Hipoeliticidade Global e Resolubilidade
para Algumas Classes de
Operadores Diferenciais

Edna Maura Zuffi

Orientação

Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
outubro de 1991

*Aos meus pais
e à Clélia*

*"... amanhã será outro dia
para ele viajas
vamos para ele.
Venceste o desgosto,
calcaste o indivíduo,
já teu passo avança
em terra diversa.
Teu passo: outros passos
ao lado do teu.
O pisar de botas,
outros nem calçados,
mas todos pisando,..."*

*(Uma hora e mais outra)
Carlos Drummond de Andrade*

*Há homens que lutam um dia e são bons;
há homens que lutam um ano e são melhores;
há outros que lutam muitos anos, e são muito bons;
porém, há os que lutam por toda a vida
e estes são os imprescindíveis.*

Bertold Brecht

Agradeço a meus pais e ao Édson, pelo carinho infindável e pela confiança sempre presentes; à Clélia, pela grande oportunidade que me concedeu; ao Dr. Fernando Luís Benini Reis, pela dedicação com que cuidou do restabelecimento de minha saúde, sem o qual não teria concluído este trabalho; ao Prof. Adalberto, pela excelente orientação e pela amizade, imprescindíveis nos momentos difíceis; aos professores do Instituto —em particular ao Hermano, ao Biasi e ao Wagner — pelo incentivo e pelas discussões; aos colegas, pela atenção e carinho, e a Deus, pela oportunidade de ter conhecido tantas pessoas maravilhosas.

Este trabalho contou com apoio parcial do CNPq

Abstract

In this work we use characterizations of periodic distributions and smooth periodic functions by means of their Fourier series to study global hypoellipticity and global solvability on the n -torus ($n \geq 2$) for a class of partial differential operators. Some of these have constant coefficients and others, variable and smooth ones.

Resumo

Neste trabalho, utilizamos as caracterizações de distribuições periódicas e de funções periódicas suaves por meio de suas séries de Fourier, para estudarmos a hipoeleticidade global e a resolubilidade global no n -toro ($n \geq 2$) para uma classe de operadores diferenciais parciais, onde alguns destes têm coeficientes constantes e outros, coeficientes variáveis e suaves.

Conteúdo

1	Pré-Requisitos	1
1.1	Espaços de Funções Testes e de Distribuições Periódicas	2
1.2	Operadores elíticos, hipoelíticos e globalmente hipoelíticos	5
1.3	Exemplos de operadores elíticos, (H) e (GH)	5
1.4	Os espaços de Sobolev	6
1.5	Alguns resultados de Análise	8
1.5.1	Teorema da aplicação aberta para espaços de Fréchet	8
1.5.2	Operadores lineares contínuos e semi-normas	9
1.5.3	Existência e regularidade de solução para uma E.D.O.	9
2	Hipoeliticidade e Resolubilidade Globais para Alguns Operadores a Coeficientes Constantes	11
2.1	Hipoeliticidade Global e Resolubilidade em T^n	12
2.2	Resolubilidade em $C_S^\infty(T^n)$	15
2.3	Exemplos de operadores (GH) e operadores (GR)	21
2.3.1	Exemplo 1	26
2.3.2	Exemplo 2	26
2.3.3	Exemplo 3	26

2.3.4	Exemplo 4	27
2.3.5	Exemplo 5	28
2.3.6	Exemplo 6	30
3	Hipoeliticidade Global para uma Classe de Operadores em T^n com Coeficientes Variáveis	32
3.1	Hipoeliticidade Global para um Operador da forma: $P = p(D_1^2) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1}$	33
3.1.1	Exemplo 1	34
3.1.2	Exemplo 2	35
3.1.3	Exemplo 3	35
3.2	Alguns Resultados sobre uma Equação de Diferenças	35
3.3	Demonstração do teorema central	41
3.4	Observações relevantes sobre o teorema central	52
3.4.1	A unicidade da solução	52
3.4.2	O operador $P = D_1^2 + 2r \operatorname{sen} x_1$, com $r > 1$	52
3.4.3	Por que utilizar grau par — ou $p(D_1^2)$	56
3.5	A hipoeliticidade global para o operador $Q = q(D') + 2 \cos x_1$	58
3.5.1	Exemplo 1	59
3.5.2	Exemplo 2	60
3.5.3	Demonstração do teorema	60
3.5.4	Outra classe de operadores	63
A		65

Introdução

Neste trabalho, nosso principal objetivo é estudar a *hipoeliticidade global* para algumas classes de operadores diferenciais parciais lineares, agindo em funções definidas no toro n -dimensional T^n , $n \geq 2$. Tal propriedade trata da regularidade de soluções sempre que o segundo membro de uma E.D.P. é regular (função infinitamente diferenciável). A definição de um operador *globalmente hipoelítico* (GH) na qual estamos particularmente interessados é a seguinte:

P é (GH) se, e somente se,
as condições: $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ e $Pu = f \in C^\infty(T^n)$
implicam $u \in C^\infty(T^n)$.

Outro objetivo importante ao qual nos propomos é verificar algumas hipóteses sob as quais estes operadores são globalmente resolúveis (GR), ou seja, sob que condições o operador: $P : X \rightarrow X$ é sobrejetor, quando $X \subset C^\infty(T^n)$ é um subespaço.

Para isto, no primeiro capítulo introduzimos várias definições e resultados importantes a serem utilizados no estudo das propriedades descritas anteriormente. Enunciamos os principais teoremas que tratam das caracterizações de funções periódicas suaves (infinitamente diferenciáveis) e de distribuições periódicas, por meio de suas séries de Fourier (seção 1.1). Destacamos, ainda, alguns resultados de Análise que serão utilizados ao longo deste trabalho (seção 1.5) e um breve estudo dos espaços de Sobolev para funções periódicas (seção 1.4).

No segundo capítulo, estudamos a hipoeliticidade global (HG) para operadores a coeficientes constantes da forma:

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \text{ onde } c_\alpha \in \mathbb{C}, D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

e destacamos um resultado de [G-W] (seção 2.1) que trata da resolubilidade de P em $C^\infty(T^n)$ — a menos de um espaço de dimensão finita — e sua relação com a hipoeliticidade global:

Teorema 0.1 *Se P é (GH), então P é Fredholm de índice zero, i.e., $\dim \text{Ker} P = \text{codim Im} P$.*

Outro operador, tratado em [Mos], e analisado neste capítulo é:

$$L = \sum_{j=1}^n \tilde{D}_j^2 : C_0^\infty(T^{n+1}) \rightarrow C_0^\infty(T^{n+1}), \text{ onde,}$$

$$\tilde{D}_j = \partial x_j - \alpha_j \partial x_{n+1}, \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots \text{ e}$$

$$C_0^\infty(T^{n+1}) = \{f \in C^\infty(T^{n+1}) : \hat{f}(0) = (2\pi)^{-(n+1)} \int_{T^{n+1}} f(x) dx = 0\}.$$

Com este tipo de operadores, traçamos um paralelo entre a (HG) e a (RG) (seção 2.2). Finalmente, analisamos vários exemplos nesta classe (seção 2.3) e sua relação com os *números de Liouville*.

No terceiro capítulo (seções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4), abordamos a hipoeliticidade global — tratada em [Yos] — para outra classe de operadores, agora com alguns coeficientes variáveis em T^n , do tipo:

$$P = p(D_1^2) + e^{ix_1} + a e^{-ix_1}, \text{ onde } a = \pm 1.$$

A demonstração do teorema central fornece uma maneira interessante de provarmos outros resultados (seção 3.5) acerca da hipoeliticidade global para operadores da forma:

$$Q = q(D') + 2 \cos x_1, \text{ onde } q(D') = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^{n-1} \\ |\alpha| \leq m}} c_\alpha D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}, c_\alpha \in \mathbb{C},$$

onde está envolvida a resolução de uma equação de diferenças do tipo:

$$v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, a_j, f_j \in \mathbb{C}.$$

Finalizando, citamos outro resultado de [Yos] sobre a hipoeliticidade global para os operadores:

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha + \sum_{|\beta| \leq m-s} b_\beta(x) D^\beta, \text{ onde } m \geq s \geq 1, a_\alpha \in \mathbb{C},$$

$$b_\beta \in C^\infty(T^n) \text{ e } \hat{b}_\beta(0) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} b_\beta(x) dx = 0, \forall \beta, |\beta| \leq m-s,$$

os quais serão objetos de estudos futuros.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

O objetivo deste capítulo é apresentar a notação e destacar as definições importantes a serem utilizadas nos capítulos 2 e 3, bem como os resultados que serviram como pré-requisitos para o desenvolvimento da teoria neste trabalho. Na seção (1.1) apresentamos os espaços de funções testes e de distribuições periódicas, e também sua relação com os espaços de sequências rapidamente decrescentes e de sequências lentamente crescentes. Na seção (1.2) introduzimos os conceitos de operadores elíticos, hipoelíticos e globalmente hipoelíticos, destacando alguns exemplos relevantes. Na seção (1.3) fazemos uma rápida abordagem sobre os espaços de Sobolev e sua relação com os espaços da seção (1.1). Finalizando este capítulo, destacamos dois importantes resultados de Análise a serem utilizados: o *Teorema da Aplicação Aberta para Espaços de Fréchet* e um *Teorema de Existência de Solução para uma E.D.O.*

1.1 Espaços de Funções Testes e de Distribuições Periódicas

Definição 1.1 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis, definidas em $\mathbf{R}^n$, a valores complexos.

Definição 1.2 $C_{2\pi}^\infty(\mathbf{R}^n)$ é o subespaço de $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ formado pelas funções 2π -periódicas em cada variável.

Definição 1.3 $C^\infty(T^n)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis definidas no toro T^n , a valores complexos, onde:

$$T^n \cong \mathbf{R}^n / 2\pi \mathbf{Z}^n; \quad n \geq 1.$$

Tem-se:

- $C^\infty(T^n) \cong C_{2\pi}^\infty(\mathbf{R}^n)$.
- As seminormas $p_k(f) = \sup\{|\partial^\alpha f(x)|; x \in T^n, |\alpha| \leq k\}$, $k = 1, 2, \dots$, e $p_0(f) = \sup\{|f(x)|, x \in T^n\}$ definem em $C^\infty(T^n)$ uma topologia localmente convexa, metrizável e completa.

Com isto, vemos que $C^\infty(T^n)$ é um espaço de Fréchet. Uma métrica que pode ser definida através das semi-normas p_k , $k = 0, 1, \dots$ é:

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(f - g)}{1 + p_k(f - g)}$$

e temos, então, a topologia que fornece a convergência uniforme da função e de todas as suas derivadas.

Definição 1.4 $\mathcal{D}'(T^n)$ é o espaço de todas as distribuições no toro T^n , i.e., o espaço dos funcionais lineares contínuos $u : C^\infty(T^n) \rightarrow \mathbf{C}$.

Definição 1.5 Se $f \in C^\infty(T^n)$ e $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, definimos o k -ésimo coeficiente de Fourier de f por:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} e^{-ik \cdot x} f(x) dx = \langle f, e_{-k} \rangle, \text{ onde } e_{-k}(x) = e^{-ik \cdot x}, i = \sqrt{-1},$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in T^n, k \cdot x = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n.$$

A série de Fourier de f é definida por: $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$.

Teorema 1.1 Se $f \in C^\infty(T^n)$, então f é igual à sua série de Fourier, i.e.,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x},$$

com convergência na topologia de $C^\infty(T^n)$.

É possível caracterizar uma função de $C^\infty(T^n)$ através de seus coeficientes de Fourier:

Teorema 1.2 Uma sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \mathbb{C}$ é a sequência de coeficientes de Fourier de uma função $f \in C^\infty(T^n) \Leftrightarrow$ para cada $M \in \mathbb{N}$, existe $C > 0$ tal que:

$$|a_k| \leq C(1 + |k|)^{-M}, k \in \mathbb{Z}^n, \text{ onde } |k| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2}$$

Ou, equivalentemente:

$\alpha = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ é a sequência de coeficientes de Fourier de uma função $f \in C^\infty(T^n) \Leftrightarrow$ para cada $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k| |k|^M < \infty \text{ ou } \sup\{|a_k| |k|^M; k \in \mathbb{Z}^n\} < \infty$$

Definição 1.6 Estas seqüências são ditas rapidamente decrescentes e seu espaço será denotado por $S(\mathbb{Z}^n)$. Definimos em $S(\mathbb{Z}^n)$ as semi-normas:

$$\|\alpha\|_{\infty, M} = \sup\{|a_k||k|^M, k \in \mathbb{Z}^n\}, M \in \mathbb{N}$$

e

$$\|\alpha\|_{\infty, 0} = \sup\{|a_k|, k \in \mathbb{Z}^n\}$$

e a métrica:

$$\tilde{d}(\alpha, \beta) = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{2^M} \frac{\|\alpha - \beta\|_{\infty, M}}{1 + \|\alpha - \beta\|_{\infty, M}}, \forall \alpha, \beta \in S(\mathbb{Z}^n).$$

Teorema 1.3 O operador $\wedge : C^\infty(T^n) \rightarrow S(\mathbb{Z}^n)$, que a cada função $f \in C^\infty(T^n)$ associa a seqüência dos seus coeficientes de Fourier: $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$, é um isomorfismo e também um homeomorfismo, i.e., é uma bijeção linear contínua com inversa contínua (em relação às métricas d e $\tilde{d}$).

Definição 1.7 Se $u \in \mathcal{D}'(T^n)$, definimos o k -ésimo coeficiente de Fourier de u por:

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle u, e_{-k} \rangle, \text{ onde } e_k = e^{ik \cdot x}.$$

Teorema 1.4 $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ é igual à sua série de Fourier, i.e.,

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}(k) e_k,$$

com convergência na topologia fraca de $\mathcal{D}'(T^n)$, ou seja, para toda $\varphi \in C^\infty(T^n)$ tem-se:

$$\langle u, \varphi \rangle = (2\pi)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}(k) \cdot \hat{\varphi}(-k).$$

Teorema 1.5 Uma seqüência numérica $\alpha = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \mathbb{C}$ é a seqüência dos coeficientes de Fourier de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(T^n) \Leftrightarrow$ existem $C > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ tais que:

$$|a_k| \leq C(1 + |k|)^M, \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

Estas são ditas seqüências de crescimento lento e seu espaço será denotado por $S'(\mathbb{Z}^n)$.

Teorema 1.6 Se $\alpha = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ é uma seqüência complexa de crescimento lento, então existe uma única $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ tal que $\hat{u}(k) = a_k, \forall k \in \mathbb{Z}^n$. Reciprocamente, se $u \in \mathcal{D}'(T^n)$, então $\hat{u} = (\hat{u}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ é de crescimento lento. ¹

¹Referências: [Berg]; [Zan]; [Ior].

1.2 Operadores elíticos, hipoelíticos e globalmente hipoelíticos

Seja $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m, \alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha(x) D^\alpha$ um operador diferencial em $X = T^n$ ou $\mathbb{R}^n$, onde $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ e $D_j = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$.

Definição 1.8 P é elítico em $x_0 \in X$ se $P_m(x_0, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0) \xi^\alpha \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Quando $P(x, D)$ é elítico em todos os pontos de X , dizemos que P é elítico em X .

Definição 1.9 P é hipoelítico, (H), em $X \Leftrightarrow \forall Y \subset X$ aberto, as condições: $u \in \mathcal{D}'(X)$ e $Pu \in C^\infty(Y)$ implicam $u \in C^\infty(Y)$.

Definição 1.10 P é globalmente hipoelítico, (GH), em $X \Leftrightarrow$ as condições $u \in \mathcal{D}'(X)$ e $Pu \in C^\infty(X)$ implicam $u \in C^\infty(X)$.

Observemos que P é (H) em $X \Rightarrow P$ é (GH) em X . Mas a recíproca não é verdadeira, como veremos em exemplos posteriores.

1.3 Exemplos de operadores elíticos, (H) e (GH)

Um exemplo clássico de operador elítico em $\mathbb{R}^n$ é o Laplaciano:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 = - \sum_{j=1}^n D_j^2,$$

o qual sabemos que é também (H) em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, (GH) em $\mathbb{R}^n$ e T^n .

Outro exemplo de operador elítico, (H) e, portanto (GH) em $\mathbb{R}^2$ e T^2 é:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \text{ (operador de Cauchy - Riemann)}$$

Já o operador de calor definido em $\mathbb{R}^n$ por:

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

não é elítico, mas pode-se mostrar que é (H) e, portanto, (GH) em $\mathbf{R}^{n+1}$ e T^{n+1} .

O operador das ondas em $\mathbf{R}^{n+1}$, definido por:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta$$

também não é elítico; pode-se mostrar que não é (H) em $\mathbf{R}^{n+1}$ e também não é (GH) em $\mathbf{R}^{n+1}$, mas pode ser (GH) em T^{n+1} , dependendo do valor de c .

Exemplos de operadores (GH) que não são (H) serão abordados nos capítulos 2 e 3.

Um exemplo de operador que não é (GH) em T^2 é $:D_1 - \gamma(x_1)$, com γ satisfazendo: $\int_0^{2\pi} \gamma(s) ds = 0$, o qual será abordado no capítulo 3.

