**Geometria local associada à aplicação de Gauss de
hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$**

Maria Carolina Zanardo

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Maria Carolina Zanardo

Geometria local associada à aplicação de Gauss de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO
REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Ana Claudia Nabarro

USP – São Carlos
Junho de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Z27g Zanardo, Maria Carolina
Geometria local associada à aplicação de Gauss de
hipersuperfícies em R^4 / Maria Carolina Zanardo;
orientadora Ana Claudia Nabarro. -- São Carlos,
2020.
107 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Aplicação de Gauss. 2. Hipersuperfícies em R^4 .
3. Família de funções altura. I. Nabarro, Ana
Claudia, orient. II. Título.

Maria Carolina Zanardo

Local geometry associated with the Gauss map of
hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$

Thesis submitted to the Institute of Mathematics and
Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance
with the requirements of the Mathematics Graduate
Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Ana Claudia Nabarro

USP – São Carlos
June 2020

*Este trabalho é dedicado aos meus pais e irmão, pois sem vocês nada faria sentido,
e aos amigos que sempre estiveram ao meu lado.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, acima de tudo, aos meus pais e ao meu irmão, por todo o incentivo e por sempre acreditarem que eu era capaz. Não teria chegado até aqui sem o apoio incondicional da minha família. Obrigada por toda a dedicação, paciência, por vibrarem a cada conquista, por se orgulharem de cada passo dado e por estarem sempre presentes em todos os momentos.

À minha orientadora Ana Claudia, que me acompanhou por toda essa trajetória e nunca desistiu de mim. Obrigada pela dedicação, compreensão e pelas palavras de consolo quando tudo parecia estar perdido.

Meu mais profundo agradecimento à Carmen, que não só me deu lições valiosas sobre matemática como fez com que eu me sentisse querida e acolhida em Valência. Obrigada por todo o carinho! Aproveito para agradecer todas as pessoas maravilhosas que me receberam tão bem em Valência, fazendo com que minha experiência tenha sido inesquecível, não só profissional como também pessoal.

Agradeço aos incríveis professores do ICMC, sempre dispostos a inspirar e incentivar seus alunos. Em especial, gostaria de agradecer à professora Cidinha que, além de ser uma matemática extraordinária, é uma pessoa que é um exemplo a ser seguido por todos.

Não poderia deixar de agradecer a todos os amigos que fizeram parte dessa jornada e que sempre torceram por mim. Gostaria de mencionar alguns: Fer, amigo mais que especial que o doutorado me proporcionou. Dione, uma das melhores pessoas que eu já conheci! Jorge, que me ajudou diversas vezes e também me propiciou muitas risadas! E também todas outras pessoas maravilhosas que o ICMC me deu oportunidade de conhecer: Hellen, Rafa, Ana Maria, Paty, Zé, Alice, Benoît, Victor, Jackson...

Ainda na categoria amigos, queria mencionar uma pessoa que provavelmente está tendo uma síncope por ainda não ter visto seu nome na lista de agradecimentos: Pedro! Não tenho palavras pra agradecer esse gorducho mor que, além de meu amigo, também foi meu *flatmate* e companheiro de viagens, aventuras, risadas, lágrimas, gordices, degustação de vinhos e de cervejas duvidosas. Fica aqui registrado o meu muito obrigada por TUDO! Espero ser recebida com a mais fina prataria quando eu for te visitar.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e pela oportunidade de realizar um doutorado sanduíche na Universitat de València (PPVE 88887.122686/2016-00).

*“Always dream and shoot higher than you know you can do.
Don’t bother just to be better than your contemporaries or predecessors.
Try to be better than yourself.”
(William Faulkner)*

RESUMO

ZANARDO, M. C. **Geometria local associada à aplicação de Gauss de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$** . 2020. 107 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Esta tese é dedicada ao estudo das propriedades geométricas provenientes, principalmente, das singularidades da aplicação de Gauss e das singularidades da família de funções altura em uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^4$. Obtemos caracterizações geométricas de singularidades estáveis da aplicação de Gauss de M , ou seja, singularidades de codimensão menor ou igual a 3, usando singularidades multilocais da função altura em M . Além disso, relacionamos singularidades da função altura sobre M e singularidades da função altura sobre o conjunto parabólico de M , visto como uma superfície em $\mathbb{R}^4$. Também consideramos um caso particular: a hipersuperfície canal de uma curva em $\mathbb{R}^4$, para o qual os resultados são mais precisos e envolvem relações com as singularidades da família de funções altura sobre a curva.

Palavras-chave: Aplicação de Gauss, função altura, conjunto parabólico, hipersuperfície canal, curva.

ABSTRACT

ZANARDO, M. C. **Local geometry associated with the Gauss map of hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$** . 2020. 107 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

This thesis is dedicated to the study of geometric properties derived mostly from the singularities of the Gauss map and from the singularities of the family of height functions on a hypersurface M in $\mathbb{R}^4$. We obtain geometric characterizations regarding stable singularities of the Gauss map of M , that is, singularities which codimension is less than or equal to 3, using multilocal singularities of the family of height functions on M . In addition, we analyse the relation between the singularities of the height function on M and singularities of the height function on the parabolic set of M , seen as a surface in $\mathbb{R}^4$. We also consider a particular case: the canal hypersurface of a curve in $\mathbb{R}^4$, in which the results are more accurate and involve relations with the singularities of the family of height functions on the curve.

Keywords: Gauss map, height function, parabolic set, canal hypersurface, curve.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Conjuntos bifurcação das singularidades A_2, A_3, A_4, D_4^- e D_4^+	38
Figura 2 – (a) Conjunto bifurcação $B(f_a)$ de uma singularidade A_3 e (b) sua seção quando $w = w_0$	48
Figura 3 – (a) Pontos críticos de f_a com a mesma imagem e (b) comportamento de f_a em uma vizinhança de um ponto de cúspide na seção $w = w_0$	49
Figura 4 – Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4 e uma seção quando $u = u_0 < 0$	50
Figura 5 – Seção de $B(f_a)$ e S para $u_0 < 0$	51
Figura 6 – Pontos de interseção, auto interseção e pontos de cúspides das curvas γ e β	53
Figura 7 – Distribuição de máximos e mínimos com a mesma altura na curva β	53
Figura 8 – Comportamento de f_a numa vizinhança de um ponto de rabo de andorinha.	55
Figura 9 – Conjuntos bifurcação das singularidades D_4^- e uma seção com $u \neq 0$	56
Figura 10 – Pontos de interseção e retas nas quais f_a possui pontos críticos na mesma altura.	57
Figura 11 – Seção de $B(f_a)$ e semirreta na qual f_a possui pontos críticos na mesma altura quando $u = u_0 \neq 0$	60
Figura 12 – $C_\gamma(\varepsilon)$ e as curvas dadas por g_ε^+ e g_ε^- em $\mathbb{R}^3$	85
Figura 13 – Curvas e pontos sobre M via família de funções altura	99
Figura 14 – Projeção estereográfica de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ gerada pelas curvas dos exemplo 5.2 (a) e (b), respectivamente	102
Figura 15 – Comportamento do conjunto parabólico em um A_3 não versal.	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Catástrofes elementares para singularidades de codimensão menor ou igual a 3	38
Tabela 2	– Singularidades Lagrangianas estáveis em $\mathbb{R}^3$	40
Tabela 3	– As $\mathcal{G}$ -classes de pares de formas quadráticas.	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	PRÉ-REQUISITOS	25
2.1	Noções básicas da teoria de singularidades	25
2.1.1	<i>Germes e jatos</i>	25
2.1.2	<i>Grupos de Mather e $\mathcal{R}$-determinação</i>	27
2.1.3	<i>Desdobramentos versais</i>	30
2.1.4	<i>Genericidade e transversalidade</i>	32
2.2	Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^n$ e aplicação de Gauss	33
2.3	Família de funções altura em hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$	36
2.4	Catástrofes	37
2.5	Aplicação de Gauss vista como aplicação Lagrangiana	39
2.6	Superfícies regulares em $\mathbb{R}^4$	41
3	CARACTERIZAÇÕES GEOMÉTRICAS DAS SINGULARIDADES DA APLICAÇÃO DE GAUSS	45
3.1	Singularidade A_3 da função altura	47
3.2	Singularidade A_4 da função altura	49
3.3	Singularidade D_4^- da função altura	55
3.4	Singularidade D_4^+ da função altura	59
3.5	Consequências	61
4	GEOMETRIA DO CONJUNTO PARABÓLICO DE UMA HIPER- SUPERFÍCIE EM $\mathbb{R}^4$	63
4.1	Funções altura sobre uma hipersuperfície M e seu conjunto parabólico	64
4.2	Geometria de $\Sigma\Gamma$ visto como uma superfície em $\mathbb{R}^4$	73
5	HIPERSUPERFÍCIE CANAL DE UMA CURVA EM $\mathbb{R}^4$	79
5.1	Curvas em $\mathbb{R}^4$	81
5.1.1	<i>Função altura sobre uma curva em $\mathbb{R}^4$</i>	82
5.1.2	<i>Hipersuperfície canal</i>	83
5.2	Hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ e seu conjunto parabólico	84
5.2.1	<i>Singularidades da aplicação de Gauss de $C_\gamma(\varepsilon)$</i>	87
5.2.2	<i>Singularidades das funções altura sobre $C_\gamma(\varepsilon)$ e sobre γ</i>	90

5.2.3	<i>Geometria do conjunto parabólico de $C_\gamma(\varepsilon)$</i>	92
5.2.4	<i>Fatos interessantes, exemplos e superfícies frontais</i>	98
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	103
	REFERÊNCIAS	105

INTRODUÇÃO

De modo geral, podemos associar os fenômenos estáveis que acontecem na natureza com mudanças imperceptíveis que ocorrem em um certo ambiente. Na matemática, esses fenômenos também aparecem, fazendo com que os primeiros estudos sobre singularidades de aplicações diferenciáveis surgissem na década de 50 com os trabalhos de Hassler Whitney ([WHITNEY, 1955](#)), que serviram de inspiração para o desenvolvimento da teoria de singularidades. A aplicação da teoria de singularidades para o estudo da geometria extrínseca de subvariedades do espaço Euclidiano teve início no final da década de 60, com os trabalhos de René Thom. Thom sugeriu o estudo do contato de subvariedades com objetos degenerados, tais como planos, esferas, retas e círculos. Estes contatos são medidos através das singularidades de algumas funções ou aplicações, como, por exemplo, função altura (mede o contato com n -planos) e função distância ao quadrado (mede o contato com n -esferas). As ideias de Thom foram reformuladas por Ian Porteus e passadas para o seu então aluno de doutorado James Montaldi, que contribuiu significativamente para o estudo da geometria de contato em $\mathbb{R}^n$ (([MONTALDI, 1986a](#); [MONTALDI, 1986b](#); [MONTALDI, 1991](#))).

Nas últimas décadas, a aplicação das técnicas provenientes desta teoria ao estudo das subvariedades do espaço Euclidiano não somente reinterpreto resultados clássicos da geometria diferencial como também permitiu a descoberta de resultados fascinantes sobre esta geometria, tanto do ponto de vista local como do ponto de vista global (ver, por exemplo, ([TARI; BRUCE; GIBLIN, 1995](#)), ([BRUCE; GIBLIN; TARI, 1998](#)), ([MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 2003](#)) e ([JESUS; MORAES; ROMERO FUSTER, 2011](#))).

Um problema clássico na teoria de singularidades é a classificação de aplicações estáveis, que são as aplicações cuja configuração não se altera através de perturbações suficientemente pequenas. Whitney mostrou que as singularidades de uma aplicação estável do plano no plano são as singularidades do tipo dobra ($(x, y) \mapsto (x, y^2)$) e do tipo cúspide ($(x, y) \mapsto (x, y^3 - xy)$). Dada uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, as singularidades da aplicação de Gauss dessa superfície são

precisamente os pontos que formam a curva parabólica. Se a aplicação de Gauss for estável, estes pontos são quase todos pontos do tipo dobra e os pontos de cúspide ocorrem apenas em pontos isolados dessa curva. Dessa forma, a geometria extrínseca de uma superfície em um ponto onde a aplicação de Gauss tem uma singularidade do tipo cúspide se torna muito mais interessante.

O comportamento local de uma superfície genericamente imersa em $\mathbb{R}^3$ em uma vizinhança de um ponto de cúspide da aplicação de Gauss é estudado em (BANCHOFF; GAFFNEY; MCCRORY, 1982), onde os autores obtêm uma lista de dez caracterizações geométricas das cúspides da aplicação de Gauss. Uma caracterização particularmente interessante é obtida através da existência de planos bitangentes.

Motivados por essa ideia, propomos a investigação do comportamento local de uma hipersuperfície M genericamente imersa em $\mathbb{R}^4$ em uma vizinhança de uma singularidade da aplicação de Gauss de M . A aplicação de Gauss de M é definida de maneira análoga à superfícies em $\mathbb{R}^3$: Considerando a imersão $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ de uma hipersuperfície e denotando por $M = \psi(U)$, com $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, denotamos por

$$\begin{aligned}\Gamma : M &\rightarrow S^3 \\ p &\mapsto \Gamma(p)\end{aligned}$$

a aplicação de Gauss de M , onde S^3 é a hiperesfera unitária em $\mathbb{R}^4$ e $\Gamma(p)$ é o vetor unitário normal a M em p . A aplicação de Gauss Γ é singular precisamente no conjunto parabólico de M , denotado por $\Sigma\Gamma$. A imagem do conjunto parabólico $\Sigma\Gamma$ por Γ , ou seja, $\Gamma(\Sigma\Gamma)$, é o objeto em S^3 conhecido como conjunto bifurcação e vamos analisar o comportamento da imersão neste conjunto para detectar a existência de hiperplanos bitangentes em uma vizinhança de uma singularidade de Γ . No caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$, a aplicação de Gauss pode apresentar singularidades do tipo dobras e cúspides. No entanto, no caso de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$, novas singularidades podem surgir. Estamos interessados em fenômenos estáveis e a aplicação de Gauss Γ de M pode ser vista como uma aplicação Lagrangiana estável. Nesse sentido, podemos associar as singularidades de Γ com as singularidades da família de funções altura sobre M , dada por

$$\begin{aligned}H : M \times S^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, v) &\mapsto H(p, v) = \langle p, v \rangle,\end{aligned}$$

uma vez que a aplicação de Gauss é a aplicação catástrofe da família de funções altura. Sendo assim, Γ possui singularidades do tipo dobra (A_2), cúspide (A_3), rabo de andorinha (A_4), umbílico elíptico e hiperbólico ($D_4^\pm$).

Utilizando a abordagem de teoria das catástrofes e algumas técnicas da teoria de singularidades, verificamos a existência de hiperplanos bitangentes em uma vizinhança de $p \in M$, quando p é do tipo A_3 , A_4 ou $D_4^\pm$. Em particular, quando p é do tipo D_4^- , temos a existência de hiperplanos tri-tangentes.

Todo esse estudo é feito no espaço de parâmetros S^3 , que é onde se encontra o conjunto bifurcação $\Gamma(\Sigma\Gamma)$ mencionado anteriormente.

Uma vez que estudamos a geometria de M em vizinhanças de uma singularidade da aplicação de Gauss através da análise do conjunto bifurcação $\Gamma(\Sigma\Gamma)$, levantamos a seguinte questão: O que ocorre na geometria do conjunto parabólico de M , $\Sigma\Gamma$, visto como uma superfície em $\mathbb{R}^4$? Em (NABARRO, 2003), a autora faz uma descrição detalhada das singularidades da função altura sobre uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^4$, mostrando que, genericamente, as singularidades do tipo A_2 ocorrem sobre $\Sigma\Gamma$, as singularidades do tipo A_3 ocorrem sobre uma curva contida em $\Sigma\Gamma$, as singularidades do tipo A_4 são pontos isolados sobre essa curva e as singularidades do tipo $D_4^\pm$ ocorrem em pontos isolado de M . Já em (MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 1995) e (BRUCE; TARI, 2002), os autores dão informações relevantes sobre as singularidades da função altura sobre uma superfície em $\mathbb{R}^4$. O nosso objetivo é relacionar as singularidades do tipo A_k , com $k = 2, 3, 4$, da função altura H_ν sobre M , onde ν é uma direção normal a M , com as singularidades da função altura $\tilde{H}_\nu$ sobre $\Sigma\Gamma \subset M$, onde temos que $\Sigma\Gamma$ é uma superfície suave em $\mathbb{R}^4$. Para isso, escrevemos M localmente como $(x, y, z, f(x, y, z))$, com

$$j^k f(x, y, z) = \sum_{i+j+l=2}^k a_{ijl} x^i y^j z^l,$$

ou seja, consideramos f como sendo um polinômio de grau k sem termos constantes ou lineares. Dessa forma, a função altura H_ν na direção $\nu = (0, 0, 0, 1)$ é dada por $H_\nu(x, y, z) = f(x, y, z)$. Quando H_ν possui uma singularidade do tipo A_k , $k = 2, 3, 4$, o conjunto parabólico $\Sigma\Gamma$ é uma superfície suave em $\mathbb{R}^4$ e pode ser parametrizado de uma forma na qual podemos estudar as singularidades de $\tilde{H}_\nu$ na mesma direção ν obtendo os resultados mostrados na Proposição 4.3. Utilizando conceitos de superfícies em $\mathbb{R}^4$ inicialmente estudados em (LITTLE, 1969), obtemos informações geométricas de $\Sigma\Gamma$ na Seção 4.2.

Como nosso principal objeto de estudo é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$, podemos pensar em um caso particular de hipersuperfície dada pela hipersuperfície canal proveniente de uma curva regular em $\mathbb{R}^4$. Dada uma curva regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a hipersuperfície canal de γ , denotada por $C_\gamma(\varepsilon)$, é dada por

$$C_\gamma(\varepsilon) = \{\gamma(s) + \varepsilon \nu : \nu \in (N_{\gamma(s)}\gamma)_1\},$$

onde o 3-espaço $(N_{\gamma(s)}\gamma)_1$ é o espaço normal unitário de γ no ponto $\gamma(s)$, $s \in I$. Assim, $C_\gamma(\varepsilon)$ nada mais é do que um “blow-up” da curva γ . Quando γ é uma curva regular em $\mathbb{R}^3$, $C_\gamma(\varepsilon)$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e em (ROMERO FUSTER, 1988) a autora mostra que o conjunto parabólico da superfície $C_\gamma(\varepsilon)$ consiste em duas curvas determinadas pelas direções binormais de γ em cada ponto. Esse caso serviu de inspiração para o nosso estudo da geometria da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ de uma curva em $\mathbb{R}^4$. Quando $C_\gamma(\varepsilon)$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$, também conseguimos determinar seu conjunto parabólico $\Sigma_\varepsilon\Gamma$, que é um conjunto de superfícies em $\mathbb{R}^4$. Dessa forma, Exploramos as relações geométricas entre três variedades: curva, superfície e hipersuperfície, todas contidas em $\mathbb{R}^4$.

Essa tese está estruturada da seguinte maneira:

No Capítulo 2, apresentamos conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento do trabalho. Damos uma breve introdução à Teoria de Singularidades, definições e resultados já conhecidos para hipersuperfícies imersas em $\mathbb{R}^4$ e sua aplicação de Gauss e uma noção geral de superfícies regulares em $\mathbb{R}^4$. Além disso, também damos atenção à profunda relação entre aplicação de Gauss, família de funções altura e aplicações Lagrangianas.

No Capítulo 3, estendemos o método desenvolvido em (BANCHOFF; GAFFNEY; MCCRORY, 1982) para o estudo das superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, ao caso das 3-variedades imersas em $\mathbb{R}^4$, obtendo diversas caracterizações geométricas para as singularidades genéricas do tipo cúspide, rabo de andorinha, umbílico elíptico e umbílico hiperbólico da aplicação normal de Gauss sobre as 3-variedades imersas em $\mathbb{R}^4$.

No Capítulo 4, estudamos a geometria do conjunto parabólico $\Sigma\Gamma$ de uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^4$, vista como uma superfície imersa em $\mathbb{R}^4$, através dos seus contatos com hiperplanos. Além do mais, estudamos a relação das singularidades da função altura em M com as singularidades da função altura do seu conjunto parabólico $\Sigma\Gamma$, obtendo algumas informações geométricas interessantes.

Finalmente, no Capítulo 5, estudamos hipersuperfícies especiais, considerando a hipersuperfície canal de uma curva regular em $\mathbb{R}^4$. Através das singularidades de funções altura, relacionamos geometricamente as três variedades intimamente associadas: uma curva regular em $\mathbb{R}^4$, sua hipersuperfície canal e o conjunto parabólico desta hipersuperfície, que é uma superfície regular em $\mathbb{R}^4$.

PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo apresentamos conceitos básicos e resultados já conhecidos na literatura que são necessários ao longo da tese. Várias referências também são informadas caso o leitor queira um maior aprofundamento em determinado assunto.

2.1 Noções básicas da teoria de singularidades

A teoria de singularidades busca compreender o comportamento local perto de um ponto que possui uma certa peculiaridade, também conhecido como ponto singular ou singularidade.

Definição 2.1. Considere U e V subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

- (i) Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é **suave**, ou C^∞ , se esta possui derivadas de ordens arbitrárias em qualquer ponto de U .
- (ii) Dada uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, dizemos que $x \in U$ é um **ponto singular** se a matriz Jacobiana $J(f)$ de f não possui o rank máximo possível em $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, quando $J(f)$ não é sobrejetora e nem injetora em x . Caso contrário, dizemos que x é **regular**.

Nesta seção apresentamos alguns conceitos clássicos da teoria de singularidades. Referências para essa seção são (ARNOLD; GUSEIN-ZADE; VARCHENKO, 1985), (GIBSON, 1979) e (WALL, 1981).

2.1.1 Germes e jatos

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que X e Y são **equivalentes** se existe um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ contendo p tal que $X \cap U = Y \cap U$. Isso define uma relação de equivalência entre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e denotamos a classe de equivalência de X por (X, p) , que é chamada de **germe** de X em p .

Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos tais que $p \in U_1 \cap U_2$. Considere também duas aplicações suaves $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos que $f \sim g$ se existe um aberto $W \subset U_1 \cap U_2$ contendo p tal que $f = g$ em W . Isso define uma relação de equivalência e definimos um **germe de aplicação** em p como uma classe de equivalência dada por essa relação, que denotamos por

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar p como sendo a origem. O conjunto de todos os germes de função suave na origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é dado por

$$\mathcal{E}_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é um germe de função suave}\}.$$

Temos que $\mathcal{E}_n$, dotado das operações de adição e multiplicação, é um anel local. Logo, $\mathcal{E}_n$ possui um ideal maximal, que será denotado por $\mathcal{M}_n$. Este ideal maximal $\mathcal{M}_n$ é o subconjunto dos germes de função que se anulam na origem. Tomando $(x_1, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais de $(\mathbb{R}^n, 0)$, temos que o ideal $\mathcal{M}_n$ é gerado pelos germes de funções x_i , com $i = 1, \dots, n$, ou seja,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Para $k \in \mathbb{Z}_+$, o ideal dado pela k -ésima potência de $\mathcal{M}_n$

$$\mathcal{M}_n^k = \{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}; i_1 + \dots + i_n = k\},$$

é o conjunto de funções $f \in \mathcal{M}_n$ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a $k - 1$ se anulam na origem.

O conjunto de todas os germes de aplicações suaves $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é denotado por $\mathcal{E}_n^m$. Mais ainda, este conjunto é dado pelo produto direto de m cópias de $\mathcal{E}_n$, ou seja,

$$\mathcal{E}_n^m = \underbrace{\mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n}_{m \text{ vezes}}.$$

O **espaço de k -jatos** de germes de aplicações suaves $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ (aqui estamos exigindo que todos os elementos da classe de equivalência tenham a mesma imagem) é definido pelo quociente

$$J^k(n, m) = \frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m}{\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_n^m}.$$

A aplicação $j^k : \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \rightarrow J^k(n, m)$ leva cada germe de aplicação f em seu k -ésimo jato. Um elemento em $J^k(n, m)$ correspondente a um germe de aplicação $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ é denotado por $j^k f$, que é simplesmente o polinômio de Taylor de f de ordem k na origem e sem o termo constante.

Também temos o conceito de multijatos. Considere $\mathbb{R}^{n^s} = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{s \text{ vezes}}$ e $\mathbb{R}^{n^{(s)}} = \{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^{n^s} : x_i = x_j \implies i = j\}$. Assim, para uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, temos sua extensão como multijato:

$$\begin{aligned} {}_s j^k f : \mathbb{R}^{n^{(s)}} &\rightarrow {}_s J^k(n, m) \\ (x_1, \dots, x_s) &\mapsto (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_s)). \end{aligned}$$

2.1.2 Grupos de Mather e $\mathcal{R}$ -determinação

Mather introduziu uma série de grupos que agem em $\mathcal{E}_n^m$. Considere $\mathcal{G}$ um grupo e X um conjunto.

Definição 2.2. Uma **ação** de $(\mathcal{G}, \cdot)$ em X é uma aplicação

$$\begin{aligned}\alpha : \mathcal{G} \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto \alpha(g, x) = g \cdot x\end{aligned}$$

satisfazendo:

1. $\alpha(1, x) = x$, onde 1 é a identidade de $\mathcal{G}$;
2. $\alpha(g \cdot h, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$, para todo $x \in X$ e para todo $g, h \in \mathcal{G}$.

Dada uma ação, podemos introduzir uma relação de equivalência em X da seguinte forma:

$$x \sim y \text{ se, e somente se, existe } g \in \mathcal{G} \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

As classes de equivalência são chamadas **órbitas** sob a ação de $\mathcal{G}$. Denotamos a classe de equivalência que contém x por

$$\mathcal{G} \cdot x = \{ y : y = g \cdot x, g \in \mathcal{G} \}$$

e a chamamos de $\mathcal{G}$ -**órbita** de x .

Estamos interessados nas classes de equivalência que são órbitas da ação de certos grupos que atuam sobre $\mathcal{E}_n^m$. Os principais, conhecidos como **grupos de Mather**, são os usualmente denotados por $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{C}$. Descreveremos aqui apenas os três primeiros.

Considere o grupo $\mathcal{R} := \{ \varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n : \varphi \text{ é germe de difeomorfismo} \}$. A ação deste sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$, por composição à direita

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \times \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m &\rightarrow \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \\ (\varphi, f) &\mapsto \varphi \cdot f = f \circ \varphi^{-1}\end{aligned}$$

é chamada $\mathcal{R}$ -**equivalência**. O grupo $\mathcal{R}$ é também chamado de grupo de mudanças de coordenadas na fonte.

Considere agora o grupo $\mathcal{L} := \{ k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m : k \text{ é germe de difeomorfismo} \}$. A ação deste sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$, por composição à esquerda

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \times \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m &\rightarrow \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \\ (k, f) &\mapsto k \cdot f = k \circ f\end{aligned}$$

é chamada **$\mathcal{L}$ -equivalência**. O grupo $\mathcal{L}$ é também chamado de grupo de mudanças de coordenadas na meta.

Finalmente, o grupo $\mathcal{A} = \{(\varphi, k) : \varphi \in \mathcal{R} \text{ e } k \in \mathcal{L}\}$, é obtido como o produto direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$ e sua ação é definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m &\rightarrow \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \\ ((\varphi, k), f) &\mapsto (\varphi, k) \cdot f = k \circ f \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Definição 2.3. Dizemos que dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ são **$\mathcal{R}$ -equivalentes** (respectivamente, **$\mathcal{L}$ -equivalentes**) se existir $\varphi \in \mathcal{R}$ (respectivamente, $k \in \mathcal{L}$) tal que $f = g \circ \varphi^{-1}$ (respectivamente, $f = k \circ g$).

Definição 2.4. Dizemos que dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ são **$\mathcal{A}$ -equivalentes** se existir $(\varphi, k) \in \mathcal{A}$ tal que $g = k \circ f \circ \varphi^{-1}$. Ou seja, f e g pertencem à mesma $\mathcal{A}$ -órbita.

Em outras palavras, f e $g \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes se existirem germes de difeomorfismos $\varphi \in \mathcal{R}$ e $k \in \mathcal{L}$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ \varphi \downarrow & & \downarrow k \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Quando dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ são $\mathcal{G}$ -equivalentes, usamos a notação $f \sim_{\mathcal{G}} g$.

Podemos definir os espaços tangentes às órbitas obtidas pela ação dos grupos de Mather. Dizemos que um germe de aplicação $\xi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow T\mathbb{R}^m$ é um **germe de campo de vetores ao longo de $f \in \mathcal{E}_n^m$** se $\pi \circ \xi = f$, onde $\pi : T\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. O espaço tangente θ_f a $\mathcal{E}_n^m$ em f é definido como o $\mathcal{E}_n$ -módulo de germes de campos de vetores ao longo de f .

Denotamos por $\theta_n = \theta_{id(\mathbb{R}^n, 0)}$ e $\theta_m = \theta_{id(\mathbb{R}^m, 0)}$, onde $id(\mathbb{R}^n, 0)$ e $id(\mathbb{R}^m, 0)$ representam os germes de aplicação identidade em $(\mathbb{R}^n, 0)$ e $(\mathbb{R}^m, 0)$, respectivamente. Para $f \in \mathcal{E}_n^m$ definimos o $\mathcal{E}_n$ -homomorfismo

$$tf : \theta_n \rightarrow \theta_f, \phi \mapsto df \circ \phi.$$

Considere também o pull-back $f^* : \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_n$ dado por $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$, para todo $\alpha \in \mathcal{E}_m$. Essa aplicação induz o $\mathcal{E}_m$ -homomorfismo

$$wf : \theta_m \rightarrow \theta_f, \psi \mapsto \psi \circ f.$$

Os **espaços tangentes** $L\mathcal{G} \cdot f$ às $\mathcal{G}$ -órbitas de f no germe f são definidos como segue:

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= tf(\mathcal{M}_n \cdot \theta_n), \\ L\mathcal{L} \cdot f &= wf(\mathcal{M}_m \cdot \theta_m) \text{ e} \\ L\mathcal{A} \cdot f &= L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{L} \cdot f. \end{aligned}$$

Também podemos definir os **espaços tangentes estendidos**, para quando estamos fora da origem:

$$\begin{aligned} L_e \mathcal{R} \cdot f &= t f(\theta_n), \\ L_e \mathcal{L} \cdot f &= w f(\theta_m) \text{ e} \\ L_e \mathcal{A} \cdot f &= L_e \mathcal{R} \cdot f + L_e \mathcal{L} \cdot f. \end{aligned}$$

Dado um sistema de coordenadas $(y_1, \dots, y_m)$ em $(\mathbb{R}^m, 0)$, os germes de campos de vetores ao longo de f ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right) \cdot f, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m} \right) \cdot f,$$

formam uma base de θ_f , que por sua vez pode ser identificado com $\mathcal{E}_n^m$ e assim, temos

$$\begin{aligned} L_e \mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{M}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}, & L_e \mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{E}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}, \\ L_e \mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, & L_e \mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{E}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e cada vetor da base é visto como um elemento de $\mathcal{E}_n^m$ e $(x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas em $(\mathbb{R}^n, 0)$.

Definição 2.5. A **codimensão da órbita** de f é definida como

$$\text{cod}(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m}{L\mathcal{G} \cdot f} \right)$$

e a **codimensão da órbita estendida** é dada por

$$\text{cod}_e(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{E}_n^m}{L\mathcal{G} \cdot f} \right).$$

Na teoria de singularidades de germes de aplicações diferenciáveis, uma noção de equivalência é a mudança de coordenadas na fonte e na meta. Uma questão fundamental desta teoria é a seguinte: Existem sistemas de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ nos quais f pode ser escrita na forma de um polinômio de grau k ? Se a resposta é positiva, qual é o menor k que satisfaz esta propriedade? Esse é o conceito de determinação finita.

Definição 2.6. Um germe f é chamado **k - $\mathcal{G}$ -finitamente determinado** se qualquer outro germe g tal que $j^k g = j^k f$ é $\mathcal{G}$ -equivalente à f . O menor inteiro k satisfazendo essa propriedade é chamado de **grau de determinação de f** . Mais ainda, um germe é chamado **$\mathcal{G}$ -determinado** se é k - $\mathcal{G}$ -determinado para algum inteiro k .

Em geral não é simples identificar se um germe de aplicação é finitamente determinado. Em (WALL, 1981), o autor apresenta um resultado que facilita essa identificação.

Teorema 2.1. (WALL, 1981, p. 486) Para todo germe de aplicação f e todo grupo de Mather $\mathcal{G}$ são equivalentes:

- (i) f é $\mathcal{G}$ -determinado;
- (ii) $\mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{E}_n^m \subset L\mathcal{G} \cdot f$, para algum inteiro k ;
- (iii) $\text{cod}(f, \mathcal{G}) < \infty$;
- (iv) $\text{cod}_e(f, \mathcal{G}) < \infty$.

2.1.3 Desdobramentos versais

Introduziremos agora o conceito de desdobramento $\mathcal{G}$ -versal de um germe f . Dizer que f possui um desdobramento $\mathcal{G}$ -versal significa que f pode ser mergulhado em uma família F que depende de um número finito de parâmetros, tal que F possui informações sobre todas as $\mathcal{G}$ -órbitas próximas a f . Ou seja, toda perturbação suficientemente pequena de f é $\mathcal{G}$ -equivalente a algum germe que aparece nessa família.

