que $\lambda u(x_0) \leq f(x_0) \leq 0$, o que é uma contradição.

b) Seja $f \in C(\overline{\Omega})$, $u = (\lambda + A_c)^{-1}f$. Vamos mostrar que $\|\lambda u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{C(\overline{\Omega})}$. Assumamos primeiramente que $f \geq 0$, $f \neq 0$. De a) $u \geq 0$ e $u \neq 0$. Seja $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \|u\|_{C(\overline{\Omega})}$. Então $\mathcal{A}u(x_0) \geq 0$ (Lema 3.7). Logo $\lambda u(x_0) \leq \lambda u(x_0) + A_c u(x_0) = f(x_0) \leq \|f\|_{C(\overline{\Omega})}$. Se $f \in C(\overline{\Omega})$ é arbitrário, como $(\lambda + A_c)^{-1}f = (\lambda + A_c)^{-1}f^+ - (\lambda + A_c)^{-1}f^-$, segue para todo $x \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} |(\lambda + A_c)^{-1}f(x)| &\leq |(\lambda + A_c)^{-1}f^+(x)| + |(\lambda + A_c)^{-1}f^-(x)| \\ &= (\lambda + A_c)^{-1}f^+(x) + (\lambda + A_c)^{-1}f^-(x) \\ &= (\lambda + A_c)^{-1}|f|(x) \\ &\leq \|f\|_{C(\overline{\Omega})}. \end{aligned}$$

Daí $\|(\lambda + A_c)^{-1}f\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{C(\overline{\Omega})}$, isto mostra i). De a) e b) segue ii). $\square$

O seguinte teorema é demonstrado em [7], Teorema 3.1.7.

Teorema 3.12. *Seja a'_{ij} , b'_j , $c' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas em $\mathbb{R}^n$ e limitadas. Seja o operador fortemente elíptico*

$$\begin{aligned} D(A_\infty) &= \{u \in \cap_{p \geq 1} W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{R}^n) : u, A_\infty u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\} \\ A_\infty u &= - \sum_{i,j=1}^n a'_{ij} D_{ij}u + \sum_{j=1}^n b'_j D_j u + c' u. \end{aligned}$$

Então $A_\infty : D(A_\infty) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é setorial.

Do Lema 2.13. estendemos os coeficientes a_{ij} (mantendo a mesma notação) de maneira uniformemente contínua e limitada a $\mathbb{R}^n$ e satisfazendo a condição de elipticidade

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \frac{c_0}{2} |\xi|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Também estendemos b_j, c a funções limitadas em $\mathbb{R}^n$ tal que $c \geq 0$ (mantemos a mesma notação). Agora definimos operador B_∞ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\begin{aligned} D(B_\infty) &= \{u \in \cap_{p \geq 1} W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{R}^n) : u, Bu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\} \\ B_\infty u &= Bu \end{aligned}$$

$$Bu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} u - \sum_{j=1}^n b_j D_j u - cu, \quad \forall u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{R}^n).$$

Para $b_j = c = 0$, definimos B_∞^0 analogamente ao anterior.

Lema 3.8. *Seja X, Y, Z espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ e $\|\cdot\|_Z$, respectivamente. Assuma que $X \subset Y$ com imersão compacta e $Y \subset Z$ com imersão contínua. Então*

$$\forall \epsilon > 0, \text{ existe } C_\epsilon \text{ satisfazendo } \|u\|_Y \leq \epsilon \|u\|_X + C_\epsilon \|u\|_Z \quad \forall u \in X.$$

Demonstração. Pelo absurdo, existe $\epsilon > 0$ e uma sequência (u_k) em X com $u_k \neq 0$ tal que $\|u_k\|_Y > \epsilon \|u_k\|_X + n \|u_k\|_Z$. Tomando $v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_X}$ temos

$$\|v_k\|_Y > \epsilon + n \|v_k\|_Z. \quad (3.44)$$

Como $X \subset Y$ com imersão compacta então existe um $v \in Y$ com $v \neq 0$ tal que $v_k \rightarrow v$ em Y (passando para uma subsequência). Da imersão contínua $Y \subset Z$, dividindo (3.44) por k e tomando limite obtemos que $0 \geq \|v\|_Z$. Isto é absurdo. $\square$