Outro exemplo analisado em [Zan] com coeficientes variáveis foi:

$$P = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \phi^2(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a(x) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde $\phi, a \in C^\infty(T^1)$ a valores reais e são tais que:

1. $\phi(0) \neq 0$
2. $\phi(x) = 0$, se $x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$

E o resultado obtido foi que P é (GH).²

1.4 Os espaços de Sobolev

Definição 1.11 Para cada $s \in \mathbf{R}$, definimos:

$$H^s(T^n) = \{u \in \mathcal{D}'(T^n) : \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (1 + |k|^2)^s |\hat{u}(k)|^2 < \infty\}$$

Podemos definir um produto interno em $H^s(T^n)$ por:

$$\langle u, v \rangle_s = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (1 + |k|^2)^s \hat{u}(k) \overline{\hat{v}(k)}$$

²Referências: [Berg]; [Hou]; [Zan]

e a norma associada a este produto é:

$$\|u\|_s = \langle u, u \rangle_s^{1/2} = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s |\hat{u}(k)|^2 \right]^{1/2}.$$

Da desigualdade de Schwarz segue que:

$$\left| \sum_k (1 + |k|^2)^{(s+t)/2} \hat{u}(k) \cdot \overline{\hat{v}(k)} \right|^2 \leq \left(\sum_k (1 + |k|^2)^s |\hat{u}(k)|^2 \right) \left(\sum_k (1 + |k|^2)^t |\hat{v}(k)|^2 \right).$$

e então $\langle u, v \rangle_s$ existe se $u \in H^t$ e $v \in H^{t'}$, onde $(t+t')/2 = s$. Com isto, temos que H^s é um espaço de Hilbert.

Alguns resultados seguem do seguinte teorema:

Teorema 1.7 a) *Seja $s \geq 0$ inteiro. Então existem constantes C e C' , dependendo no máximo de s e n , tais que:*

1. $C\|\phi\|_s \leq \sum_{|\alpha|=0}^s \|D^\alpha \phi\| \leq C'\|\phi\|_s$, para todo $\phi \in C^\infty(T^n)$, onde $\|\cdot\|$ é a norma usual de $L^2(T^n)$.

Para o caso $s = 0$, temos:

2. $\|\phi\| = \|\phi\|_0$, $\forall \phi \in C^\infty(T^n)$.

b) *Se $t \leq s$, então $\|u\|_t \leq \|u\|_s$ e assim $H^s \subset H^t$.*

c) $C^\infty(T^n)$ é um subespaço denso de $H^s(T^n)$ para todo s .

d) *Se $u \in H^{s+t}$ e $v \in H^{s-t}$, então vale a desigualdade de Schwarz:*

$$\| \langle u, v \rangle_s \| \leq \|u\|_{s+t} \|v\|_{s-t}$$

e) D^α é um operador limitado de $H^{s+|\alpha|}$ em H^s e para todo s , vale:

$$\|D^\alpha u\|_s \leq \|u\|_{s+|\alpha|}, \quad \forall u \in H^{s+|\alpha|}.$$

Lema 1.1 (de Sobolev) Se $t \geq [n/2] + 1$ e $u \in H^t$, então a série: $\sum_k \hat{u}(k)e^{ix \cdot k}$ converge uniformemente. Assim, a cada $u \in H^t(T^n)$, para $t \geq [n/2] + 1$, corresponde uma função contínua.

Corolário 1.1 Se $t \geq [n/2] + 1$, então $\exists c > 0$ tal que se $\phi \in C^\infty(T^n)$, então:

$$\|\phi\|_\infty \leq c\|\phi\|_t \quad \text{e} \quad \|D^\alpha \phi\|_\infty \leq c\|\phi\|_{t+|\alpha|}.$$

Pode-se mostrar ainda que $\mathcal{D}' = \cup_s H^s$ e $C^\infty = \cap_s H^s$. Esquemáticamente, podemos escrever: se $s > 0$, o operador Λ estabelece os isomorfismos:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} C^\infty & \subset & \dots & \subset & H^s & \subset & \dots & \subset & L^2 = H^0 & \subset & \dots & \subset & H^{-s} & \subset & \dots & \subset & \mathcal{D}' \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\ S & \subset & \dots & \subset & h^s & \subset & \dots & \subset & l^2 & \subset & \dots & \subset & h^{-s} & \subset & \dots & \subset & S' \end{array},$$

onde:

$$l^2(\mathbb{Z}^n) = \{(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \mathbb{C}; \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k|^2 < \infty\}$$

e

$$h^s(\mathbb{Z}^n) = \{(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}; \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s |a_k|^2 < \infty\}^3.$$

1.5 Alguns resultados de Análise

1.5.1 Teorema da aplicação aberta para espaços de Fréchet

Sejam X, Y espaços de Fréchet, i.e., espaços vetoriais topológicos cujas respectivas topologias são definidas por métricas que os tornam completos. Seja $f : X \rightarrow Y$ linear, contínua e sobrejetora. Então f é aberta ⁴.

³Referência: [War]

⁴Referência: [Rud]

1.5.2 Operadores lineares contínuos e semi-normas

Uma caracterização de operadores lineares contínuos definidos em espaços de Fréchet que será utilizada no capítulo 2, é a seguinte:

Sejam $(X, d), (Y, d')$ espaços de Fréchet, cujas métricas d e d' são definidas através de semi-normas $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(q_\beta)_{\beta \in B}$, respectivamente. Então o operador linear $T : X \rightarrow Y$ é contínuo se, e somente se, $\forall \beta \in B$, $\exists F \subset A$ finito e $\exists c > 0$ tais que:

$$q_\beta(T\phi) \leq c \sum_{\alpha \in F} p_\alpha(\phi), \quad \forall \phi \in X.$$

1.5.3 Existência e regularidade de solução para uma E.D.O.

Considere a equação: $a_n(t)x^{(n)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) = 0$ com $a_n(t) \neq 0, \forall t$, e com valores iniciais: $x(t_0) = 0, x'(t_0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = 1$.

Façamos :
 $x(t) = x_1(t)$
 $x'(t) = x'_1(t) = x_2(t)$
 $\vdots$
 $x^{(n-1)}(t) = x'_{n-1}(t) = x_n(t)$
e teremos, na equação acima:

$$a_n(t)x'_n(t) + a_{n-1}(t)x_n(t) + \dots + a_1(t)x_2(t) + a_0(t)x_1(t) + b(t) = 0.$$

Tais equações equivalem ao sistema linear:

$$X' = A(t)X + h(t), \text{ onde :}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-a_0}{a_n} & \frac{-a_1}{a_n} & \frac{-a_2}{a_n} & \dots & \frac{-a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}.$$

Segundo [Hale], existe uma única solução $X(t) \in C^1$ para o PVI relativo ao sistema e, portanto, uma única solução $x(t) \in C^n$ para o PVI relativo à primeira equação, uma vez que $b, a_0, a_1, \dots, a_n \in C^\infty$. E podemos ver que $x \in C^\infty$. (Basta voltar ao sistema anterior e observar que: se $x_1, x_2, \dots, x_n \in C^1$, então $x'_n \in C^1 \Rightarrow x_n = x'_{n-1} \in C^2 \Rightarrow x_{n-1} \in C^3, \dots, x_1 \in C^{n+1}$ e, prosseguindo indutivamente, concluimos que $x \in C^\infty$).

Capítulo 2

Hipoeliticidade e Resolubilidade Globais para Alguns Operadores a Coeficientes Constantes

Neste capítulo serão utilizados os resultados e caracterizações do capítulo anterior, a fim de estudarmos alguns tipos de operadores diferenciais a coeficientes constantes.

As questões principais a serem resolvidas serão:

- dado um operador diferencial $P : C^\infty(T^n) \rightarrow C^\infty(T^n)$, sob que condições P é sobrejetor, ou seja: para toda $g \in C^\infty(T^n)$, sempre existe $f \in C^\infty(T^n)$ tal que $Pf = g$?
- Sob que condições a solução é C^∞ ?

Eventualmente, pode-se perguntar quando é que P é injetor, ou seja, quando é que a solução para a equação $Pu = f$ é única.

Na primeira seção será vista uma generalização (feita em [Zan]) do artigo de [G-W] para o toro n -dimensional ($n \geq 2$), o qual trata da hipoeliticidade global de alguns tipos de operadores (teor. 2.1) e sua relação com a resolubilidade no espaço $C^\infty(T^n)$ (corol. 2.1).

Na segunda seção, serão abordados resultados semelhantes aos anteriores vistos em [Mos], onde foram tratados de forma mais analítica, destacando-se aí a utilização do *Teorema da Aplicação Aberta para Espaços de Fréchet*. Neste caso,

também foi feita uma generalização (teor. 2.2), e a análise de uma classe de operadores feita por [Mos] segue como corolário (teor.2.3).

Com base nestes resultados, na terceira seção serão estudados exemplos de operadores globalmente hipoelíticos (GH) e globalmente resolúveis (GR), bem como outros exemplos que não apresentam tais propriedades.

2.1 Hipoeliticidade Global e Resolubilidade em T^n

Introduzimos aqui o conceito de operador globalmente resolúvel que será utilizado no decorrer deste capítulo:

Definição 2.1 *Seja o operador diferencial linear $P : X \rightarrow X$, com $X \subset \mathcal{D}'(T^n)$ um subespaço. Então P será dito globalmente resolúvel (GR) em X , se for uma aplicação sobrejetora.*

Consideremos o operador diferencial P em T^n , $n \geq 2$:

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \text{ onde } D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j};$$

$$c_\alpha \in \mathbb{C}; \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n \text{ e } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Definimos $P(k) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha k_1^{\alpha_1} \dots k_n^{\alpha_n}$, onde $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Teorema 2.1 *P definido como acima é (GH) se, e somente se, existem números reais positivos L, M tais que:*

$$(LM) \quad |P(k)| \geq \frac{L}{(k_1^2 + \dots + k_n^2)^M}, \text{ para } |k| \text{ suficientemente grande.}$$

Demonstração: Suponhamos que existam r, L e M positivos tais que:

$$|P(k)| \geq \frac{L}{|k|^{2M}} \text{ para } |k| = (k_1^2 + \dots + k_n^2)^{1/2} \geq r.$$

Assim, $P(k) = 0$ implica que $k \in A = \{k \in \mathbb{Z}^n; |k| < r\}$, o qual é finito. Seja $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e_k \in \mathcal{D}'(T^n)$, onde $e_k(x) = e^{ik \cdot x}$, tal que $Pf = g \in C^\infty(T^n)$.

Então, temos: $\hat{f}(k) \cdot P(k) = \hat{g}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

Dado $N \in \mathbb{N}$, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ com $|k| \geq r$, existe $C > 0$ tal que:

$$|\hat{f}(k)| = \left| \frac{\hat{g}(k)}{P(k)} \right| \leq |\hat{g}(k)| \cdot \frac{|k|^{2M}}{L} \leq C |k|^{-N},$$

pois $(\hat{g}(k))$ decresce rapidamente. Logo,

$$\sup\{|\hat{f}(k)| |k|^N; k \in \mathbb{Z}^n\} \leq \max_{0 \leq |k| < r} \{|\hat{f}(k)| |k|^N, C\} < \infty.$$

Portanto, $f \in C^\infty(T^n)$ e concluímos que P é (GH). Suponha, agora, que a condição (LM) seja falsa. Então existe uma sequência $(k_j) \in \mathbb{Z}^n$ tal que:

$$|P(k_j)| \leq \frac{1}{|k_j|^{2j}} \text{ e } |k_j^i| \rightarrow \infty, \forall i = 1, \dots, n$$

Defina $f = \sum_{j=1}^{\infty} e_{k_j}$. Como

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = k_j \text{ para algum } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } k \neq k_j, j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

temos que $f \in \mathcal{D}'(T^n)$. Além disso, $f \notin C^\infty(T^n)$, uma vez que a subsequência $(\hat{f}(k_j))$ não decresce rapidamente.

Mas:

$$Pf = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) P(k) e_k = \sum_{j=1}^{\infty} P(k_j) e_{k_j} = g,$$

com

$$\hat{g}(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq k_j, j \in \mathbb{N} \\ P(k_j) & \text{se } k = k_j \text{ para algum } j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$ e $N \in \mathbb{N}$, temos:

$$|\hat{g}(k)| \leq |P(k_j)| \leq \frac{1}{|k_j|^{2j}} \leq C \frac{1}{|k|^N}$$

e, portanto, $g \in C^\infty(T^n)$, o que mostra que P não é (GH). $\square$

Um resultado interessante segue do teorema anterior e trata da resolubilidade de P em $C^\infty(T^n)$, a menos de um espaço de dimensão finita:

Corolário 2.1 *Se P é (GH), então P é Fredholm de índice zero, i.e., $\dim \text{Ker} P = \text{codim Im} P$.*

Prova: $P : C^\infty(T^n) \rightarrow C^\infty(T^n)$ é contínuo, uma vez que a métrica em $C^\infty(T^n)$ envolve derivadas de todas as ordens. Como P é (GH), então vale a condição (LM) do teorema anterior, a qual implica que $P(k)$ se anula apenas para um conjunto finito de índices: $S = \{k \in \mathbb{Z}^n; P(k) = 0\}$. Se $f \in C^\infty(T^n)$ considere $\pi_S f$ a função definida por:

$$\pi_S f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e_k,$$

onde

$$a_k = \begin{cases} \hat{f}(k) & \text{se } k \in S \\ 0 & \text{se } k \notin S \end{cases}$$

Como S é finito, π_S é uma projeção contínua. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \text{Ker} P &= \{f \in C^\infty(T^n) : \hat{f}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus S\} = \\ &= \{f \in C^\infty(T^n) : (I - \pi_S)f = 0\} = \{f \in C^\infty(T^n) : f = \pi_S f\}. \end{aligned}$$

Afirmção: Se $g \in C^\infty(T^n)$ é tal que $\pi_S g = 0$, então existe $f \in C^\infty(T^n)$ tal que $Pf = g$.

De fato: defina $f = \sum_k \hat{f}(k) \cdot e_k$, onde

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} \frac{\hat{g}(k)}{P(k)} & \text{se } k \in \mathbb{Z}^n \setminus S \\ 0 & \text{se } k \in S \end{cases}$$

e a condição (LM) garante o decrescimento rápido de $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$. Além disso, $P(k)\hat{f}(k) = 0 \cdot \hat{f}(k) = 0 = \hat{g}(k)$, se $k \in S$ e $P(k)\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$, se $k \in \mathbb{Z}^n \setminus S$.

Esta última afirmação equivale a dizer que $\text{Ker}(\pi_S) \subset \text{Im}P$ e é claro que $\text{Im}P \subset \text{ker}(\pi_S)$.

Temos: $\dim \text{Ker}P = \text{cardinalidade de } S < \infty$.

Mostremos que $C^\infty(T^n) = \text{Im}P \oplus \text{Ker}P$, donde concluiremos que $\dim \text{Ker}P = \text{codim } \text{Im}P = \#S$.

Com efeito,

$$\text{Ker}P = [e_k : k \in S] \text{ e } \text{Im}P = \text{Ker}(\pi_S).$$

Logo:

$$\text{Ker}P \cap \text{Im}P = \text{Ker}P \cap \text{Ker}(\pi_S) = \{0\}.$$

Além disso, $\text{Ker}P$ e $\text{Im}P$ são subespaços fechados de $C^\infty(T^n)$, pois P e π_S são aplicações contínuas.

Assim, $\forall f \in C^\infty(T^n)$, podemos escrever:

$$f = (I - \pi_S)f + \pi_S f,$$

onde a primeira parcela está em $\text{Ker}(\pi_S)$ e a segunda está em $\text{Ker}P$, uma vez que :

$$\pi_S \circ (I - \pi_S)f = (\pi_S - \pi_S^2)f = 0.$$

□

2.2 Resolubilidade em $C_S^\infty(T^n)$

Seja P um operador diferencial linear a coeficientes constantes como na seção anterior. Fazemos:

$$S = \{k \in \mathbb{Z}^n; P(k) = 0\}$$

. Se $\#S < \infty$, definimos , para cada $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e_k \in \mathcal{D}'(T^n)$, a função:

$$\pi_S f = \sum_{k \in S} \hat{f}(k) e_k,$$

onde $\pi_S : \mathcal{D}'(T^n) \rightarrow \mathcal{D}'(T^n)$ é uma projeção sobre o subespaço: $H_S = [e_k : k \in S]$ e $e_k(x) = e^{ik \cdot x}$, $x \in T^n$.

Definimos :

$$C_S^\infty(T^n) = \{f - \pi_S f; f \in C^\infty(T^n)\},$$

cujas topologia será a induzida de $C^\infty(T^n)$. Então, vale um resultado equivalente ao teorema (2.1):

Teorema 2.2 $P : C_S^\infty(T^n) \rightarrow C_S^\infty(T^n)$ é uma bijeção se, e somente se, vale a condição:

$$|P(k)| \geq C(1 + |k|)^{-\tau_0} \text{ para algum } C > 0 \text{ e } \tau_0 > 0, \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus S. \quad (2.1)$$

Observemos que o subespaço $C_S^\infty(T^n)$ é colocado no domínio a fim de garantir a injetividade do operador P e, no contra-domínio, para possibilitar que P seja sobrejetor, uma vez que as funções $f \in [e_k : k \in S]$ não são atingidas pelo operador P , i.e., não estão em $Im P$. De fato: se $f = \sum_{j=1}^r \beta_j e_{k_j}$, com $k_j \in S$ e $\beta_j \neq 0$, teremos:

$$\forall u \in \mathcal{D}'(T^n) : P(k_j) \hat{u}(k_j) = 0 \neq \beta_j = \hat{f}(k_j).$$

Ainda, vale ressaltar que a condição (2.1) é semelhante à condição (LM) do teorema (2.1), mas, como foi observado no início deste capítulo, aqui será tratada de forma mais analítica, embora seja válida uma demonstração análoga à do teorema da seção anterior.

