Teoria de oscilações para equações diferenciais em medida

Marielle Aparecida Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-MAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Marielle Aparecida Silva

Teoria de oscilações para equações diferenciais em medida

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson
Braz Federson

Coorientadora: Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

USP – São Carlos
Agosto de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586t Silva, Marielle Aparecida
Teoria de oscilações para equações diferenciais em
medida / Marielle Aparecida Silva; orientadora
Márcia C. A. B. Federson; coorientadora Marta
Cilene Gadotti. -- São Carlos, 2017.
38 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Não oscilação. 2. Oscilação. 3. Equações
diferenciais em medida. 4. Equações diferenciais
funcionais retardadas. 5. Equações diferenciais
funcionais com argumento avançado. I. Federson,
Márcia C. A. B., orient. II. Gadotti, Marta Cilene,
coorient. III. Título.

Marielle Aparecida Silva

Theory of oscillations for measure differential equations

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson

Coadvisor: Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

USP – São Carlos
August 2017

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sempre iluminar meu caminho e por ter me concedido infinitas graças.

Aos meus pais, Geraldo e Zulmira, fonte inesgotável de amor e carinho, por terem me apoiado em todos os momentos de dificuldade e por acreditarem em mim. Não mediram esforços para que eu pudesse chegar até aqui, sempre acreditaram nos meus sonhos e lutaram por eles juntos comigo. Obrigada por tudo. Esta conquista também é de vocês.

Ao meu irmão-pai, Daniel Gedder, por ser minha maior inspiração, por acreditar em mim e em meu potencial. Sempre à frente abrindo portas para mim, facilitando a minha chegada. Cada conquista minha, é sua. Obrigada por tudo que fez por mim. Obrigada por sempre ter me apoiado e incentivado meus estudos.

Ao meu namorado, Victor Simões Barbosa, por ter deixado a caminhada mais fácil e prazerosa. Dentre tudo que a Matemática me proporcionou, conhecer você, certamente, foi o melhor. Obrigada por ter dedicado boa parte do seu tempo à mim. Obrigada por me ajudar nas disciplinas e em todas as outras dificuldades que surgiram no Mestrado. Você deixou tudo mais leve.

Aos amigos do ICMC, por participarem dessa complicada caminhada e por me ajudarem a vencê-la.

À minha coorientadora, Marta Gadotti, por toda contribuição neste trabalho e ao longo do Mestrado.

À minha querida orientadora, Márcia Federson, não apenas pela orientação, mas por toda confiança, paciência e dedicação. Acreditou em mim quando nem eu mesma acreditava. Acreditou em meu potencial como aluna e, principalmente, como pesquisa-

dora. Além de excelente professora e pesquisadora, Márcia é uma pessoa maravilhosa. Tenho muita sorte por ter sido sua orientada. Obrigada por tudo que fez por mim durante o Mestrado.

Por fim, agradeço à FAPESP (processo 2015/12489 – 0) e CAPES pelo apoio financeiro.

*“Não é sobre chegar no topo do mundo
e saber que venceu
É sobre escalar e sentir
que o caminho te fortaleceu”
Ana Vilela*

Resumo

Neste trabalho, apresentamos novos critérios para a existência de soluções oscilatórias e não oscilatórias de equações diferenciais funcionais em medida com impulsos, separando-as em duas classes: equações diferenciais funcionais retardadas e equações diferenciais funcionais com argumento avançado. Tratamos das formas integrais destas equações diferenciais usando as integrais de Perron e Perron-Stieltjes. Assim, as funções envolvidas podem ter muitas descontinuidades e/ou podem ser de variação ilimitada.

Palavras-chave: não oscilação; oscilação; equações diferenciais em medida; equações diferenciais funcionais retardadas; equações diferenciais funcionais com argumento avançado; impulsos; integral de Perron; integral de Perron-Stieltjes.

Abstract

In this work, we present new criteria for the existence of oscillatory and nonoscillatory solutions of measure functional differential equations with impulses, separating them into two classes: delay differential equations and functional differential equations with advanced argument. We deal with the integral forms of the differential equations using the Perron and the Perron-Stieltjes integrals. Thus the functions involved can have many discontinuities and/or they can be of unbounded variation.

Keywords: nonoscillation; oscillation; measure differential equations; delay differential equations; functional differential equations with advanced argument; impulses; Perron integral; Perron-Stieltjes integral.

Sumário

Introdução	I
1 Motivação	1
1.1 Oscilador harmônico	1
1.2 Oscilador linear com atrito	3
1.3 Processo oscilatório amortecido	4
1.4 Processo não oscilatório amortecido	5
2 As integrais de Perron e de Perron-Stieltjes	7
2.1 A integral de Perron generalizada	7
3 Equações diferenciais funcionais em medida com impulsos e avanço	11
3.1 Critério de oscilação	12
3.2 Critério de não oscilação	17
3.3 Exemplos	20
4 Equações diferenciais funcionais em medida com impulsos e retardo	23
4.1 Critério de oscilação	24
4.2 Critério de não oscilação	27
4.3 Exemplos	31
4.4 A equação linearizada de Hutchinson	33
Considerações finais	35
Referências Bibliográficas	37

Introdução

Os estudos apresentados neste trabalho envolvem, primeiramente, equações diferenciais em medida que passamos a descrever a seguir.

Uma equação diferencial do tipo

$$Dx = f(t, x) + g(t, x)Du \quad (1)$$

em que Dx e Du denotam as derivadas distribucionais (quando existirem) das funções x e u no sentido das distribuições de L. Schwartz, é chamada uma *equação diferencial em medida* (ou, abreviadamente, EDM).

O estudo de equações diferenciais em medida teve início com W. Schmaedeke [17], P. Das e R. Sharma [4, 5], datando do fim da década de 60 e início dos anos 70. Desde então, diversos autores se dedicaram a estudar essa nova classe de equações. Citamos, por exemplo, [13, 14, 16], em que são investigadas condições de existência, unicidade e propriedades qualitativas das soluções, além de resultados para equações em espaço de medida abstratos, equações integrodiferenciais, equações diferenciais funcionais em medida, entre outras.

A teoria de equações diferenciais em medida nos permite tratar situações mais gerais do que as equações diferenciais ordinárias (ou, abreviadamente, EDOs) e as EDOs impulsivas. De fato, considere a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta função é localmente integrável no sentido de Lebesgue e define, portanto, uma distribuição. Sua derivada distribucional é dada pela função de Dirac δ (veja [9]). No entanto, a derivada usual de H como função é nula nos pontos em que está definida (isto é, para $x \neq 0$) e, portanto, $\dot{H}(x) = 0$, para todo $x \neq 0$, em que $\dot{H}(x) = \frac{dH}{dx}$.

Neste trabalho, analisamos o comportamento oscilatório e não oscilatório de soluções de equações do tipo (1) em que as funções envolvidas são integráveis no sentido de Perron e Perron-Stieltjes. Os principais resultados obtidos são inéditos e nos dão condições explícitas para oscilação e não oscilação de soluções de equações diferenciais funcionais em medida. Trataremos os casos em que as equações admitam efeitos impulsivos em tempos pré fixados.

Inicialmente, apresentamos uma motivação para o nosso estudo. Um dos objetivos do Capítulo 1 é analisar resultados conhecidos sobre o comportamento oscilatório e não oscilatório de soluções de equações diferenciais ordinárias. Estudamos alguns exemplos clássicos de oscilação, como os osciladores harmônicos, e fazemos uma análise de suas possíveis soluções, no que diz respeito ao comportamento oscilatório.

O Capítulo 2 é dedicado à descrição da teoria básica sobre as integrais de Perron e Perron-Stieltjes. Relembramos as definições destas integrais e damos exemplos que mostram que a integral de Perron é mais geral do que as integrais de Riemann e de Lebesgue. Respectivamente, a integral de Perron-Stieltjes é mais geral que ambas as integrais de Riemann-Stieltjes e Lebesgue-Stieltjes.

O Capítulo 3 já contempla um dos objetivos da dissertação: apresentamos novos critérios de oscilação e não oscilação de soluções para equações diferenciais funcionais em medida com impulsos e avanço. Damos condições suficientes para que as soluções de tais equações oscilem e, também, condições para que exista pelo menos uma solução não oscilatória. Os resultados obtidos generalizam os apresentados em [10], no qual o autor investiga critérios de oscilação e não oscilação de soluções no caso particular em as equações diferenciais não são em medida e as funções envolvidas são contínuas. Apresentamos alguns exemplos.

O objetivo do Capítulo 4 é obter resultados análogos aos apresentados no Capítulo 3 para equações diferenciais funcionais em medida impulsivas com retardo. Apresentamos novos critérios para a existência de soluções oscilatórias e não oscilatórias de equações diferenciais com retardo e impulsos. Alguns exemplos são dados e, também, uma aplicação dos principais resultados obtidos. Os resultados deste capítulo estão contidos no artigo [6], que se encontra submetido à publicação.

Motivação

O conteúdo deste capítulo se refere à teoria básica de oscilação de soluções de equações diferenciais ordinárias. Apresentamos exemplos clássicos de oscilação e não oscilação de soluções de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A principal referência utilizada foi [1].

1.1 Oscilador harmônico

Em Física, um oscilador harmônico é qualquer sistema que apresenta movimento harmônico de oscilação. É dito *oscilador* pelo fato de alguma entidade física oscilar, isto é, mover-se de algum modo, num movimento de vai e vem, em torno de uma posição central. Chama-se *harmônico* por ser o seu movimento caracterizado e descrito por uma função harmônica do tempo, isto é, uma função contínua que satisfaz a equação de Laplace.