Lema 3.9. $D(B_\infty^0) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e, para cada $\epsilon > 0$ existe C_ϵ tal que

$$\|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n} \leq \epsilon \|B_\infty^0 u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + C_\epsilon \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in D(B_\infty^0).$$

Demonstração. Considere uma bola arbitrária B_R em $\mathbb{R}^n$ de raio R e a bola B_{2R} de raio $2R$ com mesmo centro. Para $p > n$ a imersão $W^{2,p}(B_R)$ em $C^1(\overline{B_R})$ é compacta (Teorema B.14). Do Teorema 3.3

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,p,B_R} &\leq C(\|B_\infty u\|_{p,B_{2R}} + \|u\|_{p,B_{2R}}) \\ &\leq C|B_{2R}|^{1/p}(\|B_\infty u\|_{\infty,B_{2R}} + \|u\|_{\infty,B_{2R}}) \\ &\leq C|B_{2R}|^{1/p}(\|B_\infty u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}). \end{aligned}$$

Do Lema 3.8, dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^1(\overline{B_R})} &\leq \frac{\epsilon}{C|B_{2R}|^{1/p}} \|u\|_{2,p,B_R} + C_\epsilon \|u\|_{\infty,B_R} \\ &\leq \epsilon(\|B_\infty u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}) + C_\epsilon \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \\ &= \epsilon \|B_\infty u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + (C_\epsilon + \epsilon) \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Logo temos que $D_i u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n} \leq \epsilon \|B_\infty u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + (\epsilon + C_\epsilon) \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}. \quad \square$$

Observação 3.4. O lema anterior também é válido para B_∞ .

Teorema 3.13. Existe $M > 0$, $r > 0$ tal que $(\lambda - B_\infty)$ é inversível e

$$\|\lambda(\lambda - B_\infty)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}^n))} \leq M$$

para todo $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $|\lambda| > r$.

Demonstração. Afirmamos que $D(B_\infty^0) = D(B_\infty)$. De fato, se $u \in D(B_\infty^0)$, como $b_{ij}, c \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ logo $B_\infty u = B_\infty^0 u + \sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, assim $u \in D(B_\infty)$. A outra inclusão é análoga.

Logo

$$\begin{aligned} \|(B_\infty u - B_\infty^0 u)\|_{\infty,\mathbb{R}^n} &\leq \sum_{j=1}^n \|b_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n} + \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n} \\ &= c \|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n} \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde $c = \sum_{j=1}^n \|b_j\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|c\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$. Do Lema 3.9 e de (3.45), dado $\epsilon > 0$ existe um $c_\epsilon > 0$ tal que

$$\|(B_\infty - B_\infty^0)u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq \epsilon \|B_\infty^0 u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + c_\epsilon \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \quad (3.46)$$

para todo $u \in D(B_\infty^0)$. Como B_∞^0 é setorial, ele gera um semigrupo holomorfo, logo de (3.46) e Teorema 1.16, B_∞ gera um semigrupo holomorfo. Então, do Corolário 1.7, existe $M > 0$ e $r > 0$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda| > r\} \subset \rho(B_\infty)$ e

$$\|\lambda(\lambda - B_\infty)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}^n))} < M, \quad \forall \operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda| > r. \quad \square$$