Demonstração: O espaço $C_S^\infty(T^n)$ é um espaço de Fréchet cuja topologia pode ser descrita pelas normas de Sobolev:

$$\|\varphi\|_r = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^{2r} |\hat{\varphi}(k)|^2 \right]^{1/2},$$

onde:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(k) e_k, \text{ e } \hat{\varphi}(k) = 0 \text{ se } k \in S.$$

Supondo P bijetor, pelo Teorema da Aplicação Aberta (para Espaços de Fréchet), temos que P^{-1} é contínuo. Da definição (1.5.2) segue, em particular, que existem constantes $\tau, c_1 > 0$ tais que:

$$\|\varphi\|_0 \leq c_1 \|P\varphi\|_{2\tau}, \quad \forall \varphi \in C_S^\infty(T^n), \quad (2.2)$$

a qual afirmamos ser equivalente a :

$$(1 + |k|)^{-2\tau} \leq c_1 |P(k)|, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus S. \quad (2.3)$$

De fato:

• (2.2) $\Rightarrow$ (2.3):

Dado $k \in \mathbb{Z}^n \setminus S$, definimos $\varphi_k(x) = e^{ik \cdot x}$ e temos:

$$|\hat{\varphi}_k(k)| = 1; \quad |\hat{\varphi}_k(j)| = 0 \text{ se } j \neq k$$

Logo, $\|\varphi_k\|_0 = 1$ e então:

$$\|P\varphi_k\|_{2\tau} = \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}^n} (1 + |j|)^{4\tau} |P(j)|^2 |\hat{\varphi}(j)|^2 \right]^{1/2} = (1 + |k|)^{2\tau} |P(k)| \stackrel{(2.2)}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{(2.2)}{\Rightarrow} 1 \leq c_1 (1 + |k|)^{2\tau} |P(k)| \Rightarrow (1 + |k|)^{-2\tau} \leq c_1 |P(k)|$$

• (2.3) $\Rightarrow$ (2.2):

$$\begin{aligned} c_1^2 \|P\varphi\|_{2\tau}^2 &= c_1^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^{4\tau} |P(k)|^2 |\hat{\varphi}(k)|^2 \\ &\geq c_1^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^{4\tau} \frac{(1 + |k|)^{-4\tau}}{c_1^2} |\hat{\varphi}(k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\varphi}(k)|^2 = \|\varphi\|_0^2. \end{aligned}$$

Finalmente, de (2.3) segue a desigualdade (2.1), tomando-se: $c = 1/c_1$ e $\tau_0 = 2\tau > 0$.

Reciprocamente, se vale (2.1), definamos para $f \in C_S^\infty(T^n)$ a função:

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus S} \frac{\hat{f}(k)}{P(k)} e^{ik \cdot x}.$$

Temos que $u \in C_S^\infty(T^n)$, pois $\hat{u}(k) = \hat{f}(k) = 0$ se $k \in S$ e

$$|\hat{u}(k)| = \frac{|\hat{f}(k)|}{|P(k)|} \leq \frac{|\hat{f}(k)|}{c(1 + |k|)^{-\tau_0}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus S$$

e como $f \in C_S^\infty(T^n)$, segue que $u \in C_S^\infty(T^n)$ e além disso, u é solução para a equação $Pu = f$.

□

Como caso particular deste teorema, segue o resultado visto em [Mos]:

Teorema 2.3 *O operador $L = \sum_{j=1}^n \tilde{D}_j^2 : C_0^\infty(T^{n+1}) \rightarrow C_0^\infty(T^{n+1})$, onde $\tilde{D}_j = \partial x_j - \alpha_j \partial x_{n+1}$, $j = 1, \dots, n$, é uma bijeção se, e somente se, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ satisfaz a condição Diofantina:*

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j k_{n+1} - k_j)^2 \geq c_0^{-1} (1 + k_{n+1}^2)^{-\tau} \text{ para } c_0, \tau \geq 0 \text{ e} \quad (2.4)$$

$$\forall k = (k_1, \dots, k_n, k_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$$

Demonstração: Neste caso, é conveniente tomar em $C_0^\infty = C_S^\infty(T^{n+1})$ com $S = \{0\}$, a topologia descrita pelas normas de Sobolev abaixo, a qual coincide com as normas tomadas no teorema(2.2) ¹:

$$\|\varphi\|_r = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^{n+1}} |k|^{2r} |\hat{\varphi}(k)|^2 \right]^{1/2}$$

¹ver Apêndice

onde

$$\varphi = \sum_k \hat{\varphi}(k) e_k \text{ e } \hat{\varphi}(0) = 0.$$

Como L é bijeção, da mesma maneira que no teorema anterior, concluímos que existem constantes $\tau, c_1 > 0$ tais que:

$$\|\varphi\|_0 \leq c_1 \|L\varphi\|_{2\tau}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(T^{n+1}), \quad (2.5)$$

a qual é equivalente à condição:

$$|k|^{-2\tau} \leq c_1 \sum_{j=1}^n (k_j - \alpha_j k_{n+1})^2 = c_1 |L(k)|, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

Afirmção: estas desigualdades implicam (2.4), que é aparentemente mais forte, com $c_0 = \max\{2, c_1(2|\alpha|^2 + 1)^\tau\}$ e $|\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2$.

De fato:

- Se $|\bar{k}|^2 = k_1^2 + \dots + k_n^2 \geq 2|\alpha|^2 k_{n+1}^2 + 1$, então:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (k_j - \alpha_j k_{n+1})^2 &\geq |\bar{k}|^2 - 2|k_{n+1}| \left| \sum_j \alpha_j k_j \right| + k_{n+1}^2 |\alpha|^2 \\ &\geq |\bar{k}|^2 - 2|k_{n+1}| |\alpha| |\bar{k}| + k_{n+1}^2 |\alpha|^2 = (|\bar{k}| - |k_{n+1}| |\alpha|)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} |\bar{k}|^2 - |\alpha|^2 k_{n+1}^2 \geq |\alpha|^2 k_{n+1}^2 + \frac{1}{2} - |\alpha|^2 k_{n+1}^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, (2.4) é trivialmente satisfeita com $c_0 = 2$ e $\tau = 0$.

- Se $|\bar{k}|^2 \leq 2|\alpha|^2 k_{n+1}^2 + 1$, então:

$$|k|^2 = |\bar{k}|^2 + k_{n+1}^2 \leq 2|\alpha|^2 k_{n+1}^2 + 1 + k_{n+1}^2 \leq (2|\alpha|^2 + 1)(k_{n+1}^2 + 1),$$

de modo que (2.6) implica (2.4), com $c_0 \leq c_1(2|\alpha|^2 + 1)^\tau$.

Reciprocamente, a condição (2.4) implica que $L : C_0^\infty \rightarrow C_0^\infty$ é bijeção (– a demonstração é análoga ao que foi feito em (2.2), usando a representação em série de Fourier).

□

Observemos que o teorema (2.2) e o corolário (2.1) nos dizem que, se P é (GH), então P é (GR) em $C^\infty(T^n)$, a menos de um espaço de dimensão finita. Segue, então, o resultado:

Corolário 2.2 P é (GR) em $C^\infty(T^n)$ se, e somente se, ocorrem as duas condições abaixo:

1. P é (GH) em T^n .
2. $P(k) \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}^n$.

Prova: Suponha que P seja (GR) em $C^\infty(T^n)$. Então, $P : C^\infty(T^n) \rightarrow C^\infty(T^n)$ é sobrejetor.

Provemos 2): suponha que exista $k_0 \in S = \{k \in \mathbb{Z}^n : P(k) = 0\}$. Tome $f(x) = e^{ik_0 \cdot x}$. Como P é sobre, existe $u \in C^\infty(T^n)$ tal que $Pu = f$. Logo:

$$P(k_0)\hat{u}(k_0) = \hat{f}(k_0) = 1. \text{ Mas } P(k_0) = 0! \text{ (Absurdo!)}$$

Concluimos, então, que $P(k) \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}^n$.

Afirmção: P é injetor.

De fato: suponha $v \in \text{Ker} P$, i.e., $Pv = 0 \Rightarrow P(k)v(k) = 0 \Rightarrow \hat{v}(k) = 0, \forall k \Rightarrow v = 0$.

Pelo teorema (2.2), para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, vale:

$$|P(k)| \geq C(1 + |k|)^{-\tau_0}, \text{ para alguma constante } c > 0 \text{ e } \tau_0 > 0,$$

o que equivale à condição (LM) de (2.1), i.e., existem constantes $L, M > 0$ tais que:

$$|P(k)| \geq \frac{L}{|k|^M}, \text{ para } |k| \text{ suficientemente grande.}$$

Portanto, P é (GH) e assim, para todo $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ tal que $Pu = f \in C^\infty(T^n)$, temos que $u \in C^\infty(T^n)$.

Reciprocamente, se valem (1) e (2), então $|P(k)| \geq \frac{L}{|k|^M}$ para $|k|$ suficientemente grande (digamos, $|k| \geq R > 0$) e como $P(k) \neq 0, \forall k$, existem constantes $C > 0$ e $\tau_0 > 0$ tais que:

$$|P(k)| \geq C(1 + |k|)^{-\tau_0}, \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

De fato: para $|k| \geq R$, são equivalentes:

$$|P(k)| \geq \frac{L}{|k|^M}$$

e

$$|P(k)| \geq \frac{L_1}{(1 + |k|)^M}, \quad M > 0, \text{ onde } L, L_1 \text{ são positivos.}$$

Seja o conjunto $A = \{k \in \mathbb{Z}^n; |k| < R\} = \{k^{(1)}, \dots, k^{(s)}\}$.

Tome

$$0 < C < \min\{L_1, |P(k_j)|(1 + |k^{(j)}|)^{\tau_0}; j = 1, \dots, s\}$$

e teremos :

$$|P(k^{(j)})| \geq C(1 + |k^{(j)}|)^{\tau_0}, \quad j = 1, \dots, s.$$

Concluimos, pelo teorema(2.2), que $P : C^\infty(T^n) \rightarrow C^\infty(T^n)$ é uma bijeção, i.e, P é (GR) em T^n .

□

Com isso, vemos que o operador L do teorema (2.3) não é (GR) em $C^\infty(T^{n+1})$.

2.3 Exemplos de operadores (GH) e operadores (GR)

Um exemplo interessante a ser analisado envolve o conceito de *número de Liouville*:

Definição 2.2 Um número irracional α é de Liouville se, para todo $N \in \mathbb{N}$, existem $K > 0$ e uma infinidade de pares $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ tais que:

$$\left| \alpha - \frac{n}{m} \right| < \frac{K}{m^N}.$$

Consideremos o operador $P : C^\infty(T^2) \rightarrow C^\infty(T^2)$, dado por:

$$P = D_1 - \alpha D_2, \text{ onde } D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, 2.$$

Teorema 2.4 a) Se $\alpha = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, então P é (GH) em T^2 .

b) Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então P não é (GH).

c) Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então P é (GH) se, e somente se, α é não-Liouville.

Demonstração: a) Para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $|n| \geq 1/|b|$, temos :

$$|P(m, n)|^2 = |m - (a + ib)n|^2 = |m - an + ibn|^2 = (m - an)^2 + b^2 n^2 \geq b^2 n^2 \geq 1.$$

Pelo teorema (2.1), P é (GH).

b) Seja $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Então, para qualquer inteiro m , temos:

$$P(mp, mq) = mp - \frac{p}{q} \cdot mq = 0,$$

ou seja, P tem uma infinidade de zeros inteiros e, pelo teorema (2.1), segue que P não é (GH).

c) Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é de Liouville, então, para todo $M \in \mathbb{N}$ existe $L > 0$ e uma sequência $(m_j, n_j) \in \mathbb{Z}^2$, onde podemos supor $m_j > 0$ e $m_j \rightarrow \infty$, tais que:

$$\left| \alpha - \frac{n_j}{m_j} \right| < \frac{L}{m_j^M}.$$

Logo, $|P(n_j, m_j)| = |\alpha m_j - n_j| < L/m_j^{M-1}$ (*)

Como $m_j \rightarrow \infty$, supomos $L/m_j^{M-1} < 1$.

Assim:

$$|n_j| - |\alpha|m_j \leq |\alpha m_j - n_j| < \frac{L}{m_j^{M-1}} = m_j \frac{L}{m_j^M} < m_j.$$

Portanto, $|n_j| \leq (1 + |\alpha|)m_j$, donde:

$$n_j^2 + m_j^2 \leq [1 + (1 + |\alpha|)^2] m_j^2$$

$$(n_j^2 + m_j^2)^{\frac{M-1}{2}} \leq [1 + (1 + |\alpha|)^2]^{\frac{M-1}{2}} m_j^{M-1}$$

e

$$\frac{1}{m_j^{M-1}} \leq \frac{[1 + (1 + |\alpha|)^2]^{\frac{M-1}{2}}}{(n_j^2 + m_j^2)^{\frac{M-1}{2}}}.$$

De (*), segue que:

$$|P(n_j, m_j)| < \frac{L[1 + (1 + |\alpha|)^2]^{\frac{M-1}{2}}}{(m_j^2 + n_j^2)^{\frac{M-1}{2}}};$$

escolhemos, então, L', M' tais que:

$$\frac{L[1 + (1 + |\alpha|)^2]^{\frac{M-1}{2}}}{(m_j^2 + n_j^2)^{\frac{M-1}{2}}} < \frac{L'}{(m_j^2 + n_j^2)^{M'}}$$

e pelo teorema(2.1), P não é (GH).

Suponhamos, agora, que P não seja (GH).

Então, para todo $L > 0$ e $j \in \mathbb{N}$, existe $(n_j, m_j) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $|n_j| \rightarrow \infty$, $m_j > 0$ e $m_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$ e

$$|P(n_j, m_j)| < \frac{L}{(n_j^2 + m_j^2)^j} \leq \frac{L}{m_j^{2j}}.$$

Assim:

$$|\alpha m_j - n_j| < \frac{L}{m_j^{2j}} \Rightarrow$$

$$\left| \alpha - \frac{n_j}{m_j} \right| < \frac{L}{m_j^{2j-1}},$$

ou seja, α é de Liouville.

□

Observação 2.1 Em [Zan] foi visto o seguinte resultado:

$$\text{Se } P = a_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_m \frac{\partial}{\partial y} \right), \text{ com } a_0 \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0$$

então P é (GH) se, e somente se, α_i é irracional não-Liouville, para todo $i = 1, \dots, m$.

Assim, o operador $P = (D_1 - \alpha D_2)^2$ é um exemplo que ilustra este resultado, se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é não-Liouville. A este mesmo operador se aplica o teorema (2.3), com $n = 1$, ou seja, $P : C_0^\infty(T^2) \rightarrow C_0^\infty(T^2)$ é uma bijeção se, e somente se, existem constantes $c_0 > 0$ e $\tau_0 > 0$ tais que:

$$(\alpha k_2 - k_1)^2 \geq c_0^{-1} (1 + k_2^2)^{-\tau_0}, \quad \forall (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\},$$

o que é equivalente a α ser um irracional não-Liouville.

Com efeito,

$$k_2^2 \left(\alpha - \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \geq c_0^{-1} (1 + k_2^2)^{-\tau_0} \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \geq c_0^{-1} \frac{(1 + k_2^2)^{-\tau_0}}{k_2^2} \quad (2.7)$$

Mostremos que (2.7) $\Leftrightarrow \alpha$ é não-Liouville:

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{k_1}{k_2} \right)^2 &\geq c_0^{-1} \frac{(1 + k_2^2)^{-\tau_0}}{(1 + k_2^2)^2} = c_0^{-1} (1 + k_2^2)^{-(\tau_0+2)} \\ &\Rightarrow \left| \alpha - \frac{k_1}{k_2} \right| \geq c_0^{-1/2} (1 + k_2^2)^{-(\tau_0+2)/2}. \end{aligned}$$

E, para $k_2 \in \mathbb{Z}$; $k_2^2 \geq 1$, temos:

$$1 + k_2^2 \leq 2k_2^2 \Rightarrow (1 + k_2^2)^{-1} \geq 2^{-1} \cdot k_2^{-2}.$$

Logo:

$$\left| \alpha - \frac{k_1}{k_2} \right| \geq c_0^{-1/2} \cdot 2^{-1} \cdot (k_2^{-2})^{(\tau_0+2)/2} = 2^{-1} c_0^{-1} \cdot k_2^{-(\tau_0+2)}, \text{ para } k_2^2 \geq 1.$$

Portanto:

$$\exists c = 2^{-1} c_0^{-1} > 0 \text{ e } \tau = \tau_0 + 2 > 0 \text{ t.q. } \left| \alpha - \frac{k_1}{k_2} \right| \geq c k_2^{-\tau}, \text{ se } |k_2| \geq 1,$$

ou seja, α não é Liouville.

Reciprocamente, se α não é Liouville, então existem $c_1, c_2 > 0$ e $\tau > 0$ tais que:

$$\left| \alpha - \frac{k_1}{k_2} \right| \geq c_1 |k_2|^{-\tau}, \text{ para } |k_2| \geq c_2$$

(podemos supor $c_2 \geq 1$).

Mas

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{k_1}{k_2} \right| &\geq c_1 |k_2|^{-\tau} = c_1 (k_2^2)^{-\tau/2} \geq c_1 (1 + k_2^2)^{-\tau/2} \Rightarrow \\ \left| \alpha - \frac{k_1}{k_2} \right| &\geq c_1 \frac{(1 + k_2^2)^{-\tau/2}}{k_2^2}, \text{ para } k_2^2 \geq 1. \end{aligned}$$

Seja $A = \{k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; |k_2| < c_2\} = \{k_2^{(1)}, \dots, k_2^{(s)}\}$.