Definição 2.7. Seja $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$. Um **desdobramento a a -parâmetros** (a, F) de f é o germe de aplicação

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^a, (0, 0))$$

na forma $F(x, u) = (\bar{f}(x, u), u)$, com $\bar{f}(x, 0) = f(x)$. A família

$$\bar{f} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$$

é chamada uma **deformação a a -parâmetros** de f .

Definição 2.8. Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Mather e I a identidade deste grupo.

- (i) Um morfismo entre dois desdobramentos (a, F) e (b, G) é um par $(a, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$ com $\alpha : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathcal{G}, I)$, $\psi : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^b, 0)$ tal que

$$\bar{f}_u = \alpha(u) \cdot \bar{g}_{\psi(u)}.$$

O desdobramento (a, F) é então chamado de **induzido** de (b, G) por (α, ψ) .

- (ii) Dois desdobramentos (a, F) e (b, G) são $\mathcal{G}$ -equivalentes se existe um morfismo $(a, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$ tal que ψ é inversível.
- (iii) Um desdobramento (a, F) de um germe de aplicação f é **$\mathcal{G}$ -versal** se qualquer outro desdobramento (b, G) de f pode ser induzido de (a, F) .

Observação 2.1. A Definição 2.8 também vale para grupos estendidos $\mathcal{G}_e$.

Dado um desdobramento (a, F) de um germe de aplicação $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$, denotamos por $\dot{F}_i$, $i = 1, \dots, a$, o germe de aplicação em $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ dado por

$$\dot{F}_i(x) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i}(x, 0).$$

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para determinar se um germe de aplicação f é $\mathcal{G}$ -versal (ou $\mathcal{G}_e$ -versal).

Teorema 2.2. (WALL, 1981, p. 499) Um desdobramento (a, F) de um germe de aplicação $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ é $\mathcal{G}$ -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{G} \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$$

e $\mathcal{G}_e$ -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{G}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{E}_n^m.$$

Vamos agora nos concentrar no caso quando $m = 1$, ou seja, no caso em que temos germes de funções.

Definição 2.9. A **matriz Hessiana** de um germe de função $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é dada por

$$\text{Hess}(f)(0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right),$$

$i, j = 1, \dots, n$. Se f é singular na origem, dizemos que a singularidade é **não degenerada** se o posto de $\text{Hess}(f)(0)$ é igual a n , ou seja, se, e somente se, $\det(\text{Hess}(f)(0)) \neq 0$.

Teorema 2.3 (Lema de Morse). (GIBSON, 1979, p. 123) Suponha que $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tenha uma singularidade não degenerada. Então f é $\mathcal{R}$ -equivalente à forma quadrática não degenerada

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

Uma deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de um germe $f = F|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$ é chamada de uma **família de germes de funções**. Denotaremos aqui por $\mathcal{R}^+$ o produto direto do grupo $\mathcal{R}$ com translações.

Definição 2.10. Duas famílias de germes de funções F e $G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ são P - $\mathcal{R}^+$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\Psi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0))$ da forma $\Psi(x, u) = (\alpha(x, u), \psi(u))$ e um germe de função $c : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$G(x, u) = F(\Psi(x, u)) + c(u).$$

Assim podemos reescrever o Teorema 2.2 da seguinte forma:

Teorema 2.4. Uma deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de um germe de função $f \in \mathcal{M}_n$ é $\mathcal{R}^+$ -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{R}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{1, \dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{E}_n.$$

A Definição 2.10 pode ser estendida para famílias $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^a, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com $n \neq p$. Adicionamos uma forma quadrática não degenerada $Q(y_{n+1}, \dots, y_{n+p})$ à F e uma forma quadrática não degenerada $Q'(z_{p+1}, \dots, z_{n+p})$ à G e consideramos as duas famílias $F + Q$ e $G + Q'$ como na forma $(\mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^a, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

Apresentamos agora o teorema que será de extrema importância no decorrer do trabalho.

Teorema 2.5. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 62) Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ um germe de função $\mathcal{R}$ -finitamente determinado tal que $1 \leq \text{cod}_e(f, \mathcal{R}) \leq 4$. Então qualquer desdobramento $\mathcal{R}^+$ -miniversal de f (ou seja, que possui o menor número possível de parâmetros para que seja versal) é $\mathcal{R}^+$ -equivalente a um das seguintes famílias de germes, com $Q(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2$:

- (i) $A_2: Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^3 + u_1 x_1,$
- (ii) $A_3: Q(x_2, \dots, x_n) \pm x_1^4 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1,$
- (iii) $A_4: Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^5 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1,$
- (iv) $A_5: Q(x_2, \dots, x_n) \pm x_1^6 + u_4 x_1^4 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1,$
- (v) $D_4^-: Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 - x_1 x_2^2 + u_3(x_1^2 + x_2^2) + u_2 x_2 + u_1 x_1,$
- (vi) $D_4^+: Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 + x_2^3 + u_3 x_1 x_2 + u_2 x_2 + u_1 x_1,$
- (vii) $D_5: Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^2 x_2 + x_2^4 + u_4 x_2^2 + u_3 x_1^2 + u_2 x_2 + u_1 x_1.$

As singularidades no Teorema 2.5 são conhecidas como as **sete catástrofes elementares de Thom**. Veremos mais sobre catástrofes na seção 2.4.

2.1.4 Genericidade e transversalidade

O conceito de genericidade está fortemente relacionado com o conceito de versalidade. Dizemos que uma propriedade é **genérica** em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ se ela se verifica para um conjunto residual (interseção enumerável de conjuntos abertos e densos) de aplicações, onde $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é o conjunto das aplicações C^∞ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$ com a topologia de Whitney (ver página 42 de (GUILLEMIN; GOLUBITSKY, 1973)). A definição mais precisa deste conceito é em termos de resultados de transversalidade e o resultado central neste contexto é conhecido como teorema de transversalidade de Thom.

Definição 2.11. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação C^∞ , $x \in \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade diferenciável. Dizemos que f é **transversal a Y em x** , e representamos por $f \pitchfork Y$, se $f(x) \notin Y$, ou $f(x) \in Y$ e

$$T_{f(x)}Y + T_x f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^p.$$

Dizemos que f é **transversal a Y** se $f \pitchfork Y$ em x , para todo x em $\mathbb{R}^n$.

O conceito de transversalidade pode ser entendido como uma generalização do conceito de valor regular de uma aplicação diferenciável.

Teorema 2.6. (GUILLEMIN; GOLUBITSKY, 1973) Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função C^∞ e $Y \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade suave com f transversal a Y . Então $X = f^{-1}(Y)$ é uma variedade suave em $\mathbb{R}^n$, que tem a mesma codimensão de Y .

A principal ferramenta para provar que certas condições geométricas são satisfeitas para um subconjunto residual de aplicações é o teorema de transversalidade de Thom, enunciado a seguir.

Teorema 2.7 (Transversalidade de Thom). Sejam M, N variedades diferenciáveis e W uma subvariedade de $J^k(M, N)$. Considere

$$T_W = \{f \in C^\infty(M, N) : j^k f \pitchfork W\}.$$

Então, T_W é um subconjunto residual de $C^\infty(M, N)$.

Enunciamos a seguir um teorema de James Montaldi, um dos mais eficientes resultados de transversalidade (ou genericidade), que se aplica tanto para germes como para multigerms.

Teorema 2.8. (MONTALDI, 1991) Sejam X, Y, Z, U variedades diferenciáveis e $\mathcal{G}$ um dos grupos de Mather. Se $F : Y \times U \rightarrow Z$ é uma aplicação diferenciável, então, dada uma aplicação $g : X \rightarrow Y$, pode-se definir uma composta $F_g : X \times U \rightarrow Z$ por $F_g(x, u) = F(g(x), u)$.

1. Suponha que $F : Y \times U \rightarrow Z$ é uma aplicação localmente $\mathcal{G}$ -versal e seja S uma subvariedade $\mathcal{G}^k$ -invariante de $J^k(X, Z)$. Então, para um conjunto residual de imersões $X \hookrightarrow Y$, a aplicação k -jato $j_1^k F_g : X \times U \rightarrow J^k(X, Z)$ é transversal a S .
2. Suponha que $F : Y \times U \rightarrow Z$ é uma aplicação $\mathcal{G}$ -versal e seja S uma subvariedade $\mathcal{G}^k$ -invariante do espaço de multijatos ${}_r J^k(X, Z)$. Então, para um conjunto residual de mergulhos $X \hookrightarrow Y$, a aplicação multijato ${}_r j_1^k F_g : X^{(r)} \times U \rightarrow {}_r J^k(X, Z)$ é transversal a S .

Estes resultados nos permitem dizer qual a codimensão máxima necessária para acontecer as singularidades que trabalhamos. De fato, em diversos casos o conjunto de tais pontos pode ser vazio devido a codimensão e dizemos que a singularidade não é genérica. Observe que dependendo da codimensão de Y no Teorema 2.6, teremos $f^{-1}(Y) = \emptyset$ (ver, por exemplo, Teorema 2.1.4). Certas exigências sobre algum tipo de singularidades, também pode torná-la não genérica neste contexto.

2.2 Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^n$ e aplicação de Gauss

Consideramos alguns aspectos da geometria extrínseca de uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Localmente, M possui um campo vetorial normal unitário bem definido, que pode ser estendido à

toda hipersuperfície, caso a mesma seja orientável. Este campo vetorial normal define a aplicação de Gauss de M na hiperesfera unitária com centro na origem S^n . Para mais detalhes sobre esta seção, ver capítulo 2 de (IZUMIYA *et al.*, 2016).

Definição 2.12. Uma **hipersuperfície** em $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma subvariedade de codimensão 1.

No que segue, consideraremos imersões $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Escrevemos $M = \psi(U)$ e identificamos M e U via a imersão ψ .

Espaço Tangente: Seja $u = (u_1, \dots, u_n)$ coordenadas de um ponto $u \in \mathbb{R}^n$ com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^n$. O espaço tangente de M em um ponto $p = \psi(u)$, $T_p M$, é um espaço vetorial n -dimensional gerado pelos vetores linearmente independentes das derivadas parciais de ψ em u , ou seja, tomamos os vetores $\{\psi_{u_1}(u), \dots, \psi_{u_n}(u)\}$ como sendo uma base de $T_p M$.

Definição 2.13. Seja M uma hipersuperfície suave, regular e orientável em $\mathbb{R}^{n+1}$. A aplicação $\Gamma: M \rightarrow S^n$ que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor normal unitário $\Gamma(p)$ a M em p é chamada de **aplicação de Gauss**.

Observação 2.2. 1. A aplicação de Gauss independe da parametrização de M .

2. Os espaços tangentes $T_p M$ e $T_{\Gamma(p)} S^n$ podem ser identificados, já que são n -espaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, ortogonais a $\Gamma(p)$.

A derivada da aplicação de Gauss em p , $d\Gamma_p$, pode então ser considerada como uma aplicação linear $d\Gamma_p: T_p M \rightarrow T_p M$.

Definição 2.14. A aplicação linear $W_p = -d\Gamma_p: T_p M \rightarrow T_p M$ é chamada de **aplicação de Weingarten** de M em p .

Temos que W_p é um operador auto-adjunto. Como consequência, W_p possui n autovalores reais $\kappa_i(p)$, $i = 1, \dots, n$, e $T_p M$ admite uma base ortonormal $\{v_1(p), \dots, v_n(p)\}$ de autovetores de W_p .

Definição 2.15. Os autovalores κ_i de W_p são chamados de **curvaturas principais** de M em p e os seus autovetores associados $v_i(p)$ são chamados de **direções principais** de M em p . A **curvatura de Gauss-Kronecker** (ou apenas **curvatura de Gauss**) de M em p é definida por

$$K(p) = \det W_p = \prod_{i=1}^n \kappa_i(p).$$

A curvatura de Gauss-Kronecker mede o quanto uma hipersuperfície se afasta de ser um hiperplano.

Definição 2.16. Seja $p \in M$.

1. Dizemos que p é ponto **umbílico** de M se todas as curvaturas principais em p forem iguais.
2. Dizemos que p é ponto **umbílico flat** se $\kappa_i(p) = 0$, para $i = 1, \dots, n$.
3. Dizemos que $p \in M$ é um ponto **parabólico** se $K(p) = 0$. O **conjunto parabólico** de M é o conjunto formado por todos os pontos parabólicos de M .

Se M é parametrizada por $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, a aplicação de Gauss em coordenadas é dada por

$$\Gamma(u) = \frac{\psi_{u_1}(u) \times \cdots \times \psi_{u_n}(u)}{\|\psi_{u_1}(u) \times \cdots \times \psi_{u_n}(u)\|}, \quad u \in U.$$

Definição 2.17. Seja $f : M \rightarrow N$ aplicação entre variedades suaves. O **conjunto singular** de f , denotado por Σf , é o conjunto dos pontos de M para os quais o rank da diferencial df não é máximo.

Observe que a aplicação de Gauss é singular precisamente quando $K(u)(\psi_{u_1}(u) \times \cdots \times \psi_{u_n}(u)) = 0$, ou seja, o conjunto singular da aplicação de Gauss é o conjunto parabólico da hipersuperfície, denotado por $\Sigma \Gamma$.

Caso particular: Vamos seguir a ideia de (BANCHOFF; GAFFNEY; MCCRORY, 1982) e considerar a imersão $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$, $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $M = \psi(U)$ hipersuperfície na forma de Monge. Então

$$\begin{aligned} \psi : U &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\mapsto \psi(x, y, z) = (x, y, z, f(x, y, z)), \end{aligned}$$

com $f \in \mathcal{M}_3^2$. Assim, a aplicação de Gauss de M em $p = \psi(x, y, z)$ é dada por

$$\Gamma(x, y, z) = \frac{\psi_x \times \psi_y \times \psi_z}{\|\psi_x \times \psi_y \times \psi_z\|} = \frac{(f_x, f_y, f_z, -1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}.$$

Como o objetivo é estudar as singularidades da aplicação de Gauss, podemos obter, através de projeções, a **aplicação de Gauss estendida** $\tilde{\Gamma} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, da forma $(x, y, z) \mapsto \tilde{\Gamma}(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$. Desta forma, $\tilde{\Gamma}$ terá as mesmas singularidades de Γ , com a vantagem de ser mais adequada para realizar os cálculos. Em particular, $\tilde{\Gamma}$ é singular quando a matriz Jacobiana $J\tilde{\Gamma}_{(x,y,z)}$ possui rank menor do que 3, isto é,

$$\text{rank}(J\tilde{\Gamma}_{(x,y,z)}) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow \delta = \det(J\tilde{\Gamma}_{(x,y,z)}) = 0,$$

ou seja,

$$\underbrace{f_{xx}f_{yy}f_{zz} + 2f_{xy}f_{yz}f_{xz} - f_{yy}f_{xz}^2 - f_{zz}f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yz}^2}_{\delta} = 0.$$

Portanto, temos que

$$\Sigma\tilde{\Gamma} = \{(x, y, z) \in U \mid \delta(x, y, z) = 0\}$$

é precisamente o conjunto parabólico da hipersuperfície M .

2.3 Família de funções altura em hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$

Dada uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$, podemos estudar o contato desta subvariedade com objetos degenerados como, por exemplo, retas, esferas e planos. Estes contatos são medidos através das singularidades de funções ou aplicações. Em particular, o contato de uma hipersuperfície com hiperplanos é medido através das singularidades da função altura.

Definição 2.18. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$, com U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, uma imersão de uma hipersuperfície suave em $\mathbb{R}^4$ e denote por $M = \psi(U)$. Denominamos **família de funções altura** a família de aplicações dada por

$$\begin{aligned} H : M \times S^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, v) &\mapsto H(p, v) := \langle p, v \rangle, \end{aligned}$$

onde S^3 é a hiperesfera em $\mathbb{R}^4$ com centro na origem e de raio unitário. Para v fixo, a função H_v é a função altura na direção v . Como nosso interesse é a geometria diferencial local, sendo $p \in M$, podemos identificar p com a origem e fixar coordenadas locais (x, y, z, w) em p , tal que o eixo w seja normal a M em p e o espaço tangente (x, y, z) seja o espaço tangente a M em p . Desta forma, podemos escrever M localmente na sua forma de Monge, ou seja, como o gráfico de uma função $w = f(x, y, z)$, tal que $f = f_x = f_y = f_z = 0$ em $0 \in \mathbb{R}^3$. Também podemos supor, por uma rotação de eixos, que $f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = 0$ em $0 \in \mathbb{R}^3$. Escolhemos uma carta em S^3 próxima a $(0, 0, 0, 1)$, dada por $(a_1, a_2, a_3, 1)$. Assim, temos a família modificada de funções altura:

$$\begin{aligned} H : M \times (\mathbb{R}^4, 0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y, z, w), (a_1, a_2, a_3, 1)) &\mapsto H_{(a_1, a_2, a_3, 1)}(x, y, z, w), \end{aligned}$$

com $H_{(a_1, a_2, a_3, 1)}(x, y, z, w) = a_1x + a_2y + a_3z + f(x, y, z)$. Fixando $v = (0, 0, 0, 1)$, temos $f(x, y, z) = H_v(x, y, z, w)$. Assim, a função altura de uma hipersuperfície na forma de Monge mede a “altura” da hipersuperfície até o plano tangente em p . Colocando todas estas projeções H_v em uma família parametrizada pela esfera unitária S^3 , temos a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{H} : M \times S^3 &\rightarrow \mathbb{R} \times S^3 \\ (p, v) &\mapsto \tilde{H}(p, v) = (H_v(p), v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observação 2.3. (i) Nesta seção apresentamos a família de funções altura em hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$. No entanto, podemos definir analogamente a família de funções altura para qualquer variedade. Particularmente, usaremos também a família de funções altura em curvas em $\mathbb{R}^4$ e superfícies em $\mathbb{R}^4$, que serão apresentadas em momento oportuno.

- (ii) Nos capítulos seguintes, trabalhamos ao mesmo tempo com funções altura sobre hipersuperfícies, superfícies e curvas, todas em $\mathbb{R}^4$. Em cada caso, vamos denotar a função altura de forma diferente, de acordo com a variedade sobre a qual estaremos trabalhando, para que não haja confusão em relação à notação.

2.4 Catástrofes

A teoria das Catástrofes é o estudo das singularidades de famílias de funções da forma

$$F : N \times Q \rightarrow \mathbb{R},$$

onde N e Q são variedades suaves com $\dim N = n$ e $\dim Q = q$. Referências para essa seção são (POSTON; STEWART, 2014) e (ZEEMAN, 1979).

Definição 2.19. Considere a família de funções $F : N \times Q \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos:

- O **conjunto crítico** ou **variedade catástrofe** da família F é o conjunto

$$CM(F) = \left\{ (x, u) \in N \times Q \mid \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, u) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \right\}.$$

- O **conjunto bifurcação** da família F é o conjunto dado por

$$B(F) = \left\{ u \in Q \mid \exists (x, u) \in CM(F) \text{ e } \text{rank} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) < n \right\}.$$

- Seja $\mathcal{X}_F = \pi_2|_{CM(F)} : CM(F) \rightarrow Q$, onde π_2 é a projeção canônica na segunda componente. Dizemos que $\mathcal{X}_F$ é a **aplicação catástrofe** de F .

Observação 2.4. O germe em (p, v) da família $\tilde{H}$ dada em (2.1) é um desdobramento versal do germe em p de H_v para todo $(p, v) \in M \times S^3$. Quaisquer dois desdobramentos versais com o mesmo número de parâmetros têm conjuntos críticos e conjuntos bifurcações difeomorfos.

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função e considere sua deformação a q -parâmetros $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $F(x, u) = f_u(x)$. Se F é uma deformação versal de f , então $CM(F)$ é uma subvariedade n -dimensional de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$.

Observação 2.5. (i) Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ imersão e considere a hipersuperfície $M = \psi(U)$ em $\mathbb{R}^4$ na sua forma de Monge $\psi(x, y, z) = (x, y, z, f(x, y, z))$. O motivo para usarmos função altura para estudarmos a aplicação de Gauss é que as aplicações catástrofes das famílias de funções altura, $\mathcal{X}_H : CM(H) \rightarrow S^{n-1}$, são precisamente as aplicações de Gauss $\Gamma : CM(H) \rightarrow S^{n-1}$ de M . O conjunto crítico $CM(H)$ da família de funções altura H é o conjunto dos pares $(p, v) \in M \times S^{n-1}$ tais que p é ponto crítico da função H_v , ou seja, temos que v é normal ao hiperplano tangente à M em p . Assim, $CM(H)$ é identificado com o fibrado normal unitário de M .

- (ii) Segundo os trabalhos de (LOOIJENGA, 1974) ou (MONTALDI, 1991), existe um subconjunto residual $\mathcal{E}$ do espaço das imersões $\{\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4\}$, com a topologia C^∞ de Whitney, tal que para cada $\psi \in \mathcal{E}$, a família H correspondente é uma família genérica de funções em U . Como consequência, temos que, genericamente, a família de funções altura de uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$ possui singularidades de $\mathcal{R}_e$ -codimensão menor ou igual a 3, ou seja, singularidades do tipo A_2 , A_3 , A_4 ou D_4 do Teorema 2.5.

Uma vez que vamos usar o Teorema 2.5 diversas vezes e levando-se em consideração a Observação 2.5 (ii), vamos resumir essas informações na Tabela 1 para facilitar a referência. Na Tabela 1, exibimos o desdobramento (mini)versal a menos de uma forma quadrática não degenerada em outras variáveis.

	Codimensão	Forma Normal	Desdobramento versal	Nome
A_2	1	x^3	$x^3 + ux$	Dobra
A_3	2	x^4	$x^4 - ux^2 + vx$	Cúspide
A_4	3	x^5	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	Rabo de Andorinha
D_4^+	3	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	Umbílico Hiperbólico
D_4^-	3	$x^3 - xy^2$	$x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$	Umbílico Elíptico

Tabela 1 – Catástrofes elementares para singularidades de codimensão menor ou igual a 3

Modelos para os conjuntos bifurcação das singularidades da Tabela 1 são representados como na Figura 1.

Figura 1 – Conjuntos bifurcação das singularidades A_2 , A_3 , A_4 , D_4^- e D_4^+

2.5 Aplicação de Gauss vista como aplicação Lagrangiana

C. T. C. Wall em (WALL, 1977) mostra que a aplicação de Gauss possui genericamente os mesmos tipos de singularidades de uma aplicação Lagrangiana. Isso ocorre porque os germes estáveis de aplicações catástrofes correspondem a germes estáveis de aplicações Lagrangianas.

Vamos agora expor sucintamente algumas definições e resultados a respeito de singularidades Lagrangianas para mostrar como as singularidades da aplicação de Gauss de uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^4$ e as singularidades da família de funções altura sobre M se relacionam (ver Observação 2.6). Para essa seção, tomamos como base o Capítulo 5 de (IZUMIYA *et al.*, 2016).

Localmente, toda variedade Lagrangiana é definida por uma família de funções geradoras. No nosso caso, a família de interesse é a família de funções altura. Sendo assim, podemos considerar a teoria de contato do ponto de vista de singularidades Lagrangianas.

Definição 2.20. (i) Seja M uma $2n$ -variedade suave e ω uma forma simplética em M . Dizemos que uma subvariedade suave $L \subset M$ é uma **subvariedade Lagrangiana** se $\dim L = n$ e $\omega|_L = 0$.

(ii) Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado tal que E é uma variedade com estrutura simplética ω . Dizemos que π é uma **fibração Lagrangiana** se suas fibras são subvariedades Lagrangianas de E .

(iii) Seja $\pi : E \rightarrow M$ uma fibração Lagrangiana e considere a imersão Lagrangiana $i : L \rightarrow E$. Dizemos que a restrição $\pi|_L = \pi(L)$, isto é, $\pi \circ i : L \rightarrow M$ é uma **aplicação Lagrangiana**.

Vamos agora descrever germes de imersões Lagrangianas $i : L \rightarrow E$ usando germes de famílias de funções. Considere $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ família a k -parâmetros de germes de funções $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e denote por $(x, q) = (x_1, \dots, x_n, q_1, \dots, q_k)$ as coordenadas em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Note que, como F é uma família de germes de funções, temos definidos os conjuntos catástrofe e bifurcação e a aplicação catástrofe de F , como na Definição 2.19.

Definição 2.21. Dizemos que F é uma **família de funções Morse** se o germe de aplicação

$$\Delta F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$$

$$(x, q) \mapsto \Delta F(x, q) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) (x, q)$$

é não singular.

Segue diretamente que, se F é uma família de funções Morse, então $(CM(F), 0)$ é germe de subvariedade de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ de dimensão k . Definimos também o **germe de imersão**

Lagrangiana, $L(F)$, fda forma

$$L(F) : (CM(F), 0) \rightarrow T^*\mathbb{R}^k$$

$$(x, q) \mapsto L(F)(x, q) = \left(q, \frac{\partial F}{\partial q_1}(x, q), \dots, \frac{\partial F}{\partial q_k}(x, q) \right),$$

onde $T^*\mathbb{R}^k$ é o fibrado cotangente de $\mathbb{R}^k$.

Chamamos a família F de **família geradora** de $L(F)(CM(F))$.

Teorema 2.9. Seja L o germe de uma variedade Lagrangiana de $T^*\mathbb{R}^k$. Então existe um germe F de uma família de funções Morse tal que $L(F)(CM(F)) = L$.

Demonstração. Ver (ARNOLD; GUSEIN-ZADE; VARCHENKO, 1985) □

O Teorema 2.9 nos diz que qualquer germe de uma subvariedade Lagrangiana de $T^*\mathbb{R}^k$ pode ser construído a partir de uma família de funções geradoras. A noção de equivalência Lagrangiana e estabilidade Lagrangiana pode ser formulada em termos de famílias geradoras.

Teorema 2.10. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 103)

1. Sejam $F, G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ duas famílias de funções Morse. Então os germes de aplicação Lagrangiana $\pi \circ L(F)$ e $\pi \circ L(G)$ são Lagrangiana equivalentes se, e somente se, F e G são $\mathcal{R}^+$ -equivalentes.
2. O germe de aplicação Lagrangiana $\pi \circ L(F)$ é Lagrangiana estável se, e somente se, F é um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal de $f(x) = F(x, 0)$.

A classificação das singularidades de germes de funções e seus desdobramentos $\mathcal{R}^+$ -versais podem ser usados para obter uma lista de formas normais de singularidades de germes de aplicações Lagrangianas em dimensões baixas. Assim, dos Teoremas 2.10 e 2.5, as formas normais de germes de aplicação Lagrangiana $\pi \circ L(F)$ estáveis quando $k \leq 3$ (que é o nosso espaço de parâmetros de interesse) são dadas como na Tabela 2.

Tipo de Singularidade de F	Tipo de Singularidade de $\pi \circ L(F)$	Forma Normal
A_2	Dobra	(x^2, v, w)
A_3	Cúspide	$(u, x^3 + ux, w)$
A_4	Rabo de andorinha	$(u, v, x^4 + ux^2 + vx)$
D_4^+	Umbílico hiperbólico	$(x^2 + wy, y^2 + vx, w)$
D_4^-	Umbílico elíptico	$(x^2 + y^2 - wx, xy - wy, w)$

Tabela 2 – Singularidades Lagrangianas estáveis em $\mathbb{R}^3$.

Seja M a hipersuperfície parametrizada por $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n-1}$ e considere a família de funções altura H de M em $(u, v) \in U \times S^{n-1}$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.11. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 122) O germe H da família de funções altura em M em cada ponto $(u, v) \in U \times S^{n-1}$ é uma família de funções Morse.

Como consequência da Proposição 2.11, podemos definir uma imersão Lagrangiana $L(H)$ cuja família geradora é a a família de funções altura sobre a hipersuperfície M (Teorema 2.9). Além disso, como a aplicação catástrofe de H pode ser identificada com a aplicação de Gauss Γ de M (ver Observação 2.5), temos que $\Gamma = \pi \circ L(H)$. Assim, para uma imersão genérica ψ , a aplicação de Gauss de $M = \psi(U)$ se comporta como uma aplicação Lagrangiana estável. Portanto, suas singularidades são como na Tabela 2.

Sabemos que a aplicação de Gauss de M é singular em um ponto $p = \psi(u)$ se, e somente se, p é um ponto parabólico de M . Além disso, a família H de funções altura sobre M é a família geradora da subvariedade Lagrangiana $L(H)(CM(H)) \subset T^*S^3$. Para uma imersão genérica de M em $\mathbb{R}^4$, a família H é um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal e assim, a aplicação catástrofe $\Gamma = \mathcal{K}_H$ é $\mathcal{A}$ -equivalente à aplicação catástrofe do modelo de um desdobramento $\mathcal{R}$ -versal (com três parâmetros) das singularidades que ocorrem em uma dada função altura. A aplicação catástrofe de uma família $\mathcal{R}$ -versal a 3-parâmetros das singularidades A_1, A_2, A_3, A_4 e D_4 são, respectivamente, germes de difeomorfismo, dobra, cúspide, rabo de andorinha e umbílicos (elíptico e hiperbólico), como na Tabela 1.

Dessa forma, segue que a imagem do conjunto parabólico de M pela aplicação de Gauss segue os modelos dados na Figura 1. Logo, daqui pra frente, vamos usar as relações indicadas na observação abaixo:

Observação 2.6. Do Teorema 2.10 e da Tabela 2, um ponto p no conjunto parabólico onde a função altura na direção normal à M possui uma singularidade do tipo A_3 corresponde à **cúspide da aplicação de Gauss**. Se p é do tipo A_4 , então p corresponde ao **rabo de andorinha da aplicação de Gauss**. Se p é do tipo $D_4^\pm$, então p corresponde ao ponto **umbílico hiperbólico** (D_4^+) e **umbílico elíptico** (D_4^-) **da aplicação de Gauss**.

2.6 Superfícies regulares em $\mathbb{R}^4$

Nesta seção, apresentamos definições e resultados sobre a geometria de superfícies regulares em $\mathbb{R}^4$. Essa geometria foi primeiramente estudada por J. A. Little em (LITTLE, 1969) e esse trabalho serviu de inspiração para muitos outros estudos relacionados e aplicações, como, por exemplo, (MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 1995), (GARCIA *et al.*, 2000), (GARCIA; SÁNCHEZ-BRINGAS, 2002), (SINHA; TARI *et al.*, 2015), dentre outros.

Uma referência base para essa seção é o Capítulo 7 do livro (IZUMIYA *et al.*, 2016), no qual os autores fazem um estudo geral sobre a geometria diferencial de uma superfície N imersa em $\mathbb{R}^4$. Tais propriedades geométricas estão relacionadas com o segundo jato da segunda forma fundamental.

Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma parametrização local da superfície N , com U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, e um referencial ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que, para todo $u \in U$, $\{\mathbf{e}_1(u), \mathbf{e}_2(u)\}$ é uma base para o plano tangente $T_p N$ e $\{\mathbf{e}_3(u), \mathbf{e}_4(u)\}$ é uma base para o plano normal $N_p N$ da superfície N em $p = f(u)$.

Definição 2.22. A segunda forma fundamental de N em p , $II_p : T_p N \times T_p N \rightarrow N_p N$, é definida como

$$\begin{aligned} II_p(\mathbf{e}_1(u), \mathbf{e}_1(u)) &= \pi_2(f_{xx}(u)), \quad II_p(\mathbf{e}_1(u), \mathbf{e}_2(u)) = \pi_2(f_{xy}(u)) \\ II_p(\mathbf{e}_2(u), \mathbf{e}_2(u)) &= \pi_2(f_{yy}(u)), \end{aligned}$$

na base $\{\mathbf{e}_1(u), \mathbf{e}_2(u)\}$ de $T_p N$, com $\pi_2 : T_p \mathbb{R}^4 \rightarrow N_p N$ sendo a projeção canônica no plano normal.

Tomando $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \in T_p N$, podemos escrever a forma quadrática

$$II_p(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = (l_1 w_1^2 + 2m_1 w_1 w_2 + n_1 w_2^2) \mathbf{e}_3 + (l_2 w_1^2 + 2m_2 w_1 w_2 + n_2 w_2^2) \mathbf{e}_4,$$

onde $l_i = \langle f_{xx}, \mathbf{e}_{i+2} \rangle$, $m_i = \langle f_{xy}, \mathbf{e}_{i+2} \rangle$ e $n_i = \langle f_{yy}, \mathbf{e}_{i+2} \rangle$, $i = 1, 2$ são chamados de **coeficientes da segunda forma fundamental** com respeito ao referencial acima e $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \in T_p N$. Esses coeficientes geram uma matriz, que é conhecida como matriz da segunda forma fundamental, definida a seguir.

Definição 2.23. A matriz da segunda forma fundamental de N com respeito ao referencial ortonormal acima é dada por

$$\alpha = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}.$$

Little (LITTLE, 1969) também estudou um invariante escalar de N (sob ação de $\mathcal{O}(2) \times \mathcal{O}(2)$ em $T_p N \times N_p N$), que é a resultante das formas quadráticas polinomiais $l_1 x^2 + 2m_1 xy + n_1 y^2$ e $l_2 x^2 + 2m_2 xy + n_2 y^2$. Chamaremos essa resultante de discriminante, como na definição a seguir.

