Os critérios de Pólya na esfera

Jean Carlo Guella

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Jean Carlo Guella

Os critérios de Pólya na esfera

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

USP – São Carlos
Julho de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G925c Guella, Jean Carlo
Os critérios de Polya na esfera / Jean Carlo Guella; orientador Valdir Antonio Menegatto. -- São Carlos, 2015.
67 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Análise na esfera. 2. Núcleos positivos definidos. 3. Critério de Pólya. I. Menegatto, Valdir Antonio, orient. II. Título.

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Jean Carlo Guella

The Pólya criteria on sphere

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

USP – São Carlos
July 2015

Agradecimentos

Agradeço à todas as pessoas que me apoiaram, em especial aos meus pais Valdir Nunes Guella e Katia Cristina Esmolari da Silva Guella e familiares pelo suporte e carinho; ao meu orientador Valdir Antonio Menegatto pelo incentivo e dedicação; aos meus amigos, ao pessoal do ICMC e da república pelo companheirismo e amizade.

Por fim agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma demonstração detalhada para um conhecido teorema de I. J. Schoenberg que caracteriza certas funções positivas definidas em esferas. Analisamos ainda um critério para a obtenção de positividade definida de uma função a partir de condições de suavidade e convexidade dela, em uma tentativa de ratificar alguns resultados da literatura conhecidos como critérios de Pólya.

Palavras-chave: Análise na esfera, Núcleos positivos definidos, Critério de Pólya.

Abstract

In this work we present a proof for a famous theorem of Schoenberg on positive definite functions on spheres. We analyze some results that deduce positive definiteness from differentiability and convexity assumption on the function, an attempt to ratify some Pólya type conjectures found in the literature.

Key-words: Analysis on spheres, Positive definite kernels, Pólya criteria.

Sumário

Introdução	15
1 O teorema de Schoenberg	17
1.1 Harmônicos esféricos	17
1.2 Os polinômios de Gegenbauer	26
1.3 Uma demonstração para o Teorema de Schoenberg	31
2 Funções m-vezes monótonas	43
2.1 Representação integral de uma função m -vezes monótona	43
3 Critério de Pólya	51
3.1 Um pequeno histórico e objetivos	51
3.2 Redução a um caso mais simples	52
3.3 Alguns resultados auxiliares	55
3.4 O caso $\lambda = 2$	57
3.5 O caso $\lambda = 3$	60
Bibliografia	65

Introdução

A classe das funções positivas definidas na esfera são utilizadas tanto em aspectos teóricos quanto aplicados. Funções positivas definidas aparecem em Álgebra Linear, Análise Funcional, Teoria da Aproximação, Estatística, etc., como pode ser comprovado em [5, 9, 19]. Mais recentemente, elas tem sido usadas com frequência na Teoria do Aprendizado ([10, 11, 25]), em problemas envolvendo a análise espectral fina de operadores integrais ([7, 14, 21]) e em várias situações em que espaços de Hilbert de reprodução entram na formulação dos problemas ([20, 22, 27]).

Em [24], I. J. Schoenberg caracterizou as funções contínuas, isotrópicas e positivas definidas na esfera unitária $\mathbb{S}^d$ como sendo aquelas dadas por expansões de Fourier uniformemente convergentes em termos de polinômios de Gegenbauer, com coeficientes não negativos. Há pouco mais de 10 anos, Chen, Menegatto e Sun apresentaram condições necessárias e suficientes para a positividade definida estrita de uma função na classe definida por Schoenberg ([7]). Essencialmente, tais condições envolvem propriedades sobre o conjunto de coeficientes de Fourier positivos na expansão da função. Tais condições não são de verificação imediata já que elas dependem do conhecimento da série de Fourier da função, algo que pode ser trabalhoso ou mesmo de difícil obtenção. Sendo assim, é natural a busca por condições mais fracas que impliquem em positividade definida estrita.

Neste projeto, estaremos interessados em condições que envolvem a diferenciabilidade e a convexidade da função, resultados que apresentam estas hipóteses são rotulados por critérios de Pólya para positividade definida. Mais especificamente, consideraremos aqueles considerados em [6, 17] e referências lá citadas, os quais são baseados em um critério similar para funções positivas definidas em $\mathbb{R}^d$ descrito em [2].

No primeiro capítulo apresentamos os conceitos pertinentes ao trabalho, incluindo uma demonstração para o teorema de Schoenberg, adotando como roteiro as referências [4, 12].

No segundo capítulo analisamos a classe das funções m -vezes monótonas e demonstramos um critério que caracteriza tais funções por integração, adequando resultados descritos em [16].

No último capítulo demonstramos um critério de Pólya para dimensões baixas, utilizando caracterização do Capítulo 2. Essencialmente, ratificamos resultados originalmente demonstrados em [6, 17], simplificando alguns argumentos e ajustando outros. Um critério de Pólya para funções positivas definidas em esferas, válido em qualquer dimensão, continua sendo um problema que desafia a comunidade matemática atuante em problemas da análise na esfera.

✓

O teorema de Schoenberg

Neste capítulo, descrevemos todas as ferramentas básicas no âmbito da análise na esfera que serão necessárias na obtenção dos resultados principais deste trabalho. Além disso, incluímos uma demonstração para um resultado de Schoenberg ([24]), o qual caracteriza uma certa classe de funções positivas definidas em esferas.

1.1 Harmônicos esféricos

Nesta seção, introduzimos os harmônicos esféricos e algumas de suas propriedades pertinentes ao trabalho. Os resultados aqui descritos, bem como outros dentro do mesmo tema, podem ser encontrados no Capítulo 1 de [12] e no Capítulo 2 de [4].

Definição 1.1.1. *Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, então o monômio x^α em d variáveis é o polinômio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$. Seu grau é o inteiro $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$. Um polinômio homogêneo P de grau n em d variáveis é uma combinação linear de monômios de grau n , isto é:*

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha x^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Note que se P é um polinômio homogêneo de grau n , então

$$P(x) = \|x\|^n P\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad x \neq 0,$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma usual de $\mathbb{R}^d$.

Antes de prosseguir, definimos dois espaços vetoriais: o espaço Π_n^d de todos os polinômios de grau no máximo n em d variáveis e seu subespaço $\mathbb{P}_n^d$ formado por todos os polinômios homogêneos de grau n em Π_n^d .

Lema 1.1.2. *Valem as fórmulas*

$$\dim \mathbb{P}_n^d = \binom{n+d-1}{n} = \dim \Pi_n^{d-1}.$$

Demonstração: Inicialmente notamos que provar a primeira igualdade equivale a contar o número de multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^d$ que satisfazem $|\alpha| = n$. Isso dito, usaremos indução sobre d para ratificar a fórmula. Como o caso $d = 1$ é óbvio, suponha que a fórmula vale para o inteiro d . Seja $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ e escreva $i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, para denotar a última componente de α . Como pela hipótese de indução, o número de possibilidades para as demais componentes é $\binom{(n-i)+d-1}{n-i}$, segue que

$$\dim \mathbb{P}_n^{d+1} = \sum_{i=0}^n \binom{(n-i)+d-1}{n-i} = \binom{n+d}{n}.$$

Para a outra igualdade, basta notar que Π_n^d é a soma direta de $\mathbb{P}_i^d, i = 0, 1, \dots, n$. Logo,

$$\dim \Pi_n^d = \sum_{i=0}^n \dim \mathbb{P}_i^d = \sum_{i=0}^n \binom{i+d-1}{i} = \binom{n+d}{n},$$

e a demonstração está completa. ■

No lema a seguir, denotamos por Δ o operador de Laplace usual em d variáveis, isto é,

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_d^2.$$

Definição 1.1.3. *Se $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{H}_n^d$ o subespaço de $\mathbb{P}_n^d$ formado por aqueles polinômios que são harmônicos. Em símbolos,*

$$\mathcal{H}_n^d = \{P \in \mathbb{P}_n^d : \Delta P = 0\}.$$

Definição 1.1.4. *Um harmônico esférico de grau n em d variáveis é a restrição de um polinômio de $\mathcal{H}_n^d$ à esfera unitária $\mathbb{S}^{d-1}$ de $\mathbb{R}^d$.*

Os harmônicos esféricos possuem uma propriedade interessante de ortogonalidade. Para registrar tal propriedade, considere a medida de Lebesgue usual σ em $\mathbb{S}^{d-1}$ e o espaço de Hilbert usual $L^2(\mathbb{S}^{d-1}) := L^2(\mathbb{S}^{d-1}, \sigma)$. O produto interno neste espaço é dado por

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = \frac{1}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x)g(x)d\sigma(x).$$

onde

$$\omega_d = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\sigma(x) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)},$$

ou seja, ω_d é a área de superfície de $\mathbb{S}^{d-1}$.

Todos os espaços de funções introduzidos até agora são subespaços do espaço de Hilbert acima.

Teorema 1.1.5. *Se $Y_m \in \mathcal{H}_m^d$, $Y_l \in \mathcal{H}_l^d$ e $l \neq m$, então $\langle Y_m, Y_l \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0$.*

Demonstração: Utilizaremos a identidade de Green para reduzir a integração em $\mathbb{S}^{d-1}$ a uma integração no disco unitário $D = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$. Se $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, então o vetor normal $\vec{n}$ a $\mathbb{S}^{d-1}$ no ponto x é o próprio vetor x e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \vec{n}}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(x + tx) - Y(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(1+t)^k - 1}{t} \right] Y(x) = kY(x), \quad Y \in \mathcal{H}_k^d, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim, se $Y_m \in \mathcal{H}_m^d$ e $Y_l \in \mathcal{H}_l^d$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D Y_m \Delta Y_l - Y_l \Delta Y_m dy = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_m \frac{\partial Y_l}{\partial \vec{n}}(x) - Y_l \frac{\partial Y_m}{\partial \vec{n}}(x) d\sigma(x) \\ &= (l - m) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_m(x) Y_l(x) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Como $l \neq m$, segue que $\langle Y_m, Y_l \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0$. ■

Teorema 1.1.6. *A seguinte decomposição para espaços de polinômios homogêneos vale:*

$$\mathbb{P}_n^d = \bigoplus_{0 \leq j \leq n/2} \|x\|^{2j} \mathcal{H}_{n-2j}^d. \quad (1.1)$$

Demonstração: Usaremos indução sobre n . Como $\mathbb{P}_0^d = \mathbb{R} = \mathcal{H}_0^d$, a fórmula vale para $n = 0$. Da mesma forma,

$$\mathbb{P}_1^d = \left\{ \sum_{i=1}^d c_i x_i : c_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{H}_1^d.$$

Suponha agora que a fórmula vale para $n - 2$ e provemos que ela vale para n . A transformação linear $T: \mathbb{P}_n^d \rightarrow \mathbb{P}_{n-2}^d$ dada por $T(P) = \Delta(P)$, $P \in \mathbb{P}_n^d$, está bem definida. Seu núcleo é $\ker(T) = \{P \in \mathbb{P}_n^d \mid \Delta(P) = 0\} = \mathcal{H}_n^d$ e

$$\dim \mathbb{P}_n^d = \dim \mathcal{H}_n^d + \dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim \mathcal{H}_n^d + \dim \mathbb{P}_{n-2}^d. \quad (1.2)$$

Em particular, $\|x\|^2 \mathbb{P}_{n-2}^d$ é um subspaço vetorial de $\mathbb{P}_n^d$ isomorfo a $\mathbb{P}_{n-2}^d$. Como pela hipótese de indução,

$$\mathbb{P}_{n-2}^d = \bigoplus_{0 \leq j \leq (n-2)/2} \|x\|^{2j} \mathcal{H}_{n-2-2j}^d,$$

segue que

$$\|x\|^2 \mathbb{P}_{n-2}^d = \bigoplus_{0 \leq j \leq (n-2)/2} \|x\|^{2j+2} \mathcal{H}_{n-2-2j}^d.$$

No entanto, o Teorema 1.1.5 implica que $\mathcal{H}_n^d \perp \|x\|^2 \mathbb{P}_{n-2}^d$, onde a ortogonalidade refere-se ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$. Assim sendo,

$$\dim \mathcal{H}_n^d + \dim \mathbb{P}_{n-2}^d = \dim \mathcal{H}_n^d + \dim \|x\|^2 \mathbb{P}_{n-2}^d \leq \dim \mathbb{P}_n^d. \quad (1.3)$$

Logo, das igualdades (1.2) e (1.3), temos que $\dim \mathcal{H}_n^d + \dim \|x\|^2 \mathbb{P}_{n-2}^d = \dim \mathbb{P}_n^d$. Portanto,

$$\mathbb{P}_n^d = \mathcal{H}_n^d \bigoplus \|x\|^2 \mathbb{P}_{n-2}^d,$$

como desejado. ■

Registramos duas consequências do teorema anterior.

Corolário 1.1.7. *Se $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0, 1$, então*

$$\dim \mathcal{H}_n^d = \dim \mathbb{P}_n^d - \dim \mathbb{P}_{n-2}^d = \binom{n+d-1}{n} - \binom{n+d-3}{n-2}.$$

Corolário 1.1.8. *Se $P \in \mathbb{P}_n^d$ e*

$$\langle P, Q \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0, \quad Q \in \mathbb{P}_i^d, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

então $P \in \mathcal{H}_n^d$. Analogamente, se $P \in \mathcal{H}_n^d$ e $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, então

$$\langle P, Q \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0, \quad Q \in \mathbb{P}_i^d.$$

No teorema abaixo, incluímos a invariância com relação a transformações ortogonais na discussão. Denotaremos por $O(d)$ o conjunto de todas as transformações ortogonais sobre $\mathbb{R}^d$.

Teorema 1.1.9. *Se $P \in \mathcal{H}_n^d$ e $Q \in O(d)$, então $P \circ Q \in \mathcal{H}_n^d$. Além disso, se $\{Y_\alpha : \alpha = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{H}_n^d\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_n^d$, então $\{Y_\alpha \circ Q : \alpha = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{H}_n^d\}$ também é.*

Demonstração: Denote por $(a_{i,j})_{i,j=1}^d$ a matriz que representa $Q \in O(d)$ com relação à base ortonormal canônica de $\mathbb{R}^d$. Claramente, $P \circ Q \in \mathbb{P}_n^d$. Por outro lado, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(Q(x))}{\partial x_i} &= \frac{\partial P(\sum_{k=1}^d a_{1,k} x_k, \sum_{k=1}^d a_{2,k} x_k, \dots, \sum_{k=1}^d a_{d,k} x_k)}{\partial x_i} \\ &= \sum_{k=1}^d a_{k,i} \frac{\partial P}{\partial x_i}(Q(x)), \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

é fácil ver que

$$\frac{\partial^2 P(Q(x))}{\partial x_i^2} = \sum_{k=1}^d a_{k,i}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}(Q(x)) = \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}(Q(x)), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Consequentemente,

$$\Delta P(Q(x)) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}(Q(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

e a justificativa da primeira parte do teorema está resolvida. Se o conjunto $\{Y_\alpha : \alpha = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{H}_n^d\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_n^d$, então

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_\alpha(Q(x)) Y_\beta(Q(x)) d\sigma(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_\alpha(x) Y_\beta(x) d\sigma(x),$$

já que a medida σ em $\mathbb{S}^{d-1}$ é invariante por elementos do conjunto $O(d)$ ([15, p.80]).■

No próximo resultado, utilizaremos um produto interno alternativo em $\mathbb{P}_n^d$. Ele é dado por

$$\langle P, Q \rangle_\partial = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha \partial^\alpha Q = \sum_{|\alpha|=n} \alpha! a_\alpha b_\alpha,$$

onde $P(x) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha$, $Q = \sum_{|\beta|=n} b_\beta x^\beta$ e $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_d^{\alpha_d}$.