Tomemos $\tau_0 = \tau/2$ e

$$c_0^{-1} = \min \left\{ c_1; \left| \alpha - \frac{k_1}{k_2} \right| k_2^2 (1 + k_2^2)^{\tau/2} \mid k_2 \in A, k_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} > 0,$$

pois $0 \notin A$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Assim,

$$\left| \alpha - \frac{k_1}{k_2} \right| \geq c_0^{-1} \frac{(1 + k_2^2)^{-\tau_0}}{k_2^2}, \text{ para todo } (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}.$$

□

Com base nestes resultados e no fato de que $\alpha = \sqrt{p}$, p primo, é um número irracional não-Liouville ², podemos observar os seguintes operadores:

²Referências: [Berg], [Zan]

2.3.1 Exemplo 1

Seja $\alpha = \sqrt{p}$, com p primo.

Então o operador: $P = (D_1 - \alpha D_2)^2$ é (GH) em T^2 e, além disso, $P : C_0^\infty(T^2) \rightarrow C_0^\infty(T^2)$ é uma bijeção.

2.3.2 Exemplo 2

Seja $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}$, o qual é um número de Liouville. Então o operador $(\partial x - \alpha \partial y)^2$ não é (GH) e, portanto, não é uma bijeção em $C_0^\infty(T^2)$.³

2.3.3 Exemplo 3

Seja

$$L : C_0^\infty(T^3) \rightarrow C_0^\infty(T^3) \quad (n = 2)$$

$$L = \tilde{D}_1^2 + \tilde{D}_2^2 = (\partial x_1 - \alpha_1 \partial x_3)^2 + (\partial x_2 - \alpha_2 \partial x_3)^2, \text{ com } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \text{ e não-Liouville.}$$

Mostraremos que α_1 e α_2 satisfazem à condição Diofantina em (2.3) e assim concluímos que L é uma bijeção em $C_0^\infty(T^3)$. Do corolário (2.2), concluímos que L é (GH) em T^3 e, além disso, podemos ver que $L(k) \neq 0$, $\forall k \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}$.

Com efeito, se α_1, α_2 são irracionais não-Liouville, então, pela observação (2.1), existem $c_0, \tau_0 > 0$ e $c_1, \tau_1 > 0$ tais que:

$$(k_1 - \alpha_1 k_3)^2 \geq c_0^{-1} (1 + k_3^2)^{-\tau_0}, \quad \forall (k_1, k_3) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}$$

e

$$(k_2 - \alpha_2 k_3)^2 \geq c_1^{-1} (1 + k_3^2)^{-\tau_1}, \quad \forall (k_2, k_3) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}.$$

Logo:

$$\sum_{j=1}^2 (k_j - \alpha_j k_3)^2 \geq c_0^{-1} (1 + k_3^2)^{-\tau_0} + c_1^{-1} (1 + k_3^2)^{-\tau_1}, \quad \forall (k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}.$$

Tomemos $\tau = \max\{\tau_0, \tau_1\}$. Daí:

³Referência: [Berg]

$$\sum_{j=1}^2 (k_j - \alpha_j k_3)^2 \geq (c_0^{-1} + c_1^{-1})(1 + k_3^2)^{-\tau} \geq c^{-1}(1 + k_3^2)^{-\tau}, \forall k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\},$$

$$\text{com } c^{-1} = 2 \min\{c_0^{-1}, c_1^{-1}\}.$$

□

2.3.4 Exemplo 4

Como foi visto no exemplo anterior, podemos generalizar o operador L para dimensões mais altas:

Seja $L : C_0^\infty(T^{n+1}) \rightarrow C_0^\infty(T^{n+1})$, dado por:

$$L = \sum_{j=1}^n (\partial x_j - \alpha_j \partial x_{n+1})^2,$$

com α_j irracional não-Liouville para todo $j = 1, \dots, n$. Então, L é bijeção, é (GH) em T^{n+1} e $L(k) \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Observação 2.2 Se $L = \sum_{j=1}^n (\partial x_j - \alpha_j \partial x_{n+1})^2$ em $C_0^\infty(T^{n+1})$ tiver algum $\alpha_{i_0} = p/q \in \mathbb{Q}$, L pode deixar de ser injetor. Por exemplo, se $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ e $L = \sum_{j=1}^n (\partial x_j - \alpha \partial x_{n+1})^2$, existem infinitos $k \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$ tais que $e_k \in \text{Ker } L$.

De fato: se $u \in \text{Ker } L$ e $\hat{u}(k) \neq 0$ para algum $k \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$, então :

$$\sum_{j=1}^n (k_j - \alpha k_{n+1})^2 = 0 \Leftrightarrow k_j - \alpha k_{n+1} = 0, j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow k_j - \frac{p}{q} k_{n+1} = 0.$$

Logo, se $k \in \mathbb{Z}^{n+1}$ e é da forma $k = (lp, \dots, lp, lq)$, com $l \in \mathbb{Z}$, então $e_k \in \text{Ker } L$, pois:

$$\begin{aligned} Le_k(x) &= \sum_{j=1}^n (\partial x_j - \frac{p}{q} \partial x_{n+1})^2 \cdot e^{i \cdot (lp x_1 + \dots + lp x_n + lq x_{n+1})} = \\ &= i \sum_{j=1}^n (lp - \frac{p}{q} lq)^2 e^{i \cdot (lp x_1 + \dots + lp x_n + lq x_{n+1})} = 0 \end{aligned}$$

Este operador nos fornece um caso em que $\dim \text{Ker} L$ não é finita e podemos ver que a ele não se aplica o teorema (2.2), uma vez que $S = \{k \in \mathbb{Z}^{n+1}; L(k) = 0\} = \{k = (lp, \dots, lp, lq); l \in \mathbb{Z}\}$ e $\#S = \#\mathbb{N} = \aleph_0$.

Um outro exemplo em que o operador P tem $\dim \text{Ker} P = \infty$, e que não é (GH) em T^2 , é dado a seguir, mas veremos que P pode ser resolúvel, i.e., $P : \mathcal{D}'(T^2) \rightarrow \mathcal{D}'(T^2)$ pode ser sobrejetor, se restringirmos o contra-domínio a um subespaço de $C^\infty(T^2)$:

2.3.5 Exemplo 5

Seja $P = D_1 = -i \frac{\partial}{\partial x_1}$ definido em $\mathcal{D}'(T^2)$. É claro que $P = D_1 - 0D_2$ não é (GH).

Temos $S = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2; P(k_1, k_2) = 0\} = \{(0, k_2); k_2 \in \mathbb{Z}\}$ e $\text{Ker} P = [e_j; j = (0, k_2) \in S]$. Logo $\dim \text{Ker} P = \infty$. Consideremos

$$C_S^\infty(T^2) = \{f \in C^\infty(T^2); \hat{f}(0, m) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}\} = \{f - \pi_S f; f \in C^\infty(T^2)\}.$$

Para que, dada $f \in C^\infty(T^2)$, exista $u \in \mathcal{D}'(T^2)$ tal que $Pu = f$, devemos ter:

$$\begin{aligned} D_1 u &= -i \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \Rightarrow \\ u(x_1, x_2) &= i \int_0^{x_1} f(t, x_2) dt + g(x_2), \end{aligned}$$

onde g deve ser 2π -periódica.

Para que u seja 2π -periódica em cada variável, é necessário e suficiente que:

$$u(x_1 + 2\pi, x_2) = u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2 + 2\pi), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

No caso em que u é solução da equação acima temos:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2 + 2\pi) &= i \int_0^{x_1} f(t, x_2 + 2\pi) dt + g(x_2 + 2\pi) \\ &= \int_0^{x_1} f(t, x_2) dt + g(x_2) = u(x_1, x_2), \forall x_1, x_2. \end{aligned}$$

Ainda:

$$\begin{aligned}
u(x_1 + 2\pi, x_2) &= u(x_1, x_2) \Leftrightarrow \\
\int_0^{x_1+2\pi} f(t, x_2) dt &= \int_0^{x_1} f(t, x_2) dt \Leftrightarrow \\
\int_0^{x_1} f(t, x_2) dt + \int_{x_1}^{x_1+2\pi} f(t, x_2) dt &= \int_0^{x_1} f(t, x_2) dt \Leftrightarrow \\
\int_{x_1}^{x_1+2\pi} f(t, x_2) dt &= 0
\end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_1+2\pi} f(t, x_2) dt &\stackrel{0 < x_1 < 2\pi}{=} \int_{x_1}^{2\pi} f(t, x_2) dt + \int_{2\pi}^{2\pi+x_1} f(t, x_2) dt \stackrel{y=t-2\pi}{=} \\
&= \int_{x_1}^{2\pi} f(t, x_2) dt + \int_0^{x_1} f(y+2\pi, x_2) dy \\
&= \int_{x_1}^{2\pi} f(t, x_2) dt + \int_0^{x_1} f(y, x_2) dy = \int_0^{2\pi} f(t, x_2) dt
\end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x_1 + 2\pi, x_2) = u(x_1, x_2) \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} f(t, x_2) dt = 0.$$

E temos:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} f(t, x_2) dt = c \int_0^{2\pi} e^{imx_2} dx_2 \cdot \left[\int_0^{2\pi} e^{i \cdot 0 \cdot x_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right] \\
&= c \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(0x_1+mx_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = c \hat{f}(0, m), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Portanto $u \in \mathcal{D}'(T^2) \Leftrightarrow f \in C_S^\infty(T^2)$.

Porém, mesmo que $f \in C_S^\infty$, não podemos garantir que $u \in C_S^\infty$, uma vez que o operador não é (GH). Por exemplo, $f \equiv 0 \in C_S^\infty(T^2)$;

$$u(x_1, x_2) = |\cos x_2|^3 \in \mathcal{D}'(T^2) \setminus C^\infty(T^2) \text{ e } Pu = D_1(|\cos x_2|^3) = 0.$$

O exemplo que segue fornece um operador que não é (GH) em T^2 e não é resolúvel em $\mathcal{D}'(T^2)$.

2.3.6 Exemplo 6

Seja $P = D_1 - \alpha D_2$, com α irracional Liouville.

Definimos $S = \{(k_1, k_2); P(k_1, k_2) = 0\} = \{(0, 0)\}$ e $\text{Ker} P = \{c; c \in \mathbb{R}\} = [e_0 = 1]$.

Como já foi visto, P não é (GH).

Afirmção : é possível construir $f \in C^\infty(T^2)$ de modo que não exista $u \in \mathcal{D}'(T^2)$ tal que $Pu = f$.

De fato: como α é Liouville, existe uma sequência $(m_j, n_j) \in \mathbb{Z}^2$ tal que:

$$(m_j, n_j) \rightarrow \infty \text{ quando } j \rightarrow \infty \text{ e } |P(m_j, n_j)| \leq \frac{1}{(m_j^2 + n_j^2)^j}.$$

Tomemos

$$f(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{(m_j^2 + n_j^2)^{j/2}} e^{i(m_j x + n_j y)}$$

e assim teremos:

$$\begin{cases} \hat{f}(m, n) = 0 & \text{se } (m, n) \neq (m_j, n_j) \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \\ \hat{f}(m_j, n_j) = \frac{1}{(n_j^2 + m_j^2)^{j/2}} & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

• $f \in C^\infty(T^2)$, pois:

$$\begin{aligned} \sup_{(m, n)} \left\{ \frac{|\hat{f}(m, n)|}{(n^2 + m^2 + 1)^k} \right\} &= \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{|\hat{f}(m_j, n_j)|}{(n_j^2 + m_j^2 + 1)^k} \right\} = \\ &= \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{(n_j^2 + m_j^2 + 1)^k (n_j^2 + m_j^2)^{j/2}} \right\} < \infty, \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Suponhamos que exista $u \in \mathcal{D}'(T^2)$ tal que $Pu = f$. Então:

$$P(m, n)\hat{u}(m, n) = \hat{f}(m, n), \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Em particular:

$$\begin{aligned} |\hat{u}(m_j, n_j)| &= \frac{|\hat{f}(m_j, n_j)|}{|P(m_j, n_j)|} \\ &\geq \frac{(n_j^2 + m_j^2)^j}{(n_j^2 + m_j^2)^{j/2}} = (n_j^2 + m_j^2)^{j/2} \rightarrow \infty \text{ quando } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Vemos, então, que $(\hat{u}(m_j, n_j))_{j \in \mathbb{N}}$ não tem crescimento lento (Absurdo!).

Capítulo 3

Hipoeliticidade Global para uma Classe de Operadores em T^n com Coeficientes Variáveis

Neste capítulo serão vistos resultados de [Yos] sobre hipoeliticidade global para operadores em T^n , $n \geq 2$, da forma:

$$P = p(D_1^2) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1}$$

onde $p(t)$ é um polinômio a valores complexos de ordem $m \geq 1$, $t \in \mathbf{R}$ e $a = \pm 1$, o qual deverá satisfazer a certas hipóteses. Observamos que este tipo de operador tem a parte principal (derivadas de maior ordem) a coeficientes constantes e o único coeficiente variável é o termo de ordem zero. Ressaltamos, ainda, que a hipoeliticidade global de um operador mais geral também foi abordada em [Yos], embora sob diferentes hipóteses; porém, seu estudo detalhado não será incluído neste trabalho. Este resultado será mencionado na seção (3.5) (teorema 3.3) e foi deixado como objeto de estudos futuros.

O teorema central será abordado nas seções (3.1) e (3.3), sendo demonstrado nesta última.

A seção (3.2) tratará de resultados relativos a uma equação de diferenças da forma:

$$v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

onde $a_j, f_j \in \mathbf{C}$. Esta equação surgirá ao longo de várias demonstrações.

Na seção (3.4) serão feitas algumas observações relevantes acerca do teorema principal e sua prova.

Um outro resultado, cuja demonstração seguirá os moldes da seção (3.3), será visto na seção (3.5), agora para um operador da forma:

$$Q = q(D') + 2 \cos x_1,$$

onde :

$$q(D') = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^{n-1} \\ |\alpha| \leq m}} c_\alpha D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} \text{ e } D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 2, \dots, n.$$

3.1 Hipoeliticidade Global para um Operador da forma: $P = p(D_1^2) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1}$

Seja $p(t)$ um polinômio de ordem $m \geq 1$, com $t \in \mathbf{R}$ e $a = \pm 1$. Consideremos a equação:

$$Pu = \left(p(D_1^2) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1} \right) u(x) = f(x) \text{ em } T^n, \quad n \geq 2.$$

Suponhamos que p satisfaça as seguintes condições:

$$(A.1) \quad p(0) = 0; \quad |p(1)| \geq 1; \quad |p(t^2)| > 2 \text{ se } t \geq 2, t \in \mathbf{N}.$$

É fácil ver que P não é elítico, pois:

$$P_m(k) = p_m(k_1^2) = 0, \text{ para todo } k = (0, k_2, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n.$$

Afirmção: P também não é hipoelítico.

De fato, existe um aberto $\Omega \subset T^1$ e existe $v(x_1) \not\equiv 0 \in C^\infty(\Omega)$ tal que $Pv = 0$.

Com efeito, se procurarmos $v(x_1)$ tal que $(p(D_1^2) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1})v(x_1) = 0$, com as condições iniciais: $v(0) = 0$; $v'(0) = 0$; $\dots$, $v^{(2m-1)}(0) = 1$, teremos, agora, um problema de equações diferenciais ordinárias, o qual sabemos admitir solução

$v(x_1) \in C^{2m}$ em uma vizinhança (Ω) da origem, pois todos os coeficientes são C^∞ (ver (1.5.3)). Observando o símbolo deste operador agindo em uma única variável, x_1 , temos:

$$P_m(k_1) = p_m(k_1^2) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0.$$

Logo, ele é elítico quando agindo somente em x_1 e, portanto, $v(x_1) \in C^\infty(\Omega)$.

Tomando $w(x') = w(x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}'(T^n) \setminus C^\infty(T^n)$ e $u(x) = v(x_1)w(x')$, teremos:

$$\begin{aligned} Pu &= p(D_1^2)v(x_1)w(x') + [e^{ix_1} + ae^{-ix_1}]v(x_1)w(x') = \\ &= w(x') \cdot \left[\left(p(D_1^2) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1} \right) v(x_1) \right] = w(x') \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, u é solução para a equação $Pu = 0$, mas $u \notin C^\infty$, ou seja, P não é (H).

□

Entretanto, o operador P é (GH), como mostra o resultado a seguir:

Teorema 3.1 *Seja $P = p(D_1^2) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1}$ e suponhamos que as condições (A.1) sejam válidas. Então, P é (GH) em T^n .*

Antes de demonstrarmos o teorema, analisemos alguns exemplos:

3.1.1 Exemplo 1

Se $a = 1$ e $p(t) = t$, o operador P fica:

$$P = D_1^2 + 2 \cos x_1,$$

o qual é (GH) em T^2 , pois $p(t)$ satisfaz as condições (A.1). Ainda, se $0 < r \leq 1$, consideremos o operador:

$$P = D_1^2 + 2r \cos x_1.$$

Neste caso, ainda podemos aplicar o teorema anterior, uma vez que:

$$P = r \left(\frac{D_1^2}{r} + 2 \cos x_1 \right) \text{ e } \tilde{p}(t) = \frac{t}{r}$$

ainda satisfaz as hipóteses em (A.1):

$$\tilde{p}(0) = 0; |\tilde{p}(1)| = \frac{1}{r} \geq 1; |\tilde{p}(t^2)| = \frac{t^2}{r} \geq t^2 > 2, \text{ se } t \in \mathbb{N}, t \geq 2.$$

3.1.2 Exemplo 2

Se $a = -1$, $p(t) = t$, o operador P fica:

$$P = D_1^2 + 2isenx_1$$

e é (GH) em T^2 .