Definição 2.24. O discriminante de N , Δ , é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \\ 0 & l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} (4(l_1 m_2 - m_1 n_2)(m_1 n_2 - n_1 m_2) - (l_1 n_2 - n_1 l_2)^2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

O discriminante Δ está intimamente relacionado com outro invariante da superfície N , conhecido como a elipse de curvatura, que não será abordada neste trabalho. Porém, a elipse de curvatura é fundamental para a determinação do tipo de um ponto $p \in N$, pois ela pode ser vista como a imagem do círculo unitário em $T_p N$ via a aplicação definida pelo par de formas quadráticas (Q_1, Q_2) . Esse par de formas quadráticas é o 2-jato da aplicação 1-flat $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$

cujo gráfico, em coordenadas ortogonais, é localmente a superfície N . Cada ponto da superfície determina um par de formas quadráticas $(Q_1, Q_2) = (l_1x^2 + 2m_1xy + n_1y^2, l_2x^2 + 2m_2xy + n_2y^2)$ e o grupo $\mathcal{G} = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ age nesses pares de formas binárias (Q_1, Q_2) nos dando as $\mathcal{G}$ -órbitas listadas na Tabela 3. Um ponto é chamado de elíptico/hiperbólico/parabólico/inflexão de acordo com a classificação de sua órbita correspondente como na Tabela 3.

Teorema 2.12. (GIBSON, 1979) As órbitas da ação de $\mathcal{G} = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ no conjunto de pares de formas quadráticas são dadas na Tabela 3.

$\mathcal{G}$ -classe	Nome
(x^2, y^2)	ponto hiperbólico
$(xy, x^2 - y^2)$	ponto elíptico
(x^2, xy)	ponto parabólico
$(x^2 \pm y^2, 0)$	ponto de inflexão
$(x^2, 0)$	inflexão degenerada
$(0, 0)$	inflexão degenerada

Tabela 3 – As $\mathcal{G}$ -classes de pares de formas quadráticas.

Assim, podemos caracterizar os pontos da superfície N de acordo com o sinal do discriminante Δ , como na Proposição 2.13.

Proposição 2.13. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 211) Seja N uma superfície suave em $\mathbb{R}^4$ e $p \in N$. Então

- (i) $\Delta(p) < 0$ se, e somente se, p é um ponto hiperbólico.
- (ii) $\Delta(p) > 0$ se, e somente se, p é um ponto elíptico.
- (iii) $\Delta(p) = 0$ e $\text{rank}\alpha(p) = 2$ se, e somente se, p é um ponto parabólico.
- (iv) $\Delta(p) = 0$ e $\text{rank}\alpha(p) < 2$ se, e somente se, p é um ponto de inflexão.

Os detalhes sobre a elipse de curvatura podem ser encontrados nas referências citadas nesta seção.

Assim como no caso de hipersuperfícies, podemos obter informações geométricas interessantes estudando o contato de uma superfície regular N em $\mathbb{R}^4$ com hiperplanos através das singularidades da função altura. Dada uma parametrização local $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de N , a família de funções altura $H : U \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre N é dada por

$$H(u, v) = \langle f(u), v \rangle.$$

Para $v \in S^3$ fixo, temos a função altura H_v de N dada por $H_v(u) = \langle f(u), v \rangle$. Note que um ponto $p = f(u)$ é um ponto singular da função altura H_v se, e somente se, v é um vetor normal a N em p .

O próximo teorema nos diz sobre as singularidades genéricas da função altura H_v . Denotamos aqui por $Imm(U, \mathbb{R}^4)$ o subconjunto de $C^\infty(U, \mathbb{R}^4)$ munido da topologia C^∞ de Whitney, cujos elementos são imersões próprias de classe C^∞ de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^4$. Consideramos em $Imm(U, \mathbb{R}^4)$ a topologia induzida pela topologia C^∞ de Whitney. Como comentamos na seção 2.1.4, uma propriedade P no espaço topológico $Imm(U, \mathbb{R}^4)$ é genérica se é satisfeita por um conjunto residual de $Imm(U, \mathbb{R}^4)$.

Teorema 2.14. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 222) Existe um subconjunto aberto e denso $\mathcal{O}_H$ em $Imm(U, \mathbb{R}^4)$ tal que para todo $f \in \mathcal{O}_H$, a superfície $N = f(U)$ possui as seguintes propriedades: para todo $v \in S^3$, a função altura H_v ao longo da direção normal v em qualquer ponto $p \in N$ possui somente $\mathcal{R}$ -singularidades locais do tipo A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ou $D_4^\pm$.

Agora podemos introduzir o conceito de hiperplano osculador, que é diretamente relacionado com as singularidades da função altura.

Definição 2.25. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 222) Seja N uma superfície suave em $\mathbb{R}^4$ parametrizada por $f : U \rightarrow \mathbb{R}^4$. Um hiperplano com direção ortogonal v é chamado de **hiperplano osculador** de N em $p = f(u)$ se é tangente a N em p e H_v tem singularidade degenerada (isto é, não Morse) em u . Denominamos a direção v de **direção binormal** de N em p .

As direções binormais estão fortemente relacionadas com as direções assintóticas da superfície. Tais relações podem ser encontradas nas referências principais desta seção.

CARACTERIZAÇÕES GEOMÉTRICAS DAS SINGULARIDADES DA APLICAÇÃO DE GAUSS

Motivados pelo trabalho em (BANCHOFF; GAFFNEY; MCCRORY, 1982), queremos caracterizar geometricamente o que ocorre em cada singularidade genérica p da aplicação de Gauss de uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^4$. Esta abordagem é possível pois as singularidades locais da aplicação de Gauss estão associadas às singularidades locais da função altura sobre M . Para isso, considerando $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 / \|x\| = 1\}$ como o espaço de parâmetros para a família de funções altura de M , vamos analisar a existência de hiperplanos bitangentes a M na vizinhança de p , ou seja, os hiperplanos que são tangentes a M em mais de um ponto. Estes pontos, conhecidos como singularidades multilocais, são precisamente os pontos singulares da função altura que possuem a mesma altura. A motivação para esse estudo veio dos conhecidos conjuntos de Maxwell de um espaço de funções $C^\infty(N)$, onde N é uma variedade suave e $C^\infty(N)$ denota o conjunto de aplicações $N \rightarrow \mathbb{R}$ com a topologia de Whitney. Considerando uma variedade suave C e uma família de funções $F : C \rightarrow C^\infty(N)$, o conjunto de Maxwell de F é definido por

$$\mathcal{M}(F) = \{x \in C / \text{o conjunto no qual } F(x) \text{ atinge seu mínimo absoluto em mais de um ponto crítico não degenerado}\}.$$

Referências sobre conjuntos e estratificação de Maxwell podem ser encontradas em (LOOI-JENGA, 1974) ou (THOM, 1974), por exemplo. Em (ROMERO FUSTER, 1983), pode ser encontrada uma aplicação interessante a respeito de estratificações da esfera S^n . No nosso caso, estamos interessados não apenas nos mínimos, mas em todos os pontos críticos reais não degenerados com a mesma imagem.

Note que aplicações genéricas de Gauss de uma hipersuperfície não são, necessariamente, aplicações estáveis entre variedades de mesma dimensão, pois o conceito de estabilidade depende

das perturbações da imersão e não das perturbações da aplicação em si. Mais precisamente, temos o seguinte:

Definição 3.1. Seja uma imersão $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ de uma hipersuperfície fechada e orientada e $\Gamma : U \rightarrow S^3$ sua aplicação de Gauss. Dizemos que Γ é **estável** se existe uma vizinhança U_ψ de ψ no espaço das imersões em $\mathbb{R}^4$ tal que para toda $\phi \in U_\psi$, a aplicação de Gauss associada a ϕ seja $\mathcal{A}$ -equivalente a aplicação de Gauss associada a ψ .

Em (ROMERO FUSTER, 1983), pode ser visto que essa definição é equivalente a requisitar que a família de funções altura associada a ψ seja estruturalmente estável. Logo, como a aplicação de Gauss pode ser vista como a aplicação catástrofe da família de funções altura, sua estabilidade pode ser descrita neste contexto. Além disso, como estamos interessados nos fenômenos genéricos (logo, estáveis) e como a dimensão do nosso espaço de parâmetros (S^3) é igual a 3, podemos esperar que aconteçam fenômenos de $\mathcal{R}_e$ -codimensão menor ou igual a 3, ou seja, singularidades do tipo A_k , com $k \leq 4$ e D_4 . Com isso, podemos usar os resultados vistos na Observação 2.5 e na Tabela 1.

Observação 3.1. Vimos na Observação 2.5 que a aplicação catástrofe da família de funções altura sobre uma hipersuperfície M é precisamente a aplicação de Gauss Γ de M . Um hiperplano ξ é tangente à hipersuperfície M em um ponto q se, e somente se, q é um ponto crítico da composição da parametrização de M com a projeção ortogonal a reta l que passa pela origem e é normal a ξ . Assim, precisamos analisar os pontos críticos da função altura H_v , para v suficientemente próximo de $\Gamma(p)$. Para cada $w \in S^3$, temos que $\Gamma^{-1}(w)$ é o conjunto de pontos críticos da função altura H_w .

Considere M uma hipersuperfície em sua forma de Monge $(x, y, z) \mapsto (x, y, z, f(x, y, z))$ e tome $\mathbf{a} \in S^3$. Estamos interessados em analisar o comportamento geométrico em vizinhanças de uma singularidade da aplicação de Gauss em M , vamos estudar como se comporta o desdobramento versal $f_{\mathbf{a}}$ de f . Para isso, vamos analisar a existência de hiperplanos bitangentes a M numa vizinhança de uma singularidade da aplicação de Gauss, ou seja, vamos estudar os pontos críticos de $f_{\mathbf{a}}$ que possuem a mesma imagem. Isso quer dizer que vamos analisar as singularidades locais da função altura através do comportamento de suas singularidades multilocais.

Após a Definição 2.18, definimos a família modificada de funções altura $H_{\mathbf{a}}(x, y, z, w) = a_1x + a_2y + a_3z + f(x, y, z)$, onde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, 1)$, que são deformações versais de f , mas usaremos as deformações versais da Tabela 1 considerando a Observação 2.4, pois são essas as deformações utilizadas na literatura, cujos resultados precisaremos aqui. Estamos fazendo a correspondência dos pontos do conjunto bifurcação com os pontos em M , que podem ser classificados de acordo com o contato (A_1, A_2, A_3, A_4 ou D_4) do hiperplano tangente a M .

Vamos expor aqui o principal resultado deste capítulo, o qual será demonstrado nas Proposições 3.1, 3.3, 3.5 e 3.7 e nos seus respectivos corolários, cujos enunciados estão presentes

na Seção 3.5.

Teorema. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$, com $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, uma imersão suave de uma hipersuperfície. Denotando a hipersuperfície por $M = \psi(U)$, tomando $p \in M$ e considerando que a aplicação de Gauss de M seja estável, temos o seguinte:

1. p é uma cúspide da aplicação de Gauss de M se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existem três pontos distintos q_1, q_2 e q_3 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3$, onde os hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos, com $T_{q_1}M = T_{q_2}M$. Ou seja, T_pM é o limite de uma sequência de hiperplanos bitangentes.
2. p é um rabo de andorinha da aplicação de Gauss de M se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos q_1, q_2, q_3 e q_4 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ e os hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos, com $T_{q_1}M = T_{q_2}M$ e $T_{q_3}M = T_{q_4}M$, ou seja, T_pM é o limite de duas sequências de hiperplanos bitangentes.
3. p é um ponto umbílico elíptico da aplicação de Gauss de M se, e somente se para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos q_1, q_2, q_3 e q_4 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ e os hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos, com $T_{q_1}M = T_{q_2}M = T_{q_3}M$. Ou seja, T_pM é o limite de uma sequência de hiperplanos tri-tangentes.
4. p é um ponto umbílico hiperbólico da aplicação de Gauss de M se, e somente se para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos q_1, q_2, q_3 e q_4 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ e os hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos, com $T_{q_1}M = T_{q_2}M$ mas não existem hiperplanos tri-tangentes ou sequência dupla de hiperplanos bitangentes.

3.1 Singularidade A_3 da função altura

Nesta seção, vamos analisar o comportamento geométrico em vizinhanças de um ponto de cúspide de Gauss p em M , estudando a existência de hiperplanos bitangentes que convergem para T_pM . Vamos ver que este processo recai no caso estudado quando temos superfícies em $\mathbb{R}^3$, feito em (BANCHOFF; GAFFNEY; MCCRORY, 1982). Dessa maneira, daremos apenas uma ideia geral do que ocorre neste caso e logo após, faremos as seções que tratam das outras singularidades mais detalhadamente.

Usando a Tabela 1, uma deformação versal de uma singularidade do tipo cúspide (A_3) da aplicação de Gauss é dada por

$$f_{\mathbf{a}}(x, y, z) = x^4 - ux^2 + vx + q(y, z),$$

onde $\mathbf{a} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(u, v, w, 1) \in S^3$, $q(y, z)$ é uma forma quadrática não degenerada e $f_{(0,0,0)}(x, y, z) = f(x, y, z)$. Uma vez que vamos trabalhar no conjunto bifurcação, a forma quadrática $q(y, z)$ não será relevante para os cálculos, pois como $q(y, z)$ é uma forma quadrática

não degenerada, as derivadas de ordem dois nas variáveis y e z não influenciarão no rank da Hessiana de $f_{\mathbf{a}}$. Por esse motivo, vamos considerar $f_{\mathbf{a}}$ como uma função da variável x . Pela Definição 2.19, o conjunto bifurcação de $f_{\mathbf{a}}$ é dado por

$$B(f_{\mathbf{a}}) = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists ((x, y, z), \mathbf{a}) \in CM(f_{\mathbf{a}}) \text{ com } \text{rank} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) < 3 \right\}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\mathbf{a}}(x)}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow v = -4x^3 + 2ux \text{ e} \\ \frac{\partial^2 f_{\mathbf{a}}(x)}{\partial x^2} = 0 &\Leftrightarrow u = 6x^2, \end{aligned}$$

segue que o conjunto bifurcação de $f_{\mathbf{a}}$, $B(f_{\mathbf{a}}) \subset \mathbb{R}^3$, pode ser parametrizado pela superfície

$$B(f_{\mathbf{a}}) : (x, w) \mapsto (6x^2, 8x^3, w) = (u, v, w),$$

ou seja, $B(f_{\mathbf{a}})$ é uma cuspidal edge (Figura 2 (a)). Quando fixamos $w = w_0$ como sendo uma constante diferente de zero, temos uma seção de $B(f_{\mathbf{a}})$, que é justamente a cúspide $x \mapsto (6x^2, 8x^3)$, dada implicitamente por $27v^2 = 8u^3$ (Figura 2 (b)).

Figura 2 – (a) Conjunto bifurcação $B(f_{\mathbf{a}})$ de uma singularidade A_3 e (b) sua seção quando $w = w_0$.

Observe que $f_{\mathbf{a}}$ possui no máximo 3 pontos críticos. A ideia é encontrar os pontos críticos distintos que possuam a mesma imagem, ou seja, os pontos que correspondem a singularidades multilocais de $f_{\mathbf{a}}$. Os pontos críticos de $f_{\mathbf{a}}$ são reais e distintos quando eles pertencem à região $27v^2 - 8u^3 > 0$ e conjunto de pontos críticos de $f_{\mathbf{a}}$ que possuem a mesma imagem é dado pela semirreta $v = 0$, com $u > 0$, para cada $w = w_0$ (ver (BRÖCKER; LANDER, 1975) para detalhes). Essa semirreta está representada na Figura 3 (a).

Assim, quando fixamos $w = w_0$ uma constante diferente de zero e tomamos $v = 0$ e $u > 0$, segue que $f_{\mathbf{a}}(x) = x^4 - ux^2$. Logo, os pontos críticos de $f_{\mathbf{a}}$ são dados por $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{\frac{u}{2}}$ e $x_3 = \sqrt{\frac{u}{2}}$, com $f_{\mathbf{a}}(x_2) = f_{\mathbf{a}}(x_3)$. O comportamento dos pontos críticos de $f_{\mathbf{a}}$ na seção $w = w_0$ é representado na Figura 3 (b).

Com essa análise das singularidades multilocais de $f_{\mathbf{a}}$, detectamos a existência de hiperplanos bitangentes à uma hipersuperfície M em qualquer vizinhança de um ponto de cúspide da aplicação de Gauss de M . Esse resultado é enunciado na proposição a seguir.

Figura 3 – (a) Pontos críticos de $f_{\mathbf{a}}$ com a mesma imagem e (b) comportamento de $f_{\mathbf{a}}$ em uma vizinhança de um ponto de cúspide na seção $w = w_0$.

Proposição 3.1. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão suave de uma hipersuperfície. Denotando por $M = \psi(U)$, temos o seguinte: se p é uma cúspide da aplicação de Gauss de M , então para cada $\varepsilon > 0$, existem três pontos distintos q_1, q_2 e q_3 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3$, onde os hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos e, além disso, $T_{q_1}M = T_{q_2}M$. Ou seja, em uma vizinhança de p quando p é uma cúspide de Gauss, temos uma família de hiperplanos bitangentes que convergem para T_pM .

3.2 Singularidade A_4 da função altura

Como visto na Tabela 1, uma deformação versal de uma singularidade do tipo rabo de andorinha (A_4) da aplicação de Gauss é dada por

$$f_{\mathbf{a}}(x, y, z) = f_{(u, v, w)}(x, y, z) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx + q(y, z),$$

onde $\mathbf{a} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ e $q(y, z)$ é uma forma quadrática não degenerada e $f_{(0,0,0)}(x, y, z) = f(x, y, z)$. De maneira análoga à Seção 3.1, a forma quadrática $q(y, z)$ não será relevante nos cálculos, então vamos considerar $f_{\mathbf{a}}$ como uma função de x . Como

$$\frac{\partial f_{\mathbf{a}}(x)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow w = -5x^4 - 3ux^2 - 2vx \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 f_{\mathbf{a}}(x)}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow v = -10x^3 - 3ux,$$

segue que $-5x^4 - 3ux^2 - 2(-10x^3 - 3ux)x = 15x^4 + 3ux^2$. Assim, o conjunto bifurcação de $f_{\mathbf{a}}$, $B(f_{\mathbf{a}}) \subset \mathbb{R}^3$, pode ser parametrizado pela superfície

$$B(f_{\mathbf{a}}) : (x, u) \mapsto (u, -10x^3 - 3ux, 15x^4 + 3ux^2) = (u, v, w). \quad (3.1)$$

Na Figura 4 temos a imagem de $B(f_a)$ (à esquerda) e uma seção quando fixamos $u = u_0$, com $u_0 < 0$ (à direita). Observe que essa seção é a curva dada por $x \mapsto (-10x^3 - 3u_0x, 15x^4 + 3u_0x^2)$. Além disso, temos que $\frac{\partial f_a(x)}{\partial x} = 0$ tem no máximo 4 soluções e, portanto, f_a vai possuir no máximo 4 pontos críticos distintos x_1, x_2, x_3 e x_4 . Para o nosso propósito, a ideia é encontrar os pontos tais que $f_a(x_i) = f_a(x_j)$, com $i \neq j$, ou seja, os pontos que correspondem a singularidades multilocais de f_a .

Figura 4 – Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4 e uma seção quando $u = u_0 < 0$.

O conjunto bifurcação de f_a para singularidades multilocais é dado abaixo.

Lema 3.2. (BRUCE; GIBLIN; GIBSON, 1985) O conjunto $\{a \in \mathbb{R}^3\}$ no qual f_a possui pelo menos dois pontos críticos com mesma imagem é dado pela superfície S parametrizada por

$$\begin{aligned} (s, t) &\mapsto (u(s, t), v(s, t), w(s, t)) \\ &\mapsto (-10(s^2 + t^2), 4s(5s^2 - t^2), (t^2 - s^2)(15s^2 + t^2)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Demonstração. Apresentamos aqui apenas uma ideia da prova. O objetivo é encontrar pelo menos dois pontos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f'_a(x_1) = f'_a(x_2) = 0 \text{ e } f_a(x_1) = f_a(x_2) = d,$$

onde $d \in \mathbb{R}$. Defina $g(x) = f(x) - d$. Assim, temos $g(x_i) = g'(x_i) = 0$, com $i = 1, 2$. Isso significa que g pode ser escrita como

$$g(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - \alpha),$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja

$$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx - d = (x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - \alpha).$$

Igualando os coeficientes dos polinômios da igualdade acima e escrevendo u , v , w e d em termos de x_1 e x_2 , temos:

$$\begin{aligned} u &= -3x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2, \\ v &= 2(x_1^3 + 4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2 + x_2^3), \\ w &= -x_1x_2(4x_1^2 + 7x_1x_2 + 4x_2^2) \text{ e} \\ d &= -2x_1^2x_2^2(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Assim, escrevendo $x_1 = s + t$ e $x_2 = s - t$, a superfície S dada pela projeção $(u, v, w, d) \mapsto (u, v, w)$ fica da forma

$$\begin{aligned} (u, v, w) &= (u(s, t), v(s, t), w(s, t)) \\ &= (-10(s^2 + t^2), 4s(5s^2 - t^2), (t^2 - s^2)(15s^2 + t^2)). \end{aligned}$$

□

Fixando $u = u_0 = -10(s^2 + t^2)$, temos pelo resultado anterior que $t = \pm \sqrt{\frac{-(10s^2 + u_0)}{10}}$ e segue que as seções de S e $B(f_a)$ em $u = u_0$ são como na Figura 5 e são parametrizadas, respectivamente, por $\beta(s) = \left(2s(20s^2 + u_0), -60s^4 - 2u_0s^2 + \frac{u_0^2}{4}\right)$ e $\gamma(s) = (-10s^3 - 3u_0s, 15s^4 + 3u_0s^2)$.

Figura 5 – Seção de $B(f_a)$ e S para $u_0 < 0$.

O resultado a seguir caracteriza um ponto $p \in M$ do tipo rabo de andorinha de acordo com a existência de planos bitangentes em M convergindo para T_pM . Isso é feito analisando os pontos críticos de f_a sobre as seções dadas na Figura 5.

Proposição 3.3. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão suave de uma hipersuperfície e denote $M = \psi(U)$. Se $p \in M$ é um rabo de andorinha da aplicação de Gauss de M , então as afirmações a seguir são verdadeiras.

1. Para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos q_1, q_2, q_3 e q_4 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ e os hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos. E mais, temos $T_{q_1}M = T_{q_2}M$, ou seja, T_pM é o limite de uma sequência de hiperplanos bitangentes.
2. Para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ e $\bar{q}_4$ em M tais que $|p - \bar{q}_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ e os hiperplanos tangentes de M em $\bar{q}_k$ são todos paralelos. E mais, temos $T_{\bar{q}_1}M = T_{\bar{q}_2}M$ e $T_{\bar{q}_3}M = T_{\bar{q}_4}M$, ou seja, T_pM é o limite de duas sequências de hiperplanos bitangentes.

Demonstração. Pela Observação 3.1, basta analisarmos o comportamento dos pontos críticos de $f_a(x, y, z) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx + q(y, z)$, com $q(y, z)$ uma quadrática não degenerada. Observe que os pontos críticos de $f_a(x, y, z)$ são dados pelos pontos $(x, y, z) = (x_i, 0, 0)$, com x_i ponto crítico de $x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$, $i = 1, 2, 3$ ou 4 . Assim, por abuso de notação, vamos denotar por $f_a(x)$ a função $f_a(x, y, z)$, uma vez que as variáveis y e z não são relevantes.

Os planos bitangentes são detectados quando f_a possuir dois pontos críticos com a mesma imagem, ou seja, o nosso lugar geométrico de interesse é justamente a superfície S dada pela parametrização (3.2). Fixando $u = u_0 < 0$ para analisar seções da união de S e $B(f_a)$, obtivemos anteriormente duas curvas no plano (v, w) dadas por:

$$\gamma(s) = (-10s^3 - 3u_0s, 15s^4 + 3u_0s^2) \quad (3.3)$$

$$\beta(s) = \left(2s(20s^2 + u_0), -60s^4 - 2u_0s^2 + \frac{u_0^2}{4} \right), \quad (3.4)$$

onde γ é a seção $u = u_0$ da parametrização do conjunto bifurcação como em (3.1) e β é a seção $u = u_0$ da parametrização da superfície S como em (3.2). Note que as curvas γ e β possuem pontos de interseção e auto interseção. Além disso, ambas as curvas possuem dois pontos de cúspides cada. Todos esses pontos estão representados na Figura 6.

A distribuição de pontos críticos de f_a ocorre da seguinte maneira: No interior da curva γ para w pertencente ao intervalo $(-\frac{3u_0^2}{20}, \frac{9u_0^2}{20})$, temos que f_a possui quatro pontos críticos reais, não degenerados e distintos. No interior da curva γ para $w > \frac{9u_0^2}{20}$, f_a possui quatro pontos críticos complexos conjugados. No exterior da curva γ , temos que f_a possui dois pontos críticos reais não degenerados e dois pontos críticos complexos conjugados. Sobre a curva γ , f_a pode ter pontos críticos com multiplicidade. Os nossos pontos de interesse são justamente os pontos sobre a curva β , que estão no interior da curva γ .

1. Seja $(v_0, w_0) \in \beta(s) - \left\{ \left(0, \frac{u_0^2}{5} \right) \right\}$, com v_0 e w_0 pertencentes, respectivamente, aos seguintes intervalos: $\left(u_0\sqrt{\frac{-2u_0}{3}}, -u_0\sqrt{\frac{-2u_0}{3}} \right)$ e $\left(-\frac{3u_0^2}{20}, \frac{9u_0^2}{20} \right)$ (ou seja, a curva β que está no interior da curva γ , com exceção do seu ponto de auto interseção). Então,

$$f_a(x) = x^5 + u_0x^3 + v_0x^2 + w_0x$$

Figura 6 – Pontos de interseção, auto interseção e pontos de cúspides das curvas γ e β .

possui quatro pontos críticos x_1, x_2, x_3 e x_4 , distintos e não degenerados (ou seja, dois deles são pontos de máximo local e outros dois são pontos de mínimo local). Como β é a curva onde f_a possui pelo menos dois pontos críticos com a mesma imagem, temos as seguintes possibilidades:

- Dois pontos de máximo local possuem a mesma imagem. Isso ocorre na curva representada em verde na Figura 7.
- Dois pontos de mínimo local possuem a mesma imagem. Isso ocorre na curva representada em azul na Figura 7.
- Um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local possuem a mesma imagem. Isso ocorre na curva representada em vermelho na Figura 7.

Figura 7 – Distribuição de máximos e mínimos com a mesma altura na curva β .

Logo, para toda vizinhança de p em M , existem 4 pontos distintos $q_k \in M$ tais que os hiperplanos tangentes $T_{q_k}M$ são todos paralelos, para $k = 1, 2, 3, 4$. Além disso, como f_a possui dois pontos críticos com a mesma imagem, segue que os hiperplanos tangentes em dois pontos q_1 e q_2 são iguais, ou seja, temos um hiperplano bitangente. Portanto, temos uma família de hiperplanos bitangentes cujo limite quando $q_k \rightarrow p$ é o próprio hiperplano tangente T_pM .

2. Considere agora o ponto de auto interseção da curva β , ou seja, $(v_0, w_0) = \left(0, \frac{u_0^2}{5}\right)$. Então

$$f_a(x) = x^5 + u_0x^3 + \frac{u_0^2}{5}x$$

possui quatro pontos críticos $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ e $\bar{x}_4$, distintos e não degenerados, com $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ pontos de máximo local e $\bar{x}_3$ e $\bar{x}_4$ pontos de mínimo local. Além disso, temos $f_a(\bar{x}_1) = f_a(\bar{x}_2)$ e $f_a(\bar{x}_3) = f_a(\bar{x}_4)$. Logo, para toda vizinhança de p em M , existem 4 pontos distintos $\bar{q}_k \in M$ tais que os hiperplanos tangentes $T_{\bar{q}_k}M$ são todos paralelos, para $k = 1, 2, 3, 4$. Mais do que isso, temos $T_{\bar{q}_1}M = T_{\bar{q}_2}M$ e $T_{\bar{q}_3}M = T_{\bar{q}_4}M$. Portanto, temos duas famílias de hiperplanos bitangentes cujo limite quando $\bar{q}_k \rightarrow p$ é o próprio hiperplano tangente T_pM .

□

Observação 3.2. Para completar informações na figura, descrevemos abaixo o que ocorre com os pontos críticos de f_a , com a sendo pontos especiais sobre a curva γ representada na Figura 6.

- (i) Seja $(v_0, w_0) = \left(0, \frac{9u_0^2}{20}\right)$. Assim, os pontos críticos de $f_a(x) = x^5 + u_0x^3 + \frac{9u_0^2}{20}x$ são dados por $x_1 = \frac{1}{10}\sqrt{-30u_0}$ e $x_2 = -\frac{1}{10}\sqrt{-30u_0}$, ambos com multiplicidade dois. Além disso, é fácil verificar que x_1 e x_2 são pontos de inflexão.
- (ii) Seja $(v_0, w_0) = \left(\frac{2u_0}{3}\sqrt{-\frac{u_0}{15}}, \frac{4u_0^2}{15}\right)$. Nesse caso, temos os seguintes pontos críticos: $x_1 = -2\sqrt{-\frac{u_0}{15}}$, que é um ponto de inflexão com multiplicidade dois, $x_2 = \sqrt{-\frac{u_0}{15}}$, que é um ponto de máximo local e $x_3 = \sqrt{-\frac{3u_0}{5}}$, que é um ponto de mínimo local. Além disso, $f_a(x_1) = f_a(x_3)$. O caso $(v_0, w_0) = \left(-\frac{2u_0}{3}\sqrt{-\frac{u_0}{15}}, \frac{4u_0^2}{15}\right)$ é análogo.
- (iii) Seja $(v_0, w_0) = \left(u_0\sqrt{-\frac{2u_0}{5}}, -\frac{3u_0^2}{20}\right)$. Os pontos críticos serão $x_1 = 3\sqrt{-\frac{u_0}{10}}$, que é um ponto de mínimo local, e $x_2 = -\sqrt{-\frac{u_0}{10}}$, que é um ponto de inflexão de multiplicidade três. O caso $(v_0, w_0) = \left(-u_0\sqrt{-\frac{2u_0}{5}}, -\frac{3u_0^2}{20}\right)$ é análogo.

O comportamento dos pontos críticos podem ser observados na Figura 8.

Figura 8 – Comportamento de f_a numa vizinhança de um ponto de rabo de andorinha.

3.3 Singularidade D_4^- da função altura

Seguindo as mesmas ideias anteriores, vamos analisar o que ocorre geometricamente na hipersuperfície M em uma vizinhança de uma singularidade do tipo D_4^- para a função altura. Considere o desdobramento versal da singularidade D_4^- , ou seja,

$$f_a(x, y, z) = x^3 - 3xy^2 + u(x^2 + y^2) + vx + wy \pm z^2,$$

onde $a = (u, v, w)$. Da mesma maneira, precisamos analisar o comportamento dos pontos críticos de f_a no seu conjunto bifurcação e verificamos que a variável z não será relevante nos cálculos. Podemos então considerar f_a como uma função das variáveis x e y . Usando as técnicas como em (BRÖCKER; LANDER, 1975) ou (POSTON; STEWART, 2014), podemos parametrizar o conjunto bifurcação de f_a por

$$B(f_a) : (u, t) \mapsto \left(u, \frac{u^2}{3}(\cos(2t) - 2\sin(t)), \frac{u^2}{3}(\sin(2t) - 2\cos(t)) \right).$$

A imagem de $B(f_a)$ é representada pela Figura 9 (à esquerda). Tomando $u \neq 0$ constante, temos uma seção de $B(f_a)$ visto no plano (v, w) (Figura 9 à direita).

Para estudarmos os pontos críticos de interesse de f_a no seu conjunto bifurcação, precisamos saber quando f_a possui pelo menos dois pontos críticos distintos com a mesma imagem

Figura 9 – Conjuntos bifurcação das singularidades D_4^- e uma seção com $u \neq 0$.

no espaço de parâmetros (u, v, w) , onde $v = \frac{u^2}{3}(\cos(2t) - 2\sin(t))$ e $w = \frac{u^2}{3}(\sin(2t) - 2\cos(t))$. Esse conjunto é descrito pelo Lema 3.4. Este lema inclui pontos críticos reais e complexos, mas consideraremos apenas a parte das soluções reais, como na Figura 10.

Lema 3.4. (BRUCE; GIBLIN; GIBSON, 1985) O conjunto para o qual f_a possui pelo menos dois pontos críticos com a mesma imagem é dado por três semiplanos com as seguintes condições:

- (i) $w = 0$, com $u^2 + v \geq 0$,
- (ii) $w = \sqrt{3}v$, com $u^2 - \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\sqrt{3}w \geq 0$ e
- (iii) $w = -\sqrt{3}v$, com $u^2 - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\sqrt{3}w \geq 0$.

