SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 11.03.2005,

Assinatura:

**Whitney equisingularidade e invariantes de
germes de aplicações de C^n em C^3 , $n \geq 4$**

Eliris Cristina Rizzioli

Orientador: Prof. Dr. Marcelo José Saia

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

**USP – São Carlos
Março de 2005**

Aluno: Eliris Cristina Rizziolli

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Marcelo José Saia

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Prof. Dr. Marcio Gomes Soares

Prof. Dr. Bruno César Azevedo Scárdua

Prof. Dr. Alberto León Kushner Schnur

Aos meus querido avós maternos e paternos
Manoelina Oliveira Modesto & Martins Modesto
e
Antonia Lopes Rizziolli & Vírgilio Rizziolli

”Se procurar bem, você acaba encontrando não a
explicação (duvidosa) da vida, mas a poesia (inexplicável)
da vida.”

Poema de Carlos Drummond de Andrade

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais um sonho realizado.

Aos meus pais, Maria Antonia e Elias, exemplos de amor, dedicação, honestidade, otimismo e paciência. Meu porto seguro.

Aos meus irmãos, Elias Junior & Miriane e Elínia & Evandro, pela torcida, pelo carinho e por rirem das minhas piadas.

Ao meu marido, Júnior, por deixar minha vida mais leve.

À Marta e à Djuly, pelo carinho.

Aos meus queridos amigos e amigas, pelos momentos agradáveis que tomamos juntos, quero dizer, que passamos juntos. Adoro vocês!

Ao meu orientador, Marcelo, por sua atenção, persistência e otimismo.

Ao meu co-orientador, Vitor, pela paciência de me ensinar a mesma coisa várias vezes.

Ao Grupo de Singularidades, que a cada dia se parece mais com uma família.

Aos meus colegas de pós-graduação, pela alegria na hora do café.

A todo ICMC-USP, pela sua disposição e generosidade.

Enfim, a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Resumo

Nesse trabalho estuda-se o seguinte problema:

”Dada uma família a 1-parâmetro de germes de aplicações $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, encontrar invariantes analíticos cuja constância na família implica que esta é Whitney equisingular”.

Gaffney descreve este problema para a classe de germes de aplicações finitamente determinados de tipo estável discreto. Para obter a Whitney equisingularidade de tal família, os invariantes necessários são os invariantes 0-estáveis e as multiplicidades polares das variedades polares associadas a todos os tipos estáveis. O número de invariantes depende das dimensões (n, p) e esse número pode ser muito grande se n e p são grandes. Então aparece uma questão natural:

”Fixado um par de dimensões (n, p) , qual é o número mínimo de invariantes no teorema de Gaffney que são necessários para garantir a Whitney equisingularidade?”

Aqui trata-se dos germes de aplicações em $\mathcal{O}(n, 3), n \geq 4$.

Para reduzir o número de invariantes mostra-se relações envolvendo as multiplicidades polares.

Também considera-se o caso especial de quase homogêneos. Obtém-se fórmulas para calcular os invariantes polares e $\sharp A_3$ em termos dos pesos e graus do germe quase homogêneo.

Abstract

In this work we study the following problem:

”Given a 1-parameter family of map germs $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, find invariants whose constancy in the family implies the family is Whitney equisingular”.

Gaffney describes this problem for the class of finitely determined map germs of discrete stable type. To obtain the Whitney equisingularity of such a family, the necessary invariants are the zero stable invariants and the polar multiplicities of the polar varieties associated to all the stable types. The number of invariants depends on the dimensions (n, p) and this number can be very big according to n and p are big. Then a natural question arises:

”For a fixed pair of dimensions (n, p) , what is the minimum number of invariants in Gaffney’s theorem that are necessary to guarantee the Whitney equisingularity of family?”

Here we deal with the case of map germs in $\mathcal{O}(n, 3), n \geq 4$.

To reduce the number of invariants we show relationships between the polar multiplicities.

We also consider the special case of weighted homogeneous. We get formulae to compute the polar invariants and $\sharp A_3$ in terms of the weights and degree of the germ.

Sumário

Introdução	1
1 Definições básicas e resultados.	3
1.1 Germes de aplicações e estabilidade.	3
1.1.1 Ideais Jacobianos.	5
1.2 Equisingularidade de Whitney.	7
1.2.1 Estratificações de Aplicações.	8
1.3 Desdobramentos: bom e excelente.	9
1.4 Multiplicidades e anéis Cohen-Macaulay.	10
1.5 Invariantes Polares e Teorema Fundamental.	12
2 Germes e Multigerms estáveis de $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^3, n \geq 4$.	16
3 Os invariantes dos tipos estáveis na meta.	19
4 Os invariantes dos tipos estáveis na fonte.	43
4.1 Invariantes dos tipos estáveis em $\Sigma(f)$	43
4.2 Invariantes dos tipos estáveis em $X(f_t)$	46
4.2.1 Pré-requisitos.	46
4.2.2 Equisingularidade de $X(f)$	49
5 Whitney equisingularidade em famílias de germes em $\mathcal{O}(n, p), n \geq 4$.	52
5.1 Caso $\mathcal{O}(n, 3)$, com $n \geq 4$	52
5.2 Caso $\mathcal{O}(n, p)$, com $n \geq p$	54
6 Invariantes de germes quase-homogêneos em $\mathcal{O}(n, 3), n \geq 4$.	55
6.1 Multiplicidades polares.	55
6.2 $\sharp A_3$ em $\mathcal{O}(n, 3)$, $n \geq 4$	64
Bibliografia	73

Introdução

Nesse trabalho explora-se a seguinte questão: "Dada uma família a 1-parâmetro de germes de aplicações $F(x, t) : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, quais são os invariantes analíticos cuja constância garante a Whitney Equisingularidade desta família"?

No caso $p = 1$, Tessier em [52] mostra que a sequência $\mu^* = (\mu_0, \dots, \mu_n)$ forma um conjunto completo de invariantes para a Whitney equisingularidade.

Em [13], Gaffney resolve esse problema para a classe de germes de aplicações finitamente determinados de tipo estável finito. Ele mostra que para se obter a Whitney Equisingularidade desta família os invariantes são as multiplicidades das variedades polares, definidas por Tessier em [53], associadas aos tipos estáveis e os invariantes 0-estáveis.

O número de invariantes depende do par de dimensões (n, p) e em geral este é grande.

Por isso surge uma nova pergunta: "Fixado um par dimensões de (n, p) é possível minimizar a quantidade desses invariantes"?

Também em [13], Gaffney responde esta pergunta para os pares $(2, 2)$ e $(2, 3)$. Para $n = p = 2$ os invariantes analíticos são: o número de cúspides, o número de dobras transversais e a segunda multiplicidade polar do discriminante do germe. Para $n = 2$ e $p = 3$, Gaffney mostrou que o número de pontos triplos, o número de guarda-chuva de Whitney, a segunda multiplicidade polar da imagem do germe e a multiplicidade da curva de pontos duplos formam uma lista completa de invariantes. Ruas mostrou em [49] que em alguns casos particulares, o número de pontos triplos, o número de guarda-chuva de Whitney e o número de Milnor da curva de pontos duplos são suficientes.

Jorge Pérez em [27] resolve esse problema para o par $(3, 3)$, reduzindo de 25 invariantes para apenas 07. O caso $n = p$ é resolvido em [28] por Levcovitz, Jorge Pérez e Saia e Jorge Pérez e Saia exploram em [29] os casos $(n, p), n < p$.

Gaffney e Vohra em [22] caracterizam a Whitney equisingularidade para os pares $(n, 2)$, com $n > 2$, através dos números de Lê associados a uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$.

Este trabalho aborda o caso $(n, 3), n \geq 4$. Neste caso, de $6(n+1)$ invariantes necessários para o teorema de Gaffney, com os resultados obtidos mostra-se que este número é reduzido para $2(n+2)$, por exemplo, para o par $(4, 3)$ de 30 invariantes são necessários "somente" 12.

O método aplicado neste trabalho é o mesmo de Gaffney em [13], a seguir é descrito um roteiro para a aplicação deste método.

1º Passo. Descrever quais são os germes estáveis em um par de dimensões (n, p) fixado. Com o objetivo de estratificar a fonte e a meta por estes tipos estáveis.

Esta estratificação é feita em três conjunto, sendo dois destes na fonte.

- o conjunto singular (fonte);
- a imagem do conjunto singular, ou seja, o discriminante (meta);
- o fecho do conjunto dado pelos pontos da imagem inversa do discriminante que não pertencem ao conjunto singular (fonte).

2º Passo. São obtidas relações entre invariantes. Para I.C.I.S. o Teorema de Lê-Greuel pode ser aplicado afim de obter relações entre as multiplicidades polares e o número de Milnor do conjunto singular. Para as hipersuperfícies sem singularidade isolada, trabalhar com os números de Lê é o caminho.

3º Passo. Por fim, tendo obtido todas as relações possíveis, aplica-se a propriedade da semi-continuidade superior para minimizar a quantidade de multiplicidades polares exigidas pelo Teorema de Gaffney.

Este roteiro é aplicado neste trabalho nos capítulos 2, 3, 4 e 5.

O capítulo 6 é dedicado a um estudo sobre os invariantes de germes quase-homogêneos nas dimensões $(n, 3)$, com $n \geq 4$.

São descritas fórmulas para o cálculo das multiplicidades polares do discriminante em termos dos pesos e graus de quase homogeneidade e também do número de singularidade de tipo A_3 do germe. A seguir é obtida uma fórmula para o cálculo do $\sharp A_3$ em termos dos pesos e graus e finalmente são descritas as multiplicidades polares do discriminante nas dimensões $(4, 3)$ em termos dos pesos e graus.

Definições básicas e resultados.

1.1 Germes de aplicações e estabilidade.

O papel desta seção é inserir as notações que são usadas neste trabalho. As obras [55], [56], [23] e [13] são algumas sugestões para um estudo mais profundo sobre os conceitos fundamentais da Teoria de Singularidades.

Denota-se por $\mathcal{O}_e(n, p)$ o conjunto dos germes de aplicações holomorfas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ e por $\mathcal{O}(n, p)$ o conjunto dos germes de aplicações holomorfas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

Indica-se por $\mathcal{R}$ (ação à direita) o grupo de germes de difeomorfismos da fonte $(\mathbb{C}^n, 0)$ e por $\mathcal{L}$ (ação à esquerda) o grupo de germes de difeomorfismos da meta $(\mathbb{C}^p, 0)$. A ação do produto $(\mathcal{R} \times \mathcal{L}) := \mathcal{A}$ resulta na $\mathcal{A}$ - equivalência entre germes de aplicação: $f, g \in \mathcal{O}(n, p)$ são $\mathcal{A}$ - equivalentes se existem difeomorfismos na fonte, $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, e na meta, $k : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}^p, 0) \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{C}^p, 0) \end{array}$$

comuta.

Neste caso, g está na $\mathcal{A}$ - órbita de f pela ação do grupo $\mathcal{A}$.

Um germe de aplicação $f \in \mathcal{O}(n, p)$ é **k - $\mathcal{A}$ - determinado** se para todo $g \in \mathcal{O}(n, p)$ tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$ tem-se que g é $\mathcal{A}$ - equivalente a f e f é **$\mathcal{A}$ - determinado** se é **k - $\mathcal{A}$ - determinado** para algum $k < \infty$. Reserva-se a frase **finitamente determinado** para dizer que um germe é $\mathcal{A}$ - determinado.

Uma **deformação** a s -parâmetros de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe de aplicação em $\mathcal{O}(n+s, p)$,

$$\tilde{f} : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$$

$$(x, u) \mapsto \tilde{f}(x, u),$$

tal que $\tilde{f}(x, 0) = f(x)$.

Um **desdobramento** a s -parâmetros de f é uma aplicação em $\mathcal{O}(n+s, p+s)$,

$$F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, (0, 0))$$

$$(u, x) \mapsto F(u, x) = (u, \tilde{f}(u, x)),$$

onde $\tilde{f}$ é uma deformação do germe f .

F é um **desdobramento trivial** de f se existem desdobramentos a s -parâmetros, R , da identidade em $\mathbb{C}^n$ e L , da identidade em $\mathbb{C}^p$, tais que $L \circ F \circ R^{-1} = (id, f)$, onde id é a aplicação identidade em $\mathbb{C}^s$. Se R e L são homeomorfismos diz-se que F é **topologicamente trivial**.

Dois desdobramentos a s -parâmetros de f , F_1 e F_2 , são **isomorfos** se F_2 é igual a composição $L \circ F_1 \circ R^{-1}$, onde L e R são desdobramentos das identidades na fonte e na meta, respectivamente.

Um desdobramento F_2 a s -parâmetros é **induzido** de um desdobramento $F_1 = (id, \tilde{f})$ a t -parâmetros se existe uma aplicação $h : (\mathbb{C}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^t, 0)$ tal que F_2 é igual a $h^* F_1 = (id, \tilde{f}(h(s), x))$.

F é um **desdobramento versal** de f se todo desdobramento de f é isomorfo a um desdobramento induzido de F .

Um germe f é **estável** se todo germe em uma vizinhança de f é $\mathcal{A}$ -equivalente à f .

Mather em [40] e [41], desenvolveu a teoria sobre estabilidade de germes de aplicações. Seu principal resultado é a caracterização de germes estáveis através de desdobramentos versais.

Proposição 1.1. [40] *Um germe de aplicação é estável, se e somente se, para qualquer k , todo desdobramento a k -parâmetros de f é trivial.*

Em particular, tratando de multigerms, tem-se o seguinte resultado,

Teorema 1.2. [40] *Seja $S = \{x_1, \dots, x_m\} \in \mathbb{C}^n$, e suponha que $f(x_1) = \dots = f(x_m) = z$. Seja A_i o germe em x_i do conjunto $\{x \in \mathbb{C}^n \text{ tal que o germe de } f \text{ em } x \text{ é } \mathcal{A}\text{-equivalente ao germe de } f \text{ em } x_i\}$. Então o multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, z)$ é estável se e somente se:*

- (i) cada germe $f : (\mathbb{C}^n, x_i) \rightarrow (\mathbb{C}^p, z)$ é estável, para $1 \leq i \leq m$,
- (ii) o germe de aplicação $f \times \cdots \times f : (A_1 \times \cdots \times A_m, (x_1, \dots, x_m)) \rightarrow (\mathbb{C}^p)^m$ é transversal ao conjunto $\Delta_{m,p} := \{(z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{C}^p)^m \mid z_i = z_j \text{ para todo } i, j\}$.

O resultado a seguir caracteriza quando dois germes estáveis são $\mathcal{A}$ -equivalentes.

Proposição 1.3. [40] Suponha que $f, g \in \mathcal{O}(n, p)$ são estáveis. Então f é $\mathcal{A}$ -equivalente a g , se e somente se, $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_p \rangle}$ é isomorfo a $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle g_1, \dots, g_p \rangle}$, onde f_i e g_i são as funções coordenadas de f e g , respectivamente.

O próximo teorema relaciona determinação finita com estabilidade. Este resultado é válido para a classe dos germes de aplicações $\mathcal{K}$ - finitamente determinados [ver [[56], p.201] para mais detalhes desse grupo de Mather].

Teorema 1.4. [40] Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação $\mathcal{K}$ -finitamente determinado. Então este germe é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, para cada representante de f , existe uma vizinhança u de 0 em $\mathbb{C}^n$ e V de 0 em $\mathbb{C}^p$ tais que se $y \in V - \{0\}$, $f^{-1}(y) \cap \Sigma_f \cap U = \{x_1, \dots, x_r\}$, então o multi-germe de f em $\{x_1, \dots, x_r\}$ é $\mathcal{A}$ -estável.

Um **tipo estável** é uma classe de $\mathcal{A}$ -equivalência entre germes estáveis. Um germe finitamente determinado f tem **tipo estável discreto** se existe um desdobramento versal de f no qual ocorre um número finito de tipos estáveis. Se o par (n, p) está nas boas dimensões de Mather, o que é válido para o caso proposto $(n, 3)$, com $n \geq 4$, ou em sua fronteira, então todo germe finitamente determinado $f \in \mathcal{O}(n, p)$ tem tipo estável discreto.

1.1.1 Ideais Jacobianos.

Nesta seção trata-se os ideais jacobianos iterados definidos por Morin em [45]. Aqui é seguida a abordagem desenvolvida em [47].

O principal motivo para o uso desses ideais neste trabalho é o fato que estes definem as variedades de Thom-Boardman, contidas no conjunto singular $\Sigma(f)$. Estas variedades são denotadas por $\Sigma^i(f)$ onde i é o número descrito abaixo (detalhes em [6]).

Dados $n, p \geq 1$, denota-se por $\mathcal{B}(n, p)$ o conjunto dos números de Boardman nessas dimensões. Um vetor $i = (i_1, \dots, i_k)$, de números inteiros positivos, é um **número de Boardman** se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $k \geq 1$;
- (ii) $n \geq i_1 \geq \dots \geq i_k \geq 0$;
- (iii) $i_1 \geq n - p$;
- (iv) se $i_1 = n - p$ então $i_1 = i_2 = \dots = i_k$.

Dada uma matriz $U = (u_{ij})$ com entradas em $\mathcal{O}_n$ e um inteiro $t \geq 0$, denota-se por $I_t(U)$ o ideal gerado pelos menores de ordem t em U . Quando a matriz U é de ordem $p \times q$ e $t > \min\{p, q\}$, convencionam-se $I_t(U) = \{0\}$.

Em particular, se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe de aplicação analítica, $I_t(d(f))$ é o ideal gerado pelos menores de ordem t de sua matriz jacobiana, $d(f)$.

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação e I um ideal de $\mathcal{O}_n$ gerado pelos elementos $g_1, \dots, g_r \in I$. Para cada $m \in \{1, \dots, n\}$ define-se a **extensão jacobiana**, de posto m , do par (f, I) como:

$$\Delta_m(f, I) = I + I_m(d(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)).$$

Quando $m > n$, convencionam-se $\Delta_m(f, I) = I$.

Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ germe de aplicação analítica e $i = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{B}(n, p)$. Define-se, indutivamente, a **extensão jacobiana iterada de f em relação a i** , como segue.

$$J_i(f) = \begin{cases} \Delta_{n-i_1+1}(f, \{0\}) & \text{se } k = 1 \\ \Delta_{n-i_k+1}(f, J_{i_1, \dots, i_{k-1}}(f)) & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

Além disso, define-se o número $c_i(f)$ por

$$c_i(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_i(f)}$$

Quando selecciona-se um conjunto fixo de coordenadas $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ de $\mathbb{C}^r$ pode-se construir a extensão jacobiana $\Delta_m(f, I)$ considerando as derivadas parciais em relação a estas coordenadas. Nesse caso, denota-se a extensão jacobiana por $\Delta_m(f, I; x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$, a extensão jacobiana iterada por $J_i(f; x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ e $c_i(f; x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ a multiplicidade.

Proposição 1.5. [47] Suponha que $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ seja um germe de aplicação dado por $f(u, x) = (u, g(u, x))$, para $u \in \mathbb{C}^r, x \in \mathbb{C}^{n-r}$ e seja $i = (i_1, \dots, i_k)$. Então

$$c_i(f) = \begin{cases} 0, & \text{se } i_1 > n - r \\ c_i(g; x), & \text{se } i_1 \leq n - r \end{cases}$$

1.2 Equisingularidade de Whitney.

No estudo da Whitney equisingularidade entre famílias de aplicações o primeiro passo é a determinação de estratificações de Whitney em conjuntos analíticos.

