Conectividad de variedades semi-algéblicas

Juan Carlos Nuñez Maldonado

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Juan Carlos Nuñez Maldonado

Conectividade de variedades semi-algébricas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos

USP – São Carlos
Junho de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M634c Maldonado, Juan Carlos Nuñez
Conectividade de variedades semi-algébricas / Juan
Carlos Nuñez Maldonado; orientador Raimundo Nonato
Araújo dos Santos. - São Carlos - SP, 2017.
74 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Ponto focal e teorema de Lefschetz.
2. Estrutura de conjuntos semi-algébricos. 3. teorema
da fibração local e global. 4. topologia das fibras e
do link. 5. conexidade de hipersuperfícies genéricas.
I. Santos, Raimundo Nonato Araújo dos, orient. II.
Título.

Juan Carlos Nuñez Maldonado

Connectivity of semi-algebraic varieties

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos

USP – São Carlos
June 2017

*Aos meus pais,
Isabel Maldonado e Moises Nuñez.*

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo agradeço a Deus, pela presença constante em minha vida, e por me dar saúde e força em todos os momentos.

Agradeço profundamente aos meus pais, Isabel e Moises, pelo amor, e por suas orações que foram fundamentais para me fortalecer. Toda vez que eu falava com eles, sempre me lembravam: "estamos orando por você, estamos orando por você..."

Agradeço ao meu amigo e orientador pelo conhecimento transmitido, paciência, humildade, e amizade.

Agradeço aos professores Oziride Manzoli, Maria Aparecida, Behrooz Mirzaii, Farid Tari, Eduardo Tengan pelo apoio acadêmico e pela atenção que me dispensaram.

Agradeço aos meus amigos: Alberto, David, Francisco, Emanuel, Julian, Junior, Piere, Rafaela e Welinton pela amizade, auxílio e apoio.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a concretização deste trabalho.

MUITO OBRIGADO!

*“As invenções são, sobretudo,
o resultado de um trabalho de teimoso.”
(Santos Dumont)*

RESUMO

JUAN, C. N. M. **Conectividade de variedades semi-algébricas**. 2017. 74 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Neste projeto apresentamos os teoremas de estrutura, decomposição celular, e o teorema da existência da triangulação para conjuntos semi-algébricos compactos. Como aplicações destes teoremas mostramos o lema de seleção da curva local e global. Além disso, apresentamos uma breve descrição da topologia da fibra de Milnor local e global, bem como alguns resultados sobre o grau de conexidade da fibra genérica global de uma função polinomial complexa, que mostram a íntima relação entre o grau de conexidade com a dimensão do conjunto singular.

Palavras-chave: Ponto focal e teorema de Lefschetz, Estrutura de conjuntos semi-algébricos, teorema da fibração local e global, topologia das fibras e do link, conexidade de hipersuperfícies genéricas.

ABSTRACT

JUAN, C. N. M. **Connectivity of semi-algebraic varieties**. 2017. 74 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

In this project we present some structure theorems, cell decomposition, and the theorem on the existence of triangulation for compact semi-algebraic sets. As applications we prove the curve selection lemma in the local and global cases. Moreover, we present a brief description about the topology of local and global Milnor's fibers, as well as, some results about the connectivity degree of the generic fibers of a complex polynomial function, that show the close relation between the connectivity degree and the dimension of the singular locus.

Keywords: Focal point and Lefschetz theorem, structure of Semi-algebraic sets, Milnor fibration local and global, topology of the fibers and link, on the connectivity of generic hypersurfaces.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	PRELIMINARES	19
2.1	Conjuntos semi-algébricos	19
2.2	Simplexos em $\mathbb{R}^n$	21
2.3	Ferramentas da topologia algébrica	22
2.3.1	<i>Homotopia</i>	22
2.3.2	<i>Grupo de homotopia de ordem superior</i>	23
2.3.3	<i>Grupos de homotopia relativos de ordem superior</i>	24
2.3.4	<i>Resultados sobre grupos de homologia singular e grupos de homologia reduzida</i>	25
2.3.5	<i>Topologia de Joins</i>	27
2.4	Teoria de Morse	29
2.5	Tipo de Homotopia em termos de Valores Críticos	30
3	TEOREMA DE LEFSCHETZ PARA SEÇÕES HIPERPLANAS . . .	35
3.1	Variedades em espaço Euclideano	35
3.2	Teorema de Lefschetz em seções hiperplanas	41
4	ESTRUTURA DE CONJUNTOS SEMI-ALGÉBRICOS	47
4.1	Primeiro teorema de estrutura	47
4.1.1	<i>Aplicação do primeiro teorema de estrutura</i>	48
4.2	Segundo teorema de estrutura	49
4.2.1	<i>Outras propriedades do algoritmo de separação estratificado</i>	50
4.3	Decomposição celular e triangulação de conjuntos semi-algébricos .	51
4.4	Aplicações do teorema da triangulação de conjuntos semi-algébricos	57
4.4.1	<i>Uma versão do Lema de Seleção da Curva.</i>	57
5	GRAU DE CONEXIDADE DA FIBRA GENÉRICA	61
5.1	Topologia da fibra e do link no caso local	61
5.2	Classes especiais de funções	63
5.3	Topologia da fibra e do link no infinito	65
5.4	Topologia de hipersuperfície genérica	66
5.5	Conectividade da hipersuperfície afim complexa	66

REFERÊNCIAS	73
-------------------	----

INTRODUÇÃO

John Milnor [Milnor 1968] estudou a topologia de uma hipersuperfície complexa singular sendo a ferramenta principal o teorema da existência de uma fibração suave em pequenas esferas em torno da singularidade, que pode ser enunciado em linguagem mais moderna como segue: dado um representante de um germe de função holomorfa $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a aplicação

$$\phi : S_\varepsilon^{2n+1} \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^1 \text{ definida por } \phi(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|} \quad (1.1)$$

é uma projeção suave de um fibrado localmente trivial, onde S_ε^{2n+1} é a esfera $(2n+1)$ -dimensional de raio ε centrada na origem, e $K_\varepsilon = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ é conhecido com o link da singularidade.

Diferentemente do que ocorre no caso local, no caso global em geral, dada uma função polinomial $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ a chamada fibração de Milnor no infinito nem sempre existe. Isto é, a aplicação $\phi : S_R^{2n+1} \setminus K_R \rightarrow S^1$ nem sempre é uma projeção suave de um fibrado localmente trivial, para $R > 0$ suficientemente grande.

Broughton em [Broughton 1983] e [Broughton 1988], e Némethi & Zaharia em [Némethi e Zaharia 1992], introduziram algumas classes especiais de polinômios chamadas de tame, quasitame, M-tame, semitame, etc., e mostraram como adaptar a prova do teorema da fibração de Milnor no caso local para garantir que na classe de polinômios semitame sempre existe a fibração de Milnor no infinito.

Para o estudo da topologia da fibra e do link dessas fibrações eles também procederam de maneira semelhante ao caso local, com as devidas adaptações, para provar que se f é um polinômio M-tame, então para $R > 0$ suficientemente grande, o link $K_R = V \cap S_R^{2n+1}$ é $(n-2)$ -conexo

e a fibra tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê $S^n \vee \dots \vee S^n$ de esferas n -dimensionais, mostrando assim que tanto o link como a fibra tem alto grau de conexidade.

Um outro resultado interessante é dado em [Dimca 1990], [Dimca e Paunescu 1999] onde os autores estimam o grau de conexidade de uma hipersuperfície complexa em função da dimensão complexa do fecho projetivo da fibra especial no infinito. Esse tipo de resultado sugere que os casos local e global tem alguma similaridade; ou seja, estão de alguma forma relacionados.

Neste trabalho apresentaremos um estudo sobre a topologia de uma aplicação polinomial real e complexa, com o objetivo de relacionar o grau de conectividade da fibra e do link com a dimensão do conjunto singular. Para isso, no segundo capítulo desenvolveremos um estudo básico sobre conjuntos algébricos e semi-algébricos, que serão os principais objetos de nosso estudo. Além disso, lembraremos os conceitos básicos da topologia algébrica e da teoria de Morse, que serão úteis no desenvolvimento de todo o trabalho.

No terceiro capítulo apresentamos algumas propriedades de ponto focal de uma variedade com vista a apresentar uma prova do famoso teorema de Lefschetz para seções hiperplanas, o qual será importante para o cálculo do grau de conexidade de uma hipersuperfície complexa.

No quarto capítulo dedicamos ao estudo da estrutura de conjuntos semi-algébricos. Seguindo [Benedetti e Risler 1990] apresentaremos o primeiro e segundo teoremas de estrutura e uma prova do teorema de triangulação para conjuntos semi-algébricos. Como aplicação, mostraremos o lema de seleção da curva local e global.

No quinto capítulo enunciamos os teoremas da fibração de Milnor local e global e apresentamos um resumo dos principais resultados da topologia da fibra e do link tanto no caso local como global. Além disso, apresentaremos um resultado sobre o grau de conexidade da fibra genérica global de uma função polinomial que relaciona o grau de conexidade da fibra com a dimensão do conjunto singular do fecho projetivo da fibra no infinito.

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns fatos básicos de conjuntos algébricos e semi-algébricos, relembramos alguns teoremas de dualidade da topologia algébrica e o teorema de Lefschetz para seções hiperplanas, além de alguns fatos da teoria de Morse que serão necessários no decorrer do texto.

2.1 Conjuntos semi-algébricos

Nesta primeira seção apresentamos conceitos e resultados de conjunto algébrico e semi-algébrico. A principal referência utilizada é [\[Benedetti e Risler 1990\]](#).

Definição 2.1. Um subconjunto $V \subset \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) é chamado algébrico, se ele admite uma representação da forma

$$V = \{x \in \mathbb{K}^n : P_1(x) = \dots = P_k(x) = 0\}$$

onde, $P_i(x) \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $i = 1, \dots, k$.

Agora suponhamos que os P_i 's são polinômios homogêneos de grau d_i , isto é,:

$$P_i(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{d_i} P_i(x_1, \dots, x_n), \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

para cada $i = 1, \dots, k$.

Definição 2.2. Um subconjunto $V \subset \mathbb{P}^{n-1}$ é chamado algébrico projetivo, se existem polinômios homogêneos $P_1, \dots, P_k$ em $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tais que:

$$V = \{[x_1 : \dots : x_n] : P_1([x]) = \dots = P_k([x]) = 0\}$$

Definição 2.3. Uma variedade algébrica (projetiva) é um subconjunto algébrico irredutível de $\mathbb{P}^{n-1}$ com a topologia induzida da topologia de Zariski.

A seguinte definição generaliza a definição de conjuntos algébricos.

Definição 2.4. Um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é chamado semi-algébrico, se ele admite uma representação da forma

$$V = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{ij}(x) \, s_{ij} \, 0\}$$

onde, para cada $i = 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, r_i$

- 1) $s_{ij} \in \{>, =, <\}$
- 2) $P_{ij}(x) \in \mathbb{R}[X]$, $X = (X_1, \dots, X_n)$

Exemplo 2.1. 1) Todo subconjunto algébrico do $\mathbb{R}^n$ (definido por equações polinomiais) é semi-algébrico.

- 2) Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos semi-algébricos, então $A \times B$ é um conjunto semi-algébrico.

No caso complexo o correspondente dos conjuntos semi-algébrico no $\mathbb{R}^n$ são chamados conjuntos construtíveis definidos como abaixo.

Definição 2.5. Um subconjunto $V \subseteq \mathbb{C}^n$ é chamado construtível, se existem $P_{ij}(x) \in \mathbb{C}[X]$ ($i = 1, \dots, s$; $j = 1, \dots, r_i$) tais que

$$V = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{C}^n : P_{ij}(x) \, s_{ij} \, 0\}$$

onde $s_{ij} \in \{=, \neq\}$.

Observação 2.1. Identificando $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$, observamos que qualquer subconjunto construtível de $\mathbb{C}^n$ é um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{2n}$. Além disso, identificando $\mathbb{R}^n$ com a parte "real" de $\mathbb{C}^n$, para qualquer conjunto construtível V temos que $V_R = V \cap \mathbb{R}^n$ é semi-algébrico em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.6. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos semi-algébricos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada semi-algébrica se o gráfico de f , $\text{graf}(f)$, é um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{n+m}$.

Definição 2.7. Seja F uma família de polinômios em $\mathbb{R}[X]$. Dizemos que a família F é estável sob derivação se

- 1) $0 \notin F$
- 2) Se $f \in F$, então, $f' \in F$ ou $f' = 0$.

Lema 2.1. [Lema de Thom] Seja $\mathcal{F} = \{P_1, \dots, P_k\}$ uma família finita de polinômios estáveis sob derivação de $\mathbb{R}[X]$, e seja $Z \subset \mathbb{R}$ da forma

$$Z = \bigcap_{i=1}^k \{x \in \mathbb{R} : P_i(x) \, s_i \, 0\}; \, s_i \in \{>, =, <\}.$$

Então Z é conexo, e temos uma das seguinte possibilidades:

- 1) $Z = \emptyset$,
- 2) $Z = \{\text{um ponto}\}$ (isto acontece se, e somente se $Z \neq \emptyset$ e pelo menos um dos $s_i = "="$),
- 3) Z é um intervalo não trivial.

Além disso, o fecho topológico $\bar{Z}$ de Z em $\mathbb{R}$ é obtido substituindo $s_i = ">"$ por $"\geq"$ ou $s_i = "<"$ por $"\leq"$. ($\bar{Z}$ é obtido de Z relaxando as desigualdades.)

2.2 Simplexos em $\mathbb{R}^n$

Definição 2.8. Um simplexo (aberto) de dimensão k em $\mathbb{R}^n$ é qualquer subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ da forma

$$S = S(x_0, \dots, x_k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^k t_i x_i, t_i > 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}$$

onde $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ satisfaz a seguinte condição: Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ tal que $\{x_0, \dots, x_k\} \subset E$, então $\dim E \geq k$.

Definição 2.9. Uma face de um simplexo $S = S(a_0, \dots, a_k)$ de dimensão h é qualquer simplexo S' de dimensão $h \leq k$ da forma $S'(b_0, \dots, b_h)$ com $\{b_0, \dots, b_h\} \subseteq \{a_0, \dots, a_k\}$.

Definição 2.10. Um poliedro finito de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ que admite uma coleção finita de simplexos disjuntos $K = \{S_1, \dots, S_d\}$ tal que:

- 1) Para cada $r = 1, \dots, d$ todas as faces de S_r pertencem a K (chamada decomposição simplicial finita),
- 2) $X = \bigcup_{r=1}^d S_r$.