Proposição 1.1.10. *As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) $(\mathbb{P}_n^d, \langle \cdot, \cdot \rangle_\partial)$ é um espaço de Hilbert.
- (ii) A função $K_{n,d} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$K_{n,d}(x, y) = \frac{1}{n!} \langle x, y \rangle^n, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

é tal que $K_{n,d}(\cdot, y) \in \mathbb{P}_n^d$ para todo $y \in \mathbb{R}^d$ e $\langle Q, K_{n,d}(\cdot, y) \rangle_\partial = Q(y)$ para todo $Q \in \mathbb{P}_n^d$ e $y \in \mathbb{R}^d$.

- (iii) Se $P \in \mathbb{P}_n^d$ e $Q \in \mathcal{H}_n^d$, $\langle P, Q \rangle_\partial = 2^n (d/2)_n \langle P, Q \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$.

Demonstração: A justificativa de (i) será omitida uma vez que envolve tão somente cálculos triviais. Para o item (ii), seja $y \in \mathbb{R}^d$ e defina $f_y : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ pela expressão

$$f_y(x) = K_{n,d}(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Claramente, cada f_y pertence a $\mathbb{P}_n^d$ pelas propriedades do produto interno. Se $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = n$ e $P(x) = x^\alpha$, então

$$\langle P, K_{n,d}(\cdot, y) \rangle_\partial = \frac{1}{n!} \frac{\partial^\alpha (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d)^n}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Efetutando-se as derivadas uma a uma, vem que

$$\begin{aligned}
\langle P, K_{n,d}(\cdot, y) \rangle_{\partial} &= \frac{n(n-1)\dots(n-\alpha_d)}{n!} y_d^{\alpha_d} \frac{\partial^{\alpha-\alpha_d}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d)^{n-\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_{d-1}^{\alpha_{d-1}}} \\
&= \frac{n\dots(n-\alpha_d-\alpha_{d-1})}{n!} y_{d-1}^{\alpha_{d-1}} y_d^{\alpha_d} \frac{\partial^{\alpha-\alpha_d-\alpha_{d-1}}(x_1 y_1 + \dots + x_d y_d)^{n-\alpha_d-\alpha_{d-1}}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_{d-2}^{\alpha_{d-2}}} \\
&\vdots \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n+1-\sum_{i=1}^d \alpha_i)}{n!} y_1^{\alpha_1} \dots y_{d-1}^{\alpha_{d-1}} y_d^{\alpha_d} = y^{\alpha}
\end{aligned}$$

Pela linearidade do produto interno, concluímos que $\langle Q, K_{n,d}(\cdot, y) \rangle_{\partial} = Q(y)$, para todo $Q \in \mathbb{P}_n^d$. Por fim, para justificarmos (iii), começamos observando que se f e g são polinômios em d variáveis de grau menor do que m e no vetor $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_d)$ considerarmos x_i variável e as outras coordenadas constantes fixas, usando integração por partes não é difícil ver que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_i [f(x)g(x)e^{-\|x\|^2/2}] dx_i = 0.$$

De fato, derivando vem que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \partial_i [f(x)g(x)e^{-\|x\|^2/2}] dx_i &= \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i(f(x))g(x)e^{-\|x\|^2/2} dx_i \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\partial_i(g(x))e^{-\|x\|^2/2} dx_i \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x)g(x)e^{-\|x\|^2/2} dx_i.
\end{aligned}$$

Esta informação e o Teorema de Fubini-Tonelli permitem a dedução da fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_i(f(x))g(x)e^{-\|x\|^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-\partial_i(g(x)) + x_i g(x))e^{-\|x\|^2/2} dx. \quad (1.4)$$

Isso dito, notamos agora que pela linearidade de ambos, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$, é suficiente provarmos (iii) somente no caso em que $P(x) = x^{\alpha}$. Para tanto, comecemos observando que

$$\langle P, Q \rangle_{\partial} = \langle P, Q \rangle_{\partial} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2/2} dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^{\alpha}(Q(x))e^{-\|x\|^2/2} dx,$$

uma vez que $\langle P, Q \rangle_\partial = \partial^\alpha Q(x)$ é uma constante. Por outro lado, efetuando-se as contas na integral via (1.4)

$$\begin{aligned}\langle P, Q \rangle_\partial &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_1^{\alpha_1-1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_d^{\alpha_d} (Q(x)) (-0 + x_1) e^{-\|x\|^2/2} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_1^{\alpha_1-2} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_d^{\alpha_d} (Q(x)) (-1 + x_1^2) e^{-\|x\|^2/2} dx \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_d^{\alpha_d} (Q(x)) (x_1^{\alpha_1} - s_1(x)) e^{-\|x\|^2/2} dx,\end{aligned}$$

onde $s_1(x) \in \Pi_{\alpha_1-1}^1$. Prosseguindo de maneira similar obtemos

$$\langle P, Q \rangle_\partial = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} Q(x) (x^\alpha - s(x)) e^{-\|x\|^2/2} dx,$$

onde $s(x) \in \Pi_{n-1}^d$. Introduzindo coordenadas polares, temos que

$$\begin{aligned}\langle P, Q \rangle_\partial &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty r^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Q(rx) [(rx)^\alpha - s(rx)] e^{-\|rx\|^2/2} \sigma(x) dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty r^{2n+d-1} e^{-r^2/2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Q(x) x^\alpha \sigma(x) dr \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty r^{n+d-1} e^{-r^2/2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Q(x) s(rx) \sigma(x) dr.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}_n^d$ é ortogonal a $\mathbb{P}_i^d$ em $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, concluímos que

$$\begin{aligned}\langle P, Q \rangle_\partial &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty r^{2n+d-1} e^{-r^2/2} dr \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Q(x) x^\alpha \sigma(x) \\ &= \left(\frac{\omega_d}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty r^{2n+d-1} e^{-r^2/2} dr \right) \left(\frac{1}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Q(x) x^\alpha \sigma(x) \right) \\ &= 2^n (d/2)_n \langle P, Q \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}.\end{aligned}$$

Isso termina a demonstração. ■

No teorema abaixo introduzimos um exemplo concreto de harmônicos esféricos em $\mathbb{S}^{d-1}$, $d > 2$. Usaremos a seguinte notação

$$(a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1), \quad a \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.1.11. *Fixe $d > 2$ e $\alpha \in \mathbb{N}^d$ com $|\alpha| = n$. As seguintes afirmações referentes à função*

$$p_\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{2^n ((d-2)/2)_n} \|x\|^{2n+d-2} \partial^\alpha \{\|x\|^{-d+2}\}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

valem:

(i) Se $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^d$, então

$$p_{\alpha+e_i}(x) = x_i p_\alpha(x) - \frac{1}{2n+d-2} \|x\|^2 \partial_i p_\alpha(x), \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

(ii) Se $n \geq 2$, então

$$p_\alpha(x) = x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad q_\alpha \in \mathbb{P}_{n-2}^d.$$

(iii) $p_\alpha \in \mathcal{H}_n^d$.

Demonstração: Começamos calculando as derivadas parciais de p_α :

$$\begin{aligned} \partial_i(p_\alpha(x)) &= \frac{(-1)^n}{2^n ((d-2)/2)_n} \left[(2n+d-2)x_i \|x\|^{2n+d-4} \partial^\alpha \{\|x\|^{-d+2}\} \right. \\ &\quad \left. + \|x\|^{2n+d-2} \partial^{\alpha+e_i} \{\|x\|^{-d+2}\} \right]. \end{aligned}$$

Introduzindo p_α de volta na expressão, temos que

$$\begin{aligned} \partial_i(p_\alpha(x)) &= (2n+d-2) \frac{x_i p_\alpha(x)}{\|x\|^2} \\ &\quad - \frac{2(n+(d-2)/2)}{\|x\|^2} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} ((d-2)/2)_{n+1}} \|x\|^{2(n+1)+d-2} \partial^{\alpha+e_i} \{\|x\|^{-d+2}\} \\ &= (2n+d-2) \frac{x_i p_\alpha(x)}{\|x\|^2} - (2n+d-2) \frac{p_{\alpha+e_i}(x)}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

Isolando $p_{\alpha+e_i}$ chegamos na fórmula do item (i). O item (ii) tem que ser manuseado por indução. Se $n = 2$, então $\alpha = e_i + e_j$ para algum par (i, j) . Logo,

$$p_\alpha(x) = \frac{(-1)^2}{2^2 ((d-2)/2)_2} \|x\|^{2+d} \partial_i \partial_j \{\|x\|^{-d+2}\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p_\alpha(x) &= \frac{1}{(d-2)d} \|x\|^{d+2} \partial_i ((-d+2) \|x\|^{-d} x_j) \\ &= -\frac{1}{d} \|x\|^{d+2} (-d \|x\|^{-d-2} x_i x_j) = x_i x_j = x^\alpha. \end{aligned}$$

Em particular, (ii) vale neste caso com $q_\alpha = 0$. Suponhamos agora que a fórmula vale quando $|\alpha| = n$ e provemos que ela vale para o multi-índice $\alpha + e_i$, o qual satisfaz $|\alpha + e_i| = n + 1$. Usando nossa hipótese e o item (1), temos que

$$\begin{aligned} p_{\alpha+e_i} &= x_i p_\alpha(x) - \frac{1}{2n+d-2} \|x\|^2 \partial_i p_\alpha(x) \\ &= x_i (x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha(x)) - \frac{1}{2n+d-2} \|x\|^2 \partial_i p_\alpha(x) \\ &= x^{\alpha+e_i} + \|x\|^2 (x_i q_\alpha(x) - \frac{1}{2n+d-2} \partial_i p_\alpha(x)). \end{aligned}$$

Como $x_i q_\alpha(x) - (2n + d - 2)^{-1} \partial_i p_\alpha \in \mathbb{P}_{n-1}^d$, (ii) vale para $\alpha + e_i$. Para justificar (iii), observamos inicialmente que $p_\alpha \in \mathbb{P}_n^d$ devido ao item (ii). Para lidar com a harmonicidade, usaremos a relação

$$\Delta(fg)(x) = f(x)\Delta(g)(x) + g(x)\Delta(f)(x) + 2\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

que vale para funções f e g de classe C^2 sobre $\mathbb{R}^d$. Aqui, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^d$. Se $r \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\nabla(\|x\|^r) = (rx_1\|x\|^{r-2}, rx_2\|x\|^{r-2}, \dots, rx_d\|x\|^{r-2})$$

e

$$\begin{aligned} \Delta(\|x\|^r) &= \sum_{i=1}^d \partial_i (rx_i\|x\|^{r-2}) = \sum_{i=1}^d r\|x\|^{r-2} + r(r-2)x_i^2\|x\|^{r-4} \\ &= r\|x\|^{r-2}(r-2+d). \end{aligned}$$

Em particular, obtemos que $\Delta(\|x\|^{-d+2}) = 0$. Usando a relação

$$\sum_{i=1}^d x_i \partial_i g(x) = ng(x), \quad g \in \mathbb{P}_n^d,$$

ainda temos que

$$\langle \nabla(\|x\|^r), \nabla(g(x)) \rangle = \sum_{i=1}^d rx_i\|x\|^{r-2} \partial_i g(x) = rn\|x\|^{r-2}g(x), \quad g \in \mathbb{P}_n^d,$$

e

$$\Delta(\|x\|^r g) = r\|x\|^{r-2}(r-2+d)g(x) + 2rn\|x\|^{r-2}g(x) + \|x\|^r \Delta(g(x)), \quad g \in \mathbb{P}_n^d.$$

Logo, tomando $g = p_\alpha$ e $r = -2n - d + 2$, chegamos a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{(-1)^n}{2^n ((d-2)/2)_n} \partial^\alpha \Delta\{\|x\|^{-d+2}\} = \Delta(p_\alpha\|x\|^{-2n-d+2}) \\ &= \|x\|^{(-2n-d+2)} \Delta(p_\alpha(x)) \\ &\quad + (-2n-d+2)(2n+d-2+(-2n-d+2))\|x\|^{(-2n-d+2)-2} p_\alpha(x) \\ &= \|x\|^{(-2n-d+2)} \Delta(p_\alpha(x)). \end{aligned}$$

Logo, $\|x\|^r \Delta(p_\alpha(x)) = 0$, ou seja, $\Delta(p_\alpha) = 0$. Assim $p_\alpha \in \mathcal{H}_n^d$. ■

1.2 Os polinômios de Gegenbauer

Esta seção é uma continuidade da anterior. Apresentamos algumas propriedades adicionais dos harmônicos esféricos até conseguirmos introduzir os polinômios de Gegenbauer e a construção de harmônicos esféricos via tais polinômios. Possíveis referências para o material aqui descrito são as mesmas indicadas no início da seção anterior.

Começamos registrando a seguinte versão do Teorema da Aproximação de Weierstrass.

Teorema 1.2.1. *Se X é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$, então toda função contínua em X pode ser aproximada uniformemente por polinômios restritos a X .*

Pela relação do Teorema 1.1.6 temos o seguinte resultado.

Corolário 1.2.2. *Toda função contínua definida em $\mathbb{S}^{d-1}$ pode ser aproximada uniformemente por harmônicos esféricos.*

Corolário 1.2.3. *O espaço vetorial gerado pelo conjunto $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_d^n$ é denso no espaço $C(\mathbb{S}^{d-1})$ das funções contínuas em $\mathbb{S}^{d-1}$, quando este está munido da norma de $L^p(\mathbb{S}^{d-1})$, $p \in [1, \infty)$.*

O lema abaixo é um teorema elementar de aproximação para funções contínuas em $\mathbb{S}^{d-1}$. Para simplificar a notação, usaremos o símbolo $a(n, d)$ para denotar $\dim \mathcal{H}_n^d$.

Lema 1.2.4. *Se $f \in C(\mathbb{S}^{d-1})$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $Y^n \in \mathcal{H}_n^d$ tal que*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y^n(x), \quad x \in \mathbb{S}^{d-1},$$

com convergência em $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Demonstração: Pelo Corolário 1.2.3, o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_d^n$ é denso no espaço $C(\mathbb{S}^{d-1})$, quando este está munido da norma de $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$. Em particular, $L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \cap C(\mathbb{S}^{d-1})$ é um espaço separável. Portanto, tomando uma base ortonormal $\{Y_1^n, Y_2^n, \dots, Y_{a(n,d)}^n\}$ de $\mathcal{H}_n^d$ com relação ao produto interno de $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$, vemos que $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{Y_1^n, Y_2^n, \dots, Y_{a(n,d)}^n\}$ é base ortonormal de $\overline{L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \cap C(\mathbb{S}^{d-1})}$. A afirmação do enunciado do lema segue desse fato. ■

Mantendo-se a notação da demonstração do lema anterior, o operador $T_{n,d}: L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ dado por

$$T_{n,d}(f) = \sum_{k=1}^{a(n,d)} \langle f, Y_k^n \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_k^n, \quad f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

é uma projeção de $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ sobre $\mathcal{H}_n^d$, como pode ser facilmente verificado. Utilizando tal operador, introduziremos um importante núcleo sobre $\mathbb{S}^{d-1}$ que também depende do núcleo $K_{n,d}$ definido na Proposição 1.1.10.

Definição 1.2.5. Para cada n e $d \in \mathbb{N}$, com $d \geq 2$, definimos $Z_{n,d} : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$Z_{n,d}(x, y) = 2^n (d/2)_n T_{n,d}(K_{n,d}(x, \cdot))(y), \quad x, y \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Proposição 1.2.6. Para cada $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ temos que $Z_{n,d}(x, \cdot) \in \mathcal{H}_n^d$, além disso para todo $P \in \mathcal{H}_n^d$ e $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ vale $\langle Z_{n,d}(x, \cdot), P \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = P(x)$

Demonstração: É imediato que para cada $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ fixo, $Z_{n,d}(x, \cdot) \in \mathcal{H}_n^d$. Por outro lado, se $P \in \mathcal{H}_n^d$, então

$$\begin{aligned} \langle Z_{n,d}(x, \cdot), P \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} &= \langle 2^n (d/2)_n T_{n,d}(K_{n,d}(x, \cdot)), P \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} \\ &= 2^n (d/2)_n [\langle T_{n,d}(K_{n,d}(x, \cdot)) - K_{n,d}(x, \cdot), P \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} + \langle K_{n,d}(x, \cdot), P \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}] \\ &= P(x), \quad x \in \mathbb{S}^{d-1}, \end{aligned}$$

uma vez que $T_{n,d}(K_{n,d}(x, \cdot)) - K_{n,d}(x, \cdot)$ pertence ao complementar ortogonal de $\mathcal{H}_n^d$ em $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$. ■

Uma consequência imediata é que $Z_{n,d}$ é uma raiz de convolução esférica de $\mathbb{S}^{d-1}$ de si mesmo, como explicado abaixo.