Vamos fixar $u = u_0$ uma constante diferente de zero. Assim, temos a curva fechada no plano (v, w) da Figura 9, que vamos denotar por α , dada por

$$t \mapsto \alpha(t) = \left(\frac{u_0^2}{3}(\cos(2t) - 2\sin(t)), \frac{u_0^2}{3}(\sin(2t) - 2\cos(t)) \right).$$

Dessa maneira, para $u = u_0 \neq 0$, o conjunto de semiplanos dado no Lema 3.4 consiste em três semirretas. Através de cálculos simples, podemos verificar que os pares de pontos de interseção das retas $w = 0$, $w = \sqrt{3}v$ e $w = -\sqrt{3}v$ com α são, respectivamente, $\left\{ (-u_0^2, 0), \left(\frac{u_0^2}{3}, 0 \right) \right\}$, $\left\{ \left(\frac{u_0^2}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}u_0^2 \right), \left(-\frac{u_0^2}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}u_0^2 \right) \right\}$ e $\left\{ \left(\frac{u_0^2}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}u_0^2 \right), \left(-\frac{u_0^2}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}u_0^2 \right) \right\}$, onde $(-u_0^2, 0)$, $\left(\frac{u_0^2}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}u_0^2 \right)$ e $\left(\frac{u_0^2}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}u_0^2 \right)$ são os pontos de cúspide de α . A seção de $B(f_a)$, as retas e os pontos de interseção para $u = u_0$ são representados na Figura 10.

Fazendo um processo análogo ao anterior, conseguimos descrever o comportamento dos pontos críticos de f_a na seção de $B(f_a)$ para $u = u_0$. Novamente, nossa região de interesse é no interior da curva α e, a partir desta análise, temos o resultado seguinte.

Proposição 3.5. Seja $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão suave de uma hipersuperfície e denote $M = \psi(U)$. Se p é um ponto umbílico elíptico (D_4^-) da aplicação de Gauss de M , então as afirmações a seguir são verdadeiras.

Figura 10 – Pontos de interseção e retas nas quais f_a possui pontos críticos na mesma altura.

1. Para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos q_1, q_2, q_3 e q_4 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ e os hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos. E mais, temos $T_{q_1}M = T_{q_2}M = T_{q_3}M$, ou seja, T_pM é o limite de uma sequência de hiperplanos tri-tangentes.
2. Para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ e $\bar{q}_4$ em M tais que $|p - \bar{q}_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ e os hiperplanos tangentes de M em $\bar{q}_k$ são todos paralelos. E mais, temos $T_{\bar{q}_1}M = T_{\bar{q}_2}M$, ou seja, T_pM é o limite de uma sequência de hiperplanos bitangentes.

Demonstração. Considere $u = u_0 \neq 0$. Assim, temos que $f_a(x, y) = x^3 - 3xy^2 + u_0(x^2 + y^2) + vx + wy$ e seus pontos críticos são dados pelos pontos (x, y) tais que

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 + 2u_0x + v = 0 \\ -6xy + 2u_0y + w = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

1. Considere o ponto de interseção das três semirretas provenientes do Lema 3.4, ou seja, o ponto $(v, w) = (0, 0)$ quando $u = u_0 \neq 0$. Assim, temos $f_a(x, y) = x^3 - 3xy^2 + u_0(x^2 + y^2)$

e o sistema (3.5) fica da forma

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 + 2u_0x = 0 \\ -6xy + 2u_0y = 0. \end{cases}$$

Portanto, os pontos críticos de f_a para este caso são dados por

$$p_1 = (0,0), \quad p_2 = \left(-\frac{2u_0}{3}, 0\right), \quad p_3 = \left(-\frac{u_0}{3}, -\sqrt{\frac{u_0^2}{2}}\right) \quad \text{e} \quad p_4 = \left(-\frac{u_0}{3}, \sqrt{\frac{u_0^2}{2}}\right).$$

Para determinarmos a natureza de cada ponto crítico $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, devemos calcular o determinante da Hessiana $H(f_a)(p_i)$ de f_a em cada um deles. Como $\det H(f_a)(x, y) = -36(x^2 + y^2) + 4u_0^2$, temos o seguinte: Os pontos p_2 , p_3 e p_4 são pontos de sela e o ponto p_1 é um ponto de máximo local quando $u_0 < 0$ e um ponto de mínimo local quando $u_0 > 0$. Além disso, temos que

$$f_a(p_2) = f_a(p_3) = f_a(p_4) = \frac{4}{27}u_0^3,$$

ou seja, temos três pontos críticos de f_a com a mesma imagem. Isso corresponde a um hiperplano tri-tangente em M cujo limite é $T_p M$ quando os pontos correspondentes se aproximam da singularidade p .

2. Vamos analisar os pontos críticos de f_a sobre as semirretas provenientes do Lema 3.4 e no interior da curva α , ou seja, sobre os segmentos de retas como na Figura 10.

- (i) Considere a reta $w = 0$ com v pertencente ao intervalo $\left(-u_0^2, \frac{u_0^2}{3}\right)$. Assim, os pontos $p_i = (x_i, y_i)$ que satisfazem o sistema (3.5) são dados por

$$p_1 = \left(\frac{-u_0 + \sqrt{u_0^2 - 3v}}{3}, 0\right), \quad p_2 = \left(\frac{-u_0 - \sqrt{u_0^2 - 3v}}{3}, 0\right),$$

$$p_3 = \left(\frac{u_0}{3}, -\sqrt{\frac{u_0^2 + v}{3}}\right) \quad \text{e} \quad p_4 = \left(\frac{u_0}{3}, \sqrt{\frac{u_0^2 + v}{3}}\right).$$

Logo, temos o seguinte: se $u_0 < 0$, então p_1 , p_3 e p_4 são pontos de sela e p_2 é ponto de máximo local. Se $u_0 > 0$, temos que p_2 , p_3 e p_4 são pontos de sela e p_1 é ponto de mínimo local. Em ambos os casos, temos

$$f_a(p_3) = f_a(p_4) = \frac{1}{27}(4u_0^2 + 9u_0v).$$

- (ii) Considere a reta $w = \sqrt{3}v$ com v em $\left(-\frac{u_0^2}{6}, \frac{u_0^2}{2}\right)$ e w em $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}u_0^2, \frac{\sqrt{3}}{2}u_0^2\right)$. Novamente, temos quatro pontos reais e distintos $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, que satisfazem o sistema (3.5): Se $u_0 < 0$, então p_1 , p_2 e p_3 são pontos de sela e p_4 é ponto de máximo

local. Se $u_0 > 0$, temos que p_1, p_2 e p_4 são pontos de sela e p_3 é ponto de mínimo local. Neste caso, também temos dois pontos de sela com a mesma altura, pois em ambos os casos

$$f_{\mathbf{a}}(p_1) = f_{\mathbf{a}}(p_2) = \frac{2}{27}(2u_0^3 - 9u_0v).$$

- (iii) Por fim, considere a reta $w = -\sqrt{3}v$ com v em $\left(-\frac{u_0^2}{6}, \frac{u_0^2}{2}\right)$ e w em $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}u_0^2, -\frac{\sqrt{3}}{2}u_0^2\right)$. De maneira análoga, também temos quatro pontos críticos reais e distintos $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, onde p_1, p_2 e p_3 são pontos de sela e p_4 é ponto de máximo local (se $u_0 < 0$) e p_1, p_2 e p_4 são pontos de sela e p_3 é ponto de mínimo local (se $u_0 > 0$). E ainda,

$$f_{\mathbf{a}}(p_1) = f_{\mathbf{a}}(p_2) = \frac{2}{27}(2u_0^3 - 9u_0v).$$

Portanto, como os pontos críticos de $f_{\mathbf{a}}$ com a mesma imagem correspondem a hiperplanos bitangentes em M , temos uma família de hiperplanos bitangentes cujo limite é $T_p M$.

□

Observação 3.3. Temos que $f_{\mathbf{a}}$ possui quatro pontos críticos reais e distintos apenas sobre os segmentos de reta $w = 0$ e $w = \pm\sqrt{3}v$ que estão interior de α , e não em toda a região que está no interior da curva α , como no caso do rabo de andorinha na Seção 3.2. Além disso, temos os seguintes casos:

- Fora das retas $w = 0$ e $w = \pm\sqrt{3}v$, temos quatro pontos críticos complexos no interior de α ;
- No exterior de α , temos que $f_{\mathbf{a}}$ possui dois pontos críticos reais e dois complexos;
- Nos pontos de cúspides, ou seja, nos pontos $(-u_0^2, 0)$, $\left(\frac{u_0^2}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}u_0^2\right)$ e $\left(\frac{u_0^2}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}u_0^2\right)$, temos que $f_{\mathbf{a}}$ possui um ponto de sela e um ponto crítico real de multiplicidade três.

3.4 Singularidade D_4^+ da função altura

Finalmente, vamos analisar o que ocorre geometricamente na hipersuperfície M em uma vizinhança de uma singularidade do tipo D_4^+ para a função altura. Considere o desdobramento versal da singularidade D_4^+ , ou seja,

$$f_{\mathbf{a}}(x, y, z) = x^3 + y^3 + uxy + vx + wy \pm z^2,$$

onde $a = (u, v, w)$. Podemos considerar $f_{\mathbf{a}}$ como uma função das variáveis x e y . O conjunto bifurcação de $f_{\mathbf{a}}$ é dado pelo cone $36xy - u^2 = 0$ tal que $v = -3x^2 - uy$ e $w = -3y^2 - ux$. Assim,

tomando $u = 6\alpha$, $x = \alpha\varepsilon$ e $y = \frac{\alpha}{\varepsilon}$ (ver (POSTON; STEWART, 2014) para detalhes), podemos parametrizar o conjunto bifurcação $B(f_a)$ por

$$B(f_a) : \left(6\alpha, \alpha^2 \left(-\frac{6}{\varepsilon} - 3\varepsilon^2 \right), \alpha^2 \left(-6\varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2} \right) \right) = (u, v, w).$$

O conjunto que contempla os pontos críticos de f_a que possuem a mesma imagem no espaço de parâmetros (u, v, w) é descrito pelo Lema a seguir.

Lema 3.6. (BRUCE; GIBLIN; GIBSON, 1985) O conjunto para o qual f_a possui pelo menos dois pontos críticos com a mesma imagem é dado por $v = w$ com a condição $u^2 + 4v \leq 0$.

Quando fixamos $u = u_0$ uma constante diferente de zero, temos que o conjunto descrito no Lema 3.6 é dado por uma semirreta. Podemos analisar a seção de $B(f_a)$ juntamente com essa semirreta (Figura 11), analogamente ao que foi feito nas seções anteriores. Logo, temos o resultado a seguir.

Figura 11 – Seção de $B(f_a)$ e semirreta na qual f_a possui pontos críticos na mesma altura quando $u = u_0 \neq 0$.

Proposição 3.7. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão suave de uma hipersuperfície e denote $M = \psi(U)$. Se p é um ponto umbílico hiperbólico (D_4^+) da aplicação de Gauss de M , então para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos q_1, q_2, q_3 e q_4 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ e os hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos. E mais, temos $T_{q_1}M = T_{q_2}M$, ou seja, T_pM é o limite de uma sequência de hiperplanos bitangentes.

Demonstração. É fácil ver que sobre a semirreta $v = w$ com a condição $u_0^2 + 4v < 0$ (ou seja, estamos desconsiderando o ponto de cúspide $(-\frac{u_0^2}{4}, -\frac{u_0^2}{4})$), f_a possui quatro pontos críticos reais e distintos, $p_i = (x_i, y_i)$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Desses quatro pontos, temos que p_1 e p_2 são pontos de sela, p_3 é um ponto de máximo local e p_4 é um ponto de mínimo local, com $f_a(p_1) = f_a(p_2)$. Isso vale quando $u_0 > 0$ ou $u_0 < 0$, logo, temos uma família de hiperplanos bitangentes em M cujo limite é $T_p M$. $\square$

Observação 3.4. Fora da semirreta $v = w$ com $u_0^2 + 4v < 0$, ainda temos os seguintes casos:

- No ponto de cúspide $(v, w) = (-\frac{u_0^2}{4}, -\frac{u_0^2}{4})$ de $B(f_a)$, f_a possui dois pontos críticos reais, onde um deles tem multiplicidade três.
- No ponto $(v, w) = (-\frac{u_0^2}{12}, -\frac{u_0^2}{12})$ de $B(f_a)$, f_a possui um ponto crítico real com multiplicidade dois e dois pontos críticos complexos que possuem a mesma imagem.
- Na semirreta $v = w$, com $v > \frac{u_0^2}{12}$ e $w > \frac{u_0^2}{12}$, temos quatro pontos críticos complexos e distintos, onde dois deles possuem a mesma imagem.
- No ponto $(v, w) = (0, 0)$, f_a possui dois pontos críticos reais e distintos p_1 e p_2 e dois pontos críticos complexos conjugados p_3 e p_4 , onde p_1 é um ponto de sela e p_2 é um ponto de mínimo local ou máximo local (dependendo do sinal de u_0). Além disso, temos $f_a(p_2) = f_a(p_3) = f_a(p_4)$.

3.5 Consequências

A partir das Proposições 3.1, 3.3, 3.5 e 3.7, observamos que a existência de hiperplanos bitangentes que convergem para $T_p M$ acontece em todos os casos (A_3 , A_4 e $D_4^\pm$). No entanto, essa propriedade caracteriza apenas as singularidades do tipo cúspide de Gauss, já que este é o único caso em que existem três pontos críticos de f_a , como visto na Proposição 3.1. Logo, temos o Corolário 3.8 que corresponde à recíproca da Proposição 3.1. Nos outros casos, f_a possui quatro pontos críticos distintos.

Corolário 3.8. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão suave de uma hipersuperfície. Denote $M = \psi(U)$ e considere $p \in M$. Se a aplicação de Gauss de M é estável e para cada $\varepsilon > 0$, existem três pontos distintos q_1 , q_2 e q_3 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3$ cujos hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos, com $T_{q_1} M = T_{q_2} M$, então p é um ponto de cúspide da aplicação de Gauss.

Podemos diferenciar facilmente a singularidade p do tipo A_4 da singularidade p do tipo D_4^- pelas duas sequências de hiperplanos bitangentes e pela sequência de hiperplano tri-tangente, respectivamente, convergindo para $T_p M$. Assim, como estamos considerando aplicações de

Gauss estáveis, temos o Corolários 3.9 e 3.10, que correspondem à recíproca dos Teoremas 3.3 e 3.5, respectivamente.

Corolário 3.9. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão suave de uma hipersuperfície. Denote $M = \psi(U)$ e considere $p \in M$. Se a aplicação de Gauss de M é estável e para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos q_1, q_2, q_3 e q_4 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ cujos hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos, com $T_{q_1}M = T_{q_2}M$ e $T_{q_3}M = T_{q_4}M$, então p é um ponto de rabo de andorinha da aplicação de Gauss.

Corolário 3.10. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão suave de uma hipersuperfície. Denote $M = \psi(U)$ e considere $p \in M$. Se a aplicação de Gauss de M é estável e para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos q_1, q_2, q_3 e q_4 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ cujos hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos, com $T_{q_1}M = T_{q_2}M = T_{q_3}M$, então p é um ponto umbílico elíptico da aplicação de Gauss.

Quando p é um ponto do tipo umbílico hiperbólico da aplicação de Gauss, somente a existência de hiperplanos bitangentes que convergem para T_pM não caracteriza essa singularidade, pois para as singularidades do tipo A_4 e D_4 também existem quatro pontos críticos de f_a e portanto a situação desses casos na vizinhança de p não se distinguem. Assim, temos o seguinte Corolário da Proposição 3.7:

Corolário 3.11. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão suave de uma hipersuperfície. Denote $M = \psi(U)$ e considere $p \in M$. Se a aplicação de Gauss de M é estável e para cada $\varepsilon > 0$, existem quatro pontos distintos q_1, q_2, q_3 e q_4 em M tais que $|p - q_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, 4$ cujos hiperplanos tangentes de M em q_k são todos paralelos, com $T_{q_1}M = T_{q_2}M$, mas não existem hiperplanos tri-tangentes ou sequência dupla de hiperplanos bitangentes, então p é um ponto umbílico hiperbólico da aplicação de Gauss.

GEOMETRIA DO CONJUNTO PARABÓLICO DE UMA HIPERSUPERFÍCIE EM $\mathbb{R}^4$

Dada uma hipersuperfície M imersa em $\mathbb{R}^4$, podemos estudar o contato de M com hiperplanos a fim de obtermos informações geométricas relevantes. Esse contato pode ser estudado através das singularidades da função altura sobre M . Segundo resultados de (LOOIJENGA, 1974) e (MONTALDI, 1991), as singularidades que podem ocorrer, genericamente, são as singularidades do tipo A_k , $k = 1, \dots, 4$ e $D_4^\pm$. Em (NABARRO, 2003), foi mostrado que, genericamente, as singularidades do tipo A_2 ocorrem sobre uma superfície suave (conjunto parabólico de M), as singularidades do tipo A_3 ocorrem sobre uma curva suave contida no conjunto parabólico de M (curva A_3) e as singularidades do tipo A_4 ocorrem em pontos isolados sobre a curva A_3 . Além disso, as singularidades do tipo $D_4^\pm$ ocorrem em pontos isolados de M e nesse caso, o conjunto parabólico é localmente um cone. Em D_4^+ , o conjunto A_3 é uma reta contida neste cone. Em D_4^- , o conjunto A_3 é constituído de três retas contidas neste cone.

De maneira análoga, podemos estudar as singularidades da função altura sobre uma superfície em $\mathbb{R}^4$. Nesse caso, também temos que as singularidades que podem ocorrer, genericamente, são as singularidades do tipo A_k , $k = 1, \dots, 4$ e $D_4^\pm$. Em (MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 1995), as autoras mostraram que o conjunto de singularidades do tipo A_3 da função altura é, genericamente, uma curva suave e as singularidades do tipo A_4 da função altura ocorrem em pontos isolados da curva A_3 . O conjunto de singularidades D_4 é um cruzamento normal ou é um ponto isolado do conjunto parabólico da superfície que é dado pelas transições de Morse.

Chamaremos as geometrias descritas acima de geometrias genéricas da hipersuperfície e da superfície, respectivamente. No nosso caso, o conjunto parabólico de uma dada hipersuperfície M em $\mathbb{R}^4$ é uma superfície em $\mathbb{R}^4$. Sendo assim, podemos estudar a relação da função altura sobre M e da função altura sobre seu conjunto parabólico numa mesma direção, que obrigatoriamente será a direção normal à hipersuperfície M .

Neste capítulo, vamos denotar por M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$ e por $\Sigma\Gamma$ seu conjunto parabólico. Dado o vetor normal unitário $\mathbf{v} \in N_p M$ a $p \in M$, vamos usar a seguinte notação: a função altura de M na direção $\mathbf{v}$ é denotada por $H_{\mathbf{v}}$ e a função altura de $\Sigma\Gamma$ na direção $\mathbf{v}$ é denotada por $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$.

A seguir, exibimos o resultado principal deste capítulo.

Teorema. Sejam $H_{\mathbf{v}}$ a função altura sobre uma hipersuperfície suave M em $\mathbb{R}^4$ e $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ a função altura sobre a superfície $\Sigma\Gamma$ na direção $\mathbf{v}$ normal à M em p . Então, para um subconjunto de imersões genéricas de M ,

1. p é singularidade do tipo A_2 de $H_{\mathbf{v}}$ se, e somente se, p é singularidade do tipo A_1 de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$,
2. se p é singularidade do tipo A_3 versal de $H_{\mathbf{v}}$, então p é, genericamente, singularidade do tipo A_3 de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ e, em pontos isolados, pode ter singularidade do tipo A_4 ou D_4 . Se p é singularidade do tipo A_3 de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$, então p é singularidade do tipo A_3 versal de $H_{\mathbf{v}}$,
3. p é singularidade do tipo A_4 versal de $H_{\mathbf{v}}$ se, e somente se, p é, genericamente, singularidade do tipo A_4 de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$.
4. singularidades do tipo A_2 de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ não ocorrem em p . Ou seja, singularidades do tipo A_2 podem ocorrer para $\tilde{H}_{\mathbf{w}}$, com $\mathbf{w} \in N_p \Sigma\Gamma$ mas tal que $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$.

Em relação à geometria de $\Sigma\Gamma$, temos o seguinte:

5. Se p é singularidade do tipo A_3 versal de $H_{\mathbf{v}}$ e A_3 de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$, então $p \in \Sigma\Gamma$ é ponto parabólico ou hiperbólico. O caso hiperbólico acontece se, e somente se, $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ também tem singularidade do tipo A_3 versal.
6. Se p é singularidade do tipo A_3 versal de $H_{\mathbf{v}}$ e A_4 (D_4) de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$, então $p \in \Sigma\Gamma$ é ponto hiperbólico (de inflexão).
7. Se p é singularidade do tipo A_4 versal de $H_{\mathbf{v}}$, então $p \in \Sigma\Gamma$ é ponto hiperbólico.
8. Se p é singularidade do tipo A_3 versal de $H_{\mathbf{v}}$ e a curvatura κ da curva A_3 em M é nula, então $p \in \Sigma\Gamma$ é ponto de inflexão.

4.1 Funções altura sobre uma hipersuperfície M e seu conjunto parabólico

Seja $M = \psi(U)$ uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$ na sua forma de Monge,

$$\begin{aligned} \psi : U &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\mapsto \psi(x, y, z) = (x, y, z, f(x, y, z)), \end{aligned}$$

com $f \in \mathcal{M}_3^2$ e $p \in M$, onde estamos supondo, por translações, que p é a origem, $f_x = f_y = f_z = 0$ em $(0, 0, 0)$ e, após uma rotação de eixos, $f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = 0$ em $(0, 0, 0)$. Considere o k -jato da f , $k = 2, 3, \dots$, dado por

$$\begin{aligned} j^2 f &= a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2, \\ j^3 f &= j^2 f + a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{120}xy^2 + a_{030}y^3 + a_{003}z^3 + a_{012}yz^2 + a_{021}y^2z + a_{102}xz^2 \\ &\quad + a_{201}x^2z + a_{111}xyz, \\ j^4 f &= j^3 f + a_{400}x^4 + a_{310}x^3y + a_{220}x^2y^2 + a_{130}xy^3 + a_{040}y^4 + a_{031}y^3z + a_{022}y^2z^2 \\ &\quad + a_{013}yz^3 + a_{004}z^4 + a_{301}x^3z + a_{202}x^2z^2 + a_{103}xz^3 + a_{211}x^2yz + a_{121}xy^2z + a_{112}xyz^2, \\ j^5 f &= j^4 f + a_{500}x^5 + a_{410}x^4y + a_{320}x^3y^2 + a_{230}x^2y^3 + a_{140}xy^4 + a_{050}y^5 + a_{041}y^4z \\ &\quad + a_{032}y^3z^2 + a_{023}y^2z^3 + a_{014}yz^4 + a_{005}z^5 + a_{401}x^4z + a_{302}x^3z^2 + a_{203}x^2z^3 + a_{104}xz^4 \\ &\quad + a_{113}xyz^3 + a_{122}xy^2z^2 + a_{131}xy^3z + a_{212}x^2yz^2 + a_{221}x^2y^2z + a_{311}x^3yz \end{aligned}$$

e assim por diante. Logo, podemos escrever f como

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{120}xy^2 + a_{030}y^3 + a_{003}z^3 \\ &\quad + a_{012}yz^2 + a_{021}y^2z + a_{102}xz^2 + a_{201}x^2z + a_{111}xyz + a_{400}x^4 + a_{310}x^3y \\ &\quad + a_{220}x^2y^2 + a_{130}xy^3 + a_{040}y^4 + a_{031}y^3z + a_{022}y^2z^2 + a_{013}yz^3 + a_{004}z^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sem perda de generalidade, se $a_{200}a_{020} \neq 0$ e $a_{002} = 0$, teremos em p singularidades de corank 1 para a função altura H_v de M , se v é normal à M em p . As condições sobre os coeficientes de f para que essas singularidades ocorram, assim como seus respectivos desdobramentos versais, estão descritas na proposição a seguir. Embora as singularidades do tipo umbílicas ($D_4^\pm$) ocorram genericamente, não vamos considerá-las neste capítulo. A razão pela qual não vamos analisar tais singularidades se deve ao fato de que, neste caso, o conjunto parabólico de M é uma superfície singular e nossos métodos de demonstrações são para superfícies regulares.

Proposição 4.1. (NABARRO, 2003) Suponha $a_{200}a_{020} \neq 0$, a função altura H_v de M na direção $v \in N_p M$ possui as seguintes singularidades de corank 1 em p :

$$\begin{aligned} A_2 &\Leftrightarrow a_{002} = 0 \text{ e } a_{003} \neq 0; \\ A_3 &\Leftrightarrow a_{002} = 0, a_{003} = 0 \text{ e } 4a_{004}a_{020}a_{200} - a_{012}^2a_{200} - a_{102}^2a_{020} \neq 0; \\ A_4 &\Leftrightarrow a_{002} = 0, a_{003} = 0, 4a_{004}a_{020}a_{200} - a_{012}^2a_{200} - a_{102}^2a_{020} = 0 \text{ e} \\ &\quad 4a_{005}a_{200}^2a_{020}^2 + a_{021}a_{012}^2a_{200}^2 - 2a_{012}a_{013}a_{020}a_{200}^2 + a_{012}a_{020}a_{102}a_{111}a_{200} \\ &\quad + a_{201}a_{102}^2a_{020}^2 - 2a_{103}a_{102}a_{200}a_{020}^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Essas singularidades são desdobradas versalmente pela família de funções altura quando:

$$\begin{aligned} A_{\leq 2} &: \text{sempre,} \\ A_3 &\Leftrightarrow a_{012} \neq 0 \text{ ou } a_{102} \neq 0 \text{ e} \\ A_4 &\Leftrightarrow a_{102}\varphi(a_{ijk}) \neq 0, \end{aligned}$$

onde $\varphi(a_{ijk})$ é um polinômio de grau 12 nos coeficientes a_{ijk} , com $0 \leq i + j + k \leq 5$ (ver (NABARRO, 2000)).

Observe que, pelo número de condições e pelo Teorema de transversalidade, as singularidades do tipo A_3 e A_4 não versais da função altura não fazem parte da geometria genérica de M .

Dada uma hipersuperfície $M = \psi(U)$ em $\mathbb{R}^4$, a imagem de $\Sigma\Gamma$ por ψ é, genericamente, uma superfície suave, chamada de conjunto parabólico. Vamos fazer a identificação dos conjuntos $\Sigma\Gamma \equiv \psi(\Sigma\Gamma)$. Considerando $\Sigma\Gamma$ como uma superfície em $\mathbb{R}^4$, podemos fazer a seguinte pergunta: nos pontos destes conjuntos, há uma relação entre as singularidades da função altura H na direção $\mathbf{v}$ e as singularidades da função altura $\tilde{H}$ sobre a superfície $\Sigma\Gamma$ na mesma direção $\mathbf{v}$? Obviamente, $\mathbf{v}$ deve ser o vetor normal à M em p , pois essa é a condição necessária para que $H_{\mathbf{v}}$ tenha singularidade em p . No exemplo a seguir, uma singularidade do tipo A_3 de $H_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo A_3 de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$.

Exemplo 4.2. Seja M uma hipersuperfície dada por $\psi(x, y, z) = (x, y, z, f(x, y, z))$, onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - xz^2 + y^2z + z^4$. Tome $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 1) \in S^3$ e considere a função altura sobre M na direção $\mathbf{v}$:

$$H_{\mathbf{v}}(x, y, z) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - xz^2 + y^2z + z^4.$$

Neste exemplo, temos $a_{003} = 0$ e $4a_{004}a_{020}a_{200} - a_{012}^2a_{200} - a_{102}^2a_{020} = 3 \neq 0$. Portanto, $H_{\mathbf{v}}$ possui uma singularidade do tipo A_3 na origem. O conjunto parabólico de M é dado pelos pontos (x, y, z) que anulam o determinante da matriz Hessiana de $f(x, y, z)$.

$$\text{Hess}(f(x, y, z)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2z \\ 0 & 2z + 2 & 2y \\ -2z & 2y & 12z^2 - 2x \end{pmatrix}.$$

Logo, o conjunto parabólico é dado por $\Sigma\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5z^3 - xz - y^2 + 5z^2 - x = 0\}$. Observe que, em $5z^3 - xz - y^2 + 5z^2 - x = 0$, podemos escrever x em função das variáveis y e z . Assim, temos $x = y^2z - y^2 + 5z^2 - y^2z^2 + \dots$. Substituindo esse novo x na parametrização de M , obtemos M restrita ao seu conjunto parabólico, que é a superfície suave parametrizada por

$$\Sigma\Gamma : (y, z) \mapsto (-y^2 + 5z^2 + y^2z - y^2z^2 + \text{t.o.m.}, y, z, y^2 + y^2z + y^4 + 21z^4 - 9y^2z^2 + \text{t.o.m.}),$$

onde t.o.m. significa termos de ordem maior. Considere agora a função altura $\tilde{H}$ sobre essa superfície na direção $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 1)$, ou seja,

$$\tilde{H}_{\mathbf{v}} = y^2 + y^2z + y^4 + 21z^4 - 9y^2z^2 + \text{t.o.m..}$$

Fazendo mudanças de coordenadas convenientes, obtemos que $\tilde{H}_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{R}} y^2 + 21z^4$, ou seja, $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ possui uma singularidade do tipo A_3 , assim como $H_{\mathbf{v}} = f(x, y, z)$.

O caso geral é analisado na proposição a seguir e a recíproca desse resultado é dada pelo Corolário 4.5. Considere a hipersuperfície M , $\psi(x, y, z) = (x, y, z, f(x, y, z))$, com f como em (4.1).

Observação 4.1. Vimos na Proposição 4.1 que, com certas condições, as singularidades do tipo A_3 e A_4 são desdobradas versalmente pela família de funções altura. Por abuso de linguagem, vamos dizer apenas que as singularidades são do tipo A_3 versal ou A_4 versal.

Proposição 4.3. Sejam H_v a função altura sobre a hipersuperfície M e $\tilde{H}_v$ a função altura sobre a superfície $\Sigma\Gamma$ na direção v normal à M em p . Então, para um subconjunto de imersões genéricas de M ,

1. p é singularidade do tipo A_2 de $H_v \Rightarrow p$ é singularidade do tipo A_1 de $\tilde{H}_v$,
2. p é singularidade do tipo A_3 versal de $H_v \Rightarrow p$ é, genericamente, singularidade do tipo A_3 de $\tilde{H}_v$ e, em pontos isolados, pode ter singularidade do tipo A_4 ou D_4 ,
3. p é singularidade do tipo A_4 versal de $H_v \Rightarrow p$ é, genericamente, singularidade do tipo A_4 de $\tilde{H}_v$.