Usaremos a notação usual $X = |K|$.

Definição 2.11. Seja $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma triangulação de Y é um homeomorfismo

$$F : Y \rightarrow X$$

para algum poliedro $X = |K| \subseteq \mathbb{R}^m$, considerando em Y e X a topologia induzida do ambiente.

Se Y é um conjunto semi-algébrico e F é um homeomorfismo semi-algébrico; ou seja, o gráfico de F é um conjunto semi-algébrico, então dizemos que F é uma triangulação semi-algébrica de Y .

Exemplo 2.2. Seja X como as imagens abaixo:

2.3 Ferramentas da topologia algébrica

Lembraremos abaixo alguns conceitos e resultados clássicos de topologia geral, teoria de homotopia de ordem superior, teoria de homologia e cohomologia.

2.3.1 Homotopia

Definição 2.12. Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é homotópica à g se existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para qualquer $x \in X$.

A aplicação H é chamada uma homotopia entre f e g e denotamos por $f \simeq g$ ou $H : f \simeq g$.

Definição 2.13. Seja A um subconjunto de X e $f, g : X \times I \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é homotópica à g relativo a A , denotado por $f \simeq g \text{ rel } A$, se existe uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned}
 H(x, 0) &= f(x), \quad \forall x \in X \\
 H(x, 1) &= g(x), \quad \forall x \in X \\
 H(a, t) &= f(a) = g(a), \quad \forall a \in A, t \in I.
 \end{aligned}$$

Definição 2.14. 1) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma equivalência homotópica se existe uma aplicação contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$.

2) Dois espaços X e Y são chamados homotopicamente equivalentes se existe uma equivalência homotópica de um para o outro. Neste caso dizemos que X e Y tem o mesmo tipo de homotopia, e denotamos por $X \equiv Y$.

Definição 2.15. 1) Seja $A \subset X$. Dizemos que A é um retrato de X se existe uma aplicação contínua $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$, para todo $a \in A$. A aplicação r é chamada aplicação retração.

2) Um subespaço A de X é chamado retrato por deformação de X , se existe uma homotopia $F : X \times I \rightarrow X$ tal que para cada $x \in X$ e $a \in A$

$$i) \quad F(x, 0) = x$$

- ii) $F(x, 1) \in A$
- iii) $F(a, 1) = a$

2.3.2 Grupo de homotopia de ordem superior

Na presente seção vamos generalizar o conceito do grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ de um espaço topológico (X, x_0) com ponto base x_0 .

Para todo inteiro $n \geq 1$ consideremos:

- 1) $I^n = \underbrace{I \times \dots \times I}_{n\text{-vezes}}$ o cubo unitário de dimensão n ,
- 2) O bordo de I^n , denotado por ∂I^n .

Convencionamos que $I^0 = \{s_0\}$ e $\partial I^0 = \emptyset$.

Seja $\Pi_n(X, x_0) = \{f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0) : f \text{ é contínua e } f(\partial I^n) \subset \{x_0\}\}$ note que para $n = 1$, $\Pi_1(X, x_0)$ não é mais que o espaço de laços com ponto base x_0 , também denotado por $\Omega(X, x_0)$.

Definimos uma operação em $\Pi_n(X, x_0)$ da seguinte maneira: Dado $f, g \in \Pi_n(X, x_0)$ associamos $f * g \in \Pi_n(X, x_0)$ dado por

$$f * g(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, \dots, s_{n-1}, s_n) & \text{se } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2s_1 - 1, \dots, s_{n-1}, s_n) & \text{se } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (2.1)$$

Observe que para $n = 1$, a operação anterior é a operação de concatenação de laços.

Desejamos fazer de $\Pi_n(X, x_0)$ um grupo com a operação definida acima, como no caso $n = 1$. Para isso vamos definir uma relação de equivalência no espaço $\Pi_n(X, x_0)$.

Definição 2.16. Seja $f, g \in \Pi_n(X, x_0)$, diremos que f é equivalente a g se elas são homotópicas relativamente a ∂I^n , isto é $f \simeq g \text{ rel } \partial I^n$.

Não é difícil provar que a relação acima é uma relação de equivalência em $\Pi_n(X, x_0)$. Denote por $[f]$ a classe de homotopia de $f \in \Pi_n(X, x_0)$ e por $\pi_n(X, x_0)$ o conjunto das classes de homotopia de elementos de $\Pi_n(X, x_0)$, isto é,

$$\pi_n(X, x_0) = \{[f] : f \in \Pi_n(X, x_0)\}.$$

Podemos definir um produto em $\pi_n(X, x_0)$ induzido pelo produto acima da seguinte maneira: dado $[f], [g]$ elementos qualquer de $\pi_n(X, x_0)$ definimos $[f] \cdot [g]$ por:

$$[f] \cdot [g] = [f * g] \quad (2.2)$$

Não é difícil provar que esta operação está bem definida, isto é, se $f_1, f_2 \in [f]$ e $g_1, g_2 \in [g]$ então $f_1 * g_1 \simeq f_2 * g_2 \text{ rel } \partial I^n$.

Teorema 2.1. O conjunto $\pi_n(X, x_0)$ equipado com a operação 2.2 é um grupo para todo $n \geq 1$. O elemento neutro é a classe de homotopia $[e_{x_0}]$ da aplicação constante $e_{x_0} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, e a inversa de $[f]$ é a classe de homotopia de $[f^{-1}]$ onde $f^{-1} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ é a aplicação definida por

$$f^{-1}(s_1, \dots, s_n) = f(1 - s_1, \dots, s_n).$$

Observação 2.2. 1) Para $n = 1$ temos que $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo fundamental de X com ponto base x_0 .

2) Para $n \geq 2$, os grupos $\pi_n(X, x_0)$ são chamados grupos de homotopia de ordem superior.

Sabemos que o grupo fundamental nem sempre é um grupo abeliano, no entanto, para os grupos de homotopia de ordem superior temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2. Para todo inteiro $n \geq 2$, o grupo $\pi_n(X, x_0)$ é um grupo abeliano.

Definição 2.17. Dado $k \geq 0$, inteiro, dizemos que um espaço topológico X é k -conexo se é conexo por caminhos e $\pi_i(X) = 0$ para $0 \leq i \leq k$.

Por definição, todo espaço não vazio é chamado (-1) -conexo.

2.3.3 Grupos de homotopia relativos de ordem superior

Nesta seção vamos introduzir grupos de homotopia relativos de pares de espaços pontuados. Para isso consideremos um espaço pontuado (X, x_0) e um subespaço $A \subset X$ contendo o ponto base x_0 . Assim temos uma inclusão natural de espaços $i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ o qual induz uma aplicação a nível dos grupos de homotopia $i_* : \pi_n(A, x_0) \hookrightarrow \pi_n(X, x_0)$ para todo $n \geq 0$, que em geral não é injetivo.

Exemplo 2.3. Sejam $X = \mathbb{R}^2$ e $A = \mathbb{S}^1$, temos

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z},$$

$$\pi_1(\mathbb{R}^2, 1) = 0.$$

Assim, $i_* : \mathbb{Z} \rightarrow 0$ não é injetivo.

Denotemos por J^n o subespaço do bordo de $\partial I^{n+1} = I^n \times \partial I \cup \partial I^n \times I$ dado por $J^n = I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$. Seja

$$\Pi_n(X, A, x_0) = \{f : (I^n, \partial I^n, J^n) \rightarrow (X, A, x_0) : f \text{ é continua e } f(\partial I^n) \subset A, f(\partial J^n) \subset \{x_0\}\}$$

De maneira similar como fizemos em 2.1 definimos para $n \geq 2$ uma operação em $\Pi_n(X, A, x_0)$, associando para cada $f, g \in \Pi_n(X, A, x_0)$ um $f * g \in \Pi_n(X, A, x_0)$.

Para definir uma relação de equivalência no espaço $\Pi_n(X, A, x_0)$, como na seção anterior, vamos definir uma homotopia entre aplicações de triplas.

Definição 2.18. Sejam $A_2 \subseteq A_1 \subseteq X$ e $B_2 \subseteq B_1 \subseteq Y$ triplas de espaços e sejam $f, g : (X, A_1, A_2) \rightarrow (Y, B_1, B_2)$ aplicações de triplas. Então, uma homotopia $F : f \simeq g$ é uma aplicação de triplas

$$F : (X, A_1, A_2) \times I = (X \times I, A_1 \times I, A_2 \times I) \rightarrow (Y, B_1, B_2),$$

(isto é, $F(A_1 \times I) \subset B_1$ e $F(A_2 \times I) \subset B_2$) tal que $F(-, 0) = f$ e $F(-, 1) = g$.

Definição 2.19. Sejam $f, g \in \Pi_n(X, A, x_0)$, diremos que f é equivalente à g se existe uma homotopia $F : f \simeq g$ definida como acima.

Não é difícil provar que esta relação é uma relação de equivalência em $\Pi_n(X, A, x_0)$.

Seja $\pi_n(X, A, x_0) = \{[f] : f \in \Pi_n(X, A, x_0)\}$ onde $[f]$ denota a classe de homotopia relativa de $f \in \Pi_n(X, A, x_0)$.

Definindo um produto “ $\cdot$ ” em $\pi_n(X, A, x_0)$ como 2.2, é possível provar que $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo, chamado o n -ésimo grupo de homotopia relativa de (X, A, x_0) .

Para simplificar a notação, escrevemos $\pi_n(A)$ (respectivamente $\pi_n(X, A)$) em lugar de $\pi_n(A, x_0)$ (respectivamente $\pi_n(X, A, x_0)$).

Dado f um elemento de $\pi_n(A)$, podemos ver f como um elemento de $\pi_n(X)$. Logo a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ induz uma aplicação $i_* : \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(X)$ que é um morfismo de grupo para $n \geq 2$. Além disso, se $f \in \pi_n(X)$ então f é constante igual a x_0 no bordo ∂I^n , em particular, temos que $f \in \pi_n(X, A)$, o que induz uma aplicação de homotopia $j_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, A)$ que é um morfismo de grupo para $n \geq 2$.

Agora, consideremos $f \in \pi_n(X, A)$. A restrição de f a uma face I^n define um elemento de $\pi_n(A)$ denotado por ∂f . Assim podemos definir uma aplicação ∂ que envia classes de homotopia relativa à A em classes de homotopia de A . Logo obtemos uma aplicação de bordo $\partial : \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}(A)$ o qual é um morfismo de grupo para $n \geq 2$. Os morfismos acima se juntam no seguinte resultado importante em teoria de homotopia.

Teorema 2.3. A sequência

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

é exata.

Esta sequência é chamada de sequência de homotopia exata longa do par pontuado (X, A, x_0) .

2.3.4 Resultados sobre grupos de homologia singular e grupos de homologia reduzida

Nesta seção assumiremos que o leitor conhece os conceitos básicos da teoria de homologia e cohomologia singular com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Para detalhes veja [Hatcher 2002], [Spanier

1994].

Considere X um espaço topológico, A um subespaço de X . Denotaremos por:

- 1) $H_n(X)$ (resp. $H_n(X, A)$) é o n -ésimo grupo de homologia (singular) de X (resp. do par (X, A)).
- 2) $H^n(X)$ (resp. $H^n(X, A)$) é o n -ésimo grupo de cohomologia (singular) de X (resp. do par (X, A)).

Observação 2.3. Os grupos de homologia reduzida (singular) de um espaço topológico X , denotamos por $\tilde{H}_n(X)$, se relacionam com os grupos de homologia singular da seguinte forma

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(X), & n > 0 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}, & n = 0. \end{cases}$$

Exemplo 2.4. Os grupos de homologia da esfera S^n é dada da seguinte maneira:

se $n = 0$

$$H_p(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & p = 0 \\ 0, & p > 0. \end{cases}$$

se $n > 0$

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0 \text{ ou } p = n \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Logo, temos uma formula mais concisa dos grupos de homologia reduzida de S^n , da seguinte maneira:

$$\tilde{H}_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n \\ 0, & p \neq n. \end{cases}$$

Teorema 2.4 (Dualidade de Poincaré [Spanier 1994]). Seja X uma n -variedade compacta orientada, então para todo q existe um isomorfismo

$$H_q(X) \cong H^{n-q}(X).$$

Teorema 2.5 (Dualidade de Lefschetz [Bredon 2013]). Seja M uma variedade compacta de dimensão n orientada, e seja $L \subset K$ subconjunto compacto de M . Então,

$$H^q(K, L) \cong H_{n-q}(M - L, M - K).$$

Teorema 2.6 (Teorema do Isomorfismo de Hurewicz [Switzer 1975]). Se um espaço X é $(n-1)$ -conexo, $n \geq 2$, então $h: \pi_p(X, x_0) \rightarrow \tilde{H}_q(X)$ é um isomorfismo para $q \leq n$ e um epimorfismo para $q = n+1$. No caso $n = 1$, h é um epimorfismo para $q = n$.

2.3.5 Topologia de Joins

Definição 2.20. O join de dois espaços topológico Z e W , denotado por $Z * W$, é definido por

$$Z * W = Z \times W \times I / \sim$$

onde I é o intervalo $[0, 1]$ e $\sim$ é a relação de equivalência definida da seguinte maneira:

$$(z, w, t) \sim (z', w', t') \text{ se, e somente se } \begin{cases} z = z' \text{ e } t = t' = 0, & \text{ou} \\ w = w' \text{ e } t = t' = 1. \end{cases}$$

As correspondentes classes de equivalência são denotadas por $[*, w, 0]$ ou $[z, *, 1]$.

Exemplo 2.5.

- 1) O gráfico seguinte ilustra a definição quando Z e W são conjuntos com somente dois pontos cada um deles.

- 2) Se Z e W são segmentos de linha, podemos ilustrar a definição como abaixo.

A seguinte proposição é bastante interessante pois nos permite conhecer a topologia de um produto join sem muitas hipóteses sobre os espaços envolvidos.

Proposição 2.7. ([Milnor 1956]) Se W é conexo por caminho e Z é um espaço (qualquer) não vazio, então $Z * W$ é simplesmente conexo.