Um oscilador harmônico corresponde a um sistema que, quando tirado da posição de equilíbrio, apresenta uma força restauradora F proporcional ao deslocamento x de acordo com a *Lei de Hooke*

$$F = -kx,$$

em que k é uma constante positiva, conhecida como constante elástica. Se F for a única força atuando no sistema, ele será chamado de *oscilador harmônico simples*. Assim,

como o oscilador harmônico simples é isolado de forças externas, a única força que age sobre o sistema é a força elástica da mola.

Usando a 2ª Lei de Newton, obtemos

$$F = ma = -kx,$$

em que m é a massa do corpo em questão e a é a sua aceleração. Como $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, podemos escrever

$$m\ddot{x} = -kx,$$

isto é,

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Fazendo $w_0^2 = \frac{k}{m}$, obtemos a equação diferencial usual de um oscilador harmônico simples dada por

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0. \quad (1.1)$$

A solução geral da equação diferencial (1.1) é dada por

$$x(t) = A \cos(w_0 t) + B \sin(w_0 t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

em que A e B são constantes.

Note que toda solução da equação diferencial (1.1) é oscilatória. Vejamos, a seguir, os gráficos de algumas soluções particulares de (1.1).

Figura 1.1: Soluções particulares de (1.1).

1.2 Oscilador linear com atrito

Nesta seção, discutiremos sistemas não conservativos e assumiremos atrito linear, isto é, a força de atrito é proporcional à velocidade $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. A equação deste tipo de movimento do oscilador harmônico é linear e é dada por

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (1.3)$$

em que b é o coeficiente de atrito.

Se fizermos $\frac{b}{m} = 2h$ e $\frac{k}{m} = w_0^2$, então (1.3) pode ser reescrita como

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + w_0^2x = 0. \quad (1.4)$$

A solução geral da equação (1.4) é dada por

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

A equação característica de (1.4) é

$$\lambda^2 + 2h\lambda + w_0^2 = 0, \quad (1.6)$$

com discriminante $\Delta = 4h^2 - 4w_0^2 = 4(h^2 - w_0^2)$.

Sejam λ_1 e λ_2 as raízes da equação (1.6). Valem as seguintes afirmações:

- Se $h^2 \geq w_0^2$, então λ_1 e λ_2 serão números reais.
- Se $h^2 < w_0^2$, então λ_1 e λ_2 serão números complexos.

Portanto, de acordo com o sinal de $h^2 - w_0^2$, obtemos dois tipos de soluções e, consequentemente, dois processos, a saber:

- Para $h^2 < w_0^2$, temos um processo oscilatório amortecido.
- Para $h^2 \geq w_0^2$, temos um processo não oscilatório amortecido.

Ressaltamos que um sistema será dito *oscilatório amortecido*, quando existir uma força de atrito que contraria o movimento. Nessa situação, a frequência de oscilações será menor que no oscilador sem amortecimento.

1.3 Processo oscilatório amortecido

Em qualquer movimento oscilatório real, a energia mecânica é dissipada, graças à existência de forças de atrito. Um corpo suspenso por uma mola, ou um pêndulo, terminam em repouso, quando oscilam sozinhos. O movimento é amortecido quando a energia mecânica decresce com o tempo.

Considere a equação diferencial (1.4) e sua equação característica (1.6). Já vimos que se $h^2 < w_0^2$, teremos um processo oscilatório amortecido. Fazendo $w_1^2 = w_0^2 - h^2$, a solução geral (1.5) da equação diferencial (1.4) torna-se

$$x(t) = e^{-ht}(A \cos(w_1 t) + B \sin(w_1 t)) = K e^{-ht} \cos(w_1 t + \alpha), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Se, no instante $t = 0$, tivermos $x = x_0$ e $\dot{x} = \dot{x}_0$, então as constantes na solução geral (1.7) serão $A = x_0$, $B = \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{w_1}$, $K^2 = A^2 + B^2$ e $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{B}{A}$. De fato, se $t = 0$, então

$$x(0) = x_0 = e^{-h \cdot 0}(A \cos(0) + B \sin(0)).$$

Assim, $x_0 = A$. Também temos a igualdade

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -he^{-ht}(A \cos(w_1 t) + B \sin(w_1 t)) \\ &\quad + e^{-ht}(-Aw_1 \sin(w_1 t) + Bw_1 \cos(w_1 t)). \end{aligned}$$

Logo $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = -hA + Bw_1$, ou seja, $B = \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{w_1}$.

Note que, por (1.7), temos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-ht}(A \cos(w_1 t) + B \sin(w_1 t)) \\ &= e^{-ht} \left(A \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(w_1 t) + B \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(w_1 t) \right) \\ &= e^{-ht} \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(w_1 t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(w_1 t) \right). \end{aligned}$$

Então, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} x(t) &= K e^{-ht} (\cos(\alpha) \cdot \cos(w_1 t) + \sin(\alpha) \cdot \sin(w_1 t)) \\ &= K e^{-ht} \cos(w_1 t + \alpha), \end{aligned}$$

em que $K = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{B}{A}$.

Se considerarmos $K = h = w_1 = 1$ e $\alpha = \pi$, obtemos o gráfico seguinte.

Figura 1.2: Gráfico de uma solução oscilatória amortecida de (1.7).

1.4 Processo não oscilatório amortecido

Nesta seção, analisaremos o caso em que as raízes da equação característica (1.6) são reais, isto é, quando $h^2 > w_0^2$. Fazendo $q^2 = h^2 - w_0^2$, obtemos a solução geral da equação diferencial (1.4)

$$x(t) = e^{-ht}(Ae^{qt} + Be^{-qt}), \quad t \in \mathbb{R},$$

em que A e B são constantes determinadas pelas condições iniciais do sistema.

Introduzindo as notações $\lambda_1 = -h + q = -q_1$ e $\lambda_2 = -h - q = -q_2$, em que $q_2 > q_1 > 0$, obtemos

$$x(t) = Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}. \quad (1.8)$$

Se $t = 0$, $x = x_0$ e $\dot{x} = \dot{x}_0$, então

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} + \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{q_1 - q_2} e^{-q_2 t}. \quad (1.9)$$

Independentemente das condições iniciais, o movimento é amortecido, visto que $q_1 > 0$ e $q_2 > 0$ e, portanto, quando $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 0$.

Vamos mostrar que o movimento não pode ser oscilatório. Para isso, considere os instantes t_1 e t_2 para os quais x e $\dot{x}$ tornam-se respectivamente iguais a zero. De (1.9), deduzimos as seguintes equações para t_1 e t_2 :

$$e^{(q_2-q_1)t_1} = \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} = 1 - \frac{x_0(q_2 - q_1)}{\dot{x}_0 + q_2 x_0}$$

e

$$e^{(q_2-q_1)t_2} = \frac{q_2(\dot{x}_0 + q_1 x_0)}{q_1(\dot{x}_0 + q_2 x_0)} = 1 + \frac{\dot{x}_0(q_2 - q_1)}{q_1(\dot{x}_0 + q_2 x_0)}.$$

Cada uma destas equações tem somente uma raiz. Assim, um processo de oscilação amortecida não ocorre. Estamos, portanto, lidando com um processo não oscilatório.

Neste capítulo, destacamos aspectos gerais de oscilação e não oscilação de soluções de equações diferenciais ordinárias em que as funções envolvidas são contínuas. Conseguimos, com facilidade, analisar o comportamento oscilatório das soluções e dizer quando as equações diferenciais possuem, ou não, soluções oscilatórias. Queremos, agora, estudar o caso em que as funções envolvidas não sejam bem comportadas como as expostas neste capítulo e, também, o caso em que as equações diferenciais não sejam ordinárias. Este estudo é feito nos Capítulos 3 e 4.

O capítulo seguinte é dedicado ao estudo da integral de Perron generalizada, que será nossa ferramenta de trabalho.

As integrais de Perron e de Perron-Stieltjes

Neste capítulo, apresentamos a teoria básica sobre as integrais de Perron e de Perron-Stieltjes, necessária para o estudo dos capítulos seguintes. O conteúdo deste capítulo se baseia na referência [18].

2.1 A integral de Perron generalizada

Seja $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo, com $-\infty < a < b < \infty$. Um par (τ, J) de um ponto $\tau \in \mathbb{R}$ e um intervalo compacto $J \subset \mathbb{R}$ é chamado um intervalo marcado, e τ é a marca de J .

Uma coleção finita $D = \{(\tau_j, J_j); j = 1, 2, \dots, |D|\}$ de intervalos marcados será chamada um sistema em $[a, b]$, se $\tau_j \in J_j \subset [a, b]$, para cada $j = 1, 2, \dots, |D|$, e os intervalos J_j não estiverem sobrepostos, isto é, $Int(J_i) \cap Int(J_j) = \emptyset$ para $i \neq j$, em que $Int(J)$ denota o interior do intervalo J . Usamos a notação $|D|$ para denotar o número de subintervalos J_j de $[a, b]$. Em particular, um sistema $D = \{(\tau_j, J_j); j = 1, 2, \dots, |D|\}$ será chamado uma partição de $[a, b]$, se $\bigcup_{j=1}^{|D|} J_j = [a, b]$.

Dada uma função positiva $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$, chamada calibre em $[a, b]$, um intervalo marcado (τ, J) será dito δ -fino, se $J \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$. Mais geralmente, um sistema (em particular, uma partição) $D = \{(\tau_j, J_j); j = 1, 2, \dots, |D|\}$ será δ -fino, se (τ_j, J_j) for δ -fino, para cada $j = 1, 2, \dots, |D|$.