Além disso, temos as seguintes condições para o item 2:

- (i) p é singularidade do tipo A_3 de $\tilde{H}_v$ se, e somente se, $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 \neq 0$ e $9a_{004} a_{020} a_{200} - 2a_{200} a_{012}^2 - 2a_{020} a_{102}^2 \neq 0$;
- (ii) p é singularidade do tipo A_4 de $\tilde{H}_v$ se, e somente se, $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 \neq 0$, $9a_{004} a_{020} a_{200} - 2a_{200} a_{012}^2 - 2a_{020} a_{102}^2 = 0$ e $21a_{005} a_{200}^2 a_{020}^2 + 4a_{021} a_{012}^2 a_{200}^2 - 9a_{012} a_{013} a_{020} a_{200}^2 + 4a_{012} a_{020} a_{102} a_{111} a_{200} + 4a_{201} a_{102}^2 a_{020}^2 - 9a_{103} a_{102} a_{200} a_{020}^2 \neq 0$;
- (iii) p é singularidade do tipo D_4 de $\tilde{H}_v$ se, e somente se, $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 = 0$ e

$$\begin{aligned} & a_{012}(48a_{004}a_{012}^4a_{102}a_{200}a_{300} - 96a_{004}a_{012}^4a_{200}^2a_{202} + 96a_{004}a_{012}^4a_{200}a_{201}^2 - \\ & 48a_{004}a_{012}^3a_{102}^2a_{200}a_{210} - 96a_{004}a_{012}^3a_{200}a_{111}a_{201}a_{102} + 96a_{004}a_{012}^3a_{200}^2a_{112}a_{102} - \\ & 96a_{004}a_{200}^2a_{012}^2a_{022}a_{102}^2 + 48a_{004}a_{012}^2a_{102}^3a_{120}a_{200} + 96a_{004}a_{012}a_{021}a_{102}^3a_{111}a_{200} - \\ & 48a_{004}a_{012}a_{030}a_{102}^4a_{200} - 96a_{004}a_{021}^2a_{102}^4a_{200} + 25a_{012}^4a_{201}^2a_{102}^2 + 36a_{012}^4a_{200}^2a_{103}^2 - \\ & 60a_{012}^4a_{200}a_{103}a_{201}a_{102} + 60a_{012}^3a_{013}a_{200}a_{201}a_{102}^2 - 72a_{012}^3a_{013}a_{200}^2a_{103}a_{102} - \\ & 50a_{012}^3a_{102}^3a_{111}a_{201} + 60a_{012}^3a_{103}a_{111}a_{200}a_{102}^2 + 60a_{012}a_{013}a_{021}a_{102}^4a_{200} + \\ & 36a_{012}^2a_{200}^2a_{012}^2a_{102}^2 - 60a_{012}^2a_{013}a_{102}^3a_{111}a_{200} - 60a_{012}^2a_{021}a_{102}^3a_{103}a_{200} + \\ & 50a_{012}^2a_{021}a_{102}^4a_{201} + 25a_{012}^2a_{102}^4a_{111}^2 - 50a_{012}a_{021}a_{102}^5a_{111} + 25a_{021}^2a_{102}^6) \neq 0 \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $H_v(x, y, z) = f(x, y, z)$, onde f é como em (4.1). Como o conjunto parabólico de M , $\Sigma\Gamma$, é dado pelos pontos (x, y, z) que anulam o determinante da matriz Hessiana de f , segue

que $\Sigma\Gamma$ é igual a $P^{-1}(0)$, onde

$$\begin{aligned}
 P(x, y, z) = & 8a_{200}a_{020}a_{002} + (24a_{002}a_{020}a_{300} + 8a_{002}a_{200}a_{120} + 8a_{020}a_{102}a_{200})x + (8a_{002}a_{020}a_{210} \\
 & + 24a_{002}a_{030}a_{200} + 8a_{012}a_{020}a_{200})y + (8a_{002}a_{020}a_{201} + 8a_{002}a_{021}a_{200} + 24a_{003}a_{020}a_{200})z \\
 & + (48a_{002}a_{020}a_{400} + 24a_{002}a_{120}a_{300} + 8a_{002}a_{200}a_{020} - 8a_{002}a_{210}^2 - 8a_{020}a_{201}^2 - 2a_{111}^2a_{200} \\
 & + 24a_{020}a_{102}a_{300} + 8a_{020}a_{200}a_{202} + 8a_{102}a_{120}a_{200})x^2 + (24a_{002}a_{020}a_{310} + 72a_{002}a_{030}a_{300} \\
 & - 8a_{002}a_{120}a_{210}) + 24a_{002}a_{130}a_{200} + 24a_{012}a_{020}a_{300} + 8a_{012}a_{120}a_{200} + 8a_{020}a_{102}a_{210} \\
 & - 8a_{020}a_{111}a_{201} + 8a_{020}a_{112}a_{200} - 8a_{021}a_{111}a_{200} + 24a_{030}a_{102}a_{200})xy + (24a_{002}a_{020}a_{301} \\
 & + 24a_{002}a_{021}a_{300} - 8a_{002}a_{111}a_{210} + 8a_{002}a_{120}a_{201} + 8a_{002}a_{121}a_{200} + 72a_{003}a_{020}a_{300} \\
 & + 24a_{003}a_{120}a_{200} - 8a_{012}a_{111}a_{200} - 8a_{020}a_{102}a_{201} + 24a_{020}a_{103}a_{200} + 8a_{021}a_{102}a_{200})xz \\
 & + (8a_{002}a_{020}a_{200} + 24a_{002}a_{030}a_{210} + 48a_{002}a_{040}a_{200} - 8a_{002}a_{120}^2 - 2a_{020}a_{111}^2 - 8a_{021}^2a_{200} \\
 & + 8a_{012}a_{020}a_{210} + 24a_{012}a_{030}a_{200} + 8a_{020}a_{022}a_{200})y^2 + (8a_{002}a_{020}a_{211} + 8a_{002}a_{021}a_{210} \\
 & + 24a_{002}a_{030}a_{201} + 24a_{002}a_{031}a_{200} - 8a_{002}a_{111}a_{120} + 24a_{003}a_{020}a_{210} + 72a_{003}a_{030}a_{200} \\
 & + 8a_{012}a_{020}a_{201} - 8a_{012}a_{021}a_{200} + 24a_{013}a_{020}a_{200} - 8a_{020}a_{102}a_{111})yz + (8a_{002}a_{020}a_{202} \\
 & + 8a_{002}a_{021}a_{201} + 8a_{002}a_{022}a_{200} + 48a_{004}a_{020}a_{200} + 24a_{003}a_{020}a_{201} + 24a_{003}a_{021}a_{200} \\
 & - 2a_{002}a_{111}^2 - 8a_{012}^2a_{200} - 8a_{020}a_{102}^2)z^2 + \text{t.o.m.}
 \end{aligned}$$

1. Considere $H_v = f(x, y, z)$ com uma singularidade do tipo A_2 . Logo, pela Proposição 4.1, temos que $a_{002} = 0$ e $a_{003} \neq 0$. Note que $P_z(0, 0, 0) = 24a_{003}a_{020}a_{200} \neq 0$, então podemos escrever a variável z em função de x e y , ou seja,

$$z = c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2 + c_6x^3 + c_7x^2y + c_8xy^2 + c_9y^3 + \dots$$

Substituindo esse novo z em $P(x, y, z) = 0$ e encontrando os coeficientes c_i , obtemos

$$z = \frac{-1}{3a_{003}}(a_{102}x + a_{012}y) + \varphi_1(x, y),$$

onde $\varphi_1(x, y) \in \mathcal{M}_2^2$. Assim, a superfície $\Sigma\Gamma$ pode ser parametrizada por

$$(x, y) \mapsto \left(x, y, \frac{-1}{3a_{003}}(a_{102}x + a_{012}y) + \varphi_1(x, y), \tilde{f}(x, y) \right),$$

onde

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x, y) &= f\left(x, y, \frac{-1}{3a_{003}}(a_{102}x + a_{012}y) + \varphi_1(x, y)\right) \\
 &= a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + \text{termos de ordem superior.}
 \end{aligned}$$

Portanto, como $a_{002} \neq 0$ e $a_{020} \neq 0$, temos $\tilde{H}_v = \tilde{f} \sim_{\mathcal{R}} x^2 \pm y^2$, ou seja, $\tilde{H}_v$ possui uma singularidade do tipo A_1 .

2. Seja agora $H_v = f(x, y, z)$ com uma singularidade do tipo A_3 . Logo, temos $a_{002} = 0$, $a_{003} = 0$ e $4a_{004}a_{020}a_{200} - a_{012}^2a_{200} - a_{102}^2a_{020} \neq 0$. Nesse caso, temos

$$\nabla P(0, 0, 0) = a_{200}a_{020}(a_{102}, a_{012}, 0).$$

Como a singularidade A_3 é versal, então $a_{102} \neq 0$ ou $a_{012} \neq 0$. Dessa maneira, segue que o conjunto parabólico é regular. Sem perda de generalidade, consideramos $a_{102} \neq 0$ e então escrevemos x em função das variáveis y e z analogamente ao caso anterior. As contas são inteiramente análogas quando supomos $a_{012} \neq 0$ no lugar de $a_{102} \neq 0$. Fazendo os cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a_{012}}{a_{102}}y - \frac{1}{4a_{102}^3a_{020}a_{200}} \left(4a_{012}^2a_{020}a_{200}a_{202} - 4a_{012}^2a_{020}a_{201}^2 - a_{012}^2a_{111}^2a_{200} \right. \\ &\quad + 4a_{012}a_{020}a_{102}a_{111}a_{201} - 4a_{012}a_{020}a_{102}a_{112}a_{200} + 4a_{012}a_{021}a_{102}a_{111}a_{200} \\ &\quad + 4a_{020}a_{022}a_{102}^2a_{200} - a_{020}a_{102}^2a_{111}^2 - 4a_{021}^2a_{102}^2a_{200} \Big) y^2 \\ &\quad - \frac{1}{4a_{102}^3a_{020}a_{200}} \left(24a_{004}a_{020}a_{102}^2a_{200} - 4a_{012}^2a_{102}^2a_{200} - 4a_{102}^4a_{020} \right) z^2 \\ &\quad - \frac{1}{2a_{102}^3a_{020}a_{200}} \left(2a_{012}^2a_{102}a_{111}a_{200} + 4a_{012}a_{020}a_{102}^2a_{201} - 6a_{012}a_{020}a_{102}a_{103}a_{200} \right. \\ &\quad \left. - 4a_{012}a_{021}a_{102}^2a_{200} + 6a_{013}a_{020}a_{102}^2a_{200} - 2a_{020}a_{102}^3a_{111} \right) yz + \dots \\ &= -\frac{a_{012}}{a_{102}}y + \varphi_2(y, z), \end{aligned}$$

onde $\varphi_2 \in \mathcal{M}_2^2$. Assim, temos a superfície $\Sigma\Gamma$ em $\mathbb{R}^4$ parametrizada por

$$(y, z) \mapsto \left(-\frac{a_{012}}{a_{102}}y + \varphi_2(y, z), y, z, \tilde{f}(y, z) \right),$$

onde

$$\tilde{f}(y, z) = \left(a_{020} + \frac{a_{012}^2a_{200}}{a_{102}^2} \right) y^2 + Ay^3 + By^2z + Cyz^2 + \dots,$$

com

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2a_{102}^4a_{020}} \left(2a_{300}a_{012}^3a_{102}a_{020} - 4a_{012}^3a_{020}a_{200}a_{202} + 4a_{012}^3a_{020}a_{201}^2 \right. \\ &\quad - 2a_{012}^2a_{210}a_{102}^2a_{020} - 4a_{012}^2a_{020}a_{102}a_{111}a_{201} + 4a_{012}^2a_{020}a_{102}a_{112}a_{200} \\ &\quad - 4a_{012}^2a_{021}a_{102}a_{111}a_{200} - 4a_{012}a_{020}a_{022}a_{102}^2a_{200} + 2a_{120}a_{012}a_{102}^3a_{020} \\ &\quad \left. + 4a_{012}a_{021}^2a_{102}^2a_{200} - 2a_{030}a_{102}^4a_{020} + a_{012}^3a_{111}^2a_{200} + a_{012}a_{020}a_{102}^2a_{111}^2 \right), \\ B &= \frac{1}{a_{102}^3a_{020}} \left(6a_{012}a_{013}a_{020}a_{102}a_{200} + 5a_{012}^2a_{020}a_{102}a_{201} - 6a_{012}^2a_{020}a_{103}a_{200} \right. \\ &\quad \left. + 2a_{012}^3a_{111}a_{200} - 3a_{012}a_{020}a_{102}^2a_{111} + a_{020}a_{021}a_{102}^3 - 4a_{012}^2a_{021}a_{102}a_{200} \right) \text{ e} \\ C &= \frac{2a_{012}(6a_{004}a_{020}a_{200} - a_{012}^2a_{200} - a_{020}a_{102}^2)}{a_{102}^2a_{020}}. \end{aligned}$$

Denotemos por $\text{coef}(p, x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n})$ o coeficiente do monômio $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ de um polinômio p . Vamos supor que

$$\text{coef}(\tilde{f}, y^2) = \frac{a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2}{a_{102}^2} \neq 0.$$

Podemos fazer as seguintes mudanças de coordenadas:

$$y \mapsto y - \left(\frac{\text{coef}(\tilde{f}, y^3)}{2\text{coef}(\tilde{f}, y^2)} y^2 + \frac{\text{coef}(\tilde{f}, y^2 z)}{2\text{coef}(\tilde{f}, y^2)} yz + \frac{\text{coef}(\tilde{f}, yz^2)}{2\text{coef}(\tilde{f}, y^2)} z^2 \right),$$

para eliminar os monômios de grau 3 e

$$y \mapsto y - \left(\frac{\text{coef}(\tilde{f}, y^4)}{2\text{coef}(\tilde{f}, y^2)} y^3 + \frac{\text{coef}(\tilde{f}, y^3 z)}{2\text{coef}(\tilde{f}, y^2)} y^2 z + \frac{\text{coef}(\tilde{f}, y^2 z^2)}{2\text{coef}(\tilde{f}, y^2)} yz^2 + \frac{\text{coef}(\tilde{f}, yz^3)}{2\text{coef}(\tilde{f}, y^2)} z^3 \right),$$

para eliminar os monômios de grau 4. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{f} \sim_{\mathcal{R}} & \left(\frac{a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2}{a_{102}^2} \right) y^2 + \\ & \frac{(4a_{004} a_{020} a_{200} - a_{200} a_{012}^2 - a_{020} a_{102}^2) (9a_{004} a_{020} a_{200} - 2a_{200} a_{012}^2 - 2a_{020} a_{102}^2)}{a_{020} a_{200} (a_{200} a_{012}^2 + a_{020} a_{102}^2)} z^4. \end{aligned}$$

Note que $4a_{004} a_{020} a_{200} - a_{200} a_{012}^2 - a_{020} a_{102}^2 \neq 0$, pois é a condição para $H_v = f$ ter uma singularidade do tipo A_3 . Portanto, se $9a_{004} a_{020} a_{200} - 2a_{200} a_{012}^2 - 2a_{020} a_{102}^2 \neq 0$ temos que $\tilde{f} = \tilde{H}_v \sim_{\mathcal{R}} y^2 \pm z^4$, ou seja, $\tilde{H}_v$ possui, genericamente, uma singularidade do tipo A_3 . Caso $9a_{004} a_{020} a_{200} - 2a_{200} a_{012}^2 - 2a_{020} a_{102}^2 = 0$, podemos fazer mudanças de coordenadas semelhantes em $\tilde{f}$ e obter $\tilde{f} = \tilde{H}_v \sim_{\mathcal{R}} y^2 \pm z^5$. Isso ocorre se, e somente se, $21a_{005} a_{200}^2 a_{020}^2 + 4a_{021} a_{012}^2 a_{200}^2 - 9a_{012} a_{013} a_{020} a_{200}^2 + 4a_{012} a_{020} a_{102} a_{111} a_{200} + 4a_{201} a_{102}^2 a_{020}^2 - 9a_{103} a_{102} a_{200} a_{020}^2 \neq 0$. Ou seja, teremos uma singularidade do tipo A_4 para $\tilde{H}_v$.

Agora, se tivermos $\text{coef}(\tilde{f}, y^2) = 0$, ou seja, $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 = 0$, segue que $\tilde{f}$ possui termos cúbicos em diante. Logo, $\tilde{f} = \tilde{H}_v$ pode ter uma singularidade do tipo $D_4^\pm$ em pontos isolados da curva A_3 e isso ocorre quando a parte cúbica de $\tilde{f}$ é não degenerada, ou seja, quando seu discriminante δ não é nulo. Fazendo os cálculos, temos que δ não se anula se, e somente se,

$$\begin{aligned} & a_{012} (48a_{004} a_{012}^4 a_{102} a_{200} a_{300} - 96a_{004} a_{012}^4 a_{200}^2 a_{202} - 48a_{004} a_{012}^3 a_{102}^2 a_{200} a_{210} \\ & + 96a_{004} a_{012}^4 a_{200} a_{201}^2 - 96a_{004} a_{012}^3 a_{200} a_{111} a_{201} a_{102} + 96a_{004} a_{012}^3 a_{200}^2 a_{112} a_{102} \\ & - 96a_{004} a_{200}^2 a_{012}^2 a_{022} a_{102}^2 + 48a_{004} a_{012}^2 a_{102}^3 a_{120} a_{200} + 96a_{004} a_{012} a_{021} a_{102}^3 a_{111} a_{200} \\ & - 48a_{004} a_{012} a_{030} a_{102}^4 a_{200} - 96a_{004} a_{021}^2 a_{102}^4 a_{200} + 25a_{012}^4 a_{201}^2 a_{102}^2 + 36a_{012}^4 a_{200}^2 a_{103}^2 \\ & - 60a_{012}^4 a_{200} a_{103} a_{201} a_{102} + 60a_{012}^3 a_{013} a_{200} a_{201} a_{102}^2 - 72a_{012}^3 a_{013} a_{200}^2 a_{103} a_{102} \\ & - 50a_{012}^3 a_{102}^3 a_{111} a_{201} + 60a_{012}^3 a_{103} a_{111} a_{200} a_{102}^2 + 36a_{012}^2 a_{200}^2 a_{012}^2 a_{102}^2 + 25a_{021}^2 a_{102}^6 \\ & - 60a_{012}^2 a_{013} a_{102}^3 a_{111} a_{200} + 50a_{012}^2 a_{021} a_{102}^4 a_{201} - 60a_{012}^2 a_{021} a_{102}^3 a_{103} a_{200} \\ & + 25a_{012}^2 a_{102}^4 a_{111}^2 + 60a_{012} a_{013} a_{021} a_{102}^4 a_{200} - 50a_{012} a_{021} a_{102}^5 a_{111}) \neq 0. \end{aligned}$$

3. Seja agora $H_v = f(x, y, z)$ com uma singularidade do tipo A_4 . Assim, temos $a_{002} = 0$, $a_{003} = 0$, $4a_{004}a_{020}a_{200} - a_{012}^2a_{200} - a_{102}^2a_{020} = 0$ e $4a_{005}a_{200}^2a_{020}^2 + a_{021}a_{012}^2a_{200}^2 - 2a_{012}a_{013}a_{020}a_{200}^2 + a_{012}a_{020}a_{102}a_{111}a_{200} + a_{201}a_{102}^2a_{020}^2 - 2a_{103}a_{102}a_{200}a_{020}^2 \neq 0$. Nesse caso, também temos

$$\nabla P(0, 0, 0) = a_{200}a_{020}(a_{102}, a_{012}, 0)$$

e vamos considerar $a_{102} \neq 0$, pois a singularidade A_4 é versal. Procedendo de maneira análoga aos casos anteriores, obtemos a superfície $\Sigma\Gamma$ em $\mathbb{R}^4$ parametrizada por

$$(y, z) \mapsto \left(-\frac{a_{012}}{a_{102}}y + \varphi_3(y, z), y, z, \tilde{f}(y, z) \right),$$

onde $\varphi_3, \tilde{f} \in \mathcal{M}_2^2$. Fazendo as mudanças de coordenadas convenientes em $\tilde{f}$ para eliminar certos monômios, temos que

$$\tilde{f} = \tilde{H}_v \sim_{\mathcal{R}} \left(\frac{a_{012}^2a_{200} + a_{020}a_{102}^2}{a_{102}^2} \right) y^2 + Dz^5,$$

onde

$$D = \frac{1}{4a_{020}^2a_{200}^2} \left(4a_{005}a_{020}^2a_{200}^2 + a_{012}^2a_{021}a_{200}^2 - 2a_{012}a_{013}a_{020}a_{200}^2 + a_{012}a_{020}a_{102}a_{111}a_{200} + a_{020}^2a_{102}^2a_{201} - 2a_{020}^2a_{102}a_{103}a_{200} \right) \neq 0$$

por hipótese. Portanto, $\tilde{f} = \tilde{H}_v \sim_{\mathcal{R}} y^2 \pm z^5$, ou seja, $\tilde{H}_v$ possui uma singularidade do tipo A_4 .

□

Um resultado imediato da Proposição 5.6 é o corolário abaixo.

Corolário 4.4. Singularidades do tipo A_2 não ocorrem em p para $\tilde{H}_v$, com $v \in N_pM$.

Observação 4.2. 1. A condição $a_{012}^2a_{200} + a_{020}a_{102}^2 = 0$ na singularidade A_4 da Proposição 4.3 gera um caso que não ocorre na geometria genérica da hipersuperfície M (pois seria uma condição extra em uma singularidade isolada) e nem na geometria genérica da superfície $\Sigma\Gamma$. De fato, suponha que $a_{012}^2a_{200} + a_{020}a_{102}^2 = 0$. Logo, $\tilde{f}$ possui apenas termos cúbicos em diante e o discriminante de sua parte cúbica é dado por

$$\delta = \frac{144}{a_{102}^{10}} (a_{200}a_{012}a_{004})^2 \tilde{A},$$

onde $\tilde{A}$ é soma e multiplicação de coeficientes de ordem maior ou igual a dois de f . Mas estamos supondo que a função altura H_v em M possui uma singularidade do tipo A_4 , assim, pela Proposição 4.1, $4a_{004}a_{020}a_{200} - a_{012}^2a_{200} - a_{102}^2a_{020} = 0$, logo devemos ter necessariamente $a_{004} = 0$, uma vez que $a_{020}a_{200} \neq 0$ e estamos supondo $a_{012}^2a_{200} + a_{020}a_{102}^2 = 0$. Assim temos que o discriminante δ é igual a zero, o que significa que temos uma cúbica degenerada e, portanto, uma singularidade $D_{>4}$, o que não ocorre genericamente em superfícies em $\mathbb{R}^4$.

2. Pela Proposição 4.3, a curva de pontos A_3 de H_v em M é uma curva de pontos A_3 de $\tilde{H}_v$ em $\Sigma\Gamma$. Em pontos isolados dessa curva, uma singularidade do tipo A_3 de H_v poderá ser uma singularidade do tipo A_4 de $\tilde{H}_v$. Já a singularidade do tipo A_4 de H_v corresponde a uma singularidade do tipo A_4 de $\tilde{H}_v$. Ou seja, o número de singularidades do tipo A_4 nessas curvas em $\Sigma\Gamma$ é maior ou igual ao número de singularidades do tipo A_4 em M sobre a curva A_3 de M .

A volta da Proposição 4.3 é válida como afirma o corolário a seguir.

Corolário 4.5. Seja $\Sigma\Gamma$ o conjunto parabólico de uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^4$, com $\Sigma\Gamma$ uma superfície regular em $\mathbb{R}^4$. Sejam H_v a função altura sobre a hipersuperfície M e $\tilde{H}_v$ a função altura sobre a superfície $\Sigma\Gamma$ na direção v normal à M em p . Então, para um subconjunto de imersões genéricas de M ,

1. p é singularidade do tipo A_1 de $\tilde{H}_v \Rightarrow p$ é singularidade do tipo A_2 de H_v ,
2. p é singularidade do tipo A_3 de $\tilde{H}_v \Rightarrow p$ é singularidade do tipo A_3 versal de H_v ,
3. p é singularidade do tipo A_4 de $\tilde{H}_v \Rightarrow p$ é singularidade do tipo A_4 versal de H_v .

Demonstração. 1. Suponha que $p \in \Sigma\Gamma$ seja uma singularidade do tipo A_1 para $\tilde{H}_v$. Como p está no conjunto parabólico regular de M , devemos ter necessariamente uma singularidade do tipo $A_{\geq 2}$ para H_v . Mas se p for do tipo A_3 ou A_4 , temos uma contradição pela Proposição 4.3. Portanto, p é singularidade do tipo A_2 de H_v .

2. Se p é singularidade do tipo A_3 de $\tilde{H}_v$, então p não pode ser singularidade do tipo A_1 para H_v (pois p está no conjunto parabólico) e também não pode ser do tipo A_2 e A_4 , senão iria contradizer a Proposição 4.3. Portanto, p é singularidade do tipo A_3 de H_v .

3. Análogo ao item anterior. □

Corolário 4.6. (i) Seja $v \in N_p M$. Temos que v é uma direção binormal de $\Sigma\Gamma$ se, e somente se, p pertence à curva de pontos A_3 de M . Além disso, essa curva A_3 de M também é uma curva A_3 de para $\Sigma\Gamma$.

- (ii) Seja $v \in N_p \Sigma\Gamma$ tal que $v \notin N_p M$. Então temos que na região hiperbólica de $\Sigma\Gamma$ podem ocorrer outras curvas A_3 de $\tilde{H}_v$, assim como singularidades do tipo A_2 de $\tilde{H}_v$.

Observe que na demonstração da Proposição 4.3, supomos inicialmente que o coeficiente $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2$ é diferente de zero. No caso da singularidade do tipo A_3 de H_v , se esse coeficiente for igual a zero, isso significa que a função altura $\tilde{H}_v$ em $\Sigma\Gamma$ pode ter uma singularidade de corank 2. Na proposição a seguir analisamos o que esse coeficiente significa geometricamente.

Proposição 4.7. Se p é uma singularidade do tipo A_3 versal para $H_{\mathbf{v}}$ então $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 = 0$ se, e somente se, a curvatura κ da curva A_3 de M em p é nula.

Demonstração. A parametrização da curva A_3 é dada pelos pontos (x_0, y_0, z_0) para os quais o determinante da Hessiana de f nesses pontos seja zero e o kernel da Hessiana de f seja raiz da forma cúbica de f . Assim, esses pontos são da forma

$$(x_0, y_0, z_0) = (-a_{012}Ay, a_{102}Ay, (a_{012}B + a_{102}C)y) + \text{t.o.m.},$$

com $a_{102} \neq 0$ ou $a_{012} \neq 0$ pois A_3 é versal, onde

$$\begin{aligned} A &= 4a_{004}a_{020}a_{200} - a_{200}a_{012}^2 - a_{020}a_{102}^2, \\ B &= a_{102}a_{201}a_{020} + \frac{1}{2}a_{012}a_{200}a_{111} - a_{200}a_{020}a_{103} - a_{200}a_{021}a_{102}, \\ C &= a_{200}a_{020}a_{013} - \frac{1}{2}a_{020}a_{102}a_{111}. \end{aligned}$$

Note que $A \neq 0$ é justamente uma das condições para termos singularidade do tipo A_3 (Proposição 4.1). Assim, a curva A_3 é dada por:

$$\gamma(y) = (x_0, y_0, z_0, f(x_0, y_0, z_0))$$

e a curvatura de γ é dada por:

$$\kappa(y) = 2 \sqrt{\frac{A^4(a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2)^2 ((A)^2(a_{102}^2 + a_{012}^2) + (a_{012}B + a_{102}C)^2)}{(A^2(a_{102}^2 + a_{012}^2) + (a_{012}B + a_{102}C)^2 + 4(A)^4(a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2)^2 y^2)^3}}.$$

Note que o termo $(A1)^4 ((A1)^2(a_{102}^2 + a_{012}^2) + (a_{012}A2 + a_{102}A3)^2)$ nunca se anula. Portanto, $\kappa(y) = 0$ se, e somente se, $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 = 0$.

□

4.2 Geometria de $\Sigma\Gamma$ visto como uma superfície em $\mathbb{R}^4$

Na seção anterior, relacionamos as funções altura sobre a hipersuperfície M e seu conjunto parabólico $\Sigma\Gamma$ na direção $\mathbf{v} \in N_p M$. Como estamos supondo $\Sigma\Gamma$ uma superfície regular em $\mathbb{R}^4$, vamos usar a teoria já existente sobre superfícies em $\mathbb{R}^4$ para obter mais informações geométricas.

Podemos usar a Proposição 4.3 para relacionar a geometria da superfície parabólica $\Sigma\Gamma$ com o tipo de singularidade da função altura sobre M . Lembremos que quando a singularidade de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ é mais degenerada que Morse em p , temos a existência de uma ou duas direções binormais em p (dependendo se p é um ponto parabólico ou hiperbólico para a superfície) e seus respectivos hiperplanos osculadores (ver Definição 2.25). Vimos na Proposição 4.3 que se a singularidade

de $H_{\mathbf{v}}$ é do tipo A_2 , então a singularidade de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ é do tipo A_1 , $\mathbf{v} \in N_p M$, e portanto as direções binormais de $\Sigma\Gamma$ em p não coincidem com a direção normal de M . Já nas singularidades A_k , $k = 3, 4$, $\mathbf{v} \in N_p M$ é uma direção binormal de $\Sigma\Gamma$. Logo, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.8. Seja uma hipersuperfície M tal que a função altura sobre M possua uma singularidade do tipo A_k , $k = 3, 4$, em $p \in M$. Então, um hiperplano osculador da superfície parabólica de M em p coincide com o hiperplano tangente de M em p .

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos considerar a hipersuperfície M na sua forma de Monge $\psi(x, y, z) = (x, y, z, f(x, y, z))$, com p sendo a origem, onde f é dada por (4.1). Assim, o hiperplano tangente a M em p , $T_p M$, é o hiperplano ortogonal ao vetor $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 1)$. Uma vez que a superfície parabólica $\Sigma\Gamma$ está contida em M , segue que $T_p M$ é também um hiperplano tangente à ela. Além disso, como a função altura sobre M na direção $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 1)$, $H_{\mathbf{v}}$, possui uma singularidade do tipo A_k , $k = 3, 4$, em p , segue da Proposição 4.3 que função altura sobre $\Sigma\Gamma$ na direção $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 1)$, $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$, possui uma singularidade do tipo A_k , $k = 3, 4$, em p , ou seja, $\mathbf{v}$ é uma direção binormal. Portanto, $T_p M$ coincide com um hiperplano osculador de $\Sigma\Gamma$ em p . $\square$

De maneira análoga ao que foi feito no estudo das singularidades da função altura sobre uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^4$, existem condições que caracterizam que tipo de singularidade a função altura sobre superfície em $\mathbb{R}^4$ possui, numa dada direção normal $\mathbf{v}$. Seja N uma superfície em $\mathbb{R}^4$ dada localmente pela sua forma de Monge $(x, y, Q_1(x, y), Q_2(x, y))$. Para $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in S^3$, a função altura $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ sobre N é dada por

$$\tilde{H}_{\mathbf{v}}(x, y) = v_1 x + v_2 y + v_3 Q_1(x, y) + v_4 Q_2(x, y).$$

Assim, $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ é singular se, e somente se, $v_1 = v_2 = 0$, ou seja, $\mathbf{v} \in N_p N$. Por uma rotação do plano normal na origem, podemos assumir que $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 1)$ é uma direção degenerada e assim Q_1 e Q_2 podem ser escritas como

$$Q_1(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \dots$$

$$Q_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + b_{40}x^4 + b_{31}x^3y + b_{22}x^2y^2 + b_{13}xy^3 + \dots$$

e as singularidades de $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ podem ser descritas a partir dos coeficientes de Q_1 e Q_2 , como na proposição a seguir.

Proposição 4.9. (BRUCE; TARI, 2002) As condições para as singularidades genéricas da função altura $\tilde{H}_{\mathbf{v}}$ são:

$$A_2 \Leftrightarrow b_{20} \neq 0 \text{ e } b_{03} \neq 0;$$

$$A_3 \Leftrightarrow b_{20} \neq 0, b_{03} = 0 \text{ e } 4b_{20}b_{04} - b_{12}^2 \neq 0;$$

$$A_4 \Leftrightarrow b_{20} \neq 0, b_{03} = 0, 4b_{20}b_{04} - b_{12}^2 = 0; \text{ e } 2b_{20}^2b_{05} - 2b_{20}b_{12}b_{13} + b_{21}b_{12}^2 \neq 0;$$

$$D_4 \Leftrightarrow b_{20} = 0, \text{ e } b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \text{ é não degenerada.}$$

Essas singularidades são desdobradas versalmente pela família de funções altura se, e somente se,

A_2 : sempre;

A_3 : $a_{02} \neq 0$ ou $b_{12} \neq 0$;

A_4 : $a_{02}(b_{20}b_{13} - b_{21}b_{12}) - b_{12}\left(b_{20}a_{03} - \frac{1}{2}a_{11}b_{12}\right) \neq 0$;

D_4 : $3b_{30}\left(a_{02}b_{12} - \frac{3}{2}a_{11}b_{03}\right) - b_{21}\left(a_{02}b_{21} - \frac{1}{2}a_{11}b_{12}\right) + a_{20}(3b_{21}b_{03} - b_{12}^2) \neq 0$.

Assim, usando a Proposição 4.3 e a Proposição 4.9, podemos obter as condições de versalidade das singularidades da função altura $\tilde{H}_v$ de $\Sigma\Gamma$ através dos coeficientes de f de M . O caso mais interessante é quando a função altura H_v sobre M possui uma singularidade do tipo A_3 versal e este será apresentado na proposição que segue. Usando as notações anteriores, temos:

Proposição 4.10. Suponha que H_v sobre M tenha uma singularidade do tipo A_3 versal. Então, $\tilde{H}_v$ sobre $\Sigma\Gamma$ tem uma singularidade do tipo A_3 versal se, e somente se, $6a_{004}a_{020}a_{200} - a_{200}a_{012}^2 - a_{020}a_{102}^2 \neq 0$.

Demonstração. Vimos na demonstração da Proposição 4.3 que o conjunto parabólico $\Sigma\Gamma$ de M pode ser parametrizado por

$$g : (y, z) \mapsto \left(-\frac{a_{012}}{a_{102}}y + \varphi_2(y, z), y, z, \tilde{f}(y, z) \right).$$

A ideia é eliminar o termo linear da primeira coordenada e então usar a teoria já existente sobre superfícies em $\mathbb{R}^4$ para estudar a geometria de $\Sigma\Gamma$. Aplicando a matriz de rotação

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em g e tomando $\theta = \arctan\left(\frac{a_{012}}{a_{102}}\right)$, o conjunto parabólico fica da forma $(Q_1(y, z), y, z, Q_2(y, z))$. Como estamos supondo o caso em que a singularidade de H_v é do tipo A_3 versal, segue que $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_2^2$, com

$$Q_2 \sim_{\mathcal{R}} \left(\frac{a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2}{a_{102}^2} \right) y^2 + \frac{(4a_{004}a_{020}a_{200} - a_{200}a_{012}^2 - a_{020}a_{102}^2)(9a_{004}a_{020}a_{200} - 2a_{200}a_{012}^2 - 2a_{020}a_{102}^2)}{a_{020}a_{200}(a_{200}a_{012}^2 + a_{020}a_{102}^2)} z^4,$$

considerando $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 \neq 0$ e $9a_{004}a_{020}a_{200} - 2a_{200}a_{012}^2 - 2a_{020}a_{102}^2 \neq 0$. Usando a Proposição 4.9, temos que a singularidade A_3 é versal se, e somente se, $a_{02} \neq 0$ ou $b_{12} \neq 0$. No

nosso caso, estes coeficientes são dados por

$$a_{02} = -\frac{6a_{004}a_{020}a_{200} - a_{200}a_{012}^2 - a_{020}a_{102}^2}{a_{020}a_{102}a_{200}\sqrt{\frac{a_{012}^2 + a_{102}^2}{a_{102}^2}}}$$

$$b_{12} = \frac{2a_{012}(2a_{200}a_{102}^2 + a_{200}a_{012}^2 + a_{020}a_{102}^2)(6a_{004}a_{020}a_{200} - a_{200}a_{012}^2 - a_{020}a_{102}^2)}{a_{200}a_{020}a_{102}^2(a_{012}^2 + a_{102}^2)}$$

Logo, a singularidade A_3 é não versal, se, e somente se, $6a_{004}a_{020}a_{200} - a_{200}a_{012}^2 - a_{020}a_{102}^2 = 0$. $\square$

Observe que este caso ainda é genérico para $\Sigma\Gamma$, pois estes são pontos isolados da curva A_3 . O fato da singularidade de $\tilde{H}_v$ ser do tipo A_3 versal ou não versal, vinda de uma singularidade do tipo A_3 versal de H_v , nos traz informações interessantes a respeito da geometria de $\Sigma\Gamma$ nesse ponto.