Como foi visto no exemplo anterior, o teorema também se aplica ao operador

$$P = D_1^2 + 2risenx_1, \text{ quando } 0 < r \leq 1.$$

Os casos dos exemplos anteriores, com $r > 1$, serão analisados posteriormente.

3.1.3 Exemplo 3

O polinômio p pode apresentar coeficientes complexos, desde que satisfaça as condições (A.1):

Se $p(t) = t^2 + 4it$, temos: $p(0) = 0$; $|p(1)| = \sqrt{1 + 4^2} \geq 1$ e

$$|p(t^2)| = \sqrt{t^4 + 16t^2} = |t|\sqrt{16 + t^2} > 2, \text{ se } t \geq 2, t \in \mathbb{N}.$$

Logo, o operador $P = D_1^4 + 4iD_1^2 + e^{ix_1} + ae^{-ix_1}$, com $a = \pm 1$, é (GH) em T^n , $n \geq 2$.

Assim, conseguimos uma classe significativa de operadores de ordem maior ou igual a 2 que é (GH), enquanto que no capítulo anterior, os exemplos mais facilmente encontrados tinham apenas ordem 2, em sua maioria.

3.2 Alguns Resultados sobre uma Equação de Diferenças

Na demonstração do teorema (3.1) serão utilizados alguns resultados envolvendo a resolução de uma equação de diferenças da forma:

$$v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ com } a_j, f_j \in \mathbb{C} \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Nesta seção trataremos destes resultados:

Lema 3.1 Definamos, para $j = 1, 2, \dots$:

$$\begin{cases} p_{j+2} = a_j(\sigma)p_{j+1} + p_j; & p_1 = 1; & p_2 = 0 \\ q_{j+2} = a_j(\sigma)q_{j+1} + q_j; & q_1 = 0; & q_2 = 1 \end{cases} e$$

onde $a_j(\sigma) \in \mathbb{C}$ e depende de um parâmetro $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

Então, $\forall j = 1, 2, \dots$ e $\forall \sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$, vale:

$$p_{j+1}q_j - p_jq_{j+1} = (-1)^j.$$

Prova: Usaremos indução finita:

- para $j = 1$, temos: $p_2q_1 - q_2p_1 = 0 - 1 = -1$.
- suponhamos que a equação anterior seja válida para $j = s \in \mathbb{N}$ e mostremos que também é válida para $j = s + 1$:

$$\begin{aligned} p_{s+2}q_{s+1} - p_{s+1}q_{s+2} &= (a_s(\sigma)p_{s+1} + p_s)q_{s+1} - p_{s+1}(a_s(\sigma)q_{s+1} + q_s) \\ &= a_s(\sigma)p_{s+1}q_{s+1} + p_sq_{s+1} - a_s(\sigma)p_{s+1}q_{s+1} - p_{s+1}q_s \\ &= -(p_{s+1}q_s - p_sq_{s+1}) = -(-1)^s = (-1)^{s+1}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2 Sejam p_j, q_j definidos como no lema (3.1) e suponha que exista $K > 1$, independente de j e σ , tal que:

$$|a_1(\sigma)| \geq 1 \text{ e } |a_j(\sigma)| \geq 1 + K \text{ para } j \geq 2 \text{ e para todo } \sigma \in \mathbb{Z}^n.$$

Então, para todo $j \geq 4$, vale:

$$|q_j| \geq K^{j-3}; \quad |p_j| \geq K^{j-3}.$$

Prova: Da definição de p_j e q_j , como $|a_1| \geq 1$ e $|a_j| \geq 1 + K$, $j \geq 2$, temos:

$$|q_3| = |a_1 q_2 + q_1| = |a_1| \geq 1.$$

$$|q_4| = |a_2 q_3 + q_2| = |q_3| \left| a_2 + \frac{q_2}{q_3} \right| \geq |q_3| (|a_2| - 1) \geq K.$$

Suponha, agora, que $|q_j| \geq K^{j-3}$ para todo $4 \leq j \leq N$. Então:

$$\begin{aligned} |q_{N+1}| &= |a_{N-1} q_N + q_{N-1}| \geq |q_N| \left| |a_{N-1}| - \frac{|q_{N-1}|}{|q_N|} \right| \geq \\ &\geq K^{N-3} (|a_{N-1}| - 1) \geq K^{N-2}. \end{aligned}$$

A desigualdade para os p'_j s segue de maneira análoga. $\square$

Observação 3.1 *Uma desigualdade válida que será bastante utilizada e que segue da demonstração anterior é:*

se $j \geq 4$ e $r \in \mathbb{N}$:

$$|q_{j+r}| = |a_{j+r-2} q_{j+r-1} + q_{j+r-2}| \geq |q_{j+r-1}| (|a_{j+r-2}| - 1) \geq |q_{j+r-1}| \cdot K.$$

Do mesmo modo, podemos ver que: $|q_{j+r-1}| \geq K \cdot |q_{j+r-2}|$ e assim sucessivamente.

Logo:

$$|q_{j+r}| \geq K^r |q_j|.$$

E o mesmo vale para p_j :

$$|p_{j+r}| \geq K^r |p_j|.$$

Lema 3.3 *Definimos:*

$$t = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{q_j q_{j+1}},$$

onde q_j é definido como no lema (3.1). Então, sob as hipóteses do lema (3.2), existem $K_0 > 0$ e $j_0 \geq 1$, independentes de j e σ , tais que:

$$|p_j - t q_j| \leq K_0 |q_j|^{-1}, \quad \forall j \geq j_0.$$

Prova: t está bem definido, uma vez que, para $j \geq 4$, temos :

$$\frac{1}{|q_j||q_{j+1}|} \leq \frac{1}{K^{j-3}K^{j-2}} = \frac{1}{K^{2j-5}};$$

e $2j - 5 \geq 2, \forall j \geq 4$ e $K > 1$.

É fácil ver que, para p_j e q_j definidos como no lema (3.1), vale:

$$\frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} = \sum_{k=2}^j \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}} + \frac{p_2}{q_2} = \sum_{k=2}^j \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}} \text{ pois } p_2 = 0$$

Para isto, foi usada, recursivamente, a igualdade:

$$\frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} - \frac{p_j}{q_j} = \frac{(-1)^j}{q_j q_{j+1}}.$$

E temos:

$$\begin{aligned} \left| t - \frac{p_j}{q_j} \right| &\leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{|q_k||q_{k+1}|} \\ &= \frac{1}{|q_j|^2} \left[\frac{|q_j|^2}{|q_j q_{j+1}|} + \frac{|q_j|^2}{|q_{j+1} q_{j+2}|} + \dots \right] \end{aligned}$$

e para $j \geq j_0 = 4$, vale a desigualdade da observação (3.1) e assim:

$$\frac{|q_j|^2}{|q_{j+r} q_{j+r+1}|} \leq \frac{|q_j|^2}{K^r K^{r+1} |q_j|^2} = \frac{1}{K^{2r+1}}$$

e portanto:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|q_j|^2}{|q_{j+r} q_{j+r+1}|} \leq \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{K^{2r}} = K_0 < \infty, \text{ pois } K > 1.$$

Logo:

$$|p_j - tq_j| = |q_j| \left| t - \frac{p_j}{q_j} \right| \leq |q_j| \frac{K_0}{|q_j|^2} = K_0 |q_j|^{-1}, \quad j \geq j_0.$$

□

Observação 3.2 t definido no lema (3.3) é não-nulo.

Com efeito, se t fosse nulo, teríamos: para $j \geq j_0 \geq 4$,

$$K^{j-3} \leq |p_j| \leq K_0 |q_j|^{-1} \leq \frac{K_0}{K^{j-3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow K_0 \geq K^{2(j-3)} \rightarrow \infty \text{ quando } j \rightarrow \infty \text{ (Absurdo!).}$$

Lema 3.4 Consideremos a equação de diferenças:

$$v_{j+2} = a_j(\sigma)v_{j+1} + v_j - f_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

com valores iniciais $v_1 = \alpha$; $v_2 = \beta$. Então, uma solução para (3.1) é:

$$(*) \begin{cases} v_j = \alpha p_j + \beta q_j + \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots \\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \text{ e se } j \geq 3: \\ \varphi_j = \sum_{\nu=1}^{j-3} f_\nu \cdot (-1)^\nu \{p_j q_{\nu+1} - q_j p_{\nu+1}\} - f_{j-2} = \\ = (p_j - tq_j) \sum_{\nu=1}^{j-3} f_\nu \cdot (-1)^\nu q_{\nu+1} + q_j \left\{ \gamma_1 - \sum_{\nu=1}^{j-3} f_\nu \cdot (-1)^\nu (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}) \right\} - \\ - f_{j-2} - \gamma_1 q_j \equiv T_1 + T_2 - f_{j-2} - \gamma_1 q_j \end{cases}$$

onde os p'_j s e q'_j s são definidos como no lema (3.1) e:

$$\gamma_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \cdot (-1)^\nu (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}).$$

Prova: Primeiro, observemos que, na expressão de φ_j , a segunda igualdade foi obtida somando-se e subtraindo-se os termos: $\left(tq_j \cdot \sum_{\nu=1}^{j-3} f_\nu (-1)^\nu q_{\nu+1} \right)$ e $(\gamma_1 q_j)$; na terceira igualdade, tomamos $T_1 = (p_j - tq_j) \sum_{\nu=1}^{j-3} f_\nu (-1)^\nu q_{\nu+1}$ e $T_2 = q_j \left\{ \gamma_1 - \sum_{\nu=1}^{j-3} f_\nu (-1)^\nu (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}) \right\}$.

É fácil ver que $v'_j = \alpha p_j + \beta q_j$ é solução da equação (3.1) se $f_j = 0$, $\forall j = 1, 2, \dots$

Definimos:

$$A_{j,\nu} = p_j q_\nu - p_\nu q_j.$$

Temos que $A_{j,j} = 0$ e pelo lema (3.1):

$$A_{j+1,j} = (-1)^j; A_{j,j-1} = (-1)^{j-1}, \dots$$

Ainda se $j = 1, 2, \dots, \forall \nu \in \mathbb{N}$, vale:

$$\begin{aligned} A_{j+2,\nu} &= p_{j+2}q_\nu - p_\nu q_{j+2} = (a_j p_{j+1} + p_j)q_\nu - p_\nu(a_j q_{j+1} + q_j) \\ &= a_j(p_{j+1}q_\nu - p_\nu q_{j+1}) + (p_j q_\nu - p_\nu q_j) \\ &= a_j A_{j+1,\nu} + A_{j,\nu} \end{aligned}$$

Suponhamos, agora, por indução, que $v_j = \alpha p_j + \beta q_j + \varphi_j$, $j = 1, 2, \dots$ seja solução da equação (3.1) se $j \leq N$, i.e., suponhamos que tais v'_j s satisfaçam:

$$v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j, \quad j \leq N$$

Mostremos que $v_{N+1} = \alpha p_{N+1} + \beta q_{N+1} + \varphi_{N+1}$ também satisfaz à equação (3.1):

De fato:

$$\begin{aligned} v_{N+1+2} &= v_{N+3} = \alpha p_{N+3} + \beta q_{N+3} + \varphi_{N+3} = \\ &= \alpha \left(a_{N+1} p_{N+2} + p_{N+1} \right) + \beta \left(a_{N+1} q_{N+2} + q_{N+1} \right) + \sum_{\nu=2}^{N+3-2} f_{\nu-1} (-1)^{\nu-1} A_{N+3,\nu} - f_{N+1} = \\ &= a_{N+1} \left(\alpha p_{N+2} + \beta q_{N+2} \right) + \left(\alpha p_{N+1} + \beta q_{N+1} \right) + \\ &+ \sum_{\nu=2}^{N+1} f_{\nu-1} (-1)^{\nu-1} \left(a_{N+1} A_{N+2,\nu} + A_{N+1,\nu} \right) - f_{N+1} = \\ &= a_{N+1} \left(\alpha p_{N+2} + \beta q_{N+2} + \sum_{\nu=2}^{N+1} f_{\nu-1} (-1)^{\nu-1} A_{N+2,\nu} \right) + \\ &+ \left(\alpha p_{N+1} + \beta q_{N+1} + \sum_{\nu=2}^{N+1} f_{\nu-1} (-1)^{\nu-1} A_{N+1,\nu} \right) - f_{N+1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{N+1} \left(\alpha p_{N+2} + \beta q_{N+2} + \sum_{\nu=2}^N f_{\nu-1}(-1)^{\nu-1} A_{N+2,\nu} + f_N(-1)^N A_{N+2,N+1} \right) + \\
&\quad + \left(\alpha p_{N+1} + \beta q_{N+1} + \sum_{\nu=2}^{N-1} f_{\nu-1}(-1)^{\nu-1} A_{N+1,\nu} + f_{N-1}(-1)^{N-1} A_{N+1,N} + \right. \\
&\quad \left. + f_N(-1)^N A_{N+1,N+1} - f_{N+1} \right) = \\
&= a_{N+1} \left(\alpha p_{N+2} + \beta q_{N+2} + \sum_{\nu=2}^N f_{\nu-1}(-1)^{\nu-1} A_{N+2,\nu} - f_N \right) + \\
&\quad + \left(\alpha p_{N+1} + \beta q_{N+1} + \sum_{\nu=2}^{N-1} f_{\nu-1}(-1)^{\nu-1} A_{N+1,\nu} - f_{N-1} \right) - f_{N+1} = \\
&= a_{N+1} \left(\alpha p_{N+2} + \beta q_{N+2} + \varphi_{N+2} \right) + \left(\alpha p_{N+1} + \beta q_{N+1} + \varphi_{N+1} \right) - f_{N+1} = \\
&= a_{N+1} v_{N+2} + v_{N+1} - f_{N+1}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Demonstração do teorema central

Seja $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ tal que $Pu = f \in C^\infty(T^n)$. Consideremos as expansões em séries de Fourier:

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}(k) e^{ik \cdot x} \text{ e } f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x},$$

onde $k = (k_1, \dots, k_n)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Substituindo-as na equação $Pu = f$, teremos:

$$\sum_k p(k_1^2) \hat{u}(k) e^{ik \cdot x} + \sum_k \hat{u}(k) e^{i(k+e_1) \cdot x} + a \sum_k \hat{u}(k) e^{i(k-e_1) \cdot x} = \sum_k \hat{f}(k) e^{ik \cdot x},$$

onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$.

Logo:

$$\sum_k \left[p(k_1^2) \hat{u}(k) + \hat{u}(k - e_1) + a \hat{u}(k + e_1) \right] e^{ik \cdot x} = \sum_k \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$$

e para todo $k \in \mathbb{Z}^n$:

$$p(k_1^2) \hat{u}(k) + \hat{u}(k - e_1) + a \hat{u}(k + e_1) = \hat{f}(k),$$

ou seja,

$$a \hat{u}(k + e_1) = -p(k_1^2) \hat{u}(k) - \hat{u}(k - e_1) + \hat{f}(k) \quad (3.2)$$

Fixemos $k' = (k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ e façamos:

$$k_1 = j; \quad v_j = (\sqrt{-a})^j \hat{u}(j - 1, k'); \quad a_j = \frac{p(j^2)}{\sqrt{-a}}; \quad f_j = \hat{f}(j, k') \cdot (\sqrt{-a})^j.$$

Então, de (3.2), segue que:

$$v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j, \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (3.3)$$

De fato:

• Se $a = -1$, então $(\sqrt{-a})^j = 1, \forall j$ e teremos:

$$j = k_1; \quad v_j = \hat{u}(j - 1, k'); \quad a_j = p(j^2); \quad f_j = \hat{f}(j, k').$$

Daí: $v_{j+2} = \hat{u}(j + 1, k')$; $v_{j+1} = \hat{u}(j, k')$ e (3.2) fica:

$$\begin{aligned} (-1) \hat{u}(j + 1, k') &= -p(j^2) \hat{u}(j, k') - \hat{u}(j - 1, k') + \hat{f}(j, k') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j. \end{aligned}$$

- Se $a = 1$, $v_j = i^j \hat{u}(j-1, k')$; $a_j = \frac{p(j^2)}{i}$; $f_j = \hat{f}(j, k') \cdot i^j$, donde:

$$v_{j+2} = i^{j+2} \hat{u}(j+1, k'); \quad v_{j+1} = i^{j+1} \hat{u}(j, k')$$

e (3.2) fica:

$$\hat{u}(j+1, k') = -p(j^2) \hat{u}(j, k') - \hat{u}(j-1, k') + \hat{f}(j, k') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_{j+2}}{i^{j+2}} = -i a_j \frac{v_{j+1}}{i^{j+1}} - \frac{v_j}{i^j} + \frac{f_j}{i^j} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j$$

Inicialmente, resolveremos a equação de diferenças (3.3) para $j \geq 1$.

Definimos p_j e q_j como no lema (3.1) e vale:

$$p_{j+1} q_j - p_j q_{j+1} = (-1)^j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Daí segue que:

$$\frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} - \frac{p_j}{q_j} = \frac{(-1)^j}{q_j q_{j+1}}$$

e, usando esta fórmula recursivamente, chegamos à expressão:

$$\frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} = \frac{p_2}{q_2} + \sum_{r=2}^j \frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}} = \sum_{r=2}^j \frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}}, \text{ pois } p_2 = 0.$$

Assim, definimos :

$$t \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_j}{q_j} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}}$$

e, pelo lema (3.3), segue que t está bem definido e existem constantes $K_0 > 0$, $j_0 > 0$, independentes de j , tais que:

$$|p_j - t q_j| \leq K_0 |q_j|^{-1}, \quad j \geq j_0. \quad (3.4)$$

Pela observação (3.2), temos que $t \neq 0$.