Definição 2.1.1. Uma função $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ será chamada *Kurzweil integrável* ou *Perron generalizada integrável* sobre $[a, b]$, se existir um número $I \in \mathbb{R}$ tal que dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a, b]$ tal que

$$\left| \sum_{j=1}^{|D|} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - I \right| < \epsilon$$

para cada partição δ -fina $D = \{\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]; j = 1, \dots, |D|\}$ de $[a, b]$.

O número real I da Definição 2.1.1 é chamado integral de Kurzweil ou integral de Perron generalizada de U sobre o intervalo $[a, b]$ e denotamos por $\int_a^b DU(\tau, t)$.

A Definição 2.1.1 faz sentido somente se, para um dado calibre δ em $[a, b]$, existir pelo menos uma partição δ -fina D de $[a, b]$. Esta questão fundamental tem uma resposta afirmativa dada pelo resultado seguinte, conhecido como Lema de Cousin (veja [7]).

Lema 2.1.2. Dado um calibre δ em $[a, b]$, existe uma partição δ -fina

$$D = \{\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]; j = 1, \dots, |D|\}$$

de $[a, b]$.

Observação 2.1.3. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e defina $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $U(\tau, t) = f(\tau) t$ para $\tau, t \in [a, b]$. Então

$$\sum_{j=1}^{|D|} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] = \sum_{j=1}^{|D|} f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1})$$

representa uma soma do tipo Riemann para a função f e uma partição D em $[a, b]$. Neste caso, obteremos a integral de Perron se estivermos nas condições da Definição 2.1.1. Mais geralmente, se $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função dada e $U(\tau, t) = f(\tau) g(t)$, $\tau, t \in [a, b]$, então obteremos uma soma do tipo Riemann-Stieltjes

$$\sum_{j=1}^{|D|} f(\tau_j)[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})]$$

para as funções f, g e uma partição D de $[a, b]$. Neste caso, obteremos a integral de Perron-Stieltjes se estivermos nas condições da Definição 2.1.1.

Se $U(\tau, t) = f(\tau) t$, escreveremos simplesmente $\int_a^b f(s) ds$ ao invés de $\int_a^b D[f(\tau) t]$ e, similarmente, para o caso do tipo Stieltjes $U(\tau, t) = f(\tau) g(t)$, usaremos a notação

$\int_a^b f(s)dg(s)$ ao invés de $\int_a^b D[f(\tau)g(t)]$, desde que as integrais de Perron e Perron-Stieltjes existam.

Denotaremos por $K([a, b])$ o conjunto de todas as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que são integráveis no sentido Perron e por $L_1([a, b])$ o conjunto de todas as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que são Lebesgue integráveis.

O resultado seguinte diz que a integral de Perron é mais geral do que a integral de Lebesgue.

Teorema 2.1.4. $L_1([a, b]) \subset K([a, b])$ e as integrais coincidem se $f \in L_1([a, b])$.

A prova deste resultado pode ser encontrada em [15]. Não a incluímos aqui porque são necessários vários lemas e nosso objetivo não é nos aprofundar em teorias de integração.

É do nosso conhecimento que o conjunto das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integráveis, que denotaremos por $R([a, b])$, está contido em $L_1([a, b])$. Assim,

$$R([a, b]) \subset L_1([a, b]) \subset K([a, b]).$$

O exemplo clássico a seguir apresenta uma função $f \in K([a, b]) \setminus L_1([a, b])$.

Exemplo 2.1.5. Seja $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \begin{cases} t^2 \operatorname{sen}(t^{-2}), & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

e seja $f = \dot{F}$. Como f é uma função Riemann imprópria integrável, $f \in K([a, b])$, visto que a integral de Perron contém suas integrais impróprias (veja [12], Extensão de Cauchy). Entretanto $f \notin L_1([a, b])$, uma vez que f não é absolutamente integrável (veja [20]). Note que tanto f quanto F não são de variação limitada.

Observação 2.1.6. Para estender a integral de Perron a funções definidas em $\mathbb{R}$ ou em intervalos não limitados $(-\infty, a]$ ou $[a, \infty)$ precisamos definir as δ -vizinhanças de $-\infty$ e de ∞ . Para isto, tomamos $\delta(-\infty)$ e $\delta(\infty)$ positivos arbitrários e consideramos as vizinhanças $[-\infty, -\frac{1}{\delta(-\infty)})$ e $(\frac{1}{\delta(\infty)}, \infty]$. Com isto, automaticamente, $-\infty$ e ∞ são marcas dos intervalos $[-\infty, -\frac{1}{\delta(-\infty)})$ e $(\frac{1}{\delta(\infty)}, \infty]$ respectivamente em relação a qualquer calibre δ definido em $\overline{\mathbb{R}}$. Assim, ao definirmos a integral de Perron $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, tomamos sempre $f(-\infty) = f(\infty) = 0$ e, portanto, dada uma partição δ -fina de $\overline{\mathbb{R}}$, na soma do tipo Riemann

$$\sum_{j=1}^{|D|} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1})$$

o primeiro e o último somandos são nulos, pois $\tau_1 = -\infty$ e $\tau_{|D|} = \infty$, e convencionamos $0 \cdot \infty = 0$.

O próximo exemplo apresenta uma função $f \in K([a, \infty)) \setminus L_1([a, \infty))$.

Exemplo 2.1.7. Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n, n+1]}(x),$$

em que χ_E representa a função característica de um conjunto mensurável E . Note que

$$f(x) = -1 \chi_{(1,2]}(x) + \frac{1}{2} \chi_{(2,3]}(x) - \frac{1}{3} \chi_{(3,4]}(x) + \cdots$$

e

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) dx = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = -\ln 2.$$

Como existe a integral de Riemann imprópria de f , $f \in K([0, \infty))$. Entretanto,

$$\int_{[0, \infty)} |f| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty.$$

Logo f não é Lebesgue integrável (com integral finita).

Para os próximos capítulos, consideramos equações diferenciais em que os lados direitos são funções Perron ou Perron-Stieltjes integráveis. Isto implica que as funções envolvidas nas equações diferenciais não precisam ser contínuas nem de variação limitada e, ainda assim, conseguimos obter resultados que generalizam todos os existentes.

Equações diferenciais funcionais em medida com impulsos e avanço

Neste capítulo, apresentamos critérios de oscilação e não oscilação de soluções para equações diferenciais em medida impulsivas com argumento avançado. Os resultados deste capítulo são inéditos e generalizam os existentes na literatura. Eles foram baseados na referência [10].

Consideremos $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Em [10], o autor estabelece critérios de oscilação e não oscilação de soluções para equações diferenciais com impulsos do tipo

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = p(t) y(t + \tau), & t \neq t_k, \\ y(t_k^+) - y(t_k) = b_k y(t_k), & k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

em que $\tau > 0$ é uma constante, $y(t_k^+) = \lim_{s \rightarrow t_k^+} y(s)$ e $y(t_k^-) = \lim_{s \rightarrow t_k^-} y(s) = y(t_k)$ e valem as seguintes hipóteses:

- $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ são pontos fixados, com $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.
- $p : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e localmente somável.
- $b_k \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ são constantes, para $k \in \mathbb{N}$.

3.1 Critério de oscilação

Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ será dita *regrada* sempre que os limites laterais

$$\lim_{s \rightarrow t^-} f(s), \quad t \in J \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow t^+} f(s), \quad t \in J$$

fizerem sentido e existirem. Neste caso, escreveremos $f \in G(J, \mathbb{R})$.

Se J for compacto, valem as seguintes propriedades para $G(J, \mathbb{R})$ (veja [8]):

- qualquer função $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada também é regrada.
- qualquer função $f \in G(J, \mathbb{R})$ pode ser aproximada uniformemente por funções escada.

Se $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ for regrada e contínua à esquerda, então escreveremos $f \in G^-(J, \mathbb{R})$.

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Vamos considerar a equação diferencial funcional em medida impulsiva com argumento avançado

$$\begin{cases} Dy = p(t)y(t + \tau)Dg, \\ y(t_k^+) - y(t_k) = b_k y(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $\tau > 0$, $p : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e Dy e Dg denotam as derivadas distribucionais das funções y e g , respectivamente, no sentido de distribuições de L. Schwartz, sob as seguintes hipóteses:

- $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ são pontos fixados, com $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.
- para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_k \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ é constante.
- $g \in \tilde{G}^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$.
- para cada intervalo compacto $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$, a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p(s) dg(s)$ existe.

Observação 3.1.1. Usamos a notação $\tilde{G}^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$ para representar o conjunto de funções $g : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ regradas, contínuas à esquerda e contínuas nos pontos de impulsos t_k , $k \in \mathbb{N}$.

Note que t_0 não é um ponto de impulso, uma vez que não estamos considerando 0 um número natural. A ideia, nesta hipótese, é que não se inicie o processo saltando.

Definição 3.1.2. Uma função $y \in G^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$ será uma solução de (3.1) em $[t_0, \infty)$ se, para quaisquer $s_1, s_2 \in [t_0, \infty)$, tivermos

$$y(s_2) - y(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} p(t)y(t+\tau)dg(t) + \sum_{s_1 < t_k \leq s_2} I_k(y(t_k))$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k(y(t_k)) = y(t_k^+) - y(t_k^-) = y(t_k^+) - y(t_k) = b_k y(t_k),$$

isto é, supomos que y é contínua à esquerda em $t = t_k$ e os limites laterais $y(t_k^+)$ existem, $k \in \mathbb{N}$.

Observação 3.1.3. A integral na Definição 3.1.2 é no sentido de Perron-Stieltjes. Além disso, a Definição 3.1.2 é equivalente a dizer que para $t \neq t_k$, $k \in \mathbb{N}$, $y(t)$ satisfaz a equação diferencial em medida com avanço

$$Dy(t) = p(t)y(t+\tau)Dg(t),$$

quase sempre em $[t_0, \infty)$ (quase sempre no sentido da medida de Lebesgue) e,

$$y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Agora, vamos definir soluções oscilatórias e não oscilatórias de uma equação diferencial em medida e usaremos tal definição nas demonstrações dos principais resultados deste trabalho.