Corolário 1.2.7. Vale a fórmula

$$\frac{1}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{n,d}(x, z) Z_{n,d}(y, z) d\sigma(z) = Z_{n,d}(x, y), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x, y \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Lema 1.2.8. Se $\{Y_1^n, Y_2^n, \dots, Y_{a(n,d)}^n\}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}_n^d$, então

$$Z_{n,d}(x, y) = \sum_{k=1}^{a(n,d)} Y_k^n(x) Y_k^n(y), \quad x, y \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Demonstração: Para cada $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, $Z_{n,d}(x, \cdot) \in \mathcal{H}_n^d$. Logo, existem escalares $c_k(x)$ de modo que $Z_{n,d}(x, \cdot) = \sum_{k=1}^{a(n,d)} c_k(x) Y_k^n$, $x \in \mathbb{S}^{d-1}$. Por outro lado,

$$c_j(x) = \left\langle \sum_{k=1}^{a(n,d)} c_k(x) Y_k^n, Y_j^n \right\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = \langle Z_{n,d}(x, \cdot), Y_j^n \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = Y_j^n(x), \quad x \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Isso termina a demonstração. ■

Observamos que o procedimento acima independe da base ortonormal escolhida.

Corolário 1.2.9. *O operador $T_{n,d}$ pode ser reescrito da seguinte maneira*

$$T_{n,d}(f)(x) = \langle Z_{n,d}(x, \cdot), f \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}, \quad x \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

A propriedade descrita no lema abaixo garante o que é conhecido por zonalidade ou isotropia de $Z_{n,d}$.

Lema 1.2.10. *Para cada par $x, y \in \mathbb{S}^{d-1}$, o valor $Z_{n,d}(x, y)$ depende exclusivamente de $\langle x, y \rangle$. Em outras palavras, existe uma função $Z'_{n,d}$ com domínio $[-1, 1]$ tal que*

$$Z_{n,d}(x, y) = Z'_{n,d}(x \cdot y), \quad x, y \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Demonstração: Fixe $x, y \in \mathbb{S}^{d-1}$. Se $\langle x, y \rangle = 0$, existe $Q \in O(d)$ tal que $Q(x) = (0, 0, \dots, 1)$ e $Q(y) = (0, 0, \dots, 1, 0)$, uma vez que os elementos de $O(d)$ transformam bases ortonormais de $\mathbb{R}^d$ em bases ortonormais de $\mathbb{R}^d$. Isso pode ser generalizado da seguinte forma: se $\langle x, y \rangle \neq 0$, existe $Q \in O(d)$ tal que $Q(x) = (0, 0, \dots, 1)$ e $Q(y - \langle x, y \rangle x) = (0, 0, \dots, \|y - (\langle x, y \rangle)x\|, 0)$. Portanto, $Q(x) = (0, 0, \dots, 1)$ e $Q(y) = (0, 0, \dots, \sqrt{1 - (\langle x, y \rangle)^2}, \langle x, y \rangle)$. Agora, se $\{Y_1^n, Y_2^n, \dots, Y_{a(n,d)}^n\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_n^d$, então

$$Z_{n,d}(x, y) = \sum_{k=1}^{a(n,d)} Y_k^n(x) Y_k^n(y) = \sum_{k=1}^{a(n,d)} Y_k^n(Q(x)) Y_k^n(Q(y)),$$

uma vez que $\{Y_1^n \circ Q, Y_2^n \circ Q, \dots, Y_{a(n,d)}^n \circ Q\}$ também é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_n^d$. Claramente, o lado direito da igualdade só depende de $x \cdot y$. ■

Uma fórmula menos óbvia para o operador projeção é a descrita no lema abaixo. A partir dela será possível exibir a parte $Z'_{n,d}$ de $Z_{n,d}$.

Lema 1.2.11. *Suponha que $d \geq 3$. Então*

$$T_{n,d}(P) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{4^j j! (-n + 2 + d/2)_j} \|x\|^{2j} \Delta^j P, \quad P \in \mathbb{P}_n^d.$$

Demonstração: Por linearidade, é suficiente demonstrarmos o teorema no caso em que $P(x) = x^\alpha$ e $|\alpha| = n$. Como $T_{n,d}(P) = p_\alpha$ devido ao Teorema 1.1.11-(ii), devemos então demonstrar que p_α pode ser expandido segundo a fórmula do enunciado. Isso será feito por indução. Se $n = 0$, o resultado é trivial. Suponha então que a fórmula do enunciado já vale para $0, 1, \dots, n$ e demonstremos que vale para $n + 1$. Utilizando a hipótese de indução no caso n , temos que

$$\partial^\alpha \{\|x\|^{-d+2}\} = (-1)^n ((d-2)/2)_n \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^n}{4^j j! (-n + 2 + d/2)_j} \|x\|^{-2n-d+2+2j} \Delta^j \{x^\alpha\}.$$

Aplicando ∂_i e agrupando vem que

$$\begin{aligned} \partial_i \partial^\alpha \{\|x\|^{-d+2}\} &= (-1)^n 2^n ((d-2)/2)_n (-2n-d+2) \|x\|^{-2n-d+2} \times \\ &\quad \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \frac{1}{4^j j! (-n+1+d/2)_j} \|x\|^{2j} [x_i \Delta^j \{x^\alpha\} + 2j \Delta^{j-1} \partial_i \{x^\alpha\}]. \end{aligned}$$

A expressão entre colchetes coincide com $\Delta_j \{x_i x^\alpha\}$ enquanto que a constante antecedendo a série é $(-1)^{n+1} 2^{n+1} ((d-2)/2)_{n+1}$. Assim sendo, a fórmula do enunciado vale para o monômio $x_i x^\alpha$. ■

No próximo teorema usaremos a seguinte caracterização dos polinômios de Gegenbauer, a qual é oriunda da teoria das funções hipergeométricas (veja [3]):

$$C_n^{(d-2)/2}(t) = \frac{((d-2)/2)_n 2^n}{n!} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-n/2)_j ((-n+1)/2)_j}{j! (1-n-(d-2)/2)_j} t^{n-2j}, \quad t \in [-1, 1].$$

Teorema 1.2.12. ($d \geq 3$) Para cada $n \in \mathbb{N}$, o núcleo $Z_{n,d}$ é um múltiplo de $C_n^{(d-2)/2}$ no seguinte sentido:

$$Z_{n,d}(x, y) = \frac{2n+d-2}{d-2} C_n^{(d-2)/2}(\langle x, y \rangle), \quad x, y \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Demonstração: Já sabemos que $Z_{n,d}(x, y) = 2^n (d/2)_n T_{n,d}(K_{n,d}(x, \cdot))(y)$, $x, y \in \mathbb{S}^{d-1}$ e que $K_{n,d}(x, \cdot) \in \mathbb{P}_n^d$, $x \in \mathbb{S}^{d-1}$. Por outro lado, se $n \geq 2$, já temos que

$$\frac{\partial}{\partial y_i} K_{n,d}(x, y) = n x_i \frac{(\langle x, y \rangle)^{n-1}}{n!} = x_i K_{n-1,d}(x, y),$$

e, consequentemente,

$$\frac{\partial}{\partial y_i^2} K_{n,d}(x, y) = x_i^2 K_{n-2,d}(x, y).$$

Portanto,

$$\Delta_y(K_{n,d}(x, y)) = \|x\|^2 K_{n-2,d}(x, y) = K_{n-2,d}(x, y).$$

Combinando esta informação com a fórmula do lema anterior, segue que

$$\begin{aligned} Z_{n,d}(x, y) &= 2^n (d/2)_n T_{n,d}[K_n(x, \cdot)](y) \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \frac{(d/2)_n 2^{n-2j}}{j! (1-n-(d-2)/2)_j} K_{n-2j,d}(x, y), \quad x, y \in \mathbb{S}^{d-1}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{(n-2j)!} = \frac{(-n)_{2j}}{n!} = 2^{2j} \frac{1}{n!} (-n/2)_j ((-n+1)/2)_j,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} Z_{n,d}(x, y) &= \frac{2n + d - 2}{d - 2} \frac{((d - 2)/2)_n 2^n}{n!} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-n/2)_j ((-n + 1)/2)_j}{j! (1 - n - (d - 2)/2)_j} (\langle x, y \rangle)^{n-2j} \\ &= \frac{2n + d - 2}{d - 2} C_n^{(d-2)/2}(\langle x, y \rangle), \quad x, y \in \mathbb{S}^{d-1}. \end{aligned}$$

A demonstração está terminada. ■

O teorema abaixo descreve uma versão do resultado anterior no caso em que $d = 2$. Note que neste caso, $a(n, 2) = 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.13. *Se $\{Y_1^n, Y_2^n\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_n^2$, então*

$$C_n^0(\langle x, y \rangle) = \frac{1}{2} [Y_1^n(x)Y_1^n(y) + Y_2^n(x)Y_2^n(y)], \quad x, y \in \mathbb{S}^1.$$

Demonstração: As partes real Y_1^n e imaginária Y_2^n da função

$$H(x_1, x_2) = \sqrt{2}(x_1 + ix_2)^n \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

são funções homogêneas pertencentes a $\mathbb{P}_n^2$. Na verdade, $\{Y_1^n, Y_2^n\}$ é uma base de $\mathcal{H}_n^2$. Como

$$H(\cos t, \sin t) = \sqrt{2}(\cos t + i \sin t)^n = \sqrt{2}(\cos nt + i \sin nt), \quad t \in \mathbb{R},$$

temos que

$$\langle Y_1^n, Y_1^n \rangle_{\mathbb{S}^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} [Y_1^n(z)]^2 d\sigma(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 ntdt = 1.$$

Analogamente

$$\langle Y_2^n, Y_2^n \rangle_{\mathbb{S}^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} [Y_2^n(z)]^2 d\sigma(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 ntdt = 1.$$

Porém, como $C_n^0(\cos \theta) = \cos n\theta$, $\theta \in [0, \pi]$ ([12, p.419]), escrevendo $x = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)$ e $y = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$, temos

$$C_n^0(\langle x, y \rangle) = C_n^0(\cos(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{1}{2} (Y_1^n(x)Y_1^n(y) + Y_2^n(x)Y_2^n(y)).$$

Isto completa os argumentos. ■

Concluimos a seção listando algumas propriedades gerais dos polinômios de Gegenbauer. As demonstrações das mesmas serão omitidas mas podem ser encontradas em [12] e outras referências clássicas lá citadas. Uma maneira comum de descrever tais polinômios baseia-se nos polinômios de Jacobi $P_n^{\alpha, \beta}$:

$$C_n^{(d-2)/2}(t) = \frac{(d-2)_n}{((d-1)/2)_n} P_n^{(d-3)/2, (d-3)/2}(t), \quad t \in [-1, 1].$$

O polinômio $C_n^{(d-2)/2}$ satisfaz a equação diferencial

$$(1 - t^2)y''(t) - (d - 1)ty'(t) + n(n + d - 2)y(t) = 0.$$

Os polinômios de Gegenbauer também satisfazem a seguinte relação de recorrência de três termos:

$$C_{n+2}^{(d-2)/2}(t) = \frac{2n + d}{n + 2}tC_{n+1}^{(d-2)/2}(t) - \frac{n + d - 2}{n + 2}C_n^{(d-2)/2}(t), \quad t \in [-1, 1].$$

Eles podem ser diferenciados segundo a fórmula

$$\frac{d}{dt}C_{n+1}^{(d-2)/2} = (d - 2)C_n^{d/2},$$

e

$$(1 - t^2)C_n^{d/2}(t) = \frac{(n + d - 1)(n + d - 2)}{(d - 2)(2n + d)}C_n^{(d-2)/2}(t) - \frac{(n + 2)(n + 1)}{(d - 2)(2n + d)}C_{n+2}^{(d-2)/2}(t).$$

Além da seguinte desigualdade

$$|C_n^{(d-2)/2}(t)| \leq C_n^{(d-2)/2}(1), \quad t \in [-1, 1]$$

Finalmente, registramos a fórmula de Poisson: se $r \in (0, 1)$, então

$$\frac{1 - r^2}{(1 - 2tr + r^2)^{d/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + d - 2}{d - 2} C_n^{(d-2)/2}(t) r^n.$$

A série acima converge uniformemente para (r, t) nas partes compactas de $[0, 1) \times [-1, 1]$.

1.3 Uma demonstração para o Teorema de Schoenberg

O objetivo deste capítulo é enunciar e demonstrar um teorema de I. J. Schoenberg que caracteriza os núcleos contínuos sobre $\mathbb{S}^{d-1}$ que são isotrópicos e positivos definidos.

A positividade definida de que trata o Teorema de Schoenberg é a clássica, a qual recordamos abaixo.

Definição 1.3.1. *Um núcleo contínuo $f : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ é positivo definido em $\mathbb{S}^{d-1}$ se a desigualdade*

$$\sum_{i,j=1}^n c_i c_j f(x_i, x_j) \geq 0 \tag{1.5}$$

vale para cada inteiro $n \geq 1$, n pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\mathbb{S}^{d-1}$ e n escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$. Ele é estritamente positivo definido em $\mathbb{S}^{d-1}$ se é positivo definido e vale a igualdade na desigualdade acima somente quando cada c_j é nulo.

Observamos que a continuidade de f na definição anterior foi incluída por conveniência do trabalho.

Uma função contínua $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é *positiva definida* em $\mathbb{S}^{d-1}$ se o núcleo isotrópico $(x, y) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow f(\langle x, y \rangle)$ é positivo definido. Um conceito análogo vale para positividade estrita definida.

Lema 1.3.2. *O polinômio de Gegenbauer $C_n^{(d-2)/2}$ é uma função positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$.*

Demonstração: No caso $d = 2$, a forma quadrática da definição acima toma a forma

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m c_i c_j C_n^0(\langle x_i, x_j \rangle) &= \sum_{i,j=1}^m c_i c_j \frac{1}{2} (Y_1^n(x_i) Y_1^n(x_j) + Y_2^n(x_i) Y_2^n(x_j)) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^m c_i Y_1^n(x_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m c_i Y_2^n(x_i) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

e, portanto, é não negativa. No caso $d > 2$, mantendo-se a mesma notação usada na seção anterior para uma base ortonormal de $\mathcal{H}_n^d$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m c_i c_j C_n^{(d-2)/2}(\langle x_i, x_j \rangle) &= \sum_{i,j=1}^m c_i c_j \frac{d-2}{2n+d-2} Z_{n,d}(x_i, x_j) \\ &= \frac{d-2}{2n+d-2} \sum_{i,j=1}^m c_i c_j \sum_{k=1}^{a(n,d)} Y_k^n(x_i) Y_k^n(x_j) \end{aligned}$$

Reagrupando, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m c_i c_j C_n^{(d-2)/2}(\langle x_i, x_j \rangle) &= \frac{d-2}{2n+d-2} \sum_{k=1}^{a(n,d)} \sum_{i,j=1}^m c_i c_j Y_k^n(x_i) Y_k^n(x_j) \\ &= \frac{d-2}{2n+d-2} \sum_{k=1}^{a(n,d)} \left[\sum_{i=1}^m c_i Y_k^n(x_i) \right]^2, \end{aligned}$$

e, novamente, a forma quadrática é não negativa. ■

Para demonstrarmos a primeira metade do teorema de Schoenberg precisamos de alguns resultados sobre matrizes positivas definidas e estritamente positivas definidas, para tal usamos como referência o capítulo 7 de [18].

