# Algumas aplicações de combinatória infinita a espaços de funções contínuas

***Juan Francisco Camasca Fernández***

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

**Juan Francisco Camasca Fernández**

# Algumas aplicações de combinatória infinita a espaços de funções contínuas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

**USP – São Carlos**
**Junho de 2017**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fernández, Juan Francisco Camasca
F363a Algumas aplicações de combinatória infinita
a espaços de funções contínuas / Juan Francisco
Camasca Fernández; orientador Leandro
Fiorini Aurichi. - São Carlos - SP, 2017.
139 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Teoria dos conjuntos. 2. combinatória infinita.
3. topologia. 4. espaços de Banach. 5. medidas
de Radon. 6. álgebras de Boole. 7. propriedades
de separação. 8. espaços de funções contínuas.
9. isomorfismo compatível. I. Aurichi, Leandro
Fiorini, orient. II. Título.

**Juan Francisco Camasca Fernández**

# Some aplications of infinite combinatorics to continuous functions spaces

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

**USP – São Carlos**
**June 2017**

*Aos meus Pais.*

*À Heydy.*

*A mim mesmo*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por cada dia vivido e por dar-me a força necessária para continuar cada dia.

Agradeço aos meus pais, Rosita e Francisco, sem seu ajuda nada disto seria possível, muito obrigado por tudo sempre. Com a mesma intensidade agradeço à minha namorada Heydy, pelo ánimo constante, a companhia, a fortaleza, a paz que me transmite, pelo amor e por muitas coisas que não alcançariam numerar neste papel.

Agradeço a meu orientador, Leandro Fiorini Aurichi, pela paciência, rigor e apoio incondicional constante.

Agradeço ao programa de pós-graduação da USP-ICMC (Instituto de Ciências Matemáticas e Computação), e aos professores com os que cursei curso.

Agradeço a meus irmãos que acompanham sempre minha trajetória, assim como meus amigos que também acompanharam.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financiero.

*"O estudo, a busca da verdade e da beleza são domínios em que nos é consentido sermos crianças por toda a vida."*

*(Albert Einstein)*

# RESUMO

CAMASCA, J. F. **Algumas aplicações de combinatória infinita a espaços de funções contínuas**. 2017. 139 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

O principal objetivo deste trabalho é estudar diversas aplicações de combinatória infinita em espaços de funções contínuas, definidas em espaços compactos Hausdorff. Usando combinatória infinita para uma álgebra de Boole, por meio da dualidade de Stone, obtemos um espaço compacto Hausdorff. Com certas propriedades na álgebra de Boole é possível analisar propriedades analíticas no espaço de funções contínuas definidas em tal espaço. Especificamente, analisamos a propriedade de Grothendieck. Também analisamos a relação entre o espaço de funções contínuas e o espaço compacto Hausdorff sobre o qual é definido. Apresentamos um resultado que permite obter diversos resultados conhecidos de uma maneira uniforme (só usando fatos de topologia e teoria de conjuntos), dotando o espaço de funções contínuas de uma ordem peculiar. Finalmente, estudamos um pouco de jogos topológicos mediante diversos exemplos.

**Palavras-chave:** Teoria dos conjuntos, combinatória infinita, topologia, espaços de Banach, medidas de Radon, álgebras de Boole, propriedades de separação, espaços de funções contínuas, isomorfismo compatível.

# ABSTRACT

CAMASCA, J. F. **Some aplications of infinite combinatorics to continuous functions spaces**. 2017. 139 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

The main purpose of this work is to study some infinite combinatorics applications in spaces of continuous functions, defined in Hausdorff compact spaces. Using infinite combinatorics in Boolean algebras, through Stone duality, we obtain a compact Hausdorff space. With certain properties in Boolean algebras it is possible to analyze analytic properties in the space of continuous functions defined in such space. Specifically, we analyze the Grothendieck property. We also analyze the relationship between the space of continuous functions and the compact Hausdorff space on which it is defined. We present a result that allows to obtain several known results in a uniform way (only using facts of topology and set theory), giving the space of continuous functions a peculiar order. Finally, we study some topological games through several examples.

**Keywords:** Set theory, infinite combinatorics, topology, Banach spaces, Radon measure, Boole algebras, separation properties, continuous functions spaces, compatible isomorphic.

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| ZFC | Axiomas de Zermelo-Fraenkel (munido com o axioma de escolha) |

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$ — Pertence

$\mathbb{N}$ — Conjunto dos números naturais

$\exists$ — Existe

$\forall$ — Para todo

$\emptyset$ — conjunto vazio

$\bigcap$ — Interseção

$\bigcup$ — União

$\overline{X}$ — Fecho do conjunto X

$\mathbb{R}$ — Conjunto dos números reais

$f|_M$ — Função $f$ restrita ao subconjunto $M$

$2^\omega$ — Conjunto das sequências infinitas enumeráveis de zeros e uns

$2^{<\omega}$ — Conjunto das sequências finitas de zeros e uns

$|X|$ — cardinalidade do conjunto X

$\wp(X)$ — Conjunto das partes de $X$

# SUMÁRIO


1 INTRODUÇÃO . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

2 ALGUMAS PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS E DE TEORIA DE CONJUNTOS . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
2.1 Boa ordem e transitividade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
2.2 Lema de Zorn . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
2.3 Espaços topológicos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
*2.3.1 Espaços topológicos e bases . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27*
2.4 Axiomas de enumerabilidade e separação . . . . . . . . . . . . . . . . 29
2.5 Espaços metrizables e separavéis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
*2.5.1 Teorema de Extensão de Tietze . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34*

3 ORDINAIS E ESPAÇOS PERFEITOS . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
3.1 Ordinais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
3.2 Isomorfismos de ordem . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
3.3 Ordinais compactos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
3.4 Adição, multiplicação e exponenciação de ordinais . . . . . . . . . . 41
3.5 Espaços perfeitos e poloneses . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
3.6 Connjuntos totalmente limitados . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
3.7 Espaços completos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
3.8 Esquema de Cantor e subconjuntos perfeitos em espaços poloneses 45

4 ÁLGEBRAS DE BOOLE . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
4.1 Álgebras de Boole . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
*4.1.1 Definição e algumas propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47*
*4.1.2 Ultrafiltros . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49*
*4.1.3 Homomorfismos, subálgebras, anticadeias e álgebras completas . . 51*
*4.1.4 Teorema da representação de Stone . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53*
*4.1.5 Ideais e quocientes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56*
*4.1.6 Álgebras de Boole livres e critérios de extensão de Sikorski . . . . . 57*
4.2 Dualidade de Stone . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
*4.2.1 Álgebras superatômicas e espaços dispersos . . . . . . . . . . . . . . 60*
*4.2.2 Dualidade de Stone . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62*
4.3 Um resultado interessante da Compactificação de Stone-Čech . . . 64

5 ESPAÇOS DE BANACH E MEDIDAS DE RADON . . . . . . . . . . 67
5.1 Espaços de Banach . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67
*5.1.1 A topologia fraca . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68*
*5.1.2 A topologia fraca* $^*$ *. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70*
5.2 Teorema de Stone-Weierstrass . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
5.3 Medidas em álgebras de Boole e integração . . . . . . . . . . . . . . . . 73
*5.3.1 Medidas de Radon . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74*
*5.3.2 Decomposição de medidas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74*
5.4 Mais um pouco de medida . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75
5.5 Teorema de Representação de Riesz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76
5.6 A topologia fraca no dual do espaço das funções contínuas . . . . . 77
5.7 O Lema de Rosenthal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78
5.8 Um resultado interessante respeito as isometrias . . . . . . . . . . . 79
5.9 Teorema de Hahn-Banach, formas geométricas . . . . . . . . . . . . 80

6 UM ESPAÇO DE BANACH QUE NÃO É REFLEXIVO MAS É ISOMORFICAMENTE ISOMÉTRICO AO SEU SEGUNDO DUAL . 85
6.1 O espaço de James . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
6.2 Bases em espaços reflexivos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
6.3 O espaço de James é isomorficamente isométrico ao seu segundo dual . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91

7 POSTO DE CANTOR-BENDIXSON EM TOPOLOGIA: O TEOREMA DE SIERPISKI-MAZURKIEWICZ . . . . . . . . . . . . . . . . 95
7.1 Posto de Cantor-Bendixson . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95
7.2 Teorema de Sierpiski-Mazurkiewicz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97

8 PROPRIEDADES DE SEPARAÇÃO E PROPRIEDADE DE GROTHENDIECK . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
8.1 Propriedades de Separação . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
8.2 Um pouco da propriedade de Grothendieck em espaços de Banach 101
8.3 Propriedade de Grothendieck em álgebras de Boole . . . . . . . . . 102

9 RELAÇÕES ENTRE CLASSES DE ESPAÇOS DE BANACH E CLASSES DE ESPAÇOS COMPACTOS . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109
9.1 Relações entre álgebras de Boole e espaços booleanos . . . . . . . . 109
9.2 Relação entre espaços de Banach e espaços compactos Hausdorff . 110
9.3 Classes de espaços de Banach e classes de espaços compactos Hausdorff . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

10 UMA ORDEM BACANA NOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS . . . 117
10.1 Ordem compatível e isomorfismo compatível . . . 117
10.2 Resultados importantes com respeito ao suporte de uma função . . 118
10.3 Conjuntos abertos regulares e fechados regulares . . . 120
10.4 Dualidade em retículos . . . 124
10.5 Relação do espaço $X$ com seu espaço de funções contínuas . . . 125
10.6 Demonstração alternativa de resultados conhecidos . . . 126

11 ALGUNS JOGOS TOPOLÓGICOS . . . 129
11.1 Separabilidade e Bases enumeráveis . . . 129
11.2 Ordem compatível . . . 131
11.3 Propriedades de separação . . . 132

REFERÊNCIAS . . . 135

CAPÍTULO

1

# INTRODUÇÃO

Existem muitas propriedades que apresentam uma relação direta entre um espaço topológico X e o espaço de funções contínuas definidas sobre ele e com valores reais. Os fatos mais interessantes são normalmente obtidos a partir de $X$ ser um espaço compacto, de Hausdorff ou ser completamente regular. Neste trabalho, utilizando combinatória infinita, vamos ver algumas dessas relações.

O Capítulo 2 é introdutório. Nele falaremos a respeito de boas ordens e do Lema de Zorn (que é equivalente ao axioma de escolha). Daremos algumas definições e propriedades da topologia, começando com o que é uma topologia até propriedades de separação, compacidade e um pouco de densidade, culminando com o Teorema de Extensão de Tietze.

No Capítulo 3 daremos uma introdução aos conjuntos ordinais, começando com o que é um ordinal, isomorfismos de ordem, tipos de ordinais e compacidade, para concluir com as operações aritméticas entre ordinais. Neste mesmo capítulo veremos os espaços perfeitos e poloneses, assim como (brevemente) sobre espaços completos.

No Capítulo 4 apresentaremos alguns fatos sobre álgebras de Boole. Entre eles alguns fatos com respeito a ultrafiltros, homomorfismo entre álgebras, o teorema da representação de Stone, um pouco de quocientes, álgebras livres e os critérios para estender homomorfismos entre álgebras. Estudaremos também as álgebras superatômicas e a dualidade de Stone, para concluir com um resultado em relação à compactifição de Stone-Čech.

No Capítulo 5 estudaremos o concernente aos espaços de Banach, topologia fraca e fraca$^*$. Veremos espaços da forma $C(K)$, o teorema de Stone-Weierstrass, medidas em álgebras de Boole e medidas de Radon. Mais adiante veremos alguns fatos interessantes com respeito a medidas, teorema de representação de Riesz, teorema de Dieudonné-Grothendieck e o Lema de Rosenthal. Finalmente veremos um resultado com respeito a isometrias e as formas geométricas do teorema de Hahn-Banach.

No Capítulo 6 veremos um espaço de Banach não reflexivo, mas isomorficamente isométrico a seu segundo dual (conhecido como o espaço de James). Estudaremos as bases em espaços reflexivos.

No Capítulo 7 veremos uma aplicação dos ordinais em topologia. Definiremos o posto de Cantor-Bendixson, e assim apresentar o Teorema de Sierpiski-Mazurkiewicz (todo espaço compacto, Hausdorff e enumerável é homeomorfo a um ordinal).

No Capítulo 8 estudaremos as propriedades de separação em álgebras de Boole, e as consequências de uma álgebra ter tais propriedades. Veremos também a propriedade de Grothendieck em espaços de Banach e a propriedade de Grothendieck em álgebras de Boole e a relação com as propriedades de separação e o espaço de funções contínuas.

No Capítulo 9 veremos associações existentes entre espaços que são compactos Hausdorff e o espaço de funções contínuas definidas sobre ele.

No Capítulo 10 uma aplicação será feita em espaços de funções contínuas, definindo neles uma ordem que pode implicar quando dois espaços compactos, Hausdorff sejam homeomorfos e com isto obter como corolários alguns resultados conhecidos na literatura.

Finalmente, no Capítulo 11 veremos exemplos de jogos topológicos usando separabilidade, a ordem definida no capítulo anterior e a propriedade de separação em álgebras de Boole.

CAPÍTULO

2

# ALGUMAS PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS E DE TEORIA DE CONJUNTOS

Neste capítulo vamos introduzir as definições e notações que faremos uso no texto todo, com respeito a algumas propriedades topológicas importantes (por exemplo, compacidade, normalidade e densidade).

Revisaremos também alguns resultados importantes de topologia (por exemplo, o Teorema de extensão de Tietze). Vamos começar com as definições de ordem, boa ordem, cadeias e o Lema de Zorn.

Como refêrencias para este capítulo, usamos principalmente (CIESIELSKI, 1997),(ENGELKING, 1974) e (MUNKRES, 2000).

## 2.1 Boa ordem e transitividade

**Definição 2.1.** Dizemos que $\leq$ é uma **ordem** sobre $X$ se valem:

1. $x \leq x$
2. se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$
3. se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$

para todo $x, y, z \in X$

**Definição 2.2.** Dizemos que uma ordem $\leq$ sobre $X$ é uma **boa ordem** se, para todo subconjunto não vazio $Y \subset X$ existe um mínimo $(\min Y)$. Isto é, um elemento $y \in Y$ tal que $y \leq y'$ para todo $y' \in Y$.

**Exemplo 2.1.** O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ com sua ordem usual, isto é $x \leq y$ se, e somente se, existe $z \in \mathbb{N}$ tal que $y = x + z$, é uma boa ordem.

A seguir apresentamos um dos axiomas **ZFC** (o qual é equivalente ao axioma de escolha).

**Axioma 1** (Princípio da boa ordem)**.** Para todo conjunto $X$ existe uma boa ordem sobre ele.

**Definição 2.3.** Seja $x$ um conjunto. Dizemos que $y$ é sucessor de $x$ se, e somente se, $y = x \cup \{x\}$. Isto é,

$$\forall z[z \in y \leftrightarrow (z \in x \vee z = x)]$$

Denotamos por $y = s(x)$.

Outro dos axiomas **ZFC** é o seguinte:

**Axioma 2.** Existe um conjunto que contém o $\emptyset$ como elemento e que é fechado por sucessores, i.e.

$$\exists S \;\; \emptyset \in S \wedge (\forall x \in S \; s(x) \in S)$$

**Definição 2.4.** Seja $X$ um conjunto. Dizemos que $X$ é indutivo se, e somente se, as seguintes condições valem

1. $\emptyset \in X$
2. Se $x \in X$ então $s(x) \in X$

Dado $S$ um conjunto indutivo. Definimos o seguinte conjunto:

$$\omega = \bigcap_{N \in \mathscr{N}} N$$

onde $\mathscr{N}$ é o conjunto de todos os subconjuntos indutivos de $S$. Ou seja, $\omega$ é o menor conjunto indutivo.
Pela definição temos diretamente que vale o seguinte resultado:

**Proposição 2.1** (Princípio da indução infinita)**.** Seja $X \subset \omega$ tal que $X$ é indutivo. Então $X = \omega$.

Com isto, $\omega$ faz o papel dos naturais, com a função $s$ fazendo o papel da função sucessor usual dos naturais.

**Definição 2.5.** Dizemos que $X$ é um conjunto **transitivo** se $y \subset X$ para todo $y \in X$

**Proposição 2.2.** Se $n \in \omega$, então $n$ é transitivo.

*Demonstração.* Note que $\emptyset$ é trivialmente transitivo. Também note que se $a$ é transitivo, então $a \cup \{a\}$ também é. De fato: se $x \in a \cup \{a\}$, então $x \in a$ ou $x = a$. No primeiro caso, como $a$ é transitivo, $x \subset a \subset a \cup \{a\}$. No segundo caso, $x = a \subset a \cup \{a\}$. Logo, o resultado segue pelo princípio de indução finita. $\square$

Com isto, $\omega$ é transitivo, pois se $n \in \omega$ então $n \in n \cup \{n\}$. Logo $n \subset n \cup \{n\} = \{k : k < n\} \cup \{n\} \subset \omega$.

## 2.2 Lema de Zorn

**Definição 2.6.** Seja $X$ um conjunto não vazio com ordem $\leq$. Dizemos que um subconjunto $Y \subset X$ é **totalmente ordenado** (ou cadeia) se, e somente se, para todo $x, y \in Y$ vale $x \leq y$ ou $y \leq x$

Todo conjunto bem ordenado é totalmente ordenado. De fato, sejam $X$ um conjunto bem ordenado e $a, b \in X$. Considere o conjunto $\{a, b\}$. Tal conjunto é não vazio e portanto admite mínimo, ou seja $a \leq b$ ou $b \leq a$.

**Definição 2.7.** Seja $X$ um conjunto não vazio com ordem $\leq$. Dizemos que um subconjunto $Y \subset X$ admite uma **cota superior** se, e somente se, existe $c \in X$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in Y$.

**Definição 2.8.** Seja $X$ um conjunto não vazio com ordem $\leq$. Dizemos que $m \in X$ é um **elemento maximal** de $X$ se não existe $x \in X$ tal que $m < x$.

**Teorema 2.1** (Lema de Zorn)**.** Seja $X$ um conjunto não vazio com uma ordem $\leq$. Suponha que todo subconjunto $Y \subset X$ que é uma cadeia admite uma cota superior. Então $X$ possui um elemento maximal.

*Demonstração.* Considere uma boa ordem $\preceq$ para $X$. Vamos definir uma família de subconjuntos de $X$ que formam uma sequência crescente. Para $x_0 = \min X$ defina $A_{x_0} = \{x_0\}$. Dado $x \in X$, suponha definidos $A_y$ para todo $y \prec x$. Então definimos $A_x = \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y$ se, para todo $y \in \bigcup_{y \prec x} A_y$, $y < x$, ou $A_x = \bigcup_{y \prec x} A_y$ se a condição não ocorre. Note que assim definidos, os $A_x$ formam uma família de subconjuntos de $X$ tais que $A_y \subseteq A_x$ se $y \prec x$.
Observando que a união de cadeia de cadeias é uma cadeia, concluímos que cada $A_x$ é uma cadeia e que $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ é uma cadeia. Por hipótese, existe $x \in X$ que é cota superior para $A$. Se mostrarmos que $x$ é maximal terminamos. Suponha que $x$ não seja maximal, isto é, que exista $z \in X$ tal que $x < z$. Mas, pela definição dos $A_x$, $A_z = \{z\} \cup \bigcup_{y \prec z} A_y$, pois se $a \in \bigcup_{y \prec z} A_y \subset A$ então $a \leq x < z$. Logo $z \in A_z \subset A$, o que é uma contradição, pois teríamos que $z \leq x$ já que $x$ é cota superior de $A$. $\square$

## 2.3 Espaços topológicos

### 2.3.1 Espaços topológicos e bases

**Definição 2.9.** Seja $X$ um conjunto. Dizemos que uma família $\tau \subseteq \wp(X)$ é uma **topologia** para $X$ se

1. $\emptyset$ e $X$ pertencem a $\tau$
2. Dada qualquer família $\{A_\alpha\}_{\alpha\in L}$ de elementos em $\tau$ então $\bigcup_{\alpha\in L} A_\alpha$ pertence a $\tau$.
3. Dada uma família finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ de elementos em $\tau$ então $\bigcap_{i=1}^n A_i$ pertence a $\tau$.

O conjunto $X$ munido de uma topologia $\tau$ é chamado de **espaço topológico**. Aos elementos da topologia chamamos de conjuntos **abertos**

**Definição 2.10.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $F \subseteq X$ é fechado se, e somente se, $X \backslash F$ é aberto.

A seguinte definição fornece relações entre espaços topológicos.

**Definição 2.11.** Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é um aberto em $X$, para todo $U$ aberto em $Y$.

Equivalentemente uma função entre espaços topológicos $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para cada $x \in X$ e cada aberto $V$ em $Y$ tal que $f(x) \in V$, existe $U$ aberto em $X$ tal que $x \in U$ e $f(U) \subseteq V$.
Com efeito: Seja $x \in X$ e $V$ aberto em $Y$ com $f(x) \in V$. Considere $U = f^{-1}(V)$. Então $x \in U$ e $f(U) \subseteq V$. Reciprocamente, seja $V$ aberto em $Y$ e $x \in f^{-1}(V)$. Então $f(x) \in V$. Logo existe $U_x$ tal que $x \in U_x$ e $f(U_x) \subseteq V$. Logo $U_x \subseteq f^{-1}(V)$ para todo $x \in f^{-1}(V)$. Portanto $f^{-1}(V)$ é aberto em $X$, pois é união de abertos.

**Definição 2.12.** Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é um homomorfismo se, e somente se, $f$ é bijetora, contínua e $f^{-1}$ também fora contínua.

Vamos ver agora a noção de base para uma topologia.

**Definição 2.13.** Seja $X$ um espaço topológico. Seja $x \in X$. Dizemos que uma família $\mathscr{B}$ de abertos de $X$ é uma **base local** para $x$ se, e somente se, para cada aberto $A$ que contém $x$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

**Definição 2.14.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que uma família $\mathscr{B}$ de abertos de $X$ é uma **base** para a topologia de $X$ se, e somente se, para cada $A$ aberto de $X$ e $x \in A$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

**Observação 2.1.** Equivalentemente, dizemos que $\mathscr{B}$ é uma base para $X$ se, e somente se, $\mathscr{B}_x = \{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$ é uma base local para cada $x \in X$.

**Observação 2.2.** Equivalentemente, dizemos que $\mathscr{B}$ é uma base para a topologia de $X$ se, e somente se, para todo aberto não vazio $A$ de $X$ existe $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ tal que $A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}'} B$.
De fato, se $\mathscr{B}$ é uma base para $X$, dado $A$ aberto e $x \in A$ existe $B_x \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. Logo

$A = \bigcup_{x \in A}\{x\} \subset \bigcup_{x \in B_x} B_x \subset A$, ou seja $A = \bigcup_{B \subset \mathscr{B}'} B$ onde $\mathscr{B}' = \{B_x\}_{x \in A} \subset \mathscr{B}$. Reciprocamente, suponha $A = \bigcup_{B \in \mathscr{B}'} B$ para $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$. Então, se $x \in A = \bigcup_{B \in \mathscr{B}'} B$, existe $B_x \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in B_x \subset A$.

**Definição 2.15.** Seja $X$ um conjunto e $\mathscr{B}$ uma família de subconjuntos de $X$. Suponha que $\mathscr{B}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para cada $x \in X$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$.

2. Sejam $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$. Para todo $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$

e defina $\langle \mathscr{B} \rangle := \{A \subseteq X : A = \bigcup_{B \in \mathscr{B}'} B, \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}\}$. Tal família é fechada por uniões quaisquer, por interseções finitas e contém $X$. Chamamos tal família de **topologia induzida**, cuja base é a família $\mathscr{B}$.

## 2.4 Axiomas de enumerabilidade e separação

As seguintes propriedades são conhecidas por axiomas de enumerabilidade.

**Definição 2.16.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é *IAN* (ou que é primeiro enumerável) se, e somente se, possui uma base local enumerável para cada $x \in X$.

**Definição 2.17.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é *IIAN* (ou que é segundo enumerável) se, e somente se, possui uma base enumerável para sua topologia.

Lembremos também as seguintes definições:

**Definição 2.18.** Dizemos que um espaço topológico $X$ é um:

1. **espaço $T_1$** se cada conjunto unitário é fechado.

2. **espaço de Hausdorff** se para cada $x, y \in X$ distintos existem $A, B$ abertos de $X$ tais que $x \in A$ e $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$

3. **espaço compacto** se para toda cobertura aberta[1] $\mathscr{C}$ de $X$ existe uma subcobertura[2] finita.

4. **espaço zero-dimensional** se possui uma base de abertos-fechados para sua topologia.

Temos uma propriedade interessante em um espaço de Hausdorff, com respeito a subespaços compactos.

**Lema 2.1.** Seja $X$ um espaço topológico Hausdorff. Sejam $x \in X$ e $K \subseteq X$ compacto tal que $x \notin K$. Então existem $A$ e $B$ abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $K \subset B$.

[1] Uma família de abertos cuja união é o próprio $X$

[2] Subfamília de uma cobertura que ainda é uma cobertura

*Demonstração.* Para cada ponto $y \in K$, pela propriedade de Hausdorff, existem $A_y$ e $B_y$ disjuntos tais que $x \in A_y$ e $y \in B_y$. Então $\{B_y : y \in K\}$ é uma cobertura aberta de $K$. Como $K$ é compacto, existem $y_1, ..., y_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}$. Considere

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i} \text{ e } B = \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}$$

Note que $A$ e $B$ são abertos, $x \in A$ e $K \subset B$. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que existe $z \in A \cap B$. Logo existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $z \in B_{y_i}$. Mas $z \in A_{y_i}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Isto é uma contradição pois $A_{y_i}$ e $B_{y_i}$ são disjuntos para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Portanto $A \cap B = \emptyset$. □

O resultado implica que os subespaços compactos em espaços com a propriedade de Hausdorff, são fechados.

**Proposição 2.3.** Sejam $X$ um espaço topológico Hausdorff e $K \subseteq X$ compacto. Então $K$ é fechado.

*Demonstração.* Seja $x \in X \backslash K$. Pelo lema anterior existe $A$ aberto tal que $x \in A$ e $K \cap A = \emptyset$. Logo $x \in A \subset X \backslash K$. Assim $X \backslash K$ é aberto. Portanto $K$ é fechado. □

**Definição 2.19.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é **regular** se é $T_1$ e, dado um conjunto fechado $F$ em $X$ e um ponto $x$ tal que $x \notin F$, existem conjuntos abertos $U, V$ em $X$ tais que $x \in U$, $F \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

**Observação 2.3.** Se $X$ é um espaço regular é possível, para qualquer ponto $x \in X$ e $V$ aberto tal que $x \in V$, achar um aberto $U$ em $X$ de maneira que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$ .
De fato: $X \backslash V$ é um fechado que não contém $x$, logo existem $A, B$ abertos de $X$ disjuntos tais que $x \in A$ e $X \backslash V \subset B$. Logo, se $U = A$, temos $x \in U \subset \overline{U} \subset X \backslash B \subset V$.

**Definição 2.20.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é um **espaço normal** se é $T_1$ e, para quaisquer $F, G \subseteq X$ fechados disjuntos, existem $U, V \subseteq X$ abertos disjuntos tais que $F \subset U$ e $G \subset V$.

**Observação 2.4.** Se $X$ é um espaço normal é possível, para qualquer $F$ fechado e $V$ aberto tal que $F \subset V$ achar um aberto $U$ em $X$ de maneira que $F \subset U \subset \overline{U} \subset V$.
De fato: $X \backslash V$ é um fechado que é disjunto de $F$, logo existem $A, B$ abertos de $X$ disjuntos tais que $F \subset A$ e $X \backslash V \subset B$. Logo, se $U = A$, temos $F \subset U \subset \overline{U} \subset X \backslash B \subset V$.

Um espaço topológico $X$ que é compacto e Hausdorff satisfaz a condição de normalidade.

**Proposição 2.4.** Seja $X$ um espaço topológico compacto e Hausdorff. Então $X$ é um espaço normal.

*Demonstração.* Sejam $A,B \subseteq X$ fechados disjuntos. Fixe $x \in A$. $B$ é compacto, pois $X$ é compacto. Logo, pelo Lema 2.4, existem $U_x$ e $V_x$ abertos tais que $x \in U_x$ e $B \subseteq V_x$

Temos então que $A \subseteq \bigcup\{V_x : x \in A\}$. Como $A$ é fechado em um compacto, $A$ é compacto, logo existe $A^* \subseteq A$ finito tal que $A \subseteq \{V_x : x \in A^*\}$. Defina $U = \bigcup\{V_x : x \in A^*\}$ e $V = \bigcap\{U_x : x \in A^*\}$. Note que $U$ e $V$ são disjuntos e que $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$. □

Vamos a ver o seguinte resultado interessante, que será de utilidade mais para frente.

**Proposição 2.5.** Seja $X$ um espaço topológico compacto, Hausdorff e enumerável. Então $X$ é *IIAN*

*Demonstração.* Já que $X$ é enumerável, é suficiente mostrar que $X$ é $1-$enumerável, pois se $X = \{x_1,...,x_n,...\}$ e $\mathscr{B}_n$ é uma base local para $x_n$, então $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\omega}\mathscr{B}_n$ é uma base para $X$. Fixe $x_n \in X$ e seja $x \in X$ distinto de $x_n$. Já que $X$ é Hausdorff existem $U_x$ e $V_x$ abertos e disjuntos tais que $x_n \in U_x$ e $x \in V_x$. Considere

$$\mathscr{B}_n = \{\textstyle\bigcap_{k\in F} U_{x_k} : F \subset \omega \text{ finito e } x_k \neq x_n\ \forall k \in F\}$$

Note que $\mathscr{B}_n$ é enumerável.
Então $\mathscr{B}_n$ é base local para $x_n$. De fato, seja $A$ aberto tal que $x_n \in A$. Considere $C = X \backslash A$, que é fechado em $X$, logo $C$ é compacto. Logo $\{V_x : x \in C\}$ é uma cobertura de $C$, e assim existe $F \subset \omega$ finito tal que $C = \bigcup_{k\in F} V_{x_k}$. Do fato que $U_{x_k} \cap V_{x_k} = \emptyset$ para cada $k \in F$, $\bigcap_{k\in F} U_{x_k} \cap V_{x_k} = \emptyset$. Logo $\bigcap_{k\in F} U_{x_k} \subset X \backslash V_{x_k}$ para cada $k \in F$. Portanto $\bigcap_{k\in F} U_{x_k} \subset \bigcap_{k\in F} X\backslash V_{x_k} = X \backslash \bigcup_{k\in F} V_{x_k} = X\backslash C = A$ e $x_n \in \bigcap_{k\in F} U_{x_k}$. □

## 2.5 Espaços metrizables e separavéis

**Definição 2.21.** Seja $X$ um conjunto. Se uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(x,y) \geq 0$ para todo $x,y \in X$.
2. $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.
3. $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,y \in X$.
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x,y,z \in X$.

Dizemos que $d$ é uma **métrica**. Ao par $(X;d)$ chamamos de **espaço métrico**. O conjunto $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$, onde $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ é dito uma bola aberta.

**Observação 2.5.** Note que se $y \in B_\varepsilon(x)$ então existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$ (considere $\delta = \varepsilon - d(x,y)$).

**Observação 2.6.** A coleção de todos os conjuntos da forma $B_\varepsilon(x)$ satisfaz as condições da Definição 2.15. Com efeito: Seja $x \in X$. Claramente $x \in B_\varepsilon(x)$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Sejam $B_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1), B_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$ e $y \in B_1 \cap B_2$, com $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Pela observação acima existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $B_{\delta_1}(y) \subseteq B_1$ e $B_{\delta_2}(y) \subseteq B_2$. Tome $B = B_\delta(y)$, onde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Temos aqui a relação dos espaços topológicos com os métricos.

**Definição 2.22.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é **metrizável** se, e somente se, existe uma métrica $d$ em $X$ tal que a topologia induzida pela a coleção de todas as bolas é a mesma que a topologia inicial de $X$.

Todo espaço métrico é um espaço topológico. Certas propriedades de um espaço topológico $X$ implicam que $X$ é metrizável.

**Teorema 2.2.** Seja $X$ um espaço topológico regular com base enumerável. Então $X$ é metrizável.

*Demonstração.* Vamos mostrar que existe uma família enumerável de funções contínuas $f_n : X \to [0,1]$ tais que, para cada $x_0 \in X$ e $U$ aberto com $x_0 \in U$ então existe $n \in \omega$ tal que $f_n(x_0) > 0$ e $f_n(X \backslash U) = 0$. Seja $\{B_n\}_{n\in\omega}$ uma base enumerável para $X$. Para cada para $n, m$ tais que $\overline{B}_n \subseteq B_m$, pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $g_{n,m} : X \to [0,1]$ tal que

$$g_{n,m}(\overline{B}_n) = \{1\} \text{ e } g_{n,m}(X \backslash B_m) = \{0\}$$

A família $\{g_{n,m}\}$ é enumerável e satisfaz a condição acima. Com efeito: dado $x_0 \in X$ e $U$ aberto tal que $x_0 \in U$. Logo, existe $B_m$ tal que $x_0 \in B_m \subseteq U$. Como $X$ é regular, existe $B_n$ tal que $x_0 \in B_n$ e $\overline{B}_n \subseteq B_m$. Logo $g_{n,m}(x_0) > 0$ e $g_{n,m}(U) = \{0\}$. Reindexando os indices $(n,m)$, obtemos a família $\{f_n\}_{n\in\omega}$ desejada.
Agora, vamos mostrar que $X$ é homeomorfo a um subespaço de um espaço metrizável ($\mathbb{R}^\omega$). Com efeito: usando a família $\{f_n\}_{n\in\omega}$ definimos $F : X \to \mathbb{R}^\omega$ dada por

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots)$$

$F$ é contínua, pois cada $f_n$ é contínua. Também, $F$ é injetora. Com efeito: sejam $x \neq y$. Então existe $n \in \omega$ tal que $f_n(x) > 0$ e $f_n(y) = 0$. Logo $F(x) \neq F(y)$.
Finalmente, mostraremos que $F : X \to F(X)$ é um homeomorfismo. Para isto, vamos mostrar que $F(U)$ é aberto em $F(X)$, para todo $U$ aberto em $X$. Com efeito: seja $z_0 \in F(U)$. Então, existe $x_0 \in U$ tal que $F(x_0) = z_0$. Considere $N \in \omega$ tal que $f_N(x_0) > 0$ e $f_N(X \backslash U) = \{0\}$. Considere $V = \pi_N^{-1}((0, +\infty))$[3]. Tome $W = V \cap F(X)$, que é aberto em $F(X)$. Afirmamos que $z_0 \in W \subseteq F(U)$. Com efeito: note que $\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0$. Logo $z_0 \in W$. Agora, considere $z \in W$. Logo $z = F(x)$ para algum $x \in X$ e $\pi_N(z) > 0$. Note que $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$. Então $x \in U$, pois $f_N(X \backslash U) = \{0\}$. Portanto $F(x) = z \in F(U)$. □

[3] $\pi_n a pro jeonan - simacoordenada$

Temos um resultado interessante respeito ao limite uniforme de funções contínuas.

**Definição 2.23.** Sejam $X$ um conjunto, $Y$ um espaço métrico e uma sequência $(f_n)_{n\in\omega}$ de funções $f_n : X \to Y$. Seja $d$ a métrica para $Y$. Dizemos que a sequência $(f_n)_{n\in\omega}$ converge uniformemente a uma funç˜ao $f : X \to Y$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ e para todo $x \in X$.

**Teorema 2.3.** Sejam $X$ um espaço topológico, $Y$ um espaço métrico e $(f_n)_{n\in\omega}$ uma sequência, onde cada $f_n : X \to Y$ é contínua. Se a sequência converge uniformemente a uma função $f$ então $f$ é contínua.

*Demonstração.* Seja $d$ a métrica para $Y$. Vamos mostrar que $f$ é contínua em todo ponto $x_0 \in X$. Com efeito: seja $V$ aberto tal que $f(x_0) \in V$. Considere $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq V$. Logo existe $n_0 \in \omega$ e $U$ aberto em $X$ com $x_0 \in U$ tais que $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ e $d(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$ e para todo $x \in U$.
Assim, para todo $x \in U$,

$$d(f(x), f(x_0) \leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Considerando $U = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ obtemos o resultado. □

**Definição 2.24.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $\mathscr{D} \subset X$ é **denso** em $X$ se, e somente se, $\mathscr{D} \cap A \neq \emptyset$ para qualquer aberto não vazio $A$ de $X$.

**Definição 2.25.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é **separável** se, e somente se, $X$ contém um subconjunto denso e enumerável.

**Definição 2.26.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que uma família de abertos $\mathscr{B}$ é uma $\pi - base$ se, e somente se, para cada aberto $A \subseteq X$ existe $U \in \mathscr{B}$ tal que $U \subseteq A$.

**Proposição 2.6.** Seja $X$ um espaço topológico. Se $X$ tem $\pi-$base enumerável então $X$ é separável.

*Demonstração.* Por hipótese existe $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ uma $\pi-$base enumerável. Considere $\mathscr{D} = \{x_n : n \in \omega\}$ onde $x_n \in B_n$ para cada $n \in \omega$. $\mathscr{D}$ é enumerável e denso. Com efeito: seja $A \subseteq X$ não vazio. Então existe $B_m \in \mathscr{B}$ tal que $B_m \subseteq A$. Logo $x_m \in A$, isto é $D \cap A \neq \emptyset$. □

**Proposição 2.7.** Seja $X$ um espaço topológico. Se $X$ é *IIAN* então tem $\pi - base$ enumerável.

*Demonstração.* Por hipótese existe $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ base enumerável para $X$. Afirmamos que $\mathscr{B}$ é uma $\pi-$base. Com efeito: Seja $A \subseteq X$ aberto e $x \in A$. Logo existe $B_m \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_m \subseteq A$ □

A recíproca em geral é falsa. Se $X$ fosse metrizável obtemos equivalência das propriedades

**Proposição 2.8.** Seja $X$ um espaço metrizável. Se $X$ é separável, então $X$ é *IIAN*.

*Demonstração.* Por hipótese existe $\mathscr{D} \subseteq X$ enumerável e denso. Denote por $d$ a métrica em $X$. Considere a família de abertos $\mathscr{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in \mathscr{D}, n \in \omega\setminus\{0\}\}$. Note que $\mathscr{B}$ é enumerável. Vamos mostrar que $\mathscr{B}$ é uma base. Com efeito: seja $A \subseteq X$ aberto e $y \in A$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \subseteq A$. Logo existe $n \in \omega\setminus\{0\}$ tal que $\frac{2}{n} < \varepsilon$ e, assim, $B_{\frac{2}{n}}(y) \subset B_\varepsilon(y) \subseteq A$. Como $\mathscr{D}$ é denso, existe $x \in \mathscr{D} \cap B_{\frac{1}{n}}(y)$. Logo $y \in B_{\frac{1}{n}}(x)$. Se $z \in B_{\frac{1}{n}}(x)$, então $d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$. Logo $z \in B_{\frac{2}{n}}(y)$. Portanto $y \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\frac{2}{n}}(y) \subseteq A$. $\square$

### 2.5.1 Teorema de Extensão de Tietze

O teorema seguinte é bastante útil pois permite a extensão de funções contínuas, de certos subconjuntos de um espaço, a valores reais, ao espaço inteiro.

**Teorema 2.4** (da Extensão de Tietze)**.** Seja $X$ um espaço topológico normal. Se $M \subseteq X$ é um subconjunto fechado e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe uma função contínua $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{f}|_M = f$ .

Antes de dar a prova do teorema, lembremos o seguinte resultado:

**Teorema 2.5** (Lema de Urysohn)**.** Seja $X$ um espaço topológico normal. Para qualquer par $A, B$ de conjuntos fechados disjuntos de $X$ existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in B$.

*Demonstração.* Para cada número racional $r$ no intervalo $[0,1]$ vamos definir um conjunto aberto $V_r \subset X$, com as seguinte condições:

1. $\overline{V}_r \subset V_{r'}$ sempre que $r < r'$
2. $A \subset V_0$, $B \subset K\setminus V_1$

Os conjuntos $V_r$ podem ser definidos usando a indução. Vamos tomar uma enumeração dos racionais do intervalo $[0,1]$, digamos $r_1, r_2, r_3, ...$, tal que $r_1 = 0$ e $r_2 = 1$. Tome $V_0 = U$ e $V_1 = X\setminus B$, onde $U$ é um aberto tal que $A \subset U \subset \overline{U} \subset X\setminus B$. Note que, assim, $\overline{V}_0 \subset V_1$. A primeira condição acima pode ser escrita também:

$$\overline{V}_{r_i} \subset V_{r_j} \text{ sempre que } r_i < r_j \text{ e } i, j \leq k$$

Para $k = 1$, isso é satisfeito. Suponha que os conjuntos $V_{r_i}$ estão definidos e satisfazem a propriedade acima para $i \leq n$, com $n \geq 1$. Seja $r_l$ o número entre $r_1, ..., r_n$ que está mais perto à esquerda de $r_{n+1}$ e $r_m$ o número entre $r_1, r_2, ..., r_n$ que está mais perto a direita de $r_{n+1}$. Já que $r_l < r_m$, então $\overline{V}_{r_l} \subset V_{r_m}$. Considere $U$ aberto tal que $\overline{V}_{r_l} \subset U \subset \overline{U} \subset V_{r_m}$. Considerando $V_{n+1} = U$, então $V_{r_1}, V_{r_2}, ..., V_{n+1}$ satisfazem a condição desejada, isto conclui a construção da família com as condições $(1)$ e $(2)$.

Considere a função $f : X \to [0,1]$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\}, & x \in V_1; \\ 1, & x \in K \backslash V_1. \end{cases}$$

De (2) $f(x) = 0$ para $x \in A$ e $f(x) = 1$ para $x \in B$. Resta mostrar que $f$ é contínua.

Do fato que os abertos da forma $]a,b[$, $[0,a[$ e $]b,1]$ formam uma base para $[0,1]$ e, notando que $]a,b[= [0,b[\cap]a,1]$ e $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$, basta mostrar que $f^{-1}[[0,a[]$ e $f^{-1}[]a,1]]$ são abertos para qualquer $0 < a < 1$.

Seja $x \in X$ tal que $0 \leq f(x) < a$. Seja $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < r_n < a$. Então $x \in V_{r_n}$, pois se não fosse assim teríamos $f(x) \geq r_n$. Seja $y \in V_{r_n}$, então $f(y) \leq r_n$, e portanto $f(y) \in [0,a[$, e assim $y \in f^{-1}[[0,a[]$. Portanto $V_{r_n} \subset f^{-1}[[0,a[]$, e assim $f^{-1}[[0,a[]$ é aberto.
Analogamente, seja $x \in X$ tal que $a < f(x) \leq 1$. Seja $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r_n < f(x)$. Note que $x \in X \backslash \overline{V}_{r_n}$, pois caso contrário teríamos $x \in \overline{V}_{r_n} \subset V_{r_m}$ com $r_m > r_n$ e assim $f(x) \leq r_m$. Agora seja $y \in X \backslash \overline{V}_{r_n}$, e note que $f(y) \geq r_n$ e, portanto $f(y) \in ]a,1]$. Logo $y \in f^{-1}[]a,1]]$, isto é $X \backslash \overline{V}_{r_n} \subset f^{-1}[]a,1]]$, e portanto $f^{-1}[]a,1]]$ é aberto. □

*Demonstração do Teorema de extensão de Tietze.* Vamos, em primeiro lugar, mostrar que se $f_0 : M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, com $M \subseteq X$ fechado, $X$ normal e $|f_0(x)| \leq c$, $\forall x \in M$ (com c>0 fixado), então existe $g : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $|g(x)| \leq \frac{1}{3}c$ para $x \in X$
2. $|f_0(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}c$ para $x \in M$

De fato: Note que os conjuntos $A = f_0^{-1}[[-c, -\frac{1}{3}c]]$ e $B = f_0^{-1}[[\frac{1}{3}c, c]]$ são disjuntos e fechados no fechado $M$ (imagens inversas de fechados pela $f$ que é contínua), e assim são fechados em $X$. Então pelo Lema de Urysohn existe $h : X \to [0,1]$ tal que $h(x) = 0$ para $x \in A$ e $h(x) = 1$ para $x \in B$. Considerando $g(x) = \frac{2}{3}c(h(x) - \frac{1}{2})$, obtemos $g : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz (1) e (2).

Agora, dada uma função $f : M \to [-1,1]$, vamos definir uma sequência de funções contínuas $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $X$ em $[-1,1]$ satisfazendo:

1. $|g_i(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$, para todo $x \in X$
2. $|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{i}$ para todo $x \in M$

Para definir $g_1$, aplicamos o resultado obtido acima para $f$ e $c = 1$. Suponha definidos $g_1, g_2, ..., g_i$, de modo que valem $(1)$ e $(2)$. Vamos definir $g_{i+1}$. Para isso aplique o resultado obtido acima para $f-\sum_{j=1}^{i}(g_i|_M)$ e $c=\left(\frac{2}{3}\right)^i$ (que é contínua por ser soma de funções contínuas e limitada pela escolha de $c$, pois $g_1,...,g_i$ satisfazem (2)). Logo tal extensão $g_{i+1}$ satisfaz $(1)$ e $(2)$.

Então defina $g: X \to [-1,1]$ como $g(x)=\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ para todo $x \in X$ (o qual tem sentido pela condição (1)). Pela condição (2) $g$ estende $f$. Como cada $g_n$ é contínua e $g$ é o limite uniforme, pelo Teorema 2.5, concluímos que $g$ é contínua.