Definição 3.1.4. Uma função $y(t)$ será dita positiva quase sempre no futuro, se existir $T \geq t_0$ tal que $y(t) > 0$, para quase todo $t \geq T$. Analogamente, uma função $y(t)$ será dita negativa quase sempre no futuro, se existir $T \geq t_0$ tal que $y(t) < 0$, para quase todo $t \geq T$.

Definição 3.1.5. Uma solução de (3.1) será dita não oscilatória, se ela for ou positiva quase sempre ou negativa quase sempre no futuro. Uma solução não trivial da equação (3.1) que não é nem positiva quase sempre nem negativa quase sempre no futuro será chamada oscilatória.

Junto com a equação diferencial (3.1), consideramos a seguinte equação diferencial em medida não impulsiva com argumento avançado

$$Dx = P(t)x(t+\tau)Dg \tag{3.2}$$

em que $P(t) = \left[\prod_{t \leq t_k < t+\tau} (1 + b_k) \right] p(t)$, para todo $t \geq t_0$.

Observação 3.1.6. Note que, se $b_k < -1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $y(t_k^+)y(t_k) = (1 + b_k)y^2(t_k) < 0$. Assim, a solução $y(t)$ de (3.1) não será de sinal constante, o que implica que $y(t)$ será oscilatória.

No que segue, vamos assumir $b_k > -1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, devido à Observação 3.1.6.

Definição 3.1.7. Uma função $x \in G^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$ será uma solução da equação (3.2) em $[t_0, \infty)$ se, para quaisquer $s_1, s_2 \in [t_0, \infty)$, tivermos

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} P(t)x(t + \tau)dg(t).$$

Observação 3.1.8. Note que a Definição 3.1.7 é equivalente a dizer que:

$$Dx(t) = P(t)x(t + \tau)Dg(t), \text{ quase sempre em } [t_0, \infty) \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}.$$

Mostraremos, agora, um teorema fundamental que nos permite reduzir as propriedades de oscilação de soluções de (3.1) às propriedades de oscilação de (3.2).

Teorema 3.1.9. Assuma que $g \in \tilde{G}^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$ e que a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p(s)dg(s)$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$. Então (3.1) terá uma solução oscilatória se, e somente se, (3.2) tiver uma solução oscilatória.

Demonstração: Seja $y(t)$ uma solução não oscilatória de (3.1). Sem perda de generalidade, suponhamos que $y(t)$ seja uma solução positiva quase sempre no futuro. Então existirá $T \geq t_0$ tal que $y(t) > 0$ para quase todo $t \geq T$. Pela Observação 3.1.6, podemos assumir $b_k > -1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Defina $x(t) = \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} y(t)$ em $[T, \infty)$ (i.e, x estará definida nos pontos em que y estiver definida). Então $x(t) > 0$ para quase todo $t \geq T$, isto é, $x(t)$ é positiva quase sempre no futuro. Logo, para quase todo $t \geq T$, temos

$$\begin{aligned} Dx(t) - P(t)x(t + \tau)Dg(t) &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} Dy(t) \\ &\quad - P(t) \prod_{T \leq t_k < t + \tau} (1 + b_k)^{-1} y(t + \tau)Dg(t) \\ &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} Dy(t) \\ &\quad - \prod_{t \leq t_k < t + \tau} (1 + b_k)p(t) \prod_{T \leq t_k < t + \tau} (1 + b_k)^{-1} y(t + \tau)Dg(t) \\ &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} [Dy - p(t)y(t + \tau)Dg] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$x(t_k^-) = \prod_{T \leq t_j < t_k} (1 + b_j)^{-1} y(t_k^-) = \prod_{T \leq t_j < t_k} (1 + b_j)^{-1} y(t_k) = x(t_k).$$

Logo $x(t)$ é uma solução não oscilatória da equação diferencial (3.2).

Reciprocamente, sem perda de generalidade, suponha que $x(t)$ seja uma solução positiva quase sempre no futuro de (3.2). Então, existe $T \geq t_0$ de modo que $x(t) > 0$ para quase todo $t \geq T$.

Defina $y(t) = \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)x(t)$ para todo $t \in [T, \infty)$. Então, para quase todo $t \geq T$, temos

$$\begin{aligned} Dy(t) - p(t)y(t + \tau)Dg(t) &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)Dx(t) - p(t) \prod_{T \leq t_k < t + \tau} (1 + b_k)x(t + \tau)Dg(t) \\ &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k) \left(Dx - \prod_{t \leq t_k < t + \tau} (1 + b_k)p(t)x(t + \tau)Dg \right) \\ &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k) (Dx - P(t)x(t + \tau)Dg) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $y(t)$ é uma solução positiva quase sempre de (3.1). ■

Pela prova do Teorema anterior, segue o resultado.

Corolário 3.1.10. *Assuma que $g \in \tilde{G}^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$ e que a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p(s) dg(s)$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$.*

i) *Se $x(t)$ for uma solução de (3.2) em $[\sigma, \infty)$, com $\sigma \geq t_0$, então*

$$y(t) = \prod_{\sigma \leq t_k < t} (1 + b_k)x(t)$$

será uma solução de (3.1) em $[\sigma, \infty)$.

ii) *Se $y(t)$ for uma solução de (3.1) em $[\sigma, \infty)$, com $\sigma \geq t_0$, então*

$$x(t) = \prod_{\sigma \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} y(t)$$

será uma solução de (3.2) em $[\sigma, \infty)$.

O próximo resultado fornece condições suficientes para que todas as soluções de (3.1) oscilem.

Teorema 3.1.11. *Suponha que $g \in \tilde{G}^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$, que a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p(s) dg(s)$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$ e que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau} \prod_{s \leq t_k < s+\tau} (1 + b_k) p(s) dg(s) > 1,$$

em que p e Dg têm o mesmo sinal. Então todas as soluções de (3.1) serão oscilatórias.

Demonstração: Seja $y(t)$ uma solução não oscilatória de (3.1). Sem perda de generalidade, suponha que $y(t)$ seja positiva quase sempre no futuro, isto é, que exista $T \geq t_0$ tal que $y(t) > 0$ para quase todo $t \geq T$. Pelo Teorema 3.1.9, a equação (3.2) também tem uma solução positiva quase sempre, $x(t)$, em $[T, \infty)$. Note que, como $x(t) > 0$ para quase todo $t \geq T$, temos $x(t + \tau) > 0$ quase sempre em $[T, \infty)$, uma vez que $t + \tau > t$. Assim, para quase todo $t \geq T$,

$$Dx(t) = P(t)x(t + \tau)Dg(t) \geq 0,$$

já que, por hipótese, p e Dg têm o mesmo sinal, e

$$P(t) = \prod_{t \leq t_k < t+\tau} (1 + b_k) p(t), \quad t \geq t_0.$$

Portanto $x(t)$ é não decrescente quase sempre em $[T, \infty)$.

Integrando a equação (3.2) de t a $t + \tau$, obtemos, para todo $t \geq T$,

$$x(t) - x(t + \tau) + \int_t^{t+\tau} P(s)x(s + \tau)dg(s) = 0.$$

Daí, como $x(t)$ é não decrescente quase sempre em $[T, \infty)$ temos, para quase todo $t \geq T$,

$$\begin{aligned} 0 &\geq x(t) - x(t + \tau) + x(t + \tau) \int_t^{t+\tau} P(s)dg(s) \\ &= x(t) + x(t + \tau) \left(\int_t^{t+\tau} P(s)dg(s) - 1 \right), \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois, para quase todo $t \geq T$, $x(t) > 0$ e $x(t + \tau) > 0$ e, por hipótese,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau} \prod_{s \leq t_k < s+\tau} (1 + b_k) p(s) dg(s) - 1 > 0,$$

então $\int_t^{t+\tau} P(s)dg(s) - 1 > 0$.

Logo todas as soluções de (3.1) são oscilatórias. ■

Observação 3.1.12. No Teorema 3.1.11, consideramos $y(t)$ uma solução positiva quase sempre no futuro. Se considerarmos $y(t)$ negativa quase sempre no futuro, também chegaremos a um absurdo. De fato, se $y(t)$ for uma solução negativa quase sempre no futuro de (3.1), então pelo Teorema 3.1.9, a equação (3.2) também terá uma solução negativa quase sempre $x(t)$ em $[T, \infty)$. Assim, para quase todo $t \geq T$, vale

$$Dx(t) = P(t)x(t + \tau)Dg(t) \leq 0,$$

que implica que $x(t)$ é não crescente quase sempre em $[T, \infty)$. Daí, integrando a equação (3.2) de t a $t + \tau$ e usando o caráter não crescente quase sempre de x , obtemos, para quase todo $t \geq T$,

$$0 \leq x(t) + x(t + \tau) \left(\int_t^{t+\tau} P(s)dg(s) - 1 \right)$$

o que é um absurdo, pois para quase todo $t \geq T$, $x(t) < 0$ e $x(t + \tau) < 0$ e $\int_t^{t+\tau} P(s)dg(s) - 1 > 0$, por hipótese.