Uma estratificação de Whitney de um espaço analítico é uma estratificação tal que para qualquer par de estratificações S, S' com $S' \subseteq \bar{S}$, o estrato $\bar{S}$ é Whitney regular ao longo de S' . Ou seja, o par S, S' satisfaz as condições (A) e (B) de Whitney, a saber,

(A) Para qualquer sequência de pontos $y_i \in S$ convergindo para um ponto $y \in S'$ com a propriedade de que as direções dos espaços tangentes T_{S, y_i} convergem para um hiperplano T , tem-se: $T_{S', y} \subset T$;

(B) Dadas sequências de pontos $y_i \in S$ e $z_i \in S'$ com $y_i \rightarrow y$ e $z_i \rightarrow y$ e tais que T_{S, y_i} converge para um plano T e a direção da secante $\overline{z_i y_i} \in \mathbb{K}^{n+1}$ converge para l , tem-se $l \subset T$.

O tipo topológico permanece constante ao longo de cada estrato da Whitney estratificação de um espaço.

Uma estratificação de Whitney sempre existe no caso analítico complexo local (veja seção 01 de [20]).

Diz-se que um espaço X é Whitney equisingular ao longo de um subespaço $Y \subset X$, não singular em $0 \in X$, se existe uma estratificação de Whitney de X com Y como um estrato.

Sejam A e B subespaços lineares na origem de $\mathbb{C}^N$. Define-se a distância de A para B como,

$$dist(A, B) = \sup_{\substack{u \in B^\perp - \{0\} \\ v \in A - \{0\}}} \frac{|(u, v)|}{\|u\| \|v\|}$$

Usando esta distância, a condição A de Whitney pode ser vista de outra maneira. Sejam S, S' como acima, se esse par satisfaz

$$dist(T_{S', 0}, T_{S, s}) \leq C \cdot dist(s, S')^e, \quad \text{para todo } s \text{ próximo de } S' \quad (\star)$$

então diz-se que o par S, S' satisfaz a **condição A de Whitney com expoente e** e $0 \in S'$.

Se f é um germe de uma aplicação analítica definida no fecho de um estrato S , a condição **A relativamente a f** é obtida substituindo o espaço tangente a S , em $(\star)$, pelo espaço tangente a fibra de f , nos pontos onde f é uma submersão sobre sua imagem. Neste caso, a condição A é denotada por A_f e é conhecida como condição **A_f de Thom**. Em particular, quando trata-se de uma deformação f_t , denota-se a condição A_f por A_t .

Quando $e = 1$, em $(\star)$, diz-se que esse par satisfaz a **condição W** de Verdier (veja [54]). Analogamente a condição A, a condição **W relativamente a f** é denotada por W_f (ou W_t).

Outra definição usada neste trabalho é a definição de **espaço conormal**. Um **espaço conormal** de um dado espaço analítico $Y \subseteq \mathbb{C}^N$, denotado $C(Y)$, é o fecho em $\mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$ dos pares (y, H) , onde y é um ponto regular (suave) de Y e H é um hiperplano tangente a Y em tal ponto. Como $C(Y)$ guarda informações sobre hiperplanos tangentes limitantes a Y isto tem um papel importante quando trata-se das condições de equisingularidade. O **espaço conormal relativamente a f** (como acima), denotado por $C(Y, f)$ é o fecho do conjunto de pares (y, H) em $\mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^{N-1}$ onde f é uma submersão em $y \in Y$ e H é um hiperplano tangente a fibra de f em y .

1.2.1 Estratificações de Aplicações.

A estratificação definida a seguir é essencial quando trata-se das condições de regularidade de Whitney para um desdobramento F .

Se $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é um morfismo e $A \subseteq \mathbb{C}^n, A' \subseteq \mathbb{C}^p$ são subconjuntos tais que $F(A) \subseteq A'$, então uma estratificação de $F : A \rightarrow A'$ é um par $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ de estratificações de A e A' respectivamente tal que F aplica submersivamente estrato em estrato. Uma dada estratificação $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ de F é uma estratificação regular se $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ satisfazem as condições de regularidade de Whitney e todos os pares de estratos que aparecem na fonte satisfazem a condição A_f de Thom. Se $F = \{f_t\}$ é um desdobramento com eixo de parâmetro T , então uma estratificação regular de F é chamada estratificação Whitney equisingular ao longo de T se T é um estrato de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{A}'$ e as estratificações $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são Whitney equisingulares ao longo de T . Neste caso diz-se que F é uma aplicação **Whitney equisingular**.

1.3 Desdobramentos: bom e excelente.

Nesta seção são introduzidos os desdobramentos bom e excelente, que são necessários para o resultado de Gaffney.

Um desdobramento F a 1-parâmetro de f é um **bom desdobramento** se existem U e W , vizinhanças da origem em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ respectivamente, tais que $F^{-1}(W) = U$, F aplica $U \cap \Sigma f - T$ em $W - T$ e se $(t_0, y_0) \in W - T$, onde $S = F^{-1}(t_0, y_0) \cap \Sigma F$ e $T = \mathbb{C} \times \{0\}$, então o germe $f_{t_0} : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_0)$ é um germe estável.

Esta condição "ser bom desdobramento" é uma das exigências para que o desdobramento F não satisfaça a propriedade "coalescing".

Um desdobramento satisfaz a condição "coalescing" se existe um arco de pontos, $C(t)$, na fonte (ou na meta) cujo fecho inclui a origem onde o germe de aplicação f_t em $C(t)$ não é equivalente ao germe de f_t em qualquer ponto em uma vizinhança. Se F é um bom desdobramento então a propriedade "coalescing" pode apenas ocorrer em pontos da fonte de f_t onde f_t tem singularidade estável 0-dimensional.

A seguir é desenvolvido o conceito de invariante 0-estável, cuja constância em um bom desdobramento garante que a condição "coalescing" não ocorre.

Diz-se que um tipo estável $\mathcal{Q}$ aparece em F se para qualquer representante $F = (id, f_u(x))$ de F existe um ponto $(s, y) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p$ tal que o germe $f_u : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é um germe estável de tipo $\mathcal{Q}$ onde $S = f^{-1}(y) \cap \Sigma(f_u)$. Os pontos (s, y) e (s, x) com $x \in S$ são chamados de pontos de tipo estável $\mathcal{Q}$ na meta e na fonte, respectivamente.

Se f é estável denota-se o conjunto de pontos em $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p$ de tipo $\mathcal{Q}$ por $\mathcal{Q}(f)$ e o conjunto $\mathcal{Q}_S(f) = f^{-1}(\mathcal{Q}(f)) - \mathcal{Q}_\Sigma(f)$, onde $\mathcal{Q}_\Sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{Q}(f)) \cap \Sigma(f)$.

Se f é finitamente determinado denota-se por $\overline{\mathcal{Q}(f)} = (\{0\} \times \mathbb{C}^p) \cap \overline{\mathcal{Q}(F)}$, $\overline{\mathcal{Q}_S(f)} = (\{0\} \times \mathbb{C}^n) \cap \overline{\mathcal{Q}_S(F)}$ e $\overline{\mathcal{Q}_\Sigma(f)} = (\{0\} \times \mathbb{C}^n) \cap \overline{\mathcal{Q}_\Sigma(F)}$, onde a barra sobre estes conjuntos significa o fecho destes.

Diz-se que $\mathcal{Q}$ é um **tipo estável 0-dimensional** para o par (n, p) se $\mathcal{Q}(f)$ tem dimensão 0 onde f é um representante do tipo estável $\mathcal{Q}$.

Suponha que $\mathcal{Q}(F) = \{p_1, \dots, p_r\}$ é o conjunto de pontos de tipo $\mathcal{Q}$ para um desdobramento versal F de f . O **invariante 0-estável** do tipo $\mathcal{Q}$ de f , denotado por $m(f, \mathcal{Q})$ é a multiplicidade do ideal $m_S \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{Q}(F)}, (0,0)}$ em $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{Q}(F)}, (0,0)}$, ver seção 1.4 para definição de multiplicidade.

Observe que $\overline{\mathcal{Q}(F)}$ é um conjunto analítico fechado uma vez que

$$\overline{\mathcal{Q}(F)} = \cap F(j^{p+1}F^{-1}(\overline{\mathcal{A}z_i}))$$

onde z_i é o $(p+1)$ -jato do tipo estável $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{A}z_i$ é a órbita ($\mathcal{A}$ -órbita) de z_i .

É mostrado em [[13], p.208] que tipos estáveis na fonte e na meta formam uma estratificação regular da fonte e da meta, isto é, satisfaz as condições de Whitney.

Diz-se que um bom desdobramento é **excelente** se f é finitamente determinado de tipo estável discreto e os invariantes 0-estáveis são constantes em F ; se $n = p$ então adiciona-se a exigência que o grau de f deve ser constante para que o desdobramento seja excelente. O resultado (3.6) em [[13], p.192] mostra que um desdobramento excelente não satisfaz a propriedade "coalescing".

1.4 Multiplicidades e anéis Cohen-Macaulay.

Tópicos de Álgebra Comutativa servem como fio condutor para o desenvolvimento de diversas linhas de pesquisas, em particular aqui seu uso foi fundamental. Dentro da densidade de conteúdo que a Álgebra Comutativa oferece, alguns resultados são necessários para o desenvolvimento deste trabalho, que a seguir são descritos. Para mais detalhes, [42] e [10] são sugeridos.

Seja $R = \oplus_{n \geq 0} R_n$ um anel Noetheriano graduado, $R = R_0 \supset R_1 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$, com R_0 Artiniano e M um R -módulo graduado finitamente gerado, então cada M_n tem comprimento finito como R_0 -módulo. Define-se **série de Hilbert** de M a série formal

$$P(M, t) = \sum_{n \geq 0} l(M_n) t^n$$

onde $l(M_n)$ é o comprimento de M_n como R_0 -módulo, $\forall n \geq 0$.

Se M é um R -módulo graduado finitamente gerado de dimensão d , suponha que R seja gerado sobre R_0 por elementos de grau 1. Então existe um único polinômio $Q_M(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$:

$$P(M, t) = \frac{Q_M(t)}{(1-t)^d}.$$

Sob estas hipóteses, define-se **multiplicidade de M** como o número $e(M) = Q_M(1) \neq 0$. Quando R é de dimensão 0 então $e(M)$ é igual ao comprimento $l(M)$ de M .

Se R é um anel Noetheriano local e m seu ideal maximal, um ideal $I \subset R$ é de **definição** se

existe $k \geq 1$ tal que $m^k \subseteq I$. Se M é um R -módulo finitamente gerado, define-se a **multiplicidade de M em relação a I** , $e(M, I)$, a multiplicidade do anel graduado $gr_I(M) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n M}{I^{n+1} M}$.

Quando $M = R$ denota-se $e(I, R)$ por $e(I)$ e este número é chamado de multiplicidade de I . Se $I = m$, então $e(m, R)$ é denotado por $e(R)$ e é a multiplicidade de R .

Se (R, m) é um anel local de dimensão d e $I \subsetneq R$ é um ideal de definição de R , tem-se que $e(I) > 0$ e $e(I) = \lim_{n \rightarrow \infty} (d!/n^d) l(R/I^n)$, em particular, $e(I) = l(R)$ quando $d = 0$.

Seja (R, m) um anel local, M um R -módulo e I um ideal em R . Uma sequência de elementos $x_1, \dots, x_n$ contida em I é **M -regular** se x_1 não é divisor de zero em M e x_i não é divisor de zero em

$$M/\langle x_1, \dots, x_i \rangle M, \forall i = 2, \dots, n.$$

Se $I = m$ e $M = R$, diz-se simplesmente que $x_1, \dots, x_n$ é uma sequência regular.

Suponha que (R, m) seja um anel local, M um R -módulo e I um ideal em R . Uma sequência M -regular $x_1, \dots, x_n$ em I é **maximal** quando $x_1, \dots, x_n, x$ não é uma sequência M -regular, para todo $x \in I$.

Toda sequência M -regular maximal contida em I tem o mesmo número de elementos. Este número é chamado **profundidade de I em M** , e denotado por $\text{depth}(I, M)$. Se I é ideal maximal m de R , $\text{depth}(m, M)$ é denotado por $\text{depth}(M)$ e é chamado de profundidade de M . Ainda, se $M = R$, escreve-se apenas $\text{depth}(I)$.

Se $d = \dim M$ e $x_1, \dots, x_d$ é uma família de elementos de R que gera um ideal I tal que $\dim \frac{M}{IM} = 0$, então $x_1, \dots, x_d$ é chamado um **sistema de parâmetros** de M . Se I é gerado por um sistema de parâmetros $x_1, \dots, x_d$ de M , I é um **ideal de parâmetros** de M . Toda sequência M -regular é parte de um sistema de parâmetros e portanto

$$\text{depth} M \leq \dim M.$$

Diz-se que M é **Cohen-Macaulay** quando $\text{depth} M = \dim M$, um anel R é Cohen-Macaulay se R é um módulo Cohen-Macaulay sobre si mesmo.

Seja R um anel local. R é um **anel regular** se o ideal maximal de R é gerado por um sistema de parâmetros. Todo anel regular é Cohen-Macaulay. Neste caso as seguintes condições são equivalentes:

- (i) R é Cohen-Macaulay;
- (ii) $e(I) = l(R/I)$, para qualquer ideal de parâmetros I de R ;
- (iii) $e(I) = l(R/I)$, para algum ideal de parâmetros I de R .

O Lema seguinte caracteriza uma classe especial de anéis Cohen-Macaulay.

Lema 1.6. [42] *Sejam R um anel de Cohen-Macaulay de dimensão n , $M = (c_{ij})$ uma matriz de ordem $p \times q$ com entradas em R e I_r o ideal gerado pelos menores de ordem r de M . Então são válidas:*

- (i) $\dim(R/I_r) \geq n - (p - r + 1)(q - r + 1)$;
- (ii) *Se $\dim(R/I_r) = n - (p - r + 1)(q - r + 1)$, então R/I_r é Cohen-Macaulay (neste caso, I_r é chamado um **ideal determinantal**).*

Seja $I = \langle f_1, \dots, f_d \rangle$, o ideal gerado por $f_1, \dots, f_d$. Considere

$$V(I) = \{x \in \mathbb{C}^n; f_i(x) = 0, \forall i \in \{1, \dots, d\}\}.$$

Diz-se que $X = V(I)$ é uma interseção completa, se o número de geradores do ideal I que define X é igual a codimensão de X em $\mathbb{C}^n$. Assim os geradores deste ideal formam uma sequência regular. Se X tem singularidade isolada, então X é chamado de **interseção completa com singularidade isolada**, e abreviado para **I.C.I.S.**. Neste caso, como $f_1, \dots, f_d$ formam uma sequência regular, X é Cohen-Macaulay.

1.5 Invariantes Polares e Teorema Fundamental.

Nesta seção são descritas as multiplicidades polares e o Teorema de Gaffney que determina a Whitney equisingularidade em desdobramentos excelentes em função da invariância das multiplicidades polares e do número de pontos 0-estáveis.

A noção de variedades polares foi desenvolvida para estudar as singularidades de uma variedade analítica. A idéia é com segue.

Suponha que $f : X \rightarrow S$ seja um morfismo entre espaços anaíticos reduzidos tal que as fibras de f são suaves de dimensão $d = \dim X - \dim S$ sobre o complementar de um subconjunto analítico fechado F de X .

Pode-se mergulhar $X \subset S \times \mathbb{C}^N$ (ou $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^N$ se S é não suave) tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S \times \mathbb{C}^N \\ \searrow f & & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

comute.

A **k-ésima variedade polar**, $P_k(X, f)$, $0 \leq k \leq d$, é obtida escolhendo uma projeção linear $p_k : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ tal que o núcleo de p_k seja um subespaço D_{d-k+1} onde D_{d-k+1} é um subespaço linear de $(\mathbb{C}^N, 0)$ de codimensão $d - k + 1 \leq k \leq d - 1$, calculando o conjunto dos pontos crítico da restrição $p_k|_{(f^{-1}(s) - (f^{-1}(s) \cap F))}$, $\forall s$ e tomando o fecho deste conjunto. Observe que $P_0(X, f) = X$ pois a fibra de f tem dimensão d logo, todo ponto da projeção à $\mathbb{C}^{d+1}$ é crítico.

A projeção com a propriedade acima é chamada de projeção genérica.

O principal invariante de $P_k(X, f)$ é sua multiplicidade na origem, $m_0(P_k(X))$, denotada por $m_k(X, f)$.

Se f é uma aplicação constante $P_k(X, f)$ é denotado por $P_k(X)$ e $m_k(X, f)$ por $m_k(X)$, $0 \leq k \leq d$.

As multiplicidades $m_d(X)$ não podem ser definidas diretamente como as outras $m_k(X)$, $0 \leq k \leq d - 1$, pois as singularidades de $p|X$ são pontos isolados. Gaffney em [[13], p.195] define um novo invariante associado a um desdobramento versal $F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s$ de f . Para um tipo de singularidade estável ou estrato $\mathcal{Q}(f)$ na fonte ou na meta tal que a $\dim \overline{\mathcal{Q}(f)} \geq 1$, selecione D_1 um subespaço linear de $(\mathbb{C}^n, 0)$ (ou $(\mathbb{C}^p, 0)$ se estiver trabalhando na meta) de codimensão 1 e forme $P_d(\mathcal{Q}(F))$ a variedade polar de $\mathcal{Q}(F)$ com a projeção $(p, \pi_s) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ onde $d = \dim \overline{\mathcal{Q}(F)} - s$.

A d-ésima multiplicidade estável de f , chamada de **d-ésima multiplicidade versal**, do tipo $\mathcal{Q}(f)$ denotada por $m_d(\mathcal{Q}(f))$ é a multiplicidade de $m_s \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{Q}(F)}, (0,0)}$ em $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{Q}(F)}, (0,0)}$.

Os tipos 0-estáveis aparecem no desdobramento versal F de f , portanto sua contribuição deve ser analisada no cálculo da multiplicidade versal.

Em particular, para uma I.C.I.S., Gaffney em [[14], p.211] mostra uma fórmula para calculá-la.

Teorema 1.7. [5.8, [14]]. A d -ésima multiplicidade versal de $(X, 0)$ (X é um I.C.I.S. de dimensão d) denotada por $m_d(X)$ é dada por :

$$m_d(X) = \dim \frac{\mathcal{O}_X}{J(p, f)}$$

onde $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n-d}, 0)$, $f^{-1}(0) = X^d$ e $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica.

O teorema a seguir é o resultado fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Para demonstrá-lo, Gaffney usou fortemente a teoria sobre multiplicidades polares desenvolvida por Tessier em [53].

Teorema 1.8. [[13], p.207]

Suponha que $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ seja um desdobramento excelente de $f \in \mathcal{O}(n, p)$. Então F é Whitney equisingular se e somente se todas as multiplicidades polares de todos os tipos estáveis definidos em:

1. conjunto singular $\Sigma(f_t)$;
2. discriminante $\Delta(f_t) = f_t(\Sigma(f_t))$;
3. $X(f_t) = \overline{(f_t^{-1}(\Delta(f_t)) - \Sigma f_t)}$,

são constantes na origem para todo t .

Esse teorema continua válido se a hipótese "desdobramento excelente" for substituída pelo termo "um desdobramento a 1-parâmetro que quando estratificado pelos tipos estáveis e pelo eixo de parâmetros T , possui apenas o eixo de parâmetros T como um estrato 1-dimensional na origem"(veja [22]).

Neste caso, Gaffney mostra que o desdobramento é topologicamente trivial. Para esta demonstração é usado o segundo lema de isotropia de Thom para aplicações analíticas complexas, (veja [13], p.204).

Para finalizar esta seção é enunciado o Teorema de Lê-Greuel, que relaciona números de Milnor de I.C.I.S's com a dimensão de álgebras locais de tipo $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$, para algum ideal I de germes em $\mathcal{O}_n$.