Proposição 4.11. Seja $p \in M$ singularidade do tipo A_3 versal de H_v e A_3 de $\tilde{H}_v$ em $\Sigma\Gamma$. Então:

- (i) p é um ponto hiperbólico de $\Sigma\Gamma$ se, e somente se, p é uma singularidade de $\tilde{H}_v$ do tipo A_3 versal.
- (ii) p é um ponto parabólico de $\Sigma\Gamma$ se, e somente se, p é uma singularidade de $\tilde{H}_v$ do tipo A_3 não versal e $a_{012}^2a_{111}a_{200} + 2a_{012}a_{020}a_{102}a_{201} - 3a_{012}a_{020}a_{103}a_{200} - 2a_{012}a_{021}a_{102}a_{200} + 3a_{013}a_{020}a_{102}a_{200} - a_{020}a_{102}^2a_{111} \neq 0$.

Demonstração. Tome $p \in M$ singularidade do tipo A_3 versal de H_v e A_3 de $\tilde{H}_v$. Segue da Proposição 4.3 que $a_{012}^2a_{200} + a_{020}a_{102}^2 \neq 0$ e $9a_{004}a_{020}a_{200} - 2a_{200}a_{012}^2 - 2a_{020}a_{102}^2 \neq 0$. Da demonstração da Proposição 4.10, vimos que $\Sigma\Gamma$ pode ser escrito da forma $g(y, z) = (Q_1(y, z), y, z, Q_2(y, z))$. Basta então calcular o discriminante Δ da superfície $\Sigma\Gamma$ em p . Os coeficientes da segunda forma fundamental de g são dados por:

$$l_1 = Q_{1yy}(0, 0), \quad m_1 = Q_{1yz}(0, 0), \quad n_1 = Q_{1zz}(0, 0)$$

$$l_2 = Q_{2yy}(0, 0), \quad m_2 = Q_{2yz}(0, 0), \quad n_2 = Q_{2zz}(0, 0)$$

Assim, o discriminante Δ de g em p fica

$$\Delta = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} l_1 & 2m_1 & n_1 & 0 \\ l_2 & 2m_2 & n_2 & 0 \\ 0 & l_1 & 2m_1 & n_1 \\ 0 & l_2 & 2m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{16(6a_{004}a_{020}a_{200} - a_{200}a_{012}^2 - a_{020}a_{102}^2)^2(a_{200}a_{012}^2 + a_{020}a_{102}^2)^2}{a_{020}^2a_{102}^2a_{200}^2(a_{012}^2 + a_{102}^2)^2}.$$

Portanto,

- (i) p é um ponto hiperbólico de $\Sigma\Gamma$ se, e somente se, $\Delta < 0$, se, e somente se, $6a_{004}a_{020}a_{200} - a_{200}a_{012}^2 - a_{020}a_{102}^2 \neq 0$, que, pela Proposição 4.10, é a condição para a singularidade do tipo A_3 versal.
- (ii) De maneira análoga, p é um ponto parabólico de $\Sigma\Gamma$ se, e somente se, $\Delta = 0$ e $\text{rank } \alpha = 2$, onde α é a matriz da segunda forma fundamental de g . Os menores determinantes 2×2 de α se anulam simultaneamente se, e somente se,

$$\begin{cases} (6a_{004}a_{020}a_{200} - a_{200}a_{012}^2 - a_{020}a_{102}^2)(a_{200}a_{012}^2 + a_{020}a_{102}^2) = 0 \\ A(a_{200}a_{012}^2 + a_{020}a_{102}^2) = 0. \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} A = & a_{012}^2 a_{111} a_{200} + 2a_{012} a_{020} a_{102} a_{201} - 3a_{012} a_{020} a_{103} a_{200} - 2a_{012} a_{021} a_{102} a_{200} \\ & + 3a_{013} a_{020} a_{102} a_{200} - a_{020} a_{102}^2 a_{111} \end{aligned}$$

Portanto, p é ponto parabólico de $\Sigma\Gamma$ se, e somente se, $A \neq 0$.

□

Observação 4.3. Na proposição anterior fizemos o caso onde uma singularidade do tipo A_3 versal de H_v é uma singularidade do tipo A_3 de $\tilde{H}_v$, versal ou não versal. Na Proposição 4.3, vimos que singularidades do tipo A_3 versais também podem implicar em singularidades do tipo A_4 ou D_4 de $\tilde{H}_v$. Note que mesmo supondo que a função altura H_v sobre M não tem singularidades de corank 2, temos que a função altura $\tilde{H}_v$ sobre $\Sigma\Gamma$ pode possuir pontos de inflexão, o que significa que $\tilde{H}_v$ possui singularidades do tipo umbílicas.

Corolário 4.12. Seja $p \in M$.

- (i) Se p é singularidade do tipo A_3 versal de H_v , mas não é uma singularidade do tipo A_3 de $\tilde{H}_v$, então p é um ponto hiperbólico ou um ponto de inflexão de $\Sigma\Gamma$.
- (ii) Se p é singularidade do tipo A_4 versal de H_v , então p é um ponto hiperbólico de $\Sigma\Gamma$.

Demonstração. (i) Como p é uma singularidade do tipo A_3 versal de H_v que não é do tipo A_3 de $\tilde{H}_v$, segue da Proposição 4.3 que p pode ser do tipo A_4 ou D_4 de $\tilde{H}_v$. Se p é uma singularidade do tipo A_4 para $\tilde{H}_v$, então temos as condições $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 \neq 0$ e $9a_{004}a_{020}a_{200} - 2a_{200}a_{012}^2 - 2a_{020}a_{102}^2 = 0$. Usando essas condições e escrevendo a superfície $\Sigma\Gamma$ como na demonstração da Proposição 4.10, temos que o discriminante Δ em p é dado por

$$\Delta = -\frac{16(a_{200}a_{012}^2 + a_{020}a_{102}^2)^4}{9a_{200}^2 a_{102}^2 a_{020}^2 (a_{012}^2 + a_{102}^2)^2}.$$

Ou seja, $\Delta < 0$ e p é um ponto hiperbólico de $\Sigma\Gamma$.

Agora, se p é uma singularidade do tipo D_4 para $\tilde{H}_v$, então temos que $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 = 0$. Isso implica que $\Delta = 0$ e $\text{rank } \alpha < 2$ em p , ou seja, p é um ponto de inflexão de $\Sigma\Gamma$, o que condiz com a teoria existente sobre superfícies em $\mathbb{R}^4$ (ver Teorema 4.2 de (MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 1995)).

- (ii) Se $p \in M$ é uma singularidade do tipo A_4 versal de H_v , segue da Proposição 4.3 que p é uma singularidade do tipo A_4 de $\tilde{H}_v$. Assim, o discriminante Δ em p de $\Sigma\Gamma$ é dado por

$$\Delta = -\frac{(a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2)^4}{a_{200}^2 a_{102}^4 a_{020}^2 (a_{012}^2 + a_{102}^2)}.$$

Ou seja, como $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 \neq 0$, temos $\Delta < 0$ e então p é um ponto hiperbólico de $\Sigma\Gamma$.

□

Na Proposição 4.7, vimos que se p é uma singularidade do tipo A_3 versal para H_v então $a_{012}^2 a_{200} + a_{020} a_{102}^2 = 0$ se, e somente se, a curvatura κ da curva A_3 em p é nula. Assim, da Proposição 4.7 e do Corolário 4.12 (i), temos o seguinte resultado:

Corolário 4.13. Seja p uma singularidade do tipo A_3 versal para H_v . Se a curvatura κ da curva A_3 em M em p é nula, então p é um ponto de inflexão da superfície $\Sigma\Gamma$.

HIPERSUPERFÍCIE CANAL DE UMA CURVA

EM $\mathbb{R}^4$

O objetivo deste capítulo é relacionar as singularidades da função altura de uma curva em $\mathbb{R}^4$, as singularidades da função altura da hipersuperfície canal desta curva e as singularidades da aplicação de Gauss dessa hipersuperfície para obtermos algumas informações geométricas. A hipersuperfície canal de uma curva em $\mathbb{R}^4$ é uma variedade de codimensão um em $\mathbb{R}^4$. Com isso, temos que, genericamente, seu conjunto parabólico é uma superfície suave em $\mathbb{R}^4$ e assim podemos também relacionar a geometria da hipersuperfície canal com a geometria desta superfície em $\mathbb{R}^4$. Primeiramente, faremos uma breve recordação de curvas suaves em $\mathbb{R}^4$, suas fórmulas de Frenet, as singularidades da família de funções altura sobre essas curvas e do conceito de hipersuperfície canal de uma curva em $\mathbb{R}^4$. A referência utilizada para o caso geral de curvas no $\mathbb{R}^n$ é o livro (KLINGENBERG, 1978) e o estudo sobre a hipersuperfície canal e as singularidades da função altura pode ser encontrado em (MOCHIDA, 1993). A motivação para este capítulo foi o estudo para o caso da superfície canal de curvas em $\mathbb{R}^3$, que pode ser encontrado em (BANCHOFF; GAFFNEY; MCCRORY, 1982) e (ROMERO FUSTER, 1988).

Considerando $\varepsilon > 0$, chamamos de $C_\gamma(\varepsilon)$ a hipersuperfície canal de uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ parametrizada pelo comprimento de arco e de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ seu conjunto parabólico, que é uma superfície em $\mathbb{R}^4$. Denotamos por H_γ a função altura sobre γ , $\tilde{H}_\gamma$ a função altura sobre $C_\gamma(\varepsilon)$ e $\tilde{H}_\Gamma$ a função altura sobre $\Sigma_\varepsilon \Gamma$.

Do Capítulo 4, temos que uma singularidade do tipo A_2 , A_3 e A_4 da função altura sobre uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$, corresponde a uma singularidade do tipo A_1 , A_3 (podendo ocorrer, em pontos isolados, A_4 ou D_4) e A_4 , respectivamente, da função altura sobre seu conjunto parabólico (ver Proposição 4.3). Portanto, neste capítulo, isto relaciona as singularidades das funções altura sobre $C_\gamma(\varepsilon)$ e $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ (Observação 5.4). Comentaremos abaixo os principais resultados desta seção, que serão provados nas subseções seguintes.

Mostraremos no Lema 5.6 que a singularidade da função altura $\tilde{H}_v$ sobre $C_\gamma(\varepsilon)$ é do tipo A_k se, e somente se, a singularidade da função altura H_v sobre γ é do tipo A_k , para $k = 1, \dots, 4$.

No seguinte resultado exploramos a geometria de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$. Aqui, $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}(\Gamma)$ são os conjuntos singulares de Γ , dados pela Definição 5.1.

Definição 5.1. Sejam N e P variedades diferenciáveis, onde $\dim N = n$. Considere $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável e $df_x : T_x N \rightarrow T_{f(x)} P$ a diferencial de f em $x \in N$. Os **conjuntos singulares de f de primeira ordem** são dados por

$$\Sigma^i(f) = \{x \in N : \dim(\ker(df_x)) = i\}, \quad i \leq n.$$

Podemos também considerar os conjuntos singulares de f de ordem maior. Assim, temos que o conjunto singular de f de ordem k é dado por

$$\Sigma^{i_1, \dots, i_k}(f) = \Sigma^{i_k} \left(f|_{\Sigma^{i_1, \dots, i_{k-1}}(f)} \right),$$

desde que $\Sigma^{i_1, \dots, i_{k-1}}(f)$ seja uma subvariedade de N .

Observamos que, por exemplo, $\Sigma^{1,1}(f)$ está contido em $\Sigma^1(f)$. Para as notações que seguem, denotamos por $\Sigma^{1,0}(f)$ o conjunto de pontos que estão em $\Sigma^1(f)$ mas não estão em $\Sigma^{1,1}(f)$. Analogamente, $\Sigma^{1,1,0}(f)$ representa o conjunto de pontos que estão em $\Sigma^{1,1}(f)$ mas não estão em $\Sigma^{1,1,1}(f)$ e nem em $\Sigma^{1,0}(f)$.

Teorema. Seja a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ de uma curva γ em $\mathbb{R}^4$ e considere seu conjunto parabólico $\Sigma_\varepsilon \Gamma$, onde Γ é a aplicação de Gauss de $C_\gamma(\varepsilon)$. Então, genericamente, $\Sigma_\varepsilon \Gamma = \Sigma^{1,0}(\Gamma) \cup \Sigma^{1,1,0}(\Gamma) \cup \Sigma^{1,1,1,0}(\Gamma)$, ou seja, $\Sigma^2(\Gamma) = \emptyset$. Os conjuntos $\Sigma^{1,0}(\Gamma)$, $\Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$ e $\Sigma^{1,1,1,0}(\Gamma)$ são, respectivamente, superfícies suaves, curvas suaves e pontos isolados. Além disso, a superfície $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ em $\mathbb{R}^4$ pode possuir pontos de inflexão, que correspondem a singularidades do tipo $D_4^\pm$ (corank 2) da função altura $\tilde{H}_v$ sobre $\Sigma_\varepsilon \Gamma$. Temos também que:

- (i) Se o ponto p de $C_\gamma(\varepsilon)$ é uma cúspide ($p \in \Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$), ou seja, uma singularidade do tipo A_3 para a função altura H_v sobre γ e para a função altura $\tilde{H}_v$ sobre $C_\gamma(\varepsilon)$, então, na superfície $\Sigma_\varepsilon \Gamma$, p corresponde a um ponto:

$$\begin{aligned} & \text{- parabólico, se } \kappa_3(s_0) = -\frac{\kappa_1(s_0)}{\varepsilon \kappa_2(s_0)}, \\ & \text{- hiperbólico, se } \kappa_3(s_0) \neq -\frac{\kappa_1(s_0)}{\varepsilon \kappa_2(s_0)}, \end{aligned}$$

onde κ_1 , κ_2 e κ_3 são as curvaturas da curva γ em $s_0 \in I$.

- (ii) Se p é um rabo de andorinha ($p \in \Sigma^{1,1,1,0}(\Gamma)$), ou seja, uma singularidade do tipo A_4 para a função altura H_v sobre γ e para a função altura $\tilde{H}_v$ sobre $C_\gamma(\varepsilon)$, então p corresponde a um ponto hiperbólico na superfície $\Sigma_\varepsilon \Gamma$.

- (iii) Os pontos de inflexão de $\Sigma_\epsilon \Gamma$ ocorrem se $\kappa_1(s_0) = \frac{\epsilon \kappa_2'(s_0)}{\epsilon^2 \kappa_2^2(s_0) + 1}$, para o correspondente ponto da curva γ . Mas $\tilde{H}_v$ não possui singularidade do tipo $D_4^\pm$ pois $\Sigma^2(\Gamma) = \emptyset$.

O item (iii) do teorema acima é melhor explicado na Observação 5.3.

Também destacamos a Proposição 5.11 pela qual produziremos um método para fabricar frontais globais em S^3 .

5.1 Curvas em $\mathbb{R}^4$

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e considere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma curva suave e parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, $\|\gamma'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$.

Definição 5.2. Um **referencial móvel** ao longo de γ é uma coleção de quatro aplicações diferenciáveis $e_i: I \rightarrow \mathbb{R}^4$, $i = 1, 2, 3, 4$, tal que $\langle e_i(s), e_j(s) \rangle = \delta_{ij}$, para todo $s \in I$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Cada $e_i(s)$ é um campo vetorial ao longo de γ e $e_i(s)$ é considerado como um vetor em $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^4$.

Definição 5.3. Um referencial móvel $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é chamado de **referencial de Frenet** da curva γ se para todo $1 \leq r \leq 4$, a r -ésima derivada de $\gamma(s)$ está no espaço gerado pelos vetores do referencial.

Proposição 5.1. (KLINGENBERG, 1978, p.11) Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma curva suave tal que para todo $s \in I$, os vetores $\gamma'(s)$, $\gamma''(s)$ e $\gamma'''(s)$ são linearmente independentes. Então, existe um único referencial de Frenet com as seguintes propriedades:

1. $\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)$ e $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$ têm a mesma orientação.
2. $e_1(s), \dots, e_4(s)$ têm orientação positiva.

Seja então $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco satisfazendo as condições da Proposição 5.1 e considere $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ seu referencial de Frenet, que pode ser obtido da seguinte maneira: Tome $e_1(s) = \gamma'(s)$. Para os demais vetores, defina

$$e_j(s) = \frac{\bar{e}_j(s)}{\|\bar{e}_j(s)\|},$$

para $j = 2, 3, 4$, onde

$$\bar{e}_j(s) = \gamma^{(j)}(s) - \sum_{i=1}^{j-1} \langle \gamma^{(j)}(s), e_i(s) \rangle e_i(s).$$

Definição 5.4. A i -ésima curvatura de γ é a função $\kappa_i(s) = \langle e'_i, e_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, 3$.

Proposição 5.2. (KLINGENBERG, 1978, p. 13) Sejam $\kappa_i(s)$, $1 \leq i \leq 3$, as funções curvaturas como na Definição 5.4. Então $\kappa_i(s) > 0$, para $i = 1, 2$.

Daqui por diante, vamos denotar o referencial acima para a curva γ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e_1(s) &= \mathbf{T}(s) \text{ (vetor tangente),} \\ e_2(s) &= \mathbf{N}_1(s) \text{ (vetor normal 1),} \\ e_3(s) &= \mathbf{N}_2(s) \text{ (vetor normal 2),} \\ e_4(s) &= \mathbf{B}(s) \text{ (vetor binormal).} \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\kappa_1(s) = \langle \mathbf{T}', \mathbf{N}_1 \rangle, \quad \kappa_2(s) = \langle \mathbf{N}'_1, \mathbf{N}_2 \rangle \text{ e } \kappa_3(s) = \langle \mathbf{N}'_2, \mathbf{B} \rangle.$$

Com isso, temos as **fórmulas de Frenet**, dadas por:

$$\begin{cases} \mathbf{T}' &= \kappa_1 \mathbf{N}_1, \\ \mathbf{N}'_1 &= -\kappa_1 \mathbf{T} + \kappa_2 \mathbf{N}_2, \\ \mathbf{N}'_2 &= -\kappa_2 \mathbf{N}_1 + \kappa_3 \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= -\kappa_3 \mathbf{N}_2. \end{cases}$$

5.1.1 Função altura sobre uma curva em $\mathbb{R}^4$

Considere a curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ suave e parametrizada pelo comprimento de arco, cujo referencial de Frenet é dado por $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{B}\}$. A família de funções altura sobre γ na direção $v \in S^3$ é dada por

$$\begin{aligned} H: I \times S^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, v) &\mapsto H(s, v) = \langle \gamma(s), v \rangle. \end{aligned}$$

Para $v \in S^3$ fixo, temos $H_v(s) = H(s, v)$. Genericamente, as singularidades de corank 1 que podem surgir são as do tipo A_k , com $1 \leq k \leq 4$. O seguinte resultado dá condições necessárias e suficientes para H_v ter essas singularidades.

Notação: Vamos denotar por $[e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}]$ o espaço gerado pelos vetores $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$.

Lema 5.3. (MOCHIDA, 1993, p. 47)

1. H_v possui uma singularidade de corank 1 em $s_0 \in I$ se, e somente se, $v \in [\mathbf{N}_1(s_0), \mathbf{N}_2(s_0), \mathbf{B}(s_0)]$.
2. s_0 é singularidade de H_v do tipo:
 - (i) A_1 se, e somente se, $v \in [\mathbf{N}_1(s_0), \mathbf{N}_2(s_0), \mathbf{B}(s_0)]$ e $v \notin [\mathbf{N}_2(s_0), \mathbf{B}(s_0)]$.

- (ii) A_2 se, e somente se, $v \in [\mathbf{N}_2(s_0), \mathbf{B}(s_0)]$ e $v \neq \pm \mathbf{B}(s_0)$.
- (iii) A_3 se, e somente se, $v = \pm \mathbf{B}(s_0)$ e $\kappa_3(s_0) \neq 0$.
- (iv) A_4 se, e somente se, $v = \pm \mathbf{B}(s_0)$, $\kappa_3(s_0) = 0$ e $\kappa_3'(s_0) \neq 0$.

5.1.2 Hipersuperfície canal

Dada uma subvariedade M de codimensão r em $\mathbb{R}^{n+r}$, podemos construir uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+r}$ associada a M , tomando a união das $(r-1)$ -esferas em $N_p M$ de raio $\varepsilon > 0$ e centro $p \in M$, onde

$$N_p M = \{v \in \mathbb{R}^{n+r} : \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in T_p M\}.$$

O espaço normal unitário de M em p é dado por

$$(N_p M)_1 = \{v \in N_p M : \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Definição 5.5. A hipersuperfície canal de M de raio ε é o conjunto

$$C_M(\varepsilon) = \{p + \varepsilon v : v \in (N_p M)_1\}.$$

Proposição 5.4. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 42, 43) Para ε suficientemente pequeno, temos:

- (i) A hipersuperfície canal de M é localmente uma subvariedade suave de $\mathbb{R}^{n+r}$ de codimensão 1.
- (ii) A aplicação de Gauss $\Gamma : C_M(\varepsilon) \rightarrow S^{n+r-1}$ da hipersuperfície canal $C_M(\varepsilon)$ de M é dada por

$$\Gamma(p, v) = v.$$

Em (BANCHOFF; GAFFNEY; MCCRORY, 1982), os autores estudaram a superfície canal de uma curva imersa em $\mathbb{R}^3$. Dada uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco, temos que a superfície canal de γ , $C_\gamma(\varepsilon)$, é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Seu conjunto parabólico consiste em duas curvas determinadas pelas direções binormais de γ em cada ponto. Explicaremos este caso abaixo, já que no nosso caso não existe uma figura ilustrativa, pois trabalharemos em $\mathbb{R}^4$.

Exemplo 5.1. Considere a curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(s) = \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s \right).$$

Note que γ está parametrizada pelo comprimento de arco. Assim, seu referencial de Frenet $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ \mathbf{N}(s) &= \left(-\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), 0 \right), \\ \mathbf{B}(s) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right)\end{aligned}$$

e a curvatura κ de γ é $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2}$. A superfície canal de γ , $C_\gamma(\varepsilon)$, é a superfície parametrizada por

$$\begin{aligned}f_\varepsilon : I \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto \gamma(s) + \varepsilon (\cos t \mathbf{N}(s) + \sin t \mathbf{B}(s)).\end{aligned}$$

A curvatura Gaussiana K de $C_\gamma(\varepsilon)$ fica então

$$K(s, t) = -\frac{-\cos t}{2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon \cos t\right)}.$$

Logo, o conjunto parabólico $K^{-1}(0)$ de $C_\gamma(\varepsilon)$ é o conjunto dos pontos da superfície tais que $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$ e é dado pelas curvas

$$\begin{aligned}g_\varepsilon^+ : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 & g_\varepsilon^- : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto \gamma(s) + \varepsilon \mathbf{B}(s) & s &\mapsto \gamma(s) - \varepsilon \mathbf{B}(s).\end{aligned}$$

A superfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ de γ e seu conjunto parabólico (formado pelas duas curvas simétricas) estão ilustrados na Figura 12.

Faremos um estudo de variedades similares, cujas dimensões são maiores em $\mathbb{R}^4$. Veremos que, em nosso caso, o conjunto parabólico consistirá em duas superfícies suaves em $\mathbb{R}^4$ (quatro superfícies dadas pelas parametrizações $g_\pm^1$ e $g_\pm^2$ da Seção 5.2 que se resumem a duas superfícies, devido às suas simetrias).

5.2 Hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ e seu conjunto parabólico

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ curva suave parametrizada pelo comprimento de arco, satisfazendo as condições da Proposição 5.1, cujo referencial de Frenet é dado por $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{B}\}$. A hipersuperfície canal de γ é dada por

$$C_\gamma(\varepsilon) = \{\gamma(s) + \varepsilon v : v \in (N_{\gamma(s)}\gamma)_1\},$$

onde o espaço normal $N_{\gamma(s)}\gamma$ é um 3-espaço. Logo, podemos fazer a identificação $(N_{\gamma(s)}\gamma)_1 \equiv S^2$ (ou seja, vetores de norma um) em $\mathbb{R}^4$.

Figura 12 – $C_\gamma(\varepsilon)$ e as curvas dadas por g_ε^+ e g_ε^- em $\mathbb{R}^3$

Podemos usar duas parametrizações para que S^2 seja completamente coberta. Essas parametrizações são da forma

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\mapsto (0, \operatorname{sen} x \cos y, \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \cos x)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Gamma_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\mapsto (0, \operatorname{sen} x \cos y, \cos x, \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y),\end{aligned}$$

com $U_1 = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ e $U_2 = (-\pi, 0) \times (0, 2\pi)$.

Note que Γ_1 cobre toda S^2 , exceto o semicírculo $C^1 = \{(0, u, v, w) \in S^2 : u \geq 0, v = 0\}$ e Γ_2 cobre toda S^2 exceto o semicírculo $C^2 = \{(0, u, v, w) \in S^2 : u \leq 0, w = 0\}$. Sendo assim, temos que a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ pode ser coberta por duas parametrizações f_ε^1 e f_ε^2 , onde

$$\begin{aligned}f_\varepsilon^1 : I \times U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (s, (x, y)) &\mapsto \gamma(s) + \varepsilon (\operatorname{sen} x \cos y \mathbf{N}_1(s) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \mathbf{N}_2(s) + \cos x \mathbf{B}(s))\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f_\varepsilon^2 : I \times U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (s, (x, y)) &\mapsto \gamma(s) + \varepsilon (\operatorname{sen} x \cos y \mathbf{N}_1(s) + \cos x \mathbf{N}_2(s) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \mathbf{B}(s)),\end{aligned}$$

ou seja, $f_\varepsilon^1(s, x, y) = \gamma(s) + \varepsilon \Gamma_1(s, x, y)$ e $f_\varepsilon^2(s, x, y) = \gamma(s) + \varepsilon \Gamma_2(s, x, y)$.

Conjunto parabólico de $C_\gamma(\varepsilon)$: Lembre que o conjunto parabólico de uma hipersuperfície M é dado pelos pontos $p \in M$ onde a curvatura de Gauss-Kronecker K nesses pontos se anula. Logo, para calcularmos o conjunto parabólico da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ de γ , devemos calcular as matrizes das primeiras e segundas formas fundamentais de f_ε^l ((g_{ij}^l) e (h_{ij}^l) , respectivamente), já que $K = \frac{\det(h_{ij}^l)}{\det(g_{ij}^l)}$, $l = 1, 2$. Iremos determinar a parametrização f_ε^2 . As contas para o caso da parametrização f_ε^1 são análogas e obtemos o mesmo resultado.

• Matriz (g_{ij}^2) da primeira forma fundamental de f_ε^2 :

Temos que:

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= \left\langle \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial s}, \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial s} \right\rangle, \quad g_{12}^2 = g_{21}^2 = \left\langle \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial s}, \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial x} \right\rangle, \quad g_{13}^2 = g_{31}^2 = \left\langle \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial s}, \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial y} \right\rangle, \\ g_{22}^2 &= \left\langle \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial x}, \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial x} \right\rangle, \quad g_{23}^2 = g_{32}^2 = \left\langle \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial x}, \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial y} \right\rangle, \quad g_{33}^2 = \left\langle \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial y}, \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial y} \right\rangle, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial s}(s, x, y) &= (1 - \varepsilon \kappa_1(s) \sin x \cos y) \mathbf{T}(s) - \varepsilon \kappa_2(s) \cos x \mathbf{N}_1(s) + \varepsilon \sin x (\kappa_2(s) \cos y - \kappa_3 \sin y) \mathbf{N}_2(s) \\ &\quad + \varepsilon \kappa_3(s) \cos x \mathbf{B}(s), \\ \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial x}(s, x, y) &= \varepsilon (\cos x \cos y \mathbf{N}_1(s) - \sin x \mathbf{N}_2(s) + \cos x \sin y \mathbf{B}(s)) \text{ e} \\ \frac{\partial f_\varepsilon^2}{\partial y}(s, x, y) &= \varepsilon (-\sin x \sin y \mathbf{N}_1(s) + \sin x \cos y \mathbf{B}(s)). \end{aligned}$$

Portanto, a matriz da primeira forma de f_ε^2 fica

$$(g_{ij}^2) = \begin{pmatrix} g_{11}^2 & -\varepsilon^2 \kappa_3 \sin y & \varepsilon^2 \sin x (\kappa_2 \sin x - \kappa_3 \cos x \cos y) \\ -\varepsilon^2 \kappa_3 \sin y & \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 \sin x (\kappa_2 \sin x - \kappa_3 \cos x \cos y) & 0 & -\varepsilon^2 \sin^2 x \end{pmatrix}$$

com $g_{11}^2 = (\varepsilon \cos x \cos y)^2 (\kappa_3^2 - \kappa_1^2) - 2\varepsilon^2 \kappa_2 \kappa_3 \sin x \cos x \cos y + \varepsilon^2 \cos^2 y (\kappa_1^2 - \kappa_3^2) - \varepsilon^2 \kappa_2^2 \cos^2 x - 2\varepsilon \kappa_1 \sin x \cos y + \varepsilon^2 (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) + 1$.

• Matriz (h_{ij}^2) da segunda forma fundamental de f_ε^2 :

Vimos na Proposição 5.4 (ii) que a aplicação de Gauss para f_ε^2 é dada por $\Gamma_2(s, x, y)$. Assim, os coeficientes da matriz (h_{ij}^2) são dados por

$$h_{ij}^2 = \left\langle \frac{\partial^2 f_\varepsilon^2}{\partial x_i \partial x_j}, \Gamma_2 \right\rangle, \text{ onde } x_1 = s, x_2 = x, x_3 = y.$$

Assim, a matriz da primeira forma de f_ε^2 fica

$$(h_{ij}^2) = \begin{pmatrix} h_{11}^2 & \varepsilon \kappa_3 \sin y & -\varepsilon \sin x (\kappa_2 \sin x - \kappa_3 \cos x \cos y) \\ \varepsilon \kappa_3 \sin y & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon \sin x (\kappa_2 \sin x - \kappa_3 \cos x \cos y) & 0 & -\varepsilon \sin^2 x \end{pmatrix}$$

com $h_{11}^2 = -\varepsilon (\cos x \cos y)^2 (\kappa_3^2 - \kappa_1^2) + 2\varepsilon \kappa_2 \kappa_3 \sin x \cos x \cos y - \varepsilon \cos^2 y (\kappa_1^2 - \kappa_3^2) + \varepsilon \kappa_2^2 \cos^2 x + \kappa_1 \sin x \cos y - \varepsilon (\kappa_2^2 - \kappa_3^2)$.

Logo, a curvatura de Gauss-Kronecker é dada por

$$K(s, x, y) = \frac{\det(h_{ij}^l)}{\det(g_{ij}^l)} = \frac{\kappa_1(s) \cos y \sin^2 x}{\varepsilon^2 (\varepsilon \kappa_1(s) \cos y (\cos^2 x - 1) + \sin x)},$$

para $(s, x, y) \in I \times U_l$, $l = 1, 2$.

Assim, o conjunto parabólico de $C_\gamma(\varepsilon)$, que denotaremos por $\Sigma_\varepsilon \Gamma$, é dado pelo pontos da hipersuperfície que pertencem a $K^{-1}(0)$. Como $K(s, x, y) = 0$ se, e somente se, $\cos y = 0$, então

$$K^{-1}(0) = \left\{ (s, x, y) : y = \frac{\pi}{2} \text{ ou } y = \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Verificamos que este conjunto tem a mesma expressão para ambas as parametrizações f_ε^1 e f_ε^2 . Substituindo $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ nas parametrizações da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$, podemos escrever $\Sigma_\varepsilon \Gamma = \Sigma_\varepsilon \Gamma_1 \cup \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$ com $\Sigma_\varepsilon \Gamma_1$ e $\Sigma_\varepsilon \Gamma_2$ parametrizadas, respectivamente, por g^1 e g^2 , onde

$$\begin{aligned} g^1 : I \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (s, x) &\mapsto g^1(s, x) = \gamma(s) + \varepsilon (\pm \sin x \mathbf{N}_2(s) + \cos x \mathbf{B}(s)) \\ g^2 : I \times (-\pi, 0) &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (s, x) &\mapsto g^2(s, x) = \gamma(s) + \varepsilon (\cos x \mathbf{N}_2(s) \pm \sin x \mathbf{B}(s)) \end{aligned}$$

As superfícies dadas por g^2 são simétricas às superfícies dadas por g^1 e diferem apenas por curvas não cobertas por g^1 em $x = 0$ e $x = \pi$ e não cobertas por g^2 em $x = -\pi$ e $x = 0$. Vamos fazer um estudo mais detalhado da superfície $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ na Subseção 5.2.3.