Note que basta mostrar o resultado para funções $f: M \to ]-1,1[$ (pois existe um homeomorfismo $\varphi$ entre $\mathbb{R}$ e $]-1,1[$). Pelo segundo resultado obtido acima, temos uma extensão $g: K \to [-1,1]$. Seja $M'=g^{-1}[\{-1,1\}]$. Note que $M'$ e $M$ são fechados disjuntos. Pelo Lema de Urysohn, existe $h: X \to [0,1]$ com $h[M]=\{1\}$ e $h[M']=\{0\}$.

Finalmente, note que a função desejada $F: X \to ]-1,1[$ é dada por $F(x)=g(x)h(x)$ (para o caso geral $f: M \to \mathbb{R}$, aplique o mesmo para a função $\varphi \circ f$ e considere $\overline{f}=\varphi^{-1} \circ F$). $\square$

**Definição 2.27.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é **completamente regular** se dado um conjunto fechado $F \subset X$ e $x \in X$ tal que $x \notin F$, existe uma função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ tal que $f(F)=\{0\}$ e $f(x)=1$.

Temos diretamente da definição que todo espaço completamente regular é um espaço regular e, pelo Lema de Urysohn, todo espaço normal é completamente regular.

CAPÍTULO

3

# ORDINAIS E ESPAÇOS PERFEITOS

Neste capítulo vamos fazer uma introdução aos ordinais e apresentar como é a aritmética deles (o que servirá mais para frente em uma construção de um ordinal enumerável). Vamos ver também brevemente algum os fatos sobre espaços poloneses e perfeitos.

Como referência principal, usamos (CIESIELSKI, 1997) para as Seções de 1 a 4 (também (SCHLÖRDER, 2012) em particular para a Seção 4). Para as seções posteriores usamos principalmente (TSERUNYAN, 2014) e (CAROTHERS, 2000). Finalmente (MUNKRES, 2000) para algumas definições básicas.

## 3.1 Ordinais

**Definição 3.1.** Dizemos que um conjunto $\alpha$ é um **ordinal** se ele é transitivo e bem ordenado por $\in$.

Por vacuidade, $0 := \emptyset$ é um ordinal. Pelo que provamos anteriormente, cada $n \in \omega$ é um ordinal. Mais que isso, o próprio $\omega$ também é um ordinal. $\omega \cup \{\omega\}$ é também um ordinal. Note que, como cada ordinal é transitivo, então todo elemento seu também é bem ordenado por $\in$.

**Proposição 3.1.** Seja $\alpha$ um ordinal. Se $x \in \alpha$ então $x$ é um ordinal.

*Demonstração.* Só precisamos mostrar que $x$ é transitivo. Sejam $a, b$ tais que $a \in b$ e $b \in x$. Como $\alpha$ é transitivo, $b \in \alpha$. Então $a \in \alpha$. Logo $a, x \in \alpha$. Suponha $a \notin x$, então $x \in a$ ou $x = a$. No caso $x \in a$, considere $B = \{a, x, b\}$. Logo $B \subset \alpha$ é não vazio e não tem elemento $\in -$minimal (pois $a \in b \in x \in a$), o que é uma contradição. No caso $x = a$, considere $B = \{x, b\}$ e obtemos a mesma contradição. Logo $a \in x$ e portanto $b \subset x$. $\square$

**Proposição 3.2.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ ordinais tais que $\beta \in \alpha$. Suponha que $\lambda \in \alpha$ seja tal que $\lambda$ é o menor tal que $\beta \in \lambda$. Então $\lambda = \beta \cup \{\beta\}$.

*Demonstração.* Como $\lambda$ é um ordinal, $\beta \subset \lambda$, portanto $\beta \cup \{\beta\} \subset \lambda$. Por outro lado, dado $\xi \in \lambda$, pela minimalidade de $\lambda$, $\beta \notin \xi$. Ou seja, temos $\xi \in \beta$ ou $\xi = \beta$. Desta forma, $\lambda \subset \beta \cup \{\beta\}$. $\square$

**Proposição 3.3.** Seja $\alpha$ um ordinal. Então $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ para algum $\beta$ ou $\beta \cup \{\beta\} \in \alpha$ para todo $\beta \in \alpha$.

*Demonstração.* Seja $\beta \in \alpha$ tal que $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. Note que $\beta \cup \{\beta\} \subset \alpha$ (pois, já que $\alpha$ é ordinal, temos $\beta \subset \alpha$). Suponha que exista $\lambda \in \alpha \backslash (\beta \cup \{\beta\})$. Podemos supor que $\lambda$ é o menor com tal propriedade.
Note que $\beta \in \lambda$. De fato, como $\lambda, \beta \in \alpha$, se não fosse assim teríamos que $\lambda \in \beta$ ou $\lambda = \beta$. Mas ambos esses casos contrariam o fato que $\lambda \in \alpha \backslash (\beta \cup \{\beta\})$. Então, pelo resultado anterior, $\lambda = \beta \cup \{\beta\}$, mas isso contradiz o fato que $\lambda \in \alpha$ e $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. $\square$

Os resultados anteriores motivam a denotar $\alpha \cup \{\alpha\}$ como $s(\alpha)$ (se $\alpha$ é um ordinal). Costumamos denotar por $\alpha + 1$ tal conjunto. Com isso, temos a seguinte definição:

**Definição 3.2.** Seja $\alpha$ um ordinal. Se $\alpha = \beta + 1$ para algum $\beta$ ordinal, dizemos que $\alpha$ é um ordinal **sucessor**. Caso contrário, dizemos que $\alpha$ é um ordinal **limite**.

Cada $n \in \omega$ não vazio é um ordinal sucessor, mas $\omega$ é um ordinal limite.

**Lema 3.1.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ ordinais tais que existe $\lambda \in \alpha \backslash \beta$. Então $\beta \subset \lambda$.

*Demonstração.* Seja $\xi \in \beta$. Vamos provar que $\xi \in \lambda$. Suponha que não. Note que $\xi, \lambda \in \alpha$ (pois $\beta \subset \alpha$). Teríamos dois casos:

- $\xi = \lambda$. Mas isso é uma contradição pois neste caso temos $\lambda \in \beta$.
- $\lambda \in \xi$. Mas isso também é uma contradição, pois com isso também obtemos $\lambda \in \beta$.

$\square$

**Lema 3.2.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ ordinais tais que $\beta \subset \alpha$. Então $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$.

*Demonstração.* Suponha $\beta \neq \alpha$. Seja $\lambda \in \alpha \backslash \beta$. Podemos supor $\lambda$ o menor com tal propriedade. Vamos mostrar que $\lambda = \beta$ (com isso vamos ter que $\beta \in \alpha$ como queremos). Suponha que não. Pelo resultado anterior, $\beta \subset \lambda$. Então existe $\lambda' \in \lambda \backslash \beta$. Logo $\lambda' \in \alpha \backslash \beta$, contrariando o fato que $\lambda$ era o menor com tal propriedade. $\square$

**Teorema 3.1** (Indução para ordinais)**.** Seja $\varphi$ uma fórmula tal que, se para todo $\alpha$ ordinal, vale $\varphi(\beta)$ para $\beta \in \alpha$, então vale $\varphi(\alpha)$. Então, para todo $\alpha$ ordinal, vale $\varphi(\alpha)$.

*Demonstração.* Vamos fazer por absurdo. Suponha que existe $\alpha$ ordinal tal que não vale $\varphi(\alpha)$. Considere o menor[1] $\xi \in \alpha$ tal que $\varphi(\xi)$ não vale (existe pela hipótese e o fato que não vale $\varphi(\alpha)$).
Para todo $\lambda \in \xi$ temos, pelo fato que $\xi$ é o menor que não vale a propriedade $\varphi$, que vale $\varphi(\lambda)$. Logo, pela hipótese, vale $\varphi(\xi)$, uma contradição. □

**Lema 3.3.** Sejam $\alpha, \beta$ ordinais. Então vale $\alpha \subset \beta$ ou $\beta \subset \alpha$.

*Demonstração.* Vamos provar a afirmação por indução sobre $\alpha$. Fixe $\beta$ ordinal e suponha que, para todo $\xi \in \alpha$ vale

$$\xi \subset \beta \text{ ou } \beta \subset \xi$$

Suponha que exista $\xi \in \alpha$ tal que $\beta \subset \xi$. Então, pela transitividade, $\xi \subset \alpha$. Logo $\beta \subset \alpha$.
Suponha que o caso anterior não ocorra. Ou seja $\xi \subset \beta$ para todo $\xi \in \alpha$. Pelo Lema 3.2, temos dois casos:

- Se $\xi = \beta$. Pela transitividade, $\beta \subset \alpha$.
- Se $\xi \in \beta$. Note que isso vale para todo $\xi \in \alpha$. Logo $\alpha \subset \beta$.

□

## 3.2 Isomorfismos de ordem

**Definição 3.3.** Sejam $X$ e $Y$ conjuntos ordenados. Dizemos que $f : X \to Y$ é um **isomorfismo de ordem** se $f$ é bijetora e $f(a) \leq f(b)$ se, e somente se, $a \leq b$.

**Definição 3.4.** Um subconjunto $S$ de um conjunto ordenado $X$ é um **segmento inicial** de $X$ se para qualquer $x, y \in X$ tais que $x \leq y$ e $y \in S$ implica que $x \in S$.

**Proposição 3.4.** Seja $\mathscr{F}$ uma família não vazia de ordinais. Então $\bigcup \mathscr{F}$ é um ordinal.

*Demonstração.* Seja $\beta \in \bigcup \mathscr{F}$, então existe algum ordinal $\alpha \in \mathscr{F}$ tal que $\beta \in \alpha$. Assim $\beta \subset \alpha \subset \bigcup \mathscr{F}$.
Seja $\emptyset \neq B \subset \bigcup \mathscr{F}$ e seja $\alpha \in B$. Então existe algum ordinal $\eta \in \mathscr{F}$ tal que $\alpha \in \eta$. Assim $\alpha$ é um ordinal. Se $\alpha \cap B = \emptyset$, então $\alpha$ é o elemento $\in -$mínimo de $B$. No outro caso, seja $\beta = min(\alpha \cap B)$ (o qual existe pois $\alpha$ é ordinal). Logo $\beta$ é o elemento $\in -$mínimo de $B$. Portanto $\bigcup \mathscr{F}$ é bem ordenado por $\in$, e assim $\bigcup \mathscr{F}$ é um ordinal. □

[1] aqui estamos considerando o menor com respeito a $\in$

**Proposição 3.5.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ ordinais. Se existe $f : \alpha \to \beta$ isomorfismo de ordem, então $\alpha = \beta$.

*Demonstração.* Vamos fazer por indução sobre $\alpha$. Se $\alpha = \emptyset$, então $\beta = \emptyset$. Agora suponha que o resultado vale para todo $\xi \in \alpha$ . Suponha que exista $f : \alpha \to \beta$ isomorfismo de ordem. Seja $\xi \in \alpha$. Note que $f|_\xi : \xi \to B$ é um isomorfismo de ordem, onde $B \subset \beta$. Já que $\xi$ é um segmento inicial de $\alpha$ (pois é um ordinal) $B = f(\xi)$ é um segmento inicial de $\beta$. De fato, sejam $a, b \in \beta$ com $a \leq b$ e $b \in B = f(\xi)$.
Então, existem $\eta \in \alpha$ e $\zeta \in \xi$ tais que $a = f(\eta)$ e $b = f(\zeta)$. Logo $\eta \leq \zeta$. Assim $\eta \in \xi$, e portanto $a \in B$. Portanto $B = \lambda$ para algum $\lambda \in \beta$. Pela hipótese de indução, $\xi = \lambda$. Ou seja, $\alpha \subset \beta$. Considere agora $f^{-1} : \beta \to \alpha$ e $\xi \in \beta$. Então $f|_\xi : \xi \to A$ é também um isomorfismo de ordem. Pelo mesmo motivo anterior, $A$ é um segmento inicial de $\alpha$. Logo $A = \lambda$ para algum $\lambda \in \alpha$. Pela hipótese de indução $\xi = \lambda$, ou seja $\beta \subset \alpha$. Portanto $\alpha = \beta$. □

**Teorema 3.2.** Seja $X$ um conjunto bem ordenado. Então existe um, e apenas um, ordinal $\alpha$ tal que existe $f : X \to \alpha$ isomorfismo de ordem.

*Demonstração.* A unicidade segue do resultado anterior. Vamos definir uma função $f : X \to \alpha$ recursivamente. Seja $X = \{x_i\}_{i \in L}$ uma ordenação para $X$. Defina $f(x_0) := \emptyset$. Suponha definidos $f(x_j)$ para todo $x_j < x_i$. Defina $f(x_i) := min\{\alpha : \forall\ y < x_i,\ f(y) < \alpha\}$. Considere $\alpha = \bigcup_{x_i \in X}\{f(x_i)\}$. Pela Propsição 3.2, $\alpha$ é um ordinal. Então, $f$ assim definida é bijetora e preserva o ordem de $X$ e $\alpha$. Logo $f$ é um isomorfismo de ordem. □

O ordinal $\alpha$ relativo a $X$ no teorema anterior, é o tipo de ordem de $X$.

## 3.3 Ordinais compactos

Dado um ordinal $\alpha$, há uma topologia bastante natural sobre ele, a topologia da ordem:

**Definição 3.5.** Dado um ordinal $\alpha$, chamamos de **topologia da ordem** a topologia gerada pelos conjuntos da forma $]\xi, \eta[$ e $[0, \xi[$ para todo $\xi, \eta \in \alpha$ (Os intervalos de ordinais são definidos de forma análoga aos intervalos de reais).

Temos o seguinte fato:

**Proposição 3.6.** Todo ordinal, com a topologia de ordem, é um espaço de Hausdorff, isto é, dado dois pontos $x, y \in \alpha$ distintos, existem abertos $A, B$ disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

*Demonstração.* Dados $x, y \in \alpha$ distintos. Então $x < y$ ou $y < x$. Suponha $x < y$ (o outro caso é análogo). Então $x \in [0, x+1[$ e $y \in ]x, \alpha[$ são abertos disjuntos. Logo $\alpha$ é um espaço de Hausdorff com a topologia de ordem. □

**Definição 3.6.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto isolado** se, e somente se, $\{x\}$ é aberto em $X$.

**Lema 3.4.** Seja $\alpha$ ordinal limite. Se $\beta \in \alpha$, então $\beta + 1 \in \alpha$.

*Demonstração.* Como $\alpha$ é ordinal limite, pela Proposição 3.3, $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\} \in \alpha$. □

**Proposição 3.7.** Dado $\alpha$ ordinal. Então os únicos pontos isolados são os sucessores e o 0.

*Demonstração.* Seja $\beta \in \alpha$ ordinal sucessor, isto é, $\beta = \lambda + 1$ para algum ordinal $\lambda \in \alpha$. $\{\beta\} = ]\lambda, \beta + 1[$, que é aberto em $\alpha$, pois $\beta + 1 \in \alpha$. Claramente $\{0\}$ é aberto em $\alpha$ pois $\{0\} = [0, 1[$ e $1 \in \alpha$.
Vamos mostrar que se $\beta \in \alpha$ é um ordinal limite, então $\beta$ não é isolado. De fato, suponha que $\{\beta\}$ seja aberto em $\alpha$. Então existe $]\xi, \eta[ \subset \{\beta\}$ para alguns $\xi, \eta \in \alpha$. Ou seja, se $\xi < \lambda < \eta$ então $\lambda = \beta$. Logo $\xi < \beta$. Mas como $\beta$ é limite, $\beta \neq \xi + 1$ e $\xi < \xi + 1 < \beta < \eta$ o que contradiz que $]\xi, \eta[ \subset \{\beta\}$. Portanto $\beta$ não é isolado. □

**Proposição 3.8.** Se $\alpha$ é um ordinal limite, então $\alpha$ não é compacto.

*Demonstração.* Note que $\mathscr{A} = \{[0, \beta + 1[ : \beta \in \alpha\}$ é uma cobertura aberta para $\alpha$. Então $\mathscr{A}$ não possui subcobertura finita. Suponha que sim. Então existem $\beta_1, ..., \beta_n \in \alpha$ tais que $\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} [0, \beta_i + 1[$. Considere $\beta_k$ o máximo dos elementos $\beta_1, ..., \beta_n$. Então $\alpha = [0, \beta_k + 1[$, e assim $\alpha = \beta_k + 1$, o que contradiz que $\alpha$ é limite. □

**Proposição 3.9.** Se $\alpha$ é um ordinal sucessor, então $\alpha$ é compacto.

*Demonstração.* Vamos mostrar por indução sobre $\alpha$, isto é, suponha que o resultado vale para todo $\lambda < \alpha$ ordinal sucessor. Seja $\beta$ tal que $\alpha = \beta + 1$. Se $\beta$ for sucessor, então $\alpha$ é compacto pois seria um compacto adicionado com um ponto.
Se $\beta$ for limite. Seja $\mathscr{C}$ uma cobertura por abertos para $\alpha$. Seja $C \in \mathscr{C}$ tal que $\beta \in C$. Logo, existe $\xi$ tal que $]\xi, \beta] \subset C$ pois $C$ é aberto. Já que $\beta$ é limite, $\xi + 1 < \beta < \alpha$. Por hipótese de indução , existe $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ finito tal que $\xi + 1 = \bigcup \mathscr{C}'$. Portanto $\mathscr{C}' \cup \{C\}$ é uma cobertura finita para $\alpha$. □

## 3.4 Adição, multiplicação e exponenciação de ordinais

Vamos definir agora a seguinte aritmética para números ordinais. Definimos $1 := \{\emptyset\}$. Sejam $\alpha$ e $\beta$ ordinais. Considere o produto cartesiano $\alpha \times \beta$ e a seguinte relação

$$(\lambda, \xi) \leq (\gamma, \zeta) \Leftrightarrow \lambda < \gamma \vee (\lambda = \gamma \wedge \xi \leq \zeta)$$

Vejamos que a relação é uma ordem. Com efeito:

1. Claramente $(\lambda, \xi) \leq (\lambda, \xi)$

2. Se $(\lambda,\xi) \leq (\gamma,\zeta)$ e $(\gamma,\zeta) \leq (\lambda,\xi)$, então $(\lambda,\xi) = (\gamma,\zeta)$ pois $\lambda = \gamma$ e $\xi \leq \zeta$ e $\zeta \leq \xi$ implica que $\xi = \zeta$.

3. Se $(\lambda,\xi),(\gamma,\zeta)$ e $(\theta,\eta)$, então $(\lambda,\xi) \leq (\theta,\eta)$ pois, se $\lambda < \gamma$ e $\gamma < \theta$ então $\lambda < \theta$ e $\xi \leq \zeta$ e $\zeta \leq \eta$ então $\xi \leq \eta$.

Vamos chamar a ordem de **ordem lexicográfica**.
Seja $A \subseteq \alpha \times \beta$ não vazio. Considere $B = \{\lambda \in \alpha : \exists \xi \in \beta \ tal \ que \ (\lambda,\xi) \in A\} \subseteq \alpha$. Como $\alpha$ é boa ordem, existe $\lambda_0 \in B$ que é mínimo. Considere $C = \{(\lambda_0,\xi) \in \alpha \times \beta : (\lambda_0,\xi) \in A\}$. Agora considere $D = \{\xi \in \beta : (\lambda_0,\xi) \in C\} \subseteq \beta$. Como $\beta$ é boa ordem, existe $\xi_0 \in D$ que é mínimo. Então $(\lambda_0,\xi_0)$ é um mínimo para $A$. Com efeito: suponha que existe $(\gamma,\zeta) \in A$ tal que $(\gamma,\zeta) < (\lambda_0,\xi_0)$. Temos dois casos:

1. Se $\gamma < \lambda_0$. Mas isto contradiz o fato que $\lambda_0$ é o mínimo de $B$.

2. Se $\gamma = \lambda_0$ e $\zeta < \xi_0$. Então $(\gamma,\zeta) \in C$. Mas isto contradiz o fato que $\xi_0$ é o mínimo de $D$.

Portanto a ordem lexicográfica é uma boa ordem.

**Definição 3.7.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ ordinais. Definimos a **soma** $\alpha+\beta$ de $\alpha$ e $\beta$ como o tipo de ordem do conjunto $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ bem ordenado com a ordem lexicográfica.

Em algum sentido, somar $\beta$ ao ordinal $\alpha$ é só "acrescentar" $\beta$ ao $\alpha$.
Da mesma maneira podemos definir o seguinte:

**Definição 3.8.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ ordinais. Definimos o **produto** $\alpha \cdot \beta$ de $\alpha$ e $\beta$ como o tipo de ordem do conjunto $\beta \times \alpha$ bem ordenado com a ordem lexicográfica.

Em algum sentido, fazer o produto de $\alpha$ por $\beta$ é "somar" $\beta$-vezes $\alpha$. Assim, podemos definir a exponenção ordinal.

**Definição 3.9.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ ordinais. Vamos definir a **exponenção de ordinais** recursivamente:

- $\alpha^0 = 1$

- Se $\beta = \lambda + 1$, definimos $\alpha^\beta = (\alpha)^\lambda \cdot \alpha$

- Se $\beta$ é um ordinal limite e $\alpha > 0$, definimos $\alpha^\beta = \bigcup_{\lambda<\beta}(\alpha^\lambda)$. Se $\alpha = 0$, definimos $\alpha^\beta = 0$.

Já que a união de ordinais é um ordinal, a exponenção está bem definida, ou seja, se $\alpha$ e $\beta$ são ordinais então $\alpha^\beta$ é um ordinal.

## 3.5 Espaços perfeitos e poloneses

**Definição 3.10.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é **completamente metrizável** se, e somente se, existe uma métrica completa $d$ cuja topologia induzida coincide com a inicial de $X$.

**Definição 3.11.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $x$ é um **ponto de acumulação** (ou ponto limite) de $X$ se, e somente se, qualquer aberto $A$ que contém $x$ é tal que $A\setminus\{x\}\cap X \neq \emptyset$

Se $X$ é métrico, temos equivalentemente que $x$ é um ponto limite de $X$ se, e somente se, existe $(x_n)_{n\in\omega} \subset X\setminus\{x\}$ com $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$ tal que $x_n \to x$.
De fato, seja $x$ ponto limite de $X$. Então existe $x_1 \in B_1(x)\setminus\{x\}\cap X$. Para cada $k \in \omega\setminus\{0\}$, considere $\varepsilon_k = d(x_k, x)$. Existe $n_k$ tal que $\frac{1}{n_k} < \varepsilon_k$. Logo, existe $x_{n_{k+1}} \in B_{\frac{1}{n_k}}(x)\setminus\{x\}\cap X$. Logo $x_{n_k} \neq x_{n_m}$ se $k \neq m$, e $x_{n_k} \to x$, se $k \to \infty$, pois $\{B_\varepsilon(x) : x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ é uma base para $X$. Reciprocamente suponha que existe $(x_n)_{n\in\omega} \subset X\setminus\{x\}$, com $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$, tal que $x_n \to x$. Seja $A$ aberto contendo $x$. Logo existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Já que $x_n \to x$, então $x_n \in B_r(x)\setminus\{x\}$. Logo $\emptyset \neq B_r(x)\setminus\{x\}\cap X \subset A\setminus\{x\}\cap X$.

**Definição 3.12.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $P \subset X$ é **perfeito** se, e somente se, $P$ é fechado e não contem pontos isolados.

**Definição 3.13.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é um **espaço polonês** se, e somente se, $X$ é separável e completamente metrizável.

## 3.6 Connjuntos totalmente limitados

**Definição 3.14.** Seja $X$ espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é um conjunto **totalmente limitado** se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem finitos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

Para que um conjunto seja totalmente limitado, só precisamos que esteja contido em uma união finita de subconjuntos com diâmetro arbitrariamente pequeno.

**Lema 3.5.** *$A$ é um conjunto totalmente limitado se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existem finitos $A_1, \ldots, A_n \subset A$, com $\operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$.*

*Demonstração.* Suponha que $A$ é totalmente limitado. Seja $\varepsilon > 0$, podemos escolher $x_1, \ldots, x_n \in M$ tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_i)$. Então $A$ pode ser coberto pelos conjuntos $A_i = A \cap B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_i) \subset A$ e $\operatorname{diam}(A_i) \leq \operatorname{diam}(B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_i)) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$, suponha que existem $A_1, \ldots, A_n \subset A$, com $\operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$. Dado $x_i \in A_i$ então $A_i \subset B_\varepsilon(x_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ e portanto $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$. Já que $\varepsilon$ considerado foi qualquer, temos o resultado. $\square$

**Lema 3.6.** Seja $A$ um conjunto totalmente limitado. Então existe $(x_n)_{\in\omega}$ sequência de Cauchy, cujos elementos são dois a dois distintos.

*Demonstração.* Pelo lema anterior, existe uma quantidade finita de subconjuntos de $A$ com diâmetro $< 1$ que cobrem $A$. Ao menos um desses conjuntos tem que conter infinitos pontos de $A$, chamemos ele de $A_1$. Mas $A_1$ é também totalmente limitado e infinito. Logo existe uma quantidade finita de subconjuntos de $A_1$ com diâmetro $< \frac{1}{2}$. Ao menos um desses conjuntos tem que conter infinitos pontos de $A_1$, chamemos ele de $A_2$. Continuando o processo, obtemos uma sequência decrescente $A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$, onde cada $A_k$ é infinito para cada $k \in \omega$ e $\text{diam}(A_k) < \frac{1}{k}$. Podemos obter uma sequência $(x_k)_{k\in\omega}$ tal que $x_k \in A_k$ para todo $k \in \omega$. $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \omega$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Logo dados $n,m > n_0$, suponha $n > m > n_0$, então

$$d(x_n,x_m) \leq \text{diam}(A_m) < \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

□

## 3.7 Espaços completos

Lembremos que um espaço métrico $X$ é completo se, e somente se, qualquer sequência de Cauchy de pontos em $X$ é convergente. Vamos ver alguns fatos equivalentes à completude.

**Teorema 3.3.** Seja $X$ espaço métrico, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $X$ é completo
2. Seja $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ...$ uma sequência decrescente de conjuntos fechados não vazios em $X$ tais que $\text{diam}(F_n) \to 0$ para todo $n \in \omega$. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ (de fato, contém exatamente um só ponto)
3. Todo subconjunto infinito totalmente limitado de $X$ tem um ponto de acumulação em $X$.

*Demonstração.* $(1) \Rightarrow (2)$ Seja $\{F_n\}_{n\in\omega}$ uma sequência decrescente de fechados não vazios tais que $\text{diam}(F_n) \to 0$, se $n \to \infty$. Escolhemos $x_n \in F_n$ para cada $n \in \omega$. Logo $\{x_k : k \geq n\} \subset F_n$ para cada $n \in \omega$, pois $F_n$ são decrescentes. Assim $\text{diam}(\{x_k : k \geq n\}) \leq \text{diam}(F_n) \to 0$ se $n \to \infty$. Então $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0$ tal que, para todo $n > n_0$ temos $\text{diam}(\{x_k : k \geq n\}) < \varepsilon$. Logo se $n,m > n_0$, digamos $n > m$, $d(x_n,x_m) \leq \text{diam}(\{x_k : k \geq n\}) \leq \text{diam}(\{x_k : k \leq m\}) < \varepsilon$. Logo $x_n \to x$, se $n \to \infty$, para algum $n \in X$ (pois $X$ é completo). Mas como cada $F_n$ é fechado, $x \in F_n$ para cada $n \in \omega$. Logo $\bigcap_{n\in\omega} F_n \neq \emptyset$, e $\text{diam}(\bigcap_{n\in\omega} F_n) \leq \text{diam}(F_n) \to 0$ se $n \to \infty$. Portanto $\text{diam}(\bigcap_{n\in\omega} F_n) = 0$ e assim $\bigcap_{n\in\omega} F_n = \{x\}$.
$(2) \Rightarrow (3)$ Seja $A$ um conjunto infinito e totalmente limitado. Pelo Lema 3.6, temos que existe

$(x_n)_{n\in\omega}$ sequência de Cauchy, cujos términos são dois a dois distintos. Considere $A_n = \{x_k : k \geq n\}$, temos $A \supset A_1 \supset A_2 \supset ....$ Cada $A_n$ é não vazio, infinito e $\text{diam}(A_n) \to 0$ (pois $\{x_n\}_{n\in\omega}$ é Cauchy). Note que $\overline{A_n} \supset \overline{A_{n+1}} \neq \emptyset$. Note também que $\text{diam}(\overline{A_n}) = \text{diam}(A_n)$. De fato, $\text{diam}(A_n) \leq \text{diam}(\overline{A_n})$ pois $A_n \subset \overline{A_n}$. Por outro lado, se $x, y \in \overline{A_n}$ existem $a, b \in A_n$ tais que $d(x,a) < \varepsilon$ e $d(y,b) < \varepsilon$, para cada $\varepsilon$ . Assim

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) < \sup\{d(a,b) : a, b \in A\} + 2\varepsilon$$

para qualquer $x, y \in \overline{A}$. Logo $\text{diam}(\overline{A}) \leq \text{diam}(A)$. Então $\text{diam}(\overline{A_n}) = \text{diam}(A_n) \to 0$ se $n \to \infty$. Por hipótese existe $x \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{A_n}$. Agora, já que $x_n \in A_n$ então $d(x_n, x) \leq \text{diam}(\overline{A_n}) \to 0$. Assim $x_n \to x$ e portanto $x$ é um ponto de acumulação de $A$.
(3) $\Rightarrow$ (1) Seja $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de Cauchy em $X$. Só precisamos mostrar que $(x_n)_{n\in\omega}$ tem uma subsequência convergente (pois nesse caso toda a sequência vai ser convergente). Afirmamos que o conjunto $A = \{x_n : n \geq 1\}$ é totalmente limitado. De fato, dado $\varepsilon > 0$ que existe $N \geq 1$ tal que $\text{diam}(\{x_n : n \geq N\}) < \varepsilon$. Logo $A = \{x_1\} \cup ... \cup \{x_{N-1}\} \cup \{x_n : n \geq N\}$ é união de uma quantidade finita de subconjuntos de $A$ com diâmetro $< \varepsilon$. Se $A$ fosse finito terminamos, pois $(x_n)_{n\in\omega}$ seria uma sequência eventualmente constante, e assim tem subsequência convergente. Se $A$ fosse infinito, pela hipótese, existe $x$ ponto de acumulação de $A$. Assim, existe $(x_{n_k})_{k\in\omega} \subset A = \{x_n : n \geq 1\}$ tal que $x_{n_k} \to x$, ou seja, existe uma subsequência convergente. □

Para que um espaço seja completo basta que seja compacto.

**Teorema 3.4.** Seja $X$ espaço métrico. Se $X$ é compacto então $X$ é completo.

*Demonstração.* Seja $F_1 \supset F_2 \supset F_3 ...$ uma sequência decrescente de conjuntos fechados não vazios em $X$ tais que $\text{diam}(F_n) \to 0$ para todo $n \in \omega$. Seja uma família $\{F_n\}_{n\in N}$ com $N \subset \omega$ finito. Logo $\bigcap_{n\in N} F_n = F_m \neq \emptyset$, onde $m = \max M$. Logo $\{F_n\}_{n\in\omega}$ é uma família de conjuntos fechados não vazios que tem a propriedade de interseção finita. Logo $\bigcap_{n\in\omega} F_n \neq \emptyset$. Também $diam(\bigcap_{n\in\omega} F_n) \leq \text{diam}(F_n)$ para todo $n \in \omega$. Logo $diam(\bigcap_{n\in\omega} F_n) = 0$, e assim $\bigcap_{n\in\omega} F_n$ é unitário. Portanto $X$ é completo. □

## 3.8 Esquema de Cantor e subconjuntos perfeitos em espaços poloneses

Considere $\mathscr{C} = 2^\omega$ munido com a topologia

**Definição 3.15.** Seja $X$ um espaço métrico e $\emptyset \neq A \subseteq X$. Chama-se **diâmetro** de $A$ a

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} \in [0, \infty+]$$

**Definição 3.16.** Seja $X$ um espaço topológico. Um **esquema de Cantor** sobre $X$ é uma família $(A_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ , de subconjuntos de $X$, tal que

- $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$ para todo $s \in 2^{<\omega}$
- $A_{s^\frown i} \subset A_s$ para todo $s \in 2^{<\omega}$ e $i \in \{0,1\}$

Se $X$ é métrico, e adicionalmente temos

- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_{x|_n}) = 0$ para todo $x \in \mathscr{C}$

Dizemos assim que $(A_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ tem diâmetro nulo.

No caso métrico, definimos:

$$\mathscr{D} = \{x \in \mathscr{C} : \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n} \neq \emptyset\}$$

Se $x \in \mathscr{D}$, então $\bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n} = \{y\}$ para algum $y \in X$. De fato, suponha que existem $y_1 \neq y_2$ tais que $y_1, y_2 \in \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n}$. Temos $0 < d(y_1,y_2) \leq \operatorname{diam}(A_{x|n})$ para todo $n \in \omega$. Logo $0 < \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_{x|n})$, uma contradição.
Definimos $f : \mathscr{D} \to X$ por $\bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n} = \{f(x)\}$. Chamamos $f$ de função associada. $f$ é injetora. De fato, se $f(x) = f(y)$ então $\{f(x)\} = \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n} = \bigcap_{n\in\omega} A_{y|_n} = \{f(y)\}$. Logo $x = y$, pois se $x \neq y$ podemos supor que existe $n \in \omega$ tal que $x(n) = 0$ e $y(n) = 1$ (e também podemos supor que $n$ é o menor elemento tal que $x(k) \neq y(k)$). Logo $A_{x|_n} \neq A_{y|_n}$ e portanto teríamos $\bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n} \neq \bigcap_{n\in\omega} A_{y|_n}$. Portanto $x = y$. Os conjuntos perfeitos num espaço polonês podem ser caracterizados por sua cardinalidade.

**Proposição 3.10.** Seja $X$ um espaço polonês e $P$ um subespaço perfeito não vazio de $X$. Então a cardinalidade de $P$ é pelo menos à cardinalidade do contínuo.

*Demonstração.* Usando o fato que $P$ é perfeito não vazio, podemos construir um esquema de Cantor $(U_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ em $P$ por indução sobre $|s|$ tal que:

1. $U_s$ é não vazio aberto
2. $\operatorname{diam}(U_s) < \frac{1}{|s|}$
3. $\overline{U_{s^\frown i}} \subset U_s$ para $i \in \{0,1\}$

De fato, seja $U_\emptyset = P$ e suponha $U_s$ definido. Já que $P$ não tem pontos isolados, $U_s$ contém pelo menos dois pontos $x \neq y$. Então existem $x \in U_{s^\frown 0}$ e $y \in U_{s^\frown 1}$ abertos, disjuntos e tais que satisfazem $(2)$ e $(3)$, pois $P$ é regular. Isto conclui a construção.
Agora seja $f : \mathscr{D} \to P$ a função associada ao esquema de Cantor, como na Definição 3.16. $\mathscr{D} = \mathscr{C}$, pois se $x \in \mathscr{C}$ então $\bigcap_{n\in\omega} U_{x|n} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_{x|n}} \neq \emptyset$, pois $P$ é completo. Já vimos que $f$ é injetora. Logo $|P| \geq |D| = \mathfrak{c}$. $\square$

CAPÍTULO

4

# ÁLGEBRAS DE BOOLE

Neste capítulo vamos dar as definições e notações, que faremos uso no documento todo, com respeito as álgebras de Boole (incluindo resultados importantes como o teorema de extensão de Sikorski). Também veremos o que são os ultrafiltros e tópicos relativos ao espaço de Stone, para finalmente abordar a dualidade de Stone (relação entre uma álgebra de Boole e seu espaço de Stone).
Como principal referência, de maneira geral, para as Seções 1, 2 usamos (KOPPELBERG, 1989). Para a Seção 2, em particular usamos (DAY, 1965), (DAY, 1967), (DIAS R. R. TALL, 2013) (subseção 5.2.1.) e (WOFSEY, 2009). Para a Seção 3 damos como referência (BRECH, 2004).

## 4.1 Álgebras de Boole

### 4.1.1 Definição e algumas propriedades

A seguinte definição tem como motivação as operações básicas da lógica proposicional ($\vee, \wedge$ e $\sim$).

**Definição 4.1.** Seja $A$ um conjunto. Introduzimos em $A$ as seguintes operações binarias:

$$\begin{aligned} +: A\times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto +(a,b) = a+b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot: A\times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto \cdot(a,b) = a\cdot b \end{aligned}$$

e uma operação unitária:

$$\begin{aligned} -: A &\to A \\ a &\mapsto -(a) = -a \end{aligned}$$

dizemos que $(A,+,\cdot,-,0,1)$, onde $0,1 \in A$, é uma **álgebra de Boole** se valem:

1. $a+b=b+a$ e $a\cdot b=b\cdot a$
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ e $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
3. $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ e $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$
4. $a+a\cdot b=a$ e $a\cdot(a+b)=a$
5. $a+(-a)=1$ e $a\cdot(-a)=0$

**Exemplo 4.1.** Seja $X$ um conjunto qualquer e $\wp(X)$ seu conjunto das partes. Então

$$(\wp(X),\cup,\cap,\setminus,\emptyset,X),$$

onde $\setminus$ é o complemento de um conjunto $A$ ($X\setminus A$) com respeito a $X$, é uma álgebra de Boole.

Além das propriedades acima, uma álgebra de Boole satisfaz o seguinte:

**Lema 4.1.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Dado $a\in A$, valem:

1. $a+a=a$ e $a\cdot a=a$
2. $a\cdot 0=0$ e $a+1=1$
3. $a\cdot 1=a$ e $a+0=a$
4. $-0=1$ e $-1=0$

*Demonstração.*

1. Temos:
   $a=a+(a\cdot a)=(a+a)\cdot(a+a)=(a+a)\cdot a+(a+a)\cdot a=a\cdot(a+a)+a\cdot(a+a)=a+a$
   Analogamente:
   $a=a\cdot(a+a)=(a\cdot a)+(a\cdot a)=[(a\cdot a)+a]\cdot[(a\cdot a)+a]=[a+(a\cdot a)]\cdot[a+(a\cdot a)]=a\cdot a$
2. $a\cdot 0=a\cdot(a\cdot(-a))=(a\cdot a)\cdot(-a)=a\cdot(-a)=0$
   Analogamente:
   $a+1=a+(a+(-a))=(a+a)+(-a)=a+(-a)=1$
3. $a\cdot 1=a\cdot(a+1)=a$
   e
   $a+0=a+(a\cdot 0)=a$
4. $-0=(-0)+0=1$
   e
   $-1=(-1)\cdot 1=0$

□

Com isto obtemos facilmente.

**Corolário 4.1.** Existe uma única álgebra de Boole com dois elementos

*Demonstração.* Se $0 \neq 1$, valem todas as operações definidas acima para álgebra de Boole. Vamos mostrar que se $0 = 1$, então a álgebra só tem um elemento. Suponha que exista na álgebra um elemento $a \neq 0$. Pelo lema anterior temos:
$a \cdot 1 = a \quad \text{e} \quad a \cdot 0 = 0$
Logo $a = 0 = 1$, uma contradição. □

**Definição 4.2.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Definimos $a \leq b$ se $a \cdot b = a$.

**Observação 4.1.** $\leq$ é uma ordem sobre $A$.

**Observação 4.2.** $0 \leq a \leq 1$ para todo $a \in A$, pois $a \cdot 0 = 0$ e $a \cdot 1 = a$

A seguinte propriedade é importante mais para frente, pois permite estabelecer uma relação entre dois elementos.

**Lema 4.2.** Seja $A$ uma álgebra de Boole e $a, b \in A$. Se $a \not\leq b$ então $a - b = a \cdot (-b) \neq 0$

*Demonstração.* Note que $a = a \cdot 1 = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot b + a \cdot (-b)$. Assim, se $a \cdot (-b) = 0$, então $a = a \cdot b + 0 = a \cdot b$, ou seja, $a \leq b$. □

### 4.1.2 Ultrafiltros

**Definição 4.3.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. $F \subseteq A$ é dito um **filtro** se:

1. $1 \in F$
2. $a \in F, b \in A$, com $a \leq b$ então $b \in F$
3. $a, b \in F$ então $a \cdot b \in F$

Dizemos que $F$ é **próprio** se $F \neq A$ (Note que é o mesmo que pedir que $0 \notin F$)

Podemos entender que um filtro é uma família de elementos "grandes" da álgebra $A$.

**Exemplo 4.2.** Sejam $A$ uma álgebra de Boole e $\emptyset \neq E \subset A$. Definimos

$$F := \{a \in A : e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \leq a \text{ para } e_1, \ldots, e_n \in E\}$$

então $F$ é filtro pois:

1. $1 \in F$ já que $e \leq 1$ para todo $e \in E$

2. Se $a \in F$ e $a' \in A$ tal que $a \leq a'$ então $a' \in F$ pois se $a \in F$ existem $e_1,...,e_n \in E$ tais que $e_1 \cdot ... \cdot e_n \leq a$. Como $a \leq a'$ então $e_1 \cdot ... \cdot e_n \leq a'$, isto é, $a' \in F$

3. Se $a,b \in F$ então existem $e_1,...,e_n,e'_1,...,e'_n$ tais que $e_1 \cdot ... \cdot e_n \leq a$ e $e'_1 \cdot ... \cdot e'_m \leq b$, então $e_1 \cdot ... \cdot e_n \cdot e'_1 \cdot ... \cdot e'_m \leq a \cdot b$, isto é, $a \cdot b \in F$

O filtro $F$ é chamado gerado por $E$.

**Definição 4.4.** Um conjunto $E$ tem a **propriedade da interseção finita** (p.i.f) se para todo $e_1...e_n \in E$ temos $e_1 \cdot ... \cdot e_n \neq 0$

**Lema 4.3.** Dado $E \subset A$, o filtro gerado por $E$ é próprio se e somente se $E$ tem a propriedade da interseção finita.

*Demonstração.* Seja $F$ o filtro gerado.
$\Rightarrow$) Suponha que $E$ não tem p.i.f, então $0 \in F$, portanto $F = A$, isto é, não é próprio.
$\Leftarrow$) Se $E$ tem p.i.f então $0 \notin F$ e portanto, $F$ é próprio. □

Existem tipos especiais de filtros:

**Definição 4.5.** Seja $F$ um filtro próprio de uma álgebra de Boole $A$. Dizemos que $F$ é:

1. **Ultrafiltro**: Para qualquer $a \in A$ então $a \in F$ ou $-a \in F$

2. **Maximal**: Se $F$ é maximal em relação à $\subset$

3. **Primo**: Se $a + b \in F$ então $a \in F$ ou $b \in F$

De fato todos esses tipos de filtros são equivalentes.

**Lema 4.4.** Seja $F$ um filtro próprio. São equivalentes:

1. $F$ é ultrafiltro.

2. $F$ é maximal.

3. $F$ é primo.

*Demonstração.* Seja $F$ um filtro próprio:

1) $\Rightarrow$ 2): Suponha que $F$ não é maximal, então existe $a$ tal que $a \notin F$ e $\{a\} \cup F$ gera um filtro $E$ próprio diferente de $F$. Mas como $a \notin F$ e $F$ é ultrafiltro $-a \in F \subset E$, logo $a, -a \in E$ e, portanto, $a \cdot (-a) = 0 \in E$ contrariando o fato de $E$ ser filtro próprio.

2) $\Rightarrow$ 3): Sejam $a,b$ tais que $a + b \in F$. Suponha que $a,b \notin F$ e que $F$ seja maximal. Então os filtros gerados por $F \cup \{a\}$ e $F \cup \{b\}$ são impróprios, isto é, existem $e_1,...,e_n,e'_1,...,e'_m \in F$ tais que $e_1...e_n \cdot a = 0$ e $e'_1...e'_m \cdot b = 0$. Logo $e_1...e_n \cdot e'_1...e'_m \cdot a = 0$ e $e_1...e_n \cdot e'_1...e'_m \cdot b = 0$. Portanto

$e_1...e_n \cdot e'_1...e'_m \cdot (a+b) = 0$, e teríamos que $0 \in F$, absurdo.
3) $\Rightarrow$ 1): Seja $a \in F$. $a + (-a) = 1 \in F$, logo, como $F$ é primo, ou $a \in F$ ou $-a \in F$. □

O seguinte teorema afirma que todo filtro (próprio) em uma álgebra $A$ está contido em um ultrafiltro.

**Teorema 4.1** (De Tarski)**.** Se $F \subset A$ é um filtro próprio, então existe um ultrafiltro $U \supset F$.

*Demonstração.* Pelo Lema de Zorn, basta verificar que a união de uma cadeia de filtros próprios é um filtro próprio. Seja $\mathscr{F}$ tal cadeia e considere $\bigcup \mathscr{F}$. Como $1 \in F$ para todo $F \in \mathscr{F}$, então $1 \in \bigcup \mathscr{F}$. Sejam $a, b \in \bigcup \mathscr{F}$. Então existem $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ tais que $a \in F_1$ e $b \in F_2$. Mas $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$. Suponha que $F_1 \subset F_2$, então $a, b \in F_2 \subset \bigcup \mathscr{F}$, logo $a \cdot b \in \bigcup \mathscr{F}$. Finalmente, seja $a \in \bigcup \mathscr{F}$ e $b \in A$ tal que $a \leq b$. Existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $a \in F$. Logo $b \in F \subset \bigcup \mathscr{F}$. Portanto $\bigcup \mathscr{F}$ é filtro.
Para ver que é próprio, note que $0 \notin F, \forall F \in \mathscr{F}$, logo $0 \notin \bigcup \mathscr{F}$ □

**Corolário 4.2.** Se $a \in A$ e $a \neq 0$ então existe um ultrafiltro que contém $a$.

*Demonstração.* Seja $F$ o filtro gerado por $\{a\}$. Como $\{a\}$ tem p.i.f., $F$ é próprio e usando o teorema anterior temos o resultado. □

### 4.1.3 Homomorfismos, subálgebras, anticadeias e álgebras completas

Analogamente aos homomorfismos entre grupos ou espaços vectoriais, podemos definir homomorfismos entre álgebras de Boole.