O cálculo dessas dimensões é feito no anel das séries formais $\hat{\mathcal{O}}_n$. Se $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I}$ é finita então

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\hat{\mathcal{O}}_n}{I}.$$

Teorema 1.9. *[[32], p.47] Seja X_1 um I.C.I.S. com singularidade em $0 \in \mathbb{C}^n$. Considere X um I.C.I.S definido em X_1 por $f_k = 0$, e sejam $f_1, \dots, f_k$ os geradores do ideal que define X_1 em 0 em $\mathbb{C}^n$. Então,*

$$\mu(X_1, 0) + \mu(X, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_{k-1}, J(f_1, \dots, f_k) \rangle}$$

Germes e Multigermes estáveis de

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^3, n \geq 4.$$

Seguindo o roteiro apresentado na Introdução a primeira tarefa é encontrar os germes, monogermes e multigermes, estáveis em $O(n, 3), n \geq 4$. Na literatura, sabe-se a descrição destes apenas para dimensões baixas. Para este caso específico foi preciso usar o software *Transversal*, cujo método para obtenção de germes estáveis é a aplicação do lema de Mather, para mais detalhes consulte [31].

Inicialmente, foram encontrados os monogermes estáveis em $O(n, 3), n \geq 4$. Os multigermes estáveis são obtidos a partir de cruzamentos normais entre monogermes de dimensão apropriada.

As formas normais de cada um dos germes encontrados com o procedimento acima é mostrada a seguir em duas tabelas. Em 2.1 são listados os monogermes e em 2.2 os multigermes.

Observe que em cada item, além da forma normal que caracteriza tal germe (a menos de mudança de variável) é mostrado o tipo de singularidade A_k , notação introduzida por Arnol'd em [1]. Ainda é adicionado para os monogermes, seu tipo de singularidade $\Sigma^{(i)}$, usando a notação de Thom-Boardman (detalhes em [6]).

Considere $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ um ponto qualquer.

Tabela 2.1: Monogermes estáveis

Nome	$\Sigma^{(i)}$	A_k	Forma Normal
Submersão	$\Sigma^{(0)}$	A_0	(x_1, x_2, x_n)
Dobra	$\Sigma^{(n-2)}$	A_1	$(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2)$
Eixo Cuspidal	$\Sigma^{(n-2,1)}$	A_2	$(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^3 + x_1 x_n)$
Rabo de Andorinha	$\Sigma^{(n-2,1,1)}$	A_3	$(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^4 \pm x_1 x_n \pm x_2 x_n^2)$

Tabela 2.2: Multigermes estáveis

Nome	A_k	Forma Normal
Pontos Duplos	$A_{(1,1)}$	$\{(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2);$ $(x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_3)\}$
Cruzamento Normal de um Plano com o Eixo Cuspidal	$A_{(1,2)}$	$\{(x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_3);$ $(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^3 + x_1 x_n)\}$
Pontos Triplos	$A_{(1,1,1)}$	$\{(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2);$ $(x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_3);$ $(\pm x_1^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_2, x_3)\}$

Além da representação algébrica apresentada pelas tabelas anteriores, os germes estáveis possuem um modelo geométrico. Veja isto nas figuras a seguir.

Discriminantes dos tipos estáveis de dimensão 1

Discriminantes dos tipos estáveis de dimensão 0

Cada germe estável é um representante de seu tipo estável (veja seção 1.1). Por isso, de agora em diante, cada germe estável é referido por tipo estável. Assim: A_0 é um tipo estável 3-dimensional, A_1 é um tipo estável 2-dimensional, A_2 e $A_{(1,1)}$ são tipos estáveis 1-dimensionais e A_3 , $A_{(2,1)}$ e $A_{(1,1,1)}$ são tipos estáveis 0-dimensionais.

O próximo passo é estratificar a fonte e a meta por esses tipos estáveis. De acordo com o Teorema 1.8 a constância das multiplicidades polares de cada tipo estável controla a Whitney

Equisingularidade. Tais estratificações são descritas abaixo.

O conjunto singular, denotado por $\Sigma(f)$, é o conjunto de pontos $x \in \mathbb{C}^n$ tais que $J(f)(x) = 0$. O discriminante de f , denotado por $\Delta(f)$, é a imagem por f do conjunto de pontos críticos.

Cada estratificação (fonte e meta) é formada pelas **partes suaves** dos conjuntos.

1. Conjunto singular $\Sigma(f) \subset \mathbb{C}^n$ (fonte)

- 1.1 conjunto singular $\Sigma(f)$, 2-dimensional;
- 1.2 conjunto $\Sigma^{(n-2,1)}(f)$, 1-dimensional;
- 1.3 conjunto dos pontos duplos $D^2(f|\Sigma(f))$, 1-dimensional.

2. $X(f) = \overline{(f^{-1}(\Delta(f)) - \Sigma(f))} \subset \mathbb{C}^n$ (fonte)

- 2.1 $X(f) = \overline{(f^{-1}(\Delta(f)) - \Sigma(f))}$, (n-1)-dimensional;
- 2.2 $X_1(f) = \overline{(f^{-1}(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) - \Sigma(f) \cap \Sigma^{(n-2,1)}(f))}$, (n-2)-dimensional;
- 2.3 $X_2(f) = \overline{(f^{-1}(f(\Sigma^{(n-2,1,1)}(f))) - \Sigma(f) \cap \Sigma^{(n-2,1,1)}(f))}$, (n-3)-dimensional;
- 2.4 $X_3(f) = \overline{(f^{-1}(f(D^2(f|\Sigma(f)))) - \Sigma(f) \cap D^2(f|\Sigma(f)))}$, (n-2)-dimensional;
- 2.5 $X_4(f) = \overline{(f^{-1}(f(A_{(1,2)})) - \Sigma(f) \cap A_{(1,2)})}$, (n-3)-dimensional;
- 2.6 $X_5(f) = \overline{(f^{-1}(f(D^3(f|\Sigma(f)))) - \Sigma(f) \cap D^3(f|\Sigma(f)))}$, (n-3)-dimensional.

3. Discriminante $\Delta(f) = f(\Sigma(f)) \subset \mathbb{C}^3$ (meta)

- 3.1 discriminante $\Delta(f) = f(\Sigma(f))$, 2-dimensional;
- 3.2 conjunto $f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))$, 1-dimensional;
- 3.3 conjunto $f(D^2(f|\Sigma(f)))$, 1-dimensional.

Várias observações devem ser feitas a respeito das estratificações acima. Primeiro, note que os tipos 0-dimensionais não aparecem nas estratificações do conjunto singular e do discriminante. Tais tipos, ou seja, os 0-estáveis, aparecerem naturalmente quando calcula-se a multiplicidade versal. Esse fato será visto nas demonstrações do próximo capítulo.

Ainda, os pontos de tipo A_0 , submersão, são regulares e neste caso, os únicos de interesse são os pontos múltiplos que aparecem no conjunto $X(f)$. Ressalta-se que os pontos de tipo A_1 , dobras, estão contidos em $\Sigma(f)$.

A última observação é sobre a notação dos pontos duplos e triplos, denotados respectivamente por $D^2(f|\Sigma(f))$ e $D^3(f|\Sigma(f))$. Essa notação foi introduzida por Goryunov em [25], seções 4 e 5.

Os invariantes dos tipos estáveis na meta.

É nesse capítulo que inicia-se a minimização da quantidade dos invariantes polares. As relações aqui obtidas relacionam as multiplicidades polares de cada estrato do discriminante tanto com o número de Milnor do conjunto singular como com os números de pontos tipos 0-estáveis. Como consequência da semi-continuidade superior desses invariantes segue a redução de sua quantidade.

Estas relações são obtidas seguindo o método utilizado por Gaffney em [13] para minimizar a quantidade das multiplicidades polares para os casos $(2,2)$ e $(2,3)$. Além das definições de multiplicidades polares, essas demonstrações usam fortemente o fato que $\Sigma(f)$ e $\Sigma^{(n-2,1)}(f)$ (somente quando f é de coposto 1) são I.C.I.S. já que sob esta hipótese o Teorema 1.9 pode ser aplicado. Também é usado o seguinte resultado: seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe finitamente determinado, então,

$$f : (\Sigma(f) \subset (\mathbb{C}^n, 0)) \rightarrow (\Delta(f) \subset (\mathbb{C}^p, 0))$$

é bimeromorfa, (veja [16]).

A partir de agora é assumido como hipótese que $f \in \mathcal{O}(n, 3)$, $n \geq 4$ é um germe de aplicação finitamente determinado.

Para um germe $h \in \mathcal{O}_e(n, r)$, $J(h)$ denota o ideal gerado pelo conjunto de menores de ordem $m = \min\{n, r\}$ da derivada de h . Se $h \in \mathcal{O}_e(n, r)$, $J[h]$ denota o ideal gerado pelo determinante da derivada de h .

O primeiro teorema relaciona as multiplicidades polares do discriminante, $\Delta(f)$, com o número de Milnor do conjunto singular, $\Sigma(f)$.

Teorema 3.1.

$$m_2(\Delta(f)) - m_1(\Delta(f)) + m_0(\Delta(f)) = \mu(\Sigma(f)) + 1. \quad (I)$$

Demonstração:

Primeiro escolha uma projeção genérica

$$p_1 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

tal que o grau de $p_1|_{\Delta(f)}$ seja igual a multiplicidade de $\Delta(f)$ na origem e tal que a variedade polar $P_1(\Delta(f))$ seja igual a $\overline{\Sigma p_1|_{\Delta^0(f)}}$; denota-se por $m_1(\Delta(f))$ a multiplicidade dessa variedade.

$$\Delta(f) \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow p_1$$

$$\mathbb{C}^2$$

Escolha também uma projeção genérica linear

$$p : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que o grau de $(p \circ p_1)|_{P_1(\Delta(f))}$ seja $m_1(\Delta(f))$.

Pode-se assumir ainda que a projeção $(p \circ p_1) := p_2$ seja também genérica e que defina a variedade polar $P_2(\Delta(f))$, ou seja, $P_2(\Delta(f)) = \overline{\Sigma p_2|_{\Delta^0(f)}}$; denota-se por $m_2(\Delta(f))$ a multiplicidade dessa variedade.

$$\Delta(f) \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow p_2$$

$$\mathbb{C}$$

Agora defina

$$X_2 = V(p_2 \circ f, J(f));$$

$$X_1 = V(p_1 \circ f, J(f)).$$

Observe que as variedades acima são I.C.I.S's pois X_1 e X_2 são interseções completas pela própria definição e têm singularidade isolada porque estão contidas em $V(J(f)) = \Sigma(f)$ que por

sua vez tem singularidade isolada (pois $\Sigma(f) - \{0\}$ é regular e locamente só ocorre dobra como singularidade). Nestas condições pode-se aplicar o teorema 1.9 para X_1 e X_2 obtendo que:

$$\mu(X_2) + \mu(X_1) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p_2 \circ f, J[f], J[p_1 \circ f, J[f]] \rangle}. \quad (1)$$

Observe também que além de $\Sigma(f)$ ter singularidade isolada ainda é uma interseção completa, ou seja, $\Sigma(f)$ é I.C.I.S.. Assim aplicando o teorema 1.9 para $\Sigma(f) = V(J(f))$ e para X_2 tem-se

$$\mu(\Sigma(f)) + \mu(X_2) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J(f), J(p_2 \circ f, J(f)) \rangle},$$

e então

$$\mu(X_2) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J(f), J(p_2 \circ f, J(f)) \rangle} - \mu(\Sigma(f)). \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) resulta

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J(f), J(p_2 \circ f, J(f)) \rangle} - \mu(\Sigma(f)) + \mu(X_1) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p_2 \circ f, J(f), J(p_1 \circ f, J(f)) \rangle}. \quad (3)$$

Sendo X_1 I.C.I.S. 0-dimensional tem-se que

$$\mu(X_1) = \deg(p_1 \circ f, J(f)) - 1. \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3)

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J(f), J(p_2 \circ f, J(f)) \rangle} - \mu(\Sigma(f)) + \deg(p_1 \circ f, J(f)) - 1 = \\ \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p_2 \circ f, J(f), J(p_1 \circ f, J(f)) \rangle}. \end{aligned} \quad (5)$$

A equação (5) é a base para encontrar a equação (I) a qual relaciona as multiplicidades polares do discriminante. Na verdade tais multiplicidades estão implicitamente na equação (5). O objetivo agora é mostrar onde estão.

Começa-se pela multiplicidade $m_0(\Delta(f))$.

Para isso considere o diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(f) \subset \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f} & \Delta(f) \subset \mathbb{C}^3 \\ & \searrow p_1 \circ f & \swarrow p_1 \\ & (\mathbb{C}^2, 0) & \end{array}$$

Já se tem que (pela escolha de p_1) $m_0(\Delta(f)) = \deg(p_1|_{\Delta(f)})$. Por outro lado, como $f : \Sigma(f) \rightarrow \Delta(f)$ é finita e bimeromorfa tem-se que

$$\deg(p_1|_{\Delta(f)}) = \deg(p_1 \circ f|_{\Sigma(f)}) = \deg(p_1 \circ f, J(f)).$$

Portanto,

$$\deg(p_1 \circ f, J(f)) = m_0(\Delta(f)). \quad (i)$$

Trabalha-se agora com $m_1(\Delta(f))$. Considere a seguinte variedade

$$V' = V(J(f), J(p_1 \circ f, J(f))).$$

Observe que $f|_{V'}$ é finita e bimeromorfa e que se pode definir $P_1(\Delta(f))$ de outro modo: seja $g : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g^{-1}(0) = \Delta(f)$ e defina a seguinte aplicação.

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ x &\mapsto (g(x), p_1(x)) \end{aligned}$$

Observe que

$$\overline{V(H)|_{\Delta(f)}} = P_1(\Delta(f)),$$

ou seja

$$\overline{V(J[g, p_1], J[f])} = P_1(\Delta(f)).$$

Com esta definição de $P_1(\Delta(f))$ e lembrando que $V' = V(J(f), J(p_1 \circ f, J(f)))$ tem-se que V' quando projetada para $\mathbb{C}$ por $p_2 \circ f$ resulta o mesmo que $P_1(\Delta(f))$ quando projetada para $\mathbb{C}$ por p_2 .

$$\begin{array}{ccc} V' \subset \Sigma(f) & \xrightarrow{f} & \Delta(f) \supset P_1(\Delta(f)) \\ & \searrow p_2 \circ f & \swarrow p_2 \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Com isso tem-se

$$\deg(p_2 \circ f|V') = \deg(p_2|P_1(\Delta(f))).$$

Também se tem que (por escolha de p_2)

$$\deg(p_2|P_1(\Delta(f))) = m_1(\Delta(f)).$$

Portanto

$$m_1(\Delta(f)) = \deg(p_2 \circ f|V').$$

E como V' é I.C.I.S (e portanto o anel $\mathcal{O}_{V'}$ é Cohen-Macaulay) segue que

$$\deg(p_2 \circ f|V') = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p_2 \circ f, J[f], J[p_1 \circ f, J[f]] \rangle}.$$

Ou seja

$$m_1(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p_2 \circ f, J[f], J[p_1 \circ f, J[f]] \rangle}. \quad (ii)$$

Finalmente deseja-se mostrar que

$$m_2(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J[f], J[p_2 \circ f, J[f]] \rangle}.$$

Esta tarefa é mais delicada pois essa é a multiplicidade em que a contribuição dos tipos 0-estáveis aparece.

Primeiro escolha um desdobramento versal F de f , a s -parâmetros, então

$$\begin{aligned} F : \Sigma F \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s &\longrightarrow \Delta F \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^s \\ (x, u) &\longmapsto (\tilde{f}(x, u), u) = (f_u(x), u). \end{aligned}$$

Observe que ΣF é uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s$.

Usando a linearidade da projeção genérica p_2 tem-se que

$$\Sigma((\pi_s, p_2) \circ F)(\Sigma(F)) = V(J[F], J[(\pi_s, p_2) \circ F, J[F]]) = V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s.$$

O invariante $m_2(\Delta(f))$ é controlado pelo grau da projeção $(\pi_s, p_2)|_V$, ou seja, pelo comprimento $e_J(f)$ do ideal maximal m_s na meta $\mathcal{O}_s$. Isto é dado por

$$e_J(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J[f], J[p_2 \circ f, J[f]] \rangle}.$$

Veja que as possíveis componentes de V são os fechos dos seguintes conjuntos:

$$F^{-1}(P_2(\Delta(F), \pi_s)), F^{-1}(A_3), F^{-1}(A_{(1,2)}) \text{ e } F^{-1}(A_{(1,1,1)}).$$

Agora precisa-se contar a contribuição para o grau da projeção (π_s, p_2) restrita a cada uma dessas componentes.

Para tais cálculos escolha um parâmetro genérico u e vizinhanças $U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, U_1 \subset \mathbb{C}^s$ tais que para todo ponto pertencente a U_1 existam $e_J(f)$ pré-imagens em $V \cap U_2$ contando com as multiplicidades.

Tem-se então

$$e_J(f) = \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{s+n,x}}{\langle m_s, J(f), J((\pi_s, p_2) \circ f, J(f)) \rangle} = \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle J(f_u), J(p_2 \circ f_u, J(f_u)) \rangle},$$

onde $S = \pi_s^{-1}(0) \cap V$.

Observe que pela genericidade do parâmetro u podemos supor que f_u é estável. Para contar as contribuições daquelas componentes usa-se as formas normais dos tipos estáveis (veja a seção 2).

Contribuição dos tipos 0-estáveis:

- Tipo 0-estável A_3

Forma normal:

$$f_u(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^4 \pm x_1 x_n \pm x_2 x_n^2).$$

Tem-se que

$$J(f_u) = \langle x_3, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1 \rangle.$$

Ainda supondo que a projeção p_2 seja tal que $p_2(x, y, z) = y$ tem-se que

$$(p_2 \circ f_u)(x_1, \dots, x_n) = x_2.$$

Logo,

$$\langle J(f_u), J(p_2 \circ f_u, J(f_u)) \rangle =$$

$$\langle x_3, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1, J(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1) \rangle =$$

$$\langle x_3, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1, \dots, \mathbf{1} \rangle.$$

E então

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle J(f_u), J(p_2 \circ f_u, J(f_u)) \rangle} =$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle x_3, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1, \dots, \mathbf{1} \rangle} = 0.$$

E isto significa que a contribuição deste tipo estável é nula.

- Tipo 0-estável $A_{(1,2)}$

Forma normal:

$$f_u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{ (x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_3); \\ (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^3 + x_1x_n) \}.$$

Para calcular esta contribuição observe que o ideal $J(f_u)$ é gerado pelos geradores dos ideais jacobianos dos germes que definem f_u . Isto é, por

$$\langle x_2, x_4, \dots, x_n \rangle \text{ e } \langle x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, 3x_n^2 + x_1 \rangle.$$

Assim,

$$J(f_u) = \langle x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, 3x_n^2 + x_1 \rangle = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle.$$

Consequentemente

$$\langle J(f_u), J(p_2 \circ f_u, J(f_u)) \rangle =$$

$$\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, J(x_2, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) \rangle =$$

$$\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, \mathbf{1} \rangle.$$

Portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle J(f_u), J(p_2 \circ f_u, J(f_u)) \rangle} =$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, \mathbf{1} \rangle} = 0.$$

E segue que a contribuição do tipo estável $A_{(1,2)}$ é nula.

- Tipo 0-estável $A_{(1,1,1)}$

Forma normal:

$$\begin{aligned} f_u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{ & (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2); \\ & (x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_3); \\ & (\pm x_1^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_2, x_3) \}. \end{aligned}$$

Novamente para calcular esta contribuição note que o ideal $J(f_u)$ é gerado pelos geradores dos ideais jacobianos dos germes que definem f_u .