Teorema 3.14. Assuma que Ω que é $\mathcal{A}$ -regular. Então $-A_c$ gera um semigrupo holomorfo limitado T em $C(\overline{\Omega})$. O operador $-A_0$ gera um C_0 -semigrupo holomorfo limitado T_0 em $C_0(\Omega)$. Mais ainda,

$$T_0(t) = T(t)|_{C_0(\Omega)}.$$

Demonstração. Como $-A_c$ tem resolvente positivo (Proposição 3.3) então da Proposição 1.5 temos $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(-A_c)$. Seja $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $|\lambda| > r$ onde r é dado pelo teorema

anterior. Dado $f \in C(\overline{\Omega})$, existe $u \in C_0(\Omega) \cap \bigcap_{p \geq 1} W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$ tal que

$$\lambda u + \mathcal{A}u = f$$

Estendendo f por 0 a $\mathbb{R}^n$ e tomando $v = (\lambda - B_\infty)^{-1}f$ segue $\lambda v + \mathcal{A}v = f$ em Ω e do Teorema 3.13

$$\|\lambda v\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|\lambda v\|_{\infty, \mathbb{R}^n} \leq M\|f\|_{\infty, \mathbb{R}^n} = M\|f\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Mais ainda, $w = v - u \in C(\overline{\Omega}) \cap \bigcap_{p \geq 1} W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$, $\lambda w + \mathcal{A}w = 0$ e $w(z) = v(z)$ em $\partial\Omega$. Logo do Principio del Máximo Complexo (Proposição 3.2)

$$\|w\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{\partial\Omega} |v(z)| \leq \frac{M}{|\lambda|} \|f\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(\overline{\Omega})} &= \|u - v + v\|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\leq \|w\|_{C(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\leq \frac{2M}{|\lambda|} \|f\|_{C(\overline{\Omega})}, \end{aligned} \tag{3.47}$$

isto é, $\|R(\lambda, -A_c)\| \leq \frac{2M}{|\lambda|}$ para $\text{Re } \lambda > 0$, $|\lambda| > r$.

Como A é inversível então A_c é bijetivo. Além disso A_c é fechado ($\rho(A_c) \neq \emptyset$), logo A_c é inversível. Da Proposição 1.5, $s(-A_c) < 0$. Assim existe um $\epsilon > 0$ tal que $s(-A_c) < -\epsilon < 0$ e $\{\lambda > \text{Re } \lambda > -\epsilon\} \subset \rho(-A_c)$. Então

$$\sup_{|\lambda| \leq r, \text{Re } \lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A_c)^{-1}\| < \infty. \tag{3.48}$$

Portanto, de (3.47) e (3.48)

$$\sup_{\text{Re } \lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A_c)^{-1}\| < \infty. \tag{3.49}$$

Logo, do Teorema 1.14, A_c gera um semigrupo holomorfo limitado T em $C(\overline{\Omega})$. Como $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{C(\overline{\Omega})} = C_0(\Omega)$, $D(A_c) \subset C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) \subset (A_c)$ então $\overline{D(A_c)} = C_0(\Omega)$. Além disso, a parte de A_c em $C_0(\Omega)$ é A_0 . Do Teorema 1.15 A_0 gera um C_0 -semigrupo holomorfo T_0 tal que $T_0(t) = T(t)|_{C_0(\Omega)}$. $\square$

Operador fechado

Seja X um espaço de Banach complexo. Um operador linear em X é uma aplicação linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ onde $D(A)$ é um subespaço linear de X .

O operador linear A é densamente definido se $\overline{D(A)} = X$ e é fechado se seu gráfico $G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ é fechado em $X \times X$. Assim A é fechado, se e só se, $(x_n) \subset D(A)$ $x, y \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$ $Ax_n \rightarrow y$ então $x \in D(A)$ e $Ax = y$. É imediato disto que se A é fechado e $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$ com $\lambda \neq 0$, então o operador $\lambda A + \beta$ com $D(\lambda A + \beta) = D(A)$ é fechado.

Para um operador linear A , $D(A)$ é um espaço normado com a norma do gráfico

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|.$$

A é sempre limitado com respeito a norma da gráfica. Então A é fechado, se e só se, $D(A)$ é um espaço de Banach com a norma da gráfica.

Definição A.1. Um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é inversível se A é bijetivo e $A^{-1} : X \rightarrow D(A)$ é limitado.