3.2 Critério de não oscilação

Nesta seção, nosso objetivo é obter condições para a existência de pelo menos uma solução não oscilatória da equação diferencial em medida com impulsos (3.1). Nos resultados desta seção, assumiremos p uma função positiva quase sempre e $g(s) = s$. Assim, a equação (3.1) torna-se igual a

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = p(t)y(t + \tau), \\ y(t_k^+) - y(t_k) = b_k y(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.3)$$

satisfazendo as mesmas hipóteses da equação (3.1) que relembramos abaixo:

- $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ são pontos fixados, com $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.
- para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_k \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ é constante e $\tau > 0$ é uma constante.
- para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$, a integral de Perron $\int_a^b p(s) ds$ existe.

Provaremos, agora, um resultado essencial que será utilizado na demonstração do Teorema 3.2.2, o qual fornece condições suficientes para a existência de pelo menos uma solução não oscilatória da equação (3.3).

Lema 3.2.1. *Suponha que a integral de Perron $\int_a^b p(s) ds$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$. Se p for uma função positiva quase sempre e $b_k > -1$, $k \in \mathbb{N}$, então as seguintes afirmações serão equivalentes:*

i) A equação (3.3) tem uma solução não oscilatória.

ii) A equação integral

$$u(t) = P(t) \exp \left(\int_t^{t+\tau} u(s) ds \right) \quad (3.4)$$

tem uma solução não negativa quase sempre em $[T, \infty)$, para algum $T \geq t_0$.

iii) A sequência $\{u_k(t)\}$ de funções Perron integráveis é convergente quase sempre em $[T, \infty)$, para algum $T \geq t_0$, em que

$$\begin{aligned} u_1(t) &= P(t) = \prod_{t \leq t_k < t+\tau} (1 + b_k) p(t), \text{ para quase todo } t \geq T, \\ u_{k+1}(t) &= P(t) \exp \left(\int_t^{t+\tau} u_k(s) ds \right), \text{ para quase todo } t \geq T, \text{ e todo } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $y(t)$ uma solução não oscilatória de (3.3). Pelo Teorema 3.1.9, a equação (3.2) também tem uma solução não oscilatória $x(t)$. Sem perda de generalidade, suponha que $x(t) > 0$ para quase todo $t \geq T \geq t_0$. Defina

$$u(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}, \quad \text{quase sempre em } [T, \infty), \quad (3.5)$$

em que $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, isto é, $u(t)$ está definida nos pontos em que $\dot{x}(t)$ e $x(t)$ existirem.

Afirmamos que $u(t)$ é uma solução de (3.4) em $[T, \infty)$. De fato, integrando (3.5) de t a $t + \tau$, obtemos

$$\int_t^{t+\tau} u(s) ds = \int_t^{t+\tau} \frac{\dot{x}(s)}{x(s)} ds = \ln(x(t + \tau)) - \ln(x(t)) = \ln \left(\frac{x(t + \tau)}{x(t)} \right)$$

e, portanto,

$$\exp \left(\int_t^{t+\tau} u(s) ds \right) = \frac{x(t + \tau)}{x(t)}, \quad \text{para todo } t \geq T.$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.2) pelo inverso de $x(t)$ (quando $x(t) > 0$), obtemos, para quase todo $t \geq T$,

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = P(t) \frac{x(t + \tau)}{x(t)}.$$

Logo $u(t) = P(t) \exp \left(\int_t^{t+\tau} u(s) ds \right)$ para quase todo $t \in [T, \infty)$, o que prova (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja $u(t)$ uma solução de (3.4) em $[T, \infty)$ e suponha que $u(t)$ seja não negativa quase sempre em $[T, \infty)$.

Defina $x(t) = \exp \left(\int_T^t u(s) ds \right)$, para $t \geq T$. Note que $x(t)$ é uma solução positiva quase sempre de (3.2) em $[T, \infty)$. De fato,

$$\dot{x}(t) - P(t)x(t + \tau) = \exp \left(\int_T^t u(s) ds \right) u(t) - P(t)x(t + \tau).$$

Como, por hipótese, $u(t) = P(t) \exp \left(\int_t^{t+\tau} u(s) ds \right)$, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - P(t)x(t + \tau) &= \exp \left(\int_T^t u(s) ds \right) P(t) \exp \left(\int_t^{t+\tau} u(s) ds \right) \\ &\quad - P(t) \exp \left(\int_T^{t+\tau} u(s) ds \right) \\ &= P(t) \exp \left(\int_T^{t+\tau} u(s) ds \right) - P(t) \exp \left(\int_T^{t+\tau} u(s) ds \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Corolário 3.1.10, $y(t) = \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)x(t)$ é uma solução positiva quase sempre de (3.3) em $[T, \infty)$, provando assim (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $u(t)$ uma solução de (3.4) em $[T, \infty)$ e suponha que $u(t)$ seja não negativa quase sempre em $[T, \infty)$. Temos

$$u_1(t) = P(t) \leq P(t) \exp \left(\int_t^{t+\tau} u_1(s) ds \right) = u_2(t) \leq u(t), \text{ para quase todo } t \geq T.$$

Por indução, pode-se provar que

$$u_k(t) \leq u_{k+1}(t) \leq u(t), \text{ para quase todo } t \geq T, \text{ e todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, a sequência $\{u_k(t)\}$ tem um limite pontual $\tilde{u}(t)$ quase sempre em $[T, \infty)$, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = \tilde{u}(t) \leq u(t), \text{ para quase todo } t \geq T,$$

o que prova (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Seja $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u(t)$ para quase todo $t \geq T$. Sabemos que $u_k(t) \leq u(t)$ quase sempre em $[T, \infty)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, $u_k(t)$ são limitadas por uma função não negativa quase sempre em $[t, t + \tau]$ para quase todo $t \geq T$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada para funções Perron integráveis (veja [18]), obtemos (3.4). ■

Teorema 3.2.2. *Suponha que a integral de Perron $\int_a^b p(s) ds$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$ e que $b_k > -1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Se p for uma função positiva quase sempre e existir $T \geq t_0$ tal que, para quase todo $t \geq T$, tivermos*

$$\int_t^{t+\tau} \prod_{s \leq t_k < s+\tau} (1 + b_k) p(s) ds \leq \frac{1}{e}, \quad (3.6)$$

então a equação (3.3) terá uma solução não oscilatória.

Demonstração: Provaremos que (3.6) implica que a afirmação (iii) do Lema 3.2.1 vale e, assim, o resultado seguirá. De (3.6), para quase todo $t \geq T$, temos

$$\int_t^{t+\tau} u_1(s) ds = \int_t^{t+\tau} P(s) ds = \int_t^{t+\tau} \prod_{s \leq t_k < s+\tau} (1 + b_k) p(s) ds \leq \frac{1}{e}.$$

Utilizando a desigualdade acima, obtemos, para quase todo $t \geq T$,

$$u_2(t) = P(t) \exp \left(\int_t^{t+\tau} u_1(s) ds \right) \leq P(t) \exp \left(\frac{1}{e} \right) \leq P(t) e.$$

Por indução, concluímos que, para quase todo $t \geq T$ e $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned} u_k(t) &\leq u_{k+1}(t) = P(t) \exp \left(\int_t^{t+\tau} u_k(s) ds \right) \leq P(t) \exp \left(e \int_t^{t+\tau} P(s) ds \right) \\ &\leq P(t) e, \end{aligned}$$

o que implica que $\{u_k(t)\}$ é convergente quase sempre em $[T, \infty)$. Logo, pelo Lema 3.2.1, a equação (3.3) tem uma solução não oscilatória. ■

3.3 Exemplos

Para ilustrar os principais resultados deste capítulo, apresentamos os exemplos seguintes.

Exemplo 3.3.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $t_k = \sigma + km\tau$, em que m é um inteiro positivo, $\tau > 0$ e $\sigma > 0$. Assuma que $b_k > -1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e que a integral de Perron $\int_t^{t+\tau} p(s) ds$ exista para todo $t \in [t_0, \infty)$.

Considere a equação diferencial impulsiva (3.1). Como $t_{k+1} - t_k = m\tau$, existe no máximo um ponto de efeito impulsivo em cada intervalo $[t, t + \tau]$, $t \geq \sigma$. Assim, se $t_k \in [t, t + \tau]$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então

$$\int_t^{t+\tau} \prod_{s \leq t_k < s+\tau} (1 + b_k) p(s) ds = (1 + b_k) \int_t^{t+\tau} p(s) ds,$$

e, se $t_k \notin [t, t + \tau]$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$\int_t^{t+\tau} \prod_{s \leq t_k < s+\tau} (1 + b_k) p(s) ds = \int_t^{t+\tau} p(s) ds.$$

Sejam

$$d_1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left[(1 + b_k) \int_t^{t+\tau} p(s) ds \right], \quad t \leq t_k < t + \tau,$$

$$d_2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\tau} p(s) ds.$$

Se $d > 1$, em que $d = \max \{d_1, d_2\}$ então, pelo Teorema 3.1.11, todas as soluções de (3.1) são oscilatórias.

Seja $Q(t) = \max_{t < t_k \leq t+\tau} \left\{ (1 + b_k) \int_t^{t+\tau} p(s) ds \right\}$. Se existir $T \geq t_0$ tal que,

$$Q(t) \leq \frac{1}{e}, \quad t \geq T,$$

então, pelo Teorema 3.2.2, a equação (3.3) terá uma solução não oscilatória em $[T, \infty)$.

Exemplo 3.3.2. Considere a equação

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{t^2} \chi_{[2, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(t) x(t+1), \quad t \in [2, \infty). \quad (3.7)$$

Note que $p(t) = \frac{1}{t^2} \chi_{[2, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(t)$ é uma função positiva quase sempre e Lebesgue integrável em $[2, \infty)$, pois

$$\int_2^\infty p(s) ds = \int_2^\infty \frac{1}{s^2} ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{1}{s^2} ds = \lim_{A \rightarrow \infty} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a integral de Perron $\int_a^b p(s) ds$ também existe para cada subintervalo $[a, b]$ de $[2, \infty)$ (e coincide com a integral de Lebesgue). Além disso,

$$\int_t^{t+1} p(s) ds = \frac{1}{t(t+1)} < \frac{1}{e}, \quad t \geq 2.$$

Dessa forma, a equação (3.7) satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.2 e, portanto, possui uma solução não oscilatória em $[2, \infty)$.