Logo,

$$J(f_u) = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle.$$

Consequentemente

$$\langle J(f_u), J(p_2 \circ f_u, J(f_u)) \rangle =$$

$$\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, J(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) \rangle =$$

$$\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, \mathbf{1} \rangle.$$

Portanto

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle J(f_u), J(p_2 \circ f_u, J(f_u)) \rangle} =$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, \mathbf{1} \rangle} = 0.$$

Assim a contribuição do tipo estável $A_{(1,1,1)}$ também é nula.

Portanto as componentes de V estão no fecho de $F^{-1}(P_2(\Delta(F), \pi_s))$, daí

$$e_J(f) = \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle J(f_u), J(p_2 \circ f_u, J(f_u)) \rangle} = \deg(((\pi_s, p_2) \circ F)|V).$$

Mas $F|V$ é finita e bimeromorfa, logo

$$\deg(((\pi_s, p_2) \circ F)|V) = \deg((\pi_s, p_2)|P_2(\Delta(F), \pi_s)) = m_2(\Delta(f)).$$

Por outro lado

$$e_J(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J(f), J(p_2 \circ f, J(f)) \rangle}.$$

Logo

$$m_2(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J(f), J(p_2 \circ f, J(f)) \rangle}. \quad (iii)$$

Substituindo, (i), (ii) e (iii) na equação (5) obtém-se (I), ou seja:

$$m_2(\Delta(f)) - m_1(\Delta(f)) + m_0(\Delta(f)) = \mu(\Sigma(f)) + 1.$$

■

Daqui em diante, considere que f é finitamente determinado e de coposto 1.

A seguir é mostrado como obter o ideal jacobiano, $J_{(n-2,1)}$, de definição do conjunto $\Sigma^{(n-2,1)}(f)$ [ver seção 1.1.1].

Observação 3.2. Se f é de coposto 1 observe que f pode ser escrito da seguinte forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Então,

$$J_{(n-2,1)}(f) = I_n(d(f, I_3(d(f)))) ,$$

onde $d(h)$ denota a matriz jacobiana de h e $I_s(M)$ é o ideal gerado pelos menores de ordem s da matriz M .

Portanto, $J_{(n-2,1)}(f)$ é dado por

$$J_{(n-2,1)}(f) = \langle g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n}, M \rangle ,$$

onde g_{x_i} denota a derivada parcial de g em relação a x_i e M é o determinante:

$$\begin{vmatrix} g_{x_3^2} & \cdots & g_{x_3 x_n} \\ g_{x_4 x_3} & \cdots & g_{x_4 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n x_3} & \cdots & g_{x_n^2} \end{vmatrix}$$

com $g_{x_i x_j}$ denotando a derivada parcial de g_{x_i} em relação a x_j .

A seguir é obtida a relação para as multiplicidades polares de $f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))$. Como este conjunto é 1-dimensional, existem 2 multiplicidades polares. A relação entre estas, além de envolver o número de Milnor, envolve o número de singularidades de tipo A_3 , denotado por $\sharp A_3$.

Teorema 3.3.

$$m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) - m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = \sharp A_3 - \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) + 1, \quad (II)$$

Demonstração:

Para obter a equação (II) novamente usa-se uma equação base obtida aplicando o Teorema 1.9 onde uma das exigências é que as variedades envolvidas sejam I.C.I.S.

Primeiro como f é finitamente determinado segue que $\Sigma^{(n-2,1)}(f)$ tem estrutura reduzida e como f é de coposto 1 tem-se que $\Sigma^{(n-2,1)}(f) = V(J_{(n-2,1)}(f))$ é I.C.I.S.

Agora, escolha uma projeção genérica linear

$$p_1 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C},$$

de modo que $X := \Sigma^{(n-2,1)}(f) \cap (p_1 \circ f^{-1}(0))$ seja I.C.I.S. e que

$$m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = \deg(p_1|_{(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f)))}) = V(J_{(n-2,1)}(f), p_1 \circ f).$$

$$f(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow p_1$$

$$\mathbb{C}$$

Aplicando o Teorema 1.9 para $\Sigma^{(n-2,1)}(f)$ e para X obtém-se que

$$\mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) + \mu(X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J_{(n-2,1)}(f), J[J_{(n-2,1)}(f), p_1 \circ f] \rangle}. \quad (1)$$

Esta última equação é a base para encontrar a equação (II).

Primeiro observe que X é um I.C.I.S. 0-dimensional então

$$\mu(X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J_{(n-2,1)}(f), p_1 \circ f \rangle} - 1 = \deg((p_1 \circ f)|_{\Sigma^{(n-2,1)}(f)}).$$

Mas $f|_{\Sigma^{(n-2,1)}(f)}$ é bimeromorfa e finita então

$$\deg((p_1 \circ f)|\Sigma^{n-2,1}(f)) = \deg(p_1|f(\Sigma^{n-2,1}(f))).$$

Por outro lado, pela escolha de p_1 ,

$$\deg(p_1|f(\Sigma^{n-2,1}(f))) = m_0(f(\Sigma^{n-2,1}(f))).$$

Logo

$$\deg((p_1 \circ f)|\Sigma^{n-2,1}(f)) = m_0(f(\Sigma^{n-2,1}(f))).$$

E portanto

$$\mu(X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J_{(n-2,1)}(f), p_1 \circ f \rangle} - 1 = m_0(f(\Sigma^{n-2,1}(f))) - 1.$$

Em particular observe que $m_0(f(\Sigma^{n-2,1}(f))) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J_{(n-2,1)}(f), p_1 \circ f \rangle}.$

O próximo passo é trabalhar com $m_1(f(\Sigma^{n-2,1}(f)))$ para encontrar o restante da equação (II).

Mas como $\dim(f(\Sigma^{n-2,1}(f))) = 1$ não se pode esquecer que é neste nível que os tipos 0-estáveis aparecem, portanto precisa-se contar a contribuição de cada um desses tipos 0-estáveis para $m_1(f(\Sigma^{n-2,1}(f)))$.

Para isso, tome um desdobramento versal F de f , a s -parâmetros.

$$\begin{aligned} F : \Sigma^{n-2,1}(F) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s &\longrightarrow F(\Sigma^{n-2,1}(F)) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^s \\ (x, u) &\longmapsto (\tilde{f}(x, u), u) = (f_u(x), u). \end{aligned}$$

Pela linearidade da projeção genérica p_1 tem-se

$$\Sigma((\pi_s, p_1) \circ F)|\Sigma^{n-2,1}(F) = V(J_{(n-2,1)}(F), J((\pi_s, p_1) \circ F, J_{(n-2,1)}(F))) = V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s.$$

E então o invariante $m_1(f(\Sigma^{n-2,1}(f)))$ é controlado pelo grau da projeção π_s restrita a V , ou seja, pelo comprimento $e_J(f)$ do ideal maximal m_s na meta $\mathcal{O}_s$. Isto é dado por

$$e_J(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J_{(n-2,1)}(f), J(p_1 \circ f, J_{(n-2,1)}(f)) \rangle}.$$

As possíveis componentes dessa variedade V são os fechos dos seguintes conjuntos

$$F^{-1}(P_1(F(\Sigma^{(n-2,1)}(F))), \pi_s), F^{-1}(A_3), F^{-1}(A_{(1,2)}) \text{ e } F^{-1}(A_{(1,1,1)}).$$

Agora, para calcular o grau da projeção (π_s, p_1) conta-se a contribuição da projeção (π_s, p_1) restrita a cada uma dessas componentes.

Para tal, escolha um parâmetro genérico u e vizinhanças $U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, U_1 \subset \mathbb{C}^s$ tais que para todo ponto pertencente a U_1 existam $e_J(f)$ pré-imagens em $V \cap U_2$ contando com as multiplicidades.

Tem-se então que

$$e_J(f) = \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{s+n,x}}{\langle m_s, J_{(n-2,1)}(F), J((\pi_s, p_1) \circ F, J_{(n-2,1)}(F)) \rangle} =$$

$$\sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle J_{(n-2,1)}(f_u), J(p_1 \circ f_u, J_{(n-2,1)}(f_u)) \rangle},$$

onde $S = \pi_s^{-1}(0) \cap V$.

Observe que pela genericidade do parâmetro u podemos supor que f_u é estável. Para contar as contribuições daquelas componentes usa-se as formas normais dos tipos estáveis (veja a seção 2).

Contribuição dos tipos 0-estáveis:

- Tipo 0-estável A_3

Forma normal:

$$f_u(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^4 \pm x_1 x_n \pm x_2 x_n^2).$$

Tem-se que (veja a Observação 3.2)

$$J_{(n-2,1)}(f_u) = \langle x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2 x_n + x_1, M \rangle,$$

onde M é o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A \end{vmatrix}$$

com $A = 12x_n^2 + 2x_2$.

Portanto

$$J_{(n-2,1)}(f_u) = \langle x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1, 12x_n^2 + 2x_2 \rangle.$$

E então, supondo que a projeção p_1 seja tal que $p_1(x, y, z) = y$

$$\begin{aligned} & \langle J_{(n-2,1)}(f_u), J(p_1 \circ f_u, J_{(n-2,1)}(f_u)) \rangle = \\ & \langle x_3, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1, 12x_n^2 + 2x_2, \\ & J(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1, 12x_n^2 + 2x_2) \rangle. \end{aligned}$$

Mas

$$J[x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1, 12x_n^2 + 2x_2] =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 2x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B \end{vmatrix}.$$

com $B = 24x_n$.

Logo,

$$J[x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1, 12x_n^2 + 2x_2] = 24x_n.$$

Portanto

$$\langle J_{(n-2,1)}(f_u), J(x_2, J_{(n-2,1)}(f_u)) \rangle =$$

$$\langle x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + x_1, 12x_n^2 + 2x_2, 24x_n \rangle.$$

Consequentemente,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle J_{(n-2,1)}(f_u), J(x_2, J_{(n-2,1)}(f_u)) \rangle} =$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, 4x_n^3 + 2x_2x_n + \mathbf{x}_1, 12x_n^2 + 2\mathbf{x}_2, 24\mathbf{x}_n \rangle} =$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle} = 1.$$

Ou seja a contribuição do tipo estável A_3 é 1.

- Tipo 0-estável $A_{(1,2)}$

Forma normal:

$$f_u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{ (x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_3); \\ (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^3 + x_1x_n) \}.$$

Considere

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_3).$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^3 + x_1x_n).$$

Para calcular esta contribuição observe que o ideal $J_{(n-2,1)}(f_u)$ é gerado pelos geradores dos ideais jacobianos iterados $J_{(n-2,1)}(f_1)$ e $J_{(n-2,1)}(f_2)$ dos germes que definem f_u .

Mas

$$J_{(n-2,1)}(f_1) = \langle x_2, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n, M \rangle,$$

onde M é o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ou seja, $M = 1$.

Portanto

$$J_{(n-2,1)}(f_1) = \langle x_2, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n, 1 \rangle.$$

E mesmo sem calcular $J_{(n-2,1)}(f_2)$ pode-se afirmar que

$$J_{(n-2,1)}(f_u) = \langle x_2, \dots, x_n, \mathbf{1} \rangle.$$

Resultando

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle J_{(n-2,1)}(f_u), J(p_1 \circ f_u, J_{(n-2,1)}(f_u)) \rangle} =$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle x_2, \dots, x_n, \mathbf{1} \rangle} = 0.$$

Implicando que a contribuição do tipo estável $A_{(1,2)}$ é nula.

- Tipo 0-estável $A_{(1,1,1)}$:

Forma normal:

$$f_u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{ (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2); \\ (x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_3); \\ (\pm x_1^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_2, x_3) \}.$$

Considere

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2);$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_3);$$

$$f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\pm x_1^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2, x_2, x_3).$$

Veja que $J_{(n-2,1)}(f_2)$ é igual ao $J_{(n-2,1)}(f_1)$ que calculamos no caso anterior ($A_{(1,2)}$), ou seja,

$$J_{(n-2,1)}(f_2) = \langle x_2, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n, \mathbf{1} \rangle.$$

E pelo mesmo motivo do caso anterior segue que a contribuição do tipo estável $A_{(1,1,1)}$ também é nula.

Portanto

$$e_J(f) = \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle J_{(n-2,1)}(f_u), J(p_1 \circ f_u, J_{(n-2,1)}(f_u)) \rangle} = \deg((\pi_s, p_1) \circ F|V).$$

Do fato que $F|V$ é finita e bimeromorfa, segue que

$$\deg((\pi_s, p_1) \circ F|V) = \deg((\pi_s, p_1)|P_1(F(\Sigma^{(n-2,1)}(F), \pi_s) = m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) + \sharp A_3.$$

Por outro lado

$$e_J(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J_{(n-2,1)}(f), J(p_1 \circ f, J_{(n-2,1)}(f)) \rangle}.$$

Logo

$$m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) + \sharp A_3 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J_{(n-2,1)}(f), J(p_1 \circ f, J_{(n-2,1)}(f)) \rangle}. \quad (ii)$$

Substituindo (i) e (ii) na equação (1) obtém-se (II), ou seja:

$$m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) - m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = \sharp A_3 - \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) + 1.$$

■

Corolário 3.4.

$$m_1(\Delta(f)) = m_0(f(\Sigma^{n-2,1}(f))). \quad (III)$$

Demonstração:

Primeiro, observe novamente que se $f \in \mathcal{O}(n, 3), n \geq 4$ é um germe de aplicação finitamente determinado de coposto 1 pode-se escrever f da seguinte maneira

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Consequentemente (veja Observação 3.2)

$$J_{(n-2,1)}(f) = \langle J(f), M \rangle$$

onde M é o determinante:

$$\begin{vmatrix} g_{x_3^2} & \cdots & g_{x_3 x_n} \\ g_{x_4 x_3} & \cdots & g_{x_4 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n x_3} & \cdots & g_{x_n^2} \end{vmatrix}$$

Veja também que no decorrer das demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.3 obtém-se que

$$m_1(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p_2 \circ f, J(f), J(p_1 \circ f, J(f)) \rangle}$$

e

$$m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J_{(n-2,1)}(f), p_1 \circ f \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle J_{(n-2,1)}(f), p_1 \circ f \rangle}.$$

Observe que para mostrar a igualdade

$$m_1(\Delta(f)) = m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))).$$

Ou seja

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p_2 \circ f, J(f), J(p_1 \circ f, J(f)) \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p_1 \circ f, J(f), M \rangle}.$$

Logo, basta mostrar (pela genericidade das projeções) que

$$J(p_1 \circ f, J(f)) = \langle M \rangle.$$

Para isso veja que como f é de coposto 1 pode-se escolher p_1 dada por

$$p_1(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2).$$

Assim,

$$(p_1 \circ f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2),$$

e portanto

$$J(p_1 \circ f, J(f)) = J(x_1, x_2, J(f)) = \langle M \rangle.$$

■

Finalmente é obtida a relação para as multiplicidades polares de $f(D^2(f|\Sigma(f)))$.

Como este conjunto é 1-dimensional, existem 2 multiplicidades polares. A relação entre estas, além de envolver o número de Milnor, envolve os números de singularidades de tipo A_3 , de tipo $A_{(1,2)}$ e de tipo $A_{(1,1,1)}$, denotados respectivamente por $\sharp A_3$, $\sharp A_{(1,2)}$ e $\sharp A_{(1,1,1)}$.

Teorema 3.5.

$$2m_0(f(D^2(f|\Sigma(f)))) - 2m_1(f(D^2(f|\Sigma(f)))) + \mu(D^2(f|\Sigma(f))) = 3\sharp A_{(1,2)} + 3\sharp A_3 + 6\sharp A_{(1,1,1)} + 1. \quad (IV)$$

Demonstração:

Inicialmente observe que como o estrato $f(D^2(f|\Sigma(f)))$ tem dimensão 1 tem-se as seguintes multiplicidades polares a considerar:

$$m_0(f(D^2(f|\Sigma(f)))) , m_1(f(D^2(f|\Sigma(f)))) .$$

Por 8.1 de ([13], p.209) e por ([53], p.294), tomando $\mathcal{S} = f^*(m_3)\mathcal{O}_{D^2(f|\Sigma(f))}$, pode-se escolher uma projeção linear genérica $p, p: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que

$$e(\mathcal{S}) = \deg(p \circ (f|_{(D^2(f|\Sigma(f)))}))$$

e

$$\deg(p|_{(f|_{(D^2(f|\Sigma(f)))}))}) = m_0(f(D^2(f|\Sigma(f)))) .$$

Mas $f|_{(D^2(f|\Sigma(f)))} - \{0\}$ é um recobrimento de duas folhas de $f(D^2(f|\Sigma(f))) - \{0\}$ e então

$$e(\mathcal{S}) = 2\deg(p|_{(f|_{(D^2(f|\Sigma(f)))}))}) = 2m_0(f(D^2(f|\Sigma(f)))) .$$

Portanto

$$2m_0(f(D^2(f|\Sigma(f)))) = \deg(p \circ (f|_{(D^2(f|\Sigma(f)))})) = \deg(p \circ f, I^2(f|\Sigma(f))),$$

onde $I^2(f|\Sigma(f))$ é ideal que define $(D^2(f|\Sigma(f)))$.

Agora, considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} X_2 &= V(I^2(f|\Sigma(f))) = D^2(f|\Sigma(f)); \\ X_1 &= V(I^2(f|\Sigma(f)), p \circ f) = D^2(f|\Sigma(f)) \cap (p \circ f)^{-1}(0). \end{aligned}$$

Uma vez que $D^2(f|\Sigma(f))$ é I.C.I.S. ambos os conjuntos X_2 e X_1 também são I.C.I.S.. Logo, aplicando o teorema 1.9 para X_2 e X_1 obtém-se que

$$\mu(X_2) + \mu(X_1) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle I^2(f|\Sigma(f)), J[I^2(f|\Sigma(f)), p \circ f] \rangle}. \quad (1)$$

Mas X_1 é I.C.I.S. 0-dimensional, logo

$$\mu(X_1) = \deg(p \circ f, I^2(f|\Sigma(f))) - 1 = 2m_0(f(D^2(f|\Sigma(f)))) - 1. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) tem-se

$$\mu(D^2(f|\Sigma(f))) + 2m_0(f(D^2(f|\Sigma(f)))) - 1 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle I^2(f|\Sigma(f)), J[I^2(f|\Sigma(f)), p \circ f] \rangle}. \quad (3)$$

Para finalizar esta demonstração é preciso provar que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle I^2(f|\Sigma(f)), J[I^2(f|\Sigma(f)), p \circ f] \rangle} = 2m_1(f(D^2(f|\Sigma(f)))) + 3\sharp A_{(1,2)} + 3\sharp A_3 + 6\sharp A_{(1,1,1)}.$$

Veja a seguir que essa igualdade surge naturalmente quando a multiplicidade $m_1(f(D^2(f|\Sigma(f))))$ é explorada.

Considere um desdobramento versal F de f , a s -parâmetros,

$$\begin{aligned} F : D^2(F|\Sigma(F)) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s &\longrightarrow F(D^2(F|\Sigma(F))) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^s \\ (x, u) &\longmapsto (\tilde{f}(x, u), u) = (f_u(x), u). \end{aligned}$$

Pela linearidade da projeção linear genérica p tem-se

$$\Sigma((\pi_s, p) \circ F|D^2(F|\Sigma(F))) = V(I^2(F|\Sigma(F)), J((\pi_s, p) \circ F, I^2(F|\Sigma(F)))) = V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s.$$

E a multiplicidade $m_1(f(D^2(f|\Sigma(f))))$ é controlada pelo grau da projeção π_s restrita a V , ou seja, pelo comprimento $e_J(f)$ do ideal maximal m_s na meta $\mathcal{O}_s$. Isto é dado por

$$e_J(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle I^2(f|\Sigma(f)), J[I^2(f|\Sigma(f)), p \circ f] \rangle}.$$

As possíveis componentes de V são os fechados dos seguintes conjuntos:

$$F^{-1}(P_1(F(D^2(F|\Sigma(F))), \pi_s)), F^{-1}(A_3), F^{-1}(A_{(1,2)}) \text{ e } F^{-1}(A_{(1,1,1)}).$$

Agora precisa-se contar a contribuição para o grau da projeção (π_s, p) restrita a cada uma dessas componentes.