Teorema A.1 ([2], Proposição B.1). *Seja A um operador linear em X , são equivalentes*

1. A é inversível.
2. $\text{Ran } A = X$ e existe $\delta > 0$ tal que $\|Ax\| \geq \delta\|x\|$.
3. A é fechado, $\text{Ran } A = X$ e $\text{Ker } A = \{0\}$.

Definição A.2. *Seja A um operador linear. Definimos o conjunto resolvente de A como*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ é inversível} \}$$

Se $\rho(A) \neq \emptyset$ então A é fechado. Se $\lambda \in \rho(A)$ o operador $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é chamado resolvente. Também definimos o espectro de A como

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Teorema A.2 ([2], Corolário B.3). Para qualquer operador linear A , $\rho(A)$ é aberto. Mais ainda, se $\mu \in \rho(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda - \mu| < \|R(\mu, A)\|^{-1}$, então $\lambda \in \rho(A)$ e

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1},$$

onde a série é convergente em norma. Além disso,

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{\|R(\mu, A)\|}{1 - |\mu - \lambda| \|R(\mu, A)\|}.$$

Mais ainda, $R(\cdot, A)$ é holomorfo em $\rho(A)$ com valores em $\mathcal{L}(X)$ e

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{R(\mu, A)}{n!} = (-1)^n R(\mu, A)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorema A.3 ([2], Proposição B.4). Seja A um operador linear em X , $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Então

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Teorema A.4 ([2], Proposição B.5). Seja A um operador linear em X e U um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{C}$. Suponha que $U \cap \rho(A)$ seja não vazio e que exista uma função holomorfa $F : U \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tal que $\{\lambda \in U \cap \rho(A) : F(\lambda) = R(\lambda, A)\}$ tem um ponto de acumulação em U . Então $U \subset \rho(A)$ e $F(\lambda) = R(\lambda, A)$ para todo $\lambda \in U$.

Definição A.3. Uma função $R : U \rightarrow \mathcal{L}(X)$ definido em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}$ se diz pseudo-resolvente se satisfaz a equação do resolvente, isto é, se

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu) \quad (\lambda, \mu \in U).$$

Teorema A.5 ([2], Proposição B.6). Seja $R : U \rightarrow \mathcal{L}(X)$ um pseudo-resolvente. Então

- a) $\text{Ker } R(\lambda)$ e $\text{Ran } R(\lambda)$ são independentes de $\lambda \in U$.
- b) Existe um operador A em X tal que $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ para todo $\lambda \in U$, se e só se, $\text{Ker } R(\lambda) = \{0\}$.

Espaço de Sobolev

Neste apêndice, todas as funções são a funções a valores reais.

Definição e propriedades

Definição B.1. *Seja $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e α um multi-índice. Diremos que v é a α -ésima derivada fraca de u , escrevemos $D^\alpha u = v$, se*

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (\text{B.1})$$

Definição B.2. *O espaço de Sobolev é definido como*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \, |\alpha| \leq k \text{ existe } D^\alpha u \text{ e } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

onde k é um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$.

Neste espaço introduzimos a norma

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \begin{cases} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \, dx \right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |D^\alpha u|, & p = \infty \end{cases}$$

Assim, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, reflexivo se $1 < p < \infty$, e separável se $1 \leq p < \infty$.

Observação B.1. *O caso em que $p = 2$ escrevemos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Neste*

caso, $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx.$$

Também definimos o espaço $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ como

$$W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega) := \{u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega) : \forall \alpha \, |\alpha| \leq k \text{ existe } D^{\alpha} u \text{ e pertence a } L_{\text{loc}}^p(\Omega)\}.$$

Teorema B.1 (Regra Leibniz). *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $v \in C_B^k(\Omega)$ com derivada limitadas de todo ordem $\leq m$ então $uv \in W^{k,p}(\Omega)$ e*

$$D^{\alpha}(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta} v D^{\alpha-\beta} u, \quad (0 \leq |\alpha| \leq k)$$

Teorema B.2 ([12], Teorema 6.3). *Se definimos o espaço*

$$\widehat{C}^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega) : \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p \, dx < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty),$$

então $W^{k,p}(\Omega) = \overline{\widehat{C}^{k,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}$.