De forma mais geral em [Matousek 2008] foi provado o seguinte resultado :

Teorema 2.8 (Conectividade do join). Suponha que Z seja m -conexo e W n -conexo, onde Z e W são triangulables (ou CW -complexos). Então $Z * W$ é $(m + n + 2)$ -conexo

Todavia, se sabemos os grupos de homologia reduzida dos espaços Z e W , é possível calcular os grupos de homologia reduzida do produto join, $Z * W$, como segue:

Teorema 2.9 ([Milnor 1956]). Os grupos de homologia reduzida do produto join $Z * W$ com coeficientes em um domínio ideal principal são dados por:

$$\tilde{H}_{n+1}(Z * W) \cong \sum_{p+q=n} \tilde{H}_p(Z) \oplus \tilde{H}_q(W) + \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}(\tilde{H}_p(Z), \tilde{H}_q(W))$$

A seguir veremos uma aplicação do conceito acima num importante teorema devido a Mutsuo Oka em [Oka 1973].

Seja $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial complexa.

Definição 2.21. O polinômio $f(z_1, \dots, z_n)$ é dito quase-homogêneo do tipo $x = (x_1, \dots, x_n)$ se for combinação linear de monômios da forma $z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n}$ tais que

$$\frac{v_1}{x_1} + \dots + \frac{v_n}{x_n} = 1.$$

Teorema 2.10. Seja $f: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial definida por $f(z, w) = g(z) + h(w)$, onde $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ e $h: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ são polinômios quase-homogêneos. Sejam: $X = f^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, $Z = g^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^n$ e $W = h^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^m$. Então X tem o tipo de homotopia de $Z * W$, onde $Z * W$ é o join de Z e W com a topologia forte.

Observação 2.4. A topologia forte em $Z * W$ é definida como a topologia fraca tal que as aplicações definidas abaixo são contínuas:

$$s: Z * W \rightarrow I \quad \text{por } s([z, w, t]) = t,$$

$$\pi_Z: Z * W - s^{-1}(0) \rightarrow Z \quad \text{por } \pi_Z([z, w, t]) = z,$$

$$\pi_W: Z * W - s^{-1}(1) \rightarrow W \quad \text{por } \pi_W([z, w, t]) = w.$$

Um resultado imediato do teorema anterior é o seguinte:

Corolário 2.11. [BRIESKORN 1966] Seja $f(z) = z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}$ (a_k é um inteiro > 1) e $X = f^{-1}(1)$. Então, X tem o tipo de homotopia de $\Omega_a = \Omega_1 * \Omega_2 * \dots * \Omega_n$ onde

$$\Omega_{a_k} = \{ \zeta_{a_k}^j : j = 1, \dots, a_k, \zeta_{a_k} = \exp(2\pi i/a_k) \}$$

é o conjunto das a_k -ésimas raízes da unidade.

2.4 Teoria de Morse

A seguir apresentaremos alguns resultados sobre a teoria de Morse que foram extraídos da referência [Milnor 1963].

Definição 2.22. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave em uma variedade suave de dimensão m , M mergulhado em $\mathbb{R}^N$ para algum N . Um ponto $p \in M$ é chamado ponto crítico de f se a aplicação

$$(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$$

é nula.

Se escolhemos um sistema local de coordenadas $(x_1, \dots, x_m)$ em uma vizinhança U de p , então p é um ponto crítico de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) = 0.$$

O número real $f(p)$ é chamado valor crítico de f .

Definição 2.23. Um ponto p é ponto crítico não degenerado de f , se p for ponto crítico de f e a matriz Hessiana

$$H_p(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)$$

é não singular.

Como a matriz Hessiana é simétrica, diagonalizável e com autovalores reais, é possível provar que os sinais destes autovalores são unicamente determinado por $H_p(f)$, mais a magnitude dos autovalores pode depender da escolha do sistema de coordenadas.

Definição 2.24. Definimos o índice de f em um ponto crítico não degenerado p como sendo o número de autovalores próprios negativos de $H_p(f)$ contados com multiplicidade.

Um resultado clássico da Teoria de Morse é o seguinte:

Lema 2.2. (Lema de Morse) Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, M uma variedade de dimensão m , e p um ponto crítico não degenerado de f . Então, existe um sistema de coordenadas locais $(y_1, \dots, y_m)$ em uma vizinhança $U \subset M$ de p com $y_j(p) = 0$, para todo $j = 1, \dots, m$, tal que

$$f = f(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_m^2,$$

onde λ é o índice de f em p .

Definição 2.25. Uma função de Morse em uma variedade suave é uma função suave cujos pontos críticos são todos não degenerados.

Observação 2.5. 1) Aplicando o teorema da função inversa para variedades é fácil ver que todo ponto crítico não degenerado é isolado.

Como consequência temos que:

- 2) Uma função de Morse em uma variedade suave compacta de dimensão finita tem um número finito de pontos críticos.

Vejamos um exemplo de uma função de Morse definida em uma variedade não compacta que tem infinitos pontos críticos não degenerados.

Exemplo 2.6. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = e^x \cos x$.

Observamos que os pontos críticos são da forma $p_k = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ e a Hessiana de f é

$$f''(x) = -2e^x \sin x.$$

Como $f''(p_k) = (-1)^{k+1} \sqrt{2} e^{p_k} \neq 0$, logo temos que f tem infinitos pontos críticos todos eles não degenerados.

Exemplo 2.7. A função $F(x, y) = x^2 + y^2$ tem um único ponto crítico em $(0, 0)$ e é não-degenerado, de fato, é isolado.

A função $G(x, y) = x^2$ tem pontos críticos degenerados ao longo do eixo Y de fato eles não são isolados.

2.5 Tipo de Homotopia em termos de Valores Críticos

Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave, denotamos por

$$M^a = f^{-1}((-\infty, a]) = \{p \in M : f(p) \leq a\}.$$

Além disso, se $a < b$ denotaremos o conjunto

$$f^{-1}([a, b]) = \{p \in M : a \leq f(p) \leq b\}.$$

Teorema 2.12. Seja f como acima e suponha que $f^{-1}([a, b])$ é compacto e não contém pontos críticos de f . Então M^a é difeomorfo à M^b , além disso, M^a é um retrato por deformação de M^b . Assim temos que a aplicação inclusão $M^a \hookrightarrow M^b$ é uma equivalência homotópica.

Teorema 2.13. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, e seja p um ponto crítico não degenerado com índice λ . Considere $f(p) = c$ e suponha que para algum $\varepsilon_0 > 0$, $f^{-1}([c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0])$ seja compacto, e não contenha outro ponto crítico de f distintos de p .

Então, para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ suficientemente pequeno, temos que o conjunto $M^{c+\varepsilon}$ tem o mesmo tipo de homotopia de $M^{c-\varepsilon}$ com uma λ -célula atachada.

Teorema 2.14. Se f é uma função suave em uma variedade M com pontos críticos não degenerados e cada M^a é compacto, então M tem o mesmo tipo de homotopia de um *CW-complexo*, com uma célula de dimensão λ atachada para cada ponto crítico de índice λ .

Exemplo 2.8. Consideremos o toro $M = \mathbb{T}$ de dimensão 2 mergulhado em $\mathbb{R}^3$ e seja f a função altura, isto é

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$f(x, y, z) = z$$

Calculemos os pontos críticos com seus respectivos índices. Para isso consideremos a seguinte parametrização do toro:

$$\phi(u, v) = (r \sin u, (R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v), \text{ com } R > r,$$

assim

$$(f \circ \phi)(u, v) = (R + r \cos u) \sin v.$$

Logo os pontos onde as derivadas parciais $\frac{\partial f \circ \phi}{\partial u}, \frac{\partial f \circ \phi}{\partial v}$ se anulam são

$$q_1 = (0, -\frac{\pi}{2}), \quad q_2 = (\pi, -\frac{\pi}{2}), \quad q_3 = (\pi, \frac{\pi}{2}), \quad q_4 = (0, \frac{\pi}{2})$$

e os pontos críticos de f são:

$$p_1 = (0, 0, -(R+r)), \quad p_2 = (0, 0, -(R-r)), \quad p_3 = (0, 0, (R-r)), \quad p_4 = (0, 0, (R+r))$$

As matrizes Hessiana em cada ponto crítico são:

$$\begin{aligned} H_{p_1}(f) &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & R+r \end{pmatrix} & H_{p_2}(f) &= \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & R-r \end{pmatrix} \\ H_{p_3}(f) &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -R+r \end{pmatrix} & H_{p_4}(f) &= \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -R-r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e observamos que os pontos críticos p_1, p_2, p_3, p_4 são pontos críticos não degenerados com índices 0, 1, 1, 2, respectivamente.

Vamos usar as informações acima para recuperar o toro $\mathbb{T}$, a menos de homotopia.

- 1) Se $a < f(p_1)$, então $f^{-1}((-\infty, a]) = \emptyset$

Como o índice de p_1 é zero, então o tipo de homotopia de $\mathbb{T}^{f(p_1)+\varepsilon}$ é uma 0-célula ou um ponto.

- 2) Como o índice de p_2 é 1, então $\mathbb{T}^{f(p_2)+\varepsilon}$ tem o tipo de homotopia de $\mathbb{T}^{f(p_1)+\varepsilon}$ com uma 1-célula atachada.

- 3) O índice de p_3 é também 1, logo $\mathbb{T}^{f(p_3)+\varepsilon}$ tem o tipo de homotopia de $\mathbb{T}^{f(p_2)+\varepsilon}$ com uma 1-célula atachada.

- 4) Como o índice de p_4 é 2, então $\mathbb{T}f(p_4)+\varepsilon$ tem o tipo de homotopia de $\mathbb{T}f(p_3)+\varepsilon$ com uma 2-célula atachada.

TEOREMA DE LEFSCHETZ PARA SEÇÕES HIPERPLANAS

Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades de ponto focal de uma variedade e uma prova do famoso teorema de Lefschetz para seções hiperplanas. No final da última seção apresentamos também uma aplicação interessante da topologia de uma variedade algébrica projetiva. Em todo o capítulo a principal referência utilizada foi [\[Milnor 1963\]](#).

3.1 Variedades em espaço Euclideano

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave de dimensão $m < n$ mergulhado em $\mathbb{R}^n$ e seja $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ definido por

$$N = \{(p, v) : p \in M, v \in N_p M\}, \text{ em que } N_p M \text{ é o espaço normal de } M \text{ em } p.$$

É conhecido que N é uma variedade suave de dimensão n (ver por exemplo [\[Lee 2003\]](#)) mergulhado em $\mathbb{R}^{2n}$.

Definamos a seguinte aplicação suave

$$E : N \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{por}$$

$$E(p, v) = p + v$$

Definição 3.1. Seja $e \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que e é um ponto focal de (M, p) com multiplicidade μ se, $e = p + v$, onde $(p, v) \in N$ e a matriz jacobiana de E em (p, v) , $JE(p, v)$, tem nulidade $\mu > 0$; isto é, $\dim \text{Nu}(JE(p, v)) = \mu > 0$.

Dizemos que e é um ponto focal de M se e é ponto focal de (M, p) para algum $p \in M$.

Observação 3.1. Da definição temos que $e \in \mathbb{R}^n$ é um ponto focal de (M, p) se o ponto $e = p + v = E(p, v)$ é valor crítico da aplicação $E : N \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

De fato, como a jacobiana de E em (p, v) , $JE(p, v)$, tem nulidade $\mu > 0$ então $\dim \text{Ker}((dE)_{(p,v)}) = \mu > 0$. Pelo teorema do núcleo e da imagem temos que $(dE)_{(p,v)} : T_{(p,v)}N \longrightarrow T_e\mathbb{R}^n$ não é sobrejetora, logo segue-se que (p, v) é um ponto crítico de aplicação E . Portanto e é um valor crítico de E .

Teorema 3.1. (Teorema de Sard) Sejam M e N variedades suaves com ou sem bordo e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação suave. Então o conjunto de valores críticos de F tem medida zero em N .

Corolário 3.2. Para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, o ponto x não é ponto focal de M .

Demonstração. Da observação anterior e o teorema de Sard o corolário é imediato. $\square$

Sejam $u^1, \dots, u^m$ as coordenadas de uma região da variedade $M \subset \mathbb{R}^n$. A aplicação $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ de inclusão determina n funções suaves

$$x_1(u^1, \dots, u^m), \dots, x_n(u^1, \dots, u^m).$$

Denotaremos por $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e

$$\vec{x}(u^1, \dots, u^m) = (x_1(u^1, \dots, u^m), \dots, x_n(u^1, \dots, u^m)).$$

Dado um ponto $p \in M \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por $\vec{p}$.

Definição 3.2. A primeira forma fundamental associada ao sistema de coordenadas é definido como sendo a matriz simétrica

$$(g_{ij}) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} \right) \text{ em que } (,) \text{ é o produto escalar em } \mathbb{R}^n.$$

A segunda forma fundamental é também uma matriz simétrica $(\vec{l}_{ij})$ definida como segue: um vetor v_{ij} em um ponto de M pode ser decomposto como soma de um vetor tangente à M , digamos $\vec{v}_{ij}^T$, e um outro vetor normal à M , digamos $\vec{v}_{ij}^N$. Considere $\vec{l}_{ij}$ como sendo a componente normal de $\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j}$, isto é, $\vec{l}_{ij} = \vec{v}_{ij}^N$.

Definição 3.3. Dado um vetor unitário $\vec{v}$ normal à M em $\vec{p}$, a matriz

$$\left(\vec{v}, \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right) = (\vec{v}, \vec{v}_{ij}^T + \vec{v}_{ij}^N) = (\vec{v}, \vec{l}_{ij})$$

é chamada a "segunda forma fundamental de M em $\vec{p}$ na direção $\vec{v}$ ".

Assumiremos que as coordenadas foram escolhidas de modo que (g_{ij}) avaliado em $\vec{p}$ seja a matriz identidade. Os autovalores da matriz $(\vec{v}, \vec{l}_{ij})$ serão chamados a curvatura principal $k_1, \dots, k_m$ de M no ponto $\vec{p}$ na direção normal $\vec{v}$.

Os recíprocos $\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_m}$ da curvatura principal, desde que estejam definidos, serão chamados

"raio principal de curvatura".

Pode ocorrer que a matriz $(\vec{v}, \vec{l}_{ij})$ seja singular, neste caso alguns dos k_i serão nulos, e portanto os correspondentes raios $\frac{1}{k_i}$ não serão definidos. Seja

$$\mathcal{L} = \{\vec{p} + t\vec{v} : \vec{v} \text{ é um vetor unitário fixo em } N_{\vec{p}}M, t \in \mathbb{R}\}$$

Lema 3.1. Os pontos focais de $(M, \vec{p})$ ao longo de $\mathcal{L}$ são exatamente os pontos $\vec{p} + k_i^{-1}\vec{v}$, onde $1 \leq i \leq m$, $k_i \neq 0$. Assim temos no máximo m pontos focais de $(M, \vec{p})$ ao longo de $\mathcal{L}$. Cada um deles sendo contado com sua própria multiplicidade.