Definição 1.3.3. *Seja n um número natural e $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ uma matriz $n \times n$ com entradas reais. Dizemos que a matriz A é positiva definida se para todo vetor $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tenhamos*

$$c^*Ac = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j a_{i,j} \geq 0$$

E, se além disso a equação acima seja tal que se c não é o vetor nulo então

$$c^*Ac = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j a_{i,j} > 0$$

Dizemos que a matriz A é estritamente positiva definida.

Segue imediatamente dessa definição que uma função contínua $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$ se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos de $\mathbb{S}^{d-1}$ a matriz $A = (f(\langle x_i, x_j \rangle))_{i,j=1}^n$ é positiva definida, além disso, f será estritamente positiva definida se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos de $\mathbb{S}^{d-1}$ a matriz $A = (f(\langle x_i, x_j \rangle))_{i,j=1}^n$ é estritamente positiva definida.

Proposição 1.3.4. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

- I. Sejam f, g funções positivas definidas em uma esfera $\mathbb{S}^{d-1}$, então as funções $f.g$ e $f + g$ também são positivas definidas na esfera $\mathbb{S}^{d-1}$.*
- II. Sejam f, g funções positivas definidas em uma esfera $\mathbb{S}^{d-1}$, com ao menos uma delas sendo estritamente positiva definida na mesma, então as funções $f.g$ e $f + g$ também são estritamente positivas definidas na esfera $\mathbb{S}^{d-1}$.*
- III. Seja $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções positivas definidas em uma esfera $\mathbb{S}^{d-1}$ tal que existe uma função contínua $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ aonde f_m converge pontualmente para a função f . Então a função f também é positiva definida na esfera $\mathbb{S}^{d-1}$.*

Demonstração: A demonstração sobre a soma nos itens *I* e *II* é imediata pela definição.

Quanto ao produto, dado $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos de $\mathbb{S}^{d-1}$ considere as matrizes $A = (f(\langle x_i, x_j \rangle))_{i,j=1}^n$ e $B = (g(\langle x_i, x_j \rangle))_{i,j=1}^n$, pelo Teorema do produto de matrizes positivas definidas de Schur ([18, p.479]) segue que a matriz $C = (f(\langle x_i, x_j \rangle)g(\langle x_i, x_j \rangle))_{i,j=1}^n$ é positiva definida, o que conclui *I*.

Já o item *II*, da desigualdade de Oppenheim-Schur ([18, p.509]), como a matriz $A = (f(\langle x_i, x_j \rangle))_{i,j=1}^n$ ou $B = (g(\langle x_i, x_j \rangle))_{i,j=1}^n$ é estritamente positiva definida, segue que a matriz $C = (f(\langle x_i, x_j \rangle)g(\langle x_i, x_j \rangle))_{i,j=1}^n$ é estritamente positiva definida.

Por fim, para o item *III*, seja $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos de $\mathbb{S}^{d-1}$ e $c_1, c_2, \dots, c_n$ números reais, então

$$\sum_{i,j=1}^n c_i c_j f(\langle x_i, x_j \rangle) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n c_i c_j f_m(\langle x_i, x_j \rangle) \geq 0$$

■

O resultado abaixo é a primeira metade do Teorema de Schoenberg.

Teorema 1.3.5. *Se $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua representável na forma*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n^{(d-2)/2}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

onde cada b_n é não negativo, então f é uma função positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$.

Demonstração: Como para cada n , $b_n \geq 0$ e $C_n^{(d-2)/2}$ é uma função positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$, então cada somando $b_n C_n^{(d-2)/2}$ também é. Como o limite pontual de uma sequência de funções positivas definidas ainda é uma função positiva definida, o resultado do teorema segue. ■

No restante da seção, elencaremos resultados técnicos até que seja possível a demonstração da recíproca do teorema acima.

Definição 1.3.6. *Fixado $d \in \mathbb{N}$, denotaremos por w_d a função $w_d : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela fórmula*

$$w_d(t) = (1 - t^2)^{(d-3)/2}, \quad t \in [-1, 1].$$

Escreveremos $L^1([-1, 1], w_d)$ para denotar o espaço vetorial formado por todas as funções $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que são mensuráveis e satisfazem

$$\int_{-1}^1 |f(x)| w_d(x) dx < \infty.$$

O resultado abaixo estabelece uma ponte entre funções isotrópicas em $\mathbb{S}^{d-1}$ e funções do espaço da definição anterior. Uma demonstração do mesmo não será incluída neste momento já que outro teorema demonstrado logo à frente é uma generalização deste.

Proposição 1.3.7. *Se $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de $L^1([-1, 1], w_d)$, então*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\langle x, y \rangle) d\sigma(y) = \omega_{d-1} \int_{-1}^1 f(t) (1 - t^2)^{(d-3)/2} dt, \quad x \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Lema 1.3.8. *O conjunto $\{C_n^{(d-2)/2} : n = 0, 1, \dots\}$ é ortogonal em $L^2([-1, 1], w_d)$.*

Demonstração: Se $d = 2$, podemos usar o Teorema 1.2.13 para deduzir que

$$\omega_1 \int_{-1}^1 C_n^0(t) C_m^0(t) (1-t^2)^{-1/2} dt = \omega_2 \frac{1}{2} C_n^0(1) \delta_{m,n} = \pi \delta_{m,n}.$$

No caso $d \geq 3$, utilizamos a Proposição 1.3.7 para inicialmente deduzir que

$$\omega_{d-1} \int_{-1}^1 C_n^{(d-2)/2}(t) C_m^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} C_n^{(d-2)/2}(\langle x, y \rangle) C_m^{(d-2)/2}(\langle x, y \rangle) d\sigma(y).$$

Por outro lado, introduzindo a fórmula do Teorema 1.2.12 bem como aquela do Corolário 1.2.7, vem que

$$\begin{aligned} \omega_{d-1} \int_{-1}^1 C_n^{(d-2)/2}(t) C_m^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt &= \left(\frac{d-2}{2n+d-2} \right)^2 \omega_d Z_{n,d}(x, x) \delta_{m,n} \\ &= \omega_d \frac{d-2}{2n+d-2} C_n^{(d-2)/2}(1) \delta_{m,n}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Isso completa a prova. ■

Teorema 1.3.9. (*Funk-Hecke*) *Seja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de $L^1([-1, 1], w_d)$. Se $Y^n \in \mathcal{H}_n^d$, então*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\langle x, y \rangle) Y^n(y) d\sigma(y) = \lambda_n(f) Y^n(x), \quad x \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (1.7)$$

onde

$$\lambda_n(f) = \frac{\omega_{d-1}}{C_n^{(d-2)/2}(1)} \int_{-1}^1 f(t) C_n^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt.$$

Demonstração: Demonstraremos o teorema somente no caso em que $d \geq 3$, uma vez que no caso restante a demonstração é similar. Em um primeiro passo, verificaremos a fórmula do enunciado no caso em que f é um polinômio. Se $f = \sum_{k=0}^m a_k C_k^{(d-2)/2}$, então do Lema 1.3.8 e de 1.6

$$\begin{aligned} \omega_{d-1} \int_{-1}^1 f(t) C_j^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt &= \omega_{d-1} \sum_{k=0}^m \int_{-1}^1 a_k C_k^{(d-2)/2}(t) C_j^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt \\ &= \omega_{d-1} \int_{-1}^1 a_j C_j^{(d-2)/2}(t) C_j^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt \\ &= \omega_d a_j \frac{d-2}{2j+d-2} C_j^{(d-2)/2}(1), \end{aligned}$$

isto é,

$$C_k^{(d-2)/2}(1) a_k = \frac{2k+d-2}{d-2} \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \int_{-1}^1 f(t) C_k^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt.$$

Fixado $Y^n \in \mathcal{H}_n^d$, pelo Teorema 1.2.12 temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\langle x, y \rangle) Y^n(y) d\sigma(y) &= \sum_{k=0}^m a_k \int_{\mathbb{S}^{d-1}} C_k^{(d-2)/2}(\langle x, y \rangle) Y^n(y) d\sigma(y) \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \frac{d-2}{2k+d-2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{k,d}(x, y) Y^n(y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

e assim usando o Lema 1.2.8, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\langle x, y \rangle) Y^n(y) d\sigma(y) &= a_n \frac{d-2}{2n+d-2} \omega_d Y^n(x) \\ &= \frac{1}{C_n^{(d-2)/2}(1)} \omega_{d-1} \int_{-1}^1 f(t) C_n^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt Y^n(x). \end{aligned}$$

Supondo agora que f é uma função contínua, pelo teorema de aproximação de Weierstrass, existe uma sequência $\{P_m\}$ de polinômios que converge uniformemente para f em $[-1, 1]$. Daí,

$$\int_{-1}^1 |f(t) - P_m(t)| C_n^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt \leq \|C_n^{(d-2)/2} w_d\|_1 \|f - P_m\|_\infty.$$

Consequentemente,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\omega_{d-1}}{C_n^{(d-2)/2}(1)} \int_{-1}^1 P_m(t) C_n^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt = \frac{\omega_{d-1}}{C_n^{(d-2)/2}(1)} \int_{-1}^1 f(t) C_n^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt.$$

Da mesma maneira, usando a Proposição 1.3.7, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\langle x, y \rangle) - P_m(\langle x, y \rangle)| |Y^n(y)| d\sigma(y) &\leq \omega_{d-1} \|Y^n\|_\infty \int_{-1}^1 |f(t) - P_m(t)| w_d(t) dt \\ &\leq \omega_{d-1} \|Y^n\|_\infty \|w_d\|_1 \|f - P_m\|_\infty, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} P_n(\langle x, y \rangle) Y^n(y) d\sigma(y) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\langle x, y \rangle) Y^n(y) d\sigma(y).$$

Por fim, se $f \in L^1([-1, 1], w_d)$, e assim $f w_d \in L^1([-1, 1])$, como $C([-1, 1])$ é denso em $L^1([-1, 1])$, fixado $\epsilon > 0$, existe uma função contínua g tal que

$$\int_{-1}^1 |g(t) - f(t) w_d(t)| dt < \epsilon. \quad (1.8)$$

Definindo então a função

$$g_m(t) = \begin{cases} g(t)/w_d(t) & \text{se } |g(t)/w_d(t)| \leq m \\ m & \text{se } |g(t)/w_d(t)| > m \end{cases},$$

temos que $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(t)w_d(t) = g(t)$ e $|g_m(t)w_d(t)| \leq |g(t)|$, $t \in [-1, 1]$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada e (1.8), vemos que existe $m > 0$ tal que

$$\int_{-1}^1 |f(t) - g_m(t)|w_d(t)dt < \epsilon$$

Pelo mesmo raciocínio feito para o caso contínuo, o resultado segue. ■

Corolário 1.3.10. *Se $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_n^{(d-2)/2}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

com convergência em $L^2([-1, 1], w_d)$, onde

$$a_n = \frac{1}{C_n^{(d-2)/2}(1)} \frac{2n + d - 2}{d - 2} \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \int_{-1}^1 f(t) C_n^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt.$$

Demonstração: A continuidade de f garante que a função g dada por $y \in \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow f(\langle e_1, y \rangle)$ pertence a $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$, onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Se para cada n , utilizamos uma base ortonormal $\{Y_1^n, Y_2^n, \dots, Y_{a(n,d)}^n\}$ de $\mathcal{H}_n^d$, e do Lema 1.2.4, temos que

$$f(\langle e_1, y \rangle) = g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{a(n,d)} \langle g, Y_k^n \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_k^n(y), \quad y \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

com convergência em $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$. Mas, se aplicarmos o Teorema 1.3.9, a soma interna $S_n := \sum_{k=1}^{a(n,d)} \langle g, Y_k^n \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_k^n(y)$ pode ser escrita, através do Lema 1.2.8 e do Teorema 1.2.12, na forma

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\omega_d C_n^{(d-2)/2}(1)} \left(\int_{-1}^1 f(t) C_n^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt \right) \sum_{k=1}^{a(n,d)} Y_k^n(e_1) Y_k^n(y) \\ &= \frac{1}{\omega_d C_n^{(d-2)/2}(1)} \left(\int_{-1}^1 f(t) C_n^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt \right) \frac{2n + d - 2}{d - 2} C_n^{(d-2)/2}(\langle e_1, y \rangle). \end{aligned}$$

e assim

$$f(\langle e_1, y \rangle) = g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{(d-2)/2}(\langle e_1, y \rangle), \quad y \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Isso conclui a demonstração. ■

Observamos que no caso $d = 2$, apesar da demonstração ser análoga, o coeficiente a_n na expansão toma a forma

$$a_n = \frac{1}{2C_n^0(1)} \frac{w_1}{w_2} \int_{-1}^1 f(t) C_n^0(t) w_0(t) dt.$$

No lema abaixo, expressamos a positividade definida através de um processo de integração dupla em $\mathbb{S}^{d-1}$.

Lema 1.3.11. *Se f é uma função contínua e positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$ e $g : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\langle x, y \rangle) g(y) g(x) d\sigma(x) d\sigma(y) \geq 0.$$

Demonstração: Se f é positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$, então para qualquer inteiro $m \geq 2$, quaisquer números reais $c_1, c_2, \dots, c_m$ em $\mathbb{R}$ e quaisquer pontos $x_1, x_2, \dots, x_m$ de $\mathbb{S}^{d-1}$,

$$\sum_{i,j=1}^m c_i c_j f(\langle x_i, x_j \rangle) = \sum_{i=1}^m c_i^2 f(1) + 2 \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq m \\ i \neq j}} c_i c_j f(\langle x_i, x_j \rangle) \geq 0.$$

Usando $c_i = g(x_i)$, obtemos

$$\sum_{i=1}^m g(x_i)^2 f(1) + 2 \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq m \\ i \neq j}} g(x_i) g(x_j) f(\langle x_i, x_j \rangle) \geq 0.$$

Integrando em relação a cada x_j iteradamente resulta em

$$\begin{aligned} f(1) \omega_d^{m-1} \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(x_i)^2 d\sigma(x_i) \\ + 2 \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq m \\ i \neq j}} \omega_d^{m-2} \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(x_i) g(x_j) f(\langle x_i, x_j \rangle) d\sigma(x_i) d\sigma(x_j) \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$m f(1) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(x)^2 d\sigma(x) + m(m-1) \omega_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(x) g(y) f(\langle x, y \rangle) d\sigma(x) d\sigma(y) \geq 0.$$

As integrais acima são finitas devido à continuidade de f e g . Dividindo por $m(m-1)$ e fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos a desigualdade no enunciado do lema. ■

A seguir, provaremos a parte faltante do Teorema de Schoenberg ([24]).

Teorema 1.3.12. *Seja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$ se, e somente se,*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_n^{(d-2)/2}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

onde $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, com convergência uniforme e absoluta da série.

Demonstração: Novamente vamos considerar tão somente o caso $d > 2$. Como f é contínua em $[-1, 1]$, segue do Corolário 1.3.10 que f é representável como no

enunciado do teorema, com convergência em $L^2([-1, 1], w_d)$. Da Proposição 1.3.4, a função $fC_n^{(d-2)/2}$ é positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$, uma aplicação do Lema 1.3.11 nos leva à desigualdade

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\langle x, y \rangle) C_n^{(d-2)/2}(\langle x, y \rangle) d\sigma(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\langle x, y \rangle) C_n^{(d-2)/2}(\langle x, y \rangle) d\sigma(x) d\sigma(y) \geq 0,$$

pois a primeira integral independe de x pela proposição 1.3.7, juntamente com a expressão do coeficiente a_n no Corolário 1.3.10, reduz-se a $a_n \geq 0$. Quanto à convergência, basta observar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n |C_n^{(d-2)/2}(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_n^{(d-2)/2}(1) = f(1).$$

e usar o Teste M de Weierstrass. ■

Observamos que a classe das funções contínuas e positivas definidas em $\mathbb{S}^{d-1}$ é decrescente no seguinte sentido: se f é contínua e positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$, então ela também o é em todas as esferas de dimensão menor que $d - 1$. Cabe observar ainda que existem funções contínuas que são positivas definidas em uma determinada esfera $\mathbb{S}^{d-1}$ mas que não são na esfera $\mathbb{S}^d$.