Para tais cálculos escolha um parâmetro genérico u e vizinhanças $U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, U_1 \subset \mathbb{C}^s$ tais que para todo ponto pertencente a U_1 existam $e_J(f)$ pré-imagens em $V \cap U_2$ contando com as multiplicidades.

Tem-se então

$$e_J(f) = \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{s+n,x}}{\langle m_s, I^2(F|\Sigma(F)), J((\pi_s, p) \circ f, I^2(F|\Sigma(F))) \rangle} =$$

$$\sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle I^2(f_u|\Sigma(f_u)), J(p \circ f_u, I^2(f_u|\Sigma(f_u))) \rangle},$$

onde $S = \pi_s^{-1}(0) \cap V$. Note que pela genericidade do parâmetro u podemos supor que f_u é estável.

Primeiro observe que $F^{-1}(P_1(F(D^2(F|\Sigma(F))), \pi_s))$ contribui $2m_1(f(D^2(f|\Sigma(f))))$ para esse grau. Novamente é necessário calcular a contribuição dos tipos 0-estáveis no cálculo do grau de π_s, p .

Contribuição dos tipos 0-estáveis:

Em [[25], p.378], Goryunov mostra que os conjuntos dos pontos duplos que aparecem em uma suspensão de uma singularidade de tipo A_k coincide com o conjunto de pontos duplos que aparecem nesta singularidade antes da suspensão. Neste caso em particular, pode-se considerar os germes estáveis em $\mathcal{O}(n, 3), n \geq 4$ como sendo suspensões dos germes estáveis em $\mathcal{O}(3, 3)$. Logo,

as contribuições de cada tipo 0-estável para esta multiplicidade polar coincide com as contribuições de cada tipo 0-estável do caso $\mathcal{O}(3, 3)$. Tais contribuições já foram calculadas em [[27], p.11]: a contribuição do tipo A_3 é 3, a contribuição do tipo $A_{(1,2)}$ também é 3 e finalmente a contribuição do tipo $A_{(1,1,1)}$ é 6.

Portanto, como

$$e_J(f) = \sum_{x \in S} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\langle I^2(f_u | \Sigma(f_u)), J(p \circ f_u, I^2(f_u | \Sigma(f_u))) \rangle} = \deg(((\pi_s, p) \circ F)|V),$$

e $F|V$ é finita e bimeromorfa, segue,

$$\deg(((\pi_s, p) \circ F)|V) = \deg((\pi_s, p)|P_1(F(D^2(F|\Sigma(F))), \pi_s) =$$

$$2m_1(f(D^2(f|\Sigma(f)))) + 3\sharp A_3 + 3\sharp A_{(1,2)} + 6\sharp A_{(1,1,1)}.$$

Por outro lado,

$$e_J(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle I^2(f|\Sigma(f)), J(p \circ f, I^2(f|\Sigma(f))) \rangle}.$$

Logo

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle I^2(f|\Sigma(f)), J(p \circ f, I^2(f|\Sigma(f))) \rangle} =$$

$$2m_1(f(D^2(f|\Sigma(f)))) + 3\sharp A_3 + 3\sharp A_{(1,2)} + 6\sharp A_{(1,1,1)} \quad (4).$$

Substituindo (4) em (3) obtém-se finalmente a igualdade (IV), ou seja:

$$2m_0(f(D^2(f|\Sigma(f)))) - 2m_1(f(D^2(f|\Sigma(f)))) + \mu(D^2(f|\Sigma(f))) =$$

$$3\sharp A_{(1,2)} + 3\sharp A_3 + 6\sharp A_{(1,1,1)} + 1.$$

■

Para finalizar este capítulo é dado um exemplo, usando o discriminante $\Delta(f)$, de como a semi-continuidade superior das multiplicidades polares implica a redução da quantidade destas.

Observação 3.6. Como as multiplicidades polares são semi-contínuas superiormente, a relação no Teorema 3.1 mostra que se $m_1(\Delta(f_t))$ e $\mu(\Sigma(f_t))$ são constantes na família então $m_2(\Delta(f_t))$ e $m_0(\Delta(f_t))$ são também constantes na família.

De fato, tem-se as seguintes igualdades

$$m_2(\Delta(f_t)) - m_1(\Delta(f_t)) + m_0(\Delta(f_t)) = \mu(\Sigma(f_t)) + 1$$

e

$$m_2(\Delta(f_0)) - m_1(\Delta(f_0)) + m_0(\Delta(f_0)) = \mu(\Sigma(f_0)) + 1.$$

Subtraindo uma da outra obtém-se,

$$\begin{aligned} (m_2(\Delta(f_t)) - m_2(\Delta(f_0))) - (m_1(\Delta(f_t)) - m_1(\Delta(f_0))) + (m_0(\Delta(f_t)) - m_0(\Delta(f_0))) = \\ (\mu(\Sigma(f_t)) - \mu(\Sigma(f_0))). \end{aligned} \quad (*)$$

Agora, se $m_1(\Delta(f_t))$ e $\mu(\Sigma(f_t))$ são constantes na família, ou seja,

$$m_1(\Delta(f_t)) = m_1(\Delta(f_0)), \forall t.$$

$$\mu(\Sigma(f_t)) = \mu(\Sigma(f_0)), \forall t.$$

Tem-se então que a equação (*) se reduz à

$$(m_2(\Delta(f_t)) - m_2(\Delta(f_0))) + (m_0(\Delta(f_t)) - m_0(\Delta(f_0))) = 0.$$

Mas pela semi-continuidade superior de ambas as multiplicidades

$$(m_2(\Delta(f_t)) - m_2(\Delta(f_0))) > 0 \text{ e } (m_0(\Delta(f_t)) - m_0(\Delta(f_0))) > 0.$$

E soma de parcelas positivas resultando zero implica que cada uma das parcelas é nula e então,

$$m_2(\Delta(f_t)) = m_2(\Delta(f_0)), \forall t$$

$$m_0(\Delta(f_t)) = m_0(\Delta(f_0)), \forall t$$

Ou seja, $m_2(\Delta(f_t))$ e $m_0(\Delta(f_t))$ são constantes na família.

Os invariantes dos tipos estáveis na fonte.

4.1 Invariantes dos tipos estáveis em $\Sigma(f)$.

O conjunto $\Sigma(f)$ é uma superfície em $\mathbb{C}^n$ com singularidade isolada, ou seja é uma I.C.I.S. Sua estratificação se decompõe em três estratos. O maior, de dimensão 2 é a parte regular de $\Sigma(f)$ e os estratos 1-dimensionais são as partes regulares de $\Sigma^{(n-2,1)}(f)$ e $D^2(f|\Sigma(f))$. Se f é de coposto 1 então $\Sigma^{(n-2,1)}(f)$ e $D^2(f|\Sigma(f))$ também são I.C.I.S.

Tessier em [[53], p.481] relaciona as multiplicidades polares de uma hipersuperfície X , com singularidade isolada, aos números de Milnor $\mu^{(k)}$ das seções planas, $\mu^{(k)}(H) = \mu(X \cap H^k)$, onde H^k é um hiperplano genérico de dimensão k , pelas seguintes igualdades:

$$m_k(X) = \mu^{(k+1)}(X) + \mu^{(k)}(X), 0 \leq k \leq d-1, \quad (*)$$

onde $d = \dim(X)$.

Gaffney em [[17], p.210] mostra que esse resultado também é válido para I.C.I.S.

Quando $d = k$ e supondo que $V(p_1, f)$ seja um I.C.I.S. tem-se pelo teorema 1.9 e da definição 1.7 que

$$m_d(X^d) = \mu(X^d) \cap p_1^{-1}(0) + \mu(X^d), \quad (**)$$

onde $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n-d}, 0)$, $f^{-1}(0) = X^d$ e $p_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é projeção linear genérica.

Com isso obtém-se:

Teorema 4.1. *Seja $f \in \mathcal{O}(n, 3)$, $n \geq 4$ um germe finitamente determinado. Então*

$$m_2(\Sigma(f)) - m_1(\Sigma(f)) + m_0(\Sigma(f)) = \mu(\Sigma(f)) + 1. \quad (I)$$

Além disso, se f tem coposto 1:

$$m_1(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) - m_0(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) = \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) - 1. \quad (II)$$

$$m_1(\Sigma(f)) = m_0(\Sigma^{(n-2,1)}(f)). \quad (III)$$

$$m_1(D^2(f|\Sigma(f))) - m_0(D^2(f|\Sigma(f))) = \mu(D^2(f|\Sigma(f))) - 1. \quad (IV)$$

Demonstração:

Para demonstrar a primeira igualdade, como $\Sigma(f)$ é uma superfície com singularidade isolada, de (*) tem-se que

$$m_0(\Sigma(f)) = \mu^{(1)}(\Sigma(f)) + \mu^{(0)}(\Sigma(f)). \quad (1)$$

$$m_1(\Sigma(f)) = \mu^{(2)}(\Sigma(f)) + \mu^{(1)}(\Sigma(f)). \quad (2)$$

De (1)

$$\mu^{(1)}(\Sigma(f)) = m_0(\Sigma(f)) - 1 \quad (3),$$

e de (2)

$$\mu^{(2)}(\Sigma(f)) = m_1(\Sigma(f)) - \mu^{(1)}(\Sigma(f)) \quad (4).$$

Além disso de (**)

$$m_2(\Sigma(f)) = \mu(\Sigma(f) \cap p_2^{-1}(0)) + \mu(\Sigma(f)), \quad (5)$$

então

$$m_2(\Sigma(f)) - \mu(\Sigma(f) \cap p_2^{-1}(0)) = \mu(\Sigma(f)). \quad (6)$$

Mas

$$\mu(\Sigma(f) \cap p_2^{-1}(0)) = \mu^{(2)}(\Sigma(f)), \quad (7)$$

então substituindo (7) em (6)

$$m_2(\Sigma(f)) - \mu^{(2)}(\Sigma(f)) = \mu(\Sigma(f)). \quad (8)$$

Agora substitui-se (4) em (8) resultando

$$m_2(\Sigma(f)) - m_1(\Sigma(f)) + \mu^{(1)}(\Sigma(f)) = \mu(\Sigma(f)). \quad (9)$$

Substituindo (3) em (9)

$$m_2(\Sigma(f)) - m_1(\Sigma(f)) + -m_0(\Sigma(f)) - 1 = \mu(\Sigma(f)),$$

portanto tem-se a igualdade (I)

$$m_2(\Sigma(f)) - m_1(\Sigma(f)) + -m_0(\Sigma(f)) = \mu(\Sigma(f)) + 1.$$

Suponha que f tenha coposto 1. Neste caso, $\Sigma^{(n-2,1)}(f)$ é uma I.C.I.S 1-dimensional e consequentemente são válidas as propriedades (*) e (**), ou seja,

$$m_0(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) = \mu^{(1)}(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) + \mu^{(0)}(\Sigma^{(n-2,1)}(f)). \quad (10)$$

Que é equivalente a

$$\mu^{(1)}(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) = m_0(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) - 1, \quad (11)$$

também

$$m_1(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) = \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f) \cap p_1^{-1}(0)) + \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)), \quad (12)$$

mas

$$\mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f) \cap p_1^{-1}(0)) = \mu^{(1)}(\Sigma^{(n-2,1)}(f)). \quad (13)$$

Substituindo (13) em (12)

$$m_1(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) = \mu^{(1)}(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) + \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)). \quad (14)$$

Finalmente substituindo (11) em (14)

$$m_1(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) - m_0(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) = \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) - 1.$$

A igualdade (III) segue imediatamente da definição de multiplicidades polares e usando a genericidade das projeções.

Para encontrar a igualdade (IV) usa-se o mesmo processo utilizado para obter as equações (I) e (II). ■

4.2 Invariantes dos tipos estáveis em $X(f_t)$.

4.2.1 Pré-requisitos.

O conjunto $X(f)$ é uma superfície em $\mathbb{C}^n$, possivelmente sem singularidades isoladas.

Neste caso, os principais invariantes usados para caracterizar a Whitney equisingularidade da família à um parâmetro $\{X(f_t)\}$ (onde cada $X(f_t)$ é o fecho do conjunto $f_t^{-1}(\Delta(f_t)) - \Sigma(f_t)$) são os **números de Lê**. A seguir é dada uma breve introdução sobre estes invariantes e para mais detalhes consulte [38], [18] ou [22].

Seja $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a aplicação que define um germe de espaço analítico reduzido $(n-1)$ -dimensional $X \subset \mathbb{C}^n$, ou seja $X = h^{-1}(0)$. Considere o Blowup B de $\mathbb{C}^n$ ao longo do ideal jacobiano $J(h)$:

$$b : B = Bl_{J(h)}\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

com **divisor excepcional** $E := b^{-1}(v(J(h)))$, onde $v(J(h))$ é o anulador de $J(h)$.

A aplicação b é chamada **aplicação de estrutura** do Blowup e é um morfismo próprio.

Observe que B é igual ao fecho em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ do gráfico da seguinte aplicação

$$J: (\mathbb{C}^n - \nu(J(h))) \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

$$z \mapsto ((h_{z_1})(z) : \dots : (h_{z_n})(z)).$$

Se Y é um germe de espaço analítico com estrutura reduzida, então um ciclo analítico em Y é uma soma formal finita $\sum_i c_i W_i$ onde cada W_i é um subconjunto analítico irredutível de Y e o coeficiente c_i associado a W_i é um inteiro chamado de multiplicidade algébrica de W_i . Em particular, o divisor excepcional E é visto como um ciclo, denotado por $[E]$, definido como $\sum_i c_i [W_i]$, onde o inteiro c_i é a ordem de anulamento de $J(h)$ sobre a componente irredutível W_i de E .

A multiplicidade na origem de um ciclo $S := \sum_i c_i [W_i]$ é definido como

$$\text{mult}_0 S := \sum_i c_i (\text{mult}_0(W_i)).$$

O morfismo b induz pela linearidade, um homomorfismo b_* , chamado de "pushforward", do grupo de ciclos sobre B para o grupo de ciclos na meta, da seguinte maneira: dado um ciclo $[S] := \sum_i c_i W_i \subseteq B$,

$$b_*([S]) := \begin{cases} \sum_i c_i \cdot b(W_i), & \text{se } \dim W_i = \dim(b(W_i)) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Definição 4.2. Considere, H_j um hiperplano genérico j -dimensional. A **variedade Polar Relativa** de h de dimensão k , com $k = 0, \dots, n$, denotada por $\Gamma^k(h)$, é definida por:

$$\begin{cases} \Gamma^n(h) := \mathbb{C}^n, & \text{para } k = n \\ \Gamma^k(h) := b(H_1 \cap \dots \cap H_{n-k} \cap \text{Bl}_{J(h)} \mathbb{C}^n), & \text{para } k = 1, \dots, n-1 \end{cases}.$$

A k -ésima **multiplicidade polar relativa** de h , com $k = 0, \dots, n-1$, denotada por $\gamma_k(h)$, é definida por

$$\gamma_k(h) = \text{mult}_0(\Gamma^k(h)).$$

É provado em [53] que esta multiplicidade é semi-contínua superiormente.

Ainda existe um outro comportamento desses objetos, descrito na observação a seguir, que é fundamental para demonstrar a proposição 4.7.

Observação 4.3. Se as coordenadas são escolhidas genericamente, então

$$\Gamma^k(h) = b(H_1 \cap \dots \cap H_{n-k} \cap Bl_{J(h)}\mathbb{C}^n) \subset V(h_{z_k}, \dots, h_{z_{n-1}})$$

e a igualdade é válida em pontos regulares de h .

Da descrição acima tem-se que a curva polar relativa ($k = 1$) é vazia se e somente se a interseção $H_1 \cap \dots \cap H_{n-1} \cap Bl_{J(h)}\mathbb{C}^n$ é vazia se e somente se a fibra sobre a origem não pertence a $\mathbb{P}^{n-1}$, isto é, tal fibra não é uma componente do divisor excepcional do Blowup.

Definição 4.4. O ciclo de Lê de h de dimensão i , com $i = 0, \dots, n-1$, é denotado por $\Lambda^i(h)$ e é definido como o pushforward pela aplicação de estrutura do ciclo formado pela interseção do divisor excepcional E no blowup B com i hiperplanos genéricos. Ou seja,

$$\Lambda^i(h) := b_*([E \cap H_1 \cap \dots \cap H_i]), \text{ para } i = 0, \dots, n-1.$$

Note que cada componente de $\Lambda^i(h)$ tem dimensão no mínimo i .

O número de Lê associado a $\Lambda^i(h)$ de dimensão i , com $i = 0, \dots, n-1$, é definido por

$$\lambda^i(h) := \text{mult}_0 \Lambda^i(h).$$

Os números de Lê têm algumas propriedades que devem ser citadas. Quando $V(J(h))$ tem dimensão s , os números de Lê de dimensões maiores que s , ou seja, $\lambda^{s+1}(h), \lambda^{s+2}(h), \dots, \lambda^n(h)$ são todos iguais a zero. Além disso, estes números são lexicograficamente semi-contínuos superiormente [[18], p. 715], ou seja: se para algum p a aplicação $t \mapsto (\lambda^{n-1}(h_t), \dots, \lambda^{n-p}(h_t))$ é constante em T , então $t \mapsto (\lambda^{n-p+1}(h_t))$ é semi-contínuo superiormente. Em particular, $\lambda^{n-1}(h_t)$ é sempre semi-contínuo superiormente.

Por fim, além das definições de números de Lê e de multiplicidade polar relativa, ainda é preciso considerar a **característica de Euler**, a qual é apresentada em termos das multiplicidades polares relativas e dos números de Lê (para mais detalhes consulte [38]).

Definição 4.5. A *característica de Euler reduzida da fibra de Milnor* de $h|H^k$ na origem, $\chi^{(k)}$, é definida por

$$\chi^{(k)} := \gamma_k(h) + \lambda^{n-k}(h) - \lambda^{n-(k-1)}(h) + \lambda^{n-(k-2)}(h) + \dots + \lambda^{n-s}(h), \quad k = 1, \dots, d$$

com $s = \dim V(J(h))$ e $d = \dim V(h)$.

A *característica de Euler*, $\chi^{(*)}$, é dada pela sequência

$$\chi^{(*)} := (\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(d)}).$$

A seguir são descritas relações envolvendo λ^j e γ_j .

Lema 4.6. ((3.4) e (6.1) de [18])

As seguintes relações envolvendo os invariantes $\lambda^j(h)$, $\lambda^j(h|H^k)$ e $\gamma_j(h)$ são válidas para $k = 1, \dots, d$, onde $d = \dim V(h)$.

$$(i) \quad \lambda^0(h|H^j) = \lambda^{n-j}(h) + \gamma_{n-j}(h), \quad \text{para } j = 2, \dots, n-1;$$

$$(ii) \quad \lambda^{k-i}(h|H^k) = \lambda^{n-i}(h), \quad \text{com } i = 1, \dots, k-1 \text{ e } k = 2, \dots, d.$$

4.2.2 Equisingularidade de $X(f)$.

Considere $f \in \mathcal{O}(n, 3)$, $n \geq 4$ germe finitamente determinado de tipo estável discreto e $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ um desdobramento de $f(x) = F(x, 0)$, tal que F é estratificado por tipos estáveis e pelo eixo de parâmetros T .