Demonstração. Desejamos provar que em

$$\mathcal{L} = \{\vec{p} + t\vec{v} : \vec{v} \text{ é um vetor unitário fixo em } N_{\vec{p}}M, t \in \mathbb{R}\}$$

existem no máximo m valores críticos da aplicação E e cada um deles tem a forma $\vec{p} + \frac{1}{k_1}\vec{v}, \dots, \vec{p} + \frac{1}{k_m}\vec{v}$ para os $k_i \neq 0$, $i = 1, \dots, m$.

De fato: Como $\dim M = m < n$, é possível achar $(n-m)$ campos vetoriais ortogonais unitários

$$\vec{w}_1(u^1, \dots, u^m), \dots, \vec{w}_{n-m}(u^1, \dots, u^m)$$

ao longo da variedade M .

Podemos introduzir coordenadas $(u^1, \dots, u^m, t^1, \dots, t^{n-m})$ na variedade $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ como segue.

Seja $(u^1, \dots, u^m, t^1, \dots, t^{n-m})$ correspondente ao ponto

$$(\vec{x}(u^1, \dots, u^m), \sum_{\alpha=1}^{n-m} t^\alpha \vec{w}_\alpha(u^1, \dots, u^m)) \in N.$$

Logo a aplicação

$$E : N \rightarrow \mathbb{R}^n$$

da origem a seguinte correspondência

$$(u^1, \dots, u^m, t^1, \dots, t^{n-m}) \xrightarrow{\vec{e}} \vec{x}(u^1, \dots, u^m) + \sum_{\alpha=1}^{n-m} t^\alpha \vec{w}_\alpha(u^1, \dots, u^m).$$

Afirmção: O ponto $\vec{p} + t\vec{v} \in \mathcal{L}$, $\vec{p} + t\vec{v} = \vec{p} + (\frac{1}{t})^{-1}\vec{v}$ é o ponto focal de $(M, \vec{p})$ com multiplicidade μ se, e somente se, a matriz

$$(g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij}) \tag{3.1}$$

é singular com nulidade μ .

Observe que as derivadas parciais de $\vec{e}$ são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}}{\partial u^i} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha=1}^{n-m} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i}, i = 1, \dots, m \\ \frac{\partial \vec{e}}{\partial t^\beta} &= \vec{w}_\beta, \beta = 1, \dots, n-m \end{aligned} \tag{3.2}$$

Achemos a nulidade da matriz associada a aplicação

$$(dE)_{(p,tv)} : T_{(p,tv)}N \rightarrow T_{p+tv}\mathbb{R}^n$$

respeito das bases $\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}, \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^{n-m}}\}$ de $T_{(p,tv)}N$ e $\{\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^m}, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-m}\}$ de $T_{p+tv}\mathbb{R}^n$, isto é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^1} &= (dE)_{(p,tv)}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) = \sum_{i=1}^m a_{i1} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_{j1} \vec{w}_j \\ &\vdots \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^m} &= (dE)_{(p,tv)}\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right) = \sum_{i=1}^m a_{im} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{n-m} b_{jm} \vec{w}_j \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^1} &= (dE)_{(p,tv)}\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\right) = \sum_{i=1}^m a'_{i1} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{n-m} b'_{j1} \vec{w}_j \\ &\vdots \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^{n-m}} &= (dE)_{(p,tv)}\left(\frac{\partial}{\partial t^{n-m}}\right) = \sum_{i=1}^m a'_{i(n-m)} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{n-m} b'_{j(n-m)} \vec{w}_j \end{aligned}$$

Lembremos que o rank e a nulidade de uma matriz é igual ao rank e nulidade de sua transposta.

Logo a matriz Jacobiana de E terá o mesmo rank da matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^1} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^1} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^m} & \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^1} \vec{w}_1 & \dots & \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^1} \vec{w}_{n-m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^m} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^m} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^m} & \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^m} \vec{w}_1 & \dots & \frac{\partial \bar{e}}{\partial u^m} \vec{w}_{n-m} \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^1} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^1} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^m} & \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^1} \vec{w}_1 & \dots & \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^1} \vec{w}_{n-m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^{n-m}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^{n-m}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^m} & \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^{n-m}} \vec{w}_1 & \dots & \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^{n-m}} \vec{w}_{n-m} \end{pmatrix}$$

Substituindo cada $\frac{\partial \bar{e}}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar{e}}{\partial t^j}$ de 3.2 obtemos

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^j} + \sum_{\alpha=1}^{n-m} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^j} \right) & \left(\sum_{\alpha=1}^{n-m} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \vec{w}_\beta \right) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

logo a nulidade da matriz $JE(\vec{p}, t\vec{v})$ é igual a nulidade do bloco superior esquerdo. Usando a identidade

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\vec{w}_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^j} \right) = \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^j} + \vec{w}_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^i \partial u^j} \quad (3.3)$$

temos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \sum_{\alpha=1}^{n-m} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} \right) &= \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} - \sum_{\alpha=1}^{n-m} t^\alpha \vec{w}_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right) \\ &= \left(g_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{n-m} t^\alpha \vec{w}_\alpha \cdot \vec{l}_{ij} \right) \\ &= (g_{ij} - t \vec{v} \cdot \vec{l}_{ij}) \end{aligned}$$

isto demonstra a afirmação.

Agora suponha que (g_{ij}) é a matriz identidade. Então a matriz 3.1 é singular se, e somente se

$$\det(g_{ij} - t \vec{v} \cdot \vec{l}_{ij}) = \det\left(I - \frac{1}{t} \vec{v} \cdot \vec{l}_{ij}\right) = 0$$

isto é $\frac{1}{t}$ é um autovalor (ou curvatura principal) da matriz $(\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij})$. Além disso, a multiplicidade μ é igual a multiplicidade de $\frac{1}{t}$ como autovalor.

Como $(g_{ij} - t \vec{v} \cdot \vec{l}_{ij})$ é uma matriz de ordem $m \times m$ temos no máximo m autovalores. Então, da afirmação anterior concluímos que existem no máximo m pontos focais de $(M, \vec{p})$ ao longo de $\mathcal{L}$. Com isso concluímos a prova do lema. $\square$

Seja $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ fixo, definamos a seguinte função suave

$$L_{\vec{p}} = f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{por}$$

$$f(\vec{x}(u^1, \dots, u^m)) = \|\vec{x}(u^1, \dots, u^m) - \vec{p}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{p}.$$

As derivadas parciais de f são

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \quad (3.4)$$

assim f tem ponto crítico em $\vec{q}$ se, e somente se $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot (\vec{q} - \vec{p}) = 0$, isto é $\vec{q} - \vec{p} \in N_{\vec{q}}M$.

Tomando a segunda derivada parcial em um ponto crítico de 3.3 com respeito a u^j temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \right) \quad (3.5)$$

Lema 3.2. O ponto $\vec{q} \in M$ é um ponto crítico degenerado de $f = L_{\vec{p}}$ se, e somente se, $\vec{p}$ é um ponto focal de $(M, \vec{q})$. A nulidade de $\vec{q}$ como ponto crítico é igual a multiplicidade de $\vec{p}$ como ponto focal.

Demonstração. Seja $\vec{p} = \vec{x} + t\vec{v}$ para algum vetor unitário $\vec{v} \in N_{\vec{p}}M$, logo substituindo em 3.4 obtemos a seguinte matriz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot (-t\vec{v}) \right)$$

e usando a identidade 3.3 obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 (g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij})$$

logo o ponto $\vec{q} \in M$ é um ponto crítico degenerado de $f = L_{\vec{p}}$ se, e somente se, a matriz anterior é singular e pela afirmação anterior segue-se que $\vec{p} = \vec{q} + t\vec{v}$ é um ponto focal de $(M, \vec{q})$. A segunda parte do lema é clara. $\square$

Teorema 3.3. Para quase todo $p \in \mathbb{R}^n$ a função

$$L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$$

não tem pontos críticos degenerado.

Demonstração. Aplicação do corolário 3.2. $\square$

Corolário 3.4. Em qualquer variedade suave M existe uma aplicação suave com pontos críticos não degenerados para a qual cada M^a é compacto.

Demonstração. Pelo teorema de Mergulho de Whitney temos que M pode ser mergulhada suavemente como um conjunto fechado de $\mathbb{R}^{2m+1}$. Pelo Teorema anterior a aplicação suave

$$L_{\vec{p}} : M \rightarrow \mathbb{R}$$

não tem pontos críticos degenerados, para quase todo $\vec{p} \in \mathbb{R}^m$. É claro que $M^a = L_{\vec{p}}^{-1}((-\infty, a])$ é compacto. $\square$

Aplicação Seja M uma variedade suave de dimensão m . Então, M tem o tipo de homotopia de um CW-complexo de dimensão no máximo m .

Demonstração. Pelo corolário 3.4 existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ com pontos críticos não degenerados. Como M^a é compacto basta aplicar o teorema 2.14. $\square$

Lema 3.3. (Teorema do índice) O índice de $L_{\vec{p}}$ em um ponto não degenerado $\vec{q} \in M$ é igual ao número de pontos focais de $(M, \vec{q})$ os quais estão no segmento de $\vec{p}$ a $\vec{q}$; cada ponto focal sendo contado com sua multiplicidade.

Demonstração. Por definição, o índice de $L_{\vec{p}}$ em um ponto crítico não degenerado $\vec{q} \in M$ é o índice da matriz Hessiana de $L_{\vec{p}}$

$$\text{Hess}(L_{\vec{p}}) = \left(\frac{\partial^2 L_{\vec{p}}}{\partial u^i \partial u^j} \right)$$

no ponto $\vec{q}$, isto é, o número de autovalores negativos de $H(q)$.

Na prova do 3.2 mostramos que

$$\left(\frac{\partial^2 L_{\vec{p}}}{\partial u^i \partial u^j} \right) = 2(g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij}).$$

Vamos assumir que (g_{ij}) é a matriz identidade I . Agora, se λ é um autovalor de $H(q)$, então

$$\det((1 - \lambda)I - t\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij}) = 0.$$

Como $\frac{(1-\lambda)}{t} \geq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \lambda \leq 0$, então o número de autovalores negativos de $H(q)$ é igual ao número de autovalores de

$$(\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij}) \geq \frac{1}{t}. \quad (3.6)$$

Pela afirmação anterior temos que γ é um autovalor de $(\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij})$ se, e somente se, $\vec{p} + \frac{1}{\gamma}\vec{v}$ é um ponto focal de (M, p) .

Se $\gamma \geq \frac{1}{t}$ então $0 \leq \frac{1}{\gamma} \leq t \leq 1$ isto mostra que o ponto focal $\vec{p} + \frac{1}{\gamma}\vec{v}$ está no segmento de $\vec{p}$ a $\vec{q}$. Logo o número de autovalores de $(\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij}) \geq \frac{1}{t}$ é igual ao número de pontos focais de $(M, \vec{q})$ os quais estão no segmento de $\vec{p}$ a $\vec{q}$.

Finalmente de 3.6 concluímos que o índice de $L_{\vec{p}}$ em um ponto não degenerado $\vec{q} \in M$ é igual ao número de pontos focais de $(M, \vec{q})$ os quais estão no segmento de $\vec{p}$ a $\vec{q}$. A segunda parte do lema é claro. $\square$

3.2 Teorema de Lefschetz em seções hiperplanas

Como uma aplicação das ferramentas que foram desenvolvidas acima, provaremos um resultado sobre a topologia de variedades algébricas.

Definição 3.4. Uma variedade Stein M de dimensão m é uma variedade complexa mergulhada biholomorficamente como um subconjunto fechado de algum espaço Euclidiano $\mathbb{C}^n$, para algum $n > m$.

Teorema 3.5 (Andreotti-Frankel [Andreotti e Frankel 1959]). Seja $M \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade algébrica afim não singular em $\mathbb{C}^n$ (Stein) com dimensão real $2m$. Então

$$H_i(M, \mathbb{Z}) = 0 \text{ para } i > m.$$

O teorema anterior é uma consequência imediata do teorema abaixo.

Teorema 3.6. Toda variedade de Stein de dimensão m tem o tipo de homotopia de um CW -complexo de dimensão m .

Antes de provar o resultado acima vamos verificar algumas observações que serão úteis.

Observação. Consideremos uma forma quadrática de m variáveis complexas

$$Q(z_1, \dots, z_m) = \sum_{l,j=1}^m b_{lj} z_l z_j \quad (3.7)$$

Se substituirmos $z_j = x_j + iy_j$ e tomamos a parte real de Q obtemos uma forma quadrática real de $2m$ variáveis.

$$\begin{aligned} Q'(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{l,j=1}^m (x_l + y_l)(x_j + iy_j) \right) \\ &= \sum_{l,j=1}^m (x_l x_j - y_l y_j) \end{aligned}$$

Afirmção 1 Se λ é um autovalor de Q' com multiplicidade μ então $-\lambda$ é também um autovalor com mesma multiplicidade.

Demonstração. Notemos que

$$Q'(-y_1, -y_2, \dots, -y_m, x_1, \dots, x_m) = -Q'(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$$

e a matriz associada de Q' tem a forma

$$[Q'] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} + b_{21} & \cdots & b_{1m} + b_{m1} \\ b_{21} + b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2m} + b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} + b_{1m} & b_{m2} + b_{2m} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}.$$

Sendo λ um autovalor de Q' , então existe $v = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$[Q']v = \lambda v \quad \text{e portanto} \quad [Q']v' = (-\lambda)v'$$

onde $v' = (-y_1, \dots, -y_m, x_1, \dots, x_m)$. Logo segue a afirmação. $\square$

Afirmção 2 Os pontos focais de (M, q) ao longo de qualquer reta normal $\mathcal{L}$ ocorre em pares os quais estão situados simetricamente em torno de q .

Não apresentaremos a prova por ser muito longa, mas uma ideia pode ser encontrada na referência [Milnor 1963].

Demonstração. do teorema 3.6

Pelo Teorema 3.3 é possível escolher um ponto $p \in \mathbb{C}^n$ tal que a aplicação distância ao quadrado

$$L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$$

tem pontos críticos não degenerados, e como M é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}^n$, temos que

$$M^a = L_p^{-1}((-\infty, a])$$

é compacto.