Em particular, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{t^2} \chi_{[2, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(t) x(t+1), & t \in [2, 10), \\ x(10 + \theta) = 4, & \theta \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3.8)$$

A solução de (3.8) é não oscilatória. Observe o gráfico de t por $x(t)$ a seguir, em que $x(t)$ é a solução de (3.8).

Figura 3.1: Solução não oscilatória da equação (3.8).

Equações diferenciais funcionais em medida com impulsos e retardo

Neste capítulo, apresentamos critérios de oscilação e não oscilação de soluções para equações diferenciais diferença em medida com impulsos. Os resultados deste capítulo são inéditos e estão contidos no artigo [6].

Em [3], os autores estabeleceram critérios de oscilação de soluções para equações diferenciais diferença não impulsivas do tipo

$$\dot{x}(t) = -p(t)x(t - \tau),$$

em que $p : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua e τ é uma constante positiva.

Neste capítulo, consideramos o problema impulsivo, dado por

$$\begin{cases} Dy = -p(t)y(t - \tau)Dg, \\ y(t_k^+) - y(t_k) = b_k y(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.1)$$

em que $\tau > 0$, Dy e Dg denotam as derivadas distribucionais das funções y e g no sentido de distribuições de L. Schwartz, sob as seguintes hipóteses:

- $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ são pontos fixados, com $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.
- para cada $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $b_k \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ é constante.
- $g \in \tilde{G}^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$.

- para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$ a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p(s) dg(s)$ existe.

Vamos mostrar que, sob determinadas condições, todas as soluções da equação (4.1) serão oscilatórias. E, também, que sob determinadas condições, a equação (4.1) terá pelo menos uma solução não oscilatória. Estes serão os resultados principais deste capítulo.

4.1 Critério de oscilação

Nesta seção, apresentamos algumas definições importantes e, também, resultados que contribuem para o nosso teorema principal.

Definição 4.1.1. *Uma função $y \in G^-([t_0 - \tau, \infty), \mathbb{R})$ será dita uma solução de (4.1) em $[t_0, \infty)$ se*

$$y(s_2) - y(s_1) = - \int_{s_1}^{s_2} p(t)y(t - \tau)dg(t) + \sum_{t_0 < t_k \leq t} I_k(y(t_k))$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [t_0, \infty)$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k(y(t_k)) = y(t_k^+) - y(t_k^-) = y(t_k^+) - y(t_k) = b_k y(t_k),$$

isto é, supomos que y é contínua à esquerda em $t = t_k$ e os limites laterais $y(t_k^+)$ existem, $k \in \mathbb{N}$.

Observação 4.1.2. A integral na Definição 4.1.1 é no sentido de Perron-Stieltjes. Além disso, a Definição 4.1.1 é equivalente a dizer que, para $t \neq t_k$, $k \in \mathbb{N}$, $y(t)$ satisfaz

$$Dy(t) = -p(t)y(t - \tau)Dg(t),$$

quase sempre em $[t_0, \infty)$, e

$$y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y(t_k)), \quad k \in \mathbb{N},$$

graças ao Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Perron-Stieltjes (veja [18]).

Junto com a equação diferencial (4.1), consideramos a seguinte equação diferencial diferença em medida não impulsiva

$$Dx = -P(t)x(t - \tau)Dg \tag{4.2}$$

em que $P(t) = \left[\prod_{t-\tau \leq t_k < t} (1 + b_k) \right] p(t)$, $t \geq t_0$.

Note que, se $b_k < -1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então a solução $y(t)$ de (4.1) será oscilatória.

Definição 4.1.3. *Uma função $x \in G^-([t_0 - \tau, \infty), \mathbb{R})$ será uma solução da equação (4.2) em $[t_0, \infty)$ se*

$$x(s_2) - x(s_1) = - \int_{s_1}^{s_2} P(t)x(t - \tau)dg(t)$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [t_0, \infty)$.

Observação 4.1.4. Note que a Definição 4.1.3 é equivalente a dizer que

$$Dx(t) = -P(t)x(t - \tau)Dg(t), \text{ quase sempre em } [t_0, \infty).$$

Provaremos, agora, um resultado que nos permite trabalhar tanto com a equação (4.1), quanto com a equação (4.2), no que diz respeito à oscilação de suas soluções.

Teorema 4.1.5. *Assuma que $g \in \tilde{G}^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$ e que a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p(s) dg(s)$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$. Então (4.1) terá uma solução oscilatória se, e somente se, (4.2) tiver uma solução oscilatória.*

Demonstração: Seja $y(t)$ uma solução não oscilatória de (4.1). Sem perda de generalidade, suponha que $y(t)$ seja uma solução de (4.1) positiva quase sempre no futuro. Então existirá $T' \geq t_0$ tal que $y(t) > 0$ para quase todo $t \geq T'$. Em particular, $y(t) > 0$ para quase todo $t \geq T' + \tau$. Assim, $y(t - \tau) > 0$ para quase todo $t \geq T' + \tau = T$. Como $y(t)$ é uma solução não oscilatória de (4.1), temos $b_k > -1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Defina $x(t) = \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)y(t)$ em $[T, \infty)$. Então $x(t) > 0$ para quase todo $t \geq T$, isto é, $x(t)$ é positiva quase sempre no futuro. Observe que, se tivéssemos suposto $y(t)$ negativa quase sempre no futuro, $x(t)$ também seria negativa quase sempre no futuro.

Para quase todo $t \geq T$, temos

$$\begin{aligned} Dx + P(t)x(t - \tau)Dg &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)Dy + P(t) \prod_{T \leq t_k < t - \tau} (1 + b_k)y(t - \tau)Dg \\ &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)Dy \\ &\quad + \prod_{t - \tau \leq t_k < t} (1 + b_k)p(t) \prod_{T \leq t_k < t - \tau} (1 + b_k)y(t - \tau)Dg \\ &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k) [Dy + p(t)y(t - \tau)Dg] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $x(t)$ é uma solução da equação diferencial (4.2).

Reciprocamente, suponha, sem perda de generalidade que $x(t)$ seja uma solução positiva quase sempre no futuro de (4.2). Então existe $T' \geq t_0$ tal que $x(t) > 0$ para quase todo $t \geq T' \geq t_0$ e, assim, $x(t) > 0$ para quase todo $t \geq T' + \tau$. Logo $x(t - \tau) > 0$ para quase todo $t \geq T = T' + \tau$.

Defina $y(t) = \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t)$ em $[T, \infty)$. Para quase todo $t \geq T$, temos

$$\begin{aligned} Dy + p(t)y(t - \tau)Dg &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} Dx + p(t) \prod_{T \leq t_k < t - \tau} (1 + b_k)^{-1} x(t - \tau)Dg \\ &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} \left(Dx + \prod_{t - \tau \leq t_k < t} (1 + b_k) p(t) x(t - \tau)Dg \right) \\ &= \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} (Dx + P(t)x(t - \tau)Dg) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $y(t)$ é uma solução positiva quase sempre de (4.1). ■

Como consequência da demonstração do Teorema 4.1.5, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.1.6. *Assuma que $g \in \tilde{G}^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$ e que a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p(s) dg(s)$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$.*

i) *Se $x(t)$ for uma solução de (4.2) em $[\sigma, \infty)$, com $\sigma \geq t_0$, então*

$$y(t) = \prod_{\sigma \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t)$$

será uma solução de (4.1) em $[\sigma, \infty)$.

ii) *Se $y(t)$ for uma solução de (4.1) em $[\sigma, \infty)$, com $\sigma \geq t_0$, então*

$$x(t) = \prod_{\sigma \leq t_k < t} (1 + b_k) y(t)$$

será uma solução de (4.2) em $[\sigma, \infty)$.

O próximo resultado nos fornece condições suficientes para a oscilação de todas as soluções da equação (4.1).

Teorema 4.1.7. *Suponha que $g \in \tilde{G}^-([t_0, \infty), \mathbb{R})$, que a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p(s) dg(s)$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$ e que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^t \prod_{s-\tau \leq t_k < s} (1 + b_k) p(s) dg(s) > 1$$

em que p e Dg têm o mesmo sinal. Então todas as soluções de (4.1) serão oscilatórias.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $y(t)$ seja uma solução não oscilatória de (4.1). Sem perda de generalidade, podemos assumir que $y(t)$ seja positiva quase sempre no futuro. Então existe $T \geq t_0$ tal que $y(t) > 0$ para quase todo $t \geq T$. Pelo Teorema 4.1.5, a equação (4.2) também terá uma solução positiva quase sempre no futuro $x(t)$ em $[T, \infty)$.

Note que, como $x(t) > 0$ para quase todo $t \geq T$, então $x(t - \tau) > 0$ para quase todo $t \geq T + \tau$ pois, em particular, $t \geq T + \tau$. Assim, para quase todo $t \geq T + \tau$,

$$Dx(t) = -P(t)x(t - \tau)Dg(t) \leq 0,$$

pois, por hipótese, p e Dg têm o mesmo sinal. Portanto $x(t - \tau) \geq x(t)$, para quase todo $t \geq T + \tau$.