Teorema B.3 ([12], Lema 6.2). *Seja $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_i) \subset W^{k,p}(\Omega)$ limitada em $W^{k,p}(\Omega)$ e converge fracamente a $u \in L^p(\Omega)$. Então $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e, para α $0 \leq |\alpha| \leq k$, $(D^{\alpha} u_i)$ converge fracamente a $D^{\alpha} u$ em $L^p(\Omega)$.*

Teorema B.4 ([12], Lema 7.1). *Seja $1 \leq p < \infty$, $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_s$ abertos com $\overline{\Omega} \subset \cup_{i=1}^s \Omega'_i$ e $\Omega_i = \Omega'_i \cap \Omega$. Se $u \in W^{k,p}(\Omega_i)$ para todo i , então $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

Teorema B.5 ([5], §5 exercicio 17). *Assuma que $1 < p < \infty$ é Ω limitado. Então $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$D_i u^+ = \begin{cases} D_i u & \text{q.t.p em } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{q.t.p em } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$D_i u^- = \begin{cases} 0 & \text{q.t.p em } \{u \geq 0\}, \\ -D_i u & \text{q.t.p em } \{u < 0\}. \end{cases}$$

Teorema B.6 ([5], pag 279). *Seja Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 . Então $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua, se e só se, $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*

Seja $\Omega, G \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $\Phi : \Omega \rightarrow G$ com inversa Ψ tais que $\Phi, \Psi \in C_B^k(\Omega)$. Seja u mensurável em Ω , definimos o função mensurável Au em G dado por

$$Au(y) = u(\Phi(y)). \quad (\text{B.2})$$

Teorema B.7 ([4], Teorema 3.41). $A : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(G)$ ($A : W_0^{k,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{k,p}(G)$) $k \geq 0$, onde A definido por (B.2), é operador linear limitado e bijetivo com inversa limitada.

O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$

Seja $1 \leq p < \infty$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Denotamos $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ equipado com a norma $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço do Banach separável, que é reflexivo se $1 < p < \infty$. $H_0^k(\Omega)$ equipado com o produto escalar de $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema B.8 ([10], Lema 9.5). *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e suponha que $\text{supp } u$ é um subconjunto compacto de Ω . Então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema B.9 ([10], Teorema 9.17). *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ com $1 \leq p < \infty$. Se $u = 0$ em $\partial\Omega$ então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Desigualdades de cálculo

Para $1 \leq p < \infty$, e inteiros $0 \leq j \leq k$, definimos o funcional $|\cdot|_{j,p,\Omega}$ em $W^{k,p}(\Omega)$ por

$$|u|_{j,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Dizemos que Ω satisfaz a *condição do cone* se existe um cone finito V tal que cada $x \in \Omega$ é o vértice de um cone finito V_x contido em Ω e congruente a C . Qualquer domínio Ω de classe C^1 satisfaz a condição do cone.

Teorema B.10 ([12], Teorema 8.1). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio satisfazendo a condição do cone. Para cada $\epsilon_0 > 0$, existe uma constante C , dependendo de p, k, n e as dimensões do cone da condição de cone em Ω , tal que*

$$|u|_{j,p,\Omega} \leq \epsilon |u|_{k,p,\Omega} + \frac{C}{\epsilon^{j/(k-j)}} |u|_{0,p,\Omega} \quad (j < k)$$

ou equivalentemente

$$|u|_{j,p,\Omega}^p \leq \epsilon |u|_{k,p,\Omega}^p + \frac{C}{\epsilon^{j/(k-j)}} |u|_{0,p,\Omega}^p \quad (j < k),$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $j < k$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Teoremas de imersão

Teorema B.11 ([4], Teorema 4.12). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de classe C^1 . Se $j \geq 0$ e $m \geq 1$ são inteiros e $1 \leq p < \infty$, então*

Se $mp < n$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad \text{para } p \leq q \leq p^* = np/(n - mp).$$

Se $mp = n$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad \text{para } p \leq q < \infty.$$