Pelo lema 3.3 o índice de L_p em um ponto crítico (não degenerado) é igual ao número de pontos focais de (M, q) os quais estão no segmento de p a q . Como $\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$, então pelo lema 3.1 existe no máximo $2k$ pontos focais ao longo de reta que passa por p e q e pela afirmação 2 os pontos focais estão distribuídos simetricamente em torno de q , assim no máximo m pontos (focais) moram no segmento de p a q . Novamente pelo lema 3.3, o índice de L_p em q é $\leq m$. Finalmente aplicando o Teorema 2.14 segue-se que M tem o mesmo tipo de homotopia de um *CW-complexo* de dimensão m . $\square$

Teorema 3.7. (Lefschetz) Seja X uma variedade algébrica em $\mathbb{P}^n$ de dimensão m , e seja H um hiperplano de $\mathbb{P}^n$ o qual contém os possíveis pontos singulares de X . Então os homomorfismos

$$H_i(X \cap H) \rightarrow H_i(X)$$

$$\pi_i(X \cap H) \rightarrow \pi_i(X)$$

induzido pela inclusão $X \cap H \hookrightarrow X$ são:

- 1) bijetor para $i < m - 1$,
- 2) sobrejetor para $i = m - 1$.

Demonstração. **passo 1**

Primeiro faremos a prova para os grupos de homologia. Consideremos a sequência exata longa do par $(X, X \cap H)$

$$\cdots \rightarrow H_i(X \cap H) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(X, X \cap H) \rightarrow H_{i-1}(X \cap H) \rightarrow \cdots$$

é suficiente mostrar que $H_i(X, X \cap H) = 0$, para $i \leq m - 1$.

Tomando $M = K = X$ e $L = X \cap H$ no teorema de Dualidade de Lefschetz 2.5 temos a seguinte igualdade:

$$H_i(X, X \cap H, \mathbb{Z}) \cong H^{2m-i}(X - (X \cap H), \mathbb{Z}). \quad (3.8)$$

Como $X - (X \cap H)$ é uma variedade algébrica no espaço afim $\mathbb{P}^n - H$, em particular, $X - (X \cap H)$ é uma variedade de Stein. Então segue pelo Teorema 3.6 que

$$H^{2m-i}(X - (X \cap H), \mathbb{Z}) = 0 \text{ para } i \leq m-1,$$

logo, de 3.8 temos que $H_i(X, X \cap H) = 0$ para $i \leq m-1$. Se fizermos $i = m-1$ na sequência exata longa anterior temos facilmente que o homomorfismo induzido

$$H_{m-1}(X \cap H, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{m-1}(X, \mathbb{Z})$$

é sobrejetor.

passo 2 Vamos deduzir a segunda parte do teorema provando que o grupo de homotopia de $\pi_i(X, X \cap H)$ é trivial para $0 \leq i \leq m-1$.

Por hipótese $X - (X \cap H)$ é uma variedade suave de dimensão real $2m$. Escolha $p \in \mathbb{C}^n$ tal que a função $L_p : X - X \cap H \rightarrow \mathbb{R}$ não tem pontos críticos degenerados e defina a seguinte aplicação suave

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{L_p(x)} & \text{se } x \in X - (X \cap H) \\ 0 & \text{se } x \in X \cap H \end{cases}$$

É fácil ver que

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{-1}{L_p^2(x)} \frac{\partial^2 L_p(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{2}{L_p^3} \frac{\partial L_p(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial L_p(x)}{\partial x_j}.$$

Se q é um ponto crítico de L_p , então

$$\frac{\partial^2 f(q)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{-1}{L_p^2(q)} \frac{\partial^2 L_p(q)}{\partial x_i \partial x_j}, \text{ isto é, } Hess(f) = \frac{-1}{L_p^2} Hess(L_p).$$

Isto mostra que fora de $(X \cap H)$, f somente tem pontos críticos não degenerados. Vimos que os pontos críticos de L_p tem índice $\leq m$, assim, a igualdade acima implica que os pontos críticos de f tem índice $\geq 2m - m = m$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $f^{-1}(\varepsilon)$ não contém nenhum ponto crítico de f fora do conjunto fechado $X^\varepsilon = f^{-1}([0, \varepsilon])$ (note que $X \cap H \subset X^\varepsilon$) a aplicação f tem um número finito de pontos críticos, todos eles não degenerados com índice $\geq m$, logo, pelo teorema de Morse segue-se que X tem o mesmo tipo de homotopia de $X^\varepsilon = f^{-1}([0, \varepsilon])$ com um número finito de células de dimensão $\geq m$ atachado.

Em particular temos que

$$\pi_i(X^\varepsilon, X \cap H) \rightarrow \pi_i(X, X \cap H) \text{ é uma bijeção para } i \leq m-1. \quad (3.9)$$

Agora vamos usar o seguinte fato:

Proposição 3.8. (As variedades algébricas são retrato por deformação de vizinhanças.) Existe uma vizinhança aberta $U \subset X$ de $X \cap H$ que é um retrato por deformação de $X \cap H$.

Escolhamos um $\varepsilon > 0$ como acima, suficientemente pequeno tal que $X^\varepsilon \subseteq U$, onde U é uma vizinhança aberta dada pela proposição anterior.

Considerando o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(X^\varepsilon, X \cap H) & \xrightarrow{\quad} & \pi_i(U, X \cap H) \\ & \searrow \cong & \swarrow \\ & \pi_i(X, X \cap H) & \end{array}$$

temos os seguintes fatos: por 3.9, a aplicação diagonal na esquerda é um isomorfismo para $i \leq m-1$, e da proposição anterior segue-se que $\pi_i(U, X \cap H) = 0$.

Como o diagrama é comutativo segue-se que $\pi_i(X, X \cap H) = 0$, para $0 \leq i \leq m-1$.

Agora considerando a sequência exata de homotopia do par $(X, X \cap H)$:

$$\cdots \rightarrow \pi_i(X \cap H) \rightarrow \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(X, X \cap H) \rightarrow \pi_{i-1}(X \cap H) \rightarrow \cdots$$

facilmente temos que $\pi_i(X \cap H)$ é isomorfo a $\pi_i(X)$ para $i < m-1$ e sobrejetor no nível $m-1$. $\square$

Da prova do teorema anterior, segue-se imediatamente o seguinte

Corolário 3.9. O par $(X, X \cap H)$ é $(m-1)$ -conexo.

O caso especial em que V é uma variedade algébrica de codimensão 1 em $\mathbb{P}^{n+1}$, o teorema de Lefschetz pode ser aplicado para calcular os grupos de homotopia e homologia em dimensões baixas.

De fato, sabemos que $\mathbb{P}^{n+1}$ pode ser mergulhado em $\mathbb{P}^m$ para m suficientemente grande, então suponha que V é da forma

$$V = \{[z_0 : \cdots : z_{n+1}] \in \mathbb{P}^{n+1} : F(z_0, \dots, z_{n+1}) = 0\}$$

onde F é um polinômio homogêneo de grau d . É possível ver a variedade V como um hiperplano H em $\mathbb{P}^m$ no seguinte sentido.

Seja $\{F_0, \dots, F_m\}$ a base canônica de monômios de grau d

$$F_i = z_0^{d_{i,0}} \cdots z_{n+1}^{d_{i,n+1}}, \quad d_{i,0} + \dots + d_{i,n+1} = d.$$

Definamos o seguinte mergulho conhecido como mergulho de Veronese

$$\Sigma : \mathbb{P}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^m$$

por

$$\Sigma(z) = [F_0(z) : \cdots : F_m(z)].$$

É possível mostrar que $\Sigma(V)$ é uma variedade algébrica chamada variedade de Veronese. Note que V pode ser escrito na forma

$$V = \{[z_0, \dots, z_{n+1}] \in \mathbb{P}^{n+1} : a_0 F_0 + \dots + a_m F_m = 0\}$$

logo fazendo $Z_i = F_i(z_0, \dots, z_{n+1})$ temos

$$\Sigma(V) = \{[Z_0 : \dots : Z_m] \in \mathbb{P}^m : a_0 Z_0 + \dots + a_m Z_m = 0\}$$

o qual é um hiperplano em $\mathbb{P}^m$.

Corolário 3.10. Se V é uma subvariedade algébrica de codimensão 1 em $\mathbb{P}^{n+1}$, então a aplicação inclusão $V \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ induz os isomorfismos

$$H_i(V, \mathbb{Z}) \cong H_i(\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{Z}) \quad , \quad \pi_i(V) \cong \pi_i(\mathbb{P}^{n+1}) \quad \text{para } i < n.$$

Demonstração. Pelo visto acima é suficiente tomar $X = \mathbb{P}^{n+1}$ e $H = V$ e aplicar o teorema de Lefschetz. $\square$

Calculando explicitamente os grupos de homologia e homotopia do espaço projetivo $\mathbb{P}^{n+1}$ segue-se de 3.10 que

$$H_i(V, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{para } i \text{ par e } i \neq n \\ 0, & \text{para } i \text{ ímpar e } i \neq n \end{cases}$$

$$\pi_i(V) = \begin{cases} 0, & \text{para } i < n \text{ e } i \neq 2 \\ \mathbb{Z}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ESTRUTURA DE CONJUNTOS SEMI-ALGÉBRICOS

Neste capítulo enunciaremos o primeiro e segundo teorema de estrutura que serão importantes para compreender o teorema de Triangularização de conjuntos semi-algébricos. Como uma aplicação provaremos o lema de seleção da curva caso local e global. As principais referências são [Coste 2002] e [Benedetti e Risler 1990].

4.1 Primeiro teorema de estrutura

Teorema 4.1. [Primeiro teorema de estrutura] Seja X um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^n$, escrevemos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ com coordenadas $(x = (x_1, \dots, x_{n-1}), t)$. Então

- 1) X tem um número finito de componentes conexas e cada componente é semi-algébrica.
- 2) Existe uma partição finita I de $\mathbb{R}^{n-1}$ em conjuntos semi-algébricos conexos tais que, para cada $A \in I$, definimos

$$f_k^A : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad (\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$$

$k = 0, 1, \dots, s_A, s_{A+1}$ tal que

- a) $f_0^A \equiv -\infty, f_{s_{A+1}}^A \equiv +\infty$.
- b) $f_k^A : A \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, \dots, s_A$ são funções contínuas e para cada $x \in A$, $f_k^A(x) < f_{k+1}^A(x)$.
- c) Todos os conjuntos da forma $\mathcal{B}$ (tipo "faixa")

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^n : x \in A, f_h^A(x) < t < f_{h+1}^A(x)\}, h = 0, 1, \dots, s_A$$

ou $\mathcal{G}$ (tipo gráfico)

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^n : x \in A, t = f_h^A(x)\}, h = 0, 1, \dots, s_A$$

são semi-algébricos.

- d) A coleção de todos os conjuntos definidos em iii) formam uma partição de $\mathbb{R}^n$; a sub-coleção daqueles conjuntos contidos em X fazem uma partição de X .

Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [Benedetti e Risler 1990].

4.1.1 Aplicação do primeiro teorema de estrutura

Teorema 4.2. [Tarski-Seidenberg] Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação semi-algébrica. Então a imagem $f(X) \subseteq Y$ é um conjunto semi-algébrico.

Demonstração. Como f é semi-algébrica, temos que $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é um conjunto semi-algébrico.

Sejam $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção na segunda coordenada. Note que $\pi(\text{graf}(f)) = f(X)$. Logo, é suficiente provar que a projeção é uma aplicação semi-algébrica.

Afirmção. Seja V um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{n+m}$, então $\pi(V)$ é semi-algébrico.

Provaremos a afirmação por indução sobre n .

Para $n = 1$.

V é um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, pelo primeiro teorema de estrutura, temos que existe uma partição I de $\mathbb{R}^{m+1}$ em conjuntos semi-algébricos tais que V é união finita

$$V = \bigcup_{\lambda} C_{\lambda}$$

onde cada C_{λ} é um conjunto semi-algébrico da forma $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{G}$ sobre algum $A_{\lambda} \in \tilde{I}$, sendo $\tilde{I}$ uma partição de $\mathbb{R}^m$ em conjuntos semi-algébricos.

Não é difícil provar que

$$\pi(V) = \bigcup_{\lambda=1}^r A_{\lambda}$$

portanto $\pi(V)$ é um conjunto semi-algébrico.

Suponhamos que o teorema é válido para $n - 1$. Identificando $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ com $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{m+1}$, consideremos as projeções:

$$\pi' : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \quad \text{e} \quad \pi'' : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Claramente temos que $\pi = \pi'' \circ \pi'$, logo pela hipótese indutiva $\pi'(V)$ é um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{m+1}$ e pela primeira parte $\pi(V) = \pi''(\pi'(V))$ é semi-algébrico em $\mathbb{R}^m$. □

Proposição 4.3. Seja X um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^n$. Então o fecho $\overline{X}$ de X , seu interior $\overset{\circ}{X}$ e sua fronteira $\overline{X} \cap \overset{\circ}{X}$ são semi-algébricos.

Exemplo 4.1. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos semi-algéblicos.

- 1) A composição de aplicações semi-algéblicas é semi-algéblica;
- 2) $h = (h_1, \dots, h_m) : X \rightarrow Y$ é semi-algéblica se, e somente se, as aplicações h_i são semi-algéblicas;
- 3) Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação semi-algéblica com $f(x) \neq 0, \forall x \in X$ então $1/f$ é semi-algéblica;
- 4) Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação semi-algéblica então $|f|$ é uma aplicação semi-algéblica.

4.2 Segundo teorema de estrutura

Definição 4.1. Uma estratificação de um conjunto E de $\mathbb{R}^n$ é uma partição $\{A_i\}_{i \in I}$ de E tal que :

- 1) Cada A_i , chamado estrato de E , é uma subvariedade analítica real localmente fechada em $\mathbb{R}^n$.
- 2) Se $\bar{A}_i \cap A_j \neq \emptyset$, então $A_j \subseteq \bar{A}_i$ e $\dim A_j < \dim A_i$ (condição de fronteira).

Dizemos que a estratificação é finita se existe um número finito de estratos e que, a partição é semi-algéblica se cada estrato é um conjunto semi-algéblico.