Denote por $X_0(F)$, a equação que define $X(F) = \overline{F^{-1}(\Delta(F)) - \Sigma(F)} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ com estrutura reduzida, ou seja, $(X_0(F))^{-1}(0) = X(F)$, ou ainda, $V(X_0(F)) = X(F)$.

Para cada $t \in T$, considere $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, na família $\{f_t\}_t$, seja $\{X(f_t)\}_t$ a família de hipersuperfícies reduzidas $X(f_t) = \overline{f_t^{-1}(\Delta(f_t)) - \Sigma(f_t)} \subseteq \mathbb{C}^n$. De modo análogo a $X_0(F)$, denota-se $X_0(f_t)$ a equação que define $X(f_t)$.

Teorema 4.7. Suponha que $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, (0, 0))$, $n \geq 4$ seja um desdobramento a 1-parâmetro de um germe de aplicação finitamente determinado $f \in \mathcal{O}(n, 3)$, $n \geq 4$, o qual quando estratificado pelos tipos estáveis e pelo eixo de parâmetros T , possua apenas o eixo de parâmetros T como um estrato 1-dimensional na origem (T é o locus de instabilidade). Então o par $(X(f_t), T)$ é Whitney equisingular se e somente se a sequência $(\gamma_1(X_0(f_t)), \dots, \gamma_{n-1}(X_0(f_t)), \chi^*)$ é independente de t .

Observação 4.8. Se o fecho de um estrato S de $V(X_0(F)) = X(F)$ é imagem de uma componente do divisor excepcional do Blowup $B = Bl_{J(X_0(F))}\mathbb{C}^{n+1}$ então por razões dimensionais e pelo fato de que a condição A_F ocorre genericamente, esta componente é o espaço conormal de $\bar{S}$. Logo, pelo teorema 6.3 de [20], o Blowup dessa componente pelo "pullback" de γ_T tem um divisor excepcional que é equidimensional sobre T . Consequentemente pelo teorema de Tessier (V - 1.2 de [53]) o par (S, T) satisfaz a condição W_F e portanto tal par é Whiney equisingular.

Demonstração do teorema 4.7:

Primeiro note que $X(F)$ tem uma estratificação pelos tipos estáveis e pelo espaço de parâmetros T tal que a condição W_f é válida para todo par de estratos, exceto possivelmente sobre T .

Pela observação 4.8 é suficiente mostrar que cada tipo estável é a imagem de uma componente do divisor excepcional do Blowup $B = Bl_{J(X_0(F))}\mathbb{C}^{n+1}$.

Inicialmente são tratados os tipos estáveis representados por monogermes. Neste caso é suficiente mostrar que se $f_{\mathcal{Q}}$ é um desdobramento estável minimal que representa um tipo estável $\mathcal{Q}$ que aparece em F com dimensão positiva, então a curva polar relativa de $X(f_{\mathcal{Q}})$ na origem é não vazia, pois pela observação 4.3 isto implica que a origem é a imagem de uma componente do divisor excepcional. Consequentemente, como $X(f_{\mathcal{Q}})$ é analiticamente um produto cartesiano ao longo dos estratos de $X(F)$ diferentes de T , o estrato representando o tipo estável $\mathcal{Q}$ também é imagem de uma componente do divisor excepcional.

É claro que se a multiplicidade da curva polar relativa é não nula então a curva polar relativa é não vazia.

Massey observou em [[39], p. 365] que esta multiplicidade é exatamente o número de esferas no tipo de homotopia do "link" complexo da singularidade independentemente da dimensão do locus singular. Resta mostrar que esta quantidade é maior do que zero.

E isto é resolvido por um interessante teorema de Damon em [3.1, [7], p. 14], que garante que para t e ε suficientemente pequenos, $(X_0(f_{\mathcal{Q}}))^{-1}(0) \cap B_{\varepsilon}$ (ou seja, $(X(f_{\mathcal{Q}}) \cap B_{\varepsilon})$), é independente da estabilização $f_{\mathcal{Q}}$ e é homotopicamente equivalente a um bouquet de n -esferas reais, isto é, de n -esferas, o que é diferente de zero pois $n \geq 4$.

Portanto, a multiplicidade da curva polar relativa é não nula finalizando esta parte da demonstração.

Agora considera-se os tipos estáveis representados por multigerms. Se duas folhas de $X(F)$ se interceptam, esta interseção tem codimensão 0 em $\Sigma(X(F))$, e isto implica que este estrato é

imagem de uma componente do divisor excepcional.

Caso contrário, pode-se admitir que o conjunto $X(f_t)$ é localmente a união de duas hipersuperfícies X_1 e X_2 mergulhadas em $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ com equações $h_1(z_1, \dots, z_k) = 0$ e $h_2(z_{k+1}, \dots, z_n) = 0$. Existem dois casos a considerar o primeiro, quando $k = n - 1$ com $h_2 = z_n$ e o outro quando tanto h_1 quanto h_2 definem hipersuperfícies singulares.

Suponha que $h_2 = z_n$, então pode-se assumir que ϕ_1 parametriza um ramo da curva polar de h_1 e que $h_1 \circ \phi_1$ é nula para $1 \leq i \leq n - 2$. Como h_1 está no fecho integral de $J(h_1)$ [ver [51]], tem-se que $(h_1/h_{1,z_{n-1}}) \circ \phi_1$ é um germe analítico ψ^n . Defina $\varphi = (\phi_1, \psi_n)$ então se $f = z_n h_1 f_{z_n} \circ \varphi = 0$ para $1 \leq i \leq n - 2$ e $(f_{z_n} - f_{z_{n-1}}) \circ \varphi = (h_1 - z_n h_{1,z_{n-1}}) \circ \varphi = 0$. Logo, φ parametriza o ramo da curva polar de f . Agora suponha que $f = h_1 h_2$, pode-se assumir que ϕ_1 e ϕ_2 parametrizam os ramos das curvas polares de h_1 e h_2 , respectivamente. Então $\varphi = (\phi_1, \phi_2)$ parametriza uma superfície polar de f , conseqüentemente tem-se que $f_{z_1} \circ \varphi = 0$ para $1 \leq i \leq k$ e para $k + 1 \leq i \leq n$. Logo, para quase toda escolha de A e B , $(A f_{z_k} + B f_{z_n}) \circ \varphi$ define uma curva de singularidades cujo ramo seja parametrizado por ψ , por exemplo, logo $\varphi \circ \psi$ parametriza um ramo da curva polar de f .

■

Corolário 4.9. *Suponha que $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, (0, 0))$, $n \geq 4$ seja um desdobramento a 1-parâmetro de um germe de aplicação finitamente determinado $f \in \mathcal{O}(n, 3)$, $n \geq 4$, o qual quando estratificado pelos tipos estáveis e pelo eixo de parâmetros T , possua apenas o eixo de parâmetros T como um estrato 1-dimensional na origem (T é o locus de instabilidade). Então o par $(X(f_t), T)$ é Whitney equisingular se e somente se os números de Lê $\lambda^{n-j}(X_0(f_t))$ e $\lambda^0(X_0(f_t)|H^j)$, para $2 \leq j \leq n - 1$, são constantes na origem para f_t .*

Demonstração:

O resultado acima segue das equivalências abaixo.

A sequência

$$\begin{aligned} &(\gamma_1(X_0(f_t)), \dots, \gamma_{n-1}(X_0(f_t)), \chi^*) \text{ é constante} \xLeftrightarrow{(I)} \\ &(\gamma_1(X_0(f_t)), \dots, \gamma_{n-1}(X_0(f_t)), \lambda^1(X_0(f_t)), \dots, \lambda^{n-2}(X_0(f_t))) \text{ é constante} \xLeftrightarrow{(II)} \\ &\lambda^{n-j}(X_0(f_t)) \text{ e } \lambda^0(X_0(f_t)|H^j), \text{ para } 2 \leq j \leq n - 1, \text{ são constantes.} \end{aligned}$$

A passagem (I) é válida pela definição da característica de Euler; (II) ocorre pois os números de Lê são lexicograficamente semi-contínuos superiormente, as multiplicidades polares relativas são semi-contínuas superiormente e pelas relações do Lema 4.6.

■

Whitney equisingularidade em famílias de germes em $\mathcal{O}(n, p), n \geq 4$.

5.1 Caso $\mathcal{O}(n, 3)$, com $n \geq 4$.

Neste capítulo são relacionados todos os resultados obtidos nos capítulos anteriores, afim de minimizar o número de invariantes exigidos no teorema 1.8.

Para cada variedade d -dimensional existem $(d + 1)$ -multiplicidades polares associadas. Como $\Sigma(f)$ e $\Delta(f)$ são 2-dimensionais e os conjuntos $D^2(f|\Sigma(f))$, $f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))$, $f(D^2(f|\Sigma(f)))$ e $\Sigma^{(n-2,1)}(f)$ são 1-dimensionais, somam-se 14 multiplicidades polares definidos sobre estes conjuntos.

Ainda, $X(f)$ é $(n-1)$ -dimensional, $X_1(f)$ e $X_3(f)$ são $(n-2)$ -dimensionais e $X_2(f)$, $X_4(f)$ e $X_5(f)$ são $(n-3)$ -dimensionais, logo tem-se mais $(6n - 8)$ multiplicidades polares.

Portanto, para aplicar o teorema 1.8 é necessária a constância de $6(n + 1)$ invariantes polares.

Teorema 5.1. *Seja $f \in \mathcal{O}(n, 3), n \geq 3$ um germe de finitamente determinado e $F(t, x) = (t, f_t(x))$ um desdobramento excelente de f . Então a família $\{f_t\}$ é Whitney equisingular ao longo do parâmetro t se e somente se $\mu(\Sigma(f_t)), m_1(\Sigma(f_t)), m_0(\Sigma^{(n-2,1)}(f_t)), m_1(\Sigma^{(n-2,1)}(f_t)), m_0(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))), m_1(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))), m_1(\Delta(f_t)), m_0(f_t(\Sigma^{(n-2,1)}(f_t))), m_1(f_t(\Sigma^{(n-2,1)}(f_t))), m_0(f_t(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t)))), m_1(f_t(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t)))), \lambda^{n-j}(X_0(f_t))$ e $\lambda^0(X_0(f_t)|H^j)$, para $2 \leq j \leq n-1$, são constantes na origem para f_t .*

Demonstração:

Esta demonstração segue imediatamente de 3.1, 3.6, [4.1 (I)] e 4.9.

■

No caso de germes de coposto 1 este número pode ser reduzido, obtendo:

Teorema 5.2. *Seja $f \in \mathcal{O}(n, 3)$, $n \geq 4$ um germe de aplicação finitamente determinado de coposto 1 e $F(t, x) = (t, f_t(x))$ um bom desdobramento de f . Então a família $\{f_t\}$ é Whitney equisingular ao longo do parâmetro t se e somente se $\mu(\Sigma(f_t)), \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f_t)), m_1(\Sigma(f_t)), m_0(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))), m_1(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))), m_1(\Delta(f_t)), m_0(f_t(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))))$, $m_1(f_t(D_1^2(f_t|\Sigma(f_t))))$, $\lambda^{n-j}(X_0(f_t))$ e $\lambda^0(X_0(f_t)|H^j)$, para $2 \leq j \leq n-1$ são constantes na origem para f_t .*

Demonstração:

Essa demonstração segue imediatamente dos resultados: 3.1, 3.3, 3.4, 3.6, 4.1 e 4.9.

■

Com esse capítulo encerra-se o objetivo inicial, ou seja, minimizar a quantidade de invariantes exigidos no Teorema de Gaffney para garantir a Whitney Equisingularidade de uma família a 1-parâmetro.

Note que pelo Teorema 5.2 conseguiu-se diminuir, a priori, o total de $6(n+1)$ invariantes para $2(n+2)$ invariantes, ou seja, é necessário apenas calcular $1/3$ dos invariantes propostos por Gaffney. Por exemplo, para $n = 4$ e $p = 3$ a quantidade diminuiu de 30 para 12 invariantes, o que já é significativo.

O teorema 5.2 também pode ser aplicado para o par $(3, 3)$, obtendo 10 invariantes. Entretanto, Pérez em [27] reduziu para 07 invariantes. Isto foi possível graças as relações de números de Lê para superfícies em $\mathbb{C}^3$, obtidas por Gaffney e Gassler em [18].

5.2 Caso $\mathcal{O}(n, p)$, com $n \geq p$.

Além de reforçar o método usado para reduzir os invariantes para os pares $(n, 3)$, $n \geq 4$, esta seção é reservada para explicar qual é o procedimento quando se tratar de pares (n, p) , $n \geq p$.

O primeiro passo é descrever quais são os **tipos estáveis** nessas dimensões. Os representantes desses tipos estáveis são os germes (monogermes e multigerms) estáveis, os quais podem ser obtidos utilizando o *Transversal* ([31]). É claro que, quanto mais alta for dimensão p maior será o número de germes estáveis.

Tendo os tipos estáveis, deve-se estratificar pelos tipos estáveis três conjuntos:

- o conjunto singular (fonte);
- a imagem do conjunto singular, ou seja, o discriminante (meta);
- o fecho do conjunto dado pelos pontos da imagem inversa do discriminante que não pertencem ao conjunto singular (fonte).

A seguir, são obtidas relações entre invariantes. Para I.C.I.S. o Teorema de Lê-Greuel pode ser aplicado afim de obter relações entre as multiplicidades polares e o número de Milnor do conjunto singular. Para as hipersuperfícies sem singularidade isolada, trabalhar com os números de Lê é o caminho.

Por fim, tendo obtido todas as relações possíveis, aplica-se a propriedade da semi-continuidade superior para minimizar a quantidade de multiplicidades polares exigidas pelo Teorema de Gaffney.

Invariantes de germes quase-homogêneos em $\mathcal{O}(n, 3), n \geq 4$.

O principal objetivo deste capítulo é uma análise da classe dos germes quase-homogêneos em $\mathcal{O}(n, 3)$ com $n \geq 4$ de coposto 1.

Inicialmente são obtidas fórmulas para o cálculo das multiplicidades polares que surgem nos estratos da meta em termos dos pesos e graus de quase-homogeneidade.

Estas fórmulas são obtidas em função do número singularidades de tipo A_3 .

Jorge Pérez em [27] obteve fórmulas para o caso $n = p = 3$ e aplicou o resultado de [37], que descreve uma fórmula para o cálculo do número de singularidades de tipo A_3 no caso $n = p$, para escrever estas multiplicidades polares em termos dos pesos e graus.

Na segunda seção deste capítulo é mostrada uma fórmula para o cálculo do números de singularidades de tipo A_3 em termos dos pesos e graus no caso $n = 4, p = 3$.

Consequentemente, para este par de dimensões as fórmulas para o cálculo das multiplicidades polares na meta são obtidas em termos dos pesos e graus.

6.1 Multiplicidades polares.

Definição 6.1. Um germe de aplicação analítica $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ é **quase-homogêneo** se existem inteiros positivos $w_1, \dots, w_n$, os pesos, e inteiros positivos $d_1, \dots, d_p$, os graus, tais que $f_i(\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_n} x_n) = \lambda^{d_i} f_i, \forall x \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, p$.

Definição 6.2. Para um germe $g \in \mathcal{O}_n$ define-se

$$\text{supp } g = \{k \in \mathbb{Z}^n \text{ tal que } a_k \neq 0 \text{ na série de Taylor de } g = \sum a_k x^k\}.$$

Definição 6.3. Um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $f = (f_1, \dots, f_p)$, é **semi-quase-homogêneo** de pesos $w_1, \dots, w_n$ e graus $d_1, \dots, d_p$ se f pode ser escrito como uma soma $f = f^0 + f'$, onde $f^0 = (f_1^0, \dots, f_p^0)$ é um germe finitamente determinado quase homogêneo de pesos $w_1, \dots, w_n$ e graus $d_1, \dots, d_p$ e $f' = (f_1', \dots, f_p')$ e cada f_i' é um germe de função tal que $w_1 k_1 + \dots + w_n k_n > d_i$ para todo $k = (k_1, \dots, k_n) \in \text{supp } f'$. O germe f^0 é chamado de parte inicial de f .

A seguir são apresentados os resultados necessários para a determinação das multiplicidades polares.

Teorema 6.4. ([26], p. 77) Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $n \geq p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ um germe de interseção completa com singularidade isolada e quase-homogêneo com pesos $w_1, \dots, w_n$ e graus $d_1, \dots, d_p$. Então são válidas as seguintes igualdades:

a) Se $d_1 = \dots = d_p = d$:

$$\mu(f) = (-1)^{n-p+1} + (-1)^{n-p} \frac{d^n}{w_1 \cdot \dots \cdot w_n} \sum_{\substack{0 \leq l \leq n-p \\ 1 \leq v_1 < \dots < v_l \leq n}} (-1)^l \prod_{\lambda=1}^l \left(1 - \frac{w_{v_\lambda}}{d}\right)$$

b) Se $d_i \neq d_j$, para $i \neq j$:

$$\mu(f) = \sum_{\rho=1}^p \prod_{v=1}^n \left(\frac{d_\rho}{w_v} - 1\right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^p \left(\frac{1}{\frac{d_\rho}{d_\kappa} - 1}\right)$$

Teorema 6.5. ([26], p. 86) Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe semi-quase-homogêneo que define uma interseção completa. Então o espaço $f^{-1}(0)$ é um I.C.I.S de dimensão $(n-p)$ e $\mu(f) = \mu(f^0)$.

Teorema 6.6. ([2], 12.3 ou [5], p. 63) Seja $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ um germe de aplicação analítica semi-quase-homogêneo com pesos $w_1, \dots, w_n$ e graus $d_1, \dots, d_n$. Suponha que $h_1, \dots, h_n$ é um sistema de geradores de um ideal I de codimensão finita. Então

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I} = \frac{d_1 \dots d_n}{w_1 \dots w_n}$$

O Teorema a seguir escreve as multiplicidades polares do conjunto $\Delta(f)$ em termos de pesos e graus.

Teorema 6.7. *Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, \dots, x_n))$ um germe de aplicação quase-homogêneo de coposto 1 finitamente determinado com pesos $w_1, \dots, w_n$, com $w_1 \leq w_2$ e $w_3 \leq \dots \leq w_n$ e seja d o grau de g , $d \geq w_1$ e $d \geq w_2$.*

Então,

$$(i) \ m_0(\Delta(f)) = \prod_{j=3}^n \left(\frac{D_j}{w_j} \right),$$

$$(ii) \ m_1(\Delta(f)) = \sum_{\rho=1}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + 1,$$

$$(iii) \ m_2(\Delta(f)) = \sum_{\rho=3}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=3 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) - \prod_{j=3}^n \left(\frac{D_j}{w_j} \right) +$$

$$\sum_{\rho=1}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + 2,$$

com $D_1 = w_1, D_2 = (n-2)d - 2\sum_{i=3}^n w_i, D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n$.