Se $mp > n$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad \text{para } p \leq q \leq \infty.$$

Teorema B.12 ([12], Teorema 11.1). *Seja Ω um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^1$ e $1 \leq p < \infty$. Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ com $k > m + \frac{n}{p}$ para algum inteiro não negativo m , então $u \in C^m(\Omega)$. Quando $\partial\Omega \in C^m$ então $u \in C^m(\overline{\Omega})$.*

Teorema B.13 ([12], Teorema 11.2). *Seja Ω um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^1$. Seja $1 \leq r < \infty$. Seja $k, m \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq k < m$. Se $1 \leq p < \infty$ satisfaz*

$$\frac{1}{p} > \frac{k}{n} + \frac{1}{r} - \frac{m}{n},$$

então a imersão $u \mapsto u$ de $W^{m,r}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(\Omega)$ é compacta.

Teorema B.14 ([4], Teorema 6.3). *Seja Ω domínio limitado com $\partial\Omega \in C^1$ e $1 \leq p < \infty$, então a imersão $W^{k+m,p}(\Omega) \rightarrow C^k(\overline{\Omega})$ é compacta se $mp > n$.*

Equações elípticas de segunda ordem

Introduzimos a *solução fundamental da equação de Laplace*

$$\Gamma(x - y) = \Gamma(|x - y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)|B(0,1)|} |x - y|^{2-n}, & n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, & n = 2. \end{cases}$$

Γ é harmônica para $x \neq y$ e localmente integrável em $\mathbb{R}^n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, para uma função f integrável em Ω o *potencial Newtoniano* de f , $w = Nf$, é definido como

$$w(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x - y) f(y) dy.$$

Se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y) \Delta u(x) dx$. Em particular para $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ com Ω limitado, temos

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y) \Delta u(x) dx \quad \text{q.t.p } \Omega.$$

Teorema C.1 ([6], Teorema 9.9). *Seja $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e w o potencial Newtoniano de f . Então $w \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta w = f$ q.t.p e*

$$|w|_{2,p} \leq C \|f\|_p$$

onde $C = C(n, p)$.

Corolário C.1 ([6], Corolário 9.10). *Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$, $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Então*

$$|u|_{2,p} \leq C \|\Delta u\|_p \tag{C.1}$$

onde $C = C(n, p)$.

Consideremos o operador

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i D_i u + cu$$

satisfazendo as condições (B_1) e (B_2) .

Teorema C.2 (Princípio Máximo Alexandroff-Balkeman-Pucci. [14], §6.1, Teorema 1.9. [6], Teorema 9.1). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado, $f \in L^n(\Omega)$, $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$ tal que $Lu \leq f$ com $c \geq 0$. Então*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + C \|f^+ / \lambda_0\|_{n,\Omega}$$

ou

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \|f / \lambda_0\|_{n,\Omega}$$

onde a constante só depende de n , $\text{diam } \Omega$ e $\|b_j / \lambda_0\|_{L^n(\Omega)}$, $j = 1, \dots, n$.

Espaço de Banach ordenado

Seja X um espaço de Banach real. Um cone positivo em X é um subconjunto fechado X_+ de X tal que

$$X_+ + X_+ \subset X_+ \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbb{R}_+ \cdot X_+ \subset X_+ \quad (\text{D.2})$$

$$X_+ \cap (-X_+) = \{0\} \quad (\text{D.3})$$

$$X_+ - X_+ = X \quad (\text{D.4})$$

Introduzimos então um ordem em X : $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in X_+$. Um espaço Banach X junto com um cone positivo é chamado um espaço de Banach real ordenado. Os elementos de X_+ são chamados positivos. Seja $x^* \in X^*$, então dizemos que x^* é positivo e escrevemos $x^* \geq 0$ se

$$\langle x^*, x \rangle \geq 0, \quad x \in X_+.$$

O conjunto $X_+^* = \{x^* \in X^* : x^* \geq 0\}$ é fechado e satisfaz (D.1), (D.2) e (D.3). O cone X_+ é normal se

$$\text{se } y \leq x \leq z \quad \text{então} \quad \|x\| \leq C \max\{\|y\|, \|z\|\}.$$

Teorema D.1 ([2], Proposição C.2). *O conjunto X_+^* é normal. O cone X_+ é normal se e somente se $X_+^* - X_+^* = X^*$.*

Se X é um espaço de Banach ordenado real nos consideraremos tacitamente a complexificação de X . Assim um espaço de Banach ordenado é sempre a complexificação de um espaço de Banach ordenado real.