Definição 4.2. 1) Um algoritmo de separação para $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ é um algoritmo, o qual estende qualquer família finita de polinômios $\{P_1, \dots, P_r\} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ a uma família

$$\{P_1, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_k\}$$

tal que:

- a) Qualquer conjunto semi-algéblico elementar definido por $\{P_1, \dots, P_k\}$; isto é, qualquer conjunto da forma

$$X = \bigcap_{j=1}^k \{x \in \mathbb{R}^n : P_j(x) \leq 0\}, \quad s_j \in \{>, =, <\},$$

é conexo.

- b) O fecho $\bar{X}$ de todo conjunto elementar X é obtido relaxando as desigualdades; isto é,

$$\bar{X} = \bigcap_{j=1}^k \{x \in \mathbb{R}^n : P_j(x) \leq 0\},$$

onde $\bar{s}_j = "<="$ se $s_j = "<="$ e $\bar{s}_j = ">="$ se $s_j = ">="$.

- 2) Um algoritmo de separação estratificado é um algoritmo de separação tal que, para cada família de separação de polinômios produzido pelo algoritmo, todos os conjuntos elementares definido por tal família fazem uma estratificação de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.4. [Segundo teorema de estrutura] Dado $n \in \mathbb{N}$, existe um algoritmo de separação estratificado para

$$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n].$$

4.2.1 Outras propriedades do algoritmo de separação estratificado

Listaremos abaixo algumas propriedades que serão úteis na prova da existência de triangulação de conjunto semi-algébrico

- 1) O algoritmo acima produz a seguinte estratificação:
considerando

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \supseteq \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\} \supseteq \mathbb{R}^{n-2} = \{x_n = x_{n-1} = 0\} \supseteq \dots \supseteq \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_{n-1}} \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-2}} \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

temos que:

- a) Para todo estrato S de $\mathbb{R}^j$, $\pi_{j-1}(S)$ é um estrato de $\mathbb{R}^{j-1}$ e $\pi_j^{-1}(S)$ é união de estratos de $\mathbb{R}^{j+1}$.
 - b) Todo estrato de $\mathbb{R}^j$ é da forma $\mathcal{B}$, ou da forma $\mathcal{G}$ sobre algum estrato de $\mathbb{R}^j$.
 - c) O estrato de $\mathbb{R}^j$ são conjuntos elementares da família de polinômios de separação, cada um com coeficiente principal constante com respeito a X_j .
- 2) Cada estrato de $\mathbb{R}^j$ de dimensão d é homeomorfo a $B^d = \{y \in \mathbb{R}^d; |y| < 1\}$, através de um homeomorfismo semi-algébrico.
- 3) Se B é um estrato de $\mathbb{R}^j$ de tipo $\mathcal{G}$ sobre $A = \pi_{j-1}(B)$ e C é um estrato contido no fecho de $\overline{B}$ de B , então C é de tipo $\mathcal{G}$ sobre $D = \pi_{j-1}(C)$ e $D \subseteq \overline{A}$.
- 4) Na hipótese de 3) seja

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\} \\ C &= \{(x, y) : x \in D, y = g(x)\} \end{aligned}$$

então f estende a uma função contínua $\bar{f}$ definido em $\overline{A}$ e $\bar{f}|_D = g$.

- 5) Seja B como em 3) e 4). Assume que $A \subseteq \overline{S}$, com S sendo um estrato de $\mathbb{R}^{j-1}$. Então existe um estrato T de tipo $\mathcal{G}$ sobre S ,

$$T = \{(x, y) : x \in S, y = h(x)\}$$

tal que $B \subseteq \overline{T}$.

Corolário 4.5. Cada conjunto semi-algéblico X tem uma estratificação semi-algéblica finita.

Corolário 4.6. [Teorema de Sard-Versão semi-algéblica] Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uma variedade semi-algéblica suave. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave semi-algéblica. Defina

$$\begin{aligned} C &= \{x \in M, \text{rank}(df)_x = 0\} \\ S &= f(C) \end{aligned}$$

Então S é um conjunto finito em $\mathbb{R}$.

4.3 Decomposição celular e triangulação de conjuntos semi-algéblicos

Notação

- $\bar{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$ é a célula unitária de dimensão d
- $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ é o bordo de $\bar{B}^d$
- $B^d = \bar{B}^d \setminus S^{d-1}$ é a célula aberta de dimensão d

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com a topologia induzida e seja

$\mathcal{C} = \{C_j^q : q \in \{1, \dots, k\}; j \in J_q\}$ uma família de subconjuntos fechados de X . Para cada $J_q = \{1, \dots, h_q\}$ definamos os conjuntos

$$X^{-1} = \emptyset, \quad X^q = \{C_j^p : j \in J_p, p \leq q\}$$

$$F_j^q = \bigcup_{C \in X^{q-1}} \{C_j^q \cap C\}$$

Definição 4.3. (Decomposição celular complexa)

Dizemos que a família $\mathcal{C}$ dada anteriormente é uma decomposição celular complexa de X se verifica o seguinte:

- 1) $(C_i^p \setminus F_i^p) \cap (C_j^q \setminus F_j^q) \neq \emptyset$ se, e somente se $i = j, p = q$.
- 2) Para cada C_j^q , existe uma aplicação contínua

$$\Phi_j^q : \bar{B}^q \rightarrow X \text{ tal que}$$

- a) $\Phi_j^q(S^{q-1}) = F_j^q$ (onde $S^{-1} = \emptyset$);
- b) $\Phi_j^q|_{B^q}$ é um homeomorfismo sobre $C_j^q \setminus F_j^q$

Φ_j^q é chamada aplicação característica de C_j^q , e $C_j^q \setminus F_j^q$ é chamada uma q -célula da decomposição. X^q é chamado q -esqueleto de X .

Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma decomposição celular semi-algébrica se X e C_j^q são conjuntos semi-algébricos e $\Phi_j^q, \Phi_j^q|_{B^q}$ são aplicações semi-algébricas, sendo $\Phi_j^q|_{B^q}$ um homeomorfismo.

Teorema 4.7. Seja X um conjunto compacto semi-algébrico de $\mathbb{R}^n$ e seja S uma estratificação de X (qualquer) obtida aplicando o algoritmo 4.4 na família de polinômios de alguma representação de X (veja 4.5). Então S pode ser considerado de uma forma natural como uma decomposição celular semi-algébrica de X , de tal maneira que o fecho de cada célula é uma união de células de dimensão menor.

De fato, seguindo a referência de [Benedetti e Risler 1990] é suficiente mostrar que a decomposição celular de X é um sistema de decomposições para:

$$X = X_n, X_{n-1} = \pi_{n-1}(X_n), \dots, X_j = \pi_j \circ \pi_{j+1} \circ \dots \circ \pi_{n-j}(X)$$

compatível com a projeção. Ver detalhes na referência citada acima.

Teorema 4.8. (Triangulação de conjunto semi-algébrico) Seja X um conjunto semi-algébrico compacto em $\mathbb{R}^n$, e seja $\{W_1, \dots, W_r\}$ uma partição finita de X por subconjuntos semi-algébricos. Então existe uma triangulação semi-algébrica

$$F : X \rightarrow |K|$$

tal que:

- 1) $|K|$ é um poliedro de $\mathbb{R}^n$ e cada W_i é uma união de algum $F^{-1}(S_j)$, com $S_j \in K = \{S_1, \dots, S_k\}$;
- 2) $\{F^{-1}(S_j)\}_{j=1, \dots, k}$ formam uma estratificação de X ;

- 3) Para cada j , $F| : F^{-1}(S_j) \rightarrow S_j$ é um difeomorfismo real analítico de variedades reais analítica.

Demonstração. Seja $\{P_1, \dots, P_r\} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ a família de polinômios de alguma representação fixa de X e W_i , $i = 1, \dots, r$. Aplicando o algoritmo 4.2 a esta família obtemos uma estratificação semi-algêbrica finita de X , e como X é compacto, pelo teorema 4.7 obtemos uma decomposição celular semi-algêbrica de X .

Seja

$$X = X_n, X_{n-1} = \pi_{n-1}(X_n), \dots, X_j = \pi_j \circ \pi_{j+1} \circ \dots \circ \pi_{n-1}(X), \dots$$

pela continuidade de π_j cada X_j é compacto, assim, novamente pelo teorema 4.7 temos que as estratificações semi-algêbricas de cada X_j , obtidas pelo teorema 4.4 são decomposições celulares para cada X_j além disso, são compatíveis com as projeções no sentido 4.2.1 1).

Vamos construir, para cada j , uma triangulação $F_j : X_j \rightarrow |K_j|$ tal que:

- 1') $|K_j|$ é um poliedro de $\mathbb{R}^j$ e a triangulação induz uma subdivisão da composição celular de X_j .
- 2') A triangulação semi-algêbrica F_j satisfaz 2) e 3) (relativo a X_j) da afirmação do teorema 4.8.
- 3') F_j será compatível com as projeções no seguinte sentido. Suponha que a mesma "flag"

$$\mathbb{R}^n \supseteq \mathbb{R}^{n-1} \supseteq \dots \supseteq \mathbb{R}$$

é fixada em outra cópia de $\mathbb{R}^n$, com as projeções $\pi_j : \mathbb{R}^{j+1} \rightarrow \mathbb{R}^j$ (como em 4.7), então cada $|K_j|$ é um poliedro de $\mathbb{R}^j$ e o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} X_j & \xrightarrow{F_j} & |K_j| \\ \pi_{j-1} \downarrow & & \downarrow \pi_{j-1} \\ K_{j-1} & \xrightarrow{F_{j-1}} & |K_{j-1}| \end{array}$$

Provaremos por indução sobre j . Para $j = 1$. Todo conjunto semi-algêbrico compacto em $\mathbb{R}$ podemos escrever como união finita de pontos e intervalos abertos limitados. Como todo simplexo aberto em $\mathbb{R}$ é também um ponto ou um intervalo, podemos tomar $|K| = X$ e $F = Id_X$ e trivialmente se verifica 1), 2) e 3).

Suponha que tenhamos construído $F_1, \dots, F_{j-1}$ que satisfaçam 1'), 2') e 3'). Seja $K_{j-1} = \{T_1, \dots, T_h\}$ o complexo simplicial finito em $\mathbb{R}^{j-1}$, para cada T_i definida $T'_i = F_{j-1}^{-1}(T_i)$. Dizemos que T'_s é uma face de T'_r se T_s é uma face de T_r .

Observação 4.1. Por hipótese de indução temos que $\{T'_i\}_{i=1}^h$ fazem uma subdivisão da decomposição celular de X_{j-1} então para cada $i = 1, \dots, h$ e por 1) de 4.2.1, segue-se que $\pi_{j-1}^{-1}(T'_i) \cap X_j$ é estratificado por conjuntos da forma $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{G}$ sobre T'_i . Além disso a decomposição $\{T'_i\}_{i=1}^h$ satisfaz as propriedades 3), 4) e 5) de 4.2.1.

Finalmente, mediante uma subdivisão baricêntrica de " F_{j-1} " podemos assumir o seguinte.

Lema 4.1. Seja $B_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^j = \mathbb{R}^{j-1} \times \mathbb{R} : X \in T'_i, y = f_u(x)\}$, $u = 1, 2$, conjuntos distintos do tipo $\mathcal{G}$ sobre T'_i . Sejam $\tilde{f}_u : \overline{T'_i} \rightarrow \mathbb{R}$ extensões como em 4) de 4.2.1. Em qualquer uma situação, existe um "vértice" v^0 de $\overline{T'_i}$ (isto é uma face zero-dimensional de T'_i) tal que $f_1(v^0) \neq f_2(v^0)$.

Agora estamos prontos para construir uma triangulação

$$F_j : X_j \rightarrow |K_j|$$

Fixemos uma ordem no conjunto de vértices de X_{j-1} e seja T um simplexo fixo de dimensão d em K_{j-1} . Como X é compacto, então:

$$X_j \cap \pi_{j-1}^{-1}(T') = \bigcup_{r=1}^k E_r$$

onde E_r é da forma

$$E_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^j : x \in T', f_r(x) \leq y \leq f_{r+1}(x)\}$$

e $f_1, \dots, f_{k-1} : T' \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_1 < \dots < f_{k-1}$

Provaremos que cada E_r é triangularizável de maneira compatível, isto é, desejamos que a triangulação cumpra 3') da descrição anterior.

Por simplicidade escolhemos um dos E_r e denotamos $E = E_r$, $f = f_r$ e $g = f_{r+1}$.

Seja $v_0, \dots, v_d$ os vértices de T' tomando uma ordem fixo e seja $a_s = \bar{f}(v_s)$, $b_s = \bar{g}(v_s)$ denotaremos com $(t_0, \dots, t_d)$ as "coordenadas baricêntricas" sobre T' (obtido das coordenadas baricêntricas do simplexo T mediante F_{j-1}).

Definamos

$$F_E : E \rightarrow \mathbb{R}^j$$

por

$$F_E(x, y) = (F_{j-1}(x), H(x, y))$$

onde

$$H(x, y) = \left(\frac{y - f(x)}{g(x) - f(x)} \right) \sum_{i=0}^d t_i b_i + \left(\frac{g(x) - y}{g(x) - f(x)} \right) \sum_{i=1}^d t_i a_i$$

$x \in T'$ e $y \in [f(x), g(x)]$

Observação 4.2.

- Note que F_E é bem definida pois $g < f$ em T' .
- F_E mapeia o gráfico de f (respectivamente de g) sobre T' no simplexo (aberto) de $\mathbb{R}^j$, $A = (z_0, \dots, z_d)$ onde $z_i = (v_i, a_i)$ (respectivamente $B = (q_0, \dots, q_d)$ onde $q_i = (v_i, b_i)$). De fato, seja $(x, y) \in \text{graf}(f)$ então $y = f(x)$ e $x \in T'$, logo

$$F_E(x, f(x)) = (F_{j-1}(x), H(x, f(x)))$$

onde $F_{j-1}(x) \in T$ e $H(x, f(x)) = \sum_{i=1}^d t_i a_i$

Assim $F_E(x, f(x)) \in A$.

- c) Para cada $x \in T'$, F_E mapeia o intervalo $[(x, f(x)), (x, g(x))]$ em $\pi_{j-1}^{-1}(x)$ sobre o intervalo entre os simplexos A e B na linha $\pi_j^{-1}(F_{j-1}(x))$.