**Definição 4.6.** Sejam $A, B$ álgebras de Boole. $h : A \longrightarrow B$ é dito um **homomorfismo** se:

1. $h(a+b) = h(a) + h(b)$
2. $h(a \cdot b) = h(a) \cdot h(b)$
3. $h(-a) = -h(a)$
4. $h(0) = 0$
5. $h(1) = 1$

Se, além disso, $h$ é sobrejetora, $B$ chama-se **imagem homomorfa** de $A$. Se temos também que $h$ é bijetora, $h$ é dita um **isomorfismo**.

**Exemplo 4.3.** Seja $A$ uma álgebra de Boole e $u \subset A$ um ultrafiltro. Então $\chi_u : A \longrightarrow \{0,1\}$ é um homomorfismo de álgebras de Boole, onde $\chi_u$ é a função característica de $u$.
De fato, $\chi_u(1) = 1$ (pois $u$ é filtro) e $\chi_u(0) = 0$ (pois $u$ é próprio). Temos também que $a \in u$ se e somente se $-a \notin u$, então: $\chi_u(-a) = 1$ se $\chi_u(a) = 0$, e $\chi_u(-a) = 0$ se $\chi_u(a) = 1$, ou seja $\chi_u(-a) = -\chi_u(a)$.
Temos também que: $\chi_u(a+b) = 0$ se $\chi_u(x) = \chi_u(y) = 0$ (pois $u$ é primo), e $\chi_u(a+b) = 1$ no caso contrario, ou seja $\chi_u(a+b) = \chi_u(a) + \chi_u(b)$. Analogamente $\chi_u(a \cdot b) = \chi_u(a) \cdot \chi_u(b)$ (pois $u$ é filtro). Logo $\chi_u$ é um homomorfismo.

**Definição 4.7.** Dada $A$ uma álgebra de Boole e $B \subset A$, se $B$ é uma álgebra de Boole com as operações de $A$, dizemos que $B$ é uma **subálgebra**.

**Observação 4.3.** Dada uma álgebra de Boole $A$ e $B \subset A$ uma subálgebra. Pela definição de subálgebra, $0,1 \in B$.

**Definição 4.8.** Chamamos de **corpo de conjuntos** (subconjuntos de $X$) uma família de conjuntos que é uma álgebra de Boole com as operações usuais.

**Definição 4.9.** Sejam $A$ uma álgebra de Boole e $M \subseteq A$. Escrevemos

$$\sup M := \sum\{a : a \in M\} \text{ e } \inf M := \prod\{a : a \in M\}$$

**Definição 4.10.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Dizemos que $A$ é uma **álgebra completa** se, e somente se, para todo $M \subseteq A$ existe $\sup M$,

**Observação 4.4.** Note que, dado $M \subseteq A$, então $\sup(-M) = \inf M$. Portanto, equivalentemente, uma álgebra de Boole é completa se, e somente se, para todo $M \subseteq A$ existe $\inf M$.

**Exemplo 4.4.** Dado $X$ un conjunto qualquer. Então $\wp(X)$ é uma álgebra completa, já que dado $M \subseteq X$ então $\bigcup M = \sup M$ ($\bigcap M = \inf M$).

**Definição 4.11.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. $B \subset A$ é uma **anticadeia** se para todo par $b_1, b_2 \in B$ ($b_1 \neq b_2$) então $b_1 \cdot b_2 = 0$.

O seguinte resultado nos diz que para que uma álgebra $A$ seja completa só precisamos a existência do sup de toda anticadeia.

**Lema 4.5.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Se para todo $B \subset A$, com $B$ anticadeia, existe $\sup B$, então $A$ é completa.

*Demonstração.* Seja $M \subset A$, queremos mostrar que existe $\sup M$. Seja $B$ uma anticadeia maximal em $C := \{b \in A : \exists m \in M,\ b \leq m\}$ (tal anticadeia existe pelo lema de Zorn). Mostraremos que $\sup B = \sup M$.
Suponha que existe $m \in M$ tal que $m \not\leq \sup B$, então $m - \sup B \neq 0$. Como $(m - \sup B) \cdot \sup B = m \cdot$

$(-\sup B)\cdot \sup B = 0$, para todo $b \in B$, $(m-\sup B)b = 0$ já que $b \leq \sup B$. Então $B \cup \{m-\sup B\}$ é uma anticadeia de $C$. E note que $m-\sup B \neq b$ para todo $b \in B$, pois suponha que não, então $0 = (m-\sup B)\cdot b = (m-\sup B)\cdot(m-\sup B) = m-\sup B \neq 0$ contradição.

Assim $B \cup \{m-\sup B\}$ é uma anticadeia em $C$ que contém B propriamente, o qual contradiz a maximalidade de $B$. Logo $m \leq \sup B$ para todo $m \in M$, e assim $\sup M \leq \sup B$.

Agora, já que $m \leq \sup M$ para todo $m \in M$, então $b \leq \sup M$ para todo $b \in B$. Logo $\sup B \leq \sup M$ e portanto $\sup B = \sup M$. □

### 4.1.4 Teorema da representação de Stone

É possível estabelecer uma relação entre álgebras de Boole e espaços topológicos.

**Definição 4.12.** Sejam $A$ uma álgebra de Boole e $Ult(A) := \{u \subset A : u \text{ é um ultrafiltro de } A\}$. Para todo $a \in A$, consideramos:

$$a^* := \{u \in Ult(A) : a \in u\}$$

**Observação 4.5.** $\{a^* : a \in A\}$ é uma álgebra de Boole munida com $\cup, \cap, \setminus$, pois é fácil provar que $a^* \cup b^* = (a+b)^*$, $a^* \cap b^* = (a\cdot b)^*$ e $Ult(A)\setminus a^* = (-a)^*$.

Vamos considerar $Ult(A)$ com $\{a^* : a \in A\}$ como base de topologia (pela observação anterior a família é fechada por interseções). Tal espaço chama-se o **espaço de Stone** de $A$ e o denotaremos por $s(A)$

O seguinte teorema nos permite tratar os elementos de uma álgebra de Boole como conjuntos.

**Teorema 4.2** (da representação de Stone (versão conjuntista))**.** Toda álgebra de Boole é isomorfa a um corpo de conjuntos.

*Demonstração.* Considere $h : A \longrightarrow \wp(Ult(A))$ dado por $h(a) = a^*$. Vamos mostrar que $h$ é um homomorfismo injetor de $A$ em $\wp(Ult(A))$. Sejam $a, b \in A$:

1. Note que $a^* \cap b^* = (a\cdot b)^*$. Então $h(a\cdot b) = (a\cdot b)^* = a^* \cap b^* = h(a) \cap h(b)$.

2. Note que $a^* \cup b^* = (a+b)^*$. Então $h(a+b) = (a+b)^* = a^* \cup b^* = h(a) \cup h(b)$.

3. Temos $(-a)^* = Ult(A)\setminus(a)^*$. Então $h(-a) = (-a)^* = -(a)^* = -h(a)$.

4. Também $1^* = Ult(A)$ e $0^* = \emptyset$, assim $h(1) = 1^* = Ult(A)$ e $h(0) = 0^* = \emptyset$.

E $h$ é injetora pois dados $a, b \in A$ com $a \neq b$ então $\exists u \in Ult(A)$ tal que $a \in u$ e $b \notin u$ ou $a \notin u$ e $b \in u$. Logo $a^* \neq b^*$, isto é $h(a) \neq h(b)$. □

O espaço de Stone tem muitas propriedades importantes na topologia.

**Lema 4.6.** Seja $Ult(A)$ um espaço de stone. $Ult(A)$ é:

1. $0-$dimensional
2. Hausdorff
3. Compacto

*Demonstração.* Seja $\{a^* : a \in A\}$ base para a topologia.

1. Note que $Ult(A) \backslash a^* = -(a^*) = (-a)^*$. Logo $a^*$ é um aberto-fechado.
2. Seja $u_1, u_2 \in Ult(A)$ tais que $u_1 \neq u_2$. Então existe $a \in A$ tal que $(a \in u_1$ e $a \notin u_2)$ ou $(a \notin u_1$ e $a \in u_2)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a \in u_1$. Como $a \notin u_2$, então $-a \in u_2$. Assim, $u_1 \in a^*$ e $u_2 \in (-a)^*$. Como $a^* \cap (-a)^* = \emptyset$, $Ult(A)$ é Hausdorff.
3. Seja $\mathscr{U}$ uma cobertura aberta de $Ult(A)$. Podemos assumir que $\mathscr{U} \subset \{a^* : a \in A\}$. Suponha que $\mathscr{U}$ não tem subcobertura finita. Então dados $a_1, ..., a_n \in A$ tais que $a_i^* \in \mathscr{U}$ existe $u \in \mathscr{U} \backslash (a_1^* \cup ... \cup a_n^*) = (-a_1)^* \cap ... \cap (-a_n)^* = ((-a_1)...(-a_n))^*$. Ou seja, $\{-a : a^* \in \mathscr{U}\}$ tem p.i.f.. Logo existe um $u$ ultrafiltro tal que $-a \in u$, $\forall a$ $(a^* \in \mathscr{U})$. Assim, $u \in (-a)^*$ para todo $a^* \in \mathscr{U}$, isto é, $u \notin a^*$ para todo $a^* \in \mathscr{U}$ o que contradiz o fato que $\mathscr{U}$ é uma cobertura. Logo $Ult(A)$ é compacto.

□

**Definição 4.13.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é um **espaço booleano** se $X$ é compacto, Hausdorff e $0-$dimensional.

Pelo lema anterior, $s(A)$ é um espaço booleano.

**Definição 4.14.** Seja $X$ um espaço topológico. Denotamos por $Clop(X) = \{V \subset X : V$ é aberto-fechado$\}$.

**Observação 4.6.** $Clop(X)$ é uma álgebra de Boole munida de $\cup, \cap, \backslash$.

**Lema 4.7.** Seja $X$ um espaço booleano com uma base $A$ de abertos-fechados tal que $A$ é uma álgebra de Boole. Então $A = Clop(X)$.

*Demonstração.* Trivialmente e $A \subset Clop(X)$. Seja $U$ aberto-fechado de $X$.

Seja $\mathscr{V} := \{a \in A : a \subset U\}$. Como $A$ é base e $U$ é aberto, $U = \bigcup \mathscr{V}'$, $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$. E como $U$ é fechado e, portanto (já que $X$ é compacto) compacto, existem $a_1, ..., a_n \in \mathscr{V}'$ tais que $a_1 \cup ... \cup a_n = U$. Assim, $U \in A$, pois $A$ é uma álgebra de Boole. □

Apresentamos aqui outra forma do teorema da representação de Stone.

**Teorema 4.3** (da representação de Stone (versão topológica))**.** Para toda álgebra de Boole $A$ existe um espaço booleano $X$ tal que $A$ é isomorfa a $Clop(X)$

*Demonstração.* Segue do Teorema da representação de Stone (versão conjuntista) que $A$ é isomorfa ao corpo de conjuntos $\{a^* : a \in A\}$. Do fato que $Ult(A)$ é espaço booleano, $\{a^* : a \in A\}$ é uma álgebra de boole de abertos-fechados e pelo lema anterior, $A$ é isomorfa a $Clop(X)$ □

O que se obteve na verdade foi o seguinte:

**Corolário 4.3.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Então $Clop(s(A)) \cong A$.

*Demonstração.* Segue do fato que $s(A)$ é o espaço booleano $Ult(A)$ com base $\{a^* : a \in A\}$ de abertos-fechados. □

É possível obter algo parecido ao Teorema de representação de Stone para espaços booleanos.

**Lema 4.8.** Seja $X$ um espaço booleano. Defina a função $g : X \to s(Clop(X))$ como sendo

$$g(x) = x^* := \{V \in Clop(X) : x \in V\} \text{ onde } x \in X$$

Então $g$ é um homeomorfismo.

*Demonstração.* Em primeiro lugar vamos mostrar que, para cada $x \in X$, $g(x)$ é de fato um ultrafiltro. É claro que $X \in g(x)$. Se $V \in g(x)$ e $U \in Clop(X)$ é tal que $x \in V \subseteq U$ então $x \in U$, isto é $U \in g(x)$. Se $V, U \in g(x)$ então $x \in V \cap U$, ou seja $V \cap U \in g(x)$. Portanto $g(x)$ é um filtro (próprio pois $\emptyset \notin g(x)$).
Note que para cada $V \in Clop(X)$ temos $x \in V$ ou $x \in X \backslash V$. Logo $V \in g(x)$ ou $X \backslash V \in g(x)$, e portanto $g(x)$ é um ultrafiltro.
Agora vamos mostrar que $g$ é injetora. Em efeito: Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Como $X$ é Hausdorff existe $V \in Clop(X)$ tal que $x \in V$ e $y \notin V$. Logo $V \in g(x)$ e $V \notin g(y)$, ou seja $g(x) \neq g(y)$.
Para a sobrejetividade, seja $u \in s(Clop(X))$. Note que, pela definição de filtro, $u$ é uma família de fechados com a propriedade de interseção finita. Como $X$ é compacto, existe $x \in X$ tal que $x \in V$ para todo $V \in u$. Ou seja $u \in g(x)$. Já que $u$ é ultrafiltro, $g(x) = u$.
Agora, do fato que tanto $X$ e $s(Clop(X))$ são compactos, Hausdorff só basta mostrar que $g$ é contínua. Em efeito: Seja $V^* \in s(Clop(X))$ aberto básico. Então:

$$x \in g^{-1}(V^*) \Leftrightarrow g(x) \in V^* \Leftrightarrow V \in g(x) \Leftrightarrow x \in V$$

Logo $g^{-1}(V^*) = V$ é aberto fechado. Portanto $g$ é contínua. □

### 4.1.5 Ideais e quocientes

**Definição 4.15.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Dizemos que $I \subset A$ é um **ideal** se:

1. $0 \in I$
2. $(a \in I$ e $b \leq a)$ então $b \in I$
3. Se $a, b \in I$ então $a + b \in I$

Ou seja, um ideal nos dá a ideia de uma família de elementos "pequenos" de uma álgebra $A$.
Para um ideal $I$, definimos a relação $\sim_I$ em $A$ como $a \sim_I b$ se $(a-b)+(b-a) \in I$.

**Observação 4.7.** $\sim_I$ é uma relação de equivalência.

**Definição 4.16.** Chamamos de $A/I$ o conjunto $A/\sim_I$ munido das seguintes operações:

$$[a]+[b] = [a+b] \qquad [a]\cdot[b] = [a\cdot b]$$
$$-[a] = [-a] \qquad 0 = [0] \qquad 1 = [1]$$

**Observação 4.8.** As operações acima descritas estão bem definidas. E temos também que $h : A \longrightarrow A/I$ dado por $h(a) = [a]$ é um epimorfismo (canônico). Assim, $A/I$ é uma álgebra de Boole.

**Teorema 4.4** (do homomorfismo)**.** Seja $h : A \longrightarrow B$ um epimorfismo. Então existe um isomorfismo $i : B \longrightarrow A/Ker(h)$.

*Demonstração.* Definimos $i$ tal que $i(h(a)) = [a]$. $i$ desta maneira está bem definida, pois se $h(a) = h(a')$, então $(h(a)-h(a'))+(h(a')-h(a)) = 0$. Logo $h((a-a')+(a'-a)) = 0$, isto é $(a-a')+(a'-a) \in Ker(h)$, logo $a \sim_{Ker(h)} a'$ e assim $[a] = [a']$.
Então:

1. $i(h(a)+h(a')) = i(h(a+a')) = [a+a'] = [a]+[a'] = i(h(a))+i(h(a'))$
2. $i(h(a)\cdot h(a')) = i(h(a\cdot a')) = [a\cdot a'] = [a]\cdot[a'] = i(h(a))\cdot i(h(a'))$
3. $i(-h(a)) = i(h(-a)) = [-a] = -[a] = -i(h(a))$
4. $i(h(0)) = [0]$ e $i(h(1)) = [1]$

Assim, $i$ é um homomorfismo.

Trivialmente $i$ é sobrejetor.

Vejamos que $i$ é injetor. De fato, sejam $h(a)$ e $h(a')$ tais que $i(h(a)) = i(h(a'))$, isto é $[a] = [a']$. Então $([a]-[a'])+([a']-[a]) = 0$, logo, $[(a-a')+(a'-a)] = 0$, e portanto, $(a-a')+(a'-a) \in Ker(h)$. Assim, $h((a-a')+(a'-a)) = (h(a)-h(a'))+(h(a')-h(a)) = 0$ e $h(a) = h(a')$. $\square$

Ou seja, se $B$ é imagem homomorfa de uma álgebra de Boole $A$ então $B$ é isomorfo a um quociente de $A$.

### 4.1.6 Álgebras de Boole livres e critérios de extensão de Sikorski

**Definição 4.17.** Sejam $A$ uma álgebra de Boole e $X \subset A$. Chamamos de subálgebra **gerada** de $X$ a subálgebra:

$$\langle X \rangle := \bigcap \{A' \subset A : X \subset A' \text{ e } A' \text{ é uma subálgebra de } A\}$$

**Definição 4.18.** Uma álgebra $A$ chama-se uma **álgebra livre** (com conjunto de geradores $X$) se $A = \langle X \rangle$ e, para toda função $\varphi : X \to B$ e para toda $B$ álgebra, existe um homomorfismo $h : A \to B$ tal que $\varphi(x) = h(x)$ para todo $x \in X$.

**Definição 4.19.** Seja $A$ uma álgebra de Boole, $F \subset A$ finito, $e : F \to \{-1,1\}$. Denotamos por $\prod_{a \in F} e(a) \cdot a := (e(a_1) \cdot a_1)...(e(a_n) \cdot a_n)$ onde $F = \{a_1,...,a_n\}$, e denominamos por **produto elementar**.

**Definição 4.20.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Um subconjunto $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de $A$ chama-se **independente** se $\prod_{\alpha \in F} e(a_\alpha) \cdot a_\alpha \neq 0$ para todo $F \subset \kappa$ finito e para toda função $e : \{a_\alpha : \alpha < \kappa\} \to \{-1,1\}$

**Lema 4.9.** Seja $F$ um conjunto finito. Então $\sum_{e \in \xi_F} \prod_{x \in dom(e)} e(x) \cdot x = 1$, onde $\xi_F$ é o conjunto de todas as funções de $F$ em $\{-1,1\}$

*Demonstração.* Por indução sobre $|F|$. Se $|F| = 1$, então $\xi = \{e_1, e_2\}$, onde $e_1(x) = 1$ e $e_2(x) = -1$, assim $\sum_{e \in \xi} \prod_{x \in dom(e)} \xi e(x) \cdot x = x + (-x) = 1$.

Suponha que $|F| = n+1$ e que o resultado vale para $n$, ou seja, $F = G \cup \{y\}$ e que o resultado vale para $G$. Seja $\xi_G$ o conjunto de todas as funções de $G$ em $\{-1,1\}$. Logo, pela hipótese de indução, $\sum_{e \in \xi_G} \prod_{x \in dom(e)} e(x) \cdot x = 1$ e também que $y + (-y) = 1$. Assim

$$(\textstyle\sum_{e \in \xi_G} \prod_{x \in dom(e)} e(x) \cdot x)(y + (-y)) = \sum_{e \in \xi_F} \prod_{x \in dom(e)} e(x) \cdot x = 1$$

onde $\xi_F$ é o conjunto de toas as funções de $F$ em $\{-1,1\}$. □

**Lema 4.10.** Sejam $A$ uma álgebra booleana e $X \subset A$. Então $\langle X \rangle$ é exatamente o conjunto de todos os elementos de $A$ da forma

$$\textstyle\sum_{e \in \xi} \prod_{x \in dom(e)} e(x) \cdot x$$

onde $\xi$ é uma família finita de funções de subconjuntos finitos de $X$ em $\{-1,1\}$ e os produtos elementares são dois a dois disjuntos (i.e. $(\prod_{x \in dom(e)} e(x) \cdot x)(\prod_{x \in dom(e')} e'(x) \cdot x) = 0$ se $e \neq e'$). Denominamos isto por **forma normal**.

**Definição 4.21.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Dizemos que $\{A_i\}_{i\in I} \subset A$, uma família de subálgebras, é uma **família direta**, se para qualquer $A_i$,$A_j$ existe $A_k$ tal que $A_i, A_j \subseteq A_k$.

**Observação 4.9.** Se $\{A_i\}_{i\in I}$ é uma família direta então $\bigcup\{A_i\}_{i\in I}$ é uma subálgebra de $A$.

Veremos agora alguns resultados de quando é possível estender homomorfismos entre álgebras de Boole.

**Teorema 4.5** (critério de extensão de Sikorski I)**.** Sejam $X \subset A, B$ álgebras de Boole e $\varphi : X \to B$ uma função. Então existe um homomorfismo $h : \langle X\rangle \to B$ tal que $\varphi(x) = h(x)$ para todo $x \in X$ se e, somente se

$$\prod_{x\in F} e(x)\cdot x = 0 \text{ então } \prod_{x\in F} e(x)\cdot \varphi(x) = 0 \text{ para todo } F \subset X \text{ finito.}$$

*Demonstração.* $\Rightarrow$) Para vermos que a condição vale, basta notar que:

$$\prod_{x\in F} e(x)\cdot x = 0 \text{ então } h(\prod_{x\in F} e(x)\cdot x) = 0.$$
$$\text{Logo } \prod_{x\in F} e(x)\cdot h(x) = 0, \text{ ou seja } \prod_{x\in F} e(x)\cdot \varphi(x) = 0$$

$\Leftarrow$) É suficiente considerar o caso onde $X$ é finito, pois para cada subconjunto $Y \subset X$ finito existe um único homomorfismo

$$h_Y : \langle Y\rangle \to B$$

que estende $\varphi|_Y$. Agora, seja $Y \subset Z$ finito. $h_Z|_Y$ também é um homomorfismo que estende $\varphi|_Y$, e assim $h_Z$ estende $h_Y$. Logo $\{h_Y : Y \text{ um subconjunto finito de } X\}$ é uma família direta de homomorfismos. Assim sua união é um homomorfismo de $A$ em $B$ que estende $\varphi$.

Considere $X = \{x_1, ..., x_n\}$ finito. Seja $\sum_{e\in\xi}\prod_{x_i\in dom(e)} e(x_i)\cdot x_i$ uma forma normal dos elementos de $X$, e $\sum_{e\in\xi}\prod_{\varphi(x_i)\in dom(e)} e(\varphi(x_i))\cdot\varphi(x_i)$ uma forma normal em $B$. Defina $h : \langle X\rangle \to B$ dado por $h(\sum_{e\in\xi}\prod_{x_i\in dom(e)} e(x_i)\cdot x_i) = \sum_{e\in\xi}\prod_{\varphi(x_i)\in dom(e)} e(\varphi(x_i))\cdot\varphi(x_i)$.

Note que $h$ esta bem definida e é um homomorfismo. Suponha $\xi = \{e \in \xi_X : e(x_i) = 1\}$, então $\sum_{e\in\xi}\prod_{x_i\in dom(e)} e(x_i)\cdot x_i = x_i$, logo $h(x_i) = \varphi(x_i)$. Portanto $h$ estende $\varphi$. □

Antes do próximo critério de extensão, vamos ver o seguinte resultado. Ele nos diz que um subconjunto $X$ ser independente é equivalente a que seu gerado seja livre.

**Lema 4.11.** $\langle X\rangle$ é livre, se e somente se, $X$ é independente.

*Demonstração.* $\Rightarrow$) Escreva $X = \{x_\alpha : \alpha < |X|\}$. Considere $\varphi : X \to \{y_\alpha : \alpha < |X|\}$ onde $(y_\alpha)_{\alpha<|X|}$ é uma família independente de uma álgebra $A$, dada por $\varphi(x_\alpha) = y_\alpha$. Pela definição de álgebra livre, existe um homomorfismo $h : \langle X\rangle \to \langle\{y_\alpha : \alpha < |X|\}\rangle$ tal que $h(x_\alpha) = y_\alpha$. Considere $e : |X| \to \{-1, 1\}$ e $F \subset |X|$ finito. Então:

$$0 \neq \prod_{\alpha \in F} e(\alpha) \cdot y_\alpha = \prod_{\alpha \in F} e(\alpha) \cdot h(x_\alpha) = h(\prod_{\alpha \in F} e(\alpha) \cdot x_\alpha)$$

Assim, $\prod_{\alpha \in F} e(\alpha) \cdot x_\alpha \neq 0$, e assim $X$ é independente.

$\Leftarrow$) Note que, como $X$ é independente, $\prod_{x \in F} e(x) \cdot x \neq 0$ para todo $F \subset X$ finito. Assim qualquer $\varphi : X \to B$, onde $B$ é uma álgebra, satisfaz as condições do critério de extensão de Sikorski, portanto, pode ser estendida a $\langle X \rangle$. Logo $\langle X \rangle$ é livre. □

**Teorema 4.6** (critério de extensão de Sikorski II)**.** Sejam $A \subset B, C$ álgebras de Boole. Seja $h : A \to C$ homomorfismo e seja $b \in B \backslash A$. Então existe um homomorfismo $H : \langle A \cup \{b\} \rangle \to C$ tal que estende $h$ se, e somente se, existe $c \in C$ tal que

$$\{h(a) : a \leq b,\ a \in A\} \leq c \leq \{h(a) : b \leq a,\ a \in A\}$$

*Demonstração.* $\Rightarrow$) Qualquer $H(b) \in C$ tem que satisfazer, se $a' \leq b,\ h(a') = H(a') \leq H(b)$ e se $b \leq a,\ H(b) \leq H(a) = h(a)$, pois homomorfismo preserva $\leq$.

$\Leftarrow$) Definimos $\varphi : A \cup \{b\} \to C$ como $\varphi(a) = h(a)$ para $a \in A$ e $\varphi(b) = c$ para algum $c$ com a propriedade descrita acima. Vamos a usar o primeiro critério de Sikorski, para isso provaremos que

$$\prod_{x \in F} e(x) \cdot x = 0 \text{ então } \prod_{x \in F} e(x) \cdot \varphi(x) = 0$$

para $F \subset A \cup \{b\}$. Temos três casos:

1. $F \subset A$: então $\varphi(x) = h(x)$ para $x \in F$. Logo se $\prod_{x \in F} e(x) \cdot x = 0$ então $h(\prod_{x \in F} e(x) \cdot x) = \prod_{x \in F} e(x) \cdot h(x) = \prod_{x \in F} e(x) \cdot \varphi(x) = 0$.

2. $b \in F$ e $e(b) = -1$: Suponha que $\prod_{x \in F} e(x) \cdot x = 0$. Então

$$(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x) \cdot (-b) = 0 (\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x \in A)$$

isto é $\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x \leq b$. Então $\varphi(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x) \leq \varphi(b)$ e $\varphi(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x) = h(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x)$. Portanto $\varphi(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x) = h(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x) = \prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot \varphi(x) \leq \varphi(b)$ e assim $(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot \varphi(x)) \cdot (-\varphi(b)) = 0$. Logo $\prod_{x \in F} e(x) \cdot \varphi(x) = 0$.

3. $b \in F$ e $e(b) = 1$: Suponha que $\prod_{x \in F} e(x) \cdot x = 0$. Então

$$(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x) \cdot (b) = 0 (\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x \in A)$$

isto é $b \leq -\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x$. Então $\varphi(b) \leq -\varphi(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x)$ e $\varphi(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x) = h(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x)$. Portanto $\varphi(b) \leq -\varphi(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x) = -h(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot x) = -\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot \varphi(x)$ e assim $(\prod_{x \in F \backslash \{b\}} e(x) \cdot \varphi(x)) \cdot (\varphi(b)) = 0$. Logo $\prod_{x \in F} e(x) \cdot \varphi(x) = 0$.

Portanto, pelo primeiro critério de extensão existe $H : \langle A \cup \{b\} \rangle \to C$ que estende $\varphi$. Então $H(a) = \varphi(a) = h(a)$, $\forall a \in A$. $\square$

Para este último critério é necessário adicionar a condição de completude para a álgebra na imagem.

**Teorema 4.7** (da extensão de Sikorski)**.** Sejam $A \subset B, C$ álgebras de Boole, $C$ completa e $h : A \to C$ um homomorfismo. Então existe um homomorfismo $H : B \to C$ tal que $h \subset H$.

*Demonstração.* Considere $\mathscr{A} := \{(A', h')$ onde $A \subset A' \subset B$ é uma subálgebra e $h' : A' \to C$ é um homomorfismo que estende $h\}$. Defina em $\mathscr{A}$ a seguinte ordem

$$(A', h') \subset (A'', h'') \text{ se, e somente se, } A' \subset A'' \text{ e } h'' \text{ estende } h'$$

Seja $\mathscr{F}$ uma cadeia de $\mathscr{A}$. Note que $(\bigcup\{A : \exists h,\ (A,h) \in \mathscr{F}\}, \bigcup\{h : \exists A,\ (A,h) \in \mathscr{F}\})$ é uma cota superior da cadeia (já que união de subálgebras encaixadas é uma subálgebras e união de homomorfismos é outro homomorfismo).

Pelo Lema de Zorn, $\mathscr{F}$ possui elemento maximal digamos $(D, g)$. Afirmamos que $D = B$. Suponha que não, então existe $b \in B \backslash D$. Considere os subconjuntos $C_1 = \{h(a) : a \leq b,\ a \in A\}$ e $C_2 = \{h(a) : b \leq a,\ a \in A\}$ de $C$. Como $C$ é completa, temos que existe $\sup C_1$ e $\inf C_2$. Considere $\sup C_1 \leq c \leq \inf C_2$. Logo $C_1 \leq c \leq C_2$. Pelo Teorema de extensão de Sikorski $II$, obtemos uma aplicação $H : \langle D \cup \{b\} \rangle \to C$ que estende $g$, o que contradiz a maximalidade. $\square$

## 4.2 Dualidade de Stone

### 4.2.1 Álgebras superatômicas e espaços dispersos

**Definição 4.22.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Dado $a \in A$, $a$ é um **átomo** de $A$ se $0 < a$ e $0 \leq b \leq a$ implica que $b = 0$ ou $b = a$.

Ou seja, ser um átomo em uma álgebra de Boole é ser um elemento minimal não nulo.

**Definição 4.23.** Uma álgebra de Boole $A$ é dita **superatômica** se toda imagem homomorfa não nula de $A$ tem um átomo.

**Definição 4.24.** Seja $X$ um espaço topológico. Dizemos que $X$ é **disperso** se todo subespaço não vazio tem um ponto isolado.

**Exemplo 4.5.** $[0, \alpha]$ é disperso para todo $\alpha$ ordinal. De fato, seja $X \subset [0, \alpha]$ não vazio. Observe que $[0, minX] \cap X = \{minX\}$ e, portanto, $minX$ é isolado em $X$.

**Proposição 4.1.** Um espaço $X$ compacto, Hausdorff, infinito e disperso têm uma sequência convergente não trivial.

*Demonstração.* Seja $I$ o conjunto de pontos isolados de $X$. Então, já que $X$ é compacto e Hausdorff, não pode ser que $X = I$ pois se assim fosse teríamos que $X$ é finito. Assim $X \neq I$, ou seja $X \backslash I \neq \emptyset$. Como $X$ é disperso, existe $x \in X \backslash I$ isolado, isto é, existe $V$ vizinhança de $x$ tal que $V \cap (X \backslash I) = \{x\}$.

Pela regularidade podemos considerar $V$ como fechado, logo compacto (pois $X$ é compacto). Então $V \subset I \cup \{x\}$ e $x$ não é isolado em $V$, pois $x \notin I$. Em particular $V$ é infinito (já que $V$ é compacto e Hausdorff). Assim $V$ é homeomorfo à compactifição de um ponto do espaço discreto $V \cap I$, portanto $V$ tem uma sequência convergente não trivial e assim $X$ tem sequência convergente não trivial. □

**Proposição 4.2.** Dada $A$ uma álgebra de Boole. Suponha que $A$ tem uma família independente infinita. Então $A$ tem subálgebra livre infinita.

*Demonstração.* Seja $X \subseteq A$ à família independente infinita. Considere $\langle X \rangle$. Note que $\langle X \rangle$ é uma subálgebra livre e infinita (pois $X$ é infinita). □

**Teorema 4.8** (de Mostowski-Tarski)**.** Dada $A$ uma álgebra de Boole que não é superatômica, então $A$ tem subálgebra livre infinita.

*Demonstração.* Suponha que $A$ não é superatômica, isto é, que existe $h : A \to B$ sobrejetora onde $B$ é não nulo e não tem átomos. Podemos construir $B' \subset B$ uma subálgebra enumerável infinita e sem átomos. De fato: seja $c_0 \neq 0, 1$ em $B$. Já que $B$ não tem átomos, existem $0 \neq c_1 < c_0$ e $0 \neq c_2 < (-c_0)$. Logo, existem elementos não nulos $c_3 < c_1$, $c_4 < (-c_1)c_0$, $c_5 < c_2$ e $c_6 < (-c_0)(-c_2)$. Suponha definidos $c_n$ para $n \leq 2^m - 2$ para $m > 3$. Então, de novo já que $B$ não tem átomos, existem $2^{m-1}$ elementos $c_j$ contidos em cada combinacão possível dos $c_n$ já definidos e seus complementares. Então $B' = \langle \{c_n : n \in \omega\} \rangle$ é uma subálgebra infinita enumerável e sem átomos. Assim $B' = Fr(\omega)$, ou seja $B'$ é isomorfo à álgebra livre gerada por uma quantidade enumerável de elementos. Logo existe $(b_n)_{n \in \omega} \subset B$ independente. E portanto existe $(a_n)_{n \in \omega} \subset A$ independente (tomando $h(a_n) = b_n$). Pelo lema anterior, $A$ tem subálgebra livre infinita. □

**Lema 4.12.** Seja $A$ uma álgebra de Boole que não é superatômica. Se $\{a_n\}_{i=1}^{n}$ é qualquer família finita de elementos de $A$, então existe $a_{n+1} \in A$ tal que para qualquer $N \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ temos $a_{n+1} \cdot a_i = 0$, para $i \in N$ e $a_{n+1} \cdot a_j \neq 0$ para $j \in \{1, 2, ..., n\} \backslash N$.

*Demonstração.* Seja $\{a_n\}_{i=1}^{n}$ uma família finita de elementos de $A$ e $N \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. Já que $A$ não é superatômica, para cada $i \in N$, existe $a_{i'}$ tal que $a_{i'} \leq (-a_i)$. Pelo mesmo motivo, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\} \backslash N$ existe $a_{j'}$ tal que $a_{j'} \leq a_j$. Tomando $a_{n+1} = (\bigcup_{i \in N} a_{i'}) \cup (\bigcup_{j \in \{1,2,...,n\} \backslash N} a_{j'})$. Logo $a_{n+1} \cdot a_i = 0$ para todo $i \in N$ e $a_{n+1} \cdot a_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\} \backslash N$. □

### 4.2.2 Dualidade de Stone

**Proposição 4.3.** Sejam $A,B$ álgebras de Boole e $f : A \to B$ um homomorfismo. Então a função $f^d : s(B) \to s(A)$ dada por $f^d(u) = f^{-1}[u]$ está bem definida e é contínua.

*Demonstração.* Sejam $f : A \to B$ um homomorfismo e $u \in s(B)$. Note que $f(1) = 1 \in u$. Então $1 \in f^{-1}(u)$ e $f(0) = 0 \notin u$, logo $0 \notin f^{-1}(u)$. Também, se $a,b \in f^{-1}(u)$, então $f(a), f(b) \in u$. Logo $f(a) \cdot f(b) = f(a \cdot b) \in u$ e assim $a \cdot b \in f^{-1}(u)$. Se $a \in f^{-1}(u)$ e $a \leq b$ então, já que $f$ é homomorfismo, $f(a) \leq f(b)$, logo $f(b) \in u$ e assim $b \in f^{-1}(u)$. Com isto provamos que $f^d(u) = f^{-1}(u)$ é um filtro de $A$.

Para provar que é ultrafiltro, note que dado $a \in A$ ou $f(a) \in u$ ou $-f(a) = f(-a) \in u$, isto é, ou $a \in f^{-1}(u) = f^d(u)$, ou $-a \in f^{-1}(u)$. Logo $f^d$ está bem definida.

Finalmente vejamos que $f$ é contínua. Com efeito: seja $a^*$ aberto básico com $a \in A$. Então:

$$\begin{aligned} f^{-1}(a^*) &= \{u \in s(B) : f(u) \in a^*\} = \{u \in s(B) : f^{-1}(u) \in a^*\} \\ &= \{u \in s(B) : a \in f^{-1}(u)\} = \{u \in s(B) : f(a) \in u\} \\ &= \{u \in s(B) : u \in (f(a))^*\} = (f(a))^* \end{aligned}$$

que é um aberto básico.

□

**Proposição 4.4.** Sejam $X,Y$ espaços booleanos e $\phi : X \to Y$ uma função contínua. Então a função $\phi^d : Clop(Y) \to Clop(X)$ dada por $\phi^d(V) = \phi^{-1}(V)$ está bem definida e é um homomorfismo.

*Demonstração.* Seja $\phi : X \to Y$ uma função contínua. Se $V \in Clop(Y)$, então $(\phi)^{-1}(V)$ é aberto e fechado, pois $\phi$ é contínua. Logo $\phi^d(V) = \phi^{-1}(V) \in Clop(X)$ e, assim, $\phi^d$ está bem definida. Vamos ver que $\phi$ é um homomorfismo. Sejam $U,V \in Clop(Y)$. Então:

1. $\phi^d(Y) = \phi^{-1}(Y) = X$ e $\phi^d(\emptyset) = \phi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2. $\phi^d(U \cap V) = \phi^{-1}(U \cap V) = \phi^{-1}(U) \cap \phi^{-1}(V) = \phi^d(U) \cap \phi^d(V)$
3. $\phi^d(U \cup V) = \phi^{-1}(U \cup V) = \phi^{-1}(U) \cup \phi^{-1}(V) = \phi^d(U) \cup \phi^d(V)$
4. $\phi^d(Y \backslash U) = \phi^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash \phi^{-1}(U) = X \backslash \phi^d(U)$

□

**Observação 4.10.** Na proposição anterior é possível obter a seguinte igualdade:

$$(\phi^d)^{-1}(x^*) = (\phi(x))^* \text{ para cada } x \in X$$

Em efeito: $(\phi^d)^{-1}(x^*) = \{V \in Clop(Y) : \phi^d(V) \in x^*\} = \{V \in Clop(Y) : \phi^{-1}(V) \in x^*\} = \{V \in Clop(Y) : x \in \phi^{-1}(V)\} = \{V \in Clop(Y) : \phi(x) \in V\} = (\phi(x))^*$.

**Observação 4.11.** Sejam $A,B$ álgebras de Boole e $X,Y$ espaços booleanos. Sejam $f_1 : A \to Clop(s(A)), f_2 : B \to Clop(s(B))$ isomorfismos e $\phi_1 : X \to s(Clop(X)), \phi_2 : Y \to s(Clop(Y))$ homeomorfismos (que existem pelo Corolário 4.3 e o Lema 4.8).
Considere $f : A \to B$ um homomorfismo e $\phi : X \to Y$ uma função contínua. Considere $f^d : s(B) \to s(A)$ e $\phi^d : Clop(Y) \to Clop(X)$ como nas proposições acima. Sejam $f^{dd} : Clop(s(A)) \to Clop(s(B))$ e $\phi^{dd} : s(Clop(X)) \to s(Clop(Y))$. Então:

1. $f^{dd}(f_1(a)) = f^{dd}(a^*) = (f^d)^{-1}(a^*) = (f(a))^* = f_2(f(a))$ para cada $a \in A$. Portanto $f^{dd} \circ f_1 = f_2 \circ f$.

2. $\phi^{dd}(g_1(x)) = (\phi^{dd})(x^*) = (\phi^d)^{-1}(x^*) = (\phi(x))^* = g_2(\phi(x))$ para cada $x \in X$. Portanto $\phi^{dd} \circ g_1 = g_2 \circ \phi$.

Também existe uma correspondência entre as álgebras de Boole e seus respectivos espaços de Stone da seguinte maneira:

**Proposição 4.5.** Dado $a \in A$, $a$ é um átomo de $A$ se, e somente se, $a^*$ é um conjunto unitário com um ponto isolado em $s(A)$

*Demonstração.* $\Rightarrow$) Note que $u := \{b \in A : a \leq b\}$ é um filtro próprio (já que $a > 0$ por hipótese). E $u$ é um ultrafiltro pois, seja $c \in A$. Então $0 \leq ca \leq a$. Como $a$ é átomo, temos duas possibilidades para $ca$. Se $ca = 0$ então $a \leq -c$. Se fosse $ac = a$, então $a \leq c$.

Logo $a \leq c$ ou $a \leq -c$. Assim, ou $c \in u$, ou $-c \in u$. Agora seja $v$ um ultrafiltro tal que $a \in v$. Como $v$ é filtro, $\{b \in A : a \leq b\} \subset v$, ou seja, $u \subset v$. Como $u$ é maximal temos $u = v$. Ou seja $a^* = \{u\}$.

$\Leftarrow$) Suponha que $\{u\}$ seja aberto fechado. Então existe $a \in A$ tal que $a^* = \{u\}$. Então $a$ é átomo, pois suponha que não. Então existe $b$ tal que $0 \neq b < a$ e daí $b^* \subsetneq a^*$, impossível pois $\emptyset \neq b^*$ e $a^*$ é unitário. $\square$

Também temos a seguinte correspondência:

**Proposição 4.6.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Então, existe uma correspondência biunívoca entre as imagens homomorfas de $A$ e subespaços fechados de $s(A)$.

*Demonstração.* Seja $D \subset s(A)$ subespaço fechado. Como os conjuntos abertos de $s(A)$ são uniões de elementos da forma $a^*$ e $s(A) \backslash a^* = (-a)^*$, existe $A' \subset A$ tal que $D = \bigcap_{a \in A'} a^*$. Ou seja, $D$ é o conjunto de ultrafiltros que contém todos os elementos de $A'$. Seja $F = \{b : D \subset b^*\}$. Podemos ver que $F$ é um filtro. Claramente $A' \subset F$. Seja $a \in F$. Pela definição de $F$, todo ultrafiltro que contém $A'$, contém $a$. Afirmamos que $a \in A'$. Se $a \notin A'$, considere $H = \langle A' \cup \{-a\} \rangle$, isto é, o filtro gerado por $A' \cup \{-a\}$ como no Exemplo 4.2. Logo, existe um ultrafiltro que contém $H$, ou seja, existe um ultrafiltro que contém $A'$ mas não contém $a$. Logo $F \subset A'$, e assim $D = \bigcap_{a \in F} a^*$.

Portanto $D$ é exatamente os ultrafiltros que estendem $F$.
Reciprocamente, seja $F$ um filtro e defina $D = \bigcap_{a \in F} a^* = \{U \in s(A) : F \subset U\}$. Observe que $D$ é fechado. Suponha que $D \subset b^*$, com $b \in A$. Então qualquer ultrafiltro que contém $F$ contém $b$. Se $b \notin F$, considere $G =< F \cup \{-b\} >$, que contém $F$, e pode ser estendido a um ultrafiltro que contém $F$ mais não $b$. Logo $b \in F$. Com isto $F = \{b : D \subset b^*\}$. Isto mostra que existe uma bijeção dos filtros em $A$ com os subespaços fechados de $s(A)$.
Note que temos uma correspondência entre os filtros de $A$ e os quocientes. Tome $F$ filtro, considere o ideal $I = \{-a : a \in F\}$ e considere $A \diagup I$.
Portanto, os quocientes de álgebras booleanas correspondem aos subespaços fechados de $s(A)$. Logo, pelo isomorfismo dos quocientes e as imagens homomorfas (Teorema 4.1.5) temos a correspondência das imagens homomorfas e os subespaços fechados de $s(A)$. □

Com isto, se uma álgebra de Boole $A$ é superatômica então seu espaço de Stone $s(A)$ é disperso.

## 4.3 Um resultado interessante da Compactificação de Stone-Čech

**Definição 4.25.** Chamamos de **compactificação de Stone-Čech** de $X$ (e denotamos por $\beta X$) o espaço compacto Hausdorff tal que $X$ é denso em $\beta X$ e toda função contínua de $X$ em $[0,1]$ pode ser continuamente estendida a $\beta X$.

Vejamos um resultado importante:

**Teorema 4.9.** O espaço de Stone da álgebra $\wp(\omega)$ é a compactificação de Stone-Čech de $\omega$.

*Demonstração.* O espaço de Stone de toda álgebra é Hausdorff e compacto. Para cada $n \in \omega$ considere $n^* = \{a \subseteq \omega : n \in a\}$. Vejamos que $n^*$ é um ultrafiltro. É fácil ver que ele é um filtro de $s(\wp(\omega))$. Para todo $a \subseteq \omega$, ou $n \in a$ ou $n \in \omega \backslash a$. Assim ou $a \in n^*$ ou $\omega \backslash a \in n^*$.