Atribuindo-se os valores iniciais: $v_1 = \alpha$; $v_2 = \beta$ à equação (3.3) (os quais serão determinados posteriormente), sua solução geral será:

$$v_j = \alpha p_j + \beta q_j + \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

com:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \text{ e se } j \geq 3, \varphi_j \text{ é dado como no lema (3.4)}$$

Assim, podemos escrever:

$$v_j = \alpha p_j + (\beta - \gamma_1)q_j + r_j,$$

onde $r_j = T_1 + T_2 - f_{j-2} = r_j(k')$ para cada k' fixado, e T_1, T_2, γ_1 são dados no lema (3.4).

Como $f \in C^\infty(T^n)$, temos que $f_{j-2} = \hat{f}(j-2, k')$ decresce rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$. Mostremos que $r_j(k')$ também tem decrescimento rápido quando $j, |k'| \rightarrow \infty$, observando que T_1, T_2 assim se comportam.

Com efeito, do lema (3.3), temos:

$$|p_j - tq_j| \leq K_0 |q_j|^{-1}, \quad j \geq j_0, \quad K_0 > 0$$

e tomando-se $\mu = [j/2] + 1$, vem:

$$\begin{aligned} \bullet |T_1| = |T_1(k')| &= \left| (p_j - tq_j) \cdot \sum_{\nu=1}^{j-3} f_\nu (-1)^\nu q_{\nu+1} \right| \\ &\leq |p_j - tq_j| \sum_{\nu=1}^{j-3} |f_\nu| |q_{\nu+1}| \\ &\stackrel{j \geq j_0}{\leq} K_0 |q_j|^{-1} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mu-1} + \sum_{\nu=\mu}^{j-3} \right\} (|f_\nu| |q_{\nu+1}|) \\ &\leq K_0 |q_j|^{-1} \cdot |q_\mu| \sum_{\nu=1}^{\mu-1} |f_\nu| + K_0 \max_{\nu \geq \mu} \left\{ |f_\nu| \cdot \sum_{\nu=\mu}^{j-3} \frac{|q_{\nu+1}|}{|q_j|} \right\}. \end{aligned}$$

Pela observação (3.1), temos que $\exists K > 1$ tal que:

$$|q_j| = |q_{(j-\mu)+\mu}| \geq K^{(j-\mu)} |q_\mu| \Rightarrow |q_j|^{-1} \leq \frac{1}{K^{(j-\mu)} |q_\mu|} \leq \frac{1}{K^{j/2-1} |q_\mu|}$$

Assim:

$$K_0 |q_j|^{-1} |q_\mu| \leq \frac{K_0}{K^{j/2-1}}$$

e ainda:

$$\sum_{\nu=\mu}^{j-3} \frac{|q_{\nu+1}|}{|q_j|} \leq \sum_{\nu=\mu}^{j-3} \frac{|q_{j-2}|}{|q_j|} \leq \sum_{\nu=\mu}^{j-3} \frac{|q_{j-2}|}{K^2 |q_{j-2}|} \leq \frac{j}{2K^2},$$

uma vez que esta soma envolve menos que $j/2$ termos.

Logo:

$$|T_1| \leq \frac{K_0}{K^{j/2-1}} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{\nu}| + \frac{K_0}{2K^2} \max_{\nu \geq \mu} \{j \cdot |f_{\nu}|\}, \text{ onde } f_{\nu} = \hat{f}(\nu, k').$$

onde $f_{\nu} = \hat{f}(\nu, k')$.

Então, $\forall r > 0, \forall s > 0$, teremos:

$$\begin{aligned} & \sup \{j^s |k'|^r |T_1|; j \in \mathbb{N}; k' \in \mathbb{Z}^{n-1}\} \leq \\ & \leq \sup_{j \leq j_0} \{j^s |k'|^r |T_1|; k' \in \mathbb{Z}^{n-1}\} + \sup_{j > j_0} \left\{ \frac{K_0}{K^{j/2-1}} j^s \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} |k'|^r |\hat{f}(\nu, k')|; k' \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\} + \\ & + \frac{K_0}{2K^2} \cdot \sup_{j > j_0} \left\{ |k'|^r \cdot \sup_{\nu \geq \mu} j^{s+1} |\hat{f}(\nu, k')|; k' \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Mas, como $\mu = [j/2] + 1$, temos:

$$\left| \frac{j}{\mu} \right| \leq \left| \frac{j}{j/2} \right| = 2 \text{ e}$$

$$j^{s+1} |\hat{f}(\mu, k')| = \left| \frac{j}{\mu} \right|^{s+1} |\mu|^{s+1} |\hat{f}(\mu, k')| \leq 2^{s+1} |\mu|^{s+1} |\hat{f}(\mu, k')|$$

$$j^{s+1} |\hat{f}(\mu+1, k')| = \left| \frac{j}{\mu+1} \right|^{s+1} |\mu+1|^{s+1} |\hat{f}(\mu+1, k')| \leq 2^{s+1} |\mu+1|^{s+1} |\hat{f}(\mu+1, k')|$$

$\vdots$

$$j^{s+1} |\hat{f}(j-1, k')| = \left| \frac{j}{j-1} \right|^{s+1} |j-1|^{s+1} |\hat{f}(j-1, k')| \leq 2^{s+1} |j-1|^{s+1} |\hat{f}(j-1, k')|$$

$$j^{s+1} |\hat{f}(j, k')| \leq 2^{s+1} j^{s+1} |\hat{f}(j, k')|$$

$$(j+1)^{s+1} |\hat{f}(j+1, k')| \leq 2^{s+1} (j+1)^{s+1} |\hat{f}(j+1, k')|$$

$\vdots$

Donde concluimos que:

$$j^{s+1}|\hat{f}(\nu, k')| \leq 2^{s+1}|\nu|^{s+1}|\hat{f}(\nu, k')|, \quad \forall \nu \geq \mu.$$

Daí:

$$\begin{aligned} \sup_{j,k'} \left\{ |k'|^r \cdot \sup_{\nu \geq \mu} [j^{s+1}|\hat{f}(\nu, k')|] \right\} &\leq 2^{s+1} \sup_{j,k'} \left\{ |k'|^r \cdot \sup_{\nu \geq \mu} [|\nu|^{s+1}|\hat{f}(\nu, k')|] \right\} \\ &= 2^{s+1} \sup_{j,k'} \left\{ \sup_{\nu \geq [j/2]+1} [|k'|^r |\nu|^{s+1} |\hat{f}(\nu, k')|] \right\} \\ &= 2^{s+1} \sup_{j,k'} \left\{ |k'|^r j^{s+1} |\hat{f}(j, k')| \right\} < \infty \end{aligned}$$

uma vez que f decresce rapidamente. Com isto, garantimos a limitação da terceira parcela em (3.6). A segunda parcela também é finita, pois $j/(K^{j/2-1}) < M < \infty$ para todo j e $\sum_{\nu=1}^{\infty} |k'|^r |\hat{f}(\nu, k')| < \infty$, $\forall r > 0$, pois $f \in C^\infty(T^n)$. Além disso, na primeira parcela temos:

$$\begin{aligned} \sup_{j \leq j_0} \{j^s |k'|^r |T_1|; k' \in \mathbb{Z}^{n-1}\} &\leq \\ &\leq \max_{j \leq j_0} \{j^s |q_{j_0-2}| |p_j - tq_j| \cdot \sup_{k' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{j-3} |k'|^r |\hat{f}(\nu, k')| \right\}\}, \end{aligned}$$

pois p_j e q_j independem de k' , para todo j (os a'_j s são polinômios em j). E vemos que esta também é finita, uma vez que $f \in C^\infty(T^n)$ e $\sup_{k' \in \mathbb{Z}^n} \{ |k'|^r |\hat{f}(\nu, k')| \} < \infty$. Com isto, concluimos que T_1 decresce rapidamente conforme $j, |k'| \rightarrow \infty$.

O mesmo vale para T_2 :

$$\begin{aligned} \bullet |T_2| = |T_2(k')| &= |q_j| \left| \gamma_1 - \sum_{\nu=1}^{j-3} f_\nu \cdot (-1)^\nu (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}) \right| \\ &= |q_j| \left| \sum_{\nu=j-2}^{\infty} f_\nu \cdot (-1)^\nu (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}) \right| \\ &\leq |q_j| \sum_{\nu=j-2}^{\infty} |f_\nu| |p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}| \stackrel{j-2 \geq j_0}{\leq} K_0 \sum_{\nu=j-2}^{\infty} \frac{|f_\nu| |q_j|}{|q_{\nu+1}|} \\ &= K_0 \left(\frac{|q_j|}{|q_{j-1}|} |f_{j-2}| + \frac{|q_j|}{|q_j|} |f_{j-1}| + \frac{|q_j|}{|q_{j+1}|} |f_j| + \dots \right) \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
\frac{|q_j|}{|q_{j-1}|} &\stackrel{s=j-1}{=} \frac{|q_{s+1}|}{|q_s|} = \frac{|a_{s-1}q_s + q_{s-1}|}{|q_s|} \\
&\leq |a_{s-1}| + \frac{|q_{s-1}|}{|q_s|} \leq |a_{s-1}| + 1 \\
&\leq |p((s-1)^2)| + 1 \leq C_1(s-1)^{2m} = C_1(j-2)^{2m},
\end{aligned}$$

com $j \geq j_1$, para algum $j_1 > 0$ e alguma constante $C_1 > 0$.

Logo:

$$\begin{aligned}
|T_2(k')| &\leq K_0 \left(C_1(j-2)^{2m} |f_{j-2}| + |f_{j-1}| + |f_j| + \dots \right) \\
&\leq K_0 \left(\tilde{C}_1 j^{2m} |f_{j-2}| + |f_{j-1}| + \dots \right),
\end{aligned}$$

donde, $\forall r > 0$, $\forall s > 0$, temos:

$$\begin{aligned}
&\sup \left\{ j^s |k'|^r |T_2|; k' \in \mathbb{Z}^{n-1}; j \in \mathbb{N} \right\} \leq \\
&\leq K_0 \max_{j \leq j_0} \sup_{k'} \left\{ j^s |k'|^r |T_2|; k' \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\} + \\
&+ K_0 \sup_{j \geq j_0} \left\{ \sup_{k'} \left[\tilde{C}_1 j^{s+2m} |k'|^r |\hat{f}(j-2, k')| \right] \right\} + \\
&+ K_0 \sup_{j \leq j_0, k'} \left\{ j^s |k'|^r |\hat{f}(j-1, k')| \right\} + K_0 \sup_{j \geq j_0, k'} \left\{ \sum_{l=j}^{\infty} j^s |k'|^r |\hat{f}(l, k')| \right\} \leq \\
&\leq K_0 \max_{j \leq j_0} \left\{ j^s |q_j| \cdot \sup_{k' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \left[\sum_{\nu=j-1}^{\infty} |k'|^r |\hat{f}(\nu, k')| |p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}| \right] \right\} + \\
&+ K_0 \sup_{j \geq j_0, k'} \left\{ C_2(j-2)^{2m+s} |k'|^r |\hat{f}(j-2, k')| \right\} + \\
&+ K_0 \sup_{j \geq j_0, k'} \left\{ C_3(j-1)^s |k'|^r |\hat{f}(j-1, k')| \right\} + K_0 \sup_{k'} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} j^s |k'|^r |\hat{f}(j, k')| \right\}.
\end{aligned}$$

Observemos que a primeira parcela desta última desigualdade é finita, uma vez que temos um número finito de j 's, os termos q_j e $|p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}|$ independem

de k' para todo ν , e este último é muito pequeno quando $j \geq j_0$, donde concluímos que :

$$\sup_{k'} \left\{ \sum_{\nu=j-2}^{\infty} |k'|^r |\hat{f}(\nu, k')| |p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}| \right\} < \infty.$$

A segunda e terceira parcelas também são limitadas, pois $f \in C^\infty(T^n)$; na quarta parcela podemos escrever:

$$K_0 \sup_{k'} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} j^s |k'|^r |\hat{f}(j, k')| \right\} \leq K_0 \sum_{j,k'} j^s |k'|^r |\hat{f}(j, k')| = M < \infty,$$

devido ao decaimento rápido de $\hat{f}(j, k')$ quando $j, |k'| \rightarrow \infty$. Com isto, verificamos o decrescimento rápido de T_2 .

Agora, como $u \in \mathcal{D}'(T^n)$, v_j deve ter, no máximo, crescimento polinomial quando $j \rightarrow \infty$. Logo, existem $s > 0$ e $K > 1$ (lema (3.2)) tais que:

$$\frac{v_j}{q_j} = \alpha \frac{p_j}{q_j} + (\beta - \gamma_1) \frac{q_j}{q_j} + \frac{r_j}{q_j} \leq \frac{j^s}{K^{j-3}}, \text{ se } j \geq 4.$$

Assim, temos:

$$0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \alpha \frac{p_j}{q_j} + (\beta - \gamma_1) + \frac{r_j}{q_j} \right| = |\alpha t + (\beta - \gamma_1)| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j^s}{K^{j-3}} = 0$$

Portanto,

$$\alpha t + \beta - \gamma_1 = 0 \tag{3.7}$$

A seguir, resolveremos a equação (3.3) para $j \leq 0$.

Como $v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e valem as condições (A.1), segue que:

$$v_0 = v_2 - a_0 v_1 + f_0, \text{ onde } a_0 = p(0) = 0 \text{ e}$$

$$v_2 = \beta \Rightarrow v_0 = \beta + f_0$$

na equação (3.3), trocando j por $(-j)$, temos:

$$v_{-j} = -a_{-j} v_{1-j} + v_{2-j} + f_{-j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

e como $a_{-j} = a_j$, definimos:

$$w_j = (-1)^{2-j} v_{2-j}$$

e teremos:

$$\begin{aligned} v_{-j} &= -a_j v_{1-j} + v_{2-j} + f_{-j}, \quad j = 1, 2, \dots \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-1)^{-j} w_{j+2} = -a_j \cdot (-1)^{1-j} w_{j+1} + (-1)^{2-j} w_j + f_{-j} \Leftrightarrow \\ w_{j+2} &= a_j w_{j+1} + w_j + (-1)^j f_{-j}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

e, assim, obtemos:

$$w_{j+2} = a_j w_{j+1} + w_j - g_j, \text{ com } g_j = (-1)^{j+1} f_{-j}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

com valores iniciais: $w_1 = \alpha' = -v_1 = -\alpha$; $w_2 = \beta' = v_0 = \beta + f_0$.

Pelo lema (3.4), uma solução para esta equação é:

$$w_j = \alpha' p_j + \beta' q_j + \varphi_j = -\alpha p_j + (\beta + f_0) q_j + \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = 0 \text{ e para } j \geq 3: \\ \varphi_j &= (p_j - tq_j) \sum_{\nu=1}^{j-3} g_{-\nu} \cdot (-1)^\nu q_{\nu+1} + q_j \left\{ \gamma_2 - \sum_{\nu=1}^{j-3} g_{-\nu} \cdot (-1)^\nu (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}) \right\} - \\ &\quad - g_{j-2} - \gamma_2 q_j = \\ &= (p_j - tq_j) \sum_{\nu=1}^{j-3} (-1)^\nu f_{-\nu} \cdot (-1)^\nu q_{\nu+1} + q_j \left\{ \gamma_2 - \sum_{\nu=1}^{j-3} (-1)^{2\nu} f_{-\nu} (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}) \right\} - \\ &\quad - (-1)^{j-1} f_{-(j-2)} - \gamma_2 q_j = \\ &= (p_j - tq_j) \sum_{\nu=1}^{j-3} f_{-\nu} q_{\nu+1} + q_j \left\{ \gamma_2 - \sum_{\nu=1}^{j-3} f_{-\nu} (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}) \right\} + \\ &\quad + (-1)^{j-1} f_{2-j} - \gamma_2 q_j \equiv \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + (-1)^j f_{2-j} - \gamma_2 q_j, \end{aligned}$$

onde

$$\gamma_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{-\nu} (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}).$$

Observamos que γ_2 e

$$\tilde{T}_1 = (p_j - tq_j) \sum_{\nu=1}^{j-3} f_{-\nu} q_{\nu+1}; \quad \tilde{T}_2 = q_j \left\{ \gamma_2 - \sum_{\nu=1}^{j-3} f_{-\nu} (p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}) \right\}$$

são expressões idênticas a γ_1 , T_1 e T_2 , a menos do fator $(-1)^\nu$ em cada parcela do somatório. Assim, podemos concluir que $\tilde{T}_1$ e $\tilde{T}_2$ também decrescem rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$.

Logo, $w_j = -\alpha p_j + (\beta + f_0 + \gamma_2)q_j + \tilde{r}_j$, onde $\tilde{r}_j = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + (-1)^j f_{2-j}$, decresce rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$.

Como $u \in \mathcal{D}'(T^n)$, w_j tem, no máximo, crescimento polinomial quando $j \rightarrow \infty$, donde segue que existem $s > 0$ e $K > 1$ (lema 3.2) tais que:

$$\left| \frac{w_j}{q_j} \right| = \left| -\alpha \frac{p_j}{q_j} + (\beta + f_0 + \gamma_2) + \frac{\tilde{r}_j}{q_j} \right| \leq \frac{j^s}{|q_j|} \leq \frac{j^s}{K^{j-2}}$$

Logo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[-\alpha \frac{p_j}{q_j} + (\beta + f_0 + \gamma_2) + \frac{\tilde{r}_j}{q_j} \right] = -\alpha t + \beta + f_0 + \gamma_2 = 0 \quad (3.8)$$

Combinando (3.7) e (3.8), segue que:

$$\alpha = (\gamma_1 + \gamma_2 + f_0)/(2t); \quad \beta = (\gamma_1 - \gamma_2 - f_0)/2.$$

Podemos ver facilmente que α e β independem de j , pois $\gamma_1 = \gamma_1(k')$; $\gamma_2 = \gamma_2(k')$ e $f_0 = \hat{f}(0, k')$ (t é um número fixo e bem determinado); além disso, estes têm decrescimento rápido quando $|k'| \rightarrow \infty$. Para isto, basta observarmos que γ_1 , γ_2 e f_0 assim se comportam.