Concluimos essa seção classificando as funções que são positivas definidas em todas as esferas. Para isso note que $f(t) = t$ é uma função contínua e positiva definida em todas as esferas, pois fixados os pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $\mathbb{S}^{d-1}$ e escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ escalares, temos que

$$\sum_{i,j=1}^n c_i c_j f(\langle x_i, x_j \rangle) = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i x_i, \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\rangle \geq 0,$$

e tal argumento independe da dimensão d . Assim, usando a proposição 1.3.4 é facilmente verificado que as funções da forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \in [-1, 1],$$

com $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, são positivas definidas em todas as esferas. Na verdade, os argumentos a seguir, mostrarão que, de fato, essas são as únicas funções com tal propriedade. Para tanto, utilizaremos o seguinte lema que pode ser visto em [24].

Lema 1.3.13. *Fixado $t \in [-1, 1]$, então*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{C_n^{(d-2)/2}(t)}{C_n^{(d-2)/2}(1)} = t^n,$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$.

No Corolário (1.3.10) obtemos que se $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^d C_n^{(d-2)/2}(t)$$

Com convergência em $L^2([-1, 1], w_d)$, onde

$$a_n^d = \frac{1}{C_n^{(d-2)/2}(1)} \frac{2n+d-2}{d-2} \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \int_{-1}^1 f(t) C_n^{(d-2)/2}(t) w_d(t) dt$$

Usando a expressão

$$(1-t^2)C_n^{d/2}(t) = \frac{(n+d-1)(n+d-2)}{(d-2)(2n+d-1)} C_n^{(d-2)/2}(t) - \frac{(n+2)(n+1)}{(d-2)(2n+d-1)} C_{n+2}^{(d-2)/2}(t).$$

obtemos a seguinte correlação

$$\begin{aligned} a_n^{d+2} C_n^{d/2}(1) &= \frac{(n+d-2)(n+d-1)}{(d-1)(2n+d-2)} a_n^d C_n^{(d-2)/2}(1) \\ &\quad - \frac{(n+1)(n+2)}{(d-1)(2n+d+2)} a_{n+2}^d C_{n+2}^{(d-2)/2}(1) \end{aligned}$$

E desta maneira, segue

Lema 1.3.14. *Seja $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que f é positiva definida em todas as esferas. Então a sequência $(a_n^{2d} C_n^{(2d-2)/2}(1))_{d \in \mathbb{N}}$ é convergente para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Como f é positiva definida em todas as esferas $0 \leq a_n^d C_n^{(d-2)/2}(1) \leq f(1)$. Reescrevendo a última expressão obtida

$$\begin{aligned} a_n^{d+2} C_n^{d/2}(1) - a_n^d C_n^{(d-2)/2}(1) \\ = \frac{n(n-1)}{(d-1)(2n+d-2)} a_n^d C_n^{(d-2)/2}(1) - \frac{(n+1)(n+2)}{(d-1)(2n+d+2)} a_{n+2}^d C_{n+2}^{(d-2)/2}(1) \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
& |a_n^{d+2}C_n^{(d)/2}(1) - a_n^dC_n^{(d-2)/2}(1)| \\
&= \left| \frac{n(n-1)}{(d-1)(2n+d-2)} a_n^d C_n^{(d-2)/2}(1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n+1)(n+2)}{(d-1)(2n+d+2)} a_{n+2}^d C_{n+2}^{(d-2)/2}(1) \right| \\
&\leq \frac{n(n-1)}{(d-1)(2n+d-2)} f(1) + \frac{(n+1)(n+2)}{(d-1)(2n+d+2)} f(1) \\
&= \frac{n^2 + 2n + 2}{(d-1)(2n+d-2)} f(1)
\end{aligned}$$

Consequentemente as diferenças $|a_n^{d+2}C_n^{(d)/2}(1) - a_n^dC_n^{(d-2)/2}(1)|$ são $O\left(\frac{1}{d^2}\right)$, e assim $a_n^{2d}C_n^{(2d-2)/2}(1)$ é $O\left(\frac{1}{d}\right)$, logo uma sequência de Cauchy em d para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_n^{2d}C_n^{(2d-2)/2}(1)$ é convergente. Em particular, tal valor é não negativo, pois $a_n^dC_n^{(d-2)/2}(1) \geq 0$ para todo n e $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ ■

E assim estamos aptos a concluir a demonstração do teorema almejado.

Teorema 1.3.15. *Se $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva definida em cada esfera $\mathbb{S}^{d-1}$, então f pode ser escrita na forma*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \in [-1, 1],$$

com $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

Demonstração: Como f é contínua e positiva definida em cada esfera $\mathbb{S}^{d-1}$, então pelo Teorema 1.3.12

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^d C_n^{(d-2)/2}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

onde $a_n^d \geq 0$, $n, d \in \mathbb{N}$, com $d \geq 2$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^d C_n^{(d-2)/2}(1) = f(1)$, $d \geq 2$. Do lema anterior,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} a_n^{2d} C_n^{(2d-2)/2}(1) =: a_n \geq 0, \quad d \geq 2,$$

enquanto que

$$|a_n^{2d} C_n^{(2d-2)/2}(1) t^n| = a_n^{2d} C_n^{(2d-2)/2}(1) |t|^n \leq f(1) |t|^n, \quad t \in (-1, 1).$$

e portanto

$$|a_n t^n| \leq f(1)|t|^n, \quad t \in (-1, 1).$$

Como cada sequência $\{f(1)|t|^n\}$ pertence a l^1 ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{2d} C_n^{(2d-2)/2}(1) t^n, \quad t \in (-1, 1).$$

Porém, fixado $\epsilon > 0$ e $t \in (-1, 1)$, do Lema 1.3.13 existe $d(t, \epsilon)$, tal que, se $d \geq d(t, \epsilon)$, então

$$\left| t^n - \frac{C_n^{(d-2)/2}(t)}{C_n^{(d-2)/2}(1)} \right| < \epsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim, se $2d \geq d(t, \epsilon)$

$$\begin{aligned} |f(t) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{2d} C_n^{(2d-2)/2}(1) t^n| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{2d} C_n^{(2d-2)/2}(1) \left| t^n - \frac{C_n^{(2d-2)/2}(t)}{C_n^{(2d-2)/2}(1)} \right| \\ &\leq \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{2d} C_n^{(2d-2)/2}(1) = f(1)\epsilon. \end{aligned}$$

Em outras palavras, $\lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{2d} C_n^{(2d-2)/2}(1) t^n = f(t)$, $t \in (-1, 1)$. Até agora provamos que se $t \in (-1, 1)$ então $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, restando portanto demonstrar que o mesmo vale para $t = -1$ e $t = 1$. Como $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, se demonstrarmos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, então como consequência da continuidade da função f e de séries de potência em geral, poderemos concluir o teorema. Para tanto, suponha, por absurdo, que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ seja divergente. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n \geq 2f(1)$$

Tomando $u \in (0, 1)$ tal que $u^{n_0} \geq \frac{1}{2}$, então

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \geq \sum_{n=0}^{n_0} a_n u^{n_0} \geq 2f(1) \frac{1}{2} = f(1).$$

Isso contradiz a representação de f em séries de potências. ■

Funções m -vezes monótonas

Neste capítulo, introduziremos as funções multiplamente monótonas e apresentaremos algumas de suas propriedades básicas pertinentes a este trabalho. As funções multiplamente monótonas aparecem com muita frequência na teoria das funções positivas definidas e radiais, sendo muito empregadas em caracterizações de certas classes de tais funções. Uma delas será incluída à frente. A referência básica para este capítulo é [16].

2.1 Representação integral de uma função m -vezes monótona

Definição 2.1.1. *Sejam m um inteiro ≥ 2 e $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^{m-2} -diferenciável. Dizemos que ϕ é m -vezes monótona se $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ e as funções $(-1)^j \phi^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, m-2$, são não negativas, decrescentes e convexas em $(0, \infty)$.*

Primeiramente, note que na definição acima ϕ é de classe C^{m-2} , mesmo pedindo apenas que $(-1)^{(m-2)} \phi^{(m-2)}$ exista, pois sendo $(-1)^{(m-2)} \phi^{(m-2)}$ convexa, a mesma é então contínua.

Podemos incluir o caso em que $m = 1$ na definição acima exigindo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$, ϕ seja contínua, não negativa e decrescente em $(0, \infty)$. A definição tem semelhança com o conceito de função completamente monótona, o qual demanda que a função $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tenha a seguinte propriedade: $(-1)^j \phi^{(j)}$ é não negativa qualquer que

seja o inteiro não negativo j . De fato, uma função m -vezes monótona é essencialmente uma função completamente monótona com monotonicidade truncada.

Consideremos a função truncamento $(x)_+ := \max\{x, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$. Definindo-se

$$\phi(x) = [(1-x)_+]^m, \quad x \in (0, \infty),$$

obtemos imediatamente um exemplo de função m -vezes monótona. De fato,

$$(-1)^j \phi^{(j)}(x) = m(m-1) \cdots (m-j+1) [(1-x)_+]^{m-j} \geq 0, \quad x \in (0, \infty), \quad j = 0, \dots, m.$$

Se ϕ é uma função m -vezes monótona, outras podem ser construídas via integração pela fórmula

$$\psi(x) = \int_x^\infty \phi(t) dt, \quad x \in (0, \infty).$$

Um resultado clássico obtido por Williamson ([28]) caracteriza as funções m -vezes monótonas via integração de Lebesgue-Stieltjes como segue.

Teorema 2.1.2. *Sejam m um inteiro ≥ 2 e $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^{m-2} -diferenciável. Uma condição necessária e suficiente para que ϕ seja m -vezes monótona é que exista uma função não decrescente F sobre $(0, \infty)$, satisfazendo $F(0^+) = 0$, de modo que*

$$\phi(x) = \int_0^\infty [(1-rx)_+]^{m-1} dF(r), \quad x \in (0, \infty).$$

Observamos que a verificação de que uma função como descrita no teorema é de fato m -vezes monótona pode ser realizada via derivação sob o sinal de integração e pela desigualdade

$$0 \leq \phi(x) = \int_0^{1/x} (1-rx)^{m-1} dF(r) \leq F(1/x) - F(0^+).$$

No que segue, faremos uma preparação com resultados técnicos, os quais permitirão a demonstração da recíproca do teorema. Para tanto usaremos extensivamente resultados sobre funções convexas na reta, cuja referência é Seção 6.6 de [23]. Os principais teoremas que usaremos são

Teorema 2.1.3. *Seja $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então ϕ é Lipschitz, e consequentemente absolutamente contínua em cada sub intervalo compacto $[c, d]$ de (a, b) .*

Teorema 2.1.4. *Seja $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então ϕ é diferenciável a exceção de um conjunto enumerável de pontos e nos pontos em que a mesma existe ela é uma função crescente.*

No primeiro resultado descrito abaixo, pelo Teorema 2.1.4 o limite faz sentido tão somente nos pontos em que $\phi^{(m-1)}(x)$ existe. Portanto, estamos excluindo no máximo um conjunto enumerável de pontos, uma vez que $\phi^{(m-2)}$ é convexa nas condições do Lema.

Lema 2.1.5. *Seja m um inteiro maior ou igual a 2. Se $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função m -vezes monótona, então*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{m-1} \phi^{(m-1)}(x) = 0.$$

Demonstração: Suponha que ϕ seja m -vezes monótona. Se $m = 2$, é suficiente justificar que $\lim_{x \rightarrow \infty} x \phi'(x) = 0$. Para tanto, se $x \in (0, \infty)$ é tal que $\phi'(2x)$ existe, então

$$\phi(2x) - \phi(x) = \int_x^{2x} \phi'(t) dt \leq \int_x^{2x} \phi'(2x) dt = x \phi'(2x) \leq 0,$$

pois ϕ é convexa e decrescente. Fazendo-se $x \rightarrow \infty$, resolvemos tal caso. Suponha agora que o lema vale para funções m -vezes monótonas e seja ϕ uma função $(m+1)$ -vezes monótona. Se $x \in (0, \infty)$ é tal que $\phi^{(m)}(2x)$ existe, então

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} (-1)^{m-1} \phi^{(m)}(t) t^{m-1} dt &\leq (-1)^{m-1} \phi^{(m)}(2x) \int_x^{2x} t^{m-1} dt \\ &= (-1)^{m-1} \frac{2^m - 1}{m} \phi^{(m)}(2x) x^m \leq 0. \end{aligned}$$

A primeira integral acima converge para 0 quando $x \rightarrow \infty$ uma vez que ela coincide com

$$\left[\sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{(m-1)!}{\mu!} (-1)^\mu t^\mu \phi^{(\mu)}(t) \right]_x^{2x}.$$

E do fato que se uma função é m -vezes monótona então ela também é l -vezes monótona, $0 \leq l < m$ e da hipótese de indução. ■

Uma consequência imediata do lema é esta: se ϕ é uma função m -vezes monótona, então a função $r \in (0, \infty) \rightarrow (-1)^{m-1} \phi^{(m-1)}(r^{-1})$ existe, a menos de um conjunto enumerável de pontos, e é crescente. Por outro lado, a função

$$r \in (0, \infty) \rightarrow h_{m-1}(r^{-1}) := \inf_{s > r} \{ (-1)^{m-1} \phi^{(m-1)}(s^{-1}) \}$$

é crescente, está definida em todos os pontos de $(0, \infty)$ e é uma função contínua a direita. As funções mencionadas acima coincidem, a menos de um conjunto enumerável de pontos, uma vez que toda função crescente é contínua a menos de um conjunto enumerável de pontos ([23, p.108]). Nos dois próximos resultados assumiremos que $r \in (0, \infty) \rightarrow (-1)^{m-1} \phi^{(m-1)}(r^{-1})$ existe para todo r e é uma função contínua à direita, já que se não for, poderíamos trocá-la via o argumento descrito acima.

Lema 2.1.6. *Seja m um inteiro ≥ 2 . Se $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função m -vezes monótona, então a função F_m dada por*

$$F_m(r) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!} \phi^{(j)}(r^{-1}) r^{-j}, \quad r > 0,$$

é crescente e satisfaz $F_m(0^+) = 0$.

Demonstração: A condição $F_m(0^+) = 0$ é consequência imediata do lema anterior. Quanto ao restante, comecemos definindo $G_m(s) = \phi^{(m-1)}(s^{-1})$ e $H_m(s) = s^{-m+1}$. Como G_m é monótona e H_m é contínua, podemos aplicar integração por partes para integrais de Stieltjes ([15, p. 107]) para deduzir que

$$\int_a^r G_m(s) dH_m(s) + \int_a^r H_m(s) dG_m(s) = G_m(r)H_m(r) - G_m(a)H_m(a), \quad a > 0.$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \int_a^r \frac{1}{s^{m-1}} d\phi^{(m-1)}(s^{-1}) &= \frac{1}{r^{m-1}} \phi^{(m-1)}(r^{-1}) - \frac{1}{a^{m-1}} \phi^{(m-1)}(a^{-1}) \\ &\quad - \int_a^r \phi^{(m-1)}(s^{-1}) d(s^{-m+1}). \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} \int_a^r \phi^{(m-1)}(s^{-1}) d(s^{-m+1}) &= -(m-1) \int_a^r \phi^{(m-1)}(s^{-1}) \frac{1}{s^m} ds \\ &= (-1)^{m-1} (m-1)! \left[\sum_{k=0}^{m-2} \frac{(-1)^k}{k!} \phi^{(k)}(s^{-1}) \frac{1}{s^k} \right]_a^r, \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\int_a^r \frac{1}{s^{m-1}} d \left[\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \phi^{(m-1)}(s^{-1}) \right] = F_m(r) - F_m(a).$$

Observamos que a expressão entre colchetes na integral acima corresponde a uma medida positiva, já que ϕ é m -vezes monótona. Fazendo $a \rightarrow 0^+$ e usando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos a igualdade

$$\int_0^r \frac{1}{s^{m-1}} d \left[\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \phi^{(m-1)}(s^{-1}) \right] = F_m(r).$$

Essa igualdade implica que F_m é crescente. ■

Agora, estamos aptos para completar a demonstração do Teorema 2.1.2.