5.2.1 Singularidades da aplicação de Gauss de $C_\gamma(\varepsilon)$

Vimos que a aplicação de Gauss da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ é dada pelas parametrizações Γ_1 e Γ_2 e que, respectivamente, $C_\varepsilon(\gamma)$ é parametrizada por f_ε^1 e f_ε^2 . Veremos que as singularidades mais degeneradas que dobra da aplicação de Gauss de $C_\gamma(\varepsilon)$ ocorrem na parametrização f_ε^2 . Por este motivo, mostraremos os cálculos mais detalhados para essa parametrização. Para facilitar a notação, iremos denotar Γ_2 por apenas Γ , isto é

$$\begin{aligned} \Gamma : I \times U_2 &\rightarrow S^3 \\ (s, x, y) &\mapsto \sin x \cos y \mathbf{N}_1(s) + \cos x \mathbf{N}_2(s) + \sin x \sin y \mathbf{B}(s). \end{aligned}$$

Essas singularidades são captadas pelos conjuntos singulares de Γ , dados pela Definição 5.1.

No que segue, identificamos os conjuntos $\{f_\varepsilon^i(s, x, y) : (s, x, y) \in I \times U_i\}$ e $\{(s, x, y) : (s, x, y) \in I \times U_i\}$, para cada $i = 1, 2$.

Proposição 5.5. Os conjuntos singulares de Γ em $C_\gamma(\varepsilon)$ são dados por:

- (i) $\Sigma\Gamma = \Sigma^1(\Gamma) = \{f_\varepsilon^1(s, x, y) : y = \frac{k\pi}{2}, k = 1 \text{ ou } 3\} \cup \{f_\varepsilon^2(s, x, y) : y = \frac{k\pi}{2}, k = 1 \text{ ou } 3\}$, ou seja, $\Sigma^2(\Gamma) = \emptyset$,
- (ii) $\Sigma^{1,1}(\Gamma) = \{f_\varepsilon^2(s, x, y) : x = -\frac{\pi}{2} \text{ e } y = \frac{k\pi}{2}, k = 1 \text{ ou } 3\}$,
- (iii) $\Sigma^{1,1,1}(\Gamma) = \{f_\varepsilon^2(s, x, y) : x = -\frac{\pi}{2}, y = \frac{k\pi}{2}, k = 1 \text{ ou } 3 \text{ e } \kappa_3(s) = 0\}$.

Genericamente, esses conjuntos são superfícies e curvas suaves, e pontos isolados, respectivamente.

Demonstração. (i) Já é conhecido que o conjunto singular de Γ , $\Sigma\Gamma$, é igual ao conjunto de pontos da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ que anulam a curvatura de Gauss-Kronecker. Logo, pelos cálculos anteriores, temos

$$\Sigma\Gamma = \Sigma^1(\Gamma) = \left\{ (s, x, y) \in I \times U_2 : y = \frac{\pi}{2} \text{ ou } y = \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Além disso, $\Sigma\Gamma$ coincide com o conjunto de singularidades de primeira ordem de Γ , dado por $\Sigma^1(\Gamma) = \{(s, x, y) \in I \times U_2 : \text{corank}(J\Gamma(s, x, y)) = 1\}$. De fato, sabemos que Γ possui uma singularidade em (s, x, y) se o rank da matriz Jacobiana de Γ , $J\Gamma$, é menor que 3. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} &= (-\kappa_1(s) \sin x \cos y, -\kappa_2(s) \cos x, \kappa_2(s) \sin x \cos y - \kappa_3(s) \sin x \sin y, \kappa_3(s) \cos x), \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= (0, \cos x \cos y, -\sin x, \cos x \sin y) \text{ e} \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= (0, -\sin x \sin y, 0, \sin x \cos y), \end{aligned}$$

em relação à base $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}_1(s), \mathbf{N}_2(s), \mathbf{B}(s)\}$. Logo, Γ possui singularidade em (s, x, y) se, e somente se, todos os menores determinantes 3×3 da matriz

$$J\Gamma = \begin{pmatrix} -\kappa_1(s) \sin x \cos y & -\kappa_2(s) \cos x & \kappa_2(s) \sin x \cos y - \kappa_3(s) \sin x \sin y & \kappa_3(s) \cos x \\ 0 & \cos x \cos y & -\sin x & \cos x \sin y \\ 0 & -\sin x \sin y & 0 & \sin x \cos y \end{pmatrix}$$

se anulam simultaneamente, ou seja,

$$\begin{cases} \kappa_1(s) \sin y \cos y \sin^3 x = 0, \\ -\kappa_1(s) \sin^2 x \cos x \cos y = 0, \\ \kappa_1(s) \sin^3 x \cos^2 y = 0 \end{cases}$$

se, e somente se, $y = \frac{\pi}{2}$ ou $y = \frac{3\pi}{2}$, uma vez que $\kappa_1(s) \neq 0, \forall s \in I$ e $x \in (-\pi, 0)$. O resultado é o mesmo para $\Gamma = \Gamma_1$. Além disso, $\Sigma^2(\Gamma) = \{(s, x, y) \in I \times U_2 : \text{corank}(J \Gamma(s, x, y)) = 2\}$. Assim, a matriz Jacobiana $J \Gamma$ de Γ deve ter rank igual a 1, ou seja, os menores determinantes 3×3 e os menores determinantes 2×2 devem se anular simultaneamente. Mas isso não ocorre, uma vez que um dos menores determinantes 2×2 de $J \Gamma(s, x, y_0)$, onde $y_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $y_0 = \frac{3\pi}{2}$ é igual a $\sin^2 x$, que nunca se anula pois $x \in (-\pi, 0)$. Portanto, $\Sigma^2(\Gamma) = \emptyset$. Ou seja, $\Sigma^1(\Gamma) = \Sigma \Gamma$.

As contas para a parametrização Γ_1 são análogas ($x \in (0, \pi)$) e o resultado obtido é o mesmo. No que segue, só é necessário realizar os cálculos para a parametrização $\Gamma = \Gamma_2$, pois $\Gamma_1|_{\Sigma \varepsilon \Gamma}$ não possui pontos mais degenerados.

(ii) Seja $\Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)}$ a restrição de Γ ao conjunto $\Sigma^1(\Gamma)$. O conjunto $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$ é formado pelos pontos de $\Sigma^1(\Gamma)$ cujo $\text{corank}(J \Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)}) = 1$.

• Para $y = \frac{\pi}{2}$, temos $\Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)} = \Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)}(s, x) = \cos x \mathbf{N}_2(s) + \sin x \mathbf{B}(s)$. A matrix Jacobiana de $\Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)}$ é dada por

$$J \Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_2(s) \cos x & -\kappa_3(s) \sin x & \kappa_3(s) \cos x \\ 0 & 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Assim, $\text{rank}(J \Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)}) = 1$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \kappa_2(s) \sin x \cos x = 0, \\ -\kappa_2(s) \cos^2 x = 0 \end{cases}$$

ou seja, se, e somente se, $x = -\frac{\pi}{2}$, uma vez que $\kappa_2(s) \neq 0, \forall s \in I$.

• Para $y = \frac{3\pi}{2}$, temos $\Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)} = \Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)}(s, x) = \cos x \mathbf{N}_2(s) - \sin x \mathbf{B}(s)$. De maneira análoga, $\text{rank}(J \Gamma|_{\Sigma^1(\Gamma)}) = 1$ se, e somente se, $x = -\frac{\pi}{2}$.

Portanto,

$$\Sigma^{1,1}(\Gamma) = \left\{ (s, x, y) \in I \times U_2 : x = -\frac{\pi}{2} \text{ e } y = \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ (s, x, y) \in I \times U_2 : x = -\frac{\pi}{2} \text{ e } y = \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

(iii) Seja a restrição $\Gamma|_{\Sigma^{1,1}(\Gamma)}$ de Γ ao conjunto $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$:

$$\Gamma|_{\Sigma^{1,1}(\Gamma)} = \pm \mathbf{B}(s).$$

Assim, $\text{rank}(J \Gamma|_{\Sigma^{1,1}(\Gamma)}) = 0$ se, e somente se, $\pm \mathbf{B}'(s) = \mp \kappa_3(s) \mathbf{N}_2(s) = 0$, isto é, se, e somente se, $\kappa_3(s) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Sigma^{1,1,1}(\Gamma) = & \left\{ (s, x, y) \in I \times U_2 : x = -\frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} \text{ e } \kappa_3(s) = 0 \right\} \\ & \cup \left\{ (s, x, y) \in I \times U_2 : x = -\frac{\pi}{2}, y = \frac{3\pi}{2} \text{ e } \kappa_3(s) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

□

Observação 5.1. 1. Segue do resultado anterior que, na geometria genérica de hipersuperfície canal de curvas em $\mathbb{R}^4$, $\Sigma_\varepsilon \Gamma = \Sigma^{1,0}(\Gamma) \cup \Sigma^{1,1,0}(\Gamma) \cup \Sigma^{1,1,1,0}(\Gamma)$.

2. O fato de que $\Sigma^2(\Gamma) = \emptyset$ (ou seja, não existem singularidades do tipo $D_4^\pm$ para a função altura sobre $C_\gamma(\varepsilon)$) era esperado, uma vez que não temos singularidades do tipo umbílicas ($D_4^\pm$) para a função altura sobre a curva γ pois era natural que ambas estivessem relacionadas caso existissem.
3. Pela demonstração do resultado anterior, as singularidades mais degeneradas que dobra da aplicação de Gauss de $C_\gamma(\varepsilon)$ ocorrem no semicírculo $C^1 = \{(0, u, v, w) / u \geq 0 \text{ e } v = 0\}$ e por isso são captadas apenas por Γ_2 .

5.2.2 Singularidades das funções altura sobre $C_\gamma(\varepsilon)$ e sobre γ

Considere $C_\gamma(\varepsilon)$ como anteriormente, parametrizada por $f_\varepsilon^i : I \times U_i \rightarrow \mathbb{R}^4$, $i = 1, 2$. A função altura sobre $C_\gamma(\varepsilon)$ em uma direção $v \in S^3$ é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{H} : I \times U_i \times S^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((s, x, y), v) &\mapsto \tilde{H}((s, x, y), v) = \langle f_\varepsilon^i(s, x, y), v \rangle. \end{aligned}$$

Fixando v , temos a função $\tilde{H}((s, x, y), v) = \tilde{H}_v(s, x, y)$.

Lema 5.6. As singularidades da função altura H_v sobre a curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ na direção v são do tipo A_k se, e somente se, as singularidades da função altura $\tilde{H}_v$ sobre a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ na direção v são do tipo A_k , para $k = 1, \dots, 4$.

Demonstração. Pela Observação 5.1 - 3, as singularidades do tipo $A_{>2}$ da função altura ocorrem para a parametrização f_ε^2 de $C_\gamma(\varepsilon)$. Vamos então utilizar principalmente essa parametrização para a demonstração do resultado. As contas também foram feitas com a parametrização Γ_1 , mas o resultado permanece o mesmo.

1. Suponha que a função altura sobre a curva γ na direção v , $H_v(s) = \langle \gamma(s), v \rangle$, tenha uma singularidade do tipo A_1 . Então, pelo Lema 5.3, $v = \lambda_1 \mathbf{N}_1(s) + \lambda_2 \mathbf{N}_2(s) + \lambda_3 \mathbf{B}(s)$, com $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ e $\lambda_1 \neq 0$. Considere a função altura $\tilde{H}_v$ sobre a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ nesta direção $v \in S^3$, ou seja, $\tilde{H}_v(s, x, y) = \langle f_\varepsilon^2(s, x, y), v \rangle$. Temos que $\tilde{H}_v$ possui singularidade em (s, x, y) se, e somente se, $\frac{\partial \tilde{H}_v}{\partial s}(s, x, y) = 0$, $\frac{\partial \tilde{H}_v}{\partial x}(s, x, y) = 0$ e $\frac{\partial \tilde{H}_v}{\partial y}(s, x, y) = 0$. Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} -\lambda_1 \kappa_2(s) \cos x + \lambda_2 \sin x (\kappa_2(s) \cos y - \kappa_3(s) \sin y) + \lambda_3 \kappa_3(s) \cos x = 0, \\ \lambda_1 \cos x \cos y - \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x \sin y = 0, \\ \sin x (-\lambda_1 \sin y + \lambda_3 \cos y) = 0. \end{cases}$$

Lembremos que $x \in (-\pi, 0)$, logo, $\sin x \neq 0$, para todo x . Além disso, $\kappa_1(s)\kappa_2(s) \neq 0$, para todo $s \in I$. Da terceira equação do sistema, temos $\lambda_1 \sin y = \lambda_3 \cos y$. Note que não podemos ter $y = \frac{\pi}{2}$ ou $y = \frac{3\pi}{2}$ pois, caso contrário, teríamos $\lambda_1 = 0$, o que não ocorre por hipótese. Temos os seguintes casos:

- Se $\lambda_3 = 0$, então devemos ter $y = \pi$. Como $(s, x, \pi) \notin \Sigma_\varepsilon \Gamma$, então $\tilde{H}_v$ também possuirá uma singularidade do tipo A_1 .
 - Se $\lambda_3 \neq 0$, então $y \neq \pi$ e podemos fazer $\lambda_1 = \lambda_3 \frac{\cos y}{\sin y}$. Substituindo nas outras equações, obtemos $\lambda_2 = \lambda_3 \frac{\cos x}{\sin x \sin y}$. Pela condição $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, segue que $\lambda_3 = \pm \sin x \sin y$, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_3 \frac{\cos y}{\sin y} = \pm \sin x \cos y$. Como $\lambda_1 \neq 0$ por hipótese, segue que $y \neq \frac{\pi}{2}$ e $y \neq \frac{3\pi}{2}$. Ou seja, o ponto não é parabólico e portanto $\tilde{H}_v$ possuirá uma singularidade do tipo A_1 .
2. Suponha agora que a função altura sobre a curva γ na direção v , $H_v(s) = \langle \gamma(s), v \rangle$, tenha uma singularidade do tipo A_2 . Neste caso, temos $\lambda_1 = 0$ e $v = \lambda_2 \mathbf{N}_2(s) + \lambda_3 \mathbf{B}(s)$, com $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ e $\lambda_2 \neq 0$. Temos o sistema:

$$\begin{cases} \lambda_2 \sin x (\kappa_2(s) \cos y - \kappa_3(s) \sin y) + \lambda_3 \kappa_3(s) \cos x = 0, \\ -\lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x \sin y = 0, \\ \lambda_3 \sin x \cos y = 0. \end{cases}$$

Note que $\lambda_3 = 0$ implica $\lambda_2 = 0$, o que não ocorre por hipótese. Seja então $\lambda_3 \neq 0$. Da terceira equação, vem que $y = \frac{\pi}{2}$ ou $y = \frac{3\pi}{2}$ e então $\pm \lambda_2 \sin x = \lambda_3 \cos x$. Em ambos os casos, devemos ter $\cos x \neq 0$, ou seja, $x \neq -\frac{\pi}{2}$, já que $\lambda_2 \lambda_3 \sin x \neq 0$. Da relação $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, segue que $v = \lambda_2 \mathbf{N}_2(s) + \lambda_3 \mathbf{B}(s) = \pm \cos x \mathbf{N}_2(s) \pm \sin x \mathbf{B}(s)$, com $x \neq -\frac{\pi}{2}$. Portanto, temos que $(s, x, y) \in \Sigma^{1,0}(\Gamma)$ e $\tilde{H}_v$ possui singularidade A_2 .

3. Suponha agora que a função altura sobre a curva γ na direção v , $H_v(s) = \langle \gamma(s), v \rangle$, tenha uma singularidade do tipo A_3 . Logo, $v = \pm \mathbf{B}(s)$ e $\kappa_3(s) \neq 0$. O sistema fica:

$$\begin{cases} \kappa_3(s) \cos x = 0, \\ \cos x \sin y = 0, \\ \sin x \cos y = 0. \end{cases}$$

Logo, devemos ter $\cos x = \cos y = 0$, ou seja, $x = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$ ou $y = \frac{3\pi}{2}$, que significa $(s, x, y) \in \Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$ e portanto $\tilde{H}_v$ possui singularidade A_3 .

4. Se a função altura H_v possui singularidade do tipo A_4 , temos um caso análogo ao anterior, com a condição adicional de que $\kappa_3(s) = 0$ e, portanto, $(s, x, y) \in \Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$ e $\tilde{H}_v$ possui singularidade A_4 .

Considere agora a função altura $\tilde{H}_v$ sobre a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ na direção $v \in S^3$. Mostraremos agora que se $\tilde{H}_v$ sobre a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ na direção v possui uma

singularidade do tipo A_k , então H_v sobre a curva γ na direção v possui uma singularidade do tipo A_k , para $k = 1, \dots, 4$.

1. Se $\tilde{H}_v$ possui uma singularidade do tipo A_1 , então $(s, x, y) \notin \Sigma_\varepsilon \Gamma$. Logo, temos $y \neq \frac{k\pi}{2}$, $k = 1, 3$. Assim, o vetor normal à hipersuperfície $C_\gamma(\varepsilon)$ é da forma $v = \Gamma(s, x, y) = \lambda_1 \mathbf{N}_1(s) + \lambda_2 \mathbf{N}_2(s) + \lambda_3 \mathbf{B}(s)$, com $\lambda_1 = \sin x \cos y \neq 0$. Portanto, pelo Lema 5.3, segue que H_v possui uma singularidade do tipo A_1 .
2. Se $\tilde{H}_v$ possui uma singularidade do tipo A_2 , então, pela Proposição 5.5, temos $(s, x, y) \in \Sigma^{1,0}(\Gamma)$, ou seja, $y = \frac{\pi}{2}$ ou $y = \frac{3\pi}{2}$ e $x \neq -\frac{\pi}{2}$. Logo, $\Gamma(s, x, y) = \lambda_2 \mathbf{N}_2(s) + \lambda_3 \mathbf{B}(s)$, com $\lambda_2 = \cos x \neq 0$. Portanto, pelo Lema 5.3, segue que H_v possui uma singularidade do tipo A_2 .
3. Se $\tilde{H}_v$ possui uma singularidade do tipo A_3 , então, pela Proposição 5.5, temos $(s, x, y) \in \Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$, ou seja, $y = \frac{\pi}{2}$ ou $y = \frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$ e $\kappa_3(s) \neq 0$. Logo, $\Gamma(s, x, y) = \pm \mathbf{B}(s)$. Portanto, pelo Lema 5.3, segue que H_v possui uma singularidade do tipo A_3 .
4. Analogamente, se $\tilde{H}_v$ possui uma singularidade do tipo A_4 , então $(s, x, y) \in \Sigma^{1,1,1,0}(\Gamma)$, ou seja, $y = \frac{\pi}{2}$ ou $y = \frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$ e $\kappa_3(s) = 0$. Logo, $\Gamma(s, x, y) = \pm \mathbf{B}(s)$ e segue que H_v possui uma singularidade do tipo A_4 .

□

5.2.3 Geometria do conjunto parabólico de $C_\gamma(\varepsilon)$

Vamos fazer um estudo mais detalhado do conjunto parabólico $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$. Lembre que $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ pode ser parametrizado por

$$\begin{aligned} g^1 : I \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (s, x) &\mapsto g^1(s, x) = \gamma(s) + \varepsilon (\pm \sin x \mathbf{N}_2(s) + \cos x \mathbf{B}(s)), \\ g^2 : I \times (-\pi, 0) &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (s, x) &\mapsto g^2(s, x) = \gamma(s) + \varepsilon (\cos x \mathbf{N}_2(s) \pm \sin x \mathbf{B}(s)) \end{aligned}$$

que são superfícies suaves em $\mathbb{R}^4$ (lembre que as superfícies dadas por g^2 diferem das superfícies dadas por g^1 apenas por curvas). Assim, podemos usar a teoria existente na literatura sobre superfícies em $\mathbb{R}^4$ para obter informações interessantes sobre $\Sigma_\varepsilon \Gamma \subset C_\gamma(\varepsilon)$.

Observação 5.2. Vamos aqui apresentar as contas para $g^1(s, x) = \gamma(s) + \varepsilon (\sin x \mathbf{N}_2(s) + \cos x \mathbf{B}(s))$ e $g^2(s, x) = \gamma(s) + \varepsilon (\cos x \mathbf{N}_2(s) + \sin x \mathbf{B}(s))$. Os outros casos $g^1(s, x) = \gamma(s) + \varepsilon (-\sin x \mathbf{N}_2(s) + \cos x \mathbf{B}(s))$ e $g^2(s, x) = \gamma(s) + \varepsilon (\cos x \mathbf{N}_2(s) - \sin x \mathbf{B}(s))$ são análogos e os resultados obtidos coincidem, como esperado.

Vamos encontrar o discriminante Δ^i e a matriz α^i da segunda forma fundamental de g^i , para $i = 1, 2$, que serão usados nos resultados até o fim deste capítulo. Lembremos que estes são dados por

$$\Delta^i = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} l_1^i & 2m_1^i & n_1^i & 0 \\ l_2^i & 2m_2^i & n_2^i & 0 \\ 0 & l_1^i & 2m_1^i & n_1^i \\ 0 & l_2^i & 2m_2^i & n_2^i \end{vmatrix} \text{ e } \alpha^i = \begin{pmatrix} l_1^i & m_1^i & n_1^i \\ l_2^i & m_2^i & n_2^i \end{pmatrix},$$

onde l_j^i, m_j^i e n_j^i são os coeficientes da segunda forma fundamental de g^i , $i, j = 1, 2$. Vamos usar a Proposição 2.13 para determinar os tipos de pontos em $\Sigma_\varepsilon \Gamma_i$.

Para calcularmos os coeficientes da segunda forma fundamental de g^i , precisamos encontrar uma base para o espaço normal de $\Sigma_\varepsilon \Gamma_i$. Vamos fazer detalhadamente o caso $i = 2$.

Seja $p = g^2(s, x) \in \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$. Para encontrar uma base para o plano normal $N_p \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$, precisamos primeiramente encontrar uma base para o plano tangente $T_p \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$.

Base $\{v_1^2, v_2^2\}$ para $T_p \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$:

Uma base para $T_p \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$ pode ser dada pelos vetores ortonormais

$$v_1^2 = \frac{g_x^2}{\|g_x^2\|} \text{ e } v_2^2 = \frac{g_s^2 - \langle v_1^2, g_s^2 \rangle v_1^2}{\|g_s^2 - \langle v_1^2, g_s^2 \rangle v_1^2\|}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^2}{\partial s}(s, x) &= g_s^2(s, x) = \gamma'(s) + \varepsilon (\cos x \mathbf{N}_2'(s) + \sin x \mathbf{B}'(s)) \\ &= \mathbf{T}(s) - \varepsilon \kappa_2(s) \cos x \mathbf{N}_1(s) - \varepsilon \kappa_3(s) \sin x \mathbf{N}_2(s) + \varepsilon \kappa_3(s) \cos x \mathbf{B}(s) \\ &= (1, -\varepsilon \kappa_2(s) \cos x, -\varepsilon \kappa_3(s) \sin x, \varepsilon \kappa_3(s) \cos x) \\ &\text{e} \\ \frac{\partial g^2}{\partial x}(s, x) &= g_x^2(s, x) = \varepsilon (-\sin x \mathbf{N}_2(s) + \cos x \mathbf{B}(s)) = (0, 0, -\varepsilon \sin x, \varepsilon \cos x) \end{aligned}$$

Portanto, a base para $T_p \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$ fica

$$\{v_1^2, v_2^2\} = \left\{ (0, 0, -\sin x, \cos x), \frac{1}{a} (1, -\varepsilon \kappa_2(s) \cos x, 0, 0) \right\},$$

onde $a = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \kappa_2^2(s) \cos^2 x}$.

Base $\{w_1^2, w_2^2\}$ para $N_p \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$:

Uma base para $N_p \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$ pode ser dada pelos vetores ortonormais

$$w_1^2 = \frac{u}{\|u\|} \text{ e } w_2^2 = v_1^2 \times v_2^2 \times w_1^2,$$

onde u é simultaneamente perpendicular a v_1^2 e v_2^2 . Assim, tome $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

$$\begin{cases} \langle u, v_1^2 \rangle = 0 \\ \langle u, v_2^2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -u_3 \sin x + u_4 \cos x = 0 \\ \frac{1}{a} (u_1 - u_2 \varepsilon \kappa_2(s) \cos x) = 0 \end{cases}$$

Considere $u_1 = \varepsilon \kappa_2(s) \cos x$, $u_2 = 1$ e $u_3 = u_4 = 0$. Logo, $u = (\varepsilon \kappa_2(s) \cos x, 1, 0, 0)$ e $\|u\| = a$. Portanto, a base para $N_p \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$ fica

$$\{w_1^2, w_2^2\} = \left\{ \frac{1}{a} (\varepsilon \kappa_2(s) \cos x, 1, 0, 0), (0, 0, \cos x, \sin x) \right\}.$$

Coefficientes da segunda forma fundamental de g^2 :

Como

$$\begin{aligned} g_{ss}^2(s, x) &= (\varepsilon \kappa_1(s) \kappa_2(s) \cos x, \kappa_1(s) - \varepsilon \kappa_2'(s) \cos x + \varepsilon \kappa_2(s) \kappa_3(s) \sin x, \\ &\quad - \varepsilon (\kappa_2^2(s) \cos x + \kappa_3'(s) \sin x + \kappa_3^2(s) \cos x), -\varepsilon \kappa_3^2(s) \sin x + \varepsilon \kappa_3'(s) \cos x), \\ g_{sx}^2(s, x) &= (0, \varepsilon \kappa_2(s) \sin x, -\varepsilon \kappa_3(s) \cos x, -\varepsilon \kappa_3(s) \sin x) \text{ e} \\ g_{xx}^2(s, x) &= (0, 0, -\varepsilon \cos x, -\varepsilon \sin x), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} l_1^2 &= \langle g_{ss}^2, w_1^2 \rangle = \frac{1}{a} (\varepsilon^2 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) \cos^2 x + \varepsilon \kappa_2(s) \kappa_3(s) \sin x - \varepsilon \kappa_2'(s) \cos x + \kappa_1(s)), \\ m_1^2 &= \langle g_{sx}^2, w_1^2 \rangle = \frac{1}{a} \varepsilon \kappa_2(s) \sin x, \\ n_1^2 &= \langle g_{xx}^2, w_1^2 \rangle = 0, \\ l_2^2 &= \langle g_{ss}^2, w_2^2 \rangle = -\varepsilon (\kappa_2^2(s) \cos^2 x + \kappa_3^2(s)), \\ m_2^2 &= \langle g_{sx}^2, w_2^2 \rangle = -\varepsilon \kappa_3(s) \text{ e} \\ n_2^2 &= \langle g_{xx}^2, w_2^2 \rangle = -\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, segue que $\Delta^2 = \Delta^2(s, x)$ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= -\frac{\varepsilon^2}{4a^2} (\varepsilon^4 \kappa_1^2(s) \kappa_2^4(s) \cos^4 x - 2\varepsilon^3 \kappa_1(s) \kappa_2^3(s) \kappa_3(s) \sin x \cos^2 x - 4\varepsilon^2 \kappa_2^4(s) \cos x \\ &\quad - 2\varepsilon^3 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) \kappa_2'(s) \cos^3 x + 2\varepsilon^2 \kappa_1'(s) \kappa_2^2(s) \cos^2 x + 4\varepsilon^2 \kappa_2^4(s) \cos^2 x \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \kappa_2(s) \kappa_3(s) \kappa_2'(s) \cos x \sin x - \varepsilon^2 \kappa_2^2(s) \kappa_3^2(s) \cos^2 x + \varepsilon^2 (\kappa_2'(s))^2 \cos^2 x \\ &\quad + \varepsilon^2 \kappa_2^2(s) \kappa_3^2(s) - 2\varepsilon \kappa_1(s) \kappa_2(s) \kappa_3(s) \sin x - 2\varepsilon \kappa_1(s) \kappa_2'(s) \cos x + \kappa_1^2(s)). \end{aligned}$$

De maneira análoga, uma base para o espaço normal $N_p \Sigma_\varepsilon \Gamma_1$, considerando a parametrização $g^1(s, x) = \gamma(s) + \varepsilon (\sin x \mathbf{N}_2(s) + \cos x \mathbf{B}(s))$, é dada por:

$$\{w_1^1, w_2^1\} = \left\{ (0, 0, -\sin x, -\cos x), \frac{1}{b} (\varepsilon \kappa_2(s) \sin x, 1, 0, 0) \right\},$$

onde $b = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \kappa_2^2 \sin^2 x}$. Com isso, calculamos os coeficientes da segunda forma fundamental

de g^1 :

$$\begin{aligned} l_1^1 &= \langle g_{ss}^1, w_1^1 \rangle = -\frac{1}{b} \left(-\varepsilon^2 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) \sin^2 x - \varepsilon \kappa_2(s) \kappa_3(s) \cos x + \varepsilon \kappa_2'(s) \sin x - \kappa_1(s) \right), \\ m_1^1 &= \langle g_{sx}^1, w_1^1 \rangle = -\frac{1}{b} \varepsilon \kappa_2(s) \cos x, \\ n_1^1 &= \langle g_{xx}^1, w_1^1 \rangle = 0, \\ l_2^1 &= \langle g_{ss}^1, w_2^1 \rangle = \varepsilon \left(\kappa_2^2(s) \sin^2 x + \kappa_3^2(s) \right), \\ m_2^1 &= \langle g_{sx}^1, w_2^1 \rangle = -\varepsilon \kappa_3(s) \text{ e} \\ n_2^1 &= \langle g_{xx}^1, w_2^1 \rangle = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, temos $\Delta^1 = \Delta^1(s, x)$ dado por

$$\begin{aligned} \Delta^1 &= -\frac{\varepsilon^2}{4b^2} \left(\varepsilon^4 \kappa_1^2(s) \kappa_2^4(s) \cos^4 x + 2\varepsilon^3 \kappa_1(s) \kappa_2^3(s) \kappa_3(s) \cos^3 x + 2\varepsilon^3 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) \kappa_2'(s) \sin x \cos^2 x \right. \\ &\quad - 2\varepsilon^4 \kappa_1^4(s) \kappa_2^4(s) \cos^2 x - 4\varepsilon^2 \kappa_2^4(s) \cos^4 x + \varepsilon^4 \kappa_1^2(s) \kappa_2^4(s) - 2\varepsilon^3 \kappa_1(s) \kappa_2^3(s) \kappa_3(s) \cos x + \kappa_1^2(s) \\ &\quad - 2\varepsilon^3 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) \kappa_2'(s) \sin x - 2\varepsilon^2 \kappa_1^2(s) \kappa_2^2(s) \cos^2 x + 4\varepsilon^2 \kappa_2^4(s) \cos^2 x + \varepsilon^2 \kappa_2^2(s) \kappa_3^2(s) \cos^2 x \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \kappa_2(s) \kappa_3(s) \kappa_2'(s) \sin x \cos x - \varepsilon^2 (\kappa_2'(s))^2 \cos^2 x + 2\varepsilon^2 \kappa_1^2(s) \kappa_2^2(s) - 2\varepsilon \kappa_1(s) \kappa_2(s) \kappa_3(s) \cos x \\ &\quad \left. - 2\varepsilon \kappa_1(s) \kappa_2'(s) \sin x + \varepsilon^2 (\kappa_2'(s))^2 \right). \end{aligned}$$

De acordo com a classificação dos pontos da superfície $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ como na Proposição 2.13, temos o resultado a seguir. Lembrando que estamos considerando o conjunto parabólico como $\Sigma_\varepsilon \Gamma = \Sigma_\varepsilon \Gamma_1 \cup \Sigma_\varepsilon \Gamma_2$, vamos mostrar que os pontos de inflexão ocorrem em $\Sigma_\varepsilon \Gamma_1$. Além disso, segue da Observação 5.1 que os pontos de cúspide e rabo de andorinha ocorrem para a parametrização Γ_2 da aplicação de Gauss de $C_\gamma(\varepsilon)$.

Proposição 5.7. Seja a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ e considere a superfície de pontos parabólicos $\Sigma_\varepsilon \Gamma$. Temos

- (i) Pontos de inflexão de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ ocorrem quando $\kappa_1(s) = \frac{\varepsilon \kappa_2'(s)}{\varepsilon^2 \kappa_2^2(s) + 1}$.
- (ii) Se (s, x) é uma cúspide da aplicação de Gauss Γ sobre a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$, então $g(s, x) \in \Sigma_\varepsilon \Gamma$ é um ponto:
 - parabólico, se ocorrer $\kappa_3(s) = -\frac{\kappa_1(s)}{\varepsilon \kappa_2(s)}$,
 - hiperbólico, se ocorrer $\kappa_3(s) \neq -\frac{\kappa_1(s)}{\varepsilon \kappa_2(s)}$.
- (iii) Se (s, x) é um rabo de andorinha da aplicação de Gauss Γ sobre a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$, então $g(s, x) \in \Sigma_\varepsilon \Gamma$ é um ponto hiperbólico de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$.