Com efeito:

$$\begin{aligned} |\gamma_1(k')| &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\hat{f}(\nu, k')| |p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}| \leq \sup_{\nu \in \mathbb{N}} |\hat{f}(\nu, k')| \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} |p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}| \\ &\leq \sup_{\nu \in \mathbb{N}} |\hat{f}(\nu, k')| \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{j_0-1} |p_{\nu+1} - tq_{\nu+1}| + \sum_{\nu=j_0}^{\infty} \frac{K_0}{K^{\nu+1-3}} \right\} \\ &\leq \sup_{\nu \in \mathbb{N}} |\hat{f}(\nu, k')| \cdot \left\{ C_1 + \sum_{\nu=j_0}^{\infty} \frac{K_0}{K^{\nu-2}} \right\}, \end{aligned}$$

onde a última soma converge, pois $K > 1$, e podemos escrever:

$$|\gamma_1(k')| \leq M \sup_{\nu} |\hat{f}(\nu, k')|, \text{ com}$$

$$M = C_1 + \sum_{\nu=j_0}^{\infty} \frac{K_0}{K^{\nu-2}} < \infty.$$

Assim, $\forall r > 0$, temos:

$$\sup_{k' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \{|k'|^r |\gamma_1(k')|\} \leq M \sup_{\nu, k'} \{|k'|^r |\hat{f}(\nu, k')|\} < \infty,$$

pois f decresce rapidamente.

O decrescimento rápido de γ_2 é mostrado da mesma maneira.

Afirmamos que, sob tais condições, v_j , $j \geq 1$ decresce rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$.

De fato:

$$v_j = \alpha p_j + (\beta - \gamma_1)q_j + T_1 + T_2 - f_{j-2}$$

e já sabemos que T_1 , T_2 , f_{j-2} decrescem rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$.

Assim, resta verificarmos o termo $(\alpha p_j + (\beta - \gamma_1)q_j)$. Para tanto, temos:

$$\left| \alpha \frac{p_j}{q_j} + (\beta - \gamma_1) \right| = \left| \alpha \frac{p_j}{q_j} - \alpha t + (\alpha t + \beta - \gamma_1) \right| \stackrel{(3.7)}{=} |\alpha| \left| \frac{p_j}{q_j} - t \right|$$

Daí:

$$|\alpha p_j + (\beta - \gamma_1)q_j| = |\alpha| |p_j - tq_j| \stackrel{j \geq j_1 \geq 4}{\leq} |\alpha| \frac{K_0}{|q_j|} \leq |\alpha| \frac{K_0}{K^{j-2}}.$$

Logo, dados $r > 0$, $s > 0$, teremos:

$$\sup_{j,k'} \{j^s |k'|^r |\alpha p_j + (\beta - \gamma_1)q_j|\} \leq K_0 \sup_{j,k'} \left\{ |\alpha| |k'|^r \frac{j^s}{K^{j-2}} \right\} < \infty,$$

uma vez que α decai rapidamente quando $|k'| \rightarrow \infty$ e $\sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{j^s}{K^{j-2}} < \infty$.

Do mesmo modo, podemos ver que w_j , $j \geq 0$ decresce rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \frac{w_j}{q_j} &= -\alpha \frac{p_j}{q_j} + (\beta + f_0 + \gamma_2) + \frac{\tilde{r}_j}{q_j} \\ &= -\alpha \left(\frac{p_j}{q_j} - t \right) - \alpha t + \beta + f_0 + \gamma_2 + \frac{\tilde{r}_j}{q_j} \end{aligned}$$

e, como $-\alpha t + \beta + f_0 + \gamma_2 = 0$ (eq.(3.8)), temos:

$$w_j = -\alpha(p_j - tq_j) + \tilde{r}_j \Rightarrow |w_j| \leq |\alpha| \frac{K_0}{|q_j|} + |\tilde{r}_j|$$

e já vimos que $\tilde{r}_j$ decresce rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$ e o termo $|\alpha| \frac{K_0}{|q_j|}$ assim se comporta, como foi observado anteriormente.

Com isso, temos: $w_j = (-1)^{2-j}v_{2-j}$ e vemos que v_{-j} também tem decréscimo rápido quando $j, |k'| \rightarrow \infty$. Portanto, $\hat{u}(j, k') = v_{j+1}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ também decresce rapidamente, donde concluímos, finalmente, que $u \in C^\infty(T^n)$ e o operador P é (GH).

□

3.4 Observações relevantes sobre o teorema central

3.4.1 A unicidade da solução

Sob as hipóteses (A.1) da seção (3.1), pode-se mostrar que a solução $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ da equação

$$Pu = \left(p(D_1^2) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1}\right)u = f$$

é única.

De fato: se $Pu = f$, então, vimos que:

$$a\hat{u}(k + e_1) = -p(k_1^2)\hat{u}(k) - \hat{u}(k - e_1) + \hat{f}(k),$$

onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, e tal expressão pode ser reduzida à equação:

$$v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Com as condições $v_1 = \alpha$; $v_2 = \beta$, existe um único par (α, β) de forma que $u \in \mathcal{D}'(T^n)$. Com isto, os v_j 's são determinados de maneira única por α, β e pelos coeficientes de Fourier de f . Assim, os $\hat{u}(j, k')$'s também são únicos para todo (j, k') (pois $\hat{u}(j, k') = v_{j+1}/(\sqrt{-a})^j$, $a = \pm 1$) e daí segue a unicidade da solução u .

3.4.2 O operador $P = D_1^2 + 2r \operatorname{isen} x_1$, com $r > 1$

Este operador pode ser escrito como

$$P = r \left(\frac{D_1^2}{r} + 2i \operatorname{isen} x_1 \right)$$

e será (GH) se

$$\tilde{P} = \frac{D_1^2}{r} + 2i \operatorname{sen} x_1$$

o for.

Mas, como não podemos garantir que o polinômio $\tilde{p}(t) = \frac{t}{r}$ satisfaça a todas as hipóteses em (A.1), não podemos aplicar diretamente o teorema (3.1). Porém, tratando-se de um caso bastante particular, veremos que a demonstração vista em (3.3) continua válida, pois podemos obter aquelas desigualdades de outra maneira.

Com efeito, substituindo as expansões em séries de Fourier na equação $Pu = f$, temos:

$$r \left[\sum_k \frac{k_1^2}{r} \hat{u}(k) e^{ik \cdot x} + \sum_k \hat{u}(k) e^{i(k_1+1, k') \cdot x} + \sum_k \hat{u}(k) e^{i(k_1-1, k') \cdot x} \right] = \sum_k \hat{f}(k) e^{ik \cdot x},$$

donde:

$$\frac{k_1^2}{r} \hat{u}(k) + \hat{u}(k - e_1) + \hat{u}(k + e_1) = \frac{\hat{f}(k)}{r},$$

com $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, $k' \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

Para cada $k' \in \mathbb{Z}^{n-1}$, fazemos:

$$k_1 = j; \quad v_j = \hat{u}(j - 1, k'); \quad a_j = \frac{j^2}{r} \quad e \quad f_j = \frac{\hat{f}(j, k')}{r}$$

e a equação anterior fica:

$$v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Definimos p_j e q_j como no lema (3.1) e assim, continua válida a igualdade:

$$p_{j+1} q_j - p_j q_{j+1} = (-1)^j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Podemos ver que uma desigualdade análoga à do lema (3.2) também se verifica. De fato, basta observarmos que:

$q_1 = 0; q_2 = 1$	$p_1 = 1; p_2 = 0$
$q_3 = 1/r > 0$	$p_3 = 1 > 0$
$q_4 = (4/r).(1/r) + 1 > 0$	$p_4 = 4/r > 0$
$q_5 = (9/r)(4/r^2 + 1) > 0$	$p_5 = (9/r)(4/r) + 1 > 0$
$\vdots$	$\vdots$
$q_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots$	$p_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots$

Tomemos $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_{j_0+1} > 1$; $p_{j_0+1} > 1$ e $j_0 > (r + 1)$.

Para $j \geq j_0$, temos:

$$a_j = \frac{j^2}{r} \geq j \frac{j_0}{r} \geq j \frac{r+1}{r} > j$$

Assim,

$$\begin{aligned} q_{j_0+2} &= a_{j_0} q_{j_0+1} + q_{j_0} > a_{j_0} q_{j_0+1} > j_0 q_{j_0+1} > j_0 > r \\ q_{j_0+3} &= a_{j_0+1} q_{j_0+2} + q_{j_0+1} > a_{j_0+1} q_{j_0+2} > (j_0 + 1) j_0 > j_0^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto,

$$q_{j_0+s} > r^{j_0+s-(j_0+1)} = r^{s-1}, \quad s \geq 2$$

e assim:

$$|q_j| = q_j > r^{j-j_0-1}, \quad \forall j \geq j_0 + 2$$

Analogamente, podemos mostrar que:

$$|p_j| = p_j > r^{j-j_0-1}, \quad \forall j \geq j_0 + 2, \text{ com } r > 1.$$

Ainda, assim como na demonstração da seção (3.3), vale:

$$\frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} = \sum_{l=2}^j \frac{(-1)^l}{q_l q_{l+1}}$$

e esta soma converge quando $j \rightarrow \infty$.

$$\text{Definimos } t = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_j}{q_j} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{q_j q_{j+1}}$$

e com as desigualdades verificadas acima, analogamente ao que foi feito no lema (3.3), podemos mostrar que existem $K_0 > 0$ e $j_0 \geq 1$, independentes de j , tais que:

$$|p_j - tq_j| \leq \frac{K_0}{|q_j|}, \quad j \geq j_0,$$

e concluímos que $t \neq 0$, como antes.

Fazendo $v_1 = \alpha$; $v_2 = \beta$, a solução para a equação:

$$\begin{cases} v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j, & j \geq 1 \\ v_1 = \alpha; & v_2 = \beta \end{cases}$$

é dada pelo lema (3.4).

Novamente podemos escrever:

$$v_j = \alpha p_j + (\beta - \gamma_1)q_j + r_j$$

e vemos que r_j decresce rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$ e γ_1 assim se comporta quando $|k'| \rightarrow \infty$, da mesma maneira que foi visto na seção (3.3).

Do fato de v_j ter crescimento, no máximo polinomial, segue que $\alpha t + \beta - \gamma_1 = 0$ e, resolvendo a equação $v_{j+2} = a_j v_{j+1} + v_j - f_j$ para $j \leq 0$, novamente concluímos que $-\alpha t + \beta + f_0 - \gamma_2 = 0$ e determinamos α e β .

Os mesmos argumentos da seção (3.3) são válidos para mostrar que α independe de j e decai rapidamente quando $|k'| \rightarrow \infty$. Portanto, da mesma forma, podemos provar que $\hat{u}(j, k')$ tem decrescimento rápido quando $j, |k'| \rightarrow \infty$.

Observemos que esta prova foi possível devido às características peculiares do operador. O fato do polinômio envolvido ser da forma $p(D_1^2) = D_1^2$ e o aparecimento do termo $2r \operatorname{isen} x_1$ foram imprescindíveis para as estimativas:

$$|p_j| > r^{j-j_0-1} \text{ e } |q_j| > r^{j-j_0-1}, \quad j \geq j_0 + 2.$$

Se tivéssemos o operador:

$$P = D_1^2 + 2r \cos x_1, \quad r > 1,$$

surgiria a unidade imaginária na definição $a_j = j^2/(r\sqrt{-1}) = j^2/(ri)$ e o argumento utilizado aqui para estimar os p_j 's e q_j 's já não seria válido, uma vez que

as sequências obtidas seriam:

$q_1 = 0; q_2 = 1$	$p_1 = 1; p_2 = 0$
$q_3 = 1/(ri)$	$p_3 = 1$
$q_4 = 1 - 4/(r^2)$	$p_4 = 4/(ri)$
$q_5 = 10/(ri) - 36/(r^3i)$	$p_5 = -36/(r^2) + 1$
$\vdots$	$\vdots$

E, neste caso, não teríamos a condição $p_j, q_j \geq 0$ que foi usada nas estimativas para o caso do operador anterior. Assim, este método, tal como está, ainda não é capaz de garantir que o operador $P = D_1^2 + 2r \cos x_1$, com $r > 1$ seja (GH) em T^2 .

3.4.3 Por que utilizar grau par — ou $p(D_1^2)$

Uma pergunta que surge imediatamente ao observarmos o operador $P = p(D_1^2) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1}$, com $p(t)$ satisfazendo às condições:

$$(A.2) \quad p(0) = 0; |p(t)| > 2, |t| \geq 2, t \in \mathbb{Z},$$

é: “ Por que não analisamos a hipoeliticidade global do operador:

$$\tilde{P} = p(D_1) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1},$$

mantendo as propriedades (A.2) em p , da mesma maneira que na seção (3.3)?”

Se verificarmos a demonstração (3.3), veremos que foi de extrema importância o fato de $a_j = a_{-j} = p(j^2)/\sqrt{-a}$ para a obtenção das duas equações:

$$\begin{cases} \alpha t + \beta - \gamma_1 = 0 \\ -\alpha t + \beta + f_0 - \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

com as quais foi possível determinar um par (α, β) único, em termos de t, γ_1, γ_2 e f_0 .

Analisando o caso de um polinômio p ímpar, ou seja, $p(-t) = -p(t)$ e que ainda satisfaz (A.2), vemos que a demonstração da seção (3.3) não é viável.

De fato, temos: $P = p(D_1) + e^{ix_1} + ae^{-ix_1}$ e definimos:

$$a_j = \frac{p(j)}{\sqrt{-a}}.$$

Logo,

$$a_{-j} = \frac{-p(j)}{\sqrt{-a}} = -a_j$$

e, se vale (A.2), chegamos a uma equação da forma:

$$\begin{aligned} w_{j+2} &= a_j w_{j+1} + w_j + f_{-j}, & j &= 1, 2, \dots \\ w_1 &= \alpha; \quad w_2 = \beta + f_0. \end{aligned}$$

Pelo fato de $u \in \mathcal{D}'(T^n)$, devemos ter: $\alpha t + \beta - \gamma_1 = 0$ e $\alpha t + \beta + \gamma_2 + f_0 = 0$ e com estas equações não é possível determinar α e β .

Uma outra tentativa seria definir novos p'_j e q'_j para resolver a equação de diferenças quando $j \leq 0$. Com isto, teríamos um novo t' e duas equações:

$$\alpha t + \beta - \gamma_1 = 0 \text{ e } -\alpha t' + \beta + f_0 + \gamma_2 = 0.$$

Porém, uma análise rápida dos novos p'_j s e q'_j s mostra que

$$\frac{p'_j}{q'_j} = -\frac{p_j}{q_j}$$

e assim, $t' = -t$. Logo, recaímos no mesmo problema.

Na verdade, podemos ver que o operador: $P = D_1 - \gamma(x_1)$, onde $\gamma \in C_0^\infty(T^1)$ (i.e., $\int_0^{2\pi} \gamma(t) dt = 0$), não é (GH) em T^2 , e com isso, $P = D_1 + e^{ix_1} + ae^{-ix_1}$ também não é (GH).

De fato, existe $h \in C_0^\infty(T^1)$ tal que $D_1 h = \gamma$, pois:

$$D_1 h = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} h(t) = \gamma(t) \Rightarrow h(t) = i \int_0^t \gamma(s) ds, \quad t \in [0, 2\pi].$$

É claro que $h \in C^\infty$ ($\gamma \in C^\infty$). Além disso,

$$h(2\pi) = i \int_0^{2\pi} \gamma(s) ds = 0 = h(0),$$

donde vemos que h será 2π -periódica se definirmos

$$h(t + 2k\pi) = h(t), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Observemos, agora, que: para $u = u(t, x) \in \mathcal{D}(T^2)$ e $v(t, x) = e^{-h(t)}u(t, x)$, temos:

$$\begin{aligned} D_1 v(t, x) &= D_1 (e^{-h(t)} u(t, x)) \\ &= D_1 (e^{-h(t)}) u(t, x) + e^{-h(t)} D_1 u(t, x) \\ &= -D_1 h e^{-h} u + e^{-h} D_1 u = e^{-h} [D_1 u - \gamma u] = e^{-h} . P u. \end{aligned}$$

Com isto, concluímos que analisar a hipoeliticidade global do operador P é equivalente a analisar o operador D_1 , uma vez que a equação $Pu = f$ equivale a $D_1 v = g$, com $g = e^{-h} f$. E, como D_1 não é (GH) em T^2 , vemos que P também não.

3.5 A hipoeliticidade global para o operador

$$Q = q(D') + 2 \cos x_1$$

Apresentamos agora, um outro resultado sobre hipoeliticidade global, cuja prova será feita nos moldes da seção (3.3):

Teorema 3.2 *Seja $q(\lambda')$ um polinômio de grau $m \geq 1$, onde $\lambda' = (\lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Considere o operador:*

$$Q = q(D') + 2 \cos x_1, \text{ onde}$$

$$q(D') = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^{n-1} \\ |\alpha| \leq m}} c_\alpha D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Suponha que exista $\tau > 0$ tal que $|q(\lambda')| \geq 2 + \tau$ para todo $\lambda' \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Então Q é (GH) em T^n .