De fato, Seja $x \in T'$ e seja $z \in [(x, f(x)), (x, g(x))]$ então

$$\begin{aligned} z &= (1-t)(x, f(x)) + t(x, g(x)), \text{ algum } t \in [0, 1] \\ &= (x, (1-t)f(x) + tg(x)) \end{aligned}$$

$$H(x, (1-t)f(x) + tg(x)) = t \sum_{i=0}^d t_i b_i + (1-t) \sum_{i=0}^d t_i a_i$$

Logo

$$\begin{aligned} F_E(x) &= F_E(x, (1-t)f(x) + tg(x)) \\ &= \left(F_{j-1}(x), t \sum_{i=0}^d t_i b_i + (1-t) \sum_{i=0}^d t_i a_i \right) \end{aligned}$$

$$\text{então } F_E(z) \in \left[\left(F_{j-1}(x), \sum_{i=0}^d t_i b_i \right), \left(F_{j-1}(x), \sum_{i=0}^d t_i a_i \right) \right] \subset \pi_j^{-1}(F_{j-1}(x))$$

- d) E claro que F_E é uma aplicação contínua semi-algéblica.

Agora dividamos $F_E(E)$ considerando todos os $(d+1)$ -simplexos em $\mathbb{R}^j$ da forma $(z_0, \dots, z_m, q_m, \dots, q_d)$, com $z_m \neq q_m$ e todas suas caras contido em $F_E(E)$.

Denotemos por K_E a família de simplexos obtido acima, assim podemos considerar F_E como uma "triangulação parcial"

$$F_E : E \rightarrow |K_E|.$$

Afirmamos que tomando a união de todos os F_E , e variando E e T obtemos uma triangulação global:

$$F_j \rightarrow |K_j| \subseteq \mathbb{R}^j.$$

A prova da afirmação segue-se notando que temos respeitado na definição de cada F_E um ordem fixo nos vértices de K_j e usamos a definição explícita de F_E e as propriedades 3), 4) e 5) de 4.2.1.

Em particular, usando 4) e 5), e considerando os limites de $H(x,y)$ onde as coordenadas baricêntricas tende para zero, vemos que F_j é bem definida e continua e que cada simplexo de dimensão $d < \dim X_j$ é uma face do simplexo de dimensão $d + 1$.

□

4.4 Aplicações do teorema da triangulação de conjuntos semi-algébricos

Observação 4.3. Consideremos o seguinte homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow B^n$ definido por $h(x) = \frac{x}{1 + |x|}$. Observemos que h é uma aplicação semi-algébrica, pois

$$\text{graf}(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(1 + |x|) = x\}$$

é claramente um conjunto semi-algébrico.

Seja X um conjunto semi-alébrico em $\mathbb{R}^n$ (X não necessariamente um conjunto compacto) e seja $X' = \overline{h(X)}$, fecho de $h(X)$ em $\overline{B}^n$.

Aplicando o teorema da triangulação a X' com respeito a partição $\{h(X), X' \setminus h(X)\}$ (observe que $h(X)$ e X' são conjuntos semi-algébricos) obtemos uma triangulação de X' tal que $h(X) \approx X$ é união de simplexos.

4.4.1 Uma versão do Lema de Seleção da Curva.

Como aplicação do Teorema da Triangulação provaremos uma versão de um lema conhecido como "Lema de Seleção da Curva".

Lema 4.2. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto semi-algébrico, $x_0 \in \overline{X}$. Então existe uma função semi-algébrica contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

- 1) $f(0) = x_0$,
- 2) $f|_{(0,1]}$ é analítica e
- 3) $f((0,1]) \subseteq X$.

Demonstração. Pela observação anterior, podemos assumir que $\overline{X}$ é um conjunto compacto. Observe também que $\{\{x_0\}, \overline{X} \setminus (X \cup \{x_0\}), X \setminus \{x_0\}\}$ é uma partição finita de $\overline{X}$ por subconjuntos semi-algébricos. Logo pelo teorema da triangulação existe uma triangulação semi-algébrica

$$F : \overline{X} \rightarrow |K|$$

tal que

- $K = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$
- $X \setminus \{x_0\} = \bigcup_{j \in L} F^{-1}(T_j)$, $L \subset \{1, \dots, k\}$
- $\{x_0\} = F^{-1}(T_i)$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$

Logo temos que T_i é necessariamente um simplex 0-dimensional (um ponto) e existe um simplexo $T = T_j$, algum $j \in L$ com um vértice $T_i = F(x_0)$. Assim, existe um $T \in K$ tal que $T \subseteq F(X \setminus \{x_0\})$ onde $F(x_0)$ é um vértice de T .

Fixemos um ponto $y_0 \in T$ e definamos $f' : [0, 1] \rightarrow |K|$ como $f'(x) = (1-t)F(x_0) + ty_0$. Facilmente se verifica que f' satisfaz as seguintes condições:

- a) $f'(0) = F(x_0)$
- b) $f'|_{(0,1]}$ é analítica
- c) $f'((0, 1]) \subseteq T$

De 3) do teorema da triangulação, temos que

$$F| : F^{-1}(T) \rightarrow T$$

é um difeomorfismo real analítico de variedade real analítica. Logo tomando a composição $f = F^{-1} \circ f'$ obtemos uma função semi-algébrica contínua

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que:

- 1) $f(0) = F^{-1} \circ f'(0) = F^{-1}(F(x_0)) = x_0$;
- 2) $f|_{(0,1]}$ é analítica, composição de aplicações analíticas em $(0, 1]$;
- 3) $f((0, 1]) = F^{-1}(f'((0, 1])) \subset F^{-1}(T) \subset X$.

□

Observação 4.4. Uma versão mais forte do Lema de Seleção da Curva (local) é provado por John Milnor em [Milnor 1968]. Ele demonstra que a aplicação f é analítica real no intervalo fechado $[0, 1]$, o que faz que o lema seja muito útil, por exemplo, ele é usado para provar o Teorema da fibração de Milnor (no caso local). Em nossa situação, a versão provada acima é suficiente para provar o Lema da Seleção da Curva (global) e esse, por sua vez, é usado para provar o Teorema da fibração de Milnor Global.

Lema 4.3 (Seleção da curva global [Némethi e Zaharia 1992]). Seja $f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_s, h_1, \dots, h_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ aplicações polinomiais com coeficientes reais, seja

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0, i = 1, \dots, q\} \text{ e}$$

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) > 0, i = 1, \dots, s\}.$$

Suponha que exista uma sequência $(x_k)_k \subseteq U \cap W$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = +\infty$ e para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_j(x_k) = 0$. Então existe uma curva real analítica $p: (0, \varepsilon) \rightarrow U \cap W$ com

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|p(t)\| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} h_j(p(t)) = 0, \text{ para } 1 \leq j \leq r.$$

Demonstração. Definamos a seguinte aplicação suave

$$\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^r \quad \text{por}$$

$$\varphi(x) = (y, z)$$

onde

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}, \dots, \frac{x_m}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} \right) \in S^m \text{ e } z = (h_1(x), \dots, h_r(x)).$$

Não é difícil provar que φ é um mergulho. Consideremos a sequência $\varphi(x_k) = (y_k, z_k)$, onde $(y_k)_k \subseteq S^m, (z_k)_k \subseteq \mathbb{R}^r$. Observamos que $z_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ pois pela hipótese $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_j(x_k) = 0$, também pela compacidade de S^m podemos supor que $\varphi(x_k) \rightarrow (y_0, 0) \in S^m \times \mathbb{R}^r$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Vejamos que φ é uma aplicação semi-algébrica. De fato, observe que

$$\text{graf}(\varphi) = \{(x, (y, z)) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^r : \varphi(x) = (y, z)\},$$

portanto podemos escrever da seguinte forma

$$\text{graf}(\varphi) = \left\{ (x, (y, z)) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^r : \begin{array}{l} y_i \sqrt{1 + \|x\|^2} = x_i, \quad i = 1, \dots, m \\ y_{m+1} \sqrt{1 + \|x\|^2} = 1 \\ z_j = h_j(x), \quad j = 1, \dots, r \end{array} \right\}$$

Assim concluímos que φ é uma aplicação semi-algébrica.

Pelo Teorema de Tarski-Seidenberg $U_1 = \varphi(U \cap W) \subset \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^r$ é um conjunto semi-algébrico e $(y_0, 0) \in \overline{U_1}$. Logo pelo lema da seleção da curva existe uma curva analítica real

$$\widehat{p}: (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$1) \quad \widehat{p}(0) = (y_0, 0)$$

$$2) \quad \widehat{p}((0, \varepsilon)) \subseteq U_1 \text{ com } \varepsilon \in (0, 1]$$

Como $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^r$ é um mergulho então $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(\mathbb{R}^m)$ é um difeomorfismo. Logo, tomamos a composição

$$p = (\varphi|_{U \cap W})^{-1} \circ \widehat{p} : (0, \varepsilon) \rightarrow U \cap W,$$

temos uma curva real analítica. Se verifica facilmente que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|p(t)\| = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} h_j(p(t)) = 0, \text{ para } 1 \leq j \leq r.$$

□

GRAU DE CONEXIDADE DA FIBRA GENÉRICA

Em [Milnor 1968] John Milnor estudou a topologia da singularidade de funções polinomiais holomorfas $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, com $f(0) = 0$ através de uma fibração localmente trivial em pequenas esferas em torno da singularidade. Para isso ele considerou a projeção

$$\phi: S_\varepsilon^{2n+1} \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^1$$

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|} \quad (5.1)$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde $S_\varepsilon^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\| = \varepsilon\}$, S^1 é a esfera unitária em $\mathbb{C}$, $K_\varepsilon = S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$ é conhecido como o link da singularidade e $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ é chamado a fibra de Milnor de f .

Com a notação acima o teorema da fibração é enunciado da seguinte forma:

Teorema 5.1 (Teorema da Fibração de Milnor [Milnor 1968]). Seja $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação

$$\phi: S_\varepsilon^{2n+1} \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^1 \text{ dada por } \phi(z) \rightarrow \frac{f(z)}{\|f(z)\|}$$

é a projeção de um fibrado suave localmente trivial.

5.1 Topologia da fibra e do link no caso local

Milnor faz uso da teoria de Morse para obter informações sobre a topologia da fibra F_θ e do link K_ε associados a uma função polinomial complexa que se anula na origem. Entre os resultados mais importantes temos:

Teorema 5.2. Dada $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ germe de função holomorfa, temos:

- 1) A fibra F_θ tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão (no máximo) n .
- 2) O link $K_\varepsilon = V \cap S_\varepsilon$ é $(n-2)$ -conexo.
- 3) Se o número complexo $c \neq 0$ tem módulo suficientemente pequeno, então a hipersuperfície complexa $f^{-1}(c)$ intercepta a bola aberta de raio ε numa variedade suave difeomorfa à fibra F_θ .

Se em nossa hipótese pedimos que a origem seja um ponto crítico isolado, é possível conhecer o grau de conexidade da fibra F_θ como afirma o seguinte resultado:

Teorema 5.3. Dada $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ como acima. Então:

- 1) Para ε suficientemente pequeno, o fecho de cada fibra F_θ em S_ε é uma variedade suave de dimensão real $2n$ com bordo. O interior dessa variedade diferenciável é F_θ e o bordo é precisamente K .
- 2) Cada fibra é uma variedade Stein e tem o tipo de homotopia de um buquê $S^n \vee \dots \vee S^n$ de esferas. O número de esferas no buquê é chamado o número de Milnor da singularidade.

Um resultado mais geral que nos permite calcular o grau de conexidade da fibra no caso local é o teorema de Kato-Matsumoto [Kato e Matsumoto 1973] que é enunciado na seguinte forma.

Teorema 5.4. Seja $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^{n+1}$, e seja $0 \in V$ um ponto crítico de uma função holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Suponha que $s = \dim_{\mathbb{C},0} \Sigma(f)$ é a dimensão complexa do germe do conjunto crítico $\Sigma(f)$ em 0. Então a fibra de Milnor F_θ é $(n-s-1)$ -conexa.

A importância do teorema reside em dois pontos importantes:

- 1) O resultado mostra uma clara conexão entre a dimensão do conjunto singular e o grau de conexidade da fibra;
- 2) Este grau de conexidade é ótimo, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 5.1. Seja

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 z_2)^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

Vamos calcular o grau de conexidade da fibra F_θ associada a f . Facilmente vemos que o conjunto singular de f é:

$$\Sigma(f) = \{(z_1, 0, 0, 0) : z_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, z_2, 0, 0) : z_2 \in \mathbb{C}\}$$

logo $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma(f) = 1$.

Por outro lado, observamos que f é um polinômio quase homogêneo do tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 4, 2, 2)$ (ver definição em 2.21). Pelo lema 9.4 [Milnor 1963] a fibra F_θ é difeomorfa à fibra genérica $f^{-1}(1)$.

Considere f da seguinte forma:

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4) = g(z_1, z_2) + h_1(z_3) + h_2(z_4)$$

onde $g(z_1, z_2) = (z_1 z_2)^2$, $h_1(z_3) = z_3^2$ e $h_2(z_4) = z_4^2$ são polinômios homogêneos. Pelo Teorema 2.10, temos que

$$f^{-1}(1) \equiv g^{-1}(1) * h_1^{-1}(1) * h_2^{-1}(1).$$

Não é difícil ver que $g^{-1}(1)$ é difeomorfa a $\mathbb{C}^* \cup \mathbb{C}^*$ e este último tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1 \cup S^1$.

Como $h_i^{-1}(1) = \{\pm 1\}$, pelo exemplo 2.5 e da associatividade do produto join concluímos que:

$$F_\theta \equiv (S^1 \cup S^1) * S^1.$$

Agora, aplicando a proposição 2.7 obtemos que F_θ é 1-conexo.

Vamos verificar abaixo que a fibra não é 2-conexo. De fato. Pelo teorema de Hurewicz 2.6, obtemos:

$$\pi_2(F_\theta) \cong \tilde{H}_2(F_\theta) = \tilde{H}_2((S^1 \cup S^1) * S^1).$$

Finalmente, pelo teorema 2.9 e tendo em conta os grupos de homologia reduzida da esfera (exemplo 2.4), resulta que $\pi_2(F_\theta) \neq 0$. Isto é, F_θ não é 2-conexo.

Observação 5.1. O exemplo acima pode ser generalizado considerando a seguinte função:

$$f(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1 z_2)^2 + \dots + (z_{2k-1} z_{2k})^2 + z_{2k+1}^2 + \dots + z_{n+1}^2.$$

Usando a ideia do exemplo anterior, é fácil ver que $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma(f) = k$ e sua fibra de Milnor

$$F_\theta \equiv \underbrace{(S^1 \cup S^1) * \dots * (S^1 \cup S^1)}_k * S^{n-2k}$$

é $(n-k-1)$ -conexo mais não é $(n-k)$ -conexo.