Note que $\{n^*\} = \{n\}^*$. Evidentemente $\{n^*\} \subseteq \{n\}^*$. Por outro lado, seja $u \in \{n\}^*$, então $\{n\} \in u$. Dado $a \in n^*$ então $n \in a$, logo $\{n\} \subseteq a$, e já que $u$ é um filtro, concluímos que $a \in u$. Assim $n^* \subseteq u$, mas como $n^*$ é maximal, $u = n^*$. Assim $\{n^*\} = \{n\}^*$. Com isto, $\{n^* : n \in \omega\}$ é discreto e portanto homeomorfo a $\omega$.

Vamos provar agora que $\{n^* : n \in \omega\}$ é denso. Para isso mostraremos que ele intercepta todo aberto-fechado de $s(\wp(\omega))$. Seja $a \subseteq \omega$ com $a \neq \emptyset$. Então existe $m \in \omega$ tal que $m \in a$. Logo, $a \in m^*$ e, portanto, $m^* \in a^*$. Assim $\{n^* : n \in \omega\} \cap a^* \supseteq \{m^*\} \neq \emptyset$. Portanto $\overline{N} = s(\wp(\omega))$.

Seja $f : \omega \to [0,1]$. Seja $u \in s(\wp(\omega))$. Para cada $a \in u$, seja $F_a := \overline{\{f(n) : n \in a\}}$.

Note que, como $u$ é centrado, $F_a$ também é. Como $[0,1]$ é compacto, cada $F_a$ é compacto e, assim, $\bigcap_{a \in u} F_a \neq \emptyset$. Vamos mostrar que tal conjunto é unitário. Suponha que não. Sejam $x, y \in \bigcap_{a \in u} F_a$

distintos e sejam $A,B$ abertos disjuntos de $[0,1]$ tais que $x \in A$ e $y \in B$. Note que, para cada $a \in u$, $A \cap \{f(n) : n \in a\} \neq \emptyset$ (pois $F_a = \overline{\{f(n) : n \in a\}}$). Isto é, $f^{-1}[A] \cap a \neq \emptyset$. Como $u$ é ultrafiltro então $f^{-1}[A] \in u$. Analogamente $f^{-1}[B] \in u$, o que é uma contradição. Assim, podemos definir $\overline{f}(u) = x$ onde $\{x\} = \bigcap_{a \in u} F_a$ (note que $\overline{f}(n^*) = f(n)$).

Finalmente vamos provar que $\overline{f}$ é continua. Seja $u_0 \in s(\wp(\omega))$, $\varepsilon > 0$ e $a_0 = \{n \in \omega : |f(n) - \overline{f}(u_0)| < \varepsilon\}$. Mas, para todo $a \in u_0$, $\{f(n) : n \in a\} \cap ]\overline{f}(u_0) - \varepsilon, \overline{f}(u_0) + \varepsilon[ \neq \emptyset$. Logo, $a_0 \cap a \neq \emptyset$, para todo $a \in u_0$ e assim $a_0 \in u_0$, pois $u_0$ é um ultrafiltro. Portanto $u_0 \in a_0^*$. Se $u \in a_0^*$ então $a_0 \in u$, e assim $|f(n) - \overline{f}(u)| < \delta$, $\forall \delta > 0$ para $n \in a_0$. Portanto $|\overline{f}(u) - \overline{f}(u_0)| \leq \varepsilon$, para todo $u \in a_0^*$. Isto prova que $\overline{f}$ é contínua. $\square$

CAPÍTULO

5

# ESPAÇOS DE BANACH E MEDIDAS DE RADON

Neste capítulo apresentamos algumas definições relativas a espaços de Banach, como as noções de dual, isometria e de topologia fraca e fraca*. Além disso, vemos algo relativo a medidas, medidas de Radon e o Lema de Rosenthal. Finalmente apresentamos os espaços de Banach da forma $C(X)$ e como atuam neles as topologias fracas e fracas*. Apresentamos o teorema de representação de Riesz (o qual apresenta uma equivalência dos elementos do dual de $C(X)$ e as medidas de Radon).

Como principais referências usamos (BRÉZIS, 1996) para a Seção 1 e 9 (na Subseção 1.2 usamos (WOJTASZCZYK, 1991)). Para a Seção 2 usamos (BARTLE, 1996) e (ENGELKING, 1974). Para as seções seguintes usamos diversos resultados dados em (SEMADENI, 1971) (nas Seções 4 e 5), (TALAGRAND, 1980) (na Seção 3), (LIN, 2004) para a Seção 6 e (BRECH, 2004) para a Seção 8.

## 5.1 Espaços de Banach

Lembremos que um espaço vetorial normado[1] completo é chamado de **espaço de Banach**.

[1] uma norma definida em um espaço vetorial $X$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ é uma função $||.|| : X \to [0,+\infty)$, que satisfaz:

1. $||x|| = 0$ se, e somente se $x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ para todo $\lambda \in K$ e $x \in X$
3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ para todo $x, y \in X$

### 5.1.1 A topologia fraca

Vamos considerar aqui só espaços vectoriais definidos sobre o corpo $\mathbb{R}$.

**Definição 5.1.** Sejam $X$,$Y$ espaços normados e $T : X \to Y$ uma aplicação linear[2]. Dizemos que $T$ é limitada se, e somente se, existe $c > 0$ tal que

$$||T(x)|| \leq c||x||$$

**Definição 5.2.** Dados $X$ e $Y$ espaços normados. Definimos o espaço

$$B(X,Y) = \{T : X \to Y \ : \ T \text{ é uma aplicação linear e limitada}\}$$

dotada da seguinte norma

$$||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||T(x)||$$

**Teorema 5.1.** Sejam $X$ um espaço normado e $Y$ um espaço de Banach. O espaço $B(X,Y)$ é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Seja $(T_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de Cauchy em $B(X,Y)$. Se $x \in X$, então

$$||T_n x - T_m x|| = ||(T_n - T_m)x|| \leq ||T_n - T_m||||x|| \text{ para qualquer } n,m \geq n_0.$$

Segue que $(T_n x)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy em $Y$ e portanto é convergente (pois $Y$ é Banach). Defina $T : X \to Y$ dada por $Tx = lim_{n\to\infty} T_n x$. Claramente $T$ é linear.

Vamos mostrar que $lim_{n\to\infty} T_n = T$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $n_0$ um inteiro positivo, tais que $||T_n - T_m|| \leq \varepsilon$ sempre que $n,m \geq n_0$ (tal inteiro existe pois a sequência é Cauchy). Se $||x|| \leq 1$ e $n,m \geq n_0$, então $||T_n x - T_m x|| \leq ||T_n - T_m|| \leq \varepsilon$. Fixe $n$. Então $||T_n x - Tx|| \leq \varepsilon$ quando $m \to \infty$ e com $||x|| \leq 1$ e $n \geq n_0$. Tomando o supremo de todos os $||x|| \leq 1$, obtemos $||T_n - T|| < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$. Segue que $lim_{n\to\infty} T_n = T$ e que, em particular, $T_{n_0} - T \in B(X,Y)$. Então $T \in B(X,Y)$, pois $T = T_{n_0} - (T_{n_0} - T)$. Portanto $B(X,Y)$ é completo. □

**Definição 5.3.** Seja $X$ um espaço normado. Definimos $X^*$ o **espaço dual** de $X$ por

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ é linear e limitada}\}$$

dotada da norma como na Definição 5.2

**Proposição 5.1.** Se $X$ é um espaço normado, então $X^*$ é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Basta tomar $Y = \mathbb{R}$ no teorema anterior. □

[2] $T(x+y) = T(x) + T(y)$ e $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ $\forall x,y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Considere a seguinte família de subconjuntos de $X$

$$B_f = \{V \subseteq X : V := V(x_0, \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \varepsilon) = \{x \in X : |\phi_i(x) - \phi_i(x_0)| < \varepsilon,\ \forall i,\ 1 \leq i \leq n\} \text{ onde } x_0 \in X, \phi_i \in X^* \ \forall i \text{ e } \varepsilon > 0\}$$

$B_f$ satisfaz as condições da Definição 2.15. Com efeito: Note que $x \in V(x, f, \varepsilon)$ para qualquer $f \in X^*$ e $\varepsilon > 0$. Agora, sejam $V_1 = V_1(x_1, \phi_1, ..., \phi_k, \varepsilon_1)$ e $V_2 = V_2(x_2, \varphi_1, ..., \varphi_m, \varepsilon_2)$. Tome $x \in V_1 \cap V_2$. Então

$$|\phi_i(x - x_1)| < \varepsilon_1 \text{ e } |\varphi_j(x - x_2)| < \varepsilon_2$$

para cada $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$. Considere $M_1 = \varepsilon_1 - \max_{1 \leq i \leq k}\{|\phi(x - x_1)|\} > 0$ e $M_2 = \varepsilon_2 - \max_{1 \leq i \leq m}\{|\phi(x - x_2)|\} > 0$. Tome $\varepsilon = \min\{M_1, M_2\}$. Então $x \in V = V(x, \phi_1, ..., \phi_k, \varphi_1, ..., \varphi_m)$ e $V \subseteq V_1 \cap V_2$. Com efeito, seja $z \in V$. Então $|\phi_i(z - x)| < \varepsilon$ e $|\varphi_j(z - x)| < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq k$ e todo $1 \leq j \leq m$.Logo

$$|\phi_i(z - x_1)| \leq |\phi_i(z - x)| + |\phi_i(x - x_1)| < \varepsilon + |\phi_i(x - x_1)| \leq M_1 - |\phi_i(x - x_1)| \leq \varepsilon_1 - |\phi_i(x - x_1)| + |\phi_i(x - x_1)| = \varepsilon_1$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Analogamente, $|\varphi(z - x_2)| < \varepsilon_2$. Portanto $V \subseteq V_1 \cap V_2$.

**Definição 5.4.** Seja $X$ um espaço de Banach. Definimos a **topologia fraca** sobre $X$ como a topologia gerada pela família $B_f$.

**Observação 5.1.** Seja $X$ um espaço de Banach e $f \in X^*$. Denote por $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ o funcional linear dado por $\varphi_f(x) = f(x)$. Então $\varphi_f$ é contínua com $X$ com a topologia fraca. Com efeito: sejam $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que $\varphi_f$ é contínua em $x_0$. Considere $V = V(f, x_0, \varepsilon)$. Se $x \in V$ então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Logo $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Portanto $V \subseteq \varphi_f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon))$.

**Definição 5.5.** Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq X$ é **fracamente convergente** para $x \in X$ se converge para $x$ na topologia fraca.

O seguinte lema é uma caracterização bastante útil das sequências fracamente convergentes:

**Lema 5.1.** Sejam $X$ um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em $X$. Se $x \in X$, então $x_n$ é fracamente convergente para $x$ se, e somente se, para todo $\phi \in X^*$ tem-se que $\phi(x_n)$ converge para $\phi(x)$ em $\mathbb{R}$

*Demonstração.* Suponha que $x_n$ converge para $x$ na topologia fraca e seja $\phi \in X^*$ fixo. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V(x, \phi, \varepsilon)$. Logo, se $n \geq n_0$, então $|\phi(x_n) - \phi(x)| < \varepsilon$. Portanto, $\phi(x_n)$ converge para $\phi(x)$ em $\mathbb{R}$.

Reciprocamente, suponha que $\phi(x_n) \to \phi(x)$ para todo $\phi \in X^*$. Fixemos $\phi_1, ..., \phi_k \in X^*$ e $\varepsilon > 0$. Então, para cada $1 \leq i \leq k$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_i$ então $|\phi_i(x_n) - \phi_i(x)| \leq \varepsilon$. Tomemos $n_0 = \max\{n_1, ..., n_k\}$. Assim, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V(x, \phi_1, ..., \phi_k, \varepsilon)$. Portanto $x_n$ converge para $x$ na topologia fraca. □

**Definição 5.6.** Seja $X$ um espaço de Banach e $M \subseteq X$. $M$ é dito:

- **fracamente compacto** se é compacto na topologia fraca.
- **fracamente sequencialmente compacto** se toda sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em $M$ tem subsequência convergente na topologia fraca.
- **fracamente relativamente compacto** se seu fecho na topologia fraca é fracamente compacto.

O seguinte é um resultado muito importante:

**Teorema 5.2** (de Eberlein-Šmulian)**.** Seja $X$ um espaço normado e $M \subseteq X$. Então $M$ é relativamente fracamente compacto se, e somente se, $M$ é fracamente sequencialmente compacto.

*Demonstração.* Damos como referência (WOJTASZCZYK, 1991), página 49. □

### 5.1.2 A topologia fraca$^*$

Analogamente, à topologia fraca, definimos a topologia fraca$^*$ no espaço dual.

**Definição 5.7.** Seja $X$ um espaço de Banach. Definimos a **topologia fraca**$^*$ sobre $X^*$ como a topologia gerada por conjuntos da forma

$$V^*(\phi_0, x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon) = \{\phi \in X^* : |\phi(x_i) - \phi_0(x_i)| < \varepsilon, \ \forall i, \ 1 \leq i \leq n\}$$

onde $\phi_0 \in X^*, x_i \in X \ \forall i$ e $\varepsilon > 0$.

**Definição 5.8.** Dizemos que uma sequência $(\phi_n)_{n\in\omega} \subseteq X^*$ é **fracamente**$^*$ **convergente** para $\phi \in X^*$ se converge para $\phi$ na topologia fraca$^*$.

O seguinte lema é uma caracterização bastante útil das sequências fracamente$^*$ convergentes:

**Lema 5.2.** Sejam $X$ um espaço de Banach e $(\phi_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em $X^*$. Se $\phi \in X$, então $\phi_n$ é fracamente convergente a $\phi$ se, e somente se, para todo $x \in X$ tem-se que $\phi_n(x)$ converge a $\phi(x)$ em $\mathbb{R}$.

*Demonstração.* Suponha que $\phi_n$ converge para $\phi$ na topologia fraca$^*$ e seja $x \in X$ fixo. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então $\phi_n \in V^*(\phi, x, \varepsilon)$. Logo, se $n \geq n_0$ então $|\phi_n(x) - \phi(x)| < \varepsilon$. Portanto, $\phi_n(x)$ converge para $\phi(x)$ em $\mathbb{R}$.
Reciprocamente, suponha que $\phi_n(x) \to \phi(x)$ para todo $x \in X$. Fixemos $x_1, \ldots, x_k \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então, para cada $1 \leq i \leq k$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_i$ então $|\phi_n(x_i) - \phi(x_i)| \leq \varepsilon$. Tomemos $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Assim, se $n \geq n_0$, então $\phi_n \in V^*(\phi, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$. Portanto $\phi_n$ converge para $\phi$ na topologia fraca$^*$. □

**Observação 5.2.** Seja $X$ um espaço de Banach e $x \in X$. Denote por $\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}$ o funcional linear dado por $\varphi_x(f) = f(x)$. Então $\varphi_x$ é contínua, com $X^*$ com a topologia fraca$^*$. Com efeito: seja $f_0 \in X^*$ e $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que $\varphi_x$ é contínua em $f_0$. Considere $V = V(x, f_0, \varepsilon)$. Se $f \in V$, então $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$. Logo $f(x) \in (f_0(x) - \varepsilon, f_0(x) + \varepsilon)$. Portanto $V \subseteq \varphi_x^{-1}((f_0(x) - \varepsilon, f_0(x) + \varepsilon))$.

**Lema 5.3.** A topologia fraca$^*$ é Hausdorff.

*Demonstração.* Sejam $\phi_1, \phi_2 \in X^*$ tais que $\phi_1 \neq \phi_2$. Então existe $x \in X$ tal que $\phi_1(x) \neq \phi_2(x)$. Suponha, por exemplo, que $\phi_1(x) < \phi_2(x)$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\phi_1(x) < \alpha < \phi_2(x)$$

Considere $A = \varphi_x((-\infty, \alpha))$ e $B = \varphi_x((\alpha, +\infty))$. Portanto, pela observação anterior, $A$ e $B$ são abertos, $\phi_1 \in A$ e $\phi_2 \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. □

**Definição 5.9.** Seja $X$ um espaço de Banach e $M \subseteq X^*$. Então $M$ é dito **fracamente$^*$ compacto** se é compacto na topologia fraca$^*$.

Os seguintes resultados vão ser de utilidade mais para frente.

**Teorema 5.3** (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** A bola unitária fechada $B_{X^*} = \{f \in X^* : ||f|| \leq 1\}$ é fracamente$^*$ compacta.

*Demonstração.* Ver (BRÉZIS, 1996), Teorema 3.16, página 66. □

**Teorema 5.4.** Seja $X$ um espaço de Banach separável. Então $B_{X^*}$ é metrizável na topologia fraca$^*$.

*Demonstração.* Ver (BRÉZIS, 1996), Teorema 3.28, página 74. □

## 5.2 Teorema de Stone-Weierstrass

**Definição 5.10.** Dizemos que $M \subseteq C(X)$ **separa pontos** de $X$ se, para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe $f \in M$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

O seguinte resultado dá um critério para um conjunto ser denso em $C(X)$. Vejamos primeiro o seguinte lema.

**Lema 5.4.** Seja $X$ um espaço topológico e $W \subseteq C(X)$ uma família de funções limitadas. Suponha que $W$ contém as funções constantes e é fechado. Então, para todo $f, g \in W$, as funções $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ pertencem a $W$.

*Demonstração.* Ver (ENGELKING, 1974), Lema 3.2.20, página 144. □

**Teorema 5.5** (de Stone-Weierstrass)**.** Seja $X$ um espaço compacto Hausdorff. Suponhamos $W \subseteq C(X)$, subconjunto, com as seguintes propriedades:

1. dados $f, g \in W$, então $f + g \in W$ e $f \cdot g \in W$.
2. $W$ contém as funções constantes.
3. $W$ separa pontos de $X$.

Então $\overline{W} = C(X)$.

*Demonstração.* Vamos mostrar que para qualquer $f \in C(X)$, existe um $f_\varepsilon \in W$ tal que $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$.
Para qualquer par de pontos $a$ e $b$ de $X$ distintos existe uma função $h \in W$ tal que $h(a) \neq h(b)$. Logo, a função $g(x) = \frac{h(x)-h(a)}{h(b)-h(a)}$ está em $W$ e $g(a) = 0$ e $g(b) = 1$. Defina a seguinte função $f_{a,b}(x) = (f(b) - f(a))g(x) + f(a)$. Logo $f_{a,b} \in W$ e $f_{a,b}(a) = f(a)$ e $f_{a,b}(b) = f(b)$.
Os conjuntos

$$U_{a,b} = (f_{a,b} - f)^{-1}(]-\infty, \varepsilon[) = \{x \in X : f_{a,b}(x) - f(x) < \varepsilon\} \text{ e}$$
$$V_{a,b} = (f_{a,b} - f)^{-1}(]-\varepsilon, \infty[) = \{x \in X : f_{a,b}(x) - f(x) > -\varepsilon\}$$

são abertos que contém $a$ e $b$ respetivamente (pois $f_{a,b} - f$ é contínua). Fixemos o ponto $b$ e considere a cobertura aberta $\{U_{a,b}\}_{a \in X}$ de $X$. Como $X$ é compacto, existem $a_1, \ldots, a_k \in X$ tais que $\{U_{a_i,b}\}_{i=1}^{k}$ é uma subcobertura para $X$. Pelo lema anterior, a função $f_b = \min\{f_{a_1,b}, \ldots, f_{a_k,b}\} \in W$ e logo:

$$f_b(x) < f(x) + \varepsilon \text{ para todo } x \in X$$

pois se $x \in X$, então existe $1 \leq i \leq k$ tal que $x \in U_{a_i,b}$ e assim $f_b(x) \leq f_{a_i,b}(x) < f(x) + \varepsilon$.
Por outro lado, para $x \in V_b = \bigcap_{i=1}^{k} V_{a_i,b}$, $f_{a_i,b}(x) > f(x) - \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq k$ e, assim, $f_b(x) > f(x) - \varepsilon$.
O conjunto $V_b$ é um aberto que contém $b$. Considere a cobertura aberta $\{V_b\}_{b \in K}$ de $X$. Como $X$ é compacto, existem $b_1, \ldots, b_m \in X$ tais que $\{V_{b_j}\}_{j=1}^{m}$ é subcobertura para $X$. Logo, a função

$f_\varepsilon = max\{f_{b_1}, ..., f_{b_m}\} \in W$ e $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$, pois o mostrado anteriormente foi dado para qualquer $b$ fixo em $X$. Isto conclui a demonstração. $\square$

**Definição 5.11.** Sejam $A$ uma álgebra de Boole e $a \in A$. Definimos a funço $\chi_a : A \to \{0,1\}$ como

$$\chi_a(b) = 1 \text{ se } b \in a^* \text{ e } \chi_a(b) = 0 \text{ se } b \notin a^*$$

**Definição 5.12.** Seja $A$ uma subálgebra de Boole de $\wp(X)$ para um conjunto $X$. Dizemos que $f$ é uma **função simples** sobre $A$ se $f = \sum_{k=1}^{n} r_k \chi_{a_k}$, onde $a_1, ..., a_n \in A$, $a_1 \cup ... \cup a_n = 1$ e $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$. Denotamos $\mathscr{W}_0(A)$ o conjuntos das funções simples sobre $A$.

**Observação 5.3.** Note que se $X$ é booleano, $\mathscr{W}_0(Clop(X))$ possui as três propriedades da hipótese acima. Portanto $\overline{\mathscr{W}_0(Clop(X))} = C(X)$.

## 5.3 Medidas em álgebras de Boole e integração

**Definição 5.13.** Dizemos que $\mu$ é uma **medida finitamente aditiva** sobre uma álgebra de Boole $A$, ou simplesmente uma **medida** sobre $A$, se é uma função $\mu : A \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(0) = 0$ e para todos $a_1, ..., a_n \in A$ dois a dois disjuntos se cumple

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(a_i)$$

**Definição 5.14.** Seja $\mu$ uma medida sobre $A$. Se $f \in \mathscr{W}_0(Clop(X))$ então $f = \sum_{k=1}^{n} r_k \chi_{a_k}$ onde $a_1 \cup ... \cup a_n = 1$ e $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$, então a **integral** de $f$ com respeito a $\mu$ é definida por

$$\xi_\mu(f) = \int f d\mu = \sum_{k=1}^{n} r_k \mu(a_k)$$

Se $a \in A$, então $\int_a f d\mu = \xi_\mu(f\chi_a)$

**Definição 5.15.** Dizemos que uma medida $\mu$ sobre $A$ é uma **medida limitada** se

$$\sup\{|\mu(a)| : a \in A\} < \infty$$

Neste caso, definimos a **variação** de $\mu$ sobre um $a \in A$ por

$$|\mu|(a) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(a_i)| : a = \bigcup_{i=1}^{n} a_i \text{ e } a_i \cap a_j = 0 \text{ se } i \neq j\}$$

Também definimos a **norma** de uma medida limitada $\mu$ por $||\mu|| = |\mu|(1)$. Se $\mu$ é limitada sobre um espaço topológico $X$, então $||\mu|| = |\mu|(X)$. E se, mais ainda, $\mu$ é não negativa, então $|\mu|(a) = \mu(a)$ para todo $a \in A$ e $||\mu|| = \mu(X)$.

**Definição 5.16.** Seja $\mu$ uma medida limitada sobre $A$, então o funcional $\xi_\mu$ sobre $\mathscr{W}_0(A)$ tem uma única extensão em $\mathscr{W}(A)$, o completamento de $\mathscr{W}_0(A)$. Se $f \in \mathscr{W}(A)$, então o valor desta extensão em $f$ será denotado por $\int f d\mu$ e será chamado a **integral** de $f$ com respeito a $\mu$. Se $a \in A$, então $\int_a f d\mu$ é definido como $\int f \cdot \chi_a d\mu$.

### 5.3.1 Medidas de Radon

**Definição 5.17.** Uma **medida boreliana**, sobre um espaço topológico $X$, é uma medida $\sigma-$aditiva sobre a álgebra dos conjuntos borelianos $Bor(X)$ (a menor $\sigma-$ álgebra completa de $\wp(X)$ que contém todos os subconjuntos abertos de $X$). Isto é, é uma medida $\mu$ sobre $Bor(X)$ tal que se $(B_n)_{n\in\omega} \subseteq Bor(X)$ é uma família de borelianos dois a dois disjuntos, então

$$\mu(\bigcup_{n\in\omega} B_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(B_n)$$

**Definição 5.18.** Uma medida boreliana limitada $\mu$ é uma **medida regular** se, para todo $B \in Bor(X)$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $K \subseteq B$ compacto tal que $|\mu|(B \backslash K) < \varepsilon$.

**Definição 5.19.** Uma medida $\mu$ é uma **medida de Radon** se é uma medida boreliana limitada regular. Denotamos por $\mathscr{M}(X)$ o conjunto de todas as medidas de Radon sobre $X$.

**Exemplo 5.1.** Seja $X$ espaço topológico. Para cada $x \in X$, considere a função $\delta_x : Bor(X) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta_x(A) = 1 \text{ se } x \in A \text{ e } \delta_x(A) = 0 \text{ se } x \notin A \text{ para todo } A \in Bor(X)$$

Então $\delta_x$ é uma medida de Radon. Com efeito: seja uma família $(B_n)_{n\in\omega} \subseteq Bor(X)$ de borelianos dois a dois disjuntos. Então $x \in B_n$ para um único $n \in \omega$. Logo $\delta_x(B_m) = 0$ para todo $m \in \omega \backslash \{n\}$. Portanto $\delta_x(\bigcup_{n\in\omega} B_n) = 1$ e $\sum_{n\in\omega} \mu(B_n) = 1$. Claramente $\delta_x$ é limitada. Dado $B \in Bor(X)$ e $\varepsilon > 0$. Note que $\{x\}$ é compacto. Então, considere $K = \{x\}$ se $x \in B$ e $K = \emptyset$ se $x \notin B$. Logo $\delta_x(B \backslash K) = 0 < \varepsilon$ em qualquer das situações. Chamamos a $\delta_x$ de medida de Dirac.

### 5.3.2 Decomposição de medidas

**Definição 5.20.** Seja $X$ espaço topológico e $\mu$ uma medida boreliana sobre $X$. Dizemos que $F \subseteq X$ é **positivo** (**negativo** ou **nulo**) se $\mu(E \cap F) \geq 0$ ($\mu(E \cap F) \leq 0$ ou $\mu(E \cap F) = 0$, respectivamente) para qualquer $E \subseteq X$.

**Teorema 5.6** (Decomposição de Hahn). Seja $X$ espaço topológico e $\mu$ uma medida sobre $X$. Então existem $P$ e $N$ subconjuntos de $X$ tais que $X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$, $P$ é positivo e $N$ é negativo com respeito a $\mu$.

*Demonstração.* Damos como referência (BARTLE, 1996), Lema 8.2, página 81. □

**Definição 5.21.** Seja $X$ espaço topológico. Dizemos que $P$ e $N$ formam uma **decomposição de Hahn** para $X$ se eles satisfazem o resultado anterior.

**Observação 5.4.** Note que, em geral, a decomposição não é única, mais isso não vai ser um problema.

**Lema 5.5.** Sejam $X$ espaço topológico e $\mu$ uma medida sobre $X$. Se $P_1, N_1$ e $P_2, N_2$ são decomposições de Hahn para $\mu$, e $E \subseteq X$, então

$$\mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_2) \quad \mu(E \cap N_1) = \mu(E \cap N_2)$$

*Demonstração.* De $E \cap (P_1 \backslash P_2) \subseteq P_1$ e $E \cap (P_1 \backslash P_2) \subseteq N_2$, concluímos que $\mu(E \cap (P_1 \backslash P_2)) = 0$, pois $P_1$ é positivo e $N_2$ é negativo. Assim

$$\mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_1 \cap P_2)$$

Analogamente

$$\mu(E \cap P_2) = \mu(E \cap P_1 \cap P_2)$$

Logo $\mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_2)$. Analogamente, obtemos: $\mu(E \cap N_1) = \mu(E \cap N_2)$. □

**Definição 5.22.** Sejam $X$ espaço topológico e $\mu$ uma medida sobre $X$. Seja $P, N$ uma decomposição de Hahn para $\mu$. As **variações positivas** e **negativas** de $\mu$ são medidas não negativas $\mu^+$, $\mu^-$ que são dadas, para $E \subseteq X$, por:

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P) \quad \mu^- = -\mu(E \cap N)$$

A **variação total** de $\mu$ é a medida não negativa $|\mu|$ definida, para $E \subseteq X$, por

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

**Observação 5.5.** Note que pelo lema anterior, as variações positivas e negativas estão bem definidas. Note também que:

$$\mu(E) = \mu(E \cap P) + \lambda(E \cap N) = \mu^+(E) - \mu^-(E).$$

## 5.4 Mais um pouco de medida

**Definição 5.23.** Dizemos que uma medida $\mu$ sobre um espaço $X$ compacto é **realizada** por um boreliano $a$ se $\mu(X \backslash a) = 0$

Apresentamos, dois lemas dos quais faremos uso neste trabalho, não vamos dar a prova, mas temos (TALAGRAND, 1980) como referência.

**Lema 5.6.** Seja $X$ um espaço compacto Hausdorff e $(h_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de medidas que são realizadas por uma família de borelianos dois a dois disjuntos. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma subsequência $(h_{k_n})_{n\in\omega}$ e abertos disjuntos $(U_n)_{n\in\omega}$ tais que $h_{k_n}(U_n) \geq 1-\varepsilon$.

**Lema 5.7.** Seja $X$ espaço compacto Hausdorff. Seja $(\nu_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de funções limitadas em $L^1(\mu)$[3]. Então existem $\eta \geq 0$ e uma subsequência $(\nu_{k_n})_{n\in\omega}$ que tem uma decomposição da forma $\nu_{k_n} = g_n + h_n$, onde $(g_n)_{n\in\omega}$ converge fracamente e as funções $h_n$ são realizadas por conjuntos borelianos disjuntos e têm-se $||h_n|| = \eta$.

## 5.5 Teorema de Representação de Riesz

**Teorema 5.7** (de Representação de Riesz)**.** Se $X$ é um espaço compacto Hausdorff, então para todo funcional linear limitado $\xi$ sobre $C(X)$ existe uma única medida de Radon $\mu$ sobre $X$ tal que

$$\xi(f) = \int_X f d\mu := \mu(f)$$

para todo $f \in C(X)$. Neste caso, $||\xi|| = ||\mu||$.

*Demonstração.* Damos como referência (SEMADENI, 1971), Lema 18.5, página 314. □

**Observação 5.6.** Note que, da forma como foi definida, as medidas de Radon são casos particulares de medidas finitamente aditivas sobre uma álgebra de Boole. Na realidade, medidas finitamente aditivas sobre álgebras de Boole podem ser interpretadas como medidas de Radon sobre seu espaço de Stone. Vejamos como é que acontece isto.

Pelo teorema anterior, um funcional linear limitado $\xi \in C(X)^*$, pode ser representado como uma integral com respeito a uma medida de Radon sobre $X$. Mas, pelo Teorema de Stone-Weierstrass, $C(X) = \overline{\mathscr{W}_0(Clop(X))}$. Daí $\xi$ está bem determinado por seu valor nas funções simples sobre $Clop(X)$. Assim $\xi$ pode ser representado como a integral com respeito a uma medida finitamente aditiva $\nu$ sobre $Clop(X)$, onde $\nu = \mu|_{Clop(X)}$.

Porém, $\mu$ é $\sigma-$aditiva e $\nu$ é apenas finitamente aditiva, pois, $Clop(X)$ é uma subálgebra de $Bor(X)$, que é $\sigma-$completa, mas $Clop(X)$ não é.

Além disso, se $M = \{m_n : n \in \omega\} \subseteq Clop(X)$ é uma anticadeia, mesmo que exista $\sup_{Clop(X)} M \in Clop(X)$, podemos ter que $\sup_{Clop(X)} M \neq \sup_{Bor(X)} M = \bigcup M$. Suponha que para algum $M$, $\sup_{Clop(X)} M = \sup_{Bor(X)} M$. Neste caso, $\bigcup M \in Clop(X)$ e então ele é compacto. Como $M$ é uma cobertura de $\bigcup M$ por abertos, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup M = \bigcup_{i=1}^{k} m_i$ e daí, $m_i = 0$ para $i > k$. Assim,

[3] Espaço das funções mensuráveis e integráveis

na realidade, não existem uniões infinitas em $Clop(X)$ e, portanto, toda medida finitamente aditiva sobre $Clop(X)$ é $\sigma-$aditiva com respeito a uniões, por vacuidade.

Reciprocamente, se $\nu$ é uma medida finitamente aditiva sobre $Clop(X)$, então $\nu$ pode ser estendida a uma única medida de Radon $\mu$ $\sigma-$aditiva regular sobre o álgebra $\sigma-$completa gerada por $Clop(X)$ que é $Bor(X)$, isto é, uma única medida de Radon $\mu$ sobre $X$.

Consequentemente, temos uma correspondência entre as medidas finitamente aditivas sobre $Clop(X)$ e as medidas de Radon sobre $X$.

**Observação 5.7.** Sejam $X$ espaço topológico e $x \in X$. Para a medida de Dirac $\delta_x$ note que $f = f(x)$ q.t.p.[4] para todo $f \in C(X)$. Logo $\int f d\delta_x = \int f(x) d\delta_x = f(x) \cdot \delta_x(\{x\}) = f(x) = \delta_x(f)$.

## 5.6 A topologia fraca no dual do espaço das funções contínuas

Seja $X$ um espaço booleano. Vejamos como se comporta a topologia fraca em espaços da forma $C(X)$.

**Lema 5.8.** Sejam $X$ um espaço booleano e $(\xi_n)_{n\in\omega} \subseteq C(X)^*$. Considere $(\mu_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{M}(X)$ as medidas de Radon (dadas pelo Teorema de Representação de Riesz) sobre $X$ tais que

$$\forall\, f \in C(X) \;\; \xi_n(f) = \int_K f d\mu_n.$$

Se existem $a \in Bor(X)$, $\varepsilon$ e $M_1, M_2 \subseteq \omega$ infinitos tais que

$$\forall\, n \in M_1 \; |\mu_n(a)| \geq \varepsilon \text{ e } \forall\, n \in M_2 \; |\mu_n(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

então $(\xi_n)_{n\in\omega}$ não é convergente na topologia fraca.

*Demonstração.* Suponha $a \in Bor(X)$, $\varepsilon > 0$ e $M_1, M_2 \subseteq \omega$ como na hipótese. Defina $\phi : C(X)^* \to \mathbb{R}$ por $\phi(\mu) = \int_K \chi_a d\mu$.

$\phi$ está bem definida, pois como $a \in Bor(X)$, $\chi_a$ é integrável com relação a toda medida de Radon $\mu$. Claramente $\phi$ é linear. $\phi$ é limitada, pois dada $\mu \in C(X)^*$, temos

$$||\phi(\mu)|| = |\int_K \chi_a d\mu| = |\mu(a)| \leq ||\mu||$$

Portanto, $\phi \in C^{**}(X)$. Então, segue que

$$\forall n \in M_1 \;\; |\phi(\xi_n)| = |\int_K \chi_a d\mu_n| = |\mu_n(a)| \geq \varepsilon$$

e

[4] a propriedade é satisfeita exceto em um conjunto de medida nula

$$\forall n \in M_2 \ \ |\phi(\xi_n)| = |\int_K \chi_a d\mu_n| = |\mu_n(a)| \leq \varepsilon$$

Portanto, $(\phi(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma sequência convergente em $\mathbb{R}$ e, portanto, não converge na topologia fraca. □

**Teorema 5.8** (de Dieudonné-Grothendieck)**.** Seja $X$ um espaço compacto Hausdorff e considere $Bor(X)$ a álgebra $\sigma-$completa dos conjuntos borelianos de $X$. Seja $M$ um subconjunto limitado de medidas de Radon sobre $X$. Então $M$ é relativamente fracamente compacto se, e somente se, para toda sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ de abertos de $X$ dois a dois disjuntos, tem se que $\mu(a_n)$ converge uniformemente a 0 para $\mu \in M$.

*Demonstração.* Damos como referência (DIESTEL, 1984), Teorema 14, página 98. □

## 5.7 O Lema de Rosenthal

**Lema 5.9** (de Rosenthal)**.** Seja $(\mu_n)_{n\in\omega}$ uma sequência uniformemente limitada (isto é, $|\mu_n(a)| \leq c$ para algum $c > 0$, e para todo $n \in \omega$ e $a \in A$) de medidas sobre uma álgebra de Boole $A$. Então, dados $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(E_n)_{n\in\omega}$ disjunta, existe uma sequência crescente de inteiros positivos $(k_n)_{n\in\omega}$ de tal maneira que

$$|\mu_{k_n}| \left(\bigcup_{j\neq n} E_{k_j}\right) < \varepsilon$$

para todo $n$.

*Demonstração.* Do fato que a sequência é uniformemente limitada, podemos supor que

$$\sup_m |\mu_m|(\bigcup_n E_n) \leq 1$$

Vamos fazer uma partição do $\omega$ em infinitos subconjuntos disjuntos infinitos $(N_k)$. Se para algum $p$ não existe $k \in N_p$ tal que

$$|\mu_k| \left(\bigcup_{j\neq k, j\in N_p} E_j\right) \geq \varepsilon$$

então para cada $k \in N_p$ teríamos

$$|\mu_k| \left(\bigcup_{j\neq k, j\in N_p} E_j\right) < \varepsilon$$

Fazendo uma enumeração dos elementos de $N_p$ obtemos a subsequência requerida. Suponha que aquele $p$ não existe. Então para cada $p$ existe um $k_p \in N_p$ para o qual

$$|\mu_{k_p}| \left(\bigcup_{j\neq k_p, j\in N_p} E_j\right) \geq \varepsilon$$

Note que

$$|\mu_{k_p}|(\bigcup_n E_{k_n}) + |\mu_{k_p}|(\bigcup_n E_n \backslash \bigcup_n E_{k_n}) = |\mu_{k_n}|(\bigcup_n E_n) \leq 1$$

e, do fato que $\bigcup_{j \neq k_p, j \in N_p} E_j \subseteq \bigcup_n E_n \backslash \bigcup_n E_{k_n}$, então

$$|\mu_{k_p}|(\bigcup_n E_{k_n}) \leq 1 - \varepsilon \text{ para todo } p.$$

Repetindo o argumento inicial para as sequências $\mu_{k_n}$ e $E_{k_n}$, tendo como ponto de partida a desigualdade $|\mu_{k_p}|(\bigcup_n E_{k_n}) \leq 1 - \varepsilon$, ou conseguimos a subsequência desejado ou podemos obter uma subsequência $(j_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para os quais

$$|\mu_{j_{k_p}}| \left(\bigcup_n E_{j_{k_n}}\right) \leq 1 - 2\varepsilon \text{ cumpre para todo } p.$$

O processo vai terminar em no máximo n passos, onde n é o primeiro inteiro tal que

$$0 \leq 1 - n\varepsilon < 0.$$

□

## 5.8 Um resultado interessante respeito as isometrias

**Definição 5.24.** Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach. Dizemos que uma aplição $T : X \to Y$ é um **isomorfismo** de $X$ sobre $Y$, se $T$ é linear contínua bijetora. Neste caso dizemos que $X$ e $Y$ são **isomorfos**.

Mais ainda, dizemos que uma aplição $T : X \to Y$ é uma **isometria** se é um isomorfismo tal que $||Tx|| = ||x||$ para todo $x \in X$. Neste caso dizemos que $X$ e $Y$ são **isométricos**.

O seguinte resultado fornece fortes ferramentas para trabalhar com o espaço $l_\infty$.

**Teorema 5.9.** O espaço $l_\infty$ é isométrico ao espaço $C(\beta\omega)$.

*Demonstração.* Considere $T : C(\beta\omega) \to l_\infty$, definida por:

$$T(f) = f|_\omega \text{ para todo } f \in C(\beta\omega)$$

$T$ está bem definida, pois $\beta\omega$ é compacto e, portanto, $f \in C(\beta\omega)$ é limitada. $T$ é claramente linear. Também $T$ é limitada, pois dado $f \in C(\beta\omega)$, temos

$$||T(f)|| = sup_{n \in \omega} f(n) = sup_{x \in \beta\omega} f(x) = ||f||$$

pois $\omega$ é denso em $\beta\omega$. Finalmente note que $T$ é sobrejetora, pois se $(f(n))_{n \in \omega} \in l_\infty$ então $f$ pode ser estendida a $\beta\omega$, pela definição de compactificação de Stone-Čech. Portanto $T$ é uma isometria entre $C(\beta\omega)$ e $l_\infty$. □

## 5.9 Teorema de Hahn-Banach, formas geométricas

Vamos em primeiro lugar provar as forma analíticas do Teorema de Hanh-Banach.

**Teorema 5.10.** Seja $X$ um espaço de Banach e $p : X \to \mathbb{R}$ uma função em $X$ tal que

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para todo $\lambda > 0$ e $x \in X$
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in X$

Seja $G$ um subespaço vetorial de $X$ e $g : G \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então existe um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $f$ estende $g$, isto é, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$
2. $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$

*Demonstração.* Seja $P = \{h : D(h) \to \mathbb{R} :$ tal que $D(h) \subset G$ é subespaço vectorial de $X$, $h$ estende $g$ e $h(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(h)\}$. Se $h_1, h_2 \in P$, dizemos que $h_1 \leq h_2$ se $h_2$ é uma extensão de $h_1$. Ou seja $D(h_1) \subset D(h_2)$ e $h_1(x) = h_2(x)$ se $x \in D(h_1)$. Note que $P \neq \emptyset$ pois $g \in P$. Seja $Q = \{h_i\}_{i \in L} \subset P$ uma cadeia. Defina

$$h : D(h) \to \mathbb{R}, \text{ onde } D(h) = \bigcup_{i \in L} D(h_i) \text{ e } h(x) = h_j(x) \text{ se } x \in D(h_j)$$

Se $x, y \in D(h)$ então existem $i, j \in L$ tais que $x \in D(h_i)$ e $y \in D(h_j)$. Já que $Q$ é cadeia, $D(h_i) \subset D(h_j)$ ou $D(h_j) \subset D(h_i)$. Suponha $D(h_i) \subset D(h_j)$, então $x, y \in D(h_j)$. Logo $\alpha x + \beta y \in D(h_j) \subset D(h)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Portanto $D(h)$ é um subespaço vectorial de $X$.
Temos também que $h$ está bem definida. De fato, suponha que $x \in D(h_i)$ e $x \in D(h_j)$ com $i \neq j$. Então $D(h_i) \subset D(h_j)$ ou $D(h_j) \subset D(h_i)$. Em qualquer caso temos $h_i(x) = h_j(x) = h(x)$.
Sejam $x, y \in D(h)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então existe $D(h_j)$ tal que $x, y \in D(h_j)$. Logo $\alpha x + y \in D(h_j)$. Assim $h(\alpha x + y) = h_j(\alpha x + y) = \alpha h_j(x) + h_j(y) = \alpha h(x) + h(y)$. Assim $h$ é um funcional linear de $X$ que estende $g$ e tal que $h(x) = h_j(x) \leq p(x)$ pois $h_i \in P$. Portanto $h \in P$.
Note que $h_i \leq h$ para todo $h_i \in Q$, ou seja, $h$ é uma cota superior de $Q$. Pelo Lema de Zorn, $P$ tem um elemento maximal $f \in P$ (ou seja, $f$ é um funcional linear de $D(f)$ que estende $g$ e $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(f)$). Afirmamos que $D(f) = X$. Suponha que não, isto é, existe $x_0 \in X \backslash D(f)$. Vamos construir um funcional linear $h$ tal que $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$ e $h(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(h)$. De fato temos, para $x, y \in D(f)$, que:

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) = p(x+y+x_0-x_0) \leq p(x+x_0) + p(y-x_0)$$

Logo $f(y) - p(y-x_0) \leq p(x+x_0) - f(x)$ para todo $x, y \in D(f)$, ou seja $sup\{f(y) - p(y-x_0) : y \in D(f)\} \leq inf\{p(x+x_0) - f(x) : x \in D(f)\}$. Escolha um $\alpha$ tal que $sup\{f(y) - p(y-x_0) : y \in D(f)\} \leq \alpha \leq inf\{p(x+x_0) - f(x) : x \in D(f)\}$.

Vamos definir $h : D(h) \to \mathbb{R}$ como $h(x+tx_0) = f(x)+t\alpha$. $h$ é linear. De fato, sejam $x+t_1x_0$ e $y+t_2x_0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, então $h(\beta(x+t_1x_0)+(y+t_2x_0)) = f(\beta x+y)+(\beta t_1+t_2)\alpha = \beta f(x)+f(y)+\beta t_1\alpha+t_2\alpha = \beta(f(x)+t_1\alpha)+(f(y)+t_2\alpha) = \beta h(x+t_1x_0)+h(y+t_2x_0)$.
Agora, se $t>0$ e $x \in D(f)$ temos:

$$h(x+tx_0) = th(\tfrac{x}{t}+x_0) = t(f(\tfrac{x}{t})+\alpha) \leq tp(\tfrac{x}{t}+x_0) = p(x+tx_0)$$

Se $t<0$, ou seja $t=-\mu$ onde $\mu>0$, temos:

$$h(x-\mu x_0) = \mu h(\tfrac{x}{\mu}-x_0) = \mu(f(\tfrac{x}{\mu})-\alpha) \leq \mu p(\tfrac{x}{\mu}-x_0) = p(x-\mu x_0)$$

Se $t=0$ temos $h(x)=f(x) \leq p(x)$. Logo $h(x+tx_0) \leq p(x+tx_0)$ para todo $y = x+tx_0 \in D(h)$. Entã $h \in P$ e $f<h$, pois $x_0 \notin D(f)$. Mas isto contradiz o fato que $f$ é maximal. Portanto $D(f)=X$. □

**Definição 5.25.** Seja $X$ um espaço de Banach. Dizemos que $H \subset X$ é um **hiperplano** se, e somente se, é da forma:

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

onde $0 \neq f$ é um funcional linear de $X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ constante. Denotamos o hiperplano como $H = [f=\alpha]$.