Demonstração do Teorema 2.1.2: A demonstração é feita por indução mas, devido à similaridade dos argumentos, nos atentaremos somente ao caso $m = 2$. Considere a função F_2 definida no lema anterior. O elemento dF_2 define uma medida positiva e um cálculo direto revela que

$$\begin{aligned} \int_0^{1/x} (1 - rx) dF_2(r) &= \int_0^{1/x} (1 - rx) d[\phi(r^{-1}) - r^{-1}\phi'(r^{-1})] \\ &= \int_0^{1/x} d[\phi(r^{-1})] - x \int_0^{1/x} rd[\phi(r^{-1})] - \int_0^{1/x} d[-r^{-1}\phi'(r^{-1})] \\ &\quad + x \int_0^{1/x} rd[-r^{-1}\phi'(r^{-1})] \\ &= \phi(x) + x \int_0^{1/x} r^{-1}\phi'(r^{-1})dr - x\phi'(x) - x \int_0^{1/x} rd[r^{-1}\phi'(r^{-1})]. \end{aligned}$$

Como a função $G(s) = s^{-1}\phi'(s^{-1})$ é de variação limitada e $H(s) = s$ é contínua, podemos novamente aplicar integração por partes para integrais de Stieltjes e deduzir que

$$\int_0^{1/x} rd[r^{-1}\phi'(r^{-1})] = \phi'(x) - \int_0^{1/x} r^{-1}\phi'(r^{-1})dr.$$

Em outras palavras,

$$\int_0^{1/x} (1 - rx) dF_2(r) = \phi(x).$$

Isso finaliza a demonstração. ■

Como a definição original de função m -vezes monótona inclui uma ou outra condição que podem parecer redundantes, no restante desta seção buscaremos uma caracterização mais simples para tais funções, utilizando o Teorema 2.1.2. Tal caracterização depende de quatro lemas sobre o comportamento de funções convexas. Uma fonte para os resultados sobre este tema que serão utilizados é a Seção 6.6 de [23].

Lema 2.1.7. *Se $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa, então $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ existe (podendo ser infinito).*

Lema 2.1.8. *Seja $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se existir $a \in (0, \infty)$ tal que $g(a) < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) < 0$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -\infty$.*

Demonstração: Suponha que existe $a \in (0, \infty)$ tal que $g(a) < 0$. Assim sendo, inicialmente vamos ratificar que $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \neq 0$ (a existência do limite vem do lema anterior). De fato, se esse não fosse o caso, existiria $M > 0$ tal que

$$|g(t)| < -\frac{g(a)}{3}, \quad t \geq M.$$

No entanto, pela convexidade de g teríamos que

$$g\left(M + \frac{a}{2}\right) \leq \frac{g(2M)}{2} + \frac{g(a)}{2} < -\frac{g(a)}{6} + \frac{g(a)}{2} = \frac{g(a)}{3},$$

uma contradição, já que $M + a/2 > M$. Para finalizar a demonstração, resta justificar que o caso $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) > 0$ não ocorre. Para tanto, basta aplicar a primeira parte da demonstração à função $h := g - \lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$. ■

Lema 2.1.9. *Seja $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se g possui ao menos um ponto de crescimento, então $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$.*

Demonstração: Suponha que existam $a_1, a_2 \in (0, \infty)$ com $a_1 < a_2$ e $g(a_1) < g(a_2)$. Consideremos a função auxiliar $h(t) = g - g(a_2)$. Como h é convexa e $h(a_1) < 0$, o lema anterior garante que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = -\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < 0$. No primeiro caso, imediatamente temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$. O segundo caso não ocorre. Se ocorresse, existiriam $a_2, a_3 \in (0, \infty)$ de modo que $a_3 > a_2$ e $g(a_3) < g(a_2)$. Como $g(a_1) < g(a_2)$, então g teria um máximo local em (a_1, a_3) , o que é um absurdo. Se $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = b < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = b + g(a_2) < g(a_2)$, e assim existiria $a_3 > a_2$ com $g(a_3) < g(a_2)$. Como $g(a_1) < g(a_2)$, então g teria um máximo local em (a_1, a_3) , o que é novamente um absurdo. ■

Lema 2.1.10. *Seja $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então g é convexa se e somente se*

$$g(y) - g(x) \geq g'(x)(y - x), \quad x, y \in (a, b).$$

O resultado principal desta seção é o teorema abaixo.

Teorema 2.1.11. *Sejam m um inteiro ≥ 2 e $\phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. As afirmações abaixo são equivalentes:*

- (i) ϕ é m -vezes monótona;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$, $\phi^{(m-2)}$ existe em $(0, \infty)$ e $(-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}$ é convexa.

Demonstração: Se ϕ é m -vezes monótona, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ e a própria Definição 2.1.1 garante que $(-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}$ é convexa. Isso resolve uma das implicações do teorema. Reciprocamente, suponhamos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ e que $(-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}$ é convexa. O primeiro fato a se notar é que $(-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}$ é não negativa. De fato, caso contrário, o Lema 2.1.8 implicaria que $\lim_{t \rightarrow \infty} (-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}(t) = \infty$ ou que $\lim_{t \rightarrow \infty} (-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}(t) < 0$. Consequentemente, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t)| \neq 0$, e teríamos uma contradição com $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$. Um segundo fato a se notar é que $(-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}$ é decrescente. De fato, caso contrário, ela teria algum ponto de crescimento e o lema anterior nos levaria à mesma contradição. Olhando-se a Definição 2.1.1, é fácil observar

que a demonstração já está completa se $m = 2$. Assim sendo, vamos supor daqui em diante que $m > 2$ e provaremos que $(-1)^j \phi^{(j)}$ é convexa quando $j \in \{0, 1, \dots, m-3\}$. Na verdade, só incluiremos a justificativa no caso $j = m-3$ já que nos demais casos o mesmo argumento se repete mediante as devidas modificações. Sendo $(-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}$ decrescente e positiva, temos que

$$\begin{aligned} (-1)^{m-3} \phi^{(m-3)}(y) - (-1)^{m-3} \phi^{(m-3)}(x) &= (-1)^{m-3} \int_x^y \phi^{(m-2)}(t) dt \\ &= - \int_x^y (-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}(t) dt \\ &\geq - \int_x^y (-1)^{m-2} \phi^{(m-2)}(x) dt \\ &= (y-x)[(-1)^{m-3} \phi^{(m-2)}(x)], \quad x, y \in (0, \infty). \end{aligned}$$

O Lema 2.1.10 implica que $(-1)^{m-3} \phi^{(m-3)}$ é convexa e isto finaliza os argumentos da demonstração. ■

O seguinte resultado adicional será utilizado no próximo capítulo.

Corolário 2.1.12. *Sejam m um inteiro ≥ 2 e $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$, $\phi^{(m-2)}$ existe em $(0, \infty)$ e $(-1)\phi^{(m-2)}$ é convexa em $(0, \infty)$;
- (ii) Vale a representação de Lebesgue-Stieltjes

$$\phi(t) = \int_0^\infty [(1-rt)_+]^{m-1} dF(r), \quad t \in (0, \infty),$$

onde F é uma função crescente satisfazendo $F(0^+) = F(0) = 0$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \phi(0)$.

Demonstração: Pelo teorema anterior, é suficiente justificarmos a igualdade

$$\phi(0) = \int_0^\infty dF(r).$$

Mas esta é facilmente obtida aplicando-se o Teorema da Convergência Monótona à família de funções $g_x(r) = [(1-rx)_+]^m$, $r > 0$. ■

Critério de Pólya

Nesta seção, estudaremos uma versão de resultados encontrados na literatura sob o rótulo de “Critérios de Pólya para funções positivas definidas”. Apesar de nos concentrarmos em resultados que se aplicam ao contexto esférico, os critérios de Pólya podem ser estabelecidos em outros que não este, mediante adaptações convenientes. De uma maneira geral, tais critérios buscam a positividade definida (estrita) de uma função a partir de condições de suavidade da função.

3.1 Um pequeno histórico e objetivos

Um exemplo típico que se encaixa na categoria mencionada no parágrafo anterior é este devido a Askey ([2]). A notação $\lfloor x \rfloor$ refere-se ao maior inteiro menor ou igual a x .

Teorema 3.1.1. *Se $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $\phi(0) > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ e $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \phi^{(\lfloor n/2 \rfloor)}$ é convexa, então $\phi(\|x\|)$ é positiva definida em $\mathbb{R}^n$.*

No contexto esférico, nenhum resultado semelhante foi obtido até que em 2014, Beaton et al ([6]) apresentaram a seguinte conjectura, ratificada até o momento somente em dimensão baixa ($3 \leq d \leq 8$). Aqui, $\lceil x \rceil$ refere-se ao menor inteiro maior ou igual a x .

Teorema 3.1.2. *Seja $\lambda = \lceil (d-2)/2 \rceil$ e $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i) $g \in C^\lambda[0, \pi]$;
- (ii) O suporte de g é um subconjunto de $[0, \pi]$;

(iii) A derivada a direita $g^{(\lambda)}(0^+)$ existe e é finita;

(iv) A função $(-1)^\lambda g^{(\lambda)}$ é convexa.

Então, $g \circ \arccos$ é positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$. Se além disso, a restrição de $g^{(\lambda)}$ ao intervalo $(0, \pi)$ não é um polinômio linear, então $g \circ \arccos$ é estritamente positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$.

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar uma variante do teorema acima, também demonstrada apenas para dimensões baixas ($3 \leq d \leq 8$), originalmente enunciada por Gneiting em [17].

Teorema 3.1.3. *Seja $\lambda = \lceil (d-2)/2 \rceil$ e $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo $\phi(0) > 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$. Se $(-1)^\lambda \phi^{(\lambda)}$ é convexa em $(0, \infty)$, então $\phi \circ \arccos$ é estritamente positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$.*

Antes de elaborarmos uma demonstração deste resultado, algumas observações são pertinentes. Seja $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte contido em $[0, \pi)$ e tal que a função $(-1)^{\lceil (d-2)/2 \rceil} g^{(\lceil (d-2)/2 \rceil)}$ é convexa. A extensão $\tilde{g}$ de g a $[0, \infty)$ via a fórmula $\tilde{g}(t) = 0$, $t > \pi$, é tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{g}(t) = 0$, $(-1)^{\lceil (d-2)/2 \rceil} \tilde{g}^{(\lceil (d-2)/2 \rceil)}$ existe e ainda $(-1)^{\lceil (d-2)/2 \rceil} \tilde{g}^{(\lceil (d-2)/2 \rceil)}$ é convexa em $(0, \infty)$. Isso explica a não inclusão da condição (iii) do Teorema 3.1.2 no enunciado acima. Também explica a não inclusão de qualquer hipótese sobre o suporte de g . Por outro lado, também justifica a razoabilidade das hipóteses no Teorema 3.1.2. Finalmente, a função $g(t) = e^{-t}$ é um exemplo satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1.3 mas que não se encaixa nas condições do Teorema 3.1.2.

Note que a classe de funções almejadas para a demonstração do Teorema 3.1.3 está relacionada com as funções m -vezes monótonas.

3.2 Redução a um caso mais simples

Nesta seção, descreveremos uma técnica que permitirá demonstrarmos o Teorema 3.1.3 para dimensão baixa, considerando tão somente um caso particular. O argumento envolve o lema abaixo, que pode ser encontrado em [17].

Lema 3.2.1. *Seja μ uma medida de Borel finita sobre $(0, \infty)$. Se $\{\phi_r : r \in (0, \infty)\}$ é uma família indexada de funções positivas definidas em $\mathbb{S}^{d-1}$, então a fórmula*

$$\phi(t) = \int_0^\infty \phi_r(t) d\mu(r), \quad t \in [-1, 1],$$

define uma função ϕ que é positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$. Além disso, se

$$\mu(\{r : \phi_r \text{ é estritamente positiva definida em } \mathbb{S}^{d-1}\}) > 0,$$

então ϕ é estritamente positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$.

Proposição 3.2.2. *Seja $d \in \{3, 4, \dots\}$, $\lambda = \lceil (d-2)/2 \rceil$ e $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua possuindo as seguintes características: $\phi(0) > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ e $(-1)^\lambda \phi^{(\lambda)}$ é convexa em $(0, \infty)$. Se cada função ϕ_r^λ , $r > 0$, dada por*

$$\phi_r^\lambda(t) = [(1 - r \arccos t)_+]^{\lambda+1}, \quad t \in [-1, 1],$$

é positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$, então $\phi \circ \arccos$ é positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$. Além disso, se

$$\mu(\{r : \phi_r^\lambda \text{ é estritamente positiva definida em } \mathbb{S}^{d-1}\}) > 0,$$

então $\phi \circ \arccos$ é estritamente positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$.

Demonstração: Pelo Corolário 2.1.12, ϕ possui uma representação na forma

$$\phi(t) = \int_0^\infty [(1 - rt)_+]^{\lambda+1} dF(r), \quad t \in (0, \infty),$$

onde F é uma função crescente satisfazendo $F(0^+) = F(0) = 0$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \phi(0)$. Em particular,

$$\phi(\arccos t) = \int_0^\infty [(1 - r \arccos t)_+]^{\lambda+1} dF(r), \quad t \in [-1, 1].$$

Assim, o resultado segue do lema anterior ■

No que segue, ratificaremos que as funções ϕ_r^λ definidas na proposição anterior são de fato positivas definidas em $\mathbb{S}^{d-1}$. Para tal, mostraremos que os coeficientes em suas expansões de Fourier-Legendre são todos não negativos.

O caso em que $r = 0$ é trivial, uma vez que a $\phi_0^\lambda(t) = 1$, $t \in [-1, 1]$, é positiva definida em qualquer esfera.

Se $0 < r \leq \pi^{-1}$, então ϕ_r^λ é positiva definida em qualquer esfera. De fato, a seguinte expansão pode ser facilmente obtida:

$$-\arccos t = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(2n+1)} t^{2n+1}, \quad t \in [-1, 1].$$

Consequentemente, se $0 < r \leq \pi^{-1}$

$$1 - r \arccos t = 1 - \frac{r\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{r}{4^n(2n+1)} t^{2n+1}, \quad t \in [-1, 1].$$

Assim, do Teorema 1.3.15, segue que a função $(1 - r \arccos t)_+$ é positiva definida em qualquer esfera. Como o conjunto de funções positivas definidas é fechado por produtos e $\lambda \geq 1$, segue que ϕ_r^λ é estritamente positiva definida em qualquer esfera quando $0 < r \leq \pi^{-1}$ ([8]).