Integrando a equação (4.2) de $t - \tau$ a t , obtemos, para todo $t \geq T + \tau$,

$$x(t) - x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t P(s)x(s - \tau) dg(s) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &\geq x(t) - x(t - \tau) + x(t - \tau) \int_{t-\tau}^t P(s) dg(s) \\ &\geq x(t) + x(t - \tau) \left[\int_{t-\tau}^t P(s) dg(s) - 1 \right], \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Logo todas as soluções de (4.1) são oscilatórias. ■

4.2 Critério de não oscilação

Nesta seção, obtemos um critério de não oscilação para a equação diferencial diferença em medida com impulsos (4.1). Nos resultados desta seção, assumiremos p uma função positiva quase sempre e $g(s) = s$, para todo $s \in [t_0, \infty)$. Assim, a equação (4.1) torna-se igual a

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -p(t)y(t - \tau), \\ y(t_k^+) - y(t_k) = b_k y(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.3)$$

satisfazendo as mesmas hipóteses da equação (4.1) que relembramos abaixo:

- $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ são pontos fixados, com $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.
- para cada $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $b_k \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ é constante e $\tau > 0$.

- para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$ a integral de Perron $\int_a^b p(s) ds$ existe.

O próximo resultado é essencial para provar o Teorema 4.2.2 e nos fornece condições equivalentes para a existência de uma solução não oscilatória de (4.3).

Lema 4.2.1. *Suponha que a integral de Perron $\int_a^b p(s) ds$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$. Se p for uma função positiva quase sempre e $b_k > -1$, $k \in \mathbb{N}$, então as seguintes afirmações serão equivalentes:*

i) A equação (4.3) tem uma solução não oscilatória.

ii) A equação integral

$$u(t) = P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t u(s) ds \right) \quad (4.4)$$

tem uma solução não negativa quase sempre em $[T, \infty)$, para algum $T \geq t_0$, em que $P(t) = \prod_{t-\tau \leq t_k < t} (1 + b_k)p(t)$, $t \geq t_0$.

iii) A sequência $\{u_k(t)\}$ de funções Perron integráveis é convergente quase sempre em $[\tilde{T}, \infty)$, para algum $\tilde{T} \geq t_0$, em que

$$\begin{aligned} u_1(t) &= P(t) = \prod_{t-\tau \leq t_k < t} (1 + b_k)p(t), \text{ para quase todo } t \geq T, \\ u_{k+1}(t) &= P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t u_k(s) ds \right), \text{ para quase todo } t \geq T, \text{ e todo } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $y(t)$ uma solução não oscilatória de (4.3). Pelo Teorema 4.1.5, a equação (4.2) também tem uma solução não oscilatória $x(t)$. Sem perda de generalidade, suponha que $x(t) > 0$, para quase todo $t \geq T$, para algum $T \geq t_0$. Defina

$$u(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}, \text{ quase sempre em } [T, \infty), \quad (4.5)$$

isto é, $u(t)$ está definida nos pontos em que $\dot{x}(t)$ e $x(t)$ existirem.

Afirmamos que $u(t)$ é uma solução de (4.4) em $[T, \infty)$ que é não negativa quase sempre. De fato, integrando (4.5) de $t - \tau$ a t , obtemos

$$\int_{t-\tau}^t u(s) ds = \int_{t-\tau}^t -\frac{\dot{x}(s)}{x(s)} ds = -\ln(x(t)) + \ln(x(t-\tau)) = \ln \left(\frac{x(t-\tau)}{x(t)} \right)$$

e, portanto,

$$\exp \left(\int_{t-\tau}^t u(s) ds \right) = \frac{x(t-\tau)}{x(t)}, \text{ para todo } t \in [T, \infty).$$

Multiplicando ambos os lados da equação (4.2) pelo inverso de $-x(t)$ (quando $x(t) > 0$), obtemos

$$-\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = -P(t) \frac{x(t-\tau)}{-x(t)}, \text{ para quase todo } t \in [T, \infty).$$

Logo $u(t) = P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t u(s) ds \right)$ quase sempre em $[T, \infty)$, o que prova (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja $u(t)$ uma solução de (4.4) em $[T, \infty)$ que é não negativa quase sempre.

Defina $x(t) = -\exp \left(-\int_T^t u(s) ds \right)$, para $t \geq T$. Note que $x(t)$ é uma solução negativa de (4.2) em $[T, \infty)$, pois

$$\dot{x}(t) + P(t)x(t-\tau) = -\exp \left(-\int_T^t u(s) ds \right) \cdot (-u(t)) + P(t)x(t-\tau).$$

Como, por hipótese, $u(t) = P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t u(s) ds \right)$, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + P(t)x(t-\tau) &= -\exp \left(-\int_T^t u(s) ds \right) \cdot \left(-P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t u(s) ds \right) \right) \\ &\quad - P(t) \exp \left(-\int_T^{t-\tau} u(s) ds \right) \\ &= P(t) \exp \left(-\int_T^{t-\tau} u(s) ds \right) - P(t) \exp \left(-\int_T^{t-\tau} u(s) ds \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Corolário 4.1.6, $y(t) = \prod_{T \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t)$ é uma solução negativa de (4.3) em $[T, \infty)$, provando assim (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $u(t)$ uma solução de (4.4) em $[T, \infty)$ que é não negativa quase sempre. Então, para quase todo $t \geq T$, para algum $T \geq t_0$, temos

$$u_1(t) = P(t) \leq P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t u_1(s) ds \right) = u_2(t) \leq u(t).$$

Por indução, pode-se provar que

$$u_k(t) \leq u_{k+1}(t) \leq u(t), \text{ para quase todo } t \geq T, \text{ e todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, a sequência $\{u_k(t)\}$ tem um limite pontual quase sempre em $[T, \infty)$, digamos $\tilde{u}(t)$, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = \tilde{u}(t) \leq u(t), \text{ para quase todo } t \geq T,$$

o que prova (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Seja $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u(t)$ para quase todo $t \geq T$, para algum $T \geq t_0$. Sabemos que $u_k(t) \leq u(t)$ quase sempre em $[T, \infty)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, $u_k(t)$ são limitadas quase sempre por uma função não negativa em $[t - \tau, t]$ para quase todo $t \geq T$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada para funções Perron integráveis (veja [18]), obtemos (4.4). ■

Teorema 4.2.2. *Suponha que a integral de Perron $\int_a^b p(s) ds$ exista para cada subintervalo $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$ e que $b_k > -1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Se p for uma função positiva quase sempre e existir $T \geq t_0$ tal que para quase todo $t \geq T$,*

$$\int_{t-\tau}^t \prod_{s-\tau \leq t_k < s} (1 + b_k) p(s) ds \leq \frac{1}{e}, \quad (4.6)$$

então a equação (4.3) terá uma solução não oscilatória.

Demonstração: Vamos provar que (4.6) implica que a afirmação (iii) do Lema 4.2.1 vale. De (4.6), para quase todo $t \geq T$, vale

$$\int_{t-\tau}^t u_1(s) ds = \int_{t-\tau}^t P(s) ds \leq \frac{1}{e}.$$

Temos, para quase todo $t \geq T$,

$$\begin{aligned} u_2(t) &= P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t u_1(s) ds \right) \leq P(t) e^{\frac{1}{e}} \leq P(t) e. \\ u_3(t) &= P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t u_2(s) ds \right) \leq P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t P(s) e ds \right) \\ &= P(t) \exp \left(e \int_{t-\tau}^t P(s) ds \right) \\ &\leq P(t) e. \end{aligned}$$

Para quase todo $t \geq T$ e todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos, por indução,

$$\begin{aligned} u_k(t) &\leq u_{k+1}(t) = P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t u_k(s) ds \right) \\ &\leq P(t) \exp \left(\int_{t-\tau}^t P(s) e ds \right) \\ &\leq P(t) e. \end{aligned}$$

Assim,

$$u_k(t) \leq u_{k+1}(t) \leq P(t) e, \text{ para quase todo } t \geq T,$$

o que implica que a sequência $\{u_k(t)\}$ é convergente quase sempre em $[T, \infty)$ e pelo Lema 4.2.1, a equação (4.3) tem uma solução não oscilatória. ■

4.3 Exemplos

Veremos, nesta seção, alguns exemplos que ilustram os resultados apresentados.

Exemplo 4.3.1. Considere a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} Dy(t) = -t^4 \chi_{[4, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(t) y(t-2) Dg(t), \\ y(t_k^+) - y(t_k) = \frac{1}{2} y(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.7)$$

em que $t \in [4, \infty)$, $g(t) = 2t^3$ e $b_k = \frac{1}{2}$. Suponha que exista no máximo um ponto de efeito impulsivo em cada intervalo $[t - \tau, t)$. Assim, se $t_k \in [t - 2, t)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\int_{t-2}^t \prod_{s-2 \leq t_k < s} (1 + b_k) p(s) dg(s) = (1 + b_k) \int_{t-2}^t p(s) dg(s),$$

e se $t_k \notin [t - 2, t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\int_{t-2}^t \prod_{s-2 \leq t_k < s} (1 + b_k) p(s) dg(s) = \int_{t-2}^t p(s) dg(s).$$

A equação diferencial não impulsiva relacionada à equação (4.7) é

$$Dx(t) = -P(t)x(t-2)Dg(t), \quad (4.8)$$

em que $P(t) = \prod_{t-2 \leq t_k < t} (1 + b_k) p(t) = \frac{3}{2} t^4 \chi_{[4, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(t)$.

Pelo Teorema 4.1.5, o problema impulsivo (4.7) terá solução oscilatória se, e somente se, (4.8) tiver solução oscilatória.

Note que $p(t) = t^4 \chi_{[4, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(t)$ e $Dg(t) = \dot{g}(t) = 6t^2$. Logo p e Dg têm o mesmo sinal. Além disso, $g(t) = 2t^3$ é contínua e, portanto, $g \in \tilde{G}^-([4, \infty), \mathbb{R})$.