**Proposição 5.2.** O hiperplano $H=[f=\alpha]$ é fechado se, e somente se, $f$ é contínua.

*Demonstração.* Se $f$ é contínua, $H = \{x \in X : f(x)=\alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$ é fechado, pois $\{\alpha\}$ é fechado em $\mathbb{R}$. Agora, suponha que $H$ é fechado. $X \backslash H$ é aberto e não vazio (do fato que $0 = f \notin H$). Seja $x_0 \in X\backslash H$, então $f(x_0) \neq \alpha$. Suponha que $f(x_0)<\alpha$.
Já que $X\backslash H$ é aberto, existe $r>0$ tal que $B_r(x_0) \subset X\backslash H$. Afirmamos que $f(x)<\alpha$ para todo $x \in B_r(x_0)$. De fato, suponha que existe $x_1 \in B_r(x_0)$ tal que $f(x_1)>\alpha$. Logo, já que $B_r(x_0)$ é convexo, temos $\{x_t = (1-t)x_1+tx_0 : t \in [0,1]\} \subset B_r(x_0)$, ou seja $f(x_t) \neq \alpha$ para todo $t \in [0,1]$. Por outro lado, se $t_0 = \frac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)} \in [0,1]$ temos $f(x_{t_0}) = f((1-t_0)x_1+t_0x_0) = (\frac{\alpha-f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)})f(x_1)+(\frac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)})f(x_0) = \alpha$ uma contradição. Assim $f(x)<\alpha$ para todo $x \in B_r(x_0)$.
Logo $f(x) = f(x_0+rz) < \alpha$ para todo $z \in B_1(0)$. Logo $f(x_0)+rf(z)<\alpha$, ou seja $f(z) < \frac{1}{r}(\alpha-f(x_0))$ para todo $z \in B_1(0)$ e, assim, $sup_{z\in B_1(0)}f(z) < \frac{1}{r}(\alpha-f(x_0)$. Se $||z||=1$, considere $x = x_0+r'z \in B_r(x_0)$ com $r'<r$, assim $f(z) < \frac{1}{r'}(\alpha-f(x_0))$ para todo $||z||=1$ e $r'<r$. Assim $sup_{||z||=1}f(z) \leq \frac{1}{r}(\alpha-f(x_0))$. Portanto $||f|| = sup_{||z||\leq 1}f(z) \leq \frac{1}{r}(\alpha-f(x_0))$, ou seja $f$ é continua.
Se $f(x_0)>\alpha$. Pelo mesmo motivo anterior, $f(x)>\alpha$ para todo $x \in B_r(x_0)$ (considere $t_0 = \frac{f(x_0)-\alpha}{f(x_0)-f(x_1)}$). Logo $f(x) = f(x_0-rz) = f(x_0)-rf(z) > \alpha$, ou seja $f(z) < \frac{1}{r}(f(x_0)-\alpha)$ para todo $z \in B_r(x_0)$. Se $||z||=1$, obtemos $f(z) \leq \frac{1}{r}(f(x_0)-\alpha)$. Portanto $||f|| = sup_{||z||\leq 1}f(z) \leq \frac{1}{r}(f(x_0)-\alpha)$, ou seja $f$ é contínua. □

**Definição 5.26.** Seja $X$ um espaço de Banach. Sejam $A$ e $B$ subconjuntos de $X$. Dizemos que um hiperplano $H = [f = \alpha]$ **separa** $A$ e $B$ se, e somente se,

$$f(x) \leq \alpha \text{ para todo } x \in A \text{ e } f(y) \geq \alpha \text{ para todo } y \in B.$$

Dizemos que $H$ **separa estritamente** $A$ e $B$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \text{ para todo } x \in A \text{ e } f(y) \geq \alpha + \varepsilon \text{ para todo } y \in B$$

**Lema 5.10.** Seja $C \subset X$ aberto convexo tal que $0 \in C$. Para cada $x \in X$ definimos:

$$p(x) = inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$$

($p$ é chamado de funcional de Minkowski de C). Então $p$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in X$
3. existe uma constante $M$ tal que $0 \leq p(x) \leq M||x||$ para todo $x \in X$
4. $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$

*Demonstração.* Seja $p : X \to [0, \infty[$, dado por $p(x) = inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$. Então:

1. Seja $\lambda > 0$. Temos: $p(\lambda x) = inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}(\lambda x) \in C\} = \{\alpha > 0 : \lambda(\alpha^{-1}x) \in C\} = \lambda\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\} = \lambda p(x)$.

3 Existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset C$ pois $C$ é aberto. Seja $x \in X$. Então $\frac{rx}{2||x||} \in B_r(0) \subset C$, ou seja $\frac{2||x||}{r} \in \{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$. Portanto $0 \leq p(x) \leq M||x||$, onde $M = \frac{2}{r}$.

4 Suponha $x \in C$. Existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset C$ pois $C$ é aberto. Tome $\varepsilon > 0$ de tal maneira que $\varepsilon||x|| < r$ (por exemplo $\varepsilon = \frac{r}{2||x||}$). Assim $(1+\varepsilon)x \in B_r(x) \subset C$. Logo $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Agora, se $p(x) < 1$ então existe $\alpha \in ]0,1[$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$, e assim $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$ (pois $C$ é convexo).

2 Sejam $x, y \in X$ e seja $\varepsilon > 0$. Temos $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$, pois $p(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}) = \frac{p(x)}{p(x)+\varepsilon} < 1$ e $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$. Pelo mesmo motivo $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Já que $C$ é convexo então $\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ para todo $t \in [0,1]$. Escolhemos $t_0 = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in [0,1]$, logo

$$\frac{t_0 x}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t_0)y}{p(y)+\varepsilon} = \frac{(p(x)+\varepsilon)x}{(p(x)+p(y)+2\varepsilon)(p(x)+\varepsilon)} + \frac{(p(y)+\varepsilon)y}{(p(x)+p(y)+2\varepsilon)(p(y)+\varepsilon)} = \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C.$$

Logo $p(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}) = \frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} < 1$, ou seja $p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

□

**Lema 5.11.** Sejam $C \subset X$ aberto, convexo, não vazio e $x_0 \in X$ com $x_0 \notin C$. Então existe $f \in X^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $X \in C$. Em particular, o hiperplano $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ e $C$.

*Demonstração.* Suponha que $0 \in C$. Pelo lema anterior, podemos definir o funcional de Minkowski para $C$. Considere o subespaço linear $G = \mathbb{R}x_0$ e o funcional linear $g : G \to \mathbb{R}$ definida por $g(tx_0) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Note que $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Dado $x \in G$, isto é, $x = tx_0$. Se $t > 0$ então, pela caracterição de $C$ por seu funcional de Minkowski, $1 \leq p(x_0)$. Logo $g(x) = g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0) = p(x)$. Se $t \leq 0$, temos $g(x) = g(tx_0) = t \leq 0 \leq p(tx_0) = p(x)$.
Logo, pelo Teorema de Hahn-Banach (forma analítica), existe um funcional linear de $X$ que estende $g$ e tal que: $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Em particular $f(x_0) = g(x_0) = 1$ e $f$ é contínua, pela parte (3) do lema anterior. Logo, pela caracterização de $C$ feita no lema anterior, temos $f(x) \leq p(x) < 1 = f(x_0)$ para todo $x \in C$.
Para o caso geral, já que $C$ é não vazio, existe $z \in C$. Logo $0 \in C - z$, ou seja $C - z$ é não vazio. Como $C$ é aberto, $C - z$ é aberto. De fato, seja $c \in C - z$, logo $c = b - z$ com $b \in C$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B_r(b) \subset C$. Assim $B_r(b) - z \subset C - z$. Afirmamos que $B_r(b) - z = B_r(b - z = c)$, pois assim $B_r(c) \subset C - z$ e $C - z$ é aberto. Se $a \in B_r(b) - z$, então $a = v - z$ com $v \in B_r(b)$, ou seja $||v - b|| < r$. Logo $||a - c|| = ||v - z - b + z|| = ||v - b|| < r$, ou seja $a \in B_r(c)$. Reciprocamente se $a \in B_r(c)$, temos $||a - c|| = ||a - b + z|| = ||(a + z) - b|| < r$. Logo $v = a + z \in B_r(b)$, ou seja $a = v - z \in B_r(b) - z$ pois $v \in B_r(b)$.
Como $C$ é convexo, $C - z$ é convexo. De fato, sejam $x, y \in C - z$ e $t \in [0, 1]$. Logo $x = x_1 - z$ e $y = x_2 - z$ para alguns $x_1, x_2 \in C$. Logo

$$
\begin{gathered}
tx + (1-t)y = t(x_1 - z) + (1-t)(x_2 - z) = (tx_1 + (1-t)x_2) + (-tz - z + tz) = \\
(tx_1 + (1-t)x_2) - z \in C - z
\end{gathered}
$$

pois $tx_1 + (1-t)x_2 \in C$ ($C$ é convexo). Note que $x_0 - z \notin C - z$. Logo, pelo demostrado acima temos $f(y) < f(x_0 - z)$ para todo $y \in C - z$. Logo $y = x - z$ com $x \in C$, e assim $f(y) = f(x - z) = f(x) - f(z) < f(x_0) - f(z)$. Portanto $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$. □

**Proposição 5.3** (Teorema de Hanh-Banach, primeira forma geométrica)**.** Seja $X$ um espaço de Banach. Sejam $A$ e $B$ subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos, sendo pelo menos um deles aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa $A$ e $B$.

*Demonstração.* Seja $C = A - B$, e assim $C$ é convexo, pois $A$ e $B$ são convexos. De fato, sejam $x, y \in C = A - B$ e $t \in [0, 1]$. Então $x = a_1 - b_1$ e $y = a_2 - b_2$, com $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. Logo $tx + (1-t)y = t(a_1 - b_1) + (1-t)(a_2 - b_2) = (ta_1 + (1-t)a_2) - (tb_2 + (1-t)b_2) \in A - B = C$, pois $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$ e $tb_2 + (1-t)b_2 \in B$. Note que $C$ é não vazio, pois $A$ e $B$ são não vazios. Já que $A$ é aberto, $A - b$ é aberto para todo $b \in B$. Assim $C = \bigcup_{b \in B} A - b$ é aberto.
$0 \notin C$. Suponha que sim. Então $0 = a - b$ para alguns $a \in A$ e $b \in B$. Assim $a = b \in A \cap B$, o

que contradiz o fato que $A$ e $B$ são disjuntos. Assim, pelo lema anterior, existe $f \in X^*$ tal que $f(z) < f(0) = 0$ para todo $z \in C = A - B$, ou seja $f(a) < f(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Fixe um $\alpha$ tal que $f(a) \leq sup_{a \in A} f(a) \leq \alpha \leq inf_{b \in B} f(b) \leq f(b)$. Portanto, o hiperplano $[f = \alpha]$ separa $A$ e $B$. $\square$

**Teorema 5.11** (Teorema de Hanh-Banach, segunda forma geométrica)**.** Sejam $X$ um espaço de Banach e $A$ e $B$ subconjuntos convexos não vazios tais que $A \cap B = \emptyset$. Se $A$ é fechado e $B$ é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa estritamente $A$ e $B$.

*Demonstração.* Considere $C = A - B$. Já vimos que $C$ é convexo e $0 \notin C$. Afirmamos que $C$ é fechado. De fato, seja $x \in \overline{C}$. Então $x = lim(x_n)$ com $x_n \in C$, ou seja $x_n = y_n - z_n$ onde $y_n \in A$ e $z_n \in B$, para cada $n \in \omega$. Logo existe uma subsequencia $(z_{n_k})_{k \in \omega}$ tal que $z_{n_k} \to z \in B$, pois $B$ é compacto. Temos também que $x_{n_k} \to x$, e assim $y_{n_k} = x_{n_k} + z_{n_k} \to x + z = y$ e $y \in A$ pois $A$ é fechado. Portanto $x = y - z \in C$. Logo $X \backslash C$ é aberto, ou seja existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \cap C = \emptyset$. Logo, pela primeira forma geométrica, existe $0 \neq f \in X^*$ tal que

$$f(x - y) \leq f(rz) \text{ para todo } x \in A,\ y \in B \text{ e } z \in B_1(0)$$

Note que se $z \in B_1(0)$ então $-z \in B_1(0)$. Logo $f(x-y) \leq f(r(-z)) = -rf(z) \leq -rsup_{||z|| \leq 1} f(z) = -r||f||$ para todo $x \in A$ e $y \in B$. Tomando $\varepsilon = \frac{r}{2}||f||$, temos $f(x-y) = f(x) - f(y) \leq -2\varepsilon$, ou seja $f(x) + \varepsilon \leq f(y) - \varepsilon$ para todo $x \in A$ e $y \in B$. Considere $sup\{f(x) + \varepsilon : x \in A\} \leq \alpha \leq inf\{f(y) - \varepsilon : y \in B\}$. Então hiperplano $H = [f = \alpha]$ separa estritamente $A$ e $B$. $\square$

CAPÍTULO

6

# UM ESPAÇO DE BANACH QUE NÃO É REFLEXIVO MAS É ISOMORFICAMENTE ISOMÉTRICO AO SEU SEGUNDO DUAL

Considere a seguinte aplicação $j : X \to X^{**}$, onde $jx : X^* \to \mathbb{R}$ é dada por $jx(f) = f(x)$. Chamamos $j$ de mapa canônico. $j$ é linear e isométrica, ou seja, $E$ é isomorficamente isométrico a $j(E)$. Se $j$ também é sobrejetora diz-se que $X$ é **reflexivo**. O objetivo nesta seção é apresentar um espaço que é isomorficamente isométrico a seu segundo dual, mas não é reflexivo (isto torna mais natural a definição de reflexividade a partir do mapa $j$).
Como principal referência usamos (MORRISON, 2001). Como referência original do espaço aqui construído usamos (JAMES, 1951).

## 6.1 O espaço de James

Seja $P$ a família de todas as sequências finitas crescentes em $\omega$, com uma quantidade ímpar de elementos. Dado $s = \{p_1, p_2, ..., p_{2n+1}\} \in P$ e $x \in c_0$, considere:

$$||x||_s = \sqrt{((x_{p_1} - x_{p_2})^2 + (x_{p_3} - x_{p_4})^2 + ... + x_{p_{2n+1}}^2)}$$

Claramente $||x||_s \geq 0$ e $||\alpha x||_s = |\alpha|||x||_s$ para cada $s \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Ademais, pela desigualdade triangular da norma euclidiana, para cada $s \in P$ temos:

$$\begin{aligned} ||x+y||_s &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}((x_{p_{2i-1}} + y_{p_{2i-1}}) - (x_{p_{2i}} + y_{p_{2i}}))^2 + (x_{p_{2n+1}} + y_{p_{2n+1}})^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}((x_{p_{2i-1}} - x_{p_{2i}}) + (y_{p_{2i-1}} - y_{p_{2i}}))^2 + (x_{p_{2n+1}} + y_{p_{2n+1}})^2} \\ &\leq ||x||_s + ||y||_s \end{aligned}$$

Definimos o seguinte conjunto:

$$J = \{x = (x_n)_{n\in\omega} \in c_0 : \ \sup_{s\in P} ||x||_s < \infty\}$$

$J$ é um espaço vetorial com a soma e o produto escalar usuais de sequências, pois $c_0$ é espaço vetorial com a soma e produto escalar e, se $x, y \in J$, temos

$$||x+y||_s \leq ||x||_s + ||y||_s \leq \sup_{s\in P} ||x||_s + \sup_{s\in P} ||y||_s$$

para cada $s \in P$. Assim

$$\sup_{s\in P} ||x+y||_s \leq \sup_{s\in P} ||x||_s + \sup_{s\in P} ||y||_s < \infty.$$

Denotemos $||x|| = \sup_{s\in P} ||x||_s$. Então $||\cdot||$ é uma norma sobre $J$. Pelo fato anterior, $||x+y|| = \sup_{s\in P} ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, ou seja, $||\cdot||$ satisfaz a desigualdade triangular.
Dado $x \in J$, $||x|| \geq 0$ pois $||x||_s \geq 0$ para cada $s \in P$. Também, dado $x \in J$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $||\alpha x|| = sup_{s\in P}||\alpha x||_s = |\alpha| sup_{s\in P}||x||_s = |\alpha| ||x||$. Se $x = 0$ então, claramente, $||x|| = 0$. Agora, se $x \in J$ com $x \neq 0$. Considere $n_0 = \min\{n : x_n \neq 0\}$ e $s = \{n_0, n_0+1, n_0+2\}$. Se $||x||_s \neq 0$, então $||x|| \neq 0$. Se $||x||_s = 0$, então $(x_{n_0} - x_{n_0+1})^2 + x_{n_0+2}^2 = 0$. Logo $x_{n_0+2} = 0$ e $x_{n_0} = x_{n_0+1}$. Se $t = \{n_0+1, n_0+2, n_0+3\}$ então $||x||_t = \sqrt{x_{n_0+1}^2 + x_{n_0+3}^2} > 0$ e, assim, $||x|| > 0$.
Adicionalmente $J$ é um espaço de Banach pelo seguinte resultado

**Lema 6.1.** *$J$ é um espaço métrico completo*

*Demonstração.* Dado $x \in J$, denotemos por $x'$ a sequência $x$ onde as duas primeiras coordenadas são zeros, ou seja, se $x = (z_n)_{n\in\omega}$ então $x' = (0, 0, z_3, z_4, ...)$. Seja $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de Cauchy em $J$ (denotemos $x_n = (x_n^j)_{j\in\omega}$). Vamos denotar $||\cdot||_\infty$ a norma de $c_0$. Se consideramos os conjuntos $s_n = \{1, 2, n\} \in P$ onde $n \geq 3$, temos $||x'||_\infty = \sup_{n\geq 3} |x_n| = \sup_{n\geq 3} ||x'||_{s_n} \leq ||x'|| \leq ||x||$, para cada $x \in J$. Então $(x_n')_{n\in\omega}$ é Cauchy em $c_0$, pois $(x_n)_{n\in\omega}$ é Cauchy em $J$. Logo existe $x' \in c_0$ tal que $x_n \to x'$ quando $n \to \infty$ (em particular a convergência é coordenada a coordenada). Agora, seja $s \in P$ dado por $s = \{1, 3, 4\}$. Então

$$||x_n - x_m||^2 \geq ||x_n - x_m||_s^2 = [(x_n^1 - x_m^1) - (x_n^3 - x_m^3)]^2 + (x_n^4 - x_m^4)^2.$$

Já que $(x_n^3)_{n\in\omega}$ e $(x_n^4)_{n\in\omega}$ são de Cauchy, $(x_n^1)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy, pois $||x_n - x_m||^2 \geq (x_n^1 - x_m^1)^2$ se $n, m \to \infty$. Similarmente, se tomamos $s = \{2, 3, 4\}$ então $(x_n^2)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy. Assim $(x_n)_{n\in\omega}$ é convergente (coordenada a coordenada) a $x \in c_0$.
Agora, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \omega$ tal que

$$||x_n||_s - ||x_m||_s \leq ||x_n - x_m||_s \leq ||x_n - x_m|| < \varepsilon$$

para qualquer $n, m \geq N$ e $s \in P$. Considere $M = \sup\{||x_m|| : m \in \omega\}$ e $s = \{p_1, p_2, ..., p_{2j+1}\}$. Tomando $\varepsilon = 1$, por exemplo, $||x_n|| \leq 1 + ||x_m||_s \leq 1 + ||x_m|| \leq 1 + M$, para todo $n \geq N$. Logo

$$\sqrt{(x_n^{p_1} - x_n^{p_2})^2 + \ldots + (x_n^{p_{2j-1}} - x_n^{p_{2j}})^2 + (x_n^{p_{2j+1}})^2} \leq 1 + M$$

Se $n \to \infty$ então $||x||_s \leq 1 + M$ para qualquer $s \in P$. Logo $||x|| \leq 1 + M$, ou seja, $x \in J$. Também, do fato que $||x_n - x_m||_s < \varepsilon$ para qualquer $s \in P$, se $m \to \infty$ então $||x_n - x|| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Portanto $x_n \to x$ em $J$. □

Chamamos o espaço $J$ de **espaço de James**.

## 6.2 Bases em espaços reflexivos

**Definição 6.1.** Seja $X$ um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em $X$ é dita uma **base** para $X$ se, e somente se, cada $x \in X$ tem uma única representação $x = \sum_{n\in\omega} \alpha_n x_n$, onde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ e a série converge (a $x$) na norma de $X$.

**Definição 6.2.** Seja $X$ um espaço de Banach. Uma base $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma **base de Schauder** para $X$ se, e somente se, os **coeficientes funcionais** $f_n : X \to \mathbb{R}$ dados por $f_n(x) = \alpha_n$ onde $x = \sum_{n\in\omega} \alpha_n x_n$ são contínuos para cada $n \in \omega$.

Pelo seguinte resultado podemos omitir especificar se uma sequência é de Schauder.

**Teorema 6.1.** Toda base em um espaço de Banach é uma base de Schauder.

*Demonstração.* Ver (MORRISON, 2001), Proposição 5.3, página 224. □

Note também que todo espaço com uma base é separável (considere todas as combinações lineares finitas com coeficientes racionais de elementos da base).

**Definição 6.3.** Seja $X$ um espaço de Banach e $X^*$ seu espaço dual. Sejam $(x_n)_{n\in\omega}$ e $(x_n^*)_{n\in\omega}$ sequências de elementos de $X$ e $X^*$ respectivamente. Dizemos que $(x_n, x_n^*)_{n\in\omega}$ é um **sistema biortogonal** se, e somente se, $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \omega$.

No caso de ter definidos um sistema biortogonal, chamamos de operadores de expansão as funções $u_n : X \to X$ dadas por $u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i$ para cada $n \in \omega$.

**Observação 6.1.** Se $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma base e $(x_n, x_n^*)_{n\in\omega}$ é um sistema biortogonal, então para cada $n, m \in \omega$ temos $x_m^*(x_n) = \delta_{mn} = f_m(x_n)$. Assim $x_n^* = f_n$ para todo $n \in \omega$, ou seja, os coeficientes funcionais de uma base dada são únicos.

**Teorema 6.2.** Seja $(x_n, x_n^*)_{n\in\omega}$ um sistema biortogonal para $X$. Se $(x_n)_{n\in\omega}$ é base então

$$lim_{n\to\infty} u_n(x) = x$$

para cada $x \in X$.

*Demonstração.* Pela observação acima, $x_n^* = f_n$ para cada $n \in \omega$. Logo, para cada $x \in X$, temos $x = \sum_{n\in\omega} f_n(x)x_n = \sum_{n\in\omega} x_n^*(x)x_n = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i = lim_{n\to\infty} u_n(x)$. □

**Definição 6.4.** Seja $X$ um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\omega}$ uma base para $X$. Para cada $n \in \omega$ considere $X^n = \langle (x_i)_{i\geq n+1} \rangle$ e $||x^*||_n = ||x^*|_{X^n}||$ para cada $x^* \in X^*$. Dizemos que $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma **base contrátil** de $X$ se, e somente se, $lim_{n\to\infty} ||x^*||_n = 0$ para cada $x^* \in X^*$.

Equivalentemente, $(x_n)_{n\in\omega}$ é contrátil se, e somente se,

$$lim_{n\to\infty} \sup\{|x^*(y)| : y \in X^n \ e \ ||y|| \leq 1\} = 0$$

para cada $x^* \in X^*$ (pela definição da norma no espaço $X^*$).

**Proposição 6.1.** Uma base $(x_n)_{n\in\omega}$ é contrátil se, e somente se, $lim_{n\to\infty} \sup\{|x^*(x - u_n(x))| : ||x|| \leq 1\} = 0$, para cada $x^* \in X^*$.

*Demonstração.* Se $(x_n)_{n\in\omega}$ é contrátil, pelo comentário acima $lim_{n\to\infty} \sup\{|x^*(y)| : y \in X^n \ e \ ||y|| \leq 1\} = 0$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \omega$ tal que $|x^*(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in X^n$ com $||y|| \leq 1$ e $n \geq n_1$. Dado $x \in X$ com $||x|| \leq 1$, existe $n_2 \in \omega$ tal que $||x - u_n(x)|| \leq 1$ para todo $n \geq n_2$ (pois $x = lim_{n\in\omega} u_n(x)$). Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, $|x^*(x - u_n(x))| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ (pois $||x - u_n(x)|| \leq 1$ e $x - u_n(x) \in X^n$). Assim $lim_{n\to\infty} \sup\{|x^*(x - u_n(x))| : ||x|| \leq 1\} = 0$.
Reciprocamente se $lim_{n\to\infty} \sup\{|x^*(x - u_n(x))| : ||x|| \leq 1\} = 0$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $|x^*(x - u_n(x))| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ com $||x|| \leq 1$ e $n \geq n_0$. Dado $y \in X^n$, com $n \geq n_0$ e $||y|| \leq 1$. Então $y = y - u_n(y)$ e, assim, $|x^*(y)| < \varepsilon$. Portanto $lim_{n\in\omega} \sup\{|x^*(y)| : y \in X^n \ e \ ||y|| \leq 1\} = 0$, ou seja, $(x_n)_{n\in\omega}$ é contrátil. □

**Teorema 6.3.** Seja $X$ um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\omega}$ uma base para $X$ com coeficientes funcionais $(x_n^*)_{n\in\omega}$. Então $(x_n)_{n\in\omega}$ é contrátil se, e somente se, $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é uma base para $X^*$. Nesse caso, a sequência $(j(x_n))_{n\in\omega}$ é formada pelos coeficientes funcionais de $(x_n^*)_{n\in\omega}$.

*Demonstração.* Suponha que $(x_n)_{n\in\omega}$ é contrátil. Para qualquer $x^* \in X^*$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= lim_{n\to\infty} \sup\{|x^*(x - u_n(x))| : ||x|| \leq 1\} \\ &= lim_{n\to\infty} \sup\{|x^*(x) - x^*(u_n(x))| : ||x|| \leq 1\} \\ &= lim_{n\to\infty} \sup\{|x^*(x) - \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*(x)| : ||x|| \leq 1\} \\ &= lim_{n\to\infty} ||x^* - \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*|| \\ &= lim_{n\to\infty} ||x^* - \sum_{i=1}^{n} j(x_i)(x^*)x_i^*|| \end{aligned}$$

Ou seja, $x^* = \sum_{n\in\omega} j(x_i)(x^*)x_i^*$. Portanto $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é base para $X^*$ e do fato que $j(x_i)(x_j^*) = x_j^*(x_i) = \delta_{ji}$, $(j(x_n)$ são os coeficientes funcionais de $(x_n^*)_{n\in\omega}$.
Reciprocamente, suponha que $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é uma base para $X^*$. Seja $(x_n^{**})_{n\in\omega}$ a sequência de coeficientes funcionais para a base $(x_n^*)_{n\in\omega}$. Note que $(x_n^{**}) \subset X^{**}$. Se $x^* \in X^*$, então $x^* = \sum_{n\in\omega} x_n^{**}(x^*)x_n*$ e, assim, $j(x_i)(x^*) = x^*(x_i) = \sum_{n\in\omega} x_n^{**}(x^*)x_n*(x_i) = x_i^{**}(x^*)$, ou seja, $j(x_i) = x_i^{**}$ para todo $i \in \omega$. Também, para cada $x^* \in X^*$, temos:

$$\begin{aligned}
0 &= lim_{n\to\infty}||x^* - \sum_{i=1}^{n} j(x_i)(x^*)x_i^*|| \\
&= lim_{n\to\infty}\sup\{|x^*(x) - \sum_{i=1}^{n} j(x_i)(x^*)x_i^*(x)| : ||x|| \leq 1\} \\
&= lim_{n\to\infty}\sup\{|x^*(x) - \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*(x)| : ||x|| \leq 1\} \\
&= lim_{n\to\infty}\sup\{|x^*(x - \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i)| : ||x|| \leq 1\} \\
&= lim_{n\to\infty}\sup\{|x^*(x - u_n(x))| : ||x|| \leq 1\}
\end{aligned}$$

Portanto $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma base contrátil para $X$. □

**Definição 6.5.** Seja $X$ um espaço de Banach. Uma base $(x_n)_{n\in\omega}$ é dita **completamente limitada** se, e somente se, dado $(\alpha_n)_{n\in\omega} \subset \mathbb{R}$ para o qual temos $\sup\{||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| : n \in \omega\} < \infty$, então $\sum_{n\in\omega} \alpha_n x_n \in X$.

**Teorema 6.4.** Seja $(x_n, x_n^*)$ sistema biortogonal de um espaço de Banach $X$. Se $(x_n)_{n\in\omega}$ uma base contrátil de $X$. Então $(x_n^*)$ é uma base completamente limitada de $X^*$

*Demonstração.* Seja $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de escalares tais que $\sup\{||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*|| : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$, considere $y_n^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*$. Para cada $i \in \omega$ temos

$$lim_{n\to\infty} y_n^*(x_i) = lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^*(x_i) = \alpha_i$$

e também $\sup\{||y_n^*|| : n \in \omega\} = \sup\{||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*|| : n \in \omega\} < \infty$. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu e o Teorema 5.4 existe $y^* \in X^*$, com $||y^*|| \leq \sup\{||y_n^*|| : n \in \omega\}$ tal que exite uma subsequência $(y_{n_k})_{k\in\omega}$ tal que $y_{n_k}^* \to y^*$ na topologia fraca$^*$. Já que $(x_n)_{n\in\omega}$ é base contrátil,

$(x_n^*)_{n\in\omega}$ é base de $X$ e, assim,

$$\begin{aligned} y^* &= lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} y^*(x_j)x_j^* \\ &= lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} (lim_{k\to\infty} y_{n_k}^*(x_j))x_j^* \\ &= lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} (lim_{n\to\infty} y_n^*(x_j))x_j^* \\ &= lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j^* \end{aligned}$$

Portanto $\sum_{n\in\omega}\alpha_n x_n^* \in X^*$, como queríamos. □

**Definição 6.6.** Seja $X$ um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de elementos de $X$. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma **base fraca** para $X$ se, e somente se, para todo $x \in X$ existe uma única representação de $x$ na forma $x = \sum_{n\in\omega}\alpha_n x_n$, onde a série converge na topologia fraca de $X$.

Dizemos que uma base é uma **base fraca de Schauder** se os coeficientes funcionais são contínuos na topologia fraca. Analogamente ao caso da norma de $X$ temos un resultado para a topologia fraca.

**Teorema 6.5.** Toda base fraca em um espaço de Banach é uma base fraca de Schauder.

*Demonstração.* Ver (MORRISON, 2001), Proposição 52, página 22. □

**Definição 6.7.** Seja $X$ um espaço de Banach. Dizemos que a sequência $(x_n^*)_{n\in\omega}$ em $X^*$ é uma **base fraca**$^*$ para $X^*$ se, e somente se, para qualquer $x^* \in X^*$ existe uma única sequência $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ de escalares tais que $x^* = lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^*$, onde o limite acontece na topologia fraca$^*$. Ou seja, para cada $x \in X$ temos $x^*(x) = \sum_{n\in\omega}\alpha_n x_n^*(x)$. Ademais, os coeficientes funcionais pertencem ao dual fraco$^*$ de $X^*$, ou seja, o próprio $X$.

Temos a seguinte equivalência entre as bases em $X$ e bases fraca$^*$ em $X^*$.

**Teorema 6.6.** Seja $X$ um espaço de Banach e $(x_n, x_n^*)_{n\in\omega}$ uma sequência biortogonal. Então $(x_n^*)$ é una base fraca$^*$ (de Schauder) para $X^*$ (com coeficientes funcionais dados por $(x_n)_{n\in\omega}$) se, e somente se, $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma base para $X$

*Demonstração.* Suponha que $(x_n)_{n\in\omega}$ é base para $X$. Para $x^* \in X^*$ e $x \in X$ temos

$$(x^* - \textstyle\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*)(x) = x^*(x - \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i)$$

converge para 0 se $n \to \infty$, pois $(x_n)_{n\in\omega}$ é base. Logo, temos para cada $x^* \in X^*$ que $x^* = \sum_{n\in\omega} x^*(x_n)x_n^*$ ($x^*(x_n) = j(x_n)(x^*)$ são os coeficientes funcionais) onde a convergência é na topologia fraca$^*$. Para mostrar que a representação é única, é suficiente mostrar que se $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de escalares tais que $\sum_{n\in\omega} \alpha_n x_n^*(x) = 0$ (a convergência é na topologia fraca$^*$), então cada $\alpha_n$ é 0. Pela biortogonalidade do sistema $(x_n, x_n^*)_{n\in\omega}$ obtemos o resultado. Logo $(x_n^*, x_n)$ é base fraca$^*$ para $X^*$.
Reciprocamente, suponha que $(x_n^*, x_n)$ é base fraca$^*$ para $X^*$. Assim, dado qualquer $x \in X$ e $x^* \in X^*$ temos $x^*(x) = \sum_{n\in\omega} x^*(x_n)x_n^*(x) = x^*(\sum_{n\in\omega} x_n^*(x)x_n)$. Logo $x = \sum_{n\in\omega} x_n^*(x)x_n$, para cada $x \in X$ e pela biortoganlidade do sistema $(x_n^*, x_n)_{n\in\omega}$ tal representação é única. Logo $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma base fraca de $X$ e, assim, $(x_n)_{n\in\omega}$ é base de $X$. □

**Corolário 6.1.** Seja $X$ um espaço de Banach reflexivo e $(x_n, x_n^*)$ é um sistema biortogonal. Então $(x_n)_{n\in\omega}$ é base para $X$ se, e somente se, $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é uma base para $X^*$.

*Demonstração.* Ver (MORRISON, 2001), Proposição 6.2, página 286 e do fato que em um espaço reflexivo as topologias fraca e fraca$^*$ no espaço dual coincidem. □

**Teorema 6.7** (de James)**.** Seja $X$ um espaço de Banach com base $(x_n)_{n\in\omega}$. Se $X$ é reflexivo então $(x_n)_{n\in\omega}$ é contrátil e completamente limitada.

*Demonstração.* Seja $X$ é reflexivo com base $(x_n)_{n\in\omega}$ e coeficientes funcionais $(x_n^*)_{n\in\omega}$. Pelo Corolário 6.1 $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é base para $X^*$, e pelo Teorema 6.3 $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma base contrátil para $X$. Os coeficientes funcionais de $(x_n^*)_{n\in\omega}$ (que são $x_n$, ou $j(x_n)$) formam uma base para $X$, logo $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é uma base contrátil para $X^*$, novamente pelo Teorema 6.3. Portanto, pelo Teorema 6.4 concluímos que $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é completamente limitada. □

## 6.3 O espaço de James é isomorficamente isométrico ao seu segundo dual

Vamos ver agora (usando o teorema anterior) que $J$ não é reflexivo.

**Definição 6.8.** Seja $X$ um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\omega}$ uma base para $X$. Suponha que $(k_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos com $k_0 = 0$. Dizemos que uma sequência não nula em $X((y_n)_{n\in\omega})$ da forma

$$y_n = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i^*(y_n)x_i, \text{ para todo } n \geq 1$$

é uma **sequência de blocos básica** com respeito a $(x_n)_{n\in\omega}$

**Proposição 6.2.** Seja $X$ um espaço de Banach e $(x_n)$ uma base para $X$. Se toda sequência de blocos básica com respeito a $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a zero fracamente então $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma base contrátil.

*Demonstração.* Suponha que $(x_n)_{n\in\omega}$ não seja contrátil. Então existe $x^* \in X^*$ tal que $||x^*||_n$ não converge para 0 quando $n \to \infty$. Ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que $||x^*||_n > \varepsilon$ para uma quantidade infinita de $n \in \omega$. Assim, podemos escolher $n_1$ com $||x^*||_{n_1} > \varepsilon$. Pela definição da norma $||\cdot||_n$, existe $z_1 \in X^{n_1}$ com $||z_1|| = 1$ e $|x^*(z_1)| > \varepsilon$. Agora, do fato que $z_1 = lim_{n\to\infty} u_n(z_1)$ podemos escolher $n_2$ tal que $||z_1 - u_{n_2}(z_1)|| < \varepsilon(2||x^*||)^{-1}$ e note que

$$|x^*(u_{n_2}(z_1))| \geq |x^*(z_1)| - |x^*(z_1 - u_{n_2}(z_1))| \geq |x^*(z_1)| - ||x^*||||z_1 - u_{n_2}(z_1)|| > \varepsilon - \tfrac{\varepsilon}{2} = \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Continuando com a seleção anterior, obtemos uma sequência de blocos básica $(y_k)_{k\in\omega}$ dada por $y_k = u_{n_{2k}}(z_k)$ e com a propriedade $|x^*(y_k)| > \frac{\varepsilon}{2}$. Ou seja, a sequência $(y_k)_{k\in\omega}$ não converge fracamente para 0. □

**Definição 6.9.** Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $(x_n)_{n\in\omega}$ e $(y_n)_{n\in\omega}$ sequências de $X$ e $Y$ respectivamente. Dizemos que $(x_n)_{n\in\omega}$ é **equivalente** a $(y_n)_{n\in\omega}$ se, e somente se, para qualquer sequência de escalares $(\alpha_n)_{n\in\omega}$, a série $\sum_{n\in\omega}\alpha_n x_n$ converge se, e somente se, a série $\sum_{n\in\omega}\alpha_n y_n$ converge.

**Definição 6.10.** Seja $X$ um espaço de Banach. Dizemos que $X$ é em **algumas partes reflexivo** se todo subespaço fechado de dimesão infinita de $X$ contém um subespaço reflexivo de dimensão infinita.

**Teorema 6.8.** O espaço de James $J$ é em algumas partes reflexivo. Na verdade todo subespaço fechado de dimensão infinita de $J$ contém uma cópia isomorfa a $l_2$.

*Demonstração.* Ver (MORRISON, 2001), Teorema 5.16, página 257. □

**Teorema 6.9.** O espaço de James $J$ não é reflexivo.

*Demonstração.* Considere a base canônica $(e_n)_{n\in\omega}$ (onde cada $e_n$ tem 1 na coordenada $n$ e 0 nas demais). Então $(e_n)_{n\in\omega}$ é uma base contrátil para $J$. Suponha que não. Então existe uma sequência de bloco básica limitada $(y_n)_{n\in\omega}$ com respeito a $(e_n)_{n\in\omega}$ que não converge a zero fracamente. Logo, existe $\varepsilon > 0$ e $x^* \in J^*$ tal que $|x^*(y_n)| > \varepsilon$. Pelo teorema anterior, as sequências $(y_{2n})_{n\in\omega}$ e $(y_{2n-1})_{n\in\omega}$ são equivalentes aos vetores unitários básicos de $l_2$. Então as séries $\sum_{n\in\omega}\frac{1}{2n}y_{2n}$ e $\sum\frac{1}{2n-1}y_{2n-1}$ convergem, pois $\sum_{n\in\omega}\frac{1}{2n}e'_i$ e $\sum_{n\in\omega}\frac{1}{n}e'_i$ são convergentes em $l_2$, onde $(e'_n)_{n\in\omega}$ é a base de $l_2$. Assim $y = \sum_{n\in\omega}\frac{1}{n}y_n$ converge em $J$, pois $\sum_{n\in\omega}\frac{1}{n}y_n = (\sum_{n\in\omega}\frac{1}{2n}y_{2n} + \sum_{n\in\omega}\frac{1}{2n-1}y_{2n-1})$, . Mas com isto, $x^*(y) = \sum_{n\in\omega}\frac{1}{n}x^*(y_n) \geq \sum_{n\in\omega}\frac{1}{n}\varepsilon = \infty$, um absurdo. Logo $(e_n)_{n\in\omega}$ é uma base contrátil para $J$.
A base canônica não é completamente limitada (e com isto provamos que $J$ não é reflexivo, pelo Teorema 6.2). De fato, considere $x_n = \sum_{i=1}^n e_i$ para cada $n \in \omega$ e suponha que $x_n \to x$ em $J$, ou seja, existe $x \in J$ tal que $||x_n - x|| \to 0$ quando $n \to \infty$. Lembrando a notação: para cada sequência $y = (y_n)$, $y'$ é a mesma sequência $y$ mas com $y_1 = y_2 = 0$. Então $||x'_n - x'||_\infty \to 0$ em $c_0$, pois $||x'_n - x'||_\infty \leq ||x_n - x||$. Mas isto é uma contradição, pois $(x_n)_{n\in\omega}$ não é convergente em $c_0$ (pois não é de Cauchy ). Portanto, $(e_n)_{n\in\omega}$ não é completamente limitada. □

**Definição 6.11.** Seja $X$ um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\omega}$ uma base para $X$. Dizemos que $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma **base ortogonal** se, e somente se, para qualquer $n, p \in \omega$ temos $||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{n+p} \alpha_i x_i||$ para qualquer sequência de escalares $(\alpha_n)_{n\in\omega}$.

Finalmente vamos ver que o espaço $J$ é isomorficamente isométrico (sendo a isometria distinta da natural $j$, pois $J$ não é reflexivo) a seu segundo dual $J^{**}$. O resultado é praticamente imediato, a partir do seguinte resultado.

**Teorema 6.10.** Seja $X$ um espaço de Banach com uma base $(x_n)_{n\in\omega}$ que é ortogonal e contrátil. Se $x^{**} \in X^{**}$ então $||x^{**}|| = \lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n} F_i x_i||$, onde $F_i = x^{**}(x_i^*)$. Além disso, se temos uma sequência $\{F_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n} F_i x_i|| < \infty$, então $x^{**} \in X^{**}$ se definimos $x^{**}(x^*) = \sum_{n\in\omega} F_n x_i^*$, para cada $x^* \in X^*$.

*Demonstração.* Pelo Teorema 6.3 $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é uma base para $X^*$. Então se $x^{**} \in X^{**}$ e $x^* = \sum_{n\in\omega} \alpha_n x_n^* \in X^*$ temos $x^{**}(x^*) = \sum_{n\in\omega} F_n \alpha_n$ onde $F_n = x^{**}(x_n^*)$. Logo $\alpha_n = x^*(x_n$, já que $x_n^*$ são os coeficientes funcionais da base $(x_n)_{n\in\omega}$, . Logo $|x^{**}(x^*)| = |\sum_{i=1}^{n} F_i \alpha_i| = |x^*(\sum_{i=1}^{n} F_i x_i)| \leq ||x^*|| ||\sum_{i=1}^{n} F_i x_i||$. Ou seja, $|x^{**}(x^*)| \leq ||x^*|| (\lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n} F_i x_i||)$ e, assim,

$$||x^{**}|| \leq \lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n} F_i x_i||$$

Agora, para $n \in \omega$ fixo, seja $u_n = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i$. Defina o funcional $h' : \mathbb{R}u_n + \langle \{x_i\}_{i>n} \rangle \to \mathbb{R}$ como sendo $h'(tu_n + z) = t||u_n||$ onde $z \in \langle \{x_i\}_{i>n} \rangle$. Note $h'$ é linear e também, se $z = \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i x_i$, então $|h'(tu_n + z)| = ||tu_n|| \leq ||tu_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i x_i|| = ||tu_n + z||$ (a última desigualdade segue de usar o fato que a base é ortogonal).
Assim, $||h'|| = 1$. Usando o Teorema de extensão de Hahn-Banach, obtemos um funcional linear $h$ definido em todo $X$ tal que $||h|| = 1$. Se $h = \sum_{n\in\omega} h_n x_n^*$, então $h_n = h(x_n)$, ou seja, $h_i = 0$ para todo $i > n$. Logo $|x^{**}(h)| = |\sum_{n\in\omega} F_n h_n| = |\sum_{i=1}^{n} F_n h_n| = |h(\sum_{i=1}^{n} F_i x_i)| = |h(u_n)| = ||u_n|| \leq ||x^{**}||$. Já que isto foi feito para cada $n$, então $||\sum_{i=1}^{n} F_i x_i|| \leq ||x^{**}||$ para todo $n \in \omega$ e, assim, $lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n} F_i x_i|| \leq ||x^{**}||$. Portanto $||x^{**}|| = lim_{n\to\infty} ||\sum_{n\in\omega} F_i x_i||$ para todo $x^{**} \in X^{**}$.
Suponha agora que $\{F_n\}_{n\in\omega}$ é uma sequência tal que $lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n} F_i x_i|| = M < \infty$. Então $||\sum_{i=n}^{n+p} F_i x_i|| \leq 2M$ para todo $n, p \in \omega$. Logo

$$|\sum_{i=n}^{n+p} F_i \alpha_i| = |x^*(\sum_{i=n}^{n+p} F_i x_i)| \leq ||x^*|| (2M)$$

para qualquer $x^* = \sum_{n\in\omega} \alpha_n x_n^* \in X^*$. Como a base $(x_n)_{n\in\omega}$ é contrátil, concluímos que $\sum_{n\in\omega} F_n \alpha_n$ é convergente, ou seja, $x^{**}(x^*) = \sum_{n\in\omega} F_i \alpha_n$ está bem definida para cada $x^* \in X^*$ e $||x^{**}|| = \lim_{n\to\infty} ||\sum_{n\in\omega} F_n x_n||$. □

Então, como a base canônica $(e_n)_{n\in\omega}$ em $J$ é contrátil e ortogonal, $J^{**}$ é o espaço de todas as sequências $(F_n)_{n\in\omega}$ para as quais vale $||x^{**}|| = \lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n} F_i e_i|| < \infty$. Neste caso mais especificamente o espaço de todas as sequências tais que $lim_{n\to\infty} F_n$ existe. Assim, definindo $T : J \to J^{**}$ como $T(x) = x$, obtemos a isometria desejada.