Demonstração:

A primeira multiplicidade a tratar é $m_0(\Delta(f))$. Na demonstração de 3.1 obteve-se:

$$m_0(\Delta(f)) = \deg(p_1 \circ f, J(f)),$$

onde p_1 é uma projeção linear genérica de $\mathbb{C}^3$ em $\mathbb{C}^2$. Pode-se considerar, sem perda de generalidade, a projeção dada por $p_1(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_2y + b_3z)$ e que $J(f) = \langle g_{x_3}, \dots, g_{x_n} \rangle$. Então,

$$m_0(\Delta(f)) = \deg(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3g(x_1, \dots, x_n), b_2x_2 + b_3g(x_1, \dots, x_n), g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n}) =$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle a_1x_1 + a_2x_2 + a_3g(x_1, \dots, x_n), b_2x_2 + b_3g(x_1, \dots, x_n), g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n} \rangle} \quad (*)$$

Os n -geradores do ideal I dado por

$$I = \langle a_1x_1 + a_2x_2 + a_3g(x_1, \dots, x_n), b_2x_2 + b_3g(x_1, \dots, x_n), g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n} \rangle$$

são germes de aplicações semi-quase-homogêneas cujos graus são respectivamente iguais a $D_1 = w_1, D_2 = w_2, D_3 = d - w_3, D_4 = d - w_4, \dots, D_n = d - w_n$. Logo, pelo Teorema 6.6 a dimensão (*) é igual a

$$\frac{D_1 D_2 \dots D_n}{w_1 w_2 \dots w_n}.$$

Mas $D_1 = w_1$ e $D_2 = w_2$, assim, tal dimensão é igual a

$$\frac{D_3 D_4 \dots D_n}{w_3 w_4 \dots w_n}.$$

Portanto,

$$m_0(\Delta(f)) = \frac{D_3 D_4 \dots D_n}{w_3 w_4 \dots w_n}.$$

Agora, para exibir $m_1(\Delta(f))$ em termos dos pesos e graus de f da demonstração de 3.1 tem-se a igualdade

$$m_1(\Delta(f)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle p_2 \circ f, J[f], J[p_1 \circ f, J[f]] \rangle} = \mu(p_2 \circ f, J[f], J[p_1 \circ f, J[f]]) + 1,$$

onde p_2 é uma projeção linear genérica de $\mathbb{C}^3$ em $\mathbb{C}$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que p_2 é dada por $p_2(x, y, z) = c_1x + c_2y + c_3z$.

O objetivo agora é mostrar que o ideal $J = \langle p_2 \circ f, J[f], J[p_1 \circ f, J[f]] \rangle$ é semi-quase-homogêneo e então aplicar o Teorema 6.5.

Para isso é preciso explicitar cada um dos seus geradores.

Começa-se pela composição,

$$(p_2 \circ f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_2(x_1, x_2, g(x_1, x_2, \dots, x_n)) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

O próximo é $J(f)$ o qual é gerado por $g_{x_3}, \dots, g_{x_n}$.

Falta $J[p_1 \circ f, J(f)]$, o gerador mais complexo de se obter. Note que

$$(p_1 \circ f)(x_1, \dots, x_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3g(x_1, \dots, x_n), b_2x_2 + b_3g(x_1, \dots, x_n)).$$

Assim,

$$J[p_1 \circ f, J(f)] = J[a_1x_1 + a_2x_2 + a_3g(x_1, \dots, x_n), b_2x_2 + b_3g(x_1, \dots, x_n), g_{x_3}, \dots, g_{x_n}].$$

E esse último é igual ao ideal gerado pelo determinante da seguinte matriz de ordem n

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3g_{x_3} & a_3g_{x_4} & \dots & a_3g_{x_n} \\ 0 & b_2 & b_3g_{x_3} & b_3g_{x_4} & \dots & b_3g_{x_n} \\ g_{x_3x_1} & g_{x_3x_2} & g_{x_3^2} & g_{x_3x_4} & \dots & g_{x_3x_n} \\ g_{x_4x_1} & g_{x_4x_2} & g_{x_4x_3} & g_{x_4^2} & \dots & g_{x_4x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_{x_nx_1} & g_{x_nx_2} & g_{x_nx_3} & g_{x_nx_4} & \dots & g_{x_n^2} \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$J[p_1 \circ f, J(f)] = \langle a_1b_2g_{x_3^2}g_{x_4^2} \dots g_{x_n^2} + \text{termos de graus superiores} \rangle.$$

Portanto

$$J = \langle c_1x_1 + c_2x_2 + c_3g(x_1, x_2, \dots, x_n), g_{x_3}, \dots, g_{x_n}, a_1b_2g_{x_3^2}g_{x_4^2} \dots g_{x_n^2} + \text{termos de graus maiores} \rangle.$$

Agora considere o seguinte ideal,

$$J_0 = \langle x_1, a_1b_2g_{x_3^2}g_{x_4^2} \dots g_{x_n^2}, g_{x_3}, \dots, g_{x_n} \rangle.$$

cujos graus de seus geradores são respectivamente $D_1 = w_1, D_2 = (n-2)d - 2\sum_{i=3}^n w_i$,

$$D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n.$$

Por hipótese tem-se que $w_1 \leq w_2$ e $w_3 \leq \dots \leq w_n$. Logo, J é semi-quase-homogêneo com parte inicial (da genericidade da projeção p_1 tem-se $a_1b_2 \neq 0$) exatamente J_0 . Nestas condições,

aplicando o Teorema 6.5 obtém-se que $\mu(J) = \mu(J_0)$. Consequentemente,

$$m_1(\Delta(f)) = \mu(J) + 1 = \mu(J_0) + 1$$

Agora, usando o Teorema 6.4 (item (b)) pode-se calcular $\mu(J_0)$ em termos dos pesos e graus de f

$$\mu(J_0) = \sum_{\rho=1}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right)$$

Portanto,

$$m_1(\Delta(f)) = \sum_{\rho=1}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + 1,$$

com $D_1 = w_1, D_2 = (n-2)d - 2\sum_{i=3}^n w_i, D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n$.

Resta apenas calcular $m_2(\Delta(f))$ em termos dos pesos e graus de f . Do Teorema 3.1 segue a igualdade,

$$m_2(\Delta(f)) = \mu(\Sigma(f)) - m_0(\Delta(f)) + m_1(\Delta(f)) + 1. \quad (**)$$

Mas $\Sigma(f) = V(g_{x_3}, \dots, g_{x_n})$, com cada gerador g_{x_l} de grau $D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n$.

Logo, aplicando novamente o Teorema 6.5,

$$\mu(\Sigma(f)) = \sum_{\rho=3}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=3 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right)$$

Portanto, substituindo as expressões encontradas para $m_0(\Delta(f))$, $m_1(\Delta(f))$ e para $\Sigma(f)$ em termos de pesos e graus de f na igualdade (I), conclui-se

$$\begin{aligned} m_2(\Delta(f)) &= \sum_{\rho=3}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=3 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) - \prod_{j=3}^n \left(\frac{D_j}{w_j} \right) + \\ &\quad \sum_{\rho=1}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + 2 \end{aligned}$$

com $D_1 = w_1, D_2 = (n-2)d - 2\sum_{i=3}^n w_i, D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n$.

■

No Corolário abaixo as multiplicidades do Teorema 6.7 são explicitadas para o caso $n = 4$ e $p = 3$.

Corolário 6.8. *Seja $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, x_3, x_4))$ um germe de aplicação quase-homogêneo de coposto 1 finitamente determinado com pesos w_1, w_2, w_3, w_4 , com $w_1 \leq w_2$ e $w_3 \leq w_4$ e seja d o grau de g , $d \geq w_1$ e $d \geq w_2$. Então,*

$$(i) \ m_0(\Delta(f)) = \frac{(d - w_3)(d - w_4)}{w_3 w_4};$$

(ii)

$$m_1(\Delta(f)) = \frac{(2d - w_2 - 2w_3 - 2w_4)(2d - 3w_3 - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4)(d - w_3)(d - w_4)}{w_2 w_3 w_4 (d - 2w_3 - w_4)(d - w_3 - 2w_4)} +$$

$$\frac{(d - w_2 - w_3)(2d - 2w_3 - 2w_4)(d - w_3 - w_4)(d - 2w_3)(d - w_4)}{w_2 w_3 w_4 (-d + w_3 + 2w_4)(w_4 - w_3)} +$$

$$\frac{(d - w_2 - w_4)(2d - 2w_3 - 2w_4)(d - w_3 - w_4)(d - w_3)(d - 2w_4)}{w_2 w_3 w_4 (-d + 2w_3 + w_4)(w_4 - w_3)} + 1$$

(iii)

$$m_2(\Delta(f)) = \frac{(d - w_1 - w_3)(d - w_2 - w_3)(d - 2w_3)(d - w_3 - w_4)(d - w_4)}{w_1 w_2 w_3 w_4 (w_4 - w_3)} -$$

$$\frac{(d - w_1 - w_4)(d - w_2 - w_4)(d - w_3 - w_4)(d - 2w_4)}{w_1 w_2 w_3 w_4 (w_4 - w_3)} -$$

$$\frac{(d - w_3)(d - w_4)}{w_3 w_4} +$$

$$\frac{(2d - w_2 - 2w_3 - 2w_4)(2d - 3w_3 - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4)(d - w_3)(d - w_4)}{w_2 w_3 w_4 (d - 2w_3 - w_4)(d - w_3 - 2w_4)} +$$

$$\frac{(d - w_2 - w_3)(2d - 2w_3 - 2w_4)(d - w_3 - w_4)(d - 2w_3)(d - w_4)}{w_2 w_3 w_4 (-d + w_3 + 2w_4)(w_4 - w_3)} +$$

$$\frac{(d - w_2 - w_4)(2d - 2w_3 - 2w_4)(d - w_3 - w_4)(d - w_3)(d - 2w_4)}{w_2 w_3 w_4 (-d + 2w_3 + w_4)(w_4 - w_3)} + 2.$$

O próximo Teorema expressa as multiplicidades polares do conjunto $f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))$ em termos dos pesos e graus de f .

Teorema 6.9. *Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, \dots, x_n))$ um germe de aplicação quase-homogêneo de coposto 1 finitamente determinado com pesos $w_1, \dots, w_n$, com $w_1 \leq w_2$ e $w_3 \leq \dots \leq w_n$ e seja d o grau de g , $d \geq w_1$ e $d \geq w_2$. Então,*

$$(i) \ m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = \sum_{\rho=1}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + 1.$$

$$(ii) \ m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = \sum_{\rho=2}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=2 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) \left[\prod_{\mu=2}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\mu}{D_1} - 1} \right) - 1 \right] + \sharp A_3 + 2,$$

com $D_1 = w_1, D_2 = (n-2)d - 2 \sum_{i=3}^n w_i, D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n$.

Demonstração:

Como f é de coposto 1 segue do Corolário 3.4 que

$$m_1(\Delta(f)) = m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))).$$

Portanto, usando essa igualdade e o item (i) do Teorema 6.7, obtém-se

$$m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = \sum_{\rho=1}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + 1, \quad (1)$$

com $D_1 = w_1, D_2 = (n-2)d - 2 \sum_{i=3}^n w_i, D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n$.

Resta mostrar que $m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f)))$ também pode ser expressa em termos de pesos e graus. Do Teorema 3.3 tem-se a relação

$$m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) - m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = \sharp A_3 - \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) + 1.$$

Isso implica que

$$m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = m_0(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) + \sharp A_3 - \mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) + 1. \quad (2)$$

Pela Observação 3.2 sabe-se que $\Sigma^{(n-2,1)}(f) = V(J_{(n-2,1)}(f))$, com

$$J_{(n-2,1)}(f) = \langle g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n}, M \rangle,$$

onde g_{x_i} denota a derivada parcial de g em relação a x_i e M é o determinante:

$$\begin{vmatrix} g_{x_3^2} & \cdots & g_{x_3 x_n} \\ g_{x_4 x_3} & \cdots & g_{x_4 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n x_3} & \cdots & g_{x_n^2} \end{vmatrix}$$

com $g_{x_i x_j}$ denotando a derivada parcial de g_{x_i} em relação a x_j .

Portanto,

$$\Sigma^{(n-2,1)}(f) = V(M, g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n}),$$

com geradores de graus $D_2 = (n-2)d - 2\sum_{i=3}^n w_i, D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n$, respectivamente.

Assim, pelo Teorema 6.4,

$$\mu(\Sigma^{(n-2,1)}(f)) = \sum_{\rho=2}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=2 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right), \quad (3)$$

com $D_2 = (n-2)d - 2\sum_{i=3}^n w_i, D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n$.

Substituindo (1) e (3) em (2) tem-se

$$\begin{aligned} m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) &= \sum_{\rho=1}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + \\ &\quad \#A_3 - \sum_{\rho=2}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=2 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + 2, \end{aligned} \quad (4)$$

com $D_1 = w_1, D_2 = (n-2)d - 2\sum_{i=3}^n w_i, D_l = d - w_l, 3 \leq l \leq n$

Como $D_1 = w_1$ segue que $\frac{D_1}{w_1} - 1 = 0$, logo

$$\sum_{\rho=1}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) = \sum_{\rho=2}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right).$$

Com essa igualdade e colocando o termo $\sum_{\rho=2}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=2 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right)$ em evidência na equação (4) obtém-se

$$m_1(f(\Sigma^{(n-2,1)}(f))) = \sum_{\rho=2}^n \prod_{v=1}^n \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=2 \\ \kappa \neq \rho}}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) \left[\prod_{\mu=2}^n \left(\frac{1}{\frac{D_\mu}{D_1} - 1} \right) - 1 \right] + \sharp A_3 + 2,$$

com $D_1 = w_1$, $D_2 = (n-2)d - 2 \sum_{j=3}^n w_j$, $D_l = d - w_l$, $3 \leq l \leq n$

■

Corolário 6.10. *Seja $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, x_3, x_4))$ um germe de aplicação quase-homogêneo de coposto 1 finitamente determinado com pesos $w_1, \dots, w_4$, com $w_1 \leq w_2$ e $w_3 \leq w_4$ e seja d o grau de g , $d \geq w_1$ e $d \geq w_2$. Então,*

$$(i) \ m_0(f(\Sigma^{(2,1)}(f))) = \sum_{\rho=1}^4 \prod_{v=1}^4 \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^4 \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + 1.$$

$$(ii) \ m_1(f(\Sigma^{(2,1)}(f))) = \sum_{\rho=2}^4 \prod_{v=1}^4 \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=2 \\ \kappa \neq \rho}}^4 \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) \left[\prod_{\mu=2}^4 \left(\frac{1}{\frac{D_\mu}{D_1} - 1} \right) - 1 \right] + \sharp A_3 + 2,$$

com $D_1 = w_1$, $D_2 = 2(d - w_3 - w_4)$, $D_3 = d - w_3$ e $D_4 = d - w_4$.

6.2 $\sharp A_3$ em $\mathcal{O}(n, 3)$, $n \geq 4$.

Nesta seção são obtidas fórmulas para o cálculo do número de singularidades de tipo A_3 para germes em $\mathcal{O}(n, 3)$, $n \geq 4$.

A busca por estas fórmulas tem aparecido recentemente em vários trabalhos que relacionam multiplicidades e equisingularidade como se pode ver em [37], [47], [11] e também em [4] e [5].

O método aplicado nestes cálculos é a determinação destes números como a dimensão de álgebras $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$, para ideais de comprimento finito.

Estas dimensões são calculadas através da resolução projetiva destes ideais, que com a graduação correta permitem a obtenção da série de Hilbert e consequentemente o número de singularidades.

Lema 6.11. *Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, \dots, x_n))$ um germe de aplicação finitamente determinado de coposto 1. Então,*

$$\sharp A_3 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n}, M, M_{x_3}, M_{x_4}, \dots, M_{x_n} \rangle},$$

onde M é o determinante

$$\begin{vmatrix} g_{x_3^2} & \cdots & g_{x_3 x_n} \\ g_{x_4 x_3} & \cdots & g_{x_4 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n x_3} & \cdots & g_{x_n^2} \end{vmatrix}$$

e M_{x_i} denota a derivada parcial de M em relação a x_i .

Demonstração:

A singularidade de tipo A_3 na notação de Thom-Boardman corresponde ao tipo $\Sigma^{(n-2,1,1)}$. O número de singularidades A_3 que aparece em uma deformação genérica de f tem sido denotado nessa tese por $\sharp A_3$, porém este número é denotado por $c_{(n-2,1,1)}(\mathbf{f})$ se for seguida a notação usada nas referências sobre este número [ver [11], [20] e [44]].

Por [4.6-item(6)], 4.3 e 2.5 de [11], segue imediatamente que

$$\sharp A_3 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_{(n-2,1,1)}(f)}.$$

Na observação 3.2 mostrou-se que $J_{(n-2,1,1)}(f) = \langle g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n}, M \rangle$, onde M é o determinante

$$\begin{vmatrix} g_{x_3^2} & \cdots & g_{x_3 x_n} \\ g_{x_4 x_3} & \cdots & g_{x_4 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n x_3} & \cdots & g_{x_n^2} \end{vmatrix}$$

Por 1.1.1 tem-se que o ideal $J_{(n-2,1,1)}(f) = I_n(d(f), I_3(d(f)), J_{(n-2,1)}(f))$,

onde $d(h)$ denota a matriz jacobiana de h e $I_s(A)$ é o ideal gerado pelos menores de ordem s de uma dada matriz A , ou seja, $J_{(n-2,1,1)}(f)$ é gerado pelos menores de ordem n da matriz $(n+2) \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{x_1} & g_{x_2} & g_{x_3} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_3 x_1} & g_{x_3 x_2} & g_{x_3^2} & \cdots & g_{x_3 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n x_1} & g_{x_n x_2} & g_{x_n x_3} & \cdots & g_{x_n^2} \\ M_{x_1} & M_{x_2} & M_{x_3} & \cdots & M_{x_n} \end{bmatrix}$$

Logo, $J_{(n-2,1,1)}(f) = \langle g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n}, M, M_{x_3}, M_{x_4}, \dots, M_{x_n} \rangle$.

Portanto,

$$\sharp A_3 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle g_{x_3}, g_{x_4}, \dots, g_{x_n}, M, M_{x_3}, M_{x_4}, \dots, M_{x_n} \rangle}.$$

■

A observação a seguir apresenta uma propriedade do número $c_{(n-2,1,1)}(f)$ quando se trata de um germe de coposto 1.

Observação 6.12. Como f é de coposto 1, pode-se considerar

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Neste caso, pela proposição 1.5,

$$c_{(n-2,1,1)}(f) = c_{(n-2,1,1)}(g; x_3, \dots, x_n).$$

Em particular, $J_{(n-2,1,1)}(g; x_3, \dots, x_n)$ é gerado pelos menores de ordem $(n-2)$ da matriz de ordem $n \times (n-2)$.

$$\begin{bmatrix} g_{x_3} & \dots & g_{x_n} \\ g_{x_3^2} & \dots & g_{x_3 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n x_3} & \dots & g_{x_n^2} \\ M_{x_3} & \dots & M_{x_n} \end{bmatrix}$$

A seguir, o número $\sharp A_3$ é calculado para germes quase-homogêneos de $(\mathbb{C}^4, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ de coposto 1.

Da observação 6.12, segue que

$$\sharp A_3 = c_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{J_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4)}.$$

Como essa dimensão é finita,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{J_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x_3, x_4]]}{J_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4)}.$$

Logo

$$\sharp A_3 = c_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x_3, x_4]]}{J_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4)}. \quad (*)$$

Pelo lema 1.6 o ideal $J_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4)$ é um ideal determinantal.

A principal ferramenta usada para calcular $(*)$ através de pesos e graus de um germe quase-homogêneo é o **Complexo de Eagon-Northcott** (para mais detalhes sobre esse complexo veja [9] e [4]) o qual fornece uma resolução para ideais determinantis.

Para que essa resolução seja construída considere $R = \mathbb{C}[[x_3, x_4]]$, $U = (u_{ij})$ a seguinte matriz 4×2 ,

$$U = \begin{bmatrix} g_{x_3} & g_{x_4} \\ g_{x_3^2} & g_{x_3 x_4} \\ g_{x_4 x_3} & g_{x_4^2} \\ M_{x_3} & M_{x_4} \end{bmatrix}$$

Seja $I_2(U)$ o ideal gerado pelos menores de ordem 2 de U , logo, $I_2(U) = J_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4)$ e denote por $R_2(U)$ o quociente $\frac{R}{I_2(U)}$.