Demonstração. (i) As matrizes das segundas formas fundamentais de $\Sigma_\varepsilon \Gamma_i$, $i = 1, 2$, são, respectivamente, dadas por:

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^2 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) \sin^2 x - \varepsilon \kappa_2(s) \kappa_3(s) \cos x + \varepsilon \kappa_2'(s) \sin x - \kappa_1(s)}{b} & -\frac{\varepsilon \kappa_2(s) \cos x}{b} & 0 \\ \varepsilon \left(\kappa_2^2(s) \sin^2 x + \kappa_3^2(s) \right) & -\varepsilon \kappa_3(s) & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^2 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) \cos^2 x + \varepsilon \kappa_2(s) \kappa_3(s) \sin x - \varepsilon \kappa_2'(s) \cos x + \kappa_1(s)}{a} & \frac{\varepsilon \kappa_2(s) \sin x}{a} & 0 \\ -\varepsilon (\kappa_2^2(s) \cos^2 x + \kappa_3^2(s)) & -\varepsilon \kappa_3(s) & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Note que um dos menores determinantes 2×2 da matriz α^2 é

$$m_1^2 n_2^2 - m_2^2 n_1^2 = \frac{-\varepsilon^2 \kappa_2(s) \sin x}{a} \neq 0,$$

já que $\sin x \neq 0, \forall x \in (-\pi, 0)$. Logo, temos que $\text{rank } \alpha^2 = 2$. Assim, segue que a superfície $\Sigma_\varepsilon \Gamma_2$ não admite pontos de inflexão. Por outro lado, os menores determinantes 2×2 da matriz α^1 se anulam simultaneamente quando

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \kappa_2(s) \cos x = 0, \\ -\varepsilon (\varepsilon^2 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) (\cos^2 x - 1) - \varepsilon \kappa_2(s) \kappa_3(s) \cos x + \varepsilon \kappa_2'(s) \sin x - \kappa_1(s)) = 0, \\ \varepsilon (\varepsilon^2 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) \kappa_3(s) (\cos^2 x - 1) - \varepsilon \kappa_2^3(s) \cos x (\cos^2 x - 1) + \varepsilon \kappa_3(s) \kappa_2'(s) - \kappa_1(s) \kappa_3(s)) = 0, \end{cases}$$

ou seja, $\text{rank } \alpha^1 < 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ e $\kappa_1(s) = \frac{\varepsilon \kappa_2'(s)}{\varepsilon^2 \kappa_2^2(s) + 1}$.

Considere $x = \frac{\pi}{2}$. O discriminante Δ^1 fica

$$\Delta^1 \left(s, \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\varepsilon^2}{4(\varepsilon^2 \kappa_2^2(s) + 1)} (-\varepsilon^2 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) + \varepsilon \kappa_2'(s) - \kappa_1(s))^2.$$

então temos $\Delta^1 \left(s, \frac{\pi}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \kappa_1(s) = \frac{\varepsilon \kappa_2'(s)}{\varepsilon^2 \kappa_2^2(s) + 1}$. Portanto, se $s_0 \in I$ é tal que $\kappa_1(s_0) = \frac{\varepsilon \kappa_2'(s_0)}{\varepsilon^2 \kappa_2^2(s_0) + 1}$, temos que $g^1 \left(s_0, \frac{\pi}{2} \right)$ é um ponto de inflexão da superfície parabólica $\Sigma_\varepsilon \Gamma$.

- (ii) Seja (s, x) uma cúspide da aplicação de Gauss Γ (portanto, $\Gamma = \Gamma_2$). Pela Proposição 5.5, temos que $x = -\frac{\pi}{2}$. Substituindo em Δ^2 , segue que

$$\Delta^2 \left(s, -\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\varepsilon^2 (\kappa_1(s) + \varepsilon \kappa_2(s) \kappa_3(s))^2}{4}.$$

Assim, temos os seguintes casos:

- (a) $\Delta^2 \left(s, -\frac{\pi}{2} \right) = 0$ se, e somente se, $\kappa_3(s) = -\frac{\kappa_1(s)}{\varepsilon \kappa_2(s)}$.
(b) $\Delta^2 \left(s, -\frac{\pi}{2} \right) < 0$ caso contrário.

Portanto, se (s, x) é uma cúspide de Gauss de Γ_2 , então $g^2(s, x)$ é um ponto parabólico ou hiperbólico de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$.

- (iii) Considere (s, x) um ponto de rabo de andorinha da aplicação de Gauss $\Gamma = \Gamma_2$. Então segue que $x = -\frac{\pi}{2}$ e $\kappa_3(s) = 0$. Substituindo em Δ^2 , temos

$$\Delta^2 \left(s, -\frac{\pi}{2} \right) = -\varepsilon^2 \kappa_1^2(s) < 0, \forall s \in I.$$

Portanto, se (s, x) é um rabo de andorinha de Γ , então $g^2(s, x)$ é um ponto hiperbólico de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$.

□

A seguir comentaremos o que podemos concluir sobre as singularidades da função altura $\tilde{H}_v$ sobre a superfície $\Sigma_\varepsilon\Gamma$.

Observação 5.3. Do Teorema 4.2 de (MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 1995), segue que um ponto p de uma superfície genérica $\bar{M}$ em $\mathbb{R}^4$ é do tipo $D_4^\pm$ para a função altura sobre N numa direção normal v se, e somente se, p é um ponto de inflexão de N . No nosso caso, segue deste resultado que a função altura $\tilde{H}_v$ sobre a superfície $\Sigma_\varepsilon\Gamma$ possui singularidade do tipo $D_4^\pm$ quando $x = \frac{\pi}{2}$ e $s_0 \in I$ é tal que $\kappa_1(s_0) = \frac{\varepsilon\kappa_2'(s_0)}{\varepsilon^2\kappa_2^2(s_0)+1}$, já que $g^1(s_0, \frac{\pi}{2})$ é ponto de inflexão de $\Sigma_\varepsilon\Gamma$ (como vimos na demonstração da Proposição 5.7). Isso significa que, em nosso contexto, podemos ter uma singularidade de corank 2 para a função altura sobre a superfície $\Sigma_\varepsilon\Gamma \subset C_\gamma(\varepsilon)$, mesmo não tendo esse tipo de singularidade para a função altura $\tilde{H}_v$ sobre $C_\gamma(\varepsilon)$, já que $\tilde{H}_v$ não admite singularidades do tipo $\Sigma^2(\Gamma)$ (Proposição 5.5-(i)).

Podemos relacionar as singularidades da aplicação de Gauss da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ com a existência de direções binormais no conjunto parabólico $\Sigma_\varepsilon\Gamma$. Para isso, considere a Proposição a seguir.

Proposição 5.8. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 223) Seja $\bar{M}$ uma superfície suave em $\mathbb{R}^4$.

- (i) Se p é um ponto elíptico de $\bar{M}$, então $\tilde{H}_v$ possui uma singularidade não degenerada em u , de tipo A_1 , $\forall v \in N_p\bar{M}$.
- (ii) Se p é um ponto hiperbólico, então existem exatamente duas direções binormais distintas v_1, v_2 em $N_p\bar{M}$.
- (iii) Se p é um ponto parabólico que não é ponto de inflexão, então existe uma única direção binormal v em $N_p\bar{M}$.

Tendo em vista as informações das Proposições 5.7 e 5.8, temos o corolário abaixo.

Corolário 5.9. Seja a hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$, considere seu conjunto parabólico $\Sigma_\varepsilon\Gamma$ e seja $p \in \Sigma_\varepsilon\Gamma$. Logo,

- (i) Se (s, x) é uma cúspide da aplicação de Gauss Γ e $\kappa_3(s) = -\frac{\kappa_1(s)}{\varepsilon\kappa_2(s)}$, então existe uma única direção binormal v em $N_p\Sigma_\varepsilon\Gamma$.
- (ii) Se (s, x) é uma cúspide da aplicação de Gauss Γ e $\kappa_3(s) \neq -\frac{\kappa_1(s)}{\varepsilon\kappa_2(s)}$, então existem exatamente duas direções binormais distintas em $N_p\Sigma_\varepsilon\Gamma$.
- (iii) Se (s, x) é um rabo de andorinha da aplicação de Gauss Γ , então existem exatamente duas direções binormais distintas em $N_p\Sigma_\varepsilon\Gamma$.

Além disso, uma destas direções binormais é sempre $v \in N_pC_\gamma(\varepsilon)$ e isto acontece apenas na curva A_3 de $\Sigma_\varepsilon\Gamma$.

Demonstração. (i) Nesse caso, temos que p é um ponto parabólico, uma vez que $\Delta = \Delta^2 = 0$ e $\Sigma_\varepsilon \Gamma_2$ não admite pontos de inflexão. Assim, existe uma única direção binormal em $N_p \Sigma_\varepsilon \Gamma$, dada por $v = \cos x \mathbf{N}_2(s) + \sin x \mathbf{B}(s)$.

(ii) Neste caso, temos $\Delta < 0$, ou seja, temos um ponto hiperbólico. Assim, existem duas direções binormais distintas em $N_p \Sigma_\varepsilon \Gamma$.

(iii) Idem ao caso (ii).

Fora da curva A_3 de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$, $v \in N_p C_\gamma(\varepsilon)$ não é direção binormal pela Proposição 4.3 e Corolário 4.5. $\square$

Observação 5.4. Podemos associar as singularidades da função altura $\tilde{H}_v$ de $C_\gamma(\varepsilon)$ com as singularidades da função altura $\bar{H}_v$ do conjunto parabólico $\Sigma_\varepsilon \Gamma$. Para que faça sentido compararmos estas singularidades, é necessário que v seja normal à $C_\gamma(\varepsilon)$ quando $p \in \Sigma_\varepsilon \Gamma$, ou seja, $v = \pm(0, 0, \cos x, \sin x)$. Assim, podemos usar a Proposição 4.3 para comparar tais singularidades. Observamos que a função altura $\bar{H}_v$ pode também ser escrita usando g^1 e g^2 , porém, isso não nos permite novas conclusões. De fato, temos que $\bar{H}_v$ na direção $v = \cos x \mathbf{N}_2(s) + \sin x \mathbf{B}(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} \bar{H}_v(s, x) &= \langle g^1(s, x), v \rangle \\ &= \langle \gamma(s) + \varepsilon (\pm \sin x \mathbf{N}_2(s) + \cos x \mathbf{B}(s)), \cos x \mathbf{N}_2(s) + \sin x \mathbf{B}(s) \rangle \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \bar{H}_v(s, x) &= \langle g^2(s, x), v \rangle \\ &= \langle \gamma(s) + \varepsilon (\cos x \mathbf{N}_2(s) \pm \sin x \mathbf{B}(s)), \cos x \mathbf{N}_2(s) + \sin x \mathbf{B}(s) \rangle. \end{aligned}$$

Dessa maneira, não conseguimos obter condições para descrever as singularidades de $\bar{H}_v$ como em (BRUCE; TARI, 2002), uma vez que g^1 e g^2 estão fora da origem.

5.2.4 Fatos interessantes, exemplos e superfícies frontais

Vamos apresentar alguns casos particulares e exemplos provenientes dos resultados anteriores. Produziremos também um método para gerar superfícies frontais globais. Em (1) daremos condições sobre γ para obtermos $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ sem pontos elípticos e sem pontos de inflexão. Em (2) daremos uma condição genérica para γ e produziremos uma curva A_3 em $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ que não encontra o conjunto parabólico de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$. Em (3), usando a Proposição 5.11, produziremos superfícies frontais.

- (1) Relacionando a geometria da curva γ com a geometria da superfície parabólica $\Sigma_\varepsilon \Gamma$, podemos obter uma classe de curvas para as quais a superfície $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ não admite pontos elípticos. Seja, por exemplo, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma curva parametrizada pelo comprimento de

arco tal que $\kappa_3(s) = 0$, para todo $s \in I$ e tal que $\kappa_2(s)$ é constante para todo $s \in I$. Logo, segue que $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ não admite pontos elípticos. De fato, se $\kappa_3(s) = \kappa_2'(s) = 0$, para todo $s \in I$, temos

$$\begin{aligned}\Delta^1(s, x) &= -\frac{\varepsilon^2}{b^2} \left((\varepsilon^2 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s) \cos^2 x - \varepsilon^2 \kappa_1(s) \kappa_2^2(s))^2 + 4\varepsilon^2 \kappa_2^4(s) \cos^2 x \sin^2 x + \kappa_1^2(s) \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon^2 \kappa_1^2(s) \kappa_2^2(s) \sin^2 x \right) \text{ e} \\ \Delta^2(s, x) &= -\frac{\varepsilon^2}{a^2} \left(\varepsilon^4 \kappa_1^2(s) \kappa_2^4(s) \cos^4 x + 4\varepsilon^2 \kappa_2^4(s) \cos^2 x \sin^2 x + 2\varepsilon^2 \kappa_1^2(s) \kappa_2^2(s) \cos^2 x \right. \\ &\quad \left. + \kappa_1^2(s) \right),\end{aligned}$$

ou seja, $\Delta^1(s, x) \leq 0$ para todo $(s, x) \in I \times (0, \pi)$ e $\Delta^2(s, x) \leq 0$ para todo $(s, x) \in I \times (-\pi, 0)$. Note que, neste caso, $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ também não admite pontos de inflexão pois não satisfaz a condição $\kappa_1(s) = \frac{\varepsilon \kappa_2'(s)}{\varepsilon^2 \kappa_2^2(s) + 1}$.

- (2) Em (MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 1995), as autoras estudaram o contato de uma superfície M em $\mathbb{R}^4$ com hiperplanos via família de funções altura. O conjunto de pontos parabólicos ($\Delta = 0$) da superfície M é dado por uma curva suave e o conjunto de singularidades do tipo A_3 ($\Sigma^{1,1}(\Gamma)$) da função altura também é, genericamente, uma curva suave na região hiperbólica, tangente à curva de pontos parabólicos. As singularidades do tipo A_4 da função altura ocorrem em pontos isolados da curva A_3 (ver Figura 13 (a)). A justificativa de que a interseção da curva $\Delta = 0$ com a curva $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$ não pode ocorrer em uma singularidade do tipo A_4 pode ser encontrada na demonstração do Teorema 7.8 de (IZUMIYA *et al.*, 2016).

Figura 13 – Curvas e pontos sobre M via família de funções altura

No nosso caso, se a curva γ não admite $s_0 \in I$ tal que $k_3(s_0) = -\frac{k_1(s_0)}{\varepsilon k_2(s_0)}$, temos que a curva de pontos parabólicos $\Delta = 0$ de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ não intersecta a curva $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$ (que é a curva de singularidades do tipo A_3 da função altura) e segue que a curva $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$ está totalmente na região hiperbólica ($\Delta < 0$) - Figura 13 (b). Ou seja, baseado em um simples fato genérico da curva ($k_3(s) \neq -\frac{k_1(s)}{\varepsilon k_2(s)}$, para todo $s \in I$) podemos produzir em $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ uma situação não genérica segundo a teoria de superfícies em $\mathbb{R}^4$.

A seguir, veremos exemplos do fato acima, em que a curva de pontos parabólicos $\Delta = 0$ de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ não intersecta a curva $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$. Gostaríamos de agradecer ao prof. Dr. Ronaldo Garcia, UFG, pelo exemplo (a) da curva γ com κ_1 , κ_2 e κ_3 positivas para todo $s \in \mathbb{R}$ e também à profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas, ICMC-USP, pela sugestão do exemplo (b) e do método do caso (3).

Exemplo 5.2. (a) Considere a curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$\gamma(s) = (\cos(ms), \sin(ms), \cos(ns), \sin(ns)),$$

com $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq n$ e $m^2 + n^2 = 1$. Como $\|\gamma'(s)\| = \sqrt{m^2 + n^2} = 1$, segue que γ é parametrizada pelo comprimento de arco. Assim, as curvaturas de γ em s são dadas por:

$$\begin{aligned} \kappa_1(s) &= \sqrt{m^4 + n^4}, \\ \kappa_2(s) &= \frac{m^2 n^2 (m^2 - n^2)^2}{\sqrt{m^2 n^2 (m^4 + n^4) (m^2 - n^2)^2}} \text{ e} \\ \kappa_3(s) &= \frac{m^4 n^4 (m^2 - n^2)^2}{\sqrt{m^6 n^6 (m^4 + n^4) (m^2 - n^2)^4}}. \end{aligned}$$

Considere o conjunto parabólico $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ de γ . Se $(s, x) \in \mathbb{R} \times (-\pi, 0)$ é uma cúspide da aplicação de Gauss Γ para $C_\gamma(\varepsilon)$, então $x = -\frac{\pi}{2}$ e o discriminante Δ de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ em (s, x) é dado por

$$\Delta = -\frac{\varepsilon^2 (\kappa_1(s) + \varepsilon \kappa_2(s) \kappa_3(s))^2}{4}.$$

Como as curvaturas κ_1 , κ_2 e κ_3 são positivas para todo $s \in \mathbb{R}$, então estamos no caso $\kappa_3(s) \neq -\frac{\kappa_1(s)}{\varepsilon \kappa_2(s)}$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Portanto, $\Delta < 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e, conseqüentemente, a curva de pontos parabólicos $\Delta = 0$ de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ não intersecta a curva $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$.

(b) Podemos produzir outro exemplo no qual a curva de cúspides da aplicação de Gauss Γ de $C_\gamma(\varepsilon)$ não intersecta a curva de pontos parabólicos de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$. Em (GARCIA *et al.*, 2000), os autores estudaram pontos de inflexão em superfícies no $\mathbb{R}^4$. Um exemplo de superfície

não convexa é dada pelo seguinte toro: $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$, onde

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left(1 - \frac{1}{10} \cos y\right) \cos x + \frac{1}{10} \sin x \sin y, \\ f_2(x, y) &= \left(1 - \frac{1}{10} \cos y\right) \sin x - \frac{1}{10} \cos x \sin y, \\ f_3(x, y) &= \left(1 - \frac{2}{5} \cos y\right) \cos(2x) + \frac{4}{5} \sin(2x) \sin y \text{ e} \\ f_4(x, y) &= \left(1 - \frac{2}{5} \cos y\right) \sin(2x) - \frac{4}{5} \cos(2x) \sin y. \end{aligned}$$

Fixando $y = \frac{\pi}{4}$, obtemos uma curva contida neste toro em $\mathbb{R}^4$, ou seja, temos a curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x), \gamma_4(x))$, onde

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{20}\right) \cos x + \frac{\sqrt{2}}{20} \sin x, \quad \gamma_2(x) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{20}\right) \sin x - \frac{\sqrt{2}}{20} \cos x, \\ \gamma_3(x) &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{5}\right) \cos(2x) + \frac{2\sqrt{2}}{5} \sin(2x) \text{ e } \gamma_4(x) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{5}\right) \sin(2x) - \frac{2\sqrt{2}}{5} \cos(2x). \end{aligned}$$

Fazendo os cálculos, também temos que as curvaturas $\kappa_1(x)$, $\kappa_2(x)$ e $\kappa_3(x)$ de γ são todas positivas e, com isso, $\Delta(p) < 0$ quando p é uma cúspide de Γ .

- (3) Um fato muito interessante proveniente do que vimos neste capítulo, é que podemos gerar superfícies conhecidas como frontais.

Os primeiros trabalhos que se referem às frontais são (SAJI; UMEHARA; YAMADA, 2009), (ISHIKAWA, 2005) e (ZAKALYUKIN; KURBATSKII, 2008). A noção de frontal surgiu como uma generalização de frentes de onda no caso de hipersuperfícies. No entanto, existem muitos exemplos de frontais que não são frentes de onda (ver, por exemplo, (SAJI, 2009)). De uma maneira geral, uma frontal é a projeção de uma subvariedade Legendriana com singularidades (para definições básicas sobre singularidades Legendrianas, ver (ISHIKAWA, 2005)). Nos últimos anos, as frontais despertaram um grande interesse e, como consequência, existem muitos artigos dedicados ao seu estudo como, por exemplo, (SAJI, 2009), (ISHIKAWA, 2016) e (ISHIKAWA, 2018). Segue abaixo a definição de frontal.

Definição 5.6. (ZAKALYUKIN; KURBATSKII, 2008, p. 75) Uma aplicação $\rho: U^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $U^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, é chamada **frontal** se existe uma aplicação $\xi: U^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}T^*\mathbb{R}^n$ tal que $\pi \circ \xi = \rho$, onde $\pi: \mathbb{P}T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção natural e a imagem de ξ é uma subvariedade Legendriana singular.

Com isso, temos a seguinte proposição, essencial para o caso particular dos objetos de estudo deste capítulo.

Proposição 5.10. (ZAKALYUKIN; KURBATSKII, 2008, p. 75) Se o conjunto Σf de pontos críticos de uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma subvariedade, então a restrição $f|_{\Sigma f}$ é uma frontal.

Como mostramos que $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ é suave (pela Proposição 5.5), usando a Proposição 5.10 temos o resultado a seguir.

Proposição 5.11. Seja $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ o conjunto parabólico da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ de uma curva em $\mathbb{R}^4$. Então $\Gamma : \Sigma_\varepsilon \Gamma \rightarrow S^3$ é uma frontal em $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Sendo assim, o que mostramos nesse capítulo produz um método para determinar frontais globais que são superfícies compactas em S^3 . Essas são frontais genéricas, edges cuspidais e rabos de andorinha. Podemos então considerar a aplicação de Gauss Γ da hipersuperfície canal $C_\gamma(\varepsilon)$ restrita ao conjunto parabólico $\Sigma_\varepsilon \Gamma$, ou seja, fazendo $y = \frac{\pi}{2}$ ou $y = \frac{3\pi}{2}$, temos a aplicação

$$\Gamma(s, x) = \cos x \mathbf{N}_2(s) \pm \sin x \mathbf{B}(s).$$

Assim, temos que a imagem de Γ é uma superfície em $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Usaremos a projeção estereográfica para levar essa superfície de $\mathbb{R}^4$ difeomorficamente em uma superfície em $\mathbb{R}^3$, gerando assim exemplos de frontais.

É fácil verificar que o ponto $(0, 0, 0, 1)$ não pertence à imagem de Γ em S^3 . Sendo assim, podemos fazer a projeção estereográfica dada por

$$\begin{aligned} \pi : S^3_\Gamma &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, Y, Z, W) &\mapsto \frac{1}{1-W} (X, Y, Z) \end{aligned}$$

Utilizando o método acima, geramos as frontais da Figura 14. A imagem de π para valores fixos de m e n da curva γ do Exemplo 5.2 (a) e a imagem de π da curva γ do Exemplo 5.2 (b) podem ser vistas, respectivamente, na Figura 14.

Figura 14 – Projeção estereográfica de $\Sigma_\varepsilon \Gamma$ gerada pelas curvas dos exemplo 5.2 (a) e (b), respectivamente

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os temas abordados nesta tese dão impulso à novas questões interessantes que serão tratadas em trabalhos futuros. Comentaremos sobre algumas neste capítulo.

- Em (TARI; BRUCE; GIBLIN, 1995), os autores usaram técnicas de teoria de singularidades para estudar a função altura H sobre famílias a 1-parâmetro de superfícies em $\mathbb{R}^3$, ou seja, perturbações de superfícies. Devido a esse parâmetro, a função altura pode apresentar singularidades do tipo A_k , com $k = 1, \dots, 4$ e D_4 e então eles analisaram os tipos de transições que ocorrem na família de curvas parabólicas. Podemos estender esse conceito e estudar as transições que ocorrem no conjunto parabólico de uma família a 1-parâmetro de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$. Neste caso, singularidades do tipo A_5 e D_5 também podem aparecer para a função altura.

Fizemos o caso para quando a função altura sobre a família a 1-parâmetro de hipersuperfícies M_t possui uma singularidade do tipo A_3 não versal. Essa caso pode ser explicitado pelo seguinte exemplo: Considere M_t parametrizada por

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z, f_t(x, y, z)),$$

com

$$f_t(x, y, z) = x^2 + y^2 + \varepsilon_1 x^2 y^2 + \varepsilon_2 y^2 z^2 + \varepsilon_3 z^4 + t z^2$$

e $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$, onde f_0 possui uma singularidade do tipo A_3 não versal. Através de algumas mudanças de coordenadas, conseguimos escrever o conjunto parabólico de M_t da forma

$$t = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2.$$

Assim, temos que o conjunto parabólico sofre transições do tipo Morse em um A_3 não versal. O comportamento do conjunto parabólico neste caso, de acordo com os sinais de ε_i , está representado na Figura 15. O objetivo é finalizar o estudo para os demais casos.

- Uma vez que a função altura sobre uma família a 1-parâmetro de hipersuperfícies M_t em $\mathbb{R}^4$ pode apresentar singularidades do tipo A_5 e D_5 , além das singularidades A_k , $k = 2, 3, 4$ e D_4 , podemos usar as mesmas técnicas adotadas no Capítulo 3 e efetuar o estudo para esses outros casos. Ou seja, podemos analisar o que acontece com a geometria de M_t em uma vizinhança de uma singularidade do tipo A_5 ou D_5 , verificando a existência de hiperplanos bitangentes nessa vizinhança.
- Também podemos expandir nossos horizontes e realizar um estudo do ponto de vista global. Em (JESUS; MORAES; ROMERO FUSTER, 2011), as autoras estudaram os grafos associados às aplicações de Gauss estáveis, mostrando que qualquer grafo bipartido com peso pode ser associado a alguma aplicação de Gauss estável de uma superfície fechada e orientável. Esse estudo está fortemente relacionado com as transições que ocorrem no conjunto parabólico da superfície. O intuito é estender esse estudo para aplicações de Gauss de uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$.

Figura 15 – Comportamento do conjunto parabólico em um A_3 não versal.

REFERÊNCIAS

- ARNOLD, V. I.; GUSEIN-ZADE, S. M.; VARCHENKO, A. N. Singularities of differentiable maps. vol. i. **Monographs in Mathematics**, v. 82, 1985. Citado nas páginas 25 e 40.
- BANCHOFF, T.; GAFFNEY, T.; MCCRORY, C. Cusps of Gauss mappings. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, v. 55, p. v+88, 1982. Citado nas páginas 22, 24, 35, 45, 47, 79 e 83.
- BRÖCKER, T.; LANDER, L. Differentiable germs and catastrophes. Cambridge University Press, v. 17, 1975. Citado nas páginas 48 e 55.
- BRUCE, J.; GIBLIN, P.; GIBSON, C. Symmetry sets. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A**, v. 101, n. 1-2, p. 163–186, 1985. ISSN 0308-2105. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0308210500026263>>. Citado nas páginas 50, 56 e 60.
- BRUCE, J.; GIBLIN, P.; TARI, F. Families of surfaces: height functions and projections to planes. **Mathematica Scandinavica**, JSTOR, p. 165–185, 1998. Citado na página 21.
- BRUCE, J.; TARI, F. Families of surfaces in $\mathbb{R}^4$. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, Cambridge University Press, v. 45, n. 1, p. 181–203, 2002. Citado nas páginas 23, 74 e 98.
- GARCIA, R.; MOCHIDA, D.; ROMERO FUSTER, M. C.; RUAS, M. A. S. Inflection points and topology of surfaces in 4-space. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 352, n. 7, p. 3029–3043, 2000. Citado nas páginas 41 e 100.
- GARCIA, R.; SÁNCHEZ-BRINGAS, F. Closed principal lines of surfaces immersed in the euclidean 4-space. **Journal of dynamical and control systems**, Springer, v. 8, n. 2, p. 153–166, 2002. Citado na página 41.
- GIBSON, C. Singular points of smooth mappings. Pitman London, v. 105, 1979. Citado nas páginas 25, 31 e 43.
- GUILLEMIN, V.; GOLUBITSKY, M. Stable mappings and their singularities. Springer-Verlag, 1973. Citado nas páginas 32 e 33.
- ISHIKAWA, G. Infinitesimal deformations and stability of singular legendre submanifolds. **Asian journal of mathematics**, International Press of Boston, v. 9, n. 1, p. 133–166, 2005. Citado na página 101.
- _____. Singularities of frontals. **arXiv preprint arXiv:1609.00488**, 2016. Citado na página 101.
- _____. Recognition problem of frontal singularities. **arXiv preprint arXiv:1808.09594**, 2018. Citado na página 101.
- IZUMIYA, S.; ROMERO FUSTER, M. C.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. Differential geometry from a singularity theory viewpoint. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, p. xiii+368, 2016. Citado nas páginas 32, 34, 39, 40, 41, 43, 44, 83, 97 e 99.

- JESUS, C. M.; MORAES, S.; ROMERO FUSTER, M. C. Stable gauss maps from a global viewpoint. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, Springer, v. 42, n. 1, p. 87–103, 2011. Citado nas páginas 21 e 104.
- KLINGENBERG, W. A course in differential geometry. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, p. xii+178, 1978. Translated from the German by David Hoffman, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 51. Citado nas páginas 79, 81 e 82.
- LITTLE, J. A. On singularities of submanifolds of higher dimensional euclidean spaces. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Springer, v. 83, n. 1, p. 261–335, 1969. Citado nas páginas 23, 41 e 42.
- LOOIJENGA, E. **Structural stability of smooth families of c-infinity functions**. Tese (Doutorado) — PhD dissertation, University of Amsterdam, 1974. Citado nas páginas 38, 45 e 63.
- MOCHIDA, D. **Geometria genérica de subvariedades em codimensão maior que um em $\mathbb{R}^N$** . Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado. ICMC, 1993. Citado nas páginas 79 e 82.
- MOCHIDA, D.; ROMERO FUSTER, M. C.; RUAS, M. A. S. The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint. **Geometriae Dedicata**, Springer, v. 54, n. 3, p. 323–332, 1995. Citado nas páginas 23, 41, 63, 78, 97 e 99.
- _____. Inflection points and nonsingular embeddings of surfaces in $\mathbb{R}^5$. **The Rocky Mountain journal of mathematics**, JSTOR, p. 995–1009, 2003. Citado na página 21.
- MONTALDI, J. On contact between submanifolds. **Michigan Math. J.**, v. 33, n. 2, p. 195–199, 1986. Citado na página 21.
- _____. Surfaces in 3-space and their contact with circles. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 23, n. 2, p. 109–126, 1986. Citado na página 21.
- _____. On generic composites of maps. **Bull. London Math. Soc.**, v. 23, n. 1, p. 81–85, 1991. ISSN 0024-6093. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112/blms/23.1.81>>. Citado nas páginas 21, 33, 38 e 63.
- NABARRO, A. C. **Sobre a geometria local de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$** . Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2000. Citado na página 66.
- NABARRO, A. C. Duality and contact of hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$ with hyperplanes and lines. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, Cambridge University Press, v. 46, n. 3, p. 637–648, 2003. Citado nas páginas 23, 63 e 65.
- POSTON, T.; STEWART, I. Catastrophe theory and its applications. Courier Corporation, 2014. Citado nas páginas 37, 55 e 60.
- ROMERO FUSTER, M. C. Sphere stratifications and the gauss map. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics**, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 95, n. 1-2, p. 115–136, 1983. Citado nas páginas 45 e 46.
- _____. Convexly generic curves in $\mathbb{R}^3$. **Geom. Dedicata**, v. 28, n. 1, p. 7–29, 1988. ISSN 0046-5755. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00147797>>. Citado nas páginas 23 e 79.

- SAJI, K. Criteria for cuspidal s_k singularities and their applications. **arXiv preprint arXiv:0905.2357**, 2009. Citado na página 101.
- SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. The geometry of fronts. **Annals of mathematics**, JSTOR, p. 491–529, 2009. Citado na página 101.
- SINHA, R. O.; TARI, F. *et al.* Projections of surfaces in $\mathbb{R}^4$ to $\mathbb{R}^3$ and the geometry of their singular images. **Rev. Mat. Iberoam**, v. 31, p. 33–50, 2015. Citado na página 41.
- TARI, F.; BRUCE, J.; GIBLIN, P. Families of surfaces: height functions, gauss maps and duals. **Real and complex singularities**, CRC Press, v. 333, p. 148, 1995. Citado nas páginas 21 e 103.
- THOM, R. Stabilité structurelle et morphogénèse. **Poetics**, Elsevier, v. 3, n. 2, p. 7–19, 1974. Citado na página 45.
- WALL, C. T. C. Geometric properties of generic differentiable manifolds. In: **Geometry and topology**. [S.l.]: Springer, 1977. p. 707–774. Citado na página 39.
- _____. Finite determinacy of smooth map-germs. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 13, n. 6, p. 481–539, 1981. Citado nas páginas 25, 29 e 31.
- WHITNEY, H. On singularities of mappings of euclidean spaces. i. mappings of the plane into the plane. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 374–410, 1955. Citado na página 21.
- ZAKALYUKIN, V. M.; KURBATSKII, A. Envelope singularities of families of planes in control theory. **Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics**, Springer, v. 262, n. 1, p. 66–79, 2008. Citado nas páginas 101 e 102.
- ZEEMAN, E. C. Catastrophe theory. In: **Structural Stability in Physics**. [S.l.]: Springer, 1979. p. 12–22. Citado na página 37.