CAPÍTULO

7

# POSTO DE CANTOR-BENDIXSON EM TOPOLOGIA: O TEOREMA DE SIERPISKI-MAZURKIEWICZ

Neste capítulo vamos apresentar uma classificação dos espaços topológicos compactos Hausdorff enumeráveis, provando o Teorema de Sierpiski-Mazurkiewicz. Vamos primeiro ver o posto de Cantor-Bendixson.
Usamos principalmente (MAZURKIEWICZ S. SIERPIǸSKI, 1920) e também como tradução e definições adicionais (MATHNOTES, 2013).

## 7.1 Posto de Cantor-Bendixson

**Definição 7.1.** Seja $X$ um espaço topológico. Definimos por indução transfinita o seguinte:

- $X^{(0)} = X$
- $X^{(\alpha+1)}$ é o conjunto de pontos limites de $X^{(\alpha)}$, para qualquer ordinal $\alpha$.
- $X^{(\lambda)} = \bigcap_{\beta<\lambda} X^{(\beta)}$, para qualquer ordinal limite $\lambda$

Vamos chamar de **posto de Cantor-Bendixson**, denotado por $\mathrm{rk}(X)$, o menor ordinal $\alpha$ que satisfaz $X^{(\alpha+1)} = X^{\alpha}$.

Temos uma boa classificação dos espaços topológicos com respeito a seu posto de Canto-Bendixson para espaços que são compactos Hausdorff enumeráveis .

**Lema 7.1.** Seja $X$ um espaço topológico compacto Hausdorff enumerável. Então $\mathrm{rk}(X)$ é um ordinal sucessor enumerável, digamos $\mathrm{rk}(X) = \alpha + 1$, e $X^{(\alpha)}$ é finito e não vazio.

*Demonstração.* Do fato que $X$ é enumerável, existe um ordinal enumerável $\gamma$ tal que

$$X^{(\gamma)} \backslash X^{(\gamma+1)} = \emptyset$$

Com efeito, se $X^{(\gamma)} \backslash X^{(\gamma+1)} \neq \emptyset$ para todo ordinal $\gamma$ enumerável, então o conjunto

$$\bigcup_{\beta \in \omega_1} X^{(\beta)} \backslash X^{(\beta+1)} \subset X$$

é não enumerável, contrariando o fato que $X$ é enumerável.
Seja $\kappa$ o posto de Cantor-Bendixson de $X$. $X^{(\kappa)} = \emptyset$, pois qualquer conjunto perfeito em um espaço polonês tem cardinalidade pelo menos $2^{\aleph_0}$. Se $\kappa$ fosse ordinal limite, então $\bigcap_{\beta<\kappa} X^{\beta}$ seria uma sequência decrescente de conjuntos fechados não vazios que converge para $\emptyset$, contrariando o fato que $X$ é compacto.
Portanto, $\kappa$ é um ordinal sucessor, digamos $\kappa = \alpha + 1$, e $X^{(\alpha)}$ é não vazio e finito (pois se fosse infinito, então $X^{(\alpha+1)}$ seria não vazio, já que $X^{\alpha}$ teria um ponto limite). □

Vejamos a seguinte definição

**Definição 7.2.** Seja $X$ um espaço topológico compacto Hausdorff enumerável tal que $\mathrm{rk}(X) = \alpha + 1$ e $X^{(\alpha)}$ tem cardinalidade $n \geq 1$. Vamos chamar $(\alpha, n)$ de **sistema característico** de $X$.

Vamos mostrar que $\omega^{\alpha} \cdot n + 1$ é um espaço topológico compacto Hausdorff enumerável com sistema característico $(\alpha, n)$.

**Lema 7.2.** Seja $\alpha$ um ordinal enumerável e $n \geq 1$ inteiro. Então $\omega^{\alpha} \cdot n + 1$ é um espaço topológico compacto Hausdorff enumerável com sistema característico $(\alpha, n)$.

*Demonstração.* Tal ordinal é compacto, já que é um ordinal sucessor. Além disso, com sua topologia da ordem usual, é Hausdorff. Em primeiro lugar, vamos mostrar que $(\alpha, 1)$ é o sistema característico de $\omega^{\alpha} + 1$ por indução transfinita. Para $\alpha = 0$ é claro. Então, escrevendo

$$[0, \omega^{\alpha+1}] = \{0\} \cup (\bigcup_{k \geq 0} [\omega^{\alpha} \cdot k + 1, \omega^{\alpha} \cdot (k+1)]) \cup \{\omega^{\alpha+1}\}$$

notando que $[\omega^{\alpha} \cdot k + 1, \omega^{\alpha} \cdot (k+1)]$ é homeomorfo a $\omega^{\alpha} + 1$ e pelo fato que a família $\{[\omega^{\alpha} \cdot k + 1, \alpha^{\alpha}(n+1)] : k \in \omega\}$ é separada por abertos, concluímos que $[0, \omega^{\alpha+1}]^{(\alpha+1)} = \{\omega^{\alpha+1}\}$.
Seja agora $\lambda$ um ordinal limite. Da mesma maneira, escrevendo

$$[0, \omega^{\lambda}] = \{0\} \cup (\bigcup_{\beta \leq \lambda} [\omega^{\beta} + 1, \omega^{\beta+1}]) \cup \{\omega^{\lambda}\}$$

notando que os conjuntos $[\omega^{\beta} + 1, \omega^{\beta+1}]$ são homeomorfos a $\omega^{\beta+1} + 1$ e que a família $\{[\omega^{\beta} + 1, \omega^{\beta+1}] : \beta \leq \lambda\}$ é separada por abertos, concluímos que $[0, \omega^{\lambda}]^{(\lambda)} = \{\omega^{\lambda}\}$, pois

$$\sup_{\beta<\lambda} \mathrm{rk}(\omega^{\beta+1} + 1) = \lambda.$$

Vamos concluir a prova com o mesmo argumento. Escrevendo

$$[0,\omega^\alpha \cdot n] = \{0\} \cup (\textstyle\bigcup_{k\geq 0}^{n-1}[\omega^\alpha \cdot k+1, \omega^\alpha \cdot (k+1)])$$

como uma união de conjuntos fechados homeomorfos a $\omega^\alpha + 1$ e já que a família é separada por abertos, obtemos que $[0,\omega^\alpha \cdot n]^{(\alpha)} = \{\omega^\alpha, \omega^\alpha \cdot 2, ..., \omega^\alpha \cdot n\}$. □

**Lema 7.3.** Seja $X$ um espaço métrico compacto. Então $X$ é isométrico a um subespaço de um espaço de Banach.

*Demonstração.* Seja $X$ espaço métrico compacto com métrica $d$ e $F = C(X)$ o conjunto das funções contínuas com a norma do máximo. Fixe $x_0 \in X$. Defina a seguinte função

$$\phi : X \to F \text{ dada por } \phi(x) = d(x,\cdot) - d(x_0,\cdot)$$

Note que $d(x,\cdot) - d(x_0,\cdot) \in C(X)$ e $d(x,\cdot)$ é contínua. Afirmamos que $\phi$ é uma isometria de $X$ em $F$. Com efeito, vamos mostrar que $d(x,y) = \sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z)|$ para todo $x,y \in X$. Da desigualdade triangular, para cada $z \in X$, temos $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Logo $d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$. Por outro lado, temos $d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z)$, ou seja, $-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z)$. Então $sup_{z\in X}|d(x,z) - d(y,z)| \leq |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$. Também temos $|d(x,y) - d(y,y)| = d(x,y) \leq sup_{z\in X}|d(x,z) - d(y,z)|$. Portanto

$$d(x,y) = \sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z)| = \sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z) - d(x_0,x) + d(x_0,y)| =$$
$$\sup_{z\in X} |\phi(x)z - \phi(y)z| = ||\phi(x) - \phi(y)||.$$

□

## 7.2 Teorema de Sierpiski-Mazurkiewicz

Nesta seção vamos provar nosso resultado principal do capítulo.

**Teorema 7.1** (de Sierpinski-Mazurkiewicz)**.** Seja $X$ um espaço topológico compacto Hausdorff enumerável com sistema característico $(\alpha,n)$. Então $X$ é homeomorfo a $\omega^\alpha \cdot n + 1$.

*Demonstração.* Para qualquer ordinal enumerável $\alpha$ e $n \geq 1$, seja $P(\alpha,n)$ a afirmação: " Qualquer espaço compacto Hausdorff enumerável com posto de Cantor-Bendixson $\alpha+1$ tal que card$(X^{(\alpha)}) = n$, é homeomorfo a $\omega^\alpha \cdot n + 1$."
$P(1,1)$ é verdade. De fato, seja $X$ compacto Hausdorff enumerável com sistema característico $(1,1)$. Seja $X^{(1)} = \{p\}$ e $f : X \backslash X^{(1)} \to \omega$ uma bijeção. Então definindo $\overline{f} : X \to \omega + 1$ por $\overline{f}(p) = \omega$ e $\overline{f}(x_n) = f(n)$ para todo $x_n \in X \backslash X^{(1)}$, temos um homeomorfismo de $X$ com $\omega + 1$.
Vamos mostrar que se $P(\alpha,1)$ é verdade então $P(\alpha,n)$ é verdade para todo $n > 1$. De fato, seja $X$ compacto Hausdorff enumerável com sistema característico $(\alpha,n)$ e $X^{(\alpha)} = \{p_1,...,p_n\}$. Pelo

Lema 7.1 que $X$ pode ser considerado um subespaço de um espaço de Banach $Y$. Já que $X$ é Hausdorff, existem $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} > 0$ tais que $B[p_n, \varepsilon_n]$ e $B[p_{n+1}, \varepsilon_{n+1}]$ são disjuntos.
Logo pela segunda forma geométrica do Teorema de Hanh-Banach, existe um hiperplano fechado $H = [f = \alpha]$ e $\varepsilon > 0$ tal que $f(z) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leq f(y)$ para todo $z \in B[p_n, \varepsilon_n]$ e $y \in B[p_{n+1}, \varepsilon_{n+1}]$. Já que $X$ é enumerável, existe um hiperplano $H_1 = [f_1 = \alpha_1]$ que separa estritamente as bolas fechadas e que não contém ponto de $X$, pois existe uma quantidade não enumerável de hiperplanos entre $\alpha - \varepsilon, \alpha$ e $\alpha + \varepsilon$. Portanto, existem $n-1$ hiperplanos paralelos $H_1, \ldots, H_{n-1}$ tal que $Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i$ tem $n$ componentes conexas $D_1, \ldots, D_n$ com $p_k \in D_k$.
Da hipótese que $P(\alpha, 1)$ é verdade, $X_k := X \cap D_k$ é homeomorfo a $\omega^\alpha + 1$. Portanto $X$ é homeomorfo a $(\omega^\alpha + 1) \cdot n = \omega^\alpha \cdot n + 1$, pois $X \simeq X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$.
Agora, mostraremos que se $P(\alpha, n)$ é verdade para todo $\alpha < \alpha_0$ e $n \geq 1$, então $P(\alpha_0, 1)$ é verdade. De fato, seja $X$ compacto Hausdorff enumerável com sistema característico $(\alpha_0, 1)$ e $X^{(\alpha_0)} = \{p\}$. Podemos supor que $\alpha_0 \geq 2$ pois $P(1,1)$ é verdade e, assim, podemos supor que $p \in X^{(2)}$. Logo existe uma sequência $(p_k)_{k \in \omega}$ em $X^{(1)}$ tal que $p_n \to p$, quando $n \to \infty$ e

$$d(p_{n+1}, p) < d(p_n, p) \text{ para cada } n \in \omega$$

Vendo $X$ como subespaço de um espaço métrico completo $Y$, existe uma sequência de números reais positivos $(r_k)_{k \in \omega}$, que converge para 0, tal que a família de $S(p, r_k)$ não intercepta $X$. De fato, já que existe uma quantidade não enumerável de esferas[1] $S(p, r')$ com $d(p_{k+1}, p) < r' < d(p_k, p)$ e $X$ é enumerável, existe $d(p_{k+1}, p) < r_n < d(p_k, p)$ tal que $S(p, r_k)$ não contém pontos de $X$. Logo $Y \setminus \bigcup_{k \leq 1} S(p, r_k)$ tem uma infinidade de componentes conexas $D_1, D_2, \ldots$, com $p_k \in D_k$ para $k \in \omega$. Note que $D_k$ contém uma infinidade de pontos de $X$, pois $p_k \in X^{(1)}$.
Da hipótese que $P(\alpha, n)$ para $\alpha < \alpha_0$ e $n \geq 1$ é verdade, então $X_k := X \cap D_k$ é homeomorfo a algum $\omega^{\alpha_k} \cdot n_k + 1$ com $\alpha_k < \alpha_0$ e $n_k \leq 1$ (pois $X_k^{(\alpha_0)} = \emptyset$, já que $p_k$ é o único ponto de $X^{(\alpha_0)}$ e ele está a uma distância positiva $r_k$ de $D_k$). Portanto $X$ é homeomorfo a $\tau = [(\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + 1) + (\omega^{\alpha_2} + 1) + \ldots] + 1$ (pois $X$ é homeomorfo a $(X_1 \cup X_2 \cup \ldots) \cup \{p\}$). Note que $\tau \leq \omega^{\alpha_0} + 1$ (pois $\alpha_k < \alpha_0$ para cada $k = 1, 2, \ldots$). Se fosse $\tau < \omega^{\alpha_0} + 1$, então $\tau < \omega^{\alpha_0}$ (pois $\tau$ é compacto). Logo existem $\beta < \alpha_0$ e $m \geq 1$ tal que $\tau < \omega^\beta \cdot m + 1$, pois $\omega^{\alpha_0}$ é ordinal limite. Portanto $\mathrm{rk}(\tau) \leq \mathrm{rk}(\omega^\beta \cdot m + 1) = \beta + 1 \leq \alpha_0$. Mas isto contradiz o fato que $\mathrm{rk}(X) = \mathrm{rk}(\tau) = \alpha_0 + 1$ e, assim, $\tau = \omega^{\alpha_0} + 1$ e portanto $P(\alpha_0, 1)$ é verdade.
Então, dado qualquer $\alpha_0$ e $n \geq 1$, $P(\alpha_0, n)$ é verdade. Com isto concluímos a prova. $\square$

[1] é a fronteira de uma bola

CAPÍTULO

8

# PROPRIEDADES DE SEPARAÇÃO E PROPRIEDADE DE GROTHENDIECK

Neste capítulo apresentamos algumas relações entre propriedades de separação em álgebras de Boole e a propriedade de Grothendieck. Primeiro faremos as definições com respeito a isso e, no mesmo caminho, mostraremos algumas implicações interessantes que elas têm. Usamos como principal referência (KOZMIDER P. SHELAH, 2013), e apoiados em (KOPPELBERG, 1989),(KOCHANEK, 2012-2013).

## 8.1 Propriedades de Separação

Vejamos uma forma análoga do que é uma família independente em uma álgebra de Boole.

**Observação 8.1.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Uma família independente $\{a_i : i \in I\} \subset A$ satisfaz que

$$\prod_{i\in F} a_i \cdot \prod_{i\in G}(-a_i) \neq 0$$

para todo $F, G \subset I$ finitos tais que $F \cap G = \emptyset$

**Definição 8.1.** Uma álgebra de Boole $A$ é dita que tem a **propriedade fraca de separação subsequencial** se, para qualquer anticadeia infinita enumerável $\{a_n : n \in \omega\} \subset A$, existe $a \in A$ tais que os conjuntos

$$\{n \in \omega : a_n \leq a\} \text{ e } \{n \in \omega : a_n \cdot a = 0\}$$

são infinitos.

**Definição 8.2.** Uma álgebra de Boole $A$ é dita que tem a **propriedade de separação subsequencial** se, para qualquer anticadeia infinita enumerável $\{a_n : n \in \omega\} \subset A$, existe $a \in A$ tal que o conjunto

$$\{n \in \omega : a_{2n} \leq a \text{ e } a_{2n+1} \cdot a = 0\}$$

é infinito.

**Definição 8.3.** Uma álgebra de Boole $A$ tem a **propriedade de completude subsequencial** se, para qualquer anticadeia infinita enumerável $\{a_n : n \in \omega\} \subset A$, existe $M \subseteq \omega$ infinito tal que em $A$ o supremo de $\{a_n : n \in M\}$ existe.

Presentamos aqui um resultado mais forte que o feito por Argyros[1], o qual afirma: toda álgebra de Boole infinita que tem a propriedade de completude subsequencial contém uma família independente não enumerável.

**Teorema 8.1.** Se $A$ é uma álgebra de Boole infinita que tem a propriedade fraca de separação subsequencial, então $A$ contém uma família independente de cardinalidade $\mathfrak{c}$.

*Demonstração.* Afirmamos o seguinte: Se $A$ é uma álgebra de Boole infinita que tem a propriedade fraca de separação subsequencial, então $s(A)$ não tem sequência convergente não trivial.

De fato, suponha que $s(A)$ tem uma sequência convergente não trivial, isto é existe $\{u_n : n \in \omega\} \subset s(A)$ tal que $u_n \to u$. Já que cada $u_n$ é ponto isolado, existem $a_n^* \supset u_n$ abertos tal que $a_n^* \cap \{u_n : n \in \omega\} = \{u_n\}$ ($a_n^* \cap a_m^* = \emptyset$ para todo $n, m \in \omega$). Então $\{a_n^* : n \in \omega\}$ é uma anticadeia em $Clop(s(A)) \cong A$. Logo existe $a^*$ tal que os conjuntos $\{n : a_n^* \subset a^*\}$ e $\{n : a_n^* \cap a^* = \emptyset\}$ são infinitos.

Se $u \in a^*$, então ele é um aberto que não contém uma quantidade infinita de $u_n$'s (já que $a_n^* \cap a^* = \emptyset$, para uma quantidade infinita de $n's$). Se $u \notin a^*$, então $Ult(A) \setminus a^*$ é um aberto que não contém uma quantidade infinita de $u_n$'s (já que $a_n^* \subset a^*$, para uma quantidade infinita de $n's$). Isto contradiz o fato que $u$ é ponto limite, o que prova a afirmação.

Logo $s(A)$ não é disperso (pois se fosse, já que ele é compacto, infinito e Hausdorff, teria que ter uma sequência convergente não trivial) e, assim, $A$ não é superatômica (pela dualidade de Stone). Logo existe uma subálgebra de $A$ que não tem átomos.

Seja $\{0,1\}^{<\omega}$ o conjunto das sequências finitas de 0 e 1.

Vamos construir uma familia $\{a_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\} \subset A$ tal que $a_s \cdot a_t = 0$ se $s \subsetneq t$ e $a_s \cdot a_t \neq 0$ para os outros casos (é possível pelo Lema 4.12). Adicionalmente, pela construção feita, se $\{u_1, ..., u_k\} \subset 2^{<\omega}$ é tal que $u_i \not\subset u_j$ para todo $i \neq j$, então $\prod_{i=1}^{k} a_{u_i} \neq 0$. Seja $x \in 2^{\omega}$ (que tem cardinalidade $\mathfrak{c}$). Então, pela construção, o conjunto $\{a_s : s \subsetneq x\}$ é uma anticadeia. Logo, por hipótese, existe $a_x \in A$ tal que $\{s \subset x : a_s \leq a_x\}$ e $\{s \subset x : a_s \cdot a_x = 0\}$ são infinitos. Mostraremos

[1] R. Haydon. A nonreflexive Grothendieck space that does not contain $\ell_\infty$

que $\{a_x : x \in 2^\omega\}$ é uma família independente. Sejam $x_1,...,x_n$ elementos distintos de $2^\omega$ e sejam $F \subseteq \{1,...,n\}$ e $G = \{1,...,n\} \setminus F$.

Seja $m \in \omega$ tal que $x_i|_m$ são todo distintos (considere $m = \max\{n \in \omega : x_i|_n = x_j|_n, 1 \leq i, j \leq n\} + 1$). Para $i \leq n$, seja $m_i \geq m$ tal que $a_{x_i|_{m_i}} \leq a_{x_i}$, se $i \in F$ e $a_{x_i|_{m_i}} \cdot a_{x_i}$, se $i \in G$ (já que os conjuntos $\{s \subset x : a_s \leq a_x\}$ e $\{s \subset x : a_s \cdot a_x\}$ são infinitos). Logo

$$0 \neq \prod_{1 \leq i \leq n} a_{x_i|m_i} \leq \prod_{i \in F} a_{x_i} \cdot \prod_{i \in G}(-a_{x_i})$$

Então $\prod_{i \in F} a_{x_i} \cdot \prod_{i \in G}(-a_{x_i}) \neq 0$. Portanto $\{a_x : x \in 2^\omega\}$ é uma família independente de cardinalidade $\mathfrak{c}$. □

**Corolário 8.1.** Se $A$ é uma álgebra de Boole que tem a propriedade de separação subsequencial então $\beta\omega$ é um subespaço de $s(A)$ e $\ell_\infty$ é um quociente $C(s(A))$

*Demonstração.* Já que a propriedade de separação subsequencial implica a propriedade fraca de separação subsequencial, pelo teorema anterior, $A$ tem uma família independente de cardinalidade $\mathfrak{c}$, digamos $\{a_\xi : \xi < c\} \subseteq A$. Considere $\phi : \{a_\xi : \xi < c\} \to \wp(\omega)$ uma bijeção. Do fato que $\{a_\xi : \xi < c\}$ é independente. Note que $\phi$ cumpre as condições do primeiro critério de extensão de Sikorski, logo existe $h : \langle\{a_\xi : \xi < c\}\rangle \to \wp(\omega)$ epimorfismo.

Como $\wp(\omega)$ é completa, pelo Teorema de extensão de Sikorski, existe $\overline{h} : A \to \wp(\omega)$ epimorfismo.

Pela dualidade de Stone, $f : s(\wp(\omega)) \to s(A)$ é contínua e injetora. Logo $f(s(\wp(\omega))) \cong s(\wp(\omega))$ é um subespaço de $s(A)$, mais $s(\wp(\omega))$ é a compactificação de Stone-Ĉech de $\omega$, ou seja, $\beta\omega$.

Para a seguinte afirmação, considere $h : C(s(A)) \to C(\beta\omega)$ dado por $h(f) = g$, onde $g$ é tal que $g = f|_{\beta\omega}$. Note que $h$ é linear. Também, dado $g \in C(\beta\omega)$, pelo Teorema de extensão de Tietze (pois $\beta\omega$ é fechado), existe $f : s(A) \to \mathbb{R}$ tal que $g = f|_{\beta\omega}$, ou seja, $g = h(f)$.

Portanto $h$ é um epimorfismo entre $C(s(A))$ e $C(\beta\omega)$, e portanto $C(\beta\omega)$ é um quociente de $C(s(A))$. Do fato que $C(\beta\omega)$ e $\ell_\infty$ são isométricos, concluímos que $\ell_\infty$ é um quociente de $C(s(A))$, e com isto conclui a prova. □

## 8.2 Um pouco da propriedade de Grothendieck em espaços de Banach

**Definição 8.4.** Dizemos que um espaço de Banach $X$ tem a **propriedade de Grothendieck**, se as convergências fraca e fraca* de sequências coincidem no espaço $X^*$.

**Observação 8.2.** Dado um espaço de Banach $X$, como a topologia fraca em $X^*$ é induzida por elementos de $X^{**}$ e a topologia fraca* é induzida por elementos de $X$, e ainda, $X$ está imerso em $X^{**}$, a convergência fraca sempre implica a convergência fraca*. Assim precisamos verificar apenas a outra implicação.

**Observação 8.3.** Se $X$ é um espaço reflexivo, as duas topologias coincidem, e portanto, a convergência em cada uma delas também coincidem. Assim, os espaços reflexivos sempre tem a propriedade de Grothendieck.

**Exemplo 8.1.** $c_0$ (isto é o espaço das sequências convergentes a 0) não tem a propriedade de Grothendieck.

De fato: Considere $(f_n)_{n\in\omega}$ a sequência de funcionais tal que se $x = (\xi_n)_{n\in\omega} \in c_0$, então $f_n(x) = \xi_n$. É claro que $f_n \in c_0^*$ para todo $n \in \omega$. Assim, para todo $x \in c_0$, $f_n(x) = \xi_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo $(f_n)_{n\in\omega}$ é fracamente$^*$ convergente a 0.

Por outro lado, considere $\phi$, dado por $\phi(f) = \sum_{n\in\omega} f(e_{2n})$. É claro que $\phi \in c_0^{**}$. Ademas, $\phi(f_n) = 1$ se $n$ é par e $\phi(f_n) = 0$ se $n$ é impar. Portanto $(f_n)_{n\in\omega}$ não converge fracamente a 0 e, assim, $c_0$ não tem a propriedade de Grothendieck.

## 8.3 Propriedade de Grothendieck em álgebras de Boole

**Definição 8.5.** Uma álgebra de Boole $A$ tem a **propriedade de Grothendieck**, se e somente se, $C(s(A))$ tem a propriedade de Grothendieck.

**Lema 8.1.** Seja $A$ uma álgebra de Boole, $sA)$. Então $A$ tem a propriedade de Grothendieck se, e somente se,

- Para toda $\{a_n : n \in \omega\}$ anticadeia de $A$.
- Para todo $\varepsilon > 0$.
- Para toda sequência limitada de medidas com sinal limitadas $(\mu_n)_{n\in\omega}$ , finitamente aditivas em $A$ tais que $|\mu_n(a_n)| > \varepsilon$

então existe $a \in A$ tal que $(\mu_n(a))_{n\in\omega}$ é uma sequência não convergente em $\mathbb{R}$.

*Demonstração.* Suponha que $C(s(A))$ tem a propriedade de Grothendieck e $a_n$, $\varepsilon$ e $\mu_n$ como acima. Sejam $x_n^*$ os elementos do espaço dual $C(K)^*$ que estão unicamente determinados pela condição $x_n^*(1_{a^*}) = \mu_n(a)$ para $a \in A$ (pelo Teorema de Representação de Riesz, tomando os funcionais respectivos as medidas de Radon obtidas a partir dos $\mu_n$). A família dos $\mu_n$ e $a_n$ satisfaz as hipóteses do Lema de Rosenthal e então, passando a uma subsequência, podemos supor que

$$\sum_{n\in\omega\setminus\{k\}} |\mu_k(a_n)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

é satisfeita para todo $k \in \omega$.

Então, considerando $\bigcup_{2n\in\omega} a_{2n} \in A$,

$$|x_k^*(\bigcup_{2n\in\omega} 1_{a_{2n}^*})| = |\mu_k(\bigcup_{2n\in\omega} a_{2n})| = |\sum_{2n\in\omega} \mu_k(a_{2n})| \leq \sum_{2n\in\omega} |\mu_k(a_{2n})| \leq \sum_{n\in\omega\setminus\{k\}} |\mu_k(a_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

se $k$ é ímpar. Por outro lado:

$$|x_k^*(\bigcup_{2n\in\omega} 1_{a_{2n}^*})| = |\mu_k(\bigcup_{2n\in\omega} a_{2n})| = |\sum_{2n\in\omega} \mu_k(a_{2n})| = |\mu_k(a_k) + \sum_{2n\in\omega\setminus\{k\}} \mu_k(a_{2n})| > |\mu_k(a_k)| - |\sum_{2n\in\omega\setminus\{k\}} \mu_k(a_{2n})| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

se $k$ é par.

Assim, a sequência $(x_n^*)_{n\in\omega}$ não converge na topologia fraca. Logo, pela propriedade de Grothendieck, a sequência não converge na topologia fraca$^*$. Assim, já que $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é limitada, existe $f \in C(K)$ tal que $(x_n^*(f))_{n\in\omega}$ não converge em $\mathbb{R}$. Logo, pelo Teorema de Stone-Weierstrass, existe uma função simples $f'$(que pode ser tomada com coeficientes 1 e os $a_n^*$ disjuntos dois a dois) tal que

$$||f - f'|| < \varepsilon$$

e, assim, existe $N_0 \in \omega$ tal que

$$|x_n^*(f) - x_n^*(f')| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_0$$

Logo, para $L \in \mathbb{R}$ e $N_0$, vai existir $n_0 \geq N_0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$|x_{n_0}^*(f) - L| \geq \varepsilon_0$$

Assim

$$|x_{n_0}^*(f') - L| = |x_{n_0}^*(f') - +x_{n_0}^*(f) - x_{n_0}^*(f)| \geq |x_{n_0}^*(f) - L| - |x_{n_0}^*(f') - x_{n_0}^*(f)| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Portanto $(x_n^*(f'))_{n\in\omega}$ não é convergente nos reais e, do fato que $(\bigcup a_i^*) = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^*$, existe $a \in A$ tal que $(\mu_n(a))_{n\in\omega}$, não é convergente nos reais.

Reciprocamente, suponha que $(x_n^*)_{n\in\omega}$ é uma sequência limitada em $C(s(A))^*$ que não converge fracamente, assumamos que a condição acima vale, e mostremos que a sequência não converge fracamente$^*$.

Se toda subsequência de $(x_n^*)_{n\in\omega}$ tivesse uma subsequência fracamente convergente (e então fracamente$^*$ convergente), então teríamos que a sequência $(x_n^*)_{n\in\omega}$ não é fracamente$^*$ convergente.

De fato: Vamos mostrar que existem pelo menos duas subsequências de $(x_n^*)_{n\in\omega}$ que tem subsequências que não convergem para um mesmo valor (e com isto concluímos a prova, pois se $(x_n^*)_{n\in\omega}$ fosse fracamente$^*$ convergente, qualquer subsequência dela teria que convergir para o mesmo valor).

Então, vamos supor que toda subsequência de $(x_n^*)_{n\in\omega}$ tem uma subsequência e que convergem todas para o mesmo valor $x$. Mas, pelo fato que a sequência $(x_n^*)_{n\in\omega}$ não é fracamente convergente, podemos encontrar uma subsequência nela que não tem subsequência convergente para $x$, uma contradição.

Assim, se escolhemos uma subsequência, podemos supor que $(x_n^*)_{n\in\omega}$ não tem subsequências fracamente convergentes. Logo, pelo Teorema de Eberlein-Smulian, $\{x_n^* : n \in \omega\}$ não é relativamente fracamente compacto e, assim, pelo Teorema de Dieudonné-Grothendieck, obtemos uma anticadeia $\{a_n : n \in \omega\}$, $\varepsilon$ e um conjunto infinito $M \subseteq \omega$ tais que $|\nu_n(a_n^*)| > \varepsilon$, onde $\nu_n$ é a medida de Radon em $s(A)$ correspondente a $x_n^*$.

Note que a restrição $\mu_n$ dos $\nu_n$ para a família das funções características dos subconjuntos abertos fechados de $s(A)$ satisfaz as condições da hipótese e, então, existe um $a \in A$ de tal jeito que $(\mu_n(a))_{n\in\omega}$ não é convergente nos reais. Tome $1_{a^*}$ e do fato que $x_n^*(1_{a^*}) = \mu_n(a)$, a sequência $(x_n^*)_{n\in\omega}$ não é fracamente$^*$ convergente, e portanto $C(s(A))$ tem a propriedade de Grothendieck. □

**Definição 8.6.** Dizemos que uma álgebra de Boole $A$ tem a **propriedade positiva de Grothendieck** se, e somente se,

- Para toda $\{a_n : n \in \omega\}$ anticadeia de $A$.
- Para todo $\varepsilon > 0$.
- Para toda sequência limitada de medidas positivas limitadas $\mu_n$ $(\mu_n)_{n\in\omega}$ , finitamente aditivas em $A$ tais que $|\mu_n(a_n)| > \varepsilon$

então existe $a \in A$ tal que $(\mu_n(a))_{n\in\omega}$ é uma sequência não convergente em $\mathbb{R}$.

**Proposição 8.1.** Se $A$ é uma álgebra de Boole que tem a propriedade subsequencial de separação fraca, então $A$ tem a propriedade positiva de Grothendieck.

*Demonstração.* Sejam $\{a_n : n \in \omega\}$, $\varepsilon > 0$ e $(\mu_n)_{n\in\omega}$ como na definição acima. Então, podemos assumir que existe uma anticadeia $\{b_n : n \in \omega\}$ e medidas limitadas finitamente aditivas $\lambda_n$ e $\nu_n$ tais que $\mu_n = \lambda_n + \nu_n$ (aplicamos o Lema 5.7 para os funcionais respectivos de $\mu_n$ e aplicamos o Lema 5.6), onde $\nu_n$ converge fracamente, $|\lambda|(Clop(s(A))) = \eta$ e $\lambda_n(B_n) > \frac{3\eta}{4}$.

Pelo Teorema de Dieudonné-Grothendieck, aplicado aos $\mu_n$, eles não são um conjunto relativamente fracamente compacto e, portanto, não é fracamente convergente. Logo $\eta \neq 0$.

Fazendo uso da propriedade fraca de separação subsequencial, obtemos $a \in A$ tal que, os conjuntos $M_1 = \{n \in \omega : b_n \leq a\}$ e $M_0 = \{n \in \omega : b_n \cdot a = 0\}$ são infinitos. Para todo $n \in M_1$, temos

$$|\lambda_n(a \backslash b_n)| = |\lambda_n^+(a \backslash b_n) - \lambda_n^-(a \backslash b_n)| \leq |\lambda_n^+(a \backslash b_n)| + |-\lambda_n^-(a \backslash b_n)| =$$
$$\lambda_n^+(a \backslash b_n) + \lambda_n^-(a \backslash b_n) = |\lambda_n|(a \backslash b_n).$$

Por outro lado,

$$\tfrac{3\eta}{4}+|\lambda_n|(a\backslash b_n)<\lambda_n(b_n)+|\lambda_n|(a\backslash b_n)\leq|\lambda_n|(b_n)+|\lambda_n|(a\backslash b_n)=|\lambda_n|(a)\leq|\lambda_n|(K)=\eta$$

e, assim,

$$|\lambda_n|(a\backslash b_n)<\eta-\tfrac{3\eta}{4}=\tfrac{\eta}{4}$$

logo

$$|\lambda_n(a\backslash b_n)|<\tfrac{\eta}{4}$$

Portanto:

$$-\tfrac{\eta}{4}<\lambda_n(a\backslash b_n)<\tfrac{\eta}{4}$$

Se segue de isto que:

$$\mu_n(a)=\lambda(a\cap b_n)+\lambda_n(a\backslash b_n)+\nu_n(a)>\tfrac{3\eta}{4}-\tfrac{\eta}{4}+\nu_n(a)=\tfrac{\eta}{2}+\nu_n(a).$$

Também, para cada $n\in M_0$, temos

$$\mu_n(a)=\lambda(a\cap b_n)+\lambda_n(a\backslash b_n)+\nu_n(a)<\tfrac{\eta}{4}+\nu_n(a)$$

pois, para $n\in M_0$ é $\lambda_n(a\backslash b_n)=\lambda_n(a)$, e

$$\lambda_n(a)+\tfrac{3\eta}{4}<\lambda_n(a)+\lambda_n(b_n)=\lambda_n(a)\leq|\lambda_n(a\cup b_n)|\leq|\lambda_n(Clop(s(A))|=\eta$$

e, assim,

$$\lambda_n(a)<\eta-\tfrac{3\eta}{4}=\tfrac{\eta}{4}$$

Como $\nu_n(a)$ converge, $\eta\neq 0$; e já que fracamente convergente implica fracamente$^*$ convergente, $(\mu_n(a))_{n\in\omega}$ não converge, como queríamos. □

**Proposição 8.2.** Existe uma álgebra de Boole que tem a propriedade fraca de separação subsequencial mas não tem a propriedade de Grothendieck e, assim, não tem a propriedade subsequencial de separação.

*Demonstração.* Considere a seguinte álgebra de Boole $A\subset\wp(\omega)$:

$$A=\{a\subset\omega:|a\cap\{2k,2k+1\}|\in\{0,2\}\text{ para todo }k\in\omega\text{ exceto para uma quantidade finita}\}$$

e seja $K = s(A)$.

Note que $\{n\} \in A$ para todo $n \in \omega$, pela definição de $A$. Assim $K$ contém os ultrafiltros principais gerados por cada $\{n\}$ (isto é, $b_n = \{a \in A : \{n\} \leq a\}$). Seja $N = \{b_n : n \in \omega\}$. Note que $N$ é discreto em $K$ (pois é homeomorfo com $\omega$). Vamos mostrar que $C(K)$ não tem a propriedade de Grothendieck.

Considere a sequência $(\delta_{2k} - \delta_{2k+1})_{k=1}^{\infty} \subset C(K)^*$, onde $\delta_n$ é a medida de Dirac. Fixe $f \in C(K)$ e suponha que existe $\delta > 0$ e uma sequência estritamente crescente $(k_j)_{j\in\omega}$, de números naturais, tais que $|f(2k_j) - f(2k_j+1)| \geq \delta$, para cada $j \in \omega$.

Considere

$$a = \{2k_j : j \in \omega\} \cup \{2k_j + 1 : j \in \omega\} \in A$$

e seja $p \in K \backslash N$ tal que $a \in p$. Logo, para toda $V$ vizinhança de $p$ existem infinitos $j \in \mathbb{N}$ com $2k_j \in V$ e $2k_j+1 \in V$ (considere $N' = \{b_{2k_j} : j \in \omega\} \subset N$ e $N'' = \{b_{2k_j+1} : j \in \omega\} \subset N$. Logo $p \in K\backslash N \subset K\backslash N'$ e $p \in K\backslash N \subset K\backslash N''$. Assim $p$ é ponto de acumulação de $N'$ e $N''$ pois são discretos).

Então, para todo $\varepsilon > 0$, existem infinitos $j'$s tais que

$$|f(2k_j) - f(p)| < \varepsilon \text{ e } |f(2k_j+1) - f(p)| < \varepsilon$$

Logo $|f(2k_j) - f(2k_j+1)| < \delta$ (Tomando $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$), o que é uma contradição. Portanto $\delta_{2k} - \delta_{2k+1} \to 0$ na topologia fraca$^*$ (pois, se $g_n$ são os respectivos funcionais correspondentes a $\delta_{2k} - \delta_{2k+1}$, então $g_n(f) = \int f d\delta_n = f(n)$).

Vamos mostrar que o conjunto $D = \{\delta_{2k} - \delta_{2k+1} : k \in \omega\}$ é discreto na topologia fraca. De fato: Note que para todo boreliano $E \subset K$ a função $\nu \in \mathscr{M}(K) \mapsto \nu(E)$ é um funcional linear contínuo e, assim, o conjunto $\{\nu \in \mathscr{M} : \nu(\{2k\}) > 0\}$ é aberto na topologia fraca, para todo $k \in \omega$. Mais $\delta_{2k} - \delta_{2k+1}$ é o único elemento de $D$ que está em esse conjunto.

Portanto $D$ é discreto e, assim, a sequência $(\delta_{2k} - \delta_{2k+1})_{k\in\omega}$ não é fracamente convergente a 0, pois se fora fracamente convergente, toda vizinhança de 0 teria uma infinidade dos $\delta_{2k} - \delta_{2k+1}$, o que contradiz o fato que $\{\delta_{2k} - \delta_{2k+1} : k \in \omega\}$ é discreto. Portanto $C(K)$ não tem a propriedade de Grothendieck.

Agora, considere uma anticadeia infinita $b = \{a_n : n \in \omega\}$ em $A$. Primeiro, note que se $a \in A$, então $a$ tem só três opções: $a$ é finito, $a$ têm complemento finito ou $a$ é infinito que contém uma quantidade infinita de conjuntos $\{2k, 2k+1\}$ e é disjunto de uma quantidade infinita de tais conjuntos. Note também que qualquer anticadeia infinita de $A$, não pode conter um elemento que tem complemento finito (pois ao mais vai ser disjunto de uma quantidade finita de elementos de $A$).

Então, para $b = \{a_n : n \in \omega\}$ temos as seguintes opções:

- Se todos os elementos de $b$ são finitos. Então podemos construir um conjunto infinito $M$ e uma família $(b_m)_{m\in M}$ em $A$, dois a dois disjunta, com cada $b_m$ sendo união de uma quantidade finita de $\{2k, 2k+1\}$, tal que $a_m \subseteq b_m$ para todo $m \in M$. Tomando uniões dos $b_m$ (que também vai ser elemento de $A$) temos a separação desejada.

- Se todos os elementos de $b$ são infinitos que contém uma quantidade infinita de conjuntos $\{2k, 2k+1\}$ e é disjunto de uma quantidade infinita de tais conjuntos. Tome a união de uma quantidade infinita de elementos de $b$ (que vai ser um elemento de $A$), de tal jeito que os índices dos $a_n$ que não foram considerados seja um conjunto infinito. Assim temos a separação desejada.

- Se existem $M_1$ e $M_2$ subconjuntos de $\mathbb{N}$, onde $M_1$ são os índices tais que os $a_n$ são finitos e $M_2$ os índices tais que os $a_n$ são infinitos que contém uma quantidade infinita de conjuntos $\{2k, 2k+1\}$ e é disjunto de uma quantidade infinita de tais conjuntos. Se $M_1$ e $M_2$ forem infinitos, só tome a união dos elementos de $b$ com índices em qualquer um deles.

  Se $M_1$ for infinito e $M_2$ for finito (analogamente se $M_2$ for infinito e $M_1$ finito), tome a união dos elementos de $b$ com índices em $M_2$ junto com infinitos elementos de $b$ com índices em $M_1$, de tal jeito que os índices dos $a_n$'s que não foram considerados formem um conjunto infinito. Assim temos a separação desejada.

Com isto, concluímos que $A$ tem a propriedade fraca de separação subsequencial, mas não tem a propriedade de Grothendieck e portanto $A$ não têm a propriedade de separação subsequencial. $\square$

CAPÍTULO

9

# RELAÇÕES ENTRE CLASSES DE ESPAÇOS DE BANACH E CLASSES DE ESPAÇOS COMPACTOS

Neste capítulo apresentamos a relação entre os espaços de Banach e os espaços compactos de Hausdorff. Começamos estendendo a relação, já vista, entre álgebras de Boole e espaços Booleanos (que nos serve de motivação). Finalmente apresentamos classes de espaços de Banach e sua relação com a classe de espaços compactos de Hausdorff.
Usamos como referência principalmente (KOSZMIDER, 2015).

## 9.1 Relações entre álgebras de Boole e espaços booleanos

Seja $A$ uma álgebra de Boole. No Capítulo 4 vimos que é possível associar a $A$ um espaço topológico $s(A)$ que é um espaço booleano (espaço de Stone). Também foi visto na Proposição 4.3 que dadas $A,B$ álgebras de Boole e $f : A \to B$ homomorfismo, então a função $f^d : s(B) \to s(A)$ dada por

$$f^d(u) = f^{-1}(u) \text{ com } u \in s(B)$$

é contínua. Vamos ver alguns fatos a mais com respeito à relação entre as funções.

**Lema 9.1.** Sejam $A,B$ álgebras de Boole, $f : A \to B$ homomorfismo e $f^d : s(B) \to s(A)$ a função dada como acima. Então $f$ é sobrejetora (injetora) se, e somente se, $f^d$ é injetora (sobrejetora).

*Demonstração.* Suponha que $f$ é sobrejetora. Se $u_1 \neq u_2 \in s(B)$, então existe $b \in B$ tal que $b \in u_1$ e $b \notin u_2$. Como $f$ é sobrejetora existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Logo $a \in f^{-1}(u_1) = f^d(u_1)$

e $a \notin f^{-1}(u_2) = f^d(u_2)$, isto é, $f^d(u_1) \neq f^d(u_2)$. Portanto $f^d$ é injetora.
Suponha que $f$ é injetora. Então $f : A \to f(A) \subseteq B$ é um isomorfismo, ou seja, podemos considerar $A$ como uma subálgebra de $B$. Note que dado $v \in s(B)$, $f^d(v) = f^{-1}(v) = v \cap A$. Seja $u \in s(A)$. Então $u$ é um filtro próprio de $B$. Logo existe $v \in s(B)$ tal que $u \subset v$. Assim $f^d(v) = v \cap A = u$. Portanto $f^d$ é sobrejetora.
Agora suponha que $f^d$ é injetora. Então $f^{dd}$ é sobrejetora pela última parte mostrada. Pela Observação 4.11, $f = (f_1)^{-1} \circ f^{dd} \circ f_2$. Como $(f_1)^{-1}, f^{dd}$ e $f_2$ são sobrejetoras concluímos que $f$ é sobrejetora.
Finalmente, suponha que $f^d$ é sobrejetora. Enão $f^{dd}$ é injetora e, pela Observação 4.11, concluímos que $f$ é injetora. $\square$

Adicionalmente foi visto no Capítulo 4 que dado um espaço booleano $X$ temos associada uma álgebra de Boole $Clop(X)$. No Lema 4.8 foi visto ainda que dados $X, Y$ espaços booleanos e $\phi : X \to Y$ função contínua, a função $\phi^d : Clop(Y) \to Clop(X)$ dada por

$$\phi^d(V) = \phi^{-1}(V) \text{ onde } V \in Clop(Y)$$

é um homomorfismo. Temos um resultado similar ao lema anterior.

**Lema 9.2.** Sejam $X, Y$ espaços booleanos, $\phi : X \to Y$ função contínua e $\phi^d : Clop(Y) \to Clop(X)$ dada como acima. Então $\phi$ é sobrejetora (injetora) se, e somente se, $\phi^d$ é injetora (sobrejetora).