Defina a matriz $\deg(U) = (d_{ij})$, tal que cada entrada d_{ij} é o peso do polinômio homogêneo u_{ij} . Ou seja,

$$\deg(U) = \begin{bmatrix} d - w_3 & d - w_4 \\ d - 2w_3 & d - w_3 - w_4 \\ d - w_4 - w_3 & d - 2w_4 \\ 2d - 3w_3 - 2w_4 & 2d - 2w_3 - 3w_4 \end{bmatrix}$$

De acordo com [[3], p.134], quando a entrada u_{ij} é um polinômio nulo considere $d_{ij} = -1$.

O próximo passo é encontrar os R -módulos livres que aparecem na resolução.

Por [4], sob certas condições, para cada matriz U de ordem $n \times m$, $n > m$, cada R -módulo livre F_k , $0 < k < n - m$ é dado por

$$F_k = \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} R$$

com posto igual a $\frac{n!(m+k-1)!}{(m+k)!(n-m-k)!m-1)!k!}$ e base canônica dada por

$$B_k = \{e_{i_1, \dots, i_{m+k}, j_1, \dots, j_k} \mid \substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}\}$$

Os R -homomorfismos livres entre os R -módulos, F_k , $0 < k < n - m$ são dados por

$$\partial_{k+1,k} : F_{k+1} \rightarrow F_k,$$

tal que

$$\partial_{k+1,k}(e_{i_1, \dots, i_{m+k}, j_1, \dots, j_k}) = \sum_{\alpha=1}^{m+k+1} \sum_{\beta=1}^{k+1} (-1)^{\alpha+1} u_{i_\alpha j_\beta} e_{i_1, \dots, \hat{i}_\alpha, \dots, i_{m+k}, j_1, \dots, \hat{j}_\beta, \dots, j_k},$$

e o R -homomorfismo livre entre F_0 e R , $v : F_0 \rightarrow R$, é definido por

$$v(i_1, \dots, i_m) = \begin{vmatrix} u_{i_1,1} & \dots & u_{i_1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{i_m,1} & \dots & u_{i_m,m} \end{vmatrix}.$$

então para $n = 4$ e $m = 2$ tem-se $0 < k < 2$ e portanto os R -módulos são os seguintes,

$$\mathbf{F}_0 = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} R, \quad \mathbf{F}_1 = \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4}} R \text{ e } \mathbf{F}_2 = \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 4}} R.$$

Usando a definição da base B_k , tem-se

$$F_0 = \langle e_{1,2}, e_{1,3}, e_{1,4}, e_{2,3}, e_{2,4}, e_{3,4} \rangle;$$

$$F_1 = \langle e_{1,2,3,1}, e_{1,2,4,1}, e_{1,3,4,1}, e_{2,3,4,1}, e_{1,2,3,2}, e_{1,2,4,2}, e_{1,3,4,2}, e_{2,3,4,2} \rangle;$$

$$F_2 = \langle e_{1,2,3,4,1,1}, e_{1,2,3,4,1,2}, e_{1,2,3,4,2,2} \rangle;$$

Nesse caso, são três R -homomorfismos para considerar, a saber, $\partial_{2,1}$, $\partial_{1,0}$ e v

Sob essas condições, pelo Lema 5.2 de [4], a sequência

$$0 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_{2,1}} F_1 \xrightarrow{\partial_{1,0}} F_0 \xrightarrow{\nu} R \longrightarrow R_2(U) \longrightarrow 0. \quad (I)$$

é exata.

A sequência (I) também pode ser vista como

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{l=1}^3 R \xrightarrow{\partial_{2,1}} \bigoplus_{k=1}^8 R \xrightarrow{\partial_{1,0}} \bigoplus_{m=1}^6 R \xrightarrow{\nu} R \longrightarrow R_2(U) \longrightarrow 0. \quad (II)$$

Tanto R quanto os R -módulos F_k , $0 < k < 2$ são anéis graduados. Porém, os R -homomorfismos $\partial_{2,1}$, $\partial_{1,0}$ e ν não são homomorfismos graduados pois estes não preservam os elementos homogêneos. Por isso, é preciso modificar a graduação dos R -módulos afim de que se tenha homomorfismos de grau zero. Essa nova graduação é feita da seguinte maneira,

$$\tilde{F}_k = \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{2+k} \leq 4}} R[d_{i_1,1} + \dots + d_{i_2,2} + d_{i_{2+1},j_1} + \dots + d_{i_{2+k},j_k}],$$

onde $R[n]$ significa a graduação do anel R subtraído por n , por exemplo, o elemento 1 tem grau n .

Dessa forma, pelo Lema 5.3 de [4], tem-se uma nova sequência exata de anéis graduados, com todos os R -homomorfismos de grau 0.

$$0 \longrightarrow \tilde{F}_2 \xrightarrow{\partial_{2,1}} \tilde{F}_1 \xrightarrow{\partial_{1,0}} \tilde{F}_0 \xrightarrow{\nu} R \longrightarrow R_2(U) \longrightarrow 0. \quad (III)$$

Logo, sob estas novas condições, pode-se aplicar o Teorema 5.4, para obter a série de Hilbert de $R_2(U)$,

$$P(R_2(U), t) = P(R, t) \left(1 + \sum_{k=0}^2 (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{2+k} \leq 4}} t^{d_{i_1,1} + \dots + d_{i_m,m} + d_{i_{m+1},j_1} + \dots + d_{i_{m+k},j_k}} \right).$$

Consequentemente, usando o Lema 5.5 de [4], tem-se finalmente

$$\begin{aligned} \sharp A_3 &= e(R_2(U)) = e(R) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4} d_{i_1 i_1} d_{i_2(i_2-1)} d_{i_3(i_3-1)} = \\ &= e(R)(d_{11}d_{21}d_{31} + d_{11}d_{21}d_{42} + d_{11}d_{32}d_{42} + d_{22}d_{32}d_{42}) = \\ &= e(R)((d - w_3)(d - 2w_3)(d - w_3 - w_4) + (d - w_3)(d - 2w_3)(2d - 2w_3 - 3w_4) + \\ &+ (d - w_3)(d - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4) + (d - w_3 - w_4)(d - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4)). \end{aligned}$$

Mas, $e(R) = e(R, m)$, onde m é o ideal maximal de R (vide Capítulo 1, seção 1.2).

A multiplicidade $e(R)$ pode ser calculada usando o [Lema 2.8 [5]], diz que se I é um ideal monomial de um anel A então

$$e(I) = n! \, v(I), \quad (**)$$

onde $v(I)$ é o volume do conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_+$ com Γ_+ o poliedro de Newton de I .

Neste caso,

$$e(R) = n! \, v(m) = 2! \, \frac{1}{2} = 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sharp A_3 &= (d - w_3)(d - 2w_3)(d - w_3 - w_4) + (d - w_3)(d - 2w_3)(2d - 2w_3 - 3w_4) + \\ &+ (d - w_3)(d - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4) + (d - w_3 - w_4)(d - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4). \end{aligned}$$

Com isso está provado o seguinte teorema,

Teorema 6.13. *Seja $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, x_3, x_4))$ um germe de aplicação quase-homogêneo de coposto 1 finitamente determinado com pesos w_1, w_2, w_3, w_4 , com $w_1 \leq w_2$ e $w_3 \leq w_4$ e seja d o grau de g , $d \geq w_1$ e $d \geq w_2$.*

Então,

$$\begin{aligned} \sharp A_3 &= (d - w_3)(d - 2w_3)(d - w_3 - w_4) + (d - w_3)(d - 2w_3)(2d - 2w_3 - 3w_4) + \\ &+ (d - w_3)(d - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4) + (d - w_3 - w_4)(d - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4). \end{aligned}$$

Exemplo. Considere o seguinte germe de $(\mathbb{C}^4, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, x_2, x_2x_3 + x_1x_4 + x_4^3 + x_3^3).$$

Esse germe é 3-determinado e quase-homogêneo com pesos $w_1 = 2 = w_2$ e $w_3 = 1 = w_4$ e grau $d = 3$.

Tem-se ainda que,

$$U = \begin{bmatrix} x_2 + 3x_3^2 & x_1 + 3x_4^2 \\ 6x_3 & 0 \\ 0 & 6x_4 \\ 36x_4 & 36x_3 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\deg(U) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portando, pelo Teorema 6.13, segue que

$$\sharp A_3 = (2 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1) = (4 - 3) = 1.$$

Portanto, $\sharp A_3 = 1$.

Note que, esse resultado pode ser comprovado usando as igualdades (*) e (**).

Ou seja,

$$\sharp A_3 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x_3, x_4]]}{J_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4)}.$$

Mas $J_{(2,1,1)}(g; x_3, x_4) = \langle x_3, x_4 \rangle$, então

$$\sharp A_3 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x_3, x_4]]}{\langle x_3, x_4 \rangle} = n! \cdot v(\langle x_3, x_4 \rangle) = 2! \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Para finalizar esta seção o corolário 6.14 é reescrito usando 6.13,

Corolário 6.14. *Seja $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, x_3, x_4))$ um germe de aplicação quase-homogêneo de coposto 1 finitamente determinado com pesos $w_1, \dots, w_4$, com $w_1 \leq w_2$ e $w_3 \leq w_4$ e seja d o grau de g , $d \geq w_1$ e $d \geq w_2$. Então,*

$$(i) \ m_0(f(\Sigma^{(2,1)}(f))) = \sum_{\rho=1}^4 \prod_{v=1}^4 \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \rho}}^4 \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) + 1.$$

$$(ii) \ m_1(f(\Sigma^{(2,1)}(f))) = \sum_{\rho=2}^4 \prod_{v=1}^4 \left(\frac{D_\rho}{w_v} - 1 \right) \prod_{\substack{\kappa=2 \\ \kappa \neq \rho}}^4 \left(\frac{1}{\frac{D_\rho}{D_\kappa} - 1} \right) \left[\prod_{\mu=2}^4 \left(\frac{1}{\frac{D_\mu}{D_1} - 1} \right) - 1 \right] +$$

$$(d - w_3)(d - 2w_3)(d - w_3 - w_4) + (d - w_3)(d - 2w_3)(2d - 2w_3 - 3w_4) +$$

$$(d - w_3)(d - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4) + (d - w_3 - w_4)(d - 2w_4)(2d - 2w_3 - 3w_4) + 2,$$

$$\text{com } D_1 = w_1, \ D_2 = 2(d - w_3 - w_4), \ D_3 = d - w_3 \text{ e } D_4 = d - w_4.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Arnol'd, V. I., *Singularities of Smooth Mapping*, Russian Math. Surveys (1968) 1-43. Translate from Uspehi Math. Nauk 23 (1968).
- [2] Arnol'd, V. I., Varchenko and Gusein-Zade, S., *Singularities of differentiable maps*, vol. I, Monographs in Mathematics, 82 (Birkhauser, 1985).
- [3] Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts (1969).
- [4] Bivià-Ausina, C. and Nuño Ballesteros, J.J., *Multiplicity of iterated Jacobian extensions of weighted homogeneous map germs*, Hokkaido math. J., vol. 29 (2000), p. 341-368.
- [5] Bivià-Ausina, C., Fukui, T. and Saia, M.J., *Newton filtrations, graded algebras and codimension of non-degenerate ideals*, Math Proc. Camb. Phil. Soc. 133 (2002), p. 55-75.
- [6] Boardman, J., *Singularities of differentiable maps*, Inst. Hautes Études Sci. Publi. Math. 33 (1967), 21-57.
- [7] Damon, J., *Nonlinear sections of nonisolated complete intersections*, Kluwer Academic Publishers, (2001).
- [8] Damon, J. and Mond, D., *$\mathcal{A}$ -codimension and the vanishing topology of discriminants*, Invent. Math. 106 (1991), p. 217-247.
- [9] Eagon, J. A. and Northcott, D. G., *Ideals defined by matrices and certain complex associated with them*, Proc. Royal Soc. London Ser. A (1962), 188-204.
- [10] Eisenbud, D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 150, (1994).

- [11] Fukui, T., Nuño Balesteros J.J and Saia M.J., *On the number of singularities of generic deformations of map germs*, J. of The London Mathematical Society, London (2) 58 (1998), p. 141-152.
- [12] Fulton, W., *Intersection Theory*, Springer Verlag, (1984).
- [13] Gaffney, T., *Polar Multiplicities and Equisingularity of Map Germs*, Topology, vol.32, No.1 (1993), p.185-223.
- [14] Gaffney, T., *Plane Sections, W_f and A_f* , in *Real Complex Singularities*, edited by Bruce, J. W. and Tari, F.; Research Notes in Mathematics 412 (2000), Chapman and Hall.
- [15] Gaffney, T., *L^0 -equivalence of Maps*, Math Proc. Camb. Phil. Soc. 128 (2000), p. 479-496.
- [16] Gaffney, T., *Properties of Finitely Determined Germs*, Ph.D Thesis, Brandeis University, (1975).
- [17] Gaffney, T., *Multiplicities and Equisingularities of I.C.I.S Germs*, Invent. Math. 123 (1996), p. 200-220.
- [18] Gaffney, T. and Gassler, R., *Segre Numbers and Hypersurfaces Singularities*, Algebraic Geometry 08 (1999), p. 695-736.
- [19] Gaffney, T. and Kleiman, S.L., *W_f and Integral Dependence*, in *Real and Complex Singularities*, edited by Bruce, J.W. and Tari, F.; Research Notes in Mathematics 412 (2000), Chapman and Hall.
- [20] Gaffney, T. and Massey, D., *Trends in Equisingularity Theory in Singularity Theory*, edited by Bruce, J.W. and Mond, D., Cambridge University Press, (1999).
- [21] Gaffney, T. and Mond, D.M.Q., *Weighted homogeneous maps from the plane to the plane*, Math Proc. Camb. Phil. Soc. 109 (1991), p. 451-470.
- [22] Gaffney, T. and Vohra, R., *A numerical characterization of equisingularity for map germs from n -space, ($n \geq 3$), to the plane*. J. Dyn. Syst. Geom. Theor. 2 (2004), 43–55. 58K20 (32S15).
- [23] Gibson, C.G., *Singular points of smooth mappings*, Pitman Publishing - London (1979), ISBN: 0 273 084 10 0.

- [24] Golubitsky, M. and Guillemin, V., *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer-Verlag, (1973).
- [25] Goryunov, V.V., *Semi-simplicial resolutions and homology of images and discriminants of mappings*, Proc. London Math. Soc. 3, 70, p.363-385, (1995).
- [26] Greuel, G.M. and Hamm, H.A., *Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte*, Invent. Math. 49, p.67-86, (1978).
- [27] Jorge Pérez, V. H., *Polar Multiplicities and Equisingularity of Maps Germs from $\mathbb{C}^3$ to $\mathbb{C}^3$* , Houston Journal of Mathematics, 29 n.04, (2003), p.901-923.
- [28] Jorge Pérez, V. H. and Saia, M., *Polar Multiplicities and Equisingularity of Maps Germs from $\mathbb{C}^3$ to $\mathbb{C}^4$* , Real and Complex Singularities, Proceedings of the VI Workshop at São Carlos, Eds. Mond. D. and Saia, M.J., Lecture Notes Series in Pure and Applied Maths, Marcell-Decker, (2003), p.207-226.
- [29] Jorge Pérez, V. H. and Saia, M.J., *Euler Obstruction, polar multiplicities and equisingularity of maps germs in $\mathcal{O}(n, p)$, com $n < p$* . Preprint (2004).
- [30] Jorge Pérez, V. H., *Weighted homogeneous map germs of corank one from $\mathbb{C}^3$ to $\mathbb{C}^3$ and polar multiplicities*, Proyecciones, vol. 21, n.3, (2002), p.245-259.
- [31] Kirk, N. P., *A maple package for singularity theory*, version 3.1, Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool,(1998).
- [32] Lê, D.T., *Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection*, Funktsional'ny: Analizi Ego Prilozheniya, vol.8, no.2 (1974), p.45-49.
- [33] Lê, D.T. and Tessier, B., *Cycles Evanescents, Sections Planes et Conditions de Whitney*, II Proc. Symposia Pure Math., vol.40, part 2, Amer. Math. Soc., (1983), p.65-104.
- [34] Levcovitz, D., Jorge Pérez, V. H. and Saia, M., *Invariants, equisingularity and Euler obstruction*. Preprint (2004).
- [35] Lipman, J., *Equimultiplicity, Reduction and Blowing Up*, Lecture Notes Pure Appl. Math. 68, Marcel Dekker, New York, (1982).

- [36] Looijenga, E. J. N., *Isolated singular points on complete intersections*, London Mathematical Soc., Lecture Note series, 77, (1984).
- [37] Marar, W. L., Montaldi, J. A. and Ruas, M. A. S., *Multiplicities of zero-schemes in quasi-homogeneous corank-1 singularities $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$* , Singularity Theory (Liverpool 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., 263, p. 353-367, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1999).
- [38] Massey, D., *Le Cycles and Hypersurface Singularities*, Springer Lecture Notes in Mathematics, No.1615, (1995).
- [39] Massey, D., *Numerical invariants of perverse sheaves*, Duke Math. Journal, 73(1994), #2, p. 307-369.
- [40] Mather, J.N., *Stability of C^∞ Mappings, IV: Classification of Stable Germs by R-Algebras*, Publ. Math. I.H.E.S., 37 (1969), p. 223-248.
- [41] Mather, J.N., *Stability of C^∞ Mappings, IV: Transversality*, Advanced Mathematics 4 (1970).
- [42] Matsumura, H., *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8, Cambridge University Press (1986).
- [43] Mather, J. N., *Stability of C^∞ Mappings, III: Finitely Determined Maps Germs*, Publ. Math. I.H.E.S., 35 (1968), p. 127-156.
- [44] Mond, D., *The number of vanishing cycles for a quasihomogeneous mapping from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$* , Quart. J. Math., Oxford (2), 42 (1991), p. 335-345.
- [45] Morin, B., *Calcul Jacobian*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 8, 1-98, (1975).
- [46] Mumford, D., *Introduction to Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, (1976).
- [47] Nuño Ballesteros, J.J. and Saia, M.J., *Multiplicity of Boardman strata and deformations of map germs*, Glasgow Mathematical Journal, 40 (1998), p.21-32.
- [48] Rizziolli, E.C., *Variedades de Thom-Boardman, ideais jacobianos e singularidades de aplicações diferenciáveis*, Dissertação de Mestrado, Orientador: Dr. Marcelo José Saia, ICMC (2001).
- [49] Ruas, M. A. S., *On the equisingularity of families of corank 1 generic germs*, Contemporary Mathematics, vol. 161, p.113-121, (1994).

- [50] Silveira, M.R., *Invariantes de germes do plano no plano*, Dissertação de Mestrado, Orientador: Dra. Roberta Godoi Wik Atique, ICMC (2004).
- [51] Tessier, B., *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Singularités à Cargèse 1972, Asterisque, (1973) 7-8, 285-362.
- [52] Tessier, B., *Introduction to Equisingularity Problems*, Proceedings of Symposia in Pure Math., vol 29, (1981), p.593-631p..
- [53] Tessier, B., *Variétés Polaires 2: Multiplicités Polaires, Sections Planes, et Conditions de Whitney*, Actes de la conference de géometrie algébrique ála Rábida, Springer Lecture Notes, 961 (1981), p.314-491.
- [54] Verdier, J. L., *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Invent Math. 36 (1976), p.295-312.
- [55] Wall, C.T.C., *Finite Determinancy of Smooth Map Germs*, Bull. London Math. Soc. 13 (1981), p. 481-539.
- [56] Wall, C.T.C., *Lectures on C^∞ -Stability and Classifications*, Springer Lecture Notes in Mathematics, No.192 (1971), p. 178-206.