Antes de demonstrarmos o teorema, analisemos alguns exemplos:

3.5.1 Exemplo 1

Tome

$$Q = -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 3 + 2 \cos x_1$$

e podemos escrever:

$$Q = D_2^2 + \gamma(x_1), \text{ com } \gamma(x_1) = 3 + 2 \cos x_1 \geq 1, \forall x_1.$$

É fácil ver que Q não é (H). Basta tomar:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{x_2 \sqrt{\gamma(x_1)}}, & \text{se } x_1 > 0 \\ 0, & \text{se } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

e vemos que $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2) \setminus C^\infty(\mathbf{R}^2)$. (u pode ser escrito como: $u = e^{x_2 \sqrt{\gamma(x_1)}} \cdot H(x_1)$, onde H é a *função de Heaviside*:

$$H(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_1 > 0 \\ 0, & \text{se } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

e u não é contínua em $\{(0, x_2); x_2 \in \mathbf{R}\}$.)

Assim, calculando as derivadas no sentido de distribuições, teremos:

$$Qu = [D_2^2 + \gamma(x_1)]u = \begin{cases} D_2 \left(\frac{1}{i} \sqrt{\gamma(x_1)} e^{x_2 \sqrt{\gamma(x_1)}} \right) + \gamma(x_1) e^{x_2 \sqrt{\gamma(x_1)}} & \text{se } x_1 > 0 \\ 0, & \text{se } x_1 < 0. \end{cases}$$

Ainda, se $x_1 > 0$,

$$\begin{aligned} Qu &= D_2 \left(\frac{1}{i} \sqrt{\gamma(x_1)} e^{x_2 \sqrt{\gamma(x_1)}} \right) + \gamma(x_1) e^{x_2 \sqrt{\gamma(x_1)}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sqrt{\gamma(x_1)} e^{x_2 \sqrt{\gamma(x_1)}} \right] + \gamma(x_1) e^{x_2 \sqrt{\gamma(x_1)}} \\ &\stackrel{\gamma(x_1) > 0}{=} (-\gamma(x_1) + \gamma(x_1)) e^{x_2 \sqrt{\gamma(x_1)}} = 0 \end{aligned}$$

e, portanto:

$$Qu = 0, \text{ com } u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2) \setminus C^\infty(\mathbf{R}^2).$$

Mas o teorema (3.2) garante a hipoehticidade global de Q em T^2 , uma vez que

$$|q(x_2)| = |x_2^2 + 3| \geq 3 = 2 + 1 \quad (\tau = 1).$$

3.5.2 Exemplo 2

Seja

$$Q = - \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 + r(2 + \tau)i + 2 \cos x_1,$$

onde $\tau, r \in \mathbf{R}$, $r \geq 1$, $\tau > 0$ e $i = \sqrt{-1}$.

Podemos escrever: $Q = D_2^2 + D_3^2 + r(2 + \tau)i + 2 \cos x_1$ e temos:

$$q(\lambda_2, \lambda_3) = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + r(2 + \tau)i \Rightarrow$$

$$|q(\lambda_2, \lambda_3)| \geq r(2 + \tau) \geq 2 + \tau, \quad \forall (\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{Z}^2.$$

Logo, Q é (GH) em T^2 .

Vemos, com este exemplo, que uma perturbação do operador

$$\tilde{Q} = D_2^2 + D_3^2 + 2 \cos x_1,$$

com o fator $ri(2 + \tau)$, $r \geq 1$, pode torná-lo (GH), sem que seja preciso analisar a hipoeleticidade global de $\tilde{Q}$.

3.5.3 Demonstração do teorema

Podemos escrever: $Q = q(D') + 2 \cos x_1 = q(D') + e^{ix_1} + e^{-ix_1}$.

Seja $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ tal que $Qu = f \in C^\infty(T^n)$.

Substituindo as expansões em séries de Fourier de u e f na equação acima, teremos: $\forall k = (k_1, k') \in \mathbf{Z}^n$, onde $k' \in \mathbf{Z}^{n-1}$, vale:

$$q(k')\hat{u}(k) + \hat{u}(k - e_1) + \hat{u}(k + e_1) = \hat{f}(k),$$

onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{Z}^n$.

Para cada $k' \in \mathbf{Z}^{n-1}$ fixado, façamos:

$$k_1 = j; \quad j \in \mathbf{Z}; \quad a_j = \frac{q(k')}{i} = c; \quad f_j = \hat{f}(j, k'); \quad v_j = i^j \hat{u}(j - 1, k')$$

e chegaremos à equação:

$$v_{j+2} = cv_{j+1} + v_j - f_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Definimos, para $j = 1, 2, \dots$, p_j e q_j como no lema (3.1), os quais, neste caso, dependem de k' , mas ainda verificam o resultado daquele lema:

$$p_{j+1}q_j - p_jq_{j+1} = (-1)^j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \forall k' \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Por hipótese, temos: $|a_j| = |c| = |q(k')| \geq 2 + \tau$, $\tau > 0$, para todo $k' \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Logo, $\exists K > 1$, independente de j e k' , tal que $|a_j| \geq 1 + K$, para $j \geq 1$, e as hipóteses do lema (3.2) continuam válidas. Portanto, para todo $k' \in \mathbb{Z}^{n-1}$ e todo $j \geq 4$, vale:

$$|q_j| \geq K^{j-3}; \quad |p_j| \geq K^{j-3}.$$

Definimos

$$t = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_j}{q_j} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{q_j q_{j+1}}.$$

e pelo lema (3.3), existem $K_0 > 0$ e $j_0 \geq 1$, independentes de j e k' , tais que:

$$|p_j - tq_j| \leq K_0 |q_j|^{-1}, \quad \text{para } j \geq j_0.$$

A solução da equação $v_{j+2} = cv_{j+1} + v_j - f_j$, $j = 1, 2, \dots$, com $v_1 = \alpha$; $v_2 = \beta$, segue como no lema (3.4), com a diferença de que os termos t , p_ν , q_ν agora dependem de k' .

Novamente, podemos escrever:

$$v_j = \alpha p_j + (\beta - \gamma_1) q_j + r_j, \quad \text{onde } r_j = T_1 + T_2 - f_{j-2}$$

e, observando que as estimativas obtidas para T_1 e T_2 no teorema (3.1) só dependiam das desigualdades dos lemas (3.2) e (3.3), e estas continuam válidas, segue que T_1, T_2 decrescem rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$.

Como $u \in \mathcal{D}'(T^n)$, da mesma maneira que na seção (3.3), concluímos que $\alpha t + \beta - \gamma_1 = 0$.

Resolvendo a equação de diferenças para $j \leq 0$, chegaremos à equivalente: $w_{j+2} = cw_{j+1} + w_j + (-1)^j f_{-j}$, com as condições iniciais: $w_1 = -v_1 = -\alpha$ e $w_2 = v_0 = \beta + iq(k')\alpha + f_0$.

Pelo lema (3.4), a solução desta última é dada por:

$$w_j = -\alpha p_j + (\beta + f_0 - i\alpha q(k'))q_j + \tilde{\varphi}_j,$$

onde $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2 = 0$ e para $j \geq 3$:

$$\tilde{\varphi}_j = (-1)^j f_{2-j} - \sum_{\mu=1}^{j-3} f_{-\mu} \{p_j q_{\mu+1} - q_j p_{\mu+1}\},$$

ou ainda,

$$w_j = -\alpha p_j + (\beta + f_0 + \gamma_2 + i\alpha q(k'))q_j + \tilde{r}_j,$$

onde $\tilde{r}_j = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + (-1)^j f_{2-j}$ decai rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$.

Do fato de $u \in \mathcal{D}'$, segue que:

$$-\alpha t + \beta + f_0 + \gamma_2 + i\alpha q(k') = 0$$

e, junto com:

$$\alpha t + \beta - \gamma_1 = 0,$$

temos:

$$\alpha = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + f_0}{2t - iq(k')}; \quad \beta = \frac{(t - iq(k'))\gamma_1 - \gamma_2 t - t f_0}{2t - iq(k')}.$$

Observemos que, novamente, α e β não dependem de j . Resta-nos mostrar que α decresce rapidamente quando $j, |k'| \rightarrow \infty$.

Para isto, vejamos que $|t| < 1$.

De fato, temos:

$$|t| = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|p_j|}{|q_j|} \text{ e sabemos que:}$$

$q_1 = 0$	$p_1 = 1; p_2 = 0$
$q_2 = 1$	$p_3 = cp_2 + p_1 = 1$
$q_3 = cq_2 + q_1 = c$	$p_4 = cp_3 + p_2 = c$
$q_4 = cq_3 + q_2 = c^2 + 1$	$p_5 = cp_4 + p_3 = c^2 + 1$
$\vdots$	$\vdots$

Daí, concluímos que $q_j = p_{j+1}$, se $j \geq 2$. Logo:

$$|t| = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|p_j|}{|p_{j+1}|}$$

e como $|p_{j+1}| \geq K|p_j|$, se $j \geq 3$, com $K > 1$, temos:

$$|t| \leq \frac{1}{K} < 1.$$

Assim:

$$|2t - iq(k')| \geq ||q(k')| - |2t|| \geq ||q(k')| - 2| \geq \tau$$

e, portanto,

$$|\alpha| \leq \frac{|\gamma_1 + \gamma_2 + f_0|}{|2t - iq(k')|} \leq \frac{1}{\tau} |\gamma_1 + \gamma_2 + f_0|$$

e podemos ver que $\gamma_1 = \gamma_1(k')$; $\gamma_2 = \gamma_2(k')$ e $f_0 = \hat{f}(0, k')$ decrescem rapidamente quando $|k'| \rightarrow \infty$, da mesma maneira que na seção (3.3).

E, com isso, podemos mostrar que $\hat{u}(j, k')$ tem decrescimento rápido quando $j, |k'| \rightarrow \infty$ e concluímos que $u \in C^\infty(T^n)$.

□

A seguir, enunciaremos um outro resultado bastante significativo tratado em [Yos], o qual não será demonstrado neste trabalho:

3.5.4 Outra classe de operadores

Sejam m e s inteiros tais que $m \geq s \geq 1$. Consideremos o operador em T^n :

$$(*) \quad Pu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u + \sum_{|\beta| \leq m-s} b_\beta(x) D^\beta u = f(x),$$

onde $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e $b_\beta, f(x) \in C^\infty(T^n)$.

Assumimos que

$$\hat{b}_\beta(0) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} b_\beta(x) dx = 0, \quad \forall \beta \text{ com } |\beta| \leq m-s.$$

Tomemos as expansões em séries de Fourier:

$$b_\beta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{b}_\beta(k) e^{ik \cdot x}.$$

Definimos Γ_p como sendo a envoltória convexa do fecho do conjunto:

$$A = \{tk; t \geq 0, \hat{b}_\beta(k) \neq 0 \text{ para algum } \beta : |\beta| \leq m - s\} \cup \{0\}.$$

Seja $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ e denotemos a m -ésima parte homogênea de $p(\xi)$ por $p_m(\xi)$, assumindo que $p_m(\xi) \neq 0$.

Suponhamos que sejam válidas as condições:

- (B.1) Γ_p é próprio, i.e., Γ_p não contém nenhuma reta completa (Γ_p pode conter apenas semi-retas).
- (B.2) $p_m(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \Gamma_p \setminus \{0\}$ (ou seja, exige-se aqui certa “elitidade” do operador em Γ_p).
- (B.3) A multiplicidade das raízes da equação $p_m(\xi) = 0$ não excede s dado em (*).

Então vale o seguinte teorema:

Teorema 3.3 *Se valem (B.1), (B.2) e (B.3), então P é (GH) se, e somente se, existem constantes $c \in \mathbb{R}$, $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tais que :*

$$(B.4) \quad |p(k)| > K_1(1 + |k|)^c, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, |k| \geq K_2.$$

Observemos que (B.4) é análoga à condição (LM) do primeiro teorema do capítulo 2, mesmo aqui se tratando de um operador mais geral (no sentido de que pode apresentar muitos coeficientes variáveis).

A prova da *suficiência* envolve a construção de operadores pseudo-diferenciais que forneçam estimativas das normas de Sobolev de uma solução $u \in \mathcal{D}'$ da equação $Pu = f$, com $f \in C^\infty(T^n)$. A obtenção de tais estimativas exige um trabalho árduo.

A prova da *necessidade* é feita por contrapositiva e segue a mesma idéia, utilizando-se de outras estimativas e de um resultado que envolve idéias bastante geométricas (lema (3.1) de [Yos]).

Apêndice A

Resultado: As topologias descritas, respectivamente, pelas semi-normas de Sobolev:

$$\|\varphi\|_{1,r} = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^{2r} |\hat{\varphi}(k)|^2 \right]^{1/2}$$

e

$$\|\varphi\|_{2,r} = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^{2r} |\hat{\varphi}(k)|^2 \right]^{1/2}$$

coincidem em $C_0^\infty(T^n)$.

Prova:

i) Inicialmente, observemos que uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^\infty(T^n)$ converge para zero neste espaço se, e somente se, ela converge para zero em cada uma das semi-normas que descrevem sua topologia.

De fato:

Vimos que $C^\infty(T^n)$ é um espaço de Fréchet cuja métrica pode ser dada por:

$$d(f, g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f - g)}{1 + p_j(f - g)},$$

onde $p_j(f) = \|f\|_{2,j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ (utilizamos aqui, o fato de $C^\infty(T^n)$ ser isomorfo e homeomorfo a $S(\mathbb{Z}^n)$, através do operador $\wedge$).

Assim, suponhamos que $f_n \rightarrow 0$ em $C^\infty(T^n)$. Então, dado ε , $0 < \varepsilon < 1/2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(f_n, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f_n)}{1 + p_j(f_n)} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\forall j \geq 0, \quad \frac{p_j(f_n)}{1 + p_j(f_n)} < \varepsilon \Leftrightarrow p_j(f_n) < \varepsilon + \varepsilon p_j(f_n)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq p_j(f_n) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon, \forall n \geq n_0$$

donde concluimos que: $\forall j \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} p_j(f_n) = 0$.

Reciprocamente, se $p_j(f_n) \rightarrow 0, \forall j = 1, 2, \dots$, então:

dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(j)$ tal que $p_j(f_n) < \varepsilon/4, \forall n \geq n_0$.

Como

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f_n)}{1 + p_j(f_n)} < \infty, \text{ existe } j_0 > 0 \text{ tal que :}$$

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f_n)}{1 + p_j(f_n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n_1 = \max\{n_0(0), \dots, n_0(j_0 - 1)\}$, teremos:

para todo $n \geq n_1$ vale:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f_n)}{1 + p_j(f_n)} &= \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f_n)}{1 + p_j(f_n)} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f_n)}{1 + p_j(f_n)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{p_j(f_n)}{2^j} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{4} \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{1}{2^j} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ii) Como $C_0^\infty(T^n)$ tem a topologia induzida de $C^\infty(T^n)$, então uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergirá em $C_0^\infty(T^n)$ se, e somente se, ocorrer a convergência em cada uma das semi-normas p_j .

Assim, mostraremos que as semi-normas de Sobolev $\|\cdot\|_{1,j}$ e $\|\cdot\|_{2,j}$ são equivalentes em $C_0^\infty(T^n)$, para cada $j = 0, 1, 2, \dots$ e, então, concluimos a prova.

Com efeito, se $f \in C_0^\infty(T^n)$, então $\hat{f}(0) = 0$.

Logo:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^{2j} |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (1 + |k|)^{2j} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_{1,j}.$$

Assim,

$$\forall j \geq 0, \|f\|_{2,j} = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^{2j} |\hat{f}(k)|^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^{2j} |\hat{f}(k)|^2 \right]^{1/2} = \|f\|_{1,j}$$

e ainda, $\forall j \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, vale:

$$(1 + |k|)^{2j} |\hat{f}(k)|^2 \leq (2|k|)^{2j} |\hat{f}(k)|^2, \text{ donde temos:}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{1,j} &= \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (1 + |k|)^{2j} |\hat{f}(k)|^2 \right]^{1/2} \leq 2^j \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |k|^{2j} |\hat{f}(k)|^2 \right]^{1/2} \\ &= 2^j \|f\|_{2,j} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|f\|_{2,j} \leq \|f\|_{1,j} \leq 2^j \|f\|_{2,j}, \text{ para todo } j = 0, 1, 2, \dots$$

□

Bibliografia

- [Berg] Bergamasco, A.P., *Hipoeliticidade Global para Algumas Classes de Operadores*, dissertação de Livre-Docência, ICMSC-USP, 1989.
- [G-W] Greenfield, S.J. and Wallach, N.R., *Global Hypoellipticity and Liouville Numbers*, Proceedings Am. Math. Soc., 31, 112-114, 1972.
- [Hale] Hale, J., *Ordinary Differential Equations*, Wiley Interscience, 91-92, 1969.
- [Hou] Hounie, J., *Teoria Elementar das Distribuições*, 12o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979.
- [Ior] Íório Jr., R. e Íório, V.M., *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução*, IMPA – Projeto Euclides, 1988.
- [Mos] Moser, J., *Quasi-periodic Solutions of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, Vol.20, no 1, 29-45, 1989.
- [Rud] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 48-49, 1973.
- [Yos] Yoshino, M., *A Class of Globally Hypoelliptic Operators on the Torus*, Math. Z., 201, 1-11, 1989.
- [War] Warner, F.W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 231-238, 1971.
- [Zan] Zani, S.L., *Hipoeliticidade Global para Operadores de Segunda Ordem*, dissertação de mestrado, ICMSC-USP, 1988.