Resta-nos considerar o resultado no caso em que $r > \pi^{-1}$. Neste caso, ratificaremos o teorema para $d \in \{3, 4, \dots, 8\}$, ou seja, para $\lambda \in \{1, 2, 3\}$. Para simplificar as contas, usaremos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \phi_r^\lambda(t) C_n^\lambda(t) (1-t^2)^{(2\lambda-1)/2} dt &= \int_{-1}^1 [(1-r \arccos t)_+]^{\lambda+1} C_n^\lambda(t) (1-t^2)^{(2\lambda-1)/2} dt \\ &= \int_0^\pi [(1-r\theta)_+]^{\lambda+1} C_n^\lambda(\cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta \\ &= r^{\lambda+1} \int_0^{r^{-1}} (r^{-1} - \theta)^{\lambda+1} C_n^\lambda(\cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Dessa maneira, pelo Teorema de Schoenberg 1.3.12, nosso objetivo será demonstrar que

$$\int_0^{r^{-1}} (r^{-1} - \theta)^{\lambda+1} C_n^\lambda(\cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta \geq 0$$

nos casos $\lambda \in \{1, 2, 3\}$ e $r > \pi^{-1}$. Para tanto, considere a função $F_n^\lambda : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F_n^\lambda(t) = \int_0^t (t - \theta)^{\lambda+1} C_n^\lambda(\cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta, \quad t \in (0, \pi),$$

provaremos então que a mesma é estritamente positiva. Em particular, teremos que ϕ_r^λ é positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$ para $r \geq 0$ e estritamente positiva definida em $\mathbb{S}^{d-1}$ para $r > 0$ ([8]).

Terminaremos esta seção com a análise do caso $\lambda = 1$.

Teorema 3.2.3. *Fixado $n \in \mathbb{N}$, a função F_n^1 é estritamente positiva no intervalo $(0, \pi)$.*

Demonstração: Como o caso $n = 0$ é imediato, só consideraremos $n > 0$. Sabemos que $C_n^1(\cos \theta) = \sin((n+1)\theta)/\sin \theta$ ([12, p. 420]) e, conseqüentemente, temos que

$$\begin{aligned} F_n^1(t) &= \int_0^t (t - \theta)^2 \sin((n+1)\theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (t - \theta)^2 \cos(n\theta) d\theta - \frac{1}{2} \int_0^t (t - \theta)^2 \cos((n+2)\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Definimos agora

$$I(t, m) = \frac{1}{2} \int_0^t (t - \theta)^2 \cos(m\theta) d\theta$$

de modo que $F_n^1(t) = I(t, n) - I(t, n+2)$. Integrando por partes, não é difícil ver que

$$I(t, m) = t^3 \frac{mt - \sin(mt)}{(mt)^3}$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\partial}{\partial m} I(t, m) = -t^4 \frac{2mt + mt \cos(mt) - 3\operatorname{sen}(mt)}{(mt)^4} = -t^4 \frac{g(mt)}{(mt)^4},$$

onde $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(u) = 2u + u \cos u - 3\operatorname{sen} u$. Agora, por um lado temos que

$$g(u) = 2u + u \cos u - 3\operatorname{sen} u \geq 2u - u - 3 = u - 3 > 0, \quad u > 3$$

Por outro, expandindo g em série de potências, obtemos

$$g(u) = 2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{(k-1)u^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Como a desigualdade

$$(-1)^{2n} \frac{(2n-1)u^{4n+1}}{(4n+1)!} + (-1)^{2n+1} \frac{2nu^{4n+3}}{(4n+3)!} > 0,$$

vale para $n \geq 1$ e $u^2 \in (0, 21)$, podemos deduzir que $g(u) > 0$, $u \in (0, 3]$. Portanto, $I(t, m)$ é estritamente decrescente em m e, por conseguinte, $F_n^1(t) > 0$, quando $t \in (0, \pi)$. ■

3.3 Alguns resultados auxiliares

Os resultados desta seção visam uma representação alternativa para as funções F_n^λ . Iniciamos com um resultado adicional sobre os polinômios de Gegenbauer ([26, p.99]).

Lema 3.3.1. *Se μ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\operatorname{sen}^{2\mu} \theta C_n^\mu(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{\mu} c_{k,n}^\mu \cos(n+2k)\theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

onde

$$c_{k,n}^\mu = \frac{2^{1-2\mu}}{\Gamma(\mu)} (-1)^k \binom{\mu}{k} \frac{(n+1)_{2\mu-1} (n+2k)}{(n+k)_{\mu+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, \mu.$$

Lema 3.3.2. *Se μ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$F_n^{2\mu-1}(t) = \sum_{k=0}^{2\mu-1} c_{k,n}^{2\mu-1} \frac{(-1)^\mu (2\mu)!}{(n+2k)^{2\mu+1}} \left[\operatorname{sen}(n+2k)t - \sum_{j=0}^{\mu-1} (-1)^j \frac{(n+2k)^{2j+1}}{(2j+1)!} t^{2j+1} \right]$$

e

$$F_n^{2\mu}(t) = \sum_{k=0}^{2\mu} c_{k,n}^{2\mu} \frac{(-1)^{\mu+1} (2\mu+1)!}{(n+2k)^{2\mu+2}} \left[\cos(n+2k)t - \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^j \frac{(n+2k)^{2j}}{(2j)!} t^{2j} \right].$$

Demonstração: A expansão de Maclaurin da função $\sin kt$ até a ordem $2\mu - 1$ e da função $\cos kt$ com resto da integral até ordem 2μ fornece as fórmulas

$$\cos(kt) - \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^j \frac{(kt)^{2j}}{(2j)!} = (-1)^{\mu+1} \frac{k^{2\mu+2}}{(2\mu+1)!} \int_0^t (t-\theta)^{2\mu+1} \cos k\theta d\theta,$$

e

$$\sin(kt) - \sum_{j=0}^{\mu-1} (-1)^j \frac{(kt)^{2j+1}}{(2j+1)!} = (-1)^{\mu} \frac{k^{2\mu+1}}{(2\mu)!} \int_0^t (t-\theta)^{2\mu} \cos k\theta d\theta.$$

Usando a igualdade do lema anterior obtemos o resultado desejado. ■

No que segue, preferiremos utilizar a seguinte variante da função F_n^λ

$$G_n^{\lambda,\delta}(t) = \int_0^t (t-\theta)^{\delta+1} \frac{C_n^\lambda(\cos \theta)}{C_n^\lambda(1)} (\sin \theta)^{2\lambda} d\theta, \quad (3.1)$$

com $\delta \in \mathbb{N}$ e $\delta \geq \lambda$. Como $F_n^\lambda(t) = C_n^\lambda(1)G_n^{\lambda,\lambda}(t)$, demonstrar que $F_n^\lambda(t) > 0$ corresponde a demonstrar que $G_n^{\lambda,\lambda}(t) > 0$. Como os polinômios de Gegenbauer satisfazem a relação de três termos

$$(1-t^2)C_n^{\lambda+1}(t) = \frac{(n+2\lambda+1)(n+2\lambda)}{4\lambda(n+\lambda+1)} C_n^\lambda(t) - \frac{(n+2)(n+1)}{4\lambda(n+\lambda+1)} C_{n+2}^\lambda(t), \quad t \in [-1, 1],$$

e lembrando que $C_n^\lambda(1) = (2\lambda)_n/n!$, $n \in \mathbb{N}$, então é fácil ver que

$$\frac{2}{2\lambda-1} G_n^{\lambda,\delta}(t) = \frac{1}{n+\lambda} [G_n^{\lambda-1,\delta}(t) - G_{n+2}^{\lambda-1,\delta}(t)], \quad t \in [-1, 1]. \quad (3.2)$$

Se $\lambda = 0$, a desenvolvendo a expressão que define $G_n^{0,\delta}$, obtemos

$$G_n^{0,\delta}(t) = \int_0^t (t-\theta)^{\delta+1} \cos(n\theta) d\theta = t^{\delta+2} \int_0^1 (1-s)^{\delta+1} \cos(nts) ds = t^{\delta+2} h_\delta(nt)$$

onde

$$h_\delta(u) = \int_0^1 (1-s)^{\delta+1} \cos(us) ds.$$

Isso sugere a definição

$$H_1^\delta(n, \xi_1, t) := h_\delta'((n + \xi_1)t)$$

e sua extensão indutiva

$$H_{j+1}^\delta(n, \xi_{j+1}, \xi_j, \dots, \xi_1, t) = \frac{\partial}{\partial \xi_{j+1}} \left[\frac{H_j^\delta(n + \xi_{j+1}, \xi_j, \dots, \xi_1, t)}{n + j + \xi_{j+1}} \right], \quad j \geq 1.$$

O lema abaixo estabelece uma relação direta entre as funções H_j^δ e $G_n^{j,\delta}$.

Lema 3.3.3. Para cada $j \in \mathbb{N}$, vale a fórmula

$$\frac{2^j}{(2j-1)!!} G_n^{j,\delta}(t) = (-1)^j \frac{t^{\delta+3}}{n+j} \int_{[0,2]^j} H_j^\delta(n, \xi_j, \dots, \xi_1, t) d\xi_j d\xi_{j-1} \dots d\xi_1.$$

Onde $(2j-1)!!$ é o fatorial impar, $(2j-1)!! := \prod_{k=0}^{j-1} (2j-1-2k)$.

Demonstração: O caso $j = 1$ segue de (3.2), uma vez que

$$\begin{aligned} 2G_n^{1,\delta}(t) &= \frac{1}{n+1} [G_n^{0,\delta}(t) - G_{n+2}^{0,\delta}(t)] \\ &= \frac{t^{\delta+2}}{n+1} [h_\delta(nt) - h_\delta((n+2)t)] \\ &= \frac{t^{\delta+3}}{n+1} \int_0^2 h'_\delta((n+\xi)t) d\xi. \end{aligned}$$

No caso $j > 1$ podemos usar indução para escrever

$$\begin{aligned} \frac{2^{j+1}}{(2j+1)!!} G_n^{j+1,\delta}(t) &= \frac{2^j}{(2j-1)!!} \frac{1}{n+j+1} [G_n^{j,\delta}(t) - G_{n+2}^{j,\delta}(t)] \\ &= (-1)^j \frac{t^{\delta+3}}{n+j+1} \int_{[0,2]^j} \left[\frac{H_j^\delta(n, \xi_j, \dots, \xi_1, t)}{n+j} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_j^\delta(n+2, \xi_j, \dots, \xi_1, t)}{n+2+j} \right] d\xi_j \dots d\xi_1 \\ &= (-1)^j \frac{t^{\delta+3}}{n+j+1} \int_{[0,2]^{j+1}} H_{j+1}^\delta(n, \xi_{j+1}, \dots, \xi_1, t) d\xi_{j+1} \dots d\xi_1. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

3.4 O caso $\lambda = 2$

Nesta seção, pretendemos justificar que $G_n^{2,2}(t) > 0$ quando $0 < t < \pi$, $n \in \mathbb{N}$. A demonstração será encaminhada em duas vertentes: a primeira englobará o caso em que $0 < a \leq nt$, onde $a > 0$ será especificado em momento oportuno e a segunda o caso em que $a < nt \leq n\pi$. Porém, como esta metodologia exclui alguns valores de n , uma terceira vertente será necessária para a justificativa dos casos restantes.

Começamos com a segunda vertente, onde utilizaremos a expressão (3.2) para demonstrar a desigualdade $dG_n^{1,2}/dn(t) < 0$. O resultado em si é o seguinte.

Proposição 3.4.1. Se $n \geq 3$, então existe $a_1 \in (0, \infty)$ tal que

$$G_n^{2,2}(t) > 0, \quad a_1 < nt < n\pi.$$

Demonstração: Por (3.2), já temos que

$$\frac{2}{3}G_n^{2,2}(t) = \frac{1}{n+2}[G_n^{1,2}(t) - G_{n+2}^{1,2}(t)],$$

enquanto que o Lema 3.3.3 implica que

$$2G_n^{1,2}(t) = -\frac{t^5}{n+1} \int_0^2 h_2'((n+\xi)t) d\xi.$$

Derivando com relação a n a expressão acima, vem que

$$2t^{-5} \frac{d}{dn} G_n^{1,2}(t) = - \int_0^2 \frac{(n+1)th_2''((n+\xi)t) - h_2'((n+\xi)t)}{(n+1)^2} d\xi.$$

Em vista de nossos objetivos, devemos concluir que

$$\begin{aligned} H_n(u) &= (n+1)th_2''((n+\xi)t) - h_2'((n+\xi)t) \\ &= \frac{(n+1)}{n+\xi} (n+\xi)th_2''((n+\xi)t) - h_2'((n+\xi)t) \\ &= \frac{(n+1)}{n+\xi} u h_2''(u) - h_2'(u) > 0, \quad \xi \in (0, 2), \quad u = (n+\xi)t. \end{aligned}$$

Como

$$h_2(u) = \int_0^1 (1-s)^3 \cos(us) ds = \frac{3}{u^4} (2 \cos u - 2 + u^2),$$

temos que

$$h_2'(u) = \frac{6}{u^5} (4 - u^2 - 4 \cos u - u \sin u),$$

Da desigualdade

$$4 - u^2 - 4 \cos u - u \sin u \leq 4 - u^2 + 4 + u = -u^2 + u + 8,$$

segue que $h_2'(u) < 0$, quando $u > 4$. Por outro lado, a expansão de Maclaurin de h_2' é

$$h_2'(u) = \frac{12}{u^5} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-2)}{(2k)!} u^{2k}.$$

Em particular, como

$$\frac{(-1)^{2k+1} (2k-1)}{(4k+2)!} u^{4k+2} + \frac{(-1)^{2k+2} 2k}{(4k+4)!} u^{4k+4} < 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad u^2 < 28,$$

concluimos que $h_2'(u) < 0$, quando $u < \sqrt{28}$. Dessa forma, $h_2'(u) < 0$, para todo $u > 0$.

Analisemos agora a função h_2'' . Por derivação, obtemos que

$$h_2''(u) = \frac{6}{u^6} (-20 + 3u^2 - (-20 + u^2) \cos u + 8u \sin u), \quad u > 0,$$

e, por conseguinte,

$$h_2''(u) \geq 6u^{-6}(2u^2 - 8u - 40) > 0, \quad u \geq 2(1 + \sqrt{6}) = 6,898979\dots$$

Na verdade, utilizando computação numérica, ve-se que h_2'' admite uma única raiz em $(0, 7)$, digamos u_0 . Notamos ainda que $h_2''(u) < 0$, $u \in (0, u_0)$. Combinando-se as informações obtidas para h_2' e h_2'' , temos que $H_n(u) > 0$, quando $u > u_0$. Resta considerar o que acontece no intervalo $(0, u_0)$. Por um lado,

$$\begin{aligned} H_n(u) = \frac{n+1}{n+\xi} u h_2''(u) - h_2'(u) &\geq \frac{n+1}{n} u h_2''(u) - h_2'(u) \\ &\geq \frac{4}{3} u h_2''(u) - h_2'(u), \quad \xi \in (0, 2), \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Se chamarmos a última expressão acima de $k(u)$, obtemos

$$k(u) = \frac{2}{u^5}(-92 + 15u^2 - 4u^2 \cos u + 35u \sin u + 92 \cos u)$$

e então

$$\begin{aligned} k(u) &\geq \frac{1}{3u^5}(-92 + 15u^2 - 4u^2 - 35u - 92) \\ &= \frac{1}{3u^5}(-184 - 35u + 11u^2) > 0, \quad u > 5,9793\dots \end{aligned}$$

Novamente, via cálculos numéricos, notamos que a função k admite apenas uma raiz a em $(0, 7)$ ($a < u_0$), enquanto que $k(u) > 0$, quando $u > a$. Em outras palavras, $H_n > 0$ em $(a, u_0]$. Combinando-se os resultados obtidos até agora, vemos que

$$H_n(u) > 0, \quad u > a, \quad n \geq 3.$$

Assim,

$$G_n^{2,2}(t) > 0, \quad a < nt \leq n\pi, \quad n \geq 3, \quad (3.3)$$

o que conclui a demonstração. ■

Os valores aproximados para as constantes mencionadas na demonstração acima são $u_0 = 3,685420\dots$ e $a = 1,86321\dots$.