Seja $[a, b] \subset [4, \infty)$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b p(s) dg(s) &= \int_a^b s^4 \chi_{[4, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(s) dg(s) \\ &= \int_a^b 6s^6 ds \\ &= \frac{6}{7} (b^7 - a^7). \end{aligned}$$

Logo a integral de Lebesgue-Stieltjes $\int_a^b p(s) dg(s)$ existe e, portanto, existe a integral de Perron-Stieltjes em cada subintervalo $[a, b]$ de $[4, \infty)$. Além disso, vale

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-2}^t \prod_{s-2 \leq t_k < s} (1 + b_k) p(s) dg(s) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-2}^t 9s^6 ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{9}{7} [t^7 - (t-2)^7] \\ &= \frac{9}{7} \limsup_{t \rightarrow \infty} 14t^6 \\ &> 1. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 4.1.7, todas as soluções de (4.7) e (4.8) são oscilatórias.

Exemplo 4.3.2. Considere a equação

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{t^2} \chi_{[3, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(t) x(t-1), \quad t \in [3, \infty). \quad (4.9)$$

Note que $p(t) = \frac{1}{t^2} \chi_{[3, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(t) \geq 0$ não é uma função Riemann integrável, mas é Lebesgue imprópria integrável e, portanto, Perron integrável em $[3, \infty)$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_3^\infty p(s) ds &= \int_3^\infty \frac{1}{s^2} \chi_{[3, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(s) ds = \int_3^\infty \frac{1}{s^2} ds \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_3^A \frac{1}{s^2} ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Além disso, para $t \geq 3$, vale

$$\int_{t-1}^t p(s) ds = \frac{1}{t(t-1)} < \frac{1}{e}.$$

Dessa forma, a equação (4.9) satisfaz as hipóteses do Teorema 4.2.2, e, portanto, possui uma solução não oscilatória.

Agora, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{t^2} \chi_{[3, \infty) \setminus \mathbb{Q}}(t) x(t-1), & t \in [3, 20) \\ x(3 + \theta) = 4, & \theta \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (4.10)$$

A solução de (4.10) é não oscilatória. Observe a Figura 4.1.

Figura 4.1: Solução não oscilatória da equação (4.10).

Na próxima seção, apresentaremos uma aplicação para o resultado sobre oscilação de soluções obtido neste capítulo.

4.4 A equação linearizada de Hutchinson

A teoria exposta nesta seção baseia-se na referência [2].

A equação logística, estudada primeiramente por P. Verhulst no século XIX, é um modelo muito simples, mas de enorme sucesso em dinâmica de populações. Ela descreve a evolução temporal da densidade x (ou número de indivíduos) de uma população, sendo dada por

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K} \right],$$

em que $r > 0$ é a *taxa de crescimento intrínseco*, que reflete a taxa de crescimento da população sob condições ideais, ou seja, condições em que não existe qualquer limitante para o crescimento da população, e $K > 0$ é a chamada *capacidade de suporte da população*, em que efeitos de densidade, tais como competição intraespecífica (entre indivíduos da mesma espécie) por espaço e recursos, levam à saturação do crescimento.

Vamos considerar a equação logística descrita acima não apenas no instante t , mas também em tempos anteriores.

Considere a equação diferencial diferença

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{x(t - \tau)}{K} \right],$$

em que $r > 0$ é a taxa de crescimento intrínseco e $K > 0$ é capacidade de suporte da população. Esta equação é conhecida como *Equação de Hutchinson*.

A equação de Hutchinson é uma equação diferencial com retardo que modela a dinâmica de uma população exibindo dependência de tempos passados. Esta equação é capaz de dar origem a soluções oscilatórias em modelos de uma única espécie. Veja [2].

A equação linearizada de Hutchinson é dada por

$$\dot{x}(t) = -r x(t - \tau), \quad t \geq 0. \quad (4.11)$$

Note que a equação (4.11) é uma equação do tipo (4.1), em que $p(t) = r$, sendo r uma constante positiva, e $g(t) = t$.

Se supusermos a taxa de crescimento intrínseco r não constante, a equação (4.11) englobará casos bem mais gerais que o estudado em [2]. Tal suposição permite que o crescimento populacional possa ser não constante e, assim, $r(t)$ será uma função que avalia a taxa de crescimento de uma população no tempo t . Então a equação (4.11) torna-se

$$\dot{x}(t) = -r(t) x(t - \tau), \quad t \geq 0. \quad (4.12)$$

Seja $t_0 \geq 0$ o tempo inicial. Vamos pedir que a equação (4.12) satisfaça as condições:

- $t \in [0, \infty)$ e $\tau > 0$.
- $r : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função Perron integrável em cada subintervalo $[a, b]$ de $[0, \infty)$.

Pelos resultados apresentados neste trabalho, temos condições de dizer quando as soluções da equação (4.12) serão oscilatórias.

Se considerarmos, por exemplo, a taxa de crescimento de uma população hipotética, como sendo $r(t) = \frac{1}{t^2}$, $\tau = 1$ e $t_0 = 3$, teremos a seguinte equação logística

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{t^2} x(t - 1), \quad t \in [3, \infty). \quad (4.13)$$

Pelo Exemplo 4.3.2, sabemos que a equação (4.13) tem uma solução não oscilatória. Se fizermos $x(3 + \theta) = 4$, $\theta \in [-1, 0]$, isto é, no período entre $t = 2$ e $t = 3$, $x(t) = 4$, então a solução de (4.13), com esta condição, será não oscilatória e, portanto, podemos concluir que o número de indivíduos desta população decresce com o passar do tempo t . (Veja a Figura 4.1).

Considerações finais

Os resultados sobre oscilação e não oscilação, apresentados nos Capítulos 3 e 4, contribuem significativamente para a Teoria de Oscilações de Equações Diferenciais, pois são resultados inéditos.

Em se tratando dos teoremas relacionados a critérios de não oscilação, tanto para equações diferenciais com avanço e impulsos, quanto para equações diferenciais com retardo e impulsos, não conseguimos obter resultados para equações diferenciais em medida e, por isso, tratamos do caso particular em que $g(s) = s$. Pretendemos analisar o caso geral no futuro próximo.

Por outro lado, para critérios de oscilação, conseguimos obter bons resultados, pois tratamos do caso geral em que g pode ser qualquer função regrada, contínua à esquerda e contínua nos pontos de impulsos.

As equações diferenciais estudadas neste trabalho são lineares. Não tivemos tempo de analisar o caso em que as equações diferenciais não são lineares, mas pretendemos fazê-lo em breve. Assim, os resultados apresentados aqui valem somente para equações diferenciais em medida com impulsos lineares. É claro que tais resultados cobrem uma parte significativa de equações.

Os resultados demonstrados no Capítulo 4, foram incluídos no artigo [6], o qual está submetido para publicação.

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Andronow, C. E. Chaikin, *Theory of Oscillations*. English Language Edition Edited Under the Direction of Solomon Lefschetz. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.
- [2] *Delay differential equations and applications*. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the Cadi Ayyad University, Marrakech, September 9-21, 2002. Edited by O. Arino, M. L. Hbid and E. Ait Dads. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, 205. Springer, Dordrecht, 2006.
- [3] Agarwal, Ravi P.; Bohner, Martin; Li, Wan-Tong, *Nonoscillation and oscillation: theory for functional differential equations*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 267. Marcel Dekker, Inc., New York, 2004.
- [4] P. C. Das, R. R. Sharma, On optimal controls for measure delay-differential equations, *J. SIAM Control* 9, (1971), 43-61.
- [5] P. C. Das, R. R. Sharma, Existence and stability of measure differential equations, *Czech. Math. J.* 22(97), (1972), 145-158.
- [6] M. Federson, M. C. Gadotti, M. A. Silva, Oscillation and nonoscillation criteria for impulsive delay differential equations, submetido.
- [7] R. Henstock, *Lectures on the Theory of Integration*, World Scientific, Singapore, 1988.
- [8] C. Höning, *Volterra-Stieltjes Integral Equations*. Functional Analytic Methods: Linear Constraints, Mathematics Studies, v. 16 North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford, 1975.

-
- [9] C. S. Höning, *Teoria das Distribuições*, Métodos Matemáticos da Física. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. (Disponível em: https://www.ime.usp.br/acervovirtual/textos/brasileiros/chaim/teoria_das_distribuicoes/files/teoria_das_distribuicoes.pdf)
 - [10] Y. Jurang, Oscillation of first-order impulsive differential equations with advanced argument. *Computers and Math. Appl.* 42.(10), (2001), 1353-1363.
 - [11] J. Kurzweil, Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, *Czech. Math. J.*, 7(82), (1957), 418-448.
 - [12] P. Y. Lee, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Sci. Singapore, 1989.
 - [13] S. G. Pandit, S. G. Deo, *Differential systems involving impulses*. Lecture Notes in Mathematics, 954, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.
 - [14] J. Persson, Fundamental theorems for linear measure differential equations, *Math. Scand.* 62(1), (1988), 19-43.
 - [15] S. Saks, *Theory of integral*, Hafner Publ. Co., New York, 1937.
 - [16] R. R. Sharma, An abstract measure differential equations, *Proc. Am. Math. Soc.* 32, (1972), 503-510.
 - [17] W. W. Schmaedeke, Optimal control theory for nonlinear vector differential equations containing measures, *J. SIAM Control* 3, (1965), 231-280.
 - [18] Š. Schwabik, *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, Series in Real Anal., vol. 5, 1992.
 - [19] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*. Herman, Paris, 1966.
 - [20] C. Swartz, J. DePree, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1988.