*Demonstração.* Suponha que $\phi$ é sobrejetora. Se $U \neq V \in Clop(Y)$, então existe $y \in Y$ tal que $y \in U$ e $y \notin V$. Como $\phi$ é sobrejetora existe $x \in X$ tal que $\phi(x) = y$. Logo $x \in \phi^{-1}(U) = \phi^d(U)$ e $a \notin \phi^{-1}(V) = \phi^d(V)$, isto é, $\phi^d(U) \neq \phi^d(V)$. Portanto $\phi^d$ é injetora.
Suponha que $\phi$ é injetora. Então $\phi : X \to \phi(X) \subseteq Y$ é um homeomorfismo, ou seja, podemos considerar $X$ como um subespaço fechado de $Y$. Note que dado $V \in clop(Y)$, $\phi^d(V) = \phi^{-1}(V) = V \cap X$. Seja $U \in Clop(X)$. Então $U = V \cap X$ com $V \in Clop(Y)$. Assim $\phi^d(V) = V \cap X = U$. Portanto $\phi^d$ é sobrejetora.
Agora suponha que $\phi^d$ é injetora. Então $\phi^{dd}$ é sobrejetora pela última parte mostrada. Pela Observação 4.11, $\phi = (\phi_1)^{-1} \circ \phi^{dd} \circ \phi_2$. Como $(\phi_1)^{-1}, \phi^{dd}$ e $\phi_2$ são sobrejetoras concluímos que $\phi$ é sobrejetora.
Finalmente, suponha que $\phi^d$ é sobrejetora. Enão $\phi^{dd}$ é injetora, e pela Observação 4.11 concluímos que $\phi$ é injetora. $\square$

## 9.2 Relação entre espaços de Banach e espaços compactos Hausdorff

Motivados pela relação na seção anterior é possível perguntar por uma relação de espaços de Banach e espaços compactos Hausdorff.

Seja $K$ espaço compacto, Hausdorff. Considere $C(K)$ o espaço das funções contínuas definidas em $K$ e com imagem real. Sabemos que $C(K)$ é um espaço de Banach com a norma do máximo. Seja $\varphi : L \to K$ função contínua, onde $L, K$ são espaços compactos Hausdorff. Definimos a função $T_\varphi : C(K) \to C(L)$ por

$$T_\varphi(f) = f \circ \varphi \text{ com } f \in C(K)$$

Note que:

1. $T_\varphi$ é composta de duas funções contínuas.
2. $T_\varphi(f+g) = (f+g)\circ\varphi = f\circ\varphi + g\circ\varphi = T_\varphi(f) + T_\varphi(g)$
3. $T_\varphi(\alpha f) = (\alpha f)\circ\varphi = \alpha(f\circ\varphi) = \alpha T_\varphi(f)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Portanto $T_\varphi$ é um operador linear contínuo.
Um resultado similar ao visto anteriormente é obtido aqui:

**Lema 9.3.** Sejam $L, K$ espaços compactos Hausdorff e $\varphi : L \to K$ uma função contínua. Considere $T_\varphi$ como acima. $\varphi$ é sobrejetora (injetora) se, e somente se, $T_\varphi$ é injetora (sobrejetora).

*Demonstração.* Suponha que $\varphi$ é sobrejetora. Sejam $f, g \in C(K)$ tais que $f \neq g$. Então existe $a \in K$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Como $\varphi$ é sobrejetora, existe $b \in L$ tal que $\varphi(b) = a$. Logo $f(\varphi(b)) \neq g(\varphi(b))$, ou seja, $T_\varphi(f) \neq T_\varphi(g)$. Portanto $T_\varphi$ é injetora.
Reciprocamente, vamos supor que $\varphi$ não é sobrejetora. Então existe $x \in K$ tal que $x \notin \varphi(L)$. Como $\varphi(L)$ é compacto e $K$ é Hausdorff, então $\varphi(L)$ é fechado. Assim existe $f \in C(K)$ tal que $f(x) = 1$ e $f(\varphi(L)) = \{0\}$. Então $T_\varphi(f) = 0$ mas $f \neq 0$, isto é $T_\varphi$ não é injetora.
Agora, suponha que $\varphi$ é injetora. Então $\varphi : L \to \varphi(L) \subseteq K$ é um homeomorfismo. Logo podemos considerar $L$ como subespaço fechado de $K$. Note que $T_\varphi(f) = f\circ\varphi = f|_L$ .Seja $g \in C(K)$. Pelo Teorema de extensão de Tietze, existe $f \in C(K)$ tal que $f|_L = g$. Logo $T_\varphi(f) = f|_L = g$. Portanto $T_\varphi$ é sobrejetora.
Finalmente, suponha que $T_\varphi$ é sobrejetora. Dados $a, b \in L$ tais que $a \neq b$. Logo, do fato que $L$ é Hausdorff, existe $U \subseteq L$ aberto tal que $a \in U$ e $b \notin U$. Assim, pelo Lema de Urysohn, existe $f \in C(L)$ tal que $f(a) = 0$ e $f(L \backslash U) = \{1\}$. Como $T_\varphi$ é sobrejetora existe $g \in C(K)$ tal que $T_\varphi(g) = f$. Logo $g(\varphi(a)) = 0$ e $g(\varphi(b)) = 1$. Então $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Portanto $\varphi$ é injetora. $\square$

Seja $X$ um espaço de Banach. Sabemos que

$$B_{X^*} = \{f \in X^* : f \text{ é linear contínua e } ||x^*|| \leq 1\}$$

é compacto Hausdorff na topologia fraca* de $X^*$. Aqui a dualidade termina. Dados $X, Y$ espaços de Banach e $T : Y \to X$ operador linear contínuo, podemos definir a função $T^* : X^* \to Y^*$ dada por

$$T^*(f) = f \circ T \text{ com } f \in X^*$$

Note que $T^*$ é contínua com a topologia fraca$^*$ (pois $T$ é contínua).
Obtemos uma relação entre funções.

**Lema 9.4.** Sejam $X, Y$ espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear contínuo. Considere $T^* : Y^* \to X^*$ como acima. Se $T : X \to Y$ é sobrejetora (injetora) então $T^* : Y^* \to X^*$ é injetora (sobrejetora).

*Demonstração.* Suponha que $T$ é sobrejetora. Sejam $g_1, g_2 \in Y^*$ tais que $g_1 \neq g_2$. Logo existe $b \in Y$ tal que $g_1(b) \neq g_2(b)$. Como $T$ é sobrejetora, existe $a \in X$ tal que $T(a) = b$. Então $g_1(T(a)) \neq g_2(T(a))$, isto é $T^*(g_1) \neq T^*(g_2)$. Portanto $T^*$ é injetora.
Suponha agora que $T$ é injetora. Então podemos considerar $X$ como subespaço de $Y$. Note que dado $g \in Y^*$ temos $T^*(g) = g \circ T = g|_X$. Dado $f \in X^*$. Pelo Teorema de extensão de Hahn-Banach, existe $g \in Y^*$ tal que $g|_X = f$. Logo $T^*(g) = g|_X = f$. Portanto $T^*$ é sobrejetora. □

Mas, a menos de isometria, não se pode garantir que $T^*|_{B_{X^*}} : B_{X^*} \to B_{Y^*}$. Considerar só isometrias seria reduzir muito o campo de estudo e ao considerar dualidade direta entre $X^*$ e $Y^*$ perdemos a compacidade e a propriedade de Hausdorff.
Uma tentativa é notar que $T^*$ é contínua com respeito à topologia fraca$^*$. Logo $T(B_{X^*})$ é compacta e assim $T(B_{X^*})$ é limitada em $Y^*$. Logo existe $n \in \omega$ tal que $T(B_{X^*}) \subseteq nB_{Y^*}$ e $nB_{Y^*}$ é uma cópia homeomorfa a $B_{Y^*}$. Então é possível obter um tipo de dualidade parecido ao mencionado na seção anterior. Junto com os resultados no Lema 9.3 e Lema 9.4 podemos obter o seguinte.

**Proposição 9.1.** Sejam $X, Y$ espaços de Banach, $L, K$ espaços compactos Hausdorff. Então

1. Se $K$ é imagem contínua de $L$, então $C(K)$ é isométrico a um subespaço de $C(L)$.
2. Se $L$ é subespaço de $K$, então $C(L)$ é isométrico a um quociente de $C(K)$.
3. Se $X$ é subespaço de $Y$, então $B_{X^*}$ é imagem contínua de $B_{Y^*}$.
4. Se $X$ é isomorfo a um quociente de $Y$, então $B_{X^*}$ é homeomorfo a um subespaço de $B_{Y^*}$.

*Demonstração.*

1. Suponha que $K$ é imagem contínua de $L$. Então existe $\varphi : L \to K$ sobrejetora contínua. Logo $T_\varphi : C(K) \to T_\varphi(C(K))$ é um operador linear isométrico, pois neste caso temos $||f|| = ||f \circ \varphi||$.

2. Suponha que $L$ é subespaço de $K$. Então existe $\varphi : L \to K$ injetora contínua. Logo $T_\varphi : C(L) \to C(K)$ é um operador linear sobrejetor e portanto $C(L)$ é isométrico a um quociente de $C(K)$.

3. Suponha $X$ subespaço de $Y$. Então existe $T : X \to T(Y)$ isometria linear. Logo $T^* : Y^* \to X^*$ é contínua sobrejetora. E neste caso $T^*|_{B_{Y^*}} : B_{Y^*} \to B_{X^*}$ e é sobrejetora. Logo $B_{X^*}$ é imagem contínua de $B_{Y^*}$.

4. Suponha que $X$ é isomorfo a um quociente de $Y$. Então existe $T : Y \to X$ operador linear contínuo sobrejetor. Logo $T^* : X^* \to Y^*$ é contínua injetora. Logo $B_{X^*}$ é homeomorfo à $T^*(B_{X^*}) \subseteq nB_{Y^*} \cong B_{Y^*}$.

□

Adicionalmente obtemos um resultado fraco de dualidade.

**Proposição 9.2.** Seja $K$ espaço compacto Hausdorff e $X$ espaço de Banach.

1. $K$ é homeomorfo a um subespaço de $B_{C(K)^*}$.

2. $X$ é isométrico a um subespaço de $C(B_{X^*})$.

*Demonstração.* 1. Pelo Teorema de representação de Riesz, a família de medidas de Dirac está contida em $C(K)^*$. Note que, para cada $x \in K$, $\delta_x \in B_{C(K)^*}$. Defina a função $\varphi : K \to \{\delta_x : x \in K\}$ como $\varphi(x) = \delta_x$. Então $\varphi$ é um homeomorfismo.
Com efeito: Sejam $x_1, x_2 \in K$ tais que $x_1 \neq x_2$. Pela propriedade de Hausdorff existe um conjunto aberto $U$ tal que $x_1 \in U$ e $x_2 \notin U$. Então $\delta_{x_1}(U) = 1$ e $\delta_{x_2}(U) = 0$. Portanto $\delta_{x_1} \neq \delta_{x_2}$, ou seja, $\varphi$ é injetora. Como $K$ é compacto e $\{\delta_x : x \in K\}$ é Hausdorff[1], basta provar que $\varphi$ é contínua.
Seja $x \in K$. Considere um aberto básico na topologia fraca$^*$ para $\delta_x$, isto é $\delta_x \in V = V^*(\delta_x, f_1, ..., f_n, \varepsilon) = \{\psi \in C(K)^* : |\psi(f_i) - \delta_x(f_i)| \ \forall i = 1, ..., n\}$ onde $f_1, ..., f_n \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$. Para cada $i = 1, ..., n$, $f_i$ é contínua. Logo existe $U_i$ tal que $x \in U_i$ e $|f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon$ para todo $y \in U_i$. Considere $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Logo $|\delta_y(f_i) - \delta_x(f) = |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon$ para todo $y \in U$ e $i = 1, ..., n$. Então $x \in U$ e $\varphi(U) \subseteq V$, e assim $\varphi$ é contínua.

2. Considere o mapa canônico $j$ visto no Capítulo 6. Sabe-se que $j$ é um operador linear isométrico entre $X$ e $j(X) \subseteq X^{**} \subseteq C(X^*)$. Pelo Teorema de extensão de Tietze, $C(X^*)$ é isométrico a $C(B_{X^*})$ (Note que $B_{X^*}$ é fechado em $X^*$ com a topologia fraca$^*$). Logo $X$ é isométrico à $j(x) \subseteq C(B_{X^*})$.

□

Mas na maioria dos casos $B_{C(K)^*}$ não é homeomorfo a $K$ nem $C(B_{X^*})$ é isomorfo a $X$. Ainda assim é possível obter algo mais:

[1] pois $C(K)^*$ é Hausdorff com a topologia fraca$^*$

**Proposição 9.3.** Sejam $X, Y$ espaços de Banach e $T : X \to Y$ um isomorfismo sobre sua imagem. Então a família de subconjuntos compactos de $X^*$ com a topologia fraca$^*$ esta incluída na família de imagens contínuas de subconjuntos compactos de $Y^*$ com a topologia fraca$^*$.

*Demonstração.* Considere $T^{-1} : T(X) \to X$ e $T^* : Y^* \to X^*$. Então $T^*$ é contínua na topologia fraca$^*$. Note que

$$\frac{1}{||T^{-1}||} B_{X^*} \subseteq T^*(B_{Y^*})$$

Com efeito: se $\varphi \in \frac{1}{||T^{-1}||} B_{X^*}$, então $(T^{-1})^*(\varphi) \in B_{(T(X))^*}$ (pois $||T|| = ||T^*||$ para qualquer $T$ operador contínuo). Logo, pelo Teorema de extensão de Hanh Banach, existe $\phi \in B_{Y^*}$ tal que $\phi|_{B_{(T(X))^*}} = \varphi$. Então $T^*(\phi) = \phi \circ T = \varphi \circ T^{-1} \circ T = \varphi$.
Se $K$ é compacto em $X^*$, então $K$ é limitado. Logo $K \subseteq nB_{X^*}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo $K$ é imagem contínua do compacto $(T^*)^{-1}(K) \subseteq n||T^{-1}||B_{Y^*}$. $\square$

## 9.3 Classes de espaços de Banach e classes de espaços compactos Hausdorff

Pelos últimos resultados na seção anterior, é natural considerar, em lugar de só a bola dual, classes de espaços compactos Hausdorff associados a classes de espaços de Banach. Vamos entender por classes de espaços compactos ou espaços de Banach como classes que são invariantes por homeomorfismo ou isomorfismo respectivamente.
Vejamos alguns fatos, com respeito as associações entre aquelas classes.

**Definição 9.1.** Seja $\mathscr{K}$ uma classe de espaços compactos Hausdorff e $\mathscr{B}$ uma classe de espaços de Banach. Dizemos que $\mathscr{K}$ e $\mathscr{B}$ são associadas se, e somente se, as seguintes condições valem:

- Se $K \in \mathscr{K}$ então $C(K) \in \mathscr{B}$
- Se $X \in \mathscr{B}$ então $B_{X^*} \in \mathscr{K}$

Se ademais vale a recíproca do primeiro item, dizemos que $\mathscr{K}$ e $\mathscr{B}$ são $K-$associadas. Se em lugar disso vale a recíproca do segundo item, dizemos que $\mathscr{K}$ e $\mathscr{B}$ são $B-$associadas. Se em ambos itens valem as recíprocas, dizemos que as classes são fortemente associadas.

**Lema 9.5.** Suponha que $\mathscr{K}$ é uma classe de espaços compactos Hausdorff e $\mathscr{B}$ uma classe de espaços de Banach que são associadas. Temos:

1. Se $\mathscr{K}$ é fechado por subespaços, então as classes são $K-$associadas.
2. Se $\mathscr{B}$ é fechado por subespaços, então as classes são $B-$associadas.

*Demonstração.* Em $(1)$ seja $C(K) \in \mathscr{B}$. Pela segunda condição na definição, $B_{C(K)^*} \in \mathscr{K}$. Pela Proposição 9.2, $K$ é um subespaço de $B_{(C(K))^*}$ e portanto $K \in \mathscr{K}$, pois $\mathscr{K}$ é fechado por subespaços.
Em $(2)$ considere agora $B_{X^*} \in \mathscr{K}$. Logo $C(B_{X^*}) \in \mathscr{B}$. Pela Proposição 9.2 $X$ é um subespaço de $C(B_{X^*})$ e portanto $X \in \mathscr{B}$, pois $\mathscr{B}$ é fechado por subespaços. □

**Lema 9.6.** Suponha que $\mathscr{K}$ é uma classe de espaços compactos Hausdorff fechada por imagens contínuas, $\mathscr{B}$ é uma classe de espaços de Banach que não é fechada por subespaços e $\mathscr{K}, \mathscr{B}$ são associados. Então as classes não são $B-$associadas.

*Demonstração.* Se $X \notin \mathscr{B}$ um subespaço de $Y \in \mathscr{B}$. Logo, pela Proposição 9.1, $B_{X^*}$ é imagem contínua de $B_{Y^*} \in \mathscr{K}$. Portanto $B_{X^*} \in \mathscr{K}$. Logo as classes não são $B-$associadas. □

Algumas classes naturais de espaços de Banach não estão associadas a classes de espaços compactos Hausdorff. Por exemplo, a classe dos espaços reflexivos não está associada a qualquer classe de espaços compactos Hausdorff, pois $C(K)$ não é reflexivo.

**Proposição 9.4.** Uma classe de espaços compactos $\mathscr{K}$ fechada por subespaços é associada com uma classe de espaços de Banach se, e somente se, $B_{C(K)^*} \in \mathscr{K}$ sempre que $K \in \mathscr{K}$.

*Demonstração.* A condição suficiente segue diretamente da definição de classes associadas.
Reciprocamente, com a condição da classe $\mathscr{K}$ podemos definir uma família de espaços de Banach da seguinte maneira

$$\mathscr{B} = \{X : B_{X^*} \in \mathscr{K}\}$$

Vamos provar que $\mathscr{B}$ é uma classe de espaços de Banach. Suponha que $Y \in \mathscr{B}$. Considere $T : X \to Y$ operador linear contínuo bijetor. Logo, pela Proposição 9.1, $B_{X^*}$ é subespaço de $nB_{Y^*}$. Como $nB_{Y^*}$ é cópia homeomorfa de $B_{Y^*} \in \mathscr{K}$, $nB_{Y^*} \in \mathscr{K}$. Logo como a classe é fechada por subespaços concluímos que $B_{X^*} \in \mathscr{K}$, ou seja, $X \in \mathscr{B}$. Finalmente, é claro que $\mathscr{K}$ e $\mathscr{B}$ são associados. □

Analogamente temos:

**Proposição 9.5.** Uma classe de espaços de Banach $\mathscr{B}$ fechada por cópias isométricas é associada com uma classe de espaços compactos Hausforff se, e somente, se $C(B_{X^*}) \in \mathscr{B}$ sempre que $X \in \mathscr{B}$.

*Demonstração.* De novo a condição suficiente se segue da definição de classes associadas.
Reciprocamente, com a condição da classe $\mathscr{B}$ podemos definir uma família de espaços compactos Hausdorff da seguinte maneira

$$\mathscr{K} = \{K : C(K) \in \mathscr{B}\}$$

Vamos provar que $\mathscr{K}$ é uma classe de espaços compactos Hausdorff. Suponha que $L \in \mathscr{K}$. Considere $\varphi : L \to L$ operador homeomorfismo. Logo, pela Proposição 9.1, $C(L)$ é isométrico a $C(K)$. Logo, como a classe é fechada por copias isométricas, concluímos que $C(K) \in \mathscr{K}$, ou seja, $K \in \mathscr{K}$. É claro que $\mathscr{B}$ e $\mathscr{K}$ são associadas. □

Finalmente, vejamos quando podemos garantir que duas classes estão fortemente associadas.

**Proposição 9.6.** Suponha $\mathscr{B}$ e $\mathscr{K}$ classes associadas de espaços de Banach e espaços compactos Hausdorff respectivamente. Suponha que $\mathscr{K}$ é fechada por subespaços. Seja $\mathscr{B}'$ a classe de todos os subespaços de elementos de $\mathscr{B}$ e $\mathscr{K}'$ a classe de todas as imagens contínuas de elementos de $\mathscr{K}$. Então $\mathscr{B}'$ e $\mathscr{K}'$ são fortemente associadas.

*Demonstração.* Como $\mathscr{K}'$ e $\mathscr{B}'$ são fechadas por subespaços, pelo Lema 9.5, basta mostrar que as classes são associadas. Suponha $Y \in \mathscr{B}'$. Então $Y$ é subespaço de algum $X \in \mathscr{B}$. Logo $B_{Y^*}$ é imagem contínua de $B_{X^*}$. Como as classes $\mathscr{K}$ e $\mathscr{B}$ são associadas temos $B_{X^*} \in \mathscr{K}$. Então $B_{Y^*} \in \mathscr{K}'$. Agora seja $L \in \mathscr{K}'$. Então $L$ é imagem contínua de algum $K \in \mathscr{K}$. Logo $C(L)$ é subespaço de $C(K)$. Como as classes $\mathscr{K}$ e $\mathscr{B}$ são associadas temos $C(K) \in \mathscr{B}$. Portanto $C(L) \in \mathscr{B}'$. □

CAPÍTULO

10

# UMA ORDEM BACANA NOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

Sejam $X,Y$ espaços completamente regulares e $C(X)$ o espaço das funções contínuas da forma $f: X \to \mathbf{R}$. Temos na literatura muitos resultados conhecidos com respeito a relação que existe entre $X$ e $C(X)$, causada pelas muitas estruturas que se apresentam no espaço $C(X)$. Por exemplo, se $X$ e $Y$ são homeomorfos então $C(X)$ e $C(Y)$ são isomorfos como anéis[1]. Ou uma versão mais forte, se $X$ e $Y$ são homeomorfos então existe uma bijeção multiplicativa[2] entre $C(X)$ e $C(Y)$.

A volta do primeiro resultado se cumpre sempre que tanto $X$ como $Y$ forem compactos (se algum deles não for compacto a volta não vale).

Outra condição[3] para obter que dois espaços $X,Y$ sejam homeomorfos é ter que $C(X)$ e $C(Y)$ sejam isomorfos como[4] retículos[5].

Um último resultado nos diz que precisamos que $C(X)$ e $C(Y)$ preservem disjuntividade[6] (ou seja, que exista uma aplicação $T$ entre $C(X)$ e $C(Y)$ tal que se $f \cdot g = 0$ então $Tf \cdot Tg = 0$).

Usamos principalmente (KANIA T. RMOUTIL, ), (DAVEY G. W. PRIESTLEY, 2002) e também (TKACHUK, 2011).

## 10.1 Ordem compatível e isomorfismo compatível

Lembremos que o suporte de uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é o fecho do conjunto de pontos de $X$ onde $f$ não se anula e se denota por $\operatorname{supp} f$, isto é

1. Gelfand-Kolmogorov
2. Teorema de Milgram
3. Teorema de Kaplansky
4. função que preserve as operações em retículos
5. conjunto munido com duas operações que satisfazem a comutatividade, associatividade, leis de absorção e leis idempotentes
6. Teorema de Jarosz

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

**Definição 10.1.** Dadas $f, g \in C(X)$, vamos definir a ordem $\preceq$ como sendo

$$f \preceq g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ \forall x \in \operatorname{supp} f$$

e chamamos ela de **ordem compatível**.

**Observação 10.1.** Note que se $f \preceq g$ então $\operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{supp} g$, pois $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$, logo $g(x) = f(x) \neq 0$ e, assim, $x \in \operatorname{supp} g$

Vamos ver que $\preceq$ é, de fato, uma ordem em $C(X)$.

1. $f(x) = f(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$, logo $f \preceq f$.

2. Suponha que $f \preceq g$ e $g \preceq f$. Então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$ e $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} g$. Se $x \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$ então $f(x) = g(x)$. Se $x \in X \backslash (\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g)$ então tanto $f$ como $g$ são zeros. Portanto $f = g$.

3. Suponha que $f \preceq g$ e $g \preceq h$. Então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$ e $g(x) = h(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} g$. Logo, para todo $x \in \operatorname{supp} f$, $x \in \operatorname{supp} g$ e, assim, $f(x) = g(x) = h(x)$. Portanto $f \preceq h$.

Note que a função 0 é o menor elemento em $C(X)$ com a ordem $\preceq$, ou seja, $0 \preceq f$ para todo $f \in C(X)$ isto pois $\operatorname{supp} 0 = \emptyset$.
Daqui para frente vamos assumir sempre que $C(X)$ tem a ordem $\preceq$.

**Definição 10.2.** Seja $T : C(X) \to C(Y)$ uma função. Dizemos que $T$ é um **morfismo compatível** se para qualquer par $f, g \in C(X)$ tais que $f \preceq g$ então $Tf \preceq Tg$.
Se além disso $T$ é bijetora e sua inversa também é um morfismo compatível então dizemos que $T$ é um **isomorfismo compatível**.

**Observação 10.2.** Se $T$ é um morfismo compatível bijetivo então $T0 = 0$. De fato: já que $T0 \in C(Y)$ então $0 \preceq T0$. Por outro lado, já que $0 \in C(Y)$ e $T$ é sobrejetora existe $h \in C(X)$ tal que $Th = 0$. Mas $0 \leq h$ e portanto $T0 \preceq Th = 0$. Logo $T0 = 0$.

## 10.2 Resultados importantes com respeito ao suporte de uma função

Para $f \in C(X)$, considere $\sigma(f) = \operatorname{int} \operatorname{supp} f$ e $\rho(f) = \overline{\operatorname{int} f^{-1}(\{0\})}$.

**Observação 10.3.** Note que $\sigma(f) = \operatorname{int} \operatorname{supp} f = \operatorname{int} \overline{X \backslash f^{-1}(\{0\})} = \operatorname{int} X \backslash \operatorname{int} f^{-1}(\{0\}) = X \backslash \overline{\operatorname{int} f^{-1}(\{0\})} = X \backslash \rho(f)$. Então $\rho(f) = X \backslash \sigma(f)$.

**Lema 10.1.** Seja $X$ um espaço completamente regular. A família $\mathbf{C}_X := \{\sigma(f) : f \in C(X)\}$ é uma base para $X$.

*Demonstração.* Seja $A$ um conjunto aberto não vazio de $X$ e $x \in A$. Pela regularidade existe um conjunto aberto $B$ que contém $x$ tal que $\overline{B} \subset A$. Logo, já que $X$ é completamente regular, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$ e $f(X \backslash B) = \{0\}$, ou seja, $\sigma(f) \cap (X \backslash B) = \emptyset$. Assim $x \in \sigma(f) \subset B \subset \overline{B} \subset A$. Portanto $\mathbf{C}_X$ é uma base para $X$. $\square$

**Lema 10.2.** Sejam $X$ e $Y$ espaços completamente regulares e $T : C(X) \to C(Y)$ um isomorfismo compatível. Então, dados $f, g \in C(X)$

$$f \cdot g = 0 \Leftrightarrow Tf \cdot Tg = 0$$

*Demonstração.* Já que $T^{-1}$ também é um isomorfismo compatível, basta mostrar um lado. Sejam $f, g \in C(X)$ tais que $f \cdot g = 0$. Então, se $x \in \sigma(f)$ então $x \notin \sigma(g)$ e também se $x \in \sigma(g)$ então $x \notin \sigma(f)$. Com isto, $f \preceq f + g$ e $g \preceq f + g$ (pois $(f+g)(x)$ toma o valor $f(x)$ se $x \in \sigma(f)$ e ficaria $g(x)$ se $x \in \sigma(g)$). Logo $Tf \preceq T(f+g)$ e $Tg \preceq T(f+g)$.
Seja $A := \operatorname{supp} Tf \cap \operatorname{supp} Tg$. Note que $Tf(y) = Tg(y)$ para todo $y \in A$. Já que $int(A) = \sigma(Tf) \cap \sigma(Tg)$, se fosse $int(A) = \emptyset$ então $Tf$ e $Tg$ não tem ponto em comum onde os dois são distintos de zero, e portanto $Tf \cdot Tg = 0$. Com isto em mente, basta mostrar que $A$ tem interior vazio.
De fato: defina $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ como sendo $\varphi := Tf \cdot \chi_A$. Vamos mostrar que $\varphi$ é contínua. Note que $\varphi(y) = Tf(y)$ se $y \in A$ e $\varphi(y) = 0$ se $y \notin A$. Como $Tf$ é contínua, devemos mostrar que $\varphi(y) = 0$ para todo $y \in \partial A$.
Note que se $y \notin \partial \operatorname{supp} Tf \cup \partial \operatorname{supp} Tg$ então ou $y \in \sigma(Tf) \cap \sigma(Tg)$ ou $y$ pertence só a $\sigma(Tf)$ ou $\sigma(Tg)$. Em qualquer dos casos $y \notin \partial A$, ou seja, $\partial A \subseteq \partial \operatorname{supp} Tf \cup \partial \operatorname{supp} Tg$. Logo, já que $\varphi(y) = Tf(y) \cdot \chi_A = Tg(y) \cdot \chi_A$, concluímos que $\varphi(y) = 0$ para todo $y \in \partial A$, e portanto $\varphi$ é contínua.
Pelo fato anterior $\varphi(y) = Tf(y) = Tg(y)$ para todo $y \in \operatorname{supp} \varphi$, ou seja, $\varphi \preceq Tf$ e $\varphi \preceq Tg$. Logo $T^{-1}\varphi \preceq f$ e $T^{-1}\varphi \preceq g$. Mas, da hipótese que $f \cdot g = 0$, se $h \in C(X)$ é tal que $h \preceq f$ e $h \preceq g$ então teríamos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} h$. Mas se $f(x) \neq 0$ então $g(x) = 0$ e também se $g(x) \neq 0$ então $f(x) = 0$. Então $f(x) = g(x)$ só se ambos forem zeros. Ou seja $h(x) = 0$ para todo $x \in \operatorname{supp} h$ e, assim, $h = 0$. Portanto $T^{-1}\varphi = 0$ e, assim, $\varphi = 0$. Se fosse $int(A) = \sigma(Tf) \cap \sigma(Tg) \neq \emptyset$ então teríamos um ponto tal que $\varphi(y) = Tf(y) \neq 0$. Portanto $int(A) = \emptyset$ como queríamos. $\square$

**Lema 10.3.** Sejam $X, Y$ espaços completamente regulares e $T : C(X) \to C(Y)$ um isomorfismo compatível. Sejam $f, g \in C(X)$ tais que $\sigma(f) \subseteq \sigma(g)$ então $\sigma(Tf) \subseteq \sigma(Tg)$.

*Demonstração.* Podemos tomar $f \in C(X)$ tal que $f \neq 0$ pois $\sigma(T0)$ é vazio. Suponha que $\sigma(Tf) \nsubseteq \sigma(Tg)$. Podemos evitar o caso que $\operatorname{supp} Tg = \sigma(Tf)$, pois do fato que $\sigma(Tf)$ é aberto teríamos que $\operatorname{supp} Tg = \sigma(Tg) = \sigma(Tf)$.

Então, seja $y_0 \in \sigma(Tf)\setminus \operatorname{supp} Tg$ (ou seja $y_0 \in Y\setminus(\operatorname{supp} Tg)$ que é aberto). Pela regularidade de $Y$ existe $V$ aberto tal que $\overline{V} \subset Y\setminus \operatorname{supp} Tg$, o que é equivalente a $\overline{V} \cap \sigma(Tg) = \emptyset$.
Logo, já que Y é completamente regular, existe $h' \in C(Y)$ tal que $h'(y_0) = 1$ e $h'(y) = 0$ para todo $y \in Y\setminus\overline{V}$. Como $T$ é sobrejetora existe $h \in C(X)$ tal que $Th = h'$. Note que $Th \cdot Tg = 0$, pois se $y \notin \overline{V}$ então $Th(y) = 0$, e se fosse $y \in \overline{V} \subset Y\setminus \operatorname{supp} Tg \subset Y\setminus\sigma(Tg)$ então $Tg(y) = 0$.
Logo, pelo lema anterior, $h \cdot g = 0$. Então $h \cdot f = 0$, do fato que $\sigma(f) \subseteq \sigma(g)$ e, assim, de novo pelo lema anterior concluímos que $Th \cdot Tf = 0$. Mas isto é uma contradição, pois $Tf(y_0) \neq 0$ e $h'(y_0) = Th(y_0) = 1$ e, assim, $Tf(y_0) \cdot Th(y_0) \neq 0$. Portanto $\sigma(Tf) \subseteq \sigma(Tg)$. □

**Observação 10.4.** Sejam $f, g \in C(X)$. Se $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \emptyset$ então claramente $f \cdot g = 0$. Reciprocamente, suponha que $\sigma(f) \cap \sigma(g) \neq \emptyset$. Considere $U = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ e $V = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$. Então $\emptyset \neq (\sigma(f) \cap \sigma(g))\setminus(\partial U \cup \partial V) \subseteq U \cap V$, pois do fato que $f$ é contínua, então tanto $U$ como $V$ são abertos e, assim, as fronteiras são raras[7]. Portanto obteríamos que $f \cdot g \neq 0$.

**Proposição 10.1.** Sejam $X$ e $Y$ espaços completamente regulares. Considere $\mathbf{C}_X$ e $\mathbf{C}_Y$ as bases definidas anteriormente. Defina a função $\tau : \mathbf{C}_X \to \mathbf{C}_Y$ por $\tau(\sigma(f)) := \sigma(Tf)$. Então $\tau$ é um $\subseteq$ $-$isomorfismo (isto é, uma função bijetora que, tanto ela como sua inversa, preservam inclusão).

*Demonstração.* Pelo lema anterior temos em particular que se $\sigma(f) = \sigma(g)$ então $\sigma(Tf) = \sigma(Tg)$, ou seja $\tau$ está bem definida. Dado $g \in C(Y)$ então $T^{-1}g \in C(X)$. Logo $\sigma(g) = \sigma(T(T^{-1}g)) = \tau(\sigma(T^{-1}g))$ e, assim, $\tau$ é sobrejetora.
Defina $i : \mathbf{C}_Y \to \mathbf{C}_X$ dada por $i(\sigma(g)) = \sigma(T^{-1}g)$. Pelo lema anterior, $i$ está bem definida. Agora, se $f \in C(X)$ então $i \circ \tau(\sigma(f)) = i(\sigma(Tf)) = \sigma(T^{-1}(Tf)) = \sigma(f)$. Analogamente, se $g \in C(Y)$ então $\tau \circ i(\sigma(g)) = \tau(\sigma(T^{-1}g)) = \sigma(T(T^{-1}g)) = \sigma(g)$. Assim $i = \tau^{-1}$. Finalmente, pelo lema anterior, tanto $\tau$ como $i$ preservam inclusão. Portanto, $\tau$ é um $\subseteq -$isomorfismo. □

Pela Observação 10.3 obtemos diretamente o seguinte corolário da proposição anterior.

**Corolário 10.1.** Sejam $X, Y$ espaços completamente regulares e $T : C(X) \to C(Y)$ isomorfismo compatível. Então a função $\vartheta : \{\rho(f) : f \in C(X)\} \to \{\rho(g) : g \in C(Y)\}$ dada por

$$\vartheta(\rho(f)) = \rho(Tf) \text{ para todo } f \in C(X)$$

está bem definida e preserva inclusão.

## 10.3 Conjuntos abertos regulares e fechados regulares

É conhecido que família de conjuntos abertos e fechados regulares são espaços reticulares completos. Nesta seção faremos uma vista dessas famílias, começando com suas definições.

[7] conjuntos nunca densos são aqueles cujo fecho tem interior vazio

**Definição 10.3.** Seja $X$ um espaço completamente regular. Dizemos que $A \subseteq X$ é aberto regular se, e somente se, $A = \mathrm{int}\overline{A}$.

**Definição 10.4.** Seja $X$ um espaço completamente regular. Dizemos que $A \subseteq X$ é fechado regular se, e somente se, $A = \overline{\mathrm{int}A}$.

**Lema 10.4.** Seja $X$ um espaço completamente regular. $A \subseteq X$ é fechado regular se, e somente se, $X \backslash A$ é aberto regular.

*Demonstração.* Suponha que $A = \overline{\mathrm{int}A}$. Então $X \backslash A = X \backslash \overline{\mathrm{int}A} = \mathrm{int}\overline{X \backslash A}$. Reciprocamente, suponha que $X \backslash A = \mathrm{int}\overline{X \backslash A}$. Então $A = X \backslash \mathrm{int}\overline{X \backslash A} = X \backslash X \backslash \overline{\mathrm{int}A} = \overline{\mathrm{int}A}$. □

**Observação 10.5.**

1. Note que se $U \subseteq X$ então $\mathrm{int}\overline{U}$ é um aberto regular. Por um lado temos $\mathrm{int}\overline{U} \subseteq \overline{\mathrm{int}\overline{U}}$. Logo $\mathrm{int}\overline{U} \subseteq \mathrm{int}\overline{\mathrm{int}\overline{U}}$.
   Por outro lado, $\mathrm{int}\overline{U} \subseteq \overline{U}$. Então $\overline{\mathrm{int}\overline{U}} \subseteq \overline{U}$. Portanto $\mathrm{int}\overline{\mathrm{int}\overline{U}} \subseteq \mathrm{int}\overline{U}$.

2. Note que se $U \subseteq X$ então $\overline{\mathrm{int}U}$ é um fechado regular. Por um lado temos $\mathrm{int}\overline{\mathrm{int}U} \subseteq \overline{\mathrm{int}U}$. Logo $\overline{\mathrm{int}\overline{\mathrm{int}U}} \subseteq \overline{\mathrm{int}U}$. Por outro lado, $\mathrm{int}U \subseteq \overline{\mathrm{int}U}$. Então $\mathrm{int}U \subseteq \mathrm{int}\overline{\mathrm{int}U}$. Portanto $\mathrm{int}U \subseteq \overline{\mathrm{int}\overline{\mathrm{int}U}}$.

$\sigma(f)$ é um conjunto aberto regular, para cada $f \in C(X)$ . As famílias $RO(X) = \{U \subseteq X : U$ é um conjunto aberto regular$\}$ e $RC(X) = \{U \subseteq X : U$ é um conjunto fechado regular$\}$ formam retículos completos[8] e distributivas com as operações:

1. $U \vee_{ro} V = \mathrm{int}\overline{U \cup V}$ e $U \wedge_{ro} V = U \cap V$.
2. $F \vee_{rc} G = F \cup G$ e $F \wedge_{rc} G = \overline{\mathrm{int}F \cap G}$.

**Observação 10.6.** Dados $A$ aberto e $B \subseteq A$ então $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Com efeito: seja $x \in A \cap \overline{B}$. Seja $V$ um aberto que contém $x$. Como $x \in A$, então $A \cap V$ é aberto que contém $x$. Como $x \in \overline{B}$, então $V \cap (A \cap B) = A \cap V \cap B \neq \emptyset$. Logo $x \in \overline{A \cap B}$.

Com efeito:

1. Pela observação acima, $\vee_{ro}$ e $\wedge_{rc}$ estão bem definidas.
2. Para $\wedge_{ro}$ e $\vee_{rc}$, basta provar que se $U$ e $V$ são abertos regulares (fechados regulares) então $U \cap V (U \cup V)$ é aberto regular(fechado regular). Como todo aberto regular (fechado regular) é aberto (fechado), $U \cap V (U \cup V)$ é aberto (fechado). Logo $U \cap V \subseteq \mathrm{int}\overline{U \cap V}(\overline{\mathrm{int}U \cup V} \subseteq U \cup V)$. Note que $\overline{U \cap V} \subseteq \overline{U}, \overline{V}(\overline{\mathrm{int}U}, \overline{\mathrm{int}V} \subseteq \overline{\mathrm{int}U \cup V})$. Logo $\mathrm{int}\overline{U \cap V} \subseteq \mathrm{int}\overline{U}, \mathrm{int}\overline{V}(\overline{\mathrm{int}U}, \overline{\mathrm{int}V} \subseteq \overline{\mathrm{int}U \cup V})$. Portanto $\mathrm{int}\overline{U \cap V} \subseteq U \cap V (U \cup V \subseteq \overline{\mathrm{int}U \cup V})$.
3. As propriedades comutativas, de absorção e idempotência são evidentes.

[8] todo subconjunto tem supremo e ínfimo

4. Para a propriedade associativa, note que $\mathrm{int}\,\overline{\mathrm{int}\,\overline{U\cup V}}\cup\overline{W} = \mathrm{int}\,\overline{U}\cup\overline{V}\cup\overline{W}$ (analogamente $\overline{\mathrm{int}\,\overline{\mathrm{int}\,U\cap V}\cap\mathrm{int}\,W} = \overline{\mathrm{int}\,U\cap\mathrm{int}\,V\cap\mathrm{int}\,W}$). A propriedade distributiva é consequência da observação acima.

5. Para ver que $RO(X)$ é completa, considere $\mathscr{F}\subseteq RO(X)$. Note que $\emptyset$ é o ínfimo de $\mathscr{F}$. Vamos mostrar que $\mathrm{int}\,\overline{\bigcup\mathscr{F}} = \sup\mathscr{F}$. Note que $U\subseteq\bigcup\mathscr{F}\subseteq\overline{\mathscr{F}}$ para todo $U\in\mathscr{F}$. Agora, seja $V\in RO(X)$ tal que $U\subseteq V$ para todo $U\in\mathscr{F}$. Então $\bigcup\mathscr{F}\subseteq V$. Logo $\overline{\bigcup\mathscr{F}}\subseteq\overline{V}$. Portanto $\mathrm{int}\,\overline{\bigcup\mathscr{F}}\subseteq\mathrm{int}\,\overline{V}=V$.
   Analogamente para $RC(X)$, considere $\mathscr{F}\subseteq RC(X)$. Vamos mostrar que $\overline{\mathrm{int}\bigcap\mathscr{F}} = \inf\mathscr{F}$. Temos $\mathrm{int}\bigcap\mathscr{F}\subseteq\bigcap\mathscr{F}\subseteq U$ para todo $U\in\mathscr{F}$. Logo $\overline{\mathrm{int}\bigcap\mathscr{F}}\subseteq U$. Agora, seja $V\in RC(X)$ tal que $V\subseteq U$ para todo $U\in\mathscr{F}$. Logo $V\subseteq\bigcap\mathscr{F}$. Portanto $V=\overline{\mathrm{int}\,V}\subseteq\overline{\mathrm{int}\bigcap\mathscr{F}}$. Note que $X$ é o supremo de $\mathscr{F}$.

Seja $(A,\vee,\wedge)$ um retículo. Então $A$ é um conjunto ordenado quando atribuímos a seguinte ordem

$$a\le b\Leftrightarrow a\wedge b=a\Leftrightarrow a\vee b=b \text{ para } a,b\in A$$

Com efeito:

1. $a\le a$ pois $a\wedge a=a$

2. Se $a\le b$ e $b\le a$ então $a\wedge b=a$ e $b\wedge a=b$. Logo $a=b$ pois $a\wedge b=b\wedge a$.

3. Se $a\le b$ e $b\le c$ então $a\wedge b=a$ e $b\wedge c=b$. Logo $a\wedge c=(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)=a\wedge b=a$. Então $a\le c$.

**Observação 10.7.** Observe que as operações $\wedge_{ro}$ e $\vee_{rc}$ não são mais que a interseção e união usual de conjuntos, respectivamente. Então, pela definição da ordem, a ordem nos retículos $RO(X)$ e $RC(X)$ é simplesmente a inclusão usual de conjuntos.

A ordem anterior é preservada por isomorfismo que preservam à ordem de operações de retículos. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

**Lema 10.5.** Sejam $A,B$ retículos e $\vartheta : A\to B$ uma bijeção. Então $\vartheta$ é um isomorfismo que preserva as operações nos retículos se, e somente se, $\vartheta$ preserva a ordem acima, isto é se cumpre:

$$a\le b\Leftarrow\vartheta(a)\le\vartheta(b) \text{ para } a,b\in A$$

*Demonstração.* Suponha que $\vartheta$ é um isomorfismo que preserva as operações em retículos. Temos

$$a\le b\Leftrightarrow a\wedge b=a\Leftrightarrow\vartheta(a\wedge b)=\vartheta(a)\Leftrightarrow\vartheta(a)\wedge\vartheta(b)=\vartheta(a)\Leftrightarrow\vartheta(a)\le\vartheta(b)$$

Agora suponha que $\vartheta$ preserva ordem. Dados $a,b \in A$, vamos mostrar que $\vartheta(a \vee b) \leq \vartheta(a) \vee \vartheta(b)$. Como $\vartheta$ é sobrejetor, existe $c \in A$ tal que $\vartheta(c) = \vartheta(a) \vee \vartheta(b)$. Logo $\vartheta(a) \leq \vartheta(c)$ e $\vartheta(b) \leq \vartheta(c)$. Então $a \leq c$ e, assim, $a \vee b \leq c$. Como $\vartheta$ preserva ordem obtemos o resultado. O outro lado da desigualdade é claro da preservação da ordem. Logo $\vartheta(a \vee b) = \vartheta(a) \vee \vartheta(b)$. A igualdade $\vartheta(a \wedge b) = \vartheta(a) \wedge \vartheta(b)$ é análoga. $\square$

**Proposição 10.2.** Seja $X$ um espaço completamente regular. Então, para qualquer $f,g \in C(X)$

$$\sigma(f) \vee_{ro} \sigma(g) = \sigma(|f|+|g|) \text{ e } \sigma(f) \wedge_{ro} \sigma(g) = \sigma(f \cdot g)$$

e

$$\rho(f) \vee_{rc} \rho(g) = \rho(|f|+|g|) \text{ e } \rho(f) \wedge_{rc} \rho(g) = \rho(f \cdot g)$$

*Demonstração.* Pelo fato que $\rho(f) = X \backslash \sigma(f)$ para todo $f \in C(X)$, é suficiente mostrar as duas últimas igualdades.