Agora voltemos nossa atenção para a primeira vertente. Aqui, faremos uso de uma estimativa para o maior zero $x_{n,1}(\lambda)$ do polinômio de Gegenbauer C_n^λ ([13]):

$$x_{n,1}(\lambda) \leq \frac{\sqrt{n^2 + 2(n-1)\lambda - 1}}{n + \lambda}.$$

Proposição 3.4.2. *Se $n \in \mathbb{N}$, então*

$$G_n^{2,2}(t) > 0, \quad t \in \left(0, \frac{3}{n+2}\right).$$

Demonstração: Definindo $t_n^* = \arccos(x_{n,1}(2))$, temos que

$$\cos t_n^* = x_{n,1}(2) \leq \sqrt{1 - \frac{9}{(n+2)^2}}.$$

e, por conseguinte,

$$\sin^2 t_n^* \geq \frac{9}{(n+2)^2}.$$

Dessa maneira, $C_n^2(\cos \theta) > 0$, $\theta \in [0, t_n^*]$. Em particular, o mesmo vale em $[0, \sin t_n^*]$ e, consequentemente, em $(0, 3/(n+2))$. A afirmação no enunciado da proposição segue da definição de $G_n^{2,2}$. ■

Corolário 3.4.3. *Se $0 < t < \pi$ e $n \geq 4$, então $G_n^{2,2}(t) > 0$.*

Demonstração: Basta notar que as regiões à esquerda e à direita dadas pelas Proposições 3.4.2 e 3.4.1 se interceptam a partir de $n = 4$. ■

Nos casos remanescentes, ou seja, quando $n = 0, 1, 2, 3$, usando o Lema 3.3.2 obtemos

$$\frac{4}{3}F_n^2(t) = \sum_{k=0}^2 \frac{e_{k,n}}{(n+2k)^4} \left\{ \cos((n+2k)t) - \left[1 - \frac{(n+2k)^2 t^2}{2} \right] \right\},$$

onde $e_{0,n} = (n+3)$, $e_{1,n} = -2(n+2)$ e $e_{2,n} = (n+1)$.

Plotando-se os gráficos de tais funções, concluimos a demonstração para o caso $\lambda = 2$.

3.5 O caso $\lambda = 3$

Adotando-se o mesmo procedimento utilizado na seção anterior, aqui pretendemos demonstrar que

$$G_n^{3,3}(t) > 0, \quad 0 < t < \pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Iniciamos com a segunda vertente.

Teorema 3.5.1. *Se $n \geq 9$, então existe $a \in (0, \infty)$ tal que*

$$G_n^{3,3}(t) > 0, \quad a < nt < n\pi.$$

Demonstração: Como já temos a igualdade

$$\frac{2}{5}G_n^{3,3}(t) = \frac{1}{n+3}[G_n^{2,3}(t) - G_{n+2}^{2,3}(t)],$$

a partir de (3.2), a ideia neste ponto é demonstrar que $\frac{d}{dn}G_n^{2,3}(t) < 0$. Do Lema 3.3.3, temos que

$$\frac{4}{3}G_n^{2,3}(t) = \frac{t^6}{n+2} \int_0^2 \int_0^2 \left[\frac{(n+1+\eta)th_3''((n+\xi+\eta)t) - h_3'((n+\xi+\eta)t)}{(n+1+\eta)^2} \right] d\eta d\xi.$$

Derivando em n , vem que

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \frac{d}{dn} G_n^{2,3}(t) &= t^6 \int_0^2 \int_0^2 \frac{t^2 h_3'''((n+\xi+\eta)t)}{(n+2)(n+1+\eta)} - \frac{(3n+5+\eta)th_3''((n+\xi+\eta)t)}{(n+2)^2(n+1+\eta)^2} \\ &\quad + \frac{(3n+5+\eta)h_3'((n+\xi+\eta)t)}{(n+2)^2(n+1+\eta)^3} d\eta d\xi. \end{aligned}$$

O objetivo passa a ser então estabelecer condições para que

$$\begin{aligned} H_n(u) &= u^2 h_3'''(u) - \frac{(3n+5+\eta)(n+\eta+\xi)}{(n+2)(n+1+\eta)} u h_3''(u) \\ &\quad + \frac{(3n+5+\eta)(n+\eta+\xi)^2}{(n+2)(n+1+\eta)^2} h_3'(u) < 0, \end{aligned}$$

uma vez que

$$\frac{4}{3} \frac{d}{dn} G_n^{2,3}(t) = t^6 \int_0^2 \int_0^2 a_n H_n((n+\xi+\eta)t) d\eta d\xi,$$

onde $a_n = a_n(\xi, \eta) = (n+2)^{-1}(n+1+\eta)^{-1}(n+\xi+\eta)^{-2} > 0$ e $u = (n+\xi\eta)t$. Como

$$h_3(u) = \frac{4(-6u + u^3 + 6\sin u)}{u^5},$$

temos que

$$h_3'(u) = -\frac{8}{u^6}(u^3 - 12u - 3u \cos u + 15\sin u),$$

$$h_3''(u) = \frac{24}{u^7}(u^3 - 20u - 10u \cos u - u^2 \sin u + 30\sin u),$$

e

$$h_3'''(u) = -\frac{24}{u^8}(4u^3 + u^3 \cos u - 120u - 90u \cos u - 15u^2 \sin u + 210\sin u).$$

Utilizando o mesmo procedimento usado no caso $\lambda = 2$ para demonstrar que $h_2'(u) < 0$, $u > 0$, obtemos que $h_3'(u) < 0$, para todo $u > 0$. Por outro lado, encontramos $u_2, u_3 \in (0, \infty)$ (com $u_2 < u_3$) de modo que

$$h_3''(u) > 0, \quad u > u_2; \quad h_3''(u) < 0, \quad 0 < u < u_2,$$

e

$$h_3'''(u) > 0, \quad u > u_3; \quad h_3'''(u) < 0, \quad 0 < u < u_3.$$

Na análise do comportamento de $H_n(u)$ consideramos dois casos. Se $u > u_3$, então automaticamente temos que $h'_3(u) < 0$, $h''_3(u) > 0$ e $h'''_3(u) < 0$. Logo, retornando à expressão que define H_n , vemos que $H_n(u) < 0$ para estes valores. Se $0 < u < u_3$, reescrevemos $H_n(u)$ na forma

$$H_n(u) = u^2 h'''_3 - \frac{(3n+5+\eta)(n+\eta+\xi)}{(n+2)(n+1+\eta)} \left[u h''_3(u) - \frac{(n+\eta+\xi)}{(n+1+\eta)} h'_3(u) \right].$$

Como $h'_3(u) < 0$, $u > 0$, então

$$\begin{aligned} u h''_3(u) - \frac{(n+\eta+\xi)}{(n+1+\eta)} h'_3(u) &> u h''_3(u) - \left(1 - \frac{1}{(n+1+\eta)}\right) h'_3(u) \\ &> u h''_3(u) - \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) h'_3(u) \\ &> u h''_3(u) - h'_3(u) > 0, \quad u > u_0, \end{aligned}$$

onde $u_0 = 2,99521\dots$. Assim,

$$\begin{aligned} H_n(u) &= u^2 h'''_3(u) - \frac{(3n+5+\eta)(n+\eta+\xi)}{(n+2)(n+1+\eta)} \left[u h''_3(u) - \frac{(n+\eta+\xi)}{(n+1+\eta)} h'_3(u) \right] \\ &< u^2 h'''_3(u) - \left(3 - \frac{1}{n+2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left[u h''_3(u) - \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) h'_3(u) \right], \end{aligned}$$

contanto que $u > u_0$. Dentro do nosso contexto, o lado direito $\Lambda_n(u)$ da desigualdade acima é decrescente em n no intervalo $u > u_0$. Em particular

$$\begin{aligned} \Lambda_9(u) &= -\frac{24}{275u^6} [2036u^3 - 49992u + 275u^3 \cos(u) + 82590 \sin(u) \\ &\quad - 32598u \cos(u) - 4845u^2 \sin(u)] < 0, \quad u > a = 3,65661\dots \end{aligned}$$

Portanto, $H_n(u) < 0$, quando $u > a$ e $n \geq 9$ e, assim, $G_n^{3,3}(t) > 0$, $a < nt \leq n\pi$. ■

Os seguintes valores específicos podem ser efetivamente usados na demonstração: $a = 3,65661\dots$, $u_2 = 4,23573\dots$, e $u_3 = 7,15125\dots$.

Antes de voltar a atenção para a primeira vertente, lembramos a seguinte estimativa para o maior zero de C_n^λ ([1]):

$$x_n(\lambda) \leq \sqrt{\frac{(n-1)(n+2\lambda-2)}{(n+\lambda-2)(n+\lambda-1)}} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \quad (3.4)$$

Esta estimativa entrará da demonstração do seguinte teorema.

Teorema 3.5.2. *Se $n > 9$, então*

$$G_n^{3,3}(t) > 0, \quad 0 < t < \frac{\sqrt{5+\pi^2}}{n+1}.$$

Demonstração: Como

$$x_n(3) \leq \sqrt{\frac{(n-1)(n+4)}{(n+1)(n+2)}} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right),$$

definindo $t_n^* = \arccos x_n(3)$, temos que

$$\cos^2 t_n^* \leq \frac{(n-1)(n+4)}{(n+1)(n+2)} \cos^2\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

e

$$\sin^2 t_n^* \geq 1 - \left(1 - \frac{6}{(n+1)(n+2)}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

Usando novamente uma expansão de Maclaurin com resto na forma integral, obtemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > 1 - \frac{\pi^2}{2(n+1)^2} + \frac{\pi^4}{24(n+1)^4}.$$

Assim, temos as estimativas

$$\begin{aligned} \sin^2 t_n^* &\geq 1 - \left(1 - \frac{6}{(n+1)^2}\right) \left(1 - \frac{\pi^2}{2(n+1)^2} + \frac{\pi^4}{24(n+1)^4}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{(n+1)^2} + \frac{6}{(n+1)^2} - \frac{\pi^4}{3(n+1)^4} - \frac{6\pi^2}{(n+1)^4} + \frac{\pi^6}{24(n+1)^6} \\ &\quad + \frac{2\pi^4}{(n+1)^6} - \frac{\pi^8}{576(n+1)^8} - \frac{\pi^6}{4(n+1)^8} + \frac{\pi^8}{96(n+1)^{10}} \\ &> \frac{5 + \pi^2}{(n+1)^2}, \quad n > 9. \end{aligned}$$

Como $C_n^3(\cos \theta) > 0$, $\theta \in (0, t_n^*)$, então o mesmo vale em $(0, \sin t_n^*)$. Consequentemente,

$$C_n^3(\cos \theta) > 0, \quad n > 9, \quad \theta \in \left(0, \frac{\sqrt{5 + \pi^2}}{(n+1)}\right).$$

Isso conclui os argumentos. ■

Corolário 3.5.3. *Se $t \in (0, \pi)$ e $n > 14$, então*

$$G_n^{3,3}(t) > 0, \quad t \in (0, \pi).$$

Demonstração: Como no caso $\lambda = 2$, as regiões a direita e a esquerda definidas pelos Teoremas 3.5.2 e 3.5.1 se interceptam a partir de $n = 15$. Logo, se $t \in (0, \pi)$ e $n > 14$, então $G_n^{3,3}(t) > 0$. ■

Os casos remanescentes seguem da expressão,

$$\frac{8}{3}F_n^3(t) = \sum_{k=0}^3 \frac{f_{k,n}}{(n+2k)^5} \left\{ \sin((n+2k)t) - \left[(n+2k)t - \frac{(n+2k)^3 t^3}{6} \right] \right\},$$

onde $f_{0,n} = (n+5)(n+4)$, $f_{1,n} = -3(n+5)(n+2)$, $f_{2,n} = 3(n+4)(n+1)$ e $f_{3,n} = -(n+2)(n+1)$, a qual pode ser obtida do Lema 3.3.2.

Referências Bibliográficas

- [1] Area, I.; Dimitrov, D.; Godoy, E.; Ronveaux, A. Zeros of Gegenbauer and Hermite polynomials and connection coefficients. *Math.Comp.* 73 (2004), 1937-1951.
- [2] Askey, R. Radial characteristic functions, Tech. Report No. 1262, Math. Research Center, University of Wisconsin-Madison, (1973).
- [3] Askey, R. Orthogonal polynomials and special functions. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., (1975).
- [4] Atkinson, K; Han, Weimin. Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: an introduction. Lecture Notes in Mathematics, 2044. Springer, Heidelberg, (2012).
- [5] Banerjee, S. On Geodesic distance computations in spatial modeling. *Biometrics* 61 (2005), no.2 , 617-625.
- [6] Beatson, R. K.; Zu Castell, W.; Xu, Yuan. A Pólya criterion for (strict) positive-definiteness on the sphere. *IMA J. Numer. Anal.* 34 (2014), no. 2, 550-568.
- [7] Castro, M.H.; Menegatto, V.A. Eigenvalue decay of positive integral operators on the sphere. *Math. Comp.* 81 (2012), no.280, 2303-2317.
- [8] Chen, D.; Menegatto, V.A.; Sun, X. A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres. *Proc. Amer. Math. Soc.* 131 (2003), 2733-2740.
- [9] Cheney, W.; Light, W. A course in approximation theory. Reprint of the 2000 original. Graduate Studies in Mathematics, 101. American Mathematical Society, Providence, RI, (2009).
- [10] Cucker, F.; Smale, S. On the mathematical foundations of learning. *Bull. Amer Math. Soc. (N.S.)* 39 (2002), no.1, 1-49.

-
- [11] Cucker, F.; Zhou, Ding-Xuan. Learning theory: an approximation theory viewpoint. With a foreword by Stephen Smale. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, (2007).
- [12] Dai, Feng; Xu, Yuan. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, (2013).
- [13] Elbert, Á.; Laforgia, A. Upper bounds for the zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory* 61 (1990), no. 1, 88-97.
- [14] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A.; Peron, A. P. Integral operators on the sphere generated by positive definite smooth kernels. *J. Complexity* 24 (2008), no.5-6, 632-647.
- [15] Folland, G. B. Real analysis. Modern techniques and their applications. Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, (1999).
- [16] Gneiting, T. Radial positive definite functions generated by Euclid's hat. *J. Multivariate Anal.* 69 (1999), no. 1, 88-119.
- [17] Gneiting, T. Strictly and non-strictly positive definite functions on spheres. *Bernoulli* 19 (2013), no. 4, 1327-1349.
- [18] Horn, R. A.; Johnson, C. R Matrix Analysis Cambridge University Press, U.S.A., (1985).
- [19] Huang, Chunfeng; Zhang, Haimeng; Roberson, S. M. On the validity of commonly used covariance and variogram functions on the sphere. *Math. Geosci.* 43 (2011), no.6, 721-733.
- [20] Jordão, T; Menegatto, V. A. Reproducing properties of differentiable Mercer-like kernels on the sphere *Numer. Funct. Anal. Optim.* 33 (2012) no.10, 1221-1243.
- [21] Menegatto, V. A.; Oliveira, C. P. Eigenvalue and singular value estimates for integral operators: a unifying approach. *Math. Nachr.* 285 (2012), no. 17-18, 2222-2232.
- [22] Quang, M.H. Reproducing kernel Hilbert spaces in Learning Theory, Thesis, Department of Mathematics, Brown University, (2006).
- [23] Royden, H. L.; Fitzpatrick, P. Real analysis. Fourth edition. Prentice-Hall (2010) .

-
- [24] Schoenberg, I. J. Positive definite functions on spheres. *Duke Math. J.* 9, (1942). 96-108.
 - [25] Schölkopf, B; Smola, A. Learning with Kernels, MIT Press, Cambridge, MA, (2002).
 - [26] Szegő, G. Orthogonal polynomials. Fourth edition. American Society Colloquium Publications, vol. 23. Providence, RI: American Mathematical Society, (1975).
 - [27] Wendland, H. Scatted data approximation, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 17. Cambridge University Press, Cambridge (2005).
 - [28] Williamson, R. E. Multiply monotone functions and their Laplace transforms. *Duke Math. J.* 23 (1956), 189-207.