Seja X um espaço de Banach ordenado. Um operador linear $T : X \rightarrow X$ é chamado *positivo* se $Tx \in X_+$ para todo $x \in X_+$. Então escrevemos $T \geq 0$. Se $S, T : X \rightarrow X$ são linear, escrevemos $S \leq T$ se $T - S \geq 0$.

Se X_+ é normal, qualquer operador linear positivo $T : X \rightarrow X$ é contínuo. Mais ainda existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\text{se } 0 \leq S_1 \leq S_2 \quad \text{então} \quad \|S_1\| \leq C\|S_2\|, \quad (\text{D.5})$$

onde $S_1, S_2 : X \rightarrow X$ são lineares ([2], Apêndice C).

Referências Bibliográficas

- [1] Arendt W., Bénylan Ph. : *Wiener regularity and heat semigroups on spaces of continuous functions*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications Vol. 35. Birkhäuser Basel 1999, 29-49.
- [2] Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F. : *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Monographs in Mathematics. Birkhäuser Basel, (2001) ISBN 3-7643-6549-8.
- [3] Arendt W., Schätzle R. : *Semigroups generated by elliptic operators in non-divergence form on $C_0(\Omega)$* . arXiv:1010.1703v1 - Oct 08 2010.
- [4] Adams R, Fournier J. : *Sobolev Spaces*. Pure and applied mathematics Vol. 140. Elsevier 2003.
- [5] Evans L. : *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Math. Soc., Providence R. I 1998.
- [6] Gilbarg D., Trudinger N. : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in mathematics. Springer Berlin 2001.
- [7] Lunardi A. : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Progress in nonlinear differential equations and their applications Vol. 16. Birkhauser Basel 1995.
- [8] Minty G. J. : *On the extension of Lipschitz, Lipschitz-Hölder continuous, and monotone functions*. Bull. Amer. Math. Soc. 76 1970, 334-339.
- [9] Nagel R., Engel K. : *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Graduate texts in mathematics 194. Springer New York 2000.

- [10] Brezis H. : *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer New York 2010.
- [11] Pazy, A. : *Semigroups of linear operators and applications partial differential equations*. Applied mathematical sciences Vol. 44. Springer New York 1983.
- [12] Avner, F. : *Partial differential equations*. Holt, Rinehart and Winston New York 1969.
- [13] Widder D. : *The Laplace transform*. Princeton University Press 1946.
- [14] Ya-Zhe Chen, Lan-Cheng Wu: *Second order elliptic equation and elliptic systems*. Trans. of mathematical monographs Vol. 174. AMS Providence R.I. 1998.
- [15] Dautray R. : *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology Vol. 1*. Springer Berlin 1990.
- [16] Marsden, J. E.: *Basic Complex Analysis*. W.H Freeman and Company San Francisco 1973.
- [17] Agmon S. : *Lectures on Elliptic Boundary Value Problem*. D. Van Nostrand Co. Inc Princeton N. J. 1965.
- [18] Agmon, S : *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 15 1962, 119-147.
- [19] Agmon S., Nirenberg N.: *Properties of solution of ordinary differential equations in Banach space*. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 16 1963, 121-239.
- [20] Elon L. : *Curso de Analise vol. 2*. Projeto Euclides IMPA 2009.
- [21] Cohn D. : *Measure theory*. Birkhäuser Boston 2013.
- [22] Qing H., Fanghua L. : *Elliptic partial differential equations*. AMS, Courant Institute of Mathematical Sciences New York 2000.