1. Temos $\rho(f) \vee_{rc} \rho(g) \subseteq \rho(f) \cap \rho(g) = \overline{\operatorname{int} f^{-1}(0)} \cap \overline{\operatorname{int} g^{-1}(0)} \subseteq f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ Note que se $x \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ então $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$. Logo $(|f|+|g|)(x) = 0$. Reciprocamente se $x \in (|f|+|g|)^{-1}(0)$ então $(|f|+|g|)(x) = 0$. Logo $|f|(x) = 0$ e $|g|(x) = 0$. Logo $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$. Portanto $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (|f|+|g|)^{-1}(0)$.
   Logo $\rho(f) \vee_{rc} \rho(g) \subseteq (|f|+|g|)^{-1}(0)$ e, assim, $\rho(f) \vee_{rc} \rho(g) \subseteq \rho((|f|+|g|)^{-1}(0))$.
   Para a inclusão contrária, pela última observação feita

   $$(|f|+|g|)^{-1}(0) \subseteq f^{-1}(0) \text{ e } (|f|+|g|)^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$$

   Logo $\rho((|f|+|g|)^{-1}(0)) \subseteq \rho(f)$ e $\rho((|f|+|g|)^{-1}(0)) \subseteq \rho(g)$. Portanto

   $$\rho((|f|+|g|)^{-1}(0)) \subseteq \rho(f) \vee_{rc} \rho(g)$$

   pois a inclusão é a ordem no espaço reticular $RC(X)$.

2. É claro que $\sigma(fg) \subseteq \sigma(f)$ e $\sigma(fg) \subseteq \sigma(g)$. Logo $\rho(f) \subseteq \rho(fg)$ e $\rho(g) \subseteq \rho(fg)$. Então $\rho(f) \wedge_{ro} \rho(g) \subseteq \rho(fg)$.
   Para a inclusão contraria, considere $V = \operatorname{int}(fg)^{-1}(0) \backslash \rho(f)$. Vamos mostrar que $V \subseteq \operatorname{int} g^{-1}(0)$. Com efeito: Seja $x \in V$. Para qualquer vizinhança $U \subseteq V$ de $x$ temos pontos $y \in U \backslash f^{-1}(0)$. Se não fosse assim teríamos que $U \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(0) \subseteq \rho(f)$. Logo $V \subseteq \rho(f) \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Logo $y \in V \subseteq \operatorname{int}(fg)^{-1}(0)$ e, assim, $g(y) = 0$ (pois $f(y) \neq 0$). Então, pela continuidade de $g$, $g(x) = 0$. Logo $V \subseteq g^{-1}(0)$. Então $V \subseteq \operatorname{int} g^{-1}(0)$, pois $V$ é aberto. Segue-se que $\operatorname{int}(fg)^{-1}(0) \subseteq \rho(f) \cup \rho(g) \subseteq \rho(f) \wedge_{ro} \rho(g)$. Portanto $\rho(fg) \subseteq \rho(f) \wedge_{ro} \rho(g)$, pois todo conjunto fechado regular é fechado.

□

**Observação 10.8.** Note que $\sigma(0 \cdot \chi_X) = \emptyset = \rho(\chi_X)$ e $\sigma(\chi_X) = X = \rho(0 \cdot \chi_X)$.

Pela proposição anterior e a observação acima, obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 10.2.** Seja $X$ um espaço completamente regular. As famílias $\{\sigma(f) : f \in C(X)\}$ e $\{\rho(g) : g \in C(Y)\}$ são subespaços reticulares distributivos e limitados de $RO(X)$ e $RC(Y)$, respetivamente.

## 10.4 Dualidade em retículos

Devido à semelhança entre retículos e as álgebras de Boole, é possível falar de dualidade também em retículos. Começamos definindo o que é um filtro primo em um retículo (que é muito similar a como foi definido em álgebras de Boole).

**Definição 10.5.** Um subconjunto próprio $\mathscr{U}$ de um retículo $A$ é um **filtro primo** se, e somente, as seguintes condições valem

1. $a \in \mathscr{U}$ para cada $a \in A$ e $b \in \mathscr{U}$ tais que $b \leq a$
2. $a \wedge b \in \mathscr{U}$ para todo $a, b$
3. Se $a \vee b \in \mathscr{U}$ então $a \in \mathscr{U}$ ou $b \in \mathscr{U}$

Denotamos por $\operatorname{Spec} A$ o espectro de $A$, que é o conjunto de todos os filtros primos de $A$. Podemos definir uma topologia para $\operatorname{Spec} A$ a partir da família

$$U_a = \{\mathscr{U} \in \operatorname{Spec} A : a \notin \mathscr{U}\} \text{ para } a \in A$$

como base para a topologia. Em efeito: Note que $U_0 = \operatorname{Spec} A$ pois $0 \notin \mathscr{U}$ para todo $\mathscr{U} \in \operatorname{Spec} A$. Sejam $U_a, U_b$. Então

$$\mathscr{U} \in U_a \cap U_b \Leftrightarrow a \notin \mathscr{U} \text{ e } b \notin \mathscr{U} \Leftrightarrow a \vee b \notin \mathscr{U} \Leftrightarrow \mathscr{U} \in U_{a \vee b}$$

Logo $U_a \cap U_b = U_{a \vee b}$.
Todo ultrafiltro em um retículo distributivo limitado é primo. Portanto o conjunto $Ult(A)$ de todos os ultrafiltros em $A$ é um subconjunto de $\operatorname{Spec} A$.

**Observação 10.9.** Dado $X$ espaço compacto Hausdorff. Como a família $C_X$ é uma base de abertos para $X$, a família $\Theta(X) := \{\rho(f) : f \in C(X)\}$ é uma base de fechados para $X$.

**Observação 10.10.** Por compacidade de $X$, todo ultrafiltro $\mathscr{U}$ no retículo $\Theta(X)$ converge[9] para um ponto em $X$. Em efeito: Suponha que existe um ultrafiltro $\mathscr{U}$ que não converge. Então, para cada $x \in X$ existe $\rho_x(f) \in \Theta(X)$ tal que $\rho(f_x) \notin \mathscr{U}$. Então $\sigma(f_x) \in \mathscr{U}$ pois $\mathscr{U}$ é primo e $\rho(f_x) \cup \sigma(f_x) = X$. A família $\{\rho(f_x) : x \in X\}$ cobre $X$. Logo existem $\rho(f_{x_1}), ..., \rho(f_{x_n})$ que cobrem $X$. Então $\bigcap_{k=1^n} \sigma(f_{x_k}) = \emptyset$. Mas isto implica que $\emptyset \in \mathscr{U}$, uma contradição.
Agora, suponha que um ultrafiltro $\mathscr{U}$ converge para pontos $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Logo, já que $X$ é Hausdorff, existem $\rho(f_x), \rho(f_y) \in \mathscr{U}$ disjuntos, o que é uma contradição. Assim, todo ultrafiltro em $\Theta(X)$ converge para um único ponto em $X$. Portanto existe um único $x \in X$ tal que $\mathscr{U} = \{F \in \Theta(X) : x \in F\}$, para todo $\mathscr{U} \in Ult(\Theta(X))$.

**Observação 10.11.** Dado $x \in X$, denote o conjunto $\{F \in \Theta(X) : x \in F\}$ como $\mathscr{U}_x$. Pela observação acima, todo ultrafiltro em $\Theta(X)$ é da forma $\mathscr{U}_x$ para algum $x \in X$.

A seguir temos a relação do espaço compacto Hausdorff $X$ com $Ult(\Theta(X))$.

**Proposição 10.3.** Seja $X$ espaço compacto Hausdorff. Então a função $\Upsilon : X \to Ult(\Theta(X))$ dada por

$$\Upsilon(x) = \mathscr{U}_x \text{ para todo } x \in X$$

é um homeomorfismo.

*Demosntração.* Lembre que, pela observação acima, $\Theta(X)$ é uma base de fechados para $X$. Note que se $\mathscr{U} \neq \mathscr{U}_y$ então existe $F \in \Theta(X)$ tal que $x \in F$ e $y \notin F$. Logo $x \neq y$. Reciprocamente se $x, y \in X$ são tais que $x \neq y$. Então, pela propriedade de Hausdorff, existe $F \in \Theta(X)$ tal que $x \in F$ e $y \notin F$. Logo $F \in \mathscr{U}_x$ e $F \notin \mathscr{U}_y$. Então $\mathscr{U}_x \neq \mathscr{U}_y$. Pela última observação $\Upsilon$ é sobrejetora. Assim, $\Upsilon$ é uma função bijetora. Finalmente, vamos mostrar que $\Upsilon$ é uma função aberta[10]. Em efeito: basta mostrar que a imagem de um aberto básico em $X$ é um aberto básico de $Ult(\Theta(X))$. Seja $x \in X$ e $f \in C(X)$. Temos:

$$x \in \sigma(f) \Leftrightarrow x \notin \rho(f) \Leftrightarrow \rho(f) \notin \mathscr{U}_x = \Upsilon(x) \Leftrightarrow \Upsilon(x) \in U_{\rho(f)}$$

Portanto $\Upsilon(\sigma(f)) = U_{\rho(f)}$. □

## 10.5 Relação do espaço $X$ com seu espaço de funções contínuas

Vejamos agora o resultado principal neste capítulo.

[9] Um ultrafiltro converge para um ponto $x$ se toda vizinhança de $x$ pertence ao ultrafiltro
[10] imagem inversa de todo aberto é um aberto

**Teorema 10.1** (Kania and Rmoutil)**.** Sejam $X$ e $Y$ espaços compacto Hausdorff e suponha que existe um isomorfismo compatível $T : C(X) \to C(Y)$. Então $X$ e $Y$ são homeomorfos.

*Demonstração.* Seja $T : C(X) \to C(Y)$ isomorfismo compatível. Pelo Corolário 10.1, a função dada por $\vartheta(\rho(f)) = \rho(Tf)$ é uma bijeção que preserva à ordem retícular de $\Theta(X)$ e $\Theta(Y)$. Note que as orden nos retículos $\Theta(X)$ e $\Theta(Y)$ é a inclusão. Pelo Lema 10.5 $\vartheta$ é um isomorfismo que preserva as operações em retículos. Logo, por dualidade, $Ult(\Theta(X))$ é homeomorfo à $Ult(\Theta(Y))$. Pela última proposição concluímos que $X$ e $Y$ são homeomorfos. □

## 10.6 Demonstração alternativa de resultados conhecidos

Vejamos o primeiro resultado

**Teorema 10.2.** Sejam $X$ e $Y$ espaços compactos Hausdorff. $X$ e $Y$ são homeomorfos se, e somente se, existe uma bijeção $T : C(X) \to C(Y)$ que é um isomorfismo de anéis[11].

e a versão mais forte

**Teorema 10.3.** Sejam $X$ e $Y$ espaços compactos Hausdorff. $X$ e $Y$ são homeomorfos se, e somente se, existe uma função bijetora $T : C(X) \to C(Y)$ multiplicativa.

*Demonstração.* Primeiro mostraremos que se $X$ e $Y$ são homeomorfos então $C(X)$ e $C(Y)$ são isomorfos como anéis. Fixe $\varphi : X \to Y$ um homeomorfismo. Considere $T_\varphi : C(Y) \to C(X)$ dada por $T_\varphi(f) = f \circ \varphi$. Foi visto no capítulo anterior que $T_\varphi$ é bijetora se, e somente se, $\varphi$ é bijetora. Vamos mostrar agora que $T_\varphi$ preserva o produto. Sejam $f, g \in C(Y)$ e $y \in Y$. Então $T_\varphi(f \cdot g)(y) = (f \cdot g)(\varphi(y)) = f(\varphi(y)) \cdot g(\varphi(y)) = T_\varphi(f)(y) \cdot T_\varphi(g)(y)$. Portanto $T_\varphi(f \cdot g) = T_\varphi(f) \cdot T_\varphi(g)$.
Reciprocamente, suponha que existe $T : C(X) \to C(Y)$ bijetora e multiplicativa. Em primeiro lugar vamos provar que se $f, g \in C(X)$ então $f \preceq g$ se, e somente se, $f \cdot g = f^2$. De fato, se $f \preceq g$ então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$. Logo $f^2(x) = g(x) \cdot f(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$ e, assim, $f^2 = f \cdot g$. Reciprocamente assumindo que $f^2 = f \cdot g$,. isto é $f^2(x) = f(x) \cdot g(x)$ para todo $x \in X$. Se $x \in \sigma(f)$, então $f(x) = g(x)$. Se $x \in \operatorname{supp} f \backslash \sigma(f)$, então $x = lim_{n\in\omega} x_n$ com $x_n \in \sigma(f)$. Logo, da continuidade de $f$ e $g$, $f(x) = g(x)$ . Portanto $f \preceq g$.
Agora, do fato que $T$ é multiplicativo, $T^{-1}$ é multiplicativo[12]. Assim basta provar que $T$ é isomorfismo compatível. De fato, se $f \preceq g$ então $f^2 = f \cdot g$. Logo $Tf^2 = (Tf)^2 = T(f \cdot g) = Tf \cdot Tg$ e, assim, $Tf \preceq Tg$. Por o teorema principal, $X$ e $Y$ são homeomorfos. □

**Observação 10.12.** Com a parte inicial na prova anterior podemos concluir que se $X$ e $Y$ são homeomorfos então existe $T : C(X) \to C(Y)$ tanto isomorfismo compatível (pois já vimos que $T$ ser multiplicativa implica que é um isomorfismo compatível).

11 $C(X)$ com as operações soma e produto ponto a ponto

12 Sejam $g_1, g_2 \in C(X)$ e considere $h_1 = T^{-1}g_1$ e $h_2 = T^{-1}g_2$ (existem pois $T$ é bijetor). Logo $T^{-1}g_1 \cdot T^{-1}g_2 = T^{-1}(g_1 \cdot g_2)$

Antes de fazer o segundo resultado, precisamos lembrar e provar alguns fatos importantes. Seja $X$ compacto Hausdorff e dado $f \in C(X)$, definimos as funções $f^+$ e $f^-$ como

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & se\ f(x) \leq 0 \\ \\ 0 & caso\ \ contrário \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x) & se\ f(x) \geq 0 \\ \\ 0 & caso\ \ contrário \end{cases}$$

Note que $f^+, f^- \geq 0$ e que se $f$ é contínua então $f^+$ e $f^-$ são contínuos e que $f = f^+ - f^-$. Vamos ver a seguinte equivalência

**Lema 10.6.** Sejam $f, g \in C(X)$. Então $f \preceq g$ se, e somente se, $f^+ \preceq g^+$ e $f^- \preceq g^-$

*Demonstração.* Suponha que $f \preceq g$, ou seja, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$. Seja $x \in \sigma(f^+)$. Então $f^+(x) > 0$ e, assim, $f^-(x) = 0$. Logo $g(x) = f(x) = f^+(x) > 0$. Assim $g^+ = g(x)$, e portanto $f^+(x) = g^+(x)$ para todo $x \in \sigma(f^+)$. Se $x \in \operatorname{supp} f^+ \backslash \sigma(f^+)$, então $x = lim_{n \in \omega} x_n$ onde $x_n \in \sigma(f^+)$. Logo, pela continuidade de $f^+$ e $g^+$, $f^+(x) = g^+(x)$. Para $f^-$ é análogo.
Reciprocamente, suponha que $f^+ \preceq g^+$ e $f^- \preceq g^-$. Seja $x \in \sigma(f)$, isto é $f(x) > 0$. Então $f^+(x) = f(x)$ e $f^-(x) = 0$. Se fosse $g(x) < 0$ então $g^+(x) = 0$ e $g^-(x) = -g(x)$. Mas, do fato que $f^+ \preceq g^+$, teríamos que $f^+(x) = g^+(x) = 0$ o que contradiz o anterior. Logo $g(x) > 0$ e, assim, $g^+(x) = g(x)$ e $g^-(x)$. Portanto $f(x) = f^+(x) = g^+(x) = g(x)$ para cada $x \in \sigma(f)$. Por continuidade concluímos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$. Analogamente, se $f(x) < 0$ então $g(x) < 0$ (a prova é a mesma, supor que fosse $g(x) > 0$). Assim $f(x) = -f^-(x) = -g^-(x) = g(x)$ para todo $x \in \sigma(f)$ e portanto $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$ (por continuidade).

$\square$

**Lema 10.7.** Sejam $f, g \in C(X)$. Então $f \preceq g$ se, e somente se $f \leq g$[13] e $\max\{g - f, f\} \geq g$.

*Demonstração.* Suponha primeiro que $f \preceq g$, isto é $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$. Pelo lema anterior, podemos supor que $f, g$ são positivas. A primeira desigualdade é evidente. Para a segunda, seja $x \in \operatorname{supp} f$. Então $g(x) = f(x) \leq \max\{g(x) - f(x), f(x)\}$. Se $x \notin \operatorname{supp} f$ então $g(x) = g(x) - 0 = g(x) - f(x) \leq \max\{g(x) - f(x), f(x)\}$.
Agora suponha que temos $f \leq g$ e $\max\{g - f, f\} \geq g$. Se $x \in \sigma(f)$, temos por um lado $f(x) \leq g(x)$. Por outro lado, já que $g(x) \geq 0$ e $f(x) > 0$, então $g(x) - f(x) < g(x) \leq \max\{g(x) - f(x), g(x)\} = f(x)$. Assim $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \sigma(f)$. Portanto, por continuidade, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$ (isto é $f \preceq g$). $\square$

[13] isto significa que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$

**Teorema 10.4.** Sejam $X$ e $Y$ espaços compactos Hausdorff e $T : C(X) \to C(Y)$ uma bijeção. Se $T$ é um isomorfismo que preserva as operações em retículos[14] então $X$ e $Y$ são homeomorfos.

*Demonstração.* Vamos mostrar que um isomorfismo que preserva operações em retículos é equivalente a preservar a ordem ponto a ponto. Suponha primeiro que $T$ é um isomorfismo que preserva as operações em retículos. Se $f \leq g$ então $\max\{f,g\} = g$. Logo $\max\{Tf, Tg\} = T(\max\{f,g\}) = Tg$, ou seja, $Tf \leq Tg$. A prova é a mesma se fosse $\max\{f,g\} = f$.
Reciprocamente, se $T$ preserva a ordem ponto a ponto. Se $\max\{f,g\} = f(\min\{f,g\} = g)$ então $g \leq f$. Consequentemente $Tg \leq Tg$, ou seja, $\max\{Tf,Tg\} = Tf(\min\{Tf,Tg\} = Tg)$. Logo $T(\max\{Tf,Tg\}) = Tf = \max\{Tf,Tg\}(T(\min\{f,g\}) = \min\{Tf,Tg\})$. A prova é a mesma se $\max\{f,g\} = g$.
Para concluir a prova, vamos provar que se $T$ preserva a ordem ponto a ponto então $T$ é um isomorfismo compatível. De fato: sejam $f,g \in C(X)$ tais que $f \preceq g$. Pelo Lema 10.6, podemos considerar $f,g$ positivos. Também, pelo lema anterior, $f \leq g$ e $g \leq \max\{g-f, f\}$. Logo $0 \leq g-f$ e já que $f \geq 0$ temos $0 \leq g-f < g$. Logo $0 \leq T(g-f) < Tg$ e $Tg \leq T(\max\{g-f,f\}) = \max\{T(g-f),Tf\}$ (pela segunda desigualdade). Seja $y \in \sigma(Tf)$. Note que $Tg(y) \leq Tf(y)$ e $Tg(y) \leq \max\{T(g-f)(y), Tf(y)\}$. Note que, da hipótese que $f \preceq g$, $\min\{g-f,f\} = 0$ pois $f(x) = 0$ se $x \notin \operatorname{supp} f$ e $g(x) - f(x) = 0$ se $x \in \operatorname{supp} f$. Logo $T(\min\{g-f,f\}) = \min\{T(g-f),Tf\} = T0 = 0$. Mas $T(f)(y) = 0$, o que implica que $T(g-f)(y) = 0$. Logo $Tg(y) \leq \max\{T(g-f)(y), Tf(y)\} = Tf(y)$ e, assim, $Tf(y) = Tg(y)$ para todo $y \in \sigma(Tf)$. Portanto, por continuidade, $Tf(y) = Tg(y)$ para todo $y \in \operatorname{supp} Tf$, isto é $Tf \preceq Tg$. Ou seja, $T$ é um isomorfismo compatível, e pelo teorema principal $X$ e $Y$ são homeomorfos. □

Vejamos o último resultado.

**Teorema 10.5.** Sejam $X,Y$ espaços compactos Hausdorff e $T : C(X) \to C(Y)$ uma bijeção. $X$ e $Y$ são homeomorfos se, e somente se, $T$ é linear e preserva disjuntividade.

*Demonstração.* Se $T$ preserva disjuntividade então $T^{-1}$ também preserva[15]. Sejam $f,g \in C(X)$ tais que $f \preceq g$ (isto é $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$). Logo $(g-f) \cdot f = 0$ e, assim, $T(g-f) \cdot Tf = 0$. Se $y \in \sigma(Tf)$, então $Tf(y) \neq 0$ e portanto, já que $T$ é linear, $T(g-f)(y) = Tg(y) - Tf(y) = 0$. Assim $Tf(y) = Tg(y)$ para todo $y \in \operatorname{supp} Tf$. Logo, por continuidade, $Tf(y) = Tg(y)$ para todo $y \in \operatorname{supp} Tf$. Portanto, $T$ é isomorfismo compatível. Logo, pelo resultado principal $X$ e $Y$ são homeomorfos. □

**Observação 10.13.** Do Lema 10.2 se $X$ e $Y$ são homeomorfos então existe uma função $T : C(X) \to C(Y)$ que preserva disjuntividade.

---

[14] $C(X)$ com as operações reticulares max e min

[15] Huijsmans C.B. e de Pagter B. no artigo “Invertible dijointness preserving operators”, Proceed. Edinburgh. Math. Soc. 37 (1994), 125-132

CAPÍTULO

11

# ALGUNS JOGOS TOPOLÓGICOS

Um jogo topológico é um jogo infinito que é jogado entre dois jogadores sobre um espaço topológico. As condições para um jogador ganhar envolvem diversas propriedades. Jogos topológicos são utilizados para descrever novas propriedades em espaços topológicos ou para dar outra maneira de ver propriedades conhecidas. Neste capítulo veremos alguns exemplos de jogos topológicos, utilizando propriedades apresentadas neste trabalho.

Usamos como refência (TKACHUK, 2011)

## 11.1 Separabilidade e Bases enumeráveis

**Proposição 11.1.** Seja $X$ espaço compacto Hausdorff. $X$ tem base enumerável se, e somente se, $C(X)$ é separável

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.2, $X$ é metrizável. Seja $d$ uma métrica definida em $X$. Para cada $x \in X$ e $n \in \omega$ defina $f_{x,n} : X \to \mathbb{R}$ como

$$f_{x,n}(y) = \frac{1}{n} - d(x,y) \text{ se } d(x,y) \leq \frac{1}{n} \text{ e } f_{x,n}(y) = 0 \text{ caso contrário}$$

Temos que $f_{x,n}$ é contínua para cada $x \in X$ e $n \in \omega$ (pois $f_{x,n}(y) = 0$ para todo $y \in \partial B_{\frac{1}{n}}(x)$).
Para cada $x \in X$ e $n \in \omega$ considere $V_{x,n} = \{y : f_{x,n}(y) > 0\}$. Note que $V_{x,n} = f_{x,n}^{-1}((0,\infty+))$. Então $V_{x,n}$ é aberto. Logo, para cada $n \in \omega$, $\{V_{x,n} : x \in X\}$ é uma cobertura aberta para $X$. Pela compacidade, existe $N_n$ tal que $\{V_{x_i^n,n}\}_{i=1}^{N_n}$ cobre $X$. Considere $V = \bigcup_{n\in\omega}\{V_{x_i^n,n}\}_{i=1}^{N_n}$. Temos que $V$ é uma família de abertos enumerável.
Agora, considere $D = \{f_{x_i,n_i}\}_{i\geq 1}$. Vamos mostrar que $D$ separa pontos de $X$. Com efeito: Sejam $x \neq y$ (ou seja, $d(x,y) > 0$). Tome $n$ o suficientemente grande de tal maneira que $\frac{2}{n} < d(x,y)$. Como $V$ cobre $X$, existe $x_k^n$ tal que $x \in V_{x_n^k,n}$. Então $d(y,x_k^n) > \frac{1}{n}$, pois se fosse $d(y,x_k^n) \leq \frac{1}{n}$

teríamos que $d(x,y) \leq \frac{2}{n} < d(x,y)$, uma contradição. Logo $y \notin V_{x_k^n,n}$. Finalmente pelo Teorema de Weierstrass (considerando combinações lineares de $D$ e adicionando o elemento 1), concluímos que $D$ é denso em $C(X)$.
Reciprocamente, seja $F \subseteq C(X)$ denso enumerável. Considere a família

$$\mathscr{B} = \{f^{-1}((a,b)) : f \in F, a < b \in \mathbb{Q}\}$$

Temos que $\mathscr{B}$ é uma família de abertos (pois $f \in C(X)$) de $X$, enumerável.
Vamos mostrar que $\mathscr{B}$ é uma base. Seja $U$ aberto e $x \in U$. Pelo Lema de Urysohn, existe $h \in C(X)$ tal que $h(x) = 0$ e $h(X \backslash U) = \{1\}$. Como $F$ é denso, existe $f \in F$ tal que $||f - h||_{sup} < \frac{1}{2}$. Em particular, $|f(x)| < \frac{1}{2}$. Logo $x \in f^{-1}((\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$. Se fosse $f^{-1}((\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})) \not\subseteq U$, teríamos que existe $x \notin U$ e $x \in f^{-1}((\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$. Logo $f(x) = 1$ e $f(x) \in (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, o que é absurdo. Por tanto $x \in f^{-1}((\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})) \subseteq U$. □

Denote por

$$\begin{gathered} \mathfrak{B} : \text{a família das famílias que são bases em } X. \\ \mathfrak{B}_\pi : \text{a família das famílias que são } \pi\text{−bases em } X. \\ \mathfrak{D} : \text{a família dos conjuntos densos em } X. \end{gathered}$$

**Definição 11.1.** Seja $X$ um espaço topológico. Definimos o jogo $G_1(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ como sendo

Na rodada $n \in \omega$ o Jogador $I$ joga $\mathscr{B}_n \in \mathfrak{B}$. O Jogador $II$ responde jogando $B_n \in \mathscr{B}_n$

O Jogador $II$ ganha se a família $\{B_n : n \in \omega\} \in \mathfrak{B}$. Caso contrário $I$ ganha.

**Definição 11.2.** Seja $X$ um espaço topológico. Definimos o jogo $G_1(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$ como sendo

Na rodada $n \in \omega$, o Jogador $I$ joga $\mathscr{D}_n \in \mathfrak{D}$. O Jogador $II$ responde jogando $D_n \in \mathscr{D}_n$

O Jogador $II$ ganha se a família $\{D_n : n \in \omega\} \in \mathfrak{D}$. Caso contrário $I$ ganha.

Note que se o Jogador $I$ não tem estratégia vencedora[1] no Jogo $G_1(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ então o espaço $X$ tem base enumerável.
No caso de espaços métricos é possível obter o seguinte resultado:

**Lema 11.1.** Seja $X$ um espaço metrizável. $X$ é separável se, e somente se, o Jogador $II$ tem estratégia vencedora no jogo $G_1(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$

[1] uma estratégia é a maneira como o Jogador $i$ vai jogar, onde $i = I, II$. Uma estratégia vencedora é uma estratégia que garante que o Jogador $i$ é o ganhador ($i = I, II$), independente da estratégia do outro jogador

*Demonstração.* Pela Proposição 2.8 temos que $X$ tem base enumerável. Logo existe $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ base enumerável. Seja $\mathscr{D}_n$ a $n-$ésima jogada do Jogador $I$ no jogo $G_1(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$. Então existe $x_n \in \mathscr{D}_n \cap B_n$ para cada $n \in \omega$. A família $\mathscr{D} = \{x_n : n \in \omega\}$ é densa em $X$. Com efeito: seja $A \subseteq X$ aberto não vazio. Considere $x \in A$. Logo existe $B_m \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_m \subseteq A$. Logo $x_m \in A$, isto é $\mathscr{D} \cap A \neq \emptyset$. Reciprocamente, se o Jogador $II$ tem estratégia vencedora, então $X$ tem um subconjunto denso enumerável. □

**Definição 11.3.** Seja $X$ um espaço topológico. Definimos o jogo $G_1(\mathfrak{B}_\pi, \mathfrak{B}_\pi)$ como sendo

Na rodada $n \in \omega$ o Jogador $I$ joga $\mathscr{B}_n \in \mathfrak{B}_\pi$. O Jogador $II$ responde jogando $\{B_n : n \in \omega\} \in \mathscr{B}_n$

O Jogador $II$ ganha se a família $\{B_n\} \in \mathfrak{B}_\pi$. Caso contrário $I$ ganha.

**Lema 11.2.** Seja $X$ um espaço topológico. $X$ tem $\pi-$base enumerável se, e somente se, o Jogador $II$ tem estratégia vencedora no jogo $G_1(\mathfrak{B}_\pi, \mathfrak{B}_\pi)$

*Demonstração.* Por hipótese existe $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \omega\}\pi-$base enumerável. Seja $\mathscr{B}_n$ a $n-$ésima jogada do Jogador $I$ no jogo $G_1(\mathfrak{B}_\pi, \mathfrak{B}_\pi)$. Para cada $B_n$ existe $V_n \in \mathscr{B}_n$ tal que $V_n \subseteq B_n$. Então $\{V_n : n \in \omega\}$ é uma $\pi-$base enumerável. O Jogador $II$ responde jogando $V_n$ em sua $n-$ésima jogada, e assim o Jogador $II$ tem estratégia vencedora. Reciprocamente, se o Jogador $II$ tem estratégia vencedora então $X$ tem $\pi-$base enumerável. □

## 11.2 Ordem compatível

**Definição 11.4.** Seja $X$ um espaço topológico. Definimos o jogo de Choquet como segue

Na rodada 0, o Jogador $I$ joga $U_0 \subseteq X$ não vazio. O Jogador $II$ responde jogando $V_0$ aberto não vazio tal que $V_0 \subseteq U_0$. Nas rodadas seguintes, o Jogador $I$ joga $U_n$ aberto não vazio tal que $U_n \subseteq V_{n-1}$ e o Jogador $II$ responde jogando $V_n$ aberto não vazio tal que $V_n \subseteq U_n$.

O Jogador $II$ vence se $\bigcap U_n (= \bigcap V_n) \neq \emptyset$. Caso contrário $I$ ganha.

Utilizando a ordem compatível no espaço das funções contínuas podemos definir:

**Definição 11.5.** Seja $X$ um espaço topológico. Definimos o seguinte jogo topológico

Na rodada 0, o Jogador $I$ joga $f_0 \in C(X)$ distinto de 0. O Jogador $II$ responde jogando $g_0$ distinto de 0 tal que $g_0 \preceq f_0$. Nas rodadas seguintes, o Jogador $I$ joga $f_n \neq 0$ tal que $f_n \preceq g_{n-1}$ e o Jogador $II$ responde jogando $g_n \neq 0$ tal que $g_n \preceq f_n$.

O Jogador $II$ vence se $\bigcap \sigma(f_n) (= \bigcap \sigma(g_n)) \neq \emptyset$. Caso contrário $I$ ganha. Vamos chamar esse jogo de Jogo-Compatível

**Proposição 11.2.** Dado $X$ espaço completamente regular. Se o Jogador $II$ tem estratégia vencedora no Jogo-Compatível, então o Jogador $II$ tem estratégia vencedora no jogo de Choquet.

*Demonstração.* Suponha que o Jogador $II$ tem estratégia vencedora no Jogo-Compatível. Então o Jogador $I$, no jogo de Choquet, começa jogando $U_0 \neq \emptyset$. Como $\{\sigma(f) : f \in C(X)\}$ é uma base para $X$, existe $f_0 \neq 0$ tal que $\sigma(f_0) \subseteq U_0$. O Jogador $II$ responde jogando $V_0 = \sigma(g_0)$ onde $0 \neq g_0 \preceq f_0$, que corresponde a jogada vencedora no Jogo-Compatível. Nas rodadas seguintes, o Jogador $I$ joga $U_n \neq \emptyset$ tal que $U_n \subseteq V_{n-1}$. Considere $f_n = g_{n-1}\chi_{\sigma(f_{n-1})}$. Note que $f_n \preceq g_{n-1}$ para cada $n \in \omega$. Então, o Jogador $II$ responde jogando $V_n = \sigma(g_n)$, onde $0 \neq g_n \preceq f_n$ é o correspondente a jogada vencedora no Jogo-Compatível. Portanto $\bigcap V_n = \bigcap \sigma(g_n) \neq \emptyset$, e assim o Jogador $II$ tem estratégia vencedora no Jogo de Choquet. $\square$

## 11.3 Propriedades de separação

**Definição 11.6.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Definimos o seguinte jogo topológico

Na rodada $n$, o Jogador $I$ joga $A_n$ uma anticadeia infinita enumerável. O Jogador $II$ responde jogando $a_n \in A$

O Jogador $II$ vence se existem $k,m,l \in \omega$ tais que $a_x \leq a_k$ para uma quantidade infinita de $a_x \in A_m$ e $a_y \cdot a_k = 0$ para uma quantidade infinita de $a_y \in A_l$. Caso contrário $I$ ganha. Vamos chamar esse jogo de Jogo-Separa1

**Lema 11.3.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. $A$ tem a propriedade fraca de separação subsequencial se, e somente se, o Jogador $II$ tem estratégia vencedora no Jogo-Separa1

*Demonstrąão.* Suponha primeiro que $A$ tem a propriedade fraca de separação subsequencial. O Jogador $I$ joga uma anticadeia infinita enumerável $A_0$. Então o Jogador $II$ responde jogando o elemento $a \in A$ que separa $A_0$. Agora suponha que $A$ não tenha a propriedade. Então existe uma anticadeia infinita enumerável $B$ tal que não admite separação. Então o Jogador $I$ tem estratégia vencedora jogando anticadeia $B$ em cada uma de suas jogadas. $\square$

**Definição 11.7.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. Definimos o seguinte jogo topológico

Na rodada 0, o Jogador $I$ joga $A_0$ uma anticadeia infinita. O Jogador $II$ responde jogando $a_0 \in A$. Nas rodadas seguintes $A_n$ uma anticadeia infinita, cujos elementos são todos disjuntos dos elementos de $A_k$, para todo $0 \leq k < n$ e o Jogador $II$ responde jogando $a_n \in A$.

O Jogador $II$ vence se existem $k,m,l \in \omega$ tais que $a_x \leq a_k$ para uma quantidade infinita de $a_x \in A_m$ e $a_y \cdot a_k = 0$ para uma quantidade infinita de $a_y \in A_l$. Caso contrário $I$ ganha. Vamos chamar esse jogo de Jogo-Separa2

**Lema 11.4.** Seja $A$ uma álgebra de Boole. $A$ tem a propriedade fraca de separação subsequencial se, e somente se, o Jogador $II$ tem estratégia vencedora no Jogo-Separa2

*Demonstração.* Suponha primeiro que $A$ tem a propriedade fraca de separação subsequencial. O Jogador $I$ joga uma anticadeia infinita $A_0$. Então o Jogador $II$ responde jogando o elemento $a \in A$ que separa $A_0$. Agora suponha que $A$ não tenha a propriedade. Então existe uma anticadeia infinita enumerável $B$ tal que não admite separação. Considere uma partição de $\omega$ em uma quantidade infinita de subconjuntos infinitos, ou seja, $\omega = N_0 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_n \cup \ldots$. Considere $A_n = \{a_k \in A : k \in N_n\}$. Note que $B = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$. Como $B$ não admite separação então $A_n$ não admite separação para cada $n \in \omega$. Então o Jogador $I$ tem estratégia vencedora, jogando anticadeia $A_n$ em cada uma de suas jogadas. $\square$

# REFERÊNCIAS


BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue Measures**. New York: John Wiley and Sons, 1996. v. 10. 179 p. Citado nas páginas 67 e 75.

BRECH, C. **Aspectos combinatórios da geometria de espaços de Banach C(K) com a propriedade de Grothendieck**. 189 p. Dissertação (Mestrado), Instituto de Matemática e Estadística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004. Citado nas páginas 47 e 67.

BRÉZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Universitex. Berlim: Springer, 1996. v. 10. 179 p. Citado nas páginas 67 e 71.

CAROTHERS, N. L. **Real Analysis.** Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 401 p. Citado na página 37.

CIESIELSKI, K. **Set theory for the working mathematician**. London: Cambridge University Press., 1997. 236 p. Citado nas páginas 25 e 37.

DAVEY G. W. PRIESTLEY, H. A. **Introduction to Lattices and Order**. Cambridge: Cambridge University Press., 2002. 298 p. Citado na página 117.

DAY, G. W. Free complete extensions of boolean algebras. **Pacific Journal of Mathematics,**, v. 15, p. 1145–1151, 1965. Citado na página 47.

____. Superatomic boolean algebras. **Pacific Journal of Mathematics,**, v. 23, p. 479–489, 1967. Citado na página 47.

DIAS R. R. TALL, D. F. Indestructibility of compact spaces. **Topology and its Applications**, v. 160, p. 2411–2426, 2013. Citado na página 47.

DIESTEL, J. **Sequences and Series in Banach Spaces**. Berlim: Springer-Verlag, 1984. 261 p. Citado na página 78.

ENGELKING, R. **General Topology**. Berlim: Polish Scientific Publishers, 1974. v. 6. 526 p. Citado nas páginas 25, 67 e 72.

JAMES, R. C. A nonreflexive banach space isometric with its second conjugate space. **Proceedings of the Natural Academy of Sciencies of USA**, v. 37, n. 3, p. 174–177, 1951. Citado na página 85.

KANIA T. RMOUTIL, M. Recovering a compact hausdorff space x from the compatibility ordering on c(x). **Pre print**. Citado na página 117.

KOCHANEK, T. **Combinatorics in Banach space theory**. University of Silesia: Website, 2012–2013. Disponível em: <http://www.impan.pl/~tkoch/teaching/cbst_lecture_6.pdf>. Citado na página 99.

KOPPELBERG, S. **Handbook of Boolean algebras**. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1989. v. 1. 3121 p. Citado nas páginas 47 e 99.

KOSZMIDER, P. Universal objects and associations between classes of banach spaces and classes of compact spaces. **Zbornik Radova**, v. 17(25), p. 93–115, 2015. Citado na página 109.

KOZMIDER P. SHELAH, S. Independent families in boolean algebras with some separation properties. **Algebra Universalis**, Matematiĉki institut SANU, Beograd, v. 69, p. 305–312, 2013. Citado na página 99.

LIN, P. **Köthe-Bochner Function Spaces**. [S.l.]: Springer Science+Bussines Media, 2004. v. 9. Citado na página 67.

MATHNOTES. **On some mathematical topics i found interesting**. Website, 2013. Disponível em: <https://chiasme.wordpress.com/2013/06/19/cantor-bendixson-rank-in-topology-sierpinski-mazurkiewicz-theorem>. Citado na página 95.

MAZURKIEWICZ S. SIERPIǸSKI, W. Contribution à la topologie des ensembles dénombrables. **Fundamenta Mathematicae**, v. 1, p. 17–27, 1920. Citado na página 95.

MORRISON, J. T. **Functional Analysis. An introduction to Banach Space Theory**. New York: John Wiley and Sons, 2001. v. 10. Citado nas páginas 85, 87, 90, 91 e 92.

MUNKRES, J. **Topology**. USA: Prentice Hall, Inc., 2000. v. 10. 537 p. Citado nas páginas 25 e 37.

SCHLÖRDER, J. J. **Ordinal arithmetics**. Prentice Hall, Inc., 2012. Disponível em: <http://www.math.uni-bonn.de/ag/logik/teaching/2012WS/Set20theory/oa.pdf>. Citado na página 37.

SEMADENI, Z. **Banach Space of Continuous Functions**. Poland: Warsawa, 1971. v. 1. 584 p. Citado nas páginas 67 e 76.

TALAGRAND, M. Un nouveau c(k) qui possède la propriété de grothendieck. **Israel Journal of Mathematics**, London, v. 37, p. 181–191, 1980. Citado nas páginas 67 e 76.

TKACHUK, V. V. **A $C_p$ Theory problem book**: Topological and function spaces. New York: Springer, 2011. Citado nas páginas 117 e 129.

TSERUNYAN, A. **Introduction to descriptive set theory.** University of Illinois at Urbana Champaign: Website, 2014. Disponível em: <http://www.math.uiuc.edu/~anush/Notes/dst_lectures.pdf>. Citado na página 37.

WOFSEY, E. **Boolean Algebras**. Mathcamp: Website, 2009. Disponível em: <http://math.harvard.edu/~waffle/papers.html>. Citado na página 47.

WOJTASZCZYK, P. **Banach Spaces for analysts**. Cambridge: John Wiley and Sons, 1991. Citado nas páginas 67 e 70.

# ÍNDICE

Álgebra de Boole
completa, 52
definição, 48
livre, 57
superatômica, 60
Átomo, 60

Algumas partes reflexivo, 92
Anticadeia, 52

Base
$\pi-$base, 33
completamente limitada, 89
contrátil, 88
de Schauder, 87
definição, 87
equivalente, 92
fraca, 90
fraca de Schauder, 90
fraca$^*$, 90
ortogonal, 93
topológica, 28
Base local, 28
Boa ordem, 25

Classe
$B-$associadas, 114
$K$-associadas, 114
associadas, 114
fortemente associadas, 114
Compactificação de Stone-Čech, 64
Conjunto
aberto, 28
aberto regular, 121
fechado, 28
fechado regular, 121
totalmente ordenado, 27
Conjunto transitivo, 26
Corpo de conjuntos, 52
Cota superior, 27

Decomposicção de Hahn, 75
Diâmetro, 45

Elemento maximal, 27
Espaço
$IAN$, 29
$IIAN$, 29
$T_1$, 29
métrico, 31
booleano, 54
compacto, 29
completamente metrizável, 43
completamente regular, 36
Completo, 44
de Banach, 67
de Hausdorff, 29
de James, 87
de Stone, 53
denso, 33
disperso, 60
dual, 68
metrizável, 32
normal, 30
perfeito, 43
polonês, 43
regular, 30
separável, 33
topológico, 28

totalmente limitado, 43
zero-dimensional, 29
Esquema de Cantor, 45

Família
direta, 58
independente, 57
Filtro
definição, 49
maximal, 50
próprio, 49
primo, 50
ultrafiltro, 50
Filtro em retículo
primo, 124
Forma normal, 57
Fracamente
relativamente compacto, 70
compacto, 70
sequencialmente compacto, 70
Função
simples Integrável, 73
integrável, 74
simples, 73
Funcional de Minkowski, 82

Hiperplano
Definição, 81
separa, 82
separa estritamente, 82
Homomorfismo, 51

Ideal, 56
Imagem homomorfa, 51
Isometria, 79
Isomorfismo
álgebras de Boole, 51
compatível, 118
Isomorfismo de ordem, 39
Isomorfsimo
espaços de Banach, 79

Lema
de Rosenthal, 78
de Urysohn, 34
de Zorn, 27

métrica, 31
Medida
boreliana, 74
de Radon, 74
finitamente aditiva, 73
limitada, 73
norma, 73
realizada, 75
regular, 74
Morfismo compatível, 118

Ordem, 25
Ordem compatível, 118
Ordem lexicográfica, 42
Ordinal
definição, 37
exponenção, 42
limite, 38
produto, 42
soma, 42
sucessor, 38

Ponto
de acumulaçao, 43
isolado, 41
Posto de Cantor-Bendixson, 95
Produto elementar, 57
Propriedade
de completitude subsequencial, 100
de Grothendieck em álgebras de Boole, 102
de Grothendieck em espaços de Banach, 101
de separação subsequencial, 100
fraca de separação subsequencial, 99
positiva de Grothendieck, 104

Propriedade da interseção finita, 50

Quociente, 56

Segmento inicial, 39
Separar pontos, 71
Sequência
  de blocos básica, 91
  fracamente convergente, 69
  fracamente* convergente, 70
Sistema
  biortogonal, 87
  característico, 96
Subálgebra
  definição, 52
  gerada, 57
Subconjunto
  negativo, 74
  nulo, 74
  positivo, 74

Teorema
  de Extensão de Tietze, 34
  da decomposicção de Hahn, 74
  da extensão de Sikorski, 60
  da representação de Stone (VC), 53
  da representação de Stone (VT), 55
  de Banach-Alaoglu-Bourbaki, 71
  de Dieudonné-Grothendieck, 78
  de Eberlein-Šmulian, 70
  de extensão de Sikorski I, 58
  de extensão de Sikorski II, 59
  de Hanh-Banach, primeira forma geométrica, 83
  de Hanh-Banach, segunda forma geométrica, 84
  de James, 91
  de Kania and Rmoutil, 126
  de Mostowski-Tarski, 61
  de Representação de Riesz, 76
  de Sierpinski-Mazurkiewicz, 97
  de Stone-Weierstrass, 72
  de Tarski, 51
  do homomorfismo, 56
  indução para ordinais, 38
Topologia
  da ordem, 40
  definição, 27
  fraca, 69
  fraca*, 70
  induzida, 29

Variação
  negativa, 75
  positiva, 75
  total, 75