5.2 Classes especiais de funções

Em vez de considerar um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos considerar um $R > 0$ suficientemente grande e perguntar quando a função $\phi : S_R^{2n+1} \setminus K_R \rightarrow S^1$, definida como em 5.1, é uma fibração suave localmente trivial.

Diferentemente do caso local, no caso global infelizmente a resposta em geral é não. Contudo, quando a função ϕ é um fibrado suave localmente trivial dizemos que f admite uma fibração de Milnor no infinito, mais precisamente temos:

Definição 5.1. Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial. Diremos que f admite uma fibração de Milnor no infinito (ou fibração de Milnor global) se existir um $R_0 > 0$ suficientemente grande, tal que para todo $R \geq R_0$ a aplicação

$$\phi = \frac{f}{\|f\|} : S_R^{2n+1} \setminus K_R \rightarrow S^1 \quad (5.2)$$

for uma fibração suave localmente trivial, onde $K_R = S_R^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$ é chamado o link de f no infinito e a fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ é chamada fibra de Milnor no infinito.

A seguir definiremos algumas classes especiais de funções nas quais a fibração de Milnor no infinito existe. Como foi dito acima, no caso global de funções polinomiais holomorfas, a fibração de Milnor nem sempre existe. Os autores [Némethi e Zaharia 1992] consideram classes especiais de polinômios (algumas delas introduzidas por Broughton [Broughton 1988], [Broughton 1983] como polinômio tame) e provaram que nessas classes de polinômios a fibração do Milnor no infinito sempre existe.

Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial e $(z_k)_k \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ uma sequência em $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k\| = +\infty \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \text{grad} f(z_k) = 0. \quad (5.3)$$

Definição 5.2. Seja f como acima. Definimos o conjunto de Milnor de f por:

$$M(f) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \text{grad} f(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Definição 5.3.

Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial, dizemos que:

- 1) f é um polinômio *tame* se não existe sequência de pontos $(z_k)_k \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ tal que a condição 5.3 é satisfeita.

Denotamos por $\mathcal{T}$ a classe de polinômios *tame*.

- 2) f é um polinômio *quasitame* se não existe sequência de pontos $(z_k)_k \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ tal que satisfaz a condição 5.3 e a sequência

$$C_k = f(z_k) - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_k) \cdot z_{kj}$$

tem limite finito quando $k \rightarrow \infty$.

Denotamos por $\mathcal{QT}$ a classe de polinômios *quasitame*.

- 3) f é um polinômio M -tame se, dada uma sequência de pontos $(z_k)_k \subseteq M(f)$ que verifica 5.3 então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(z_k)\| = +\infty$$

Denotamos por $\mathcal{MT}$ a classe de polinômios M -tame.

- 4) f é um polinômio semitame se, dada uma sequência de pontos $(z_k)_k \subseteq M(f)$ tal que 5.3 é válido temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) \text{ for finito, então } \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = 0$$

Denotamos por $\mathcal{ST}$ a classe de polinômios *semitame*.

Observação 5.2. Da definição anterior é claro que $\mathcal{T} \subset \mathcal{QT}$ e $\mathcal{MT} \subset \mathcal{ST}$, também é possível mostrar que $\mathcal{QT} \subset \mathcal{MT}$ ([Némethi e Zaharia 1992]), logo temos $\mathcal{T} \subset \mathcal{QT} \subset \mathcal{MT} \subset \mathcal{ST}$ as contenções recíprocas não são verdadeiras, com exceção $\mathcal{QT} \subset \mathcal{MT}$ que ainda não se sabe se a inclusão é estrita.

Exemplo 5.2. 1) $f(x, y) = x^2y + xy^2 + x^5y^3 + x^3y^5$, temos que $f \in \mathcal{QT}$ mas $f \notin \mathcal{T}$.

2) $f(x, y) = xy + xy^4$, temos que $f \in \mathcal{ST}$ mais $f \notin \mathcal{MT}$.

Para outros exemplos em dimensão maior ver [Liu 2014]

Com as notações dadas anteriormente, enunciamos o seguinte teorema que garante a existência da fibração de Milnor global:

Teorema 5.5. (fibrção de Milnor global) Seja $f \in \mathcal{ST}$, então para $R \gg 1$ a aplicação ϕ definida como em 5.2 é uma fibração suave localmente trivial.

A prova deste teorema segue diretamente do caso local, com as devidas adaptações. Uma prova pode ser encontrada na referência [Némethi e Zaharia 1992].

5.3 Topologia da fibra e do link no infinito

Considerando a fibração localmente trivial $\phi : S_R^{2n+1} \setminus K_R \rightarrow S^1$ associada a uma função polinomial $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ semitame, Némethi e Zaharia em [Némethi e Zaharia 1992] usam a técnica desenvolvida por Milnor no caso local e provaram o seguinte resultado sobre a topologia da fibra e do link.

Teorema 5.6.

- 1) Seja $f \in \mathcal{MT}$. Então a fibra do Milnor no infinito, F_θ , tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet $S^n \vee \dots \vee S^n$ de $\tilde{\mu}$ esferas, sendo $\tilde{\mu}$ o grau topológico da seguinte aplicação

$$g : S_R \rightarrow S^1$$

$$g(z) = \frac{\text{grad} f(z)}{\|\text{grad} f(z)\|}$$

- 2) Seja $f \in \mathcal{MT}$. Então $K_R = V \cap S_R$ é $(n-2)$ -conexo.
- 3) Seja $f \in \mathcal{ST}$ e seja $D \subset \mathbb{C}$ um disco fechado de raio R centrado em 0. Então para R suficientemente grande a fibra genérica $f^{-1}(c)$ é difeomorfa a $F_\theta \setminus f^{-1}(D)$.
- 4) Seja $f \in \mathcal{ST}$. Então F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de $f^{-1}(c)$ com células atachadas de dimensão $\geq n$.

5.4 Topologia de hipersuperfície genérica

Dada uma função polinomial $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, desejamos ter informação do grau de conexidade, tipo de homotopia, homologia de uma fibra geral $f^{-1}(c)$, também conhecida como hipersuperfície genérica, onde $c \in \mathbb{C}$. Neste caso podemos fazer uso de um teorema de fibração devido a René Thom. Uma prova deste teorema pode se encontrar em [Broughton 1983] ou [Dimca 2012].

O menor tal subconjunto Γ , no sentido da inclusão, que torna tal aplicação acima uma fibração suave, é conhecido como conjunto dos valores atípicos.

Teorema 5.7. Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial. Então existe um conjunto finito $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ tal que a aplicação restrição

$$\phi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus f^{-1}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

é uma fibração suave localmente trivial.

5.5 Conectividade da hipersuperfície afim complexa

Seja X um conjunto algébrico complexo afim no espaço complexo $\mathbb{C}^{n+1}$ com $n \geq 1$. Suponhamos que X é definido por r funções polinômiais $f_1, f_2, \dots, f_r : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$

$$X = f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_r^{-1}(0)$$

Seja $\bar{X}$ o fecho de X em $\mathbb{P}^{n+1}$, isto é $\bar{X}$ é um conjunto algébrico no espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^{n+1}$, o qual é definido por r funções homogêneas $F_1, F_2, \dots, F_r$ por:

$$\bar{X} = \{[z_0 : \dots : z_n : z_{n+1}] \in \mathbb{P}^{n+1} \mid F_i(z_0, \dots, z_{n+1}) = 0, i = 1, 2, \dots, r\}$$

Onde

$$F_i(z_0, \dots, z_n, z_{n+1}) = z_{n+1}^d f_i\left(\frac{z_0}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right), \text{ para cada } i = 1, \dots, r \text{ com } \deg(f_i) = d$$

Denotamos por H_∞ o hiperplano no infinito em $\mathbb{P}^{n+1}$ e definimos por

$$H_\infty = \{[z_0 : \dots : z_n : z_{n+1}] \in \mathbb{P}^{n+1} : z_{n+1} = 0\}$$

Seja $X_\infty = \bar{X} \cap H_\infty$ a seção hiperplana no infinito de X e seja $s = \dim(S(\bar{X}) \cup S(X_\infty))$ onde $S(\bar{X}), S(X_\infty)$ denota a parte singular de $\bar{X}$ e X_∞ , respectivamente.

No caso quando $r = 1$ Alexandru Dimca provou o seguinte:

Teorema 5.8. X é $(n - 2 - \dim(S(\bar{X}) \cap H_\infty))$ -conexo.

Observação 5.3.

Seja $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ a decomposição do polinômio f em componentes homogêneas, com $f_d \neq 0$ e $\text{grau}(f_i) = i$

Denotamos por $\Sigma^\infty(f) = S(\bar{X}) \cap H_\infty$, e dizemos que $\Sigma^\infty(f)$ é o conjunto singular de f no infinito. Podemos escrever $\Sigma^\infty(f)$ de maneira explícita como:

$$\Sigma^\infty(f) = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \partial f_d(z_0, \dots, z_n) = 0, f_{d-1}(z_0, \dots, z_n) = 0\}$$

De fato, seja

$$F(z_0, \dots, z_{n+1}) = z_{n+1}^d f_0 + z_{n+1}^{d-1} f_1 + \dots + z_{n+1} f_{d-1} + f_d$$

achemos a parte singular de $\bar{X}$

$$S(\bar{X}) = \{[z_0 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{P}^{n+1} : \partial F(z_0, \dots, z_{n+1}) = 0\}$$

Onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z_0} &= z_{n+1}^{d-1} \frac{\partial f_1}{\partial z_0} + \dots + z_{n+1} \frac{\partial f_{d-1}}{\partial z_0} + \frac{\partial f_d}{\partial z_0} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial z_n} &= z_{n+1}^{d-1} \frac{\partial f_1}{\partial z_n} + \dots + z_{n+1} \frac{\partial f_{d-1}}{\partial z_n} + \frac{\partial f_d}{\partial z_n} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}} &= d z_{n+1}^{d-1} f_0 + \dots + 2 z_{n+1} f_{d-2} + f_{d-1} = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Logo se $S(\bar{X})$ interceptamos com H_∞ , (isto é, fazemos $z_{n+1} = 0$) obtemos

$$\Sigma^\infty(f) = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \partial f_d(z_0, \dots, z_n) = 0, f_{d-1}(z_0, \dots, z_n) = 0\}$$

onde $\partial f_d = (\frac{\partial f_d}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f_d}{\partial z_n})$ e identificamos $[z_0 : \dots : z_n : 0] = (z_0, \dots, z_n)$.

Lema 5.1. Se $\Sigma^\infty(f) = \emptyset$, então f é um polinômio quasitame.

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Suponha que f não é um polinômio quasitame, isto é, pela definição 5.3 b) existe uma sequência $(z_k)_k \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ tal que:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|z_k\| = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \partial f(z_k) = 0$$

e a sequência $c_k = f(z_k) - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_k) \cdot z_{kj}$ tem limite finito.

Como $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|z_k\| = \infty$, podemos assumir que $z_k \neq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, seja $\bar{z}_k = \frac{z_k}{\|z_k\|}$, assim temos uma sequência $(\bar{z}_k)_k \subseteq S_1^{2n+1}$ e pela compacidade de S_1^{2n+1} existe uma subsequência $(\bar{z}_{k_j})_j \subseteq (z_k)_k$ que converge para um $\bar{z}^\infty \in S_1^{2n+1}$.

Não é difícil provar que se $\partial f(z_k) \rightarrow 0$, então $\partial f(z^\infty) = 0$. Denotamos $\bar{z}_{k_j} = \bar{z}_k$.

Dado $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função homogênea de grau k isto é $f(\lambda z) = \lambda^k f(z)$ temos $kf(z) = \langle z, \text{grad} f(z) \rangle$ para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Em nosso caso temos $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ onde f_i é homogênea de grau i , para cada $i = 1, \dots, d$. então da observação anterior resulta.

$$if_i(z_k) = \langle z_k, \text{grad} f_i(z_k) \rangle \quad i = 1, \dots, d$$

Logo somando, obtemos

$$\sum_{j=1}^d j f_j(z_k) = \langle z_k, \sum_{j=1}^d \text{grad} f_j(z_k) \rangle = \langle z_k, \sum_{j=0}^d \text{grad} f_j(z_k) \rangle.$$

Multiplicando ambos lados por $\frac{1}{\|z_k\|}$ temos:

$$\frac{1}{\|z_k\|} \sum_{j=1}^d j f_j(z_k) = \left\langle \frac{z_k}{\|z_k\|}, \text{grad} f(z_k) \right\rangle = \langle \bar{z}_k, \text{grad} f(z_k) \rangle$$

como $\text{grad} f(z_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, então $\frac{1}{\|z_k\|} \sum_{j=1}^d j f_j(z_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Pela hipótese $\sum^\infty(f) = \emptyset$, logo da definição de $\sum^\infty(f)$ temos dois casos:

$$\partial f_{d-1}(z^\infty) \neq 0 \quad \text{ou} \quad f_{d-1}(z^\infty) \neq 0.$$

Se $\partial f_{d-1}(z^\infty) \neq 0$, chegamos a uma contradição pois $\partial f(z^\infty) = 0$, logo f é um polinômio quasitame.

Se $f_{d-1}(z^\infty) \neq 0$. Sabemos que a sequência $(c_k)_k$ tem limite finito, onde:

$$\begin{aligned} c_k &= f(z_k) - \langle z_k, \text{grad} f(z_k) \rangle \\ &= f(z_k) - \sum_{j=1}^d j f_j(z_k) \\ &= f_0 + \sum_{j=1}^d (1-j) f_j(z_k) \end{aligned} \tag{5.5}$$

como $(c_k)_k$ e $(\|z_k\|)_k$ tem limite finito e infinito respectivamente, resulta

$$\frac{1}{\|z_k\|} \sum_{j=1}^d (j-1) f_j(z_k) = \sum_{j=1}^d (j-1) \|z_k\|^{j-1} f_j(\bar{z}_k) \longrightarrow 0 \text{ se } k \rightarrow +\infty. \quad (5.6)$$

De maneira similar de 5.5 temos que a sequência:

$$\frac{c_k - f_0}{\|z_k\|} + \langle \bar{z}_k, \text{grad } f(z_k) \rangle = \frac{f(z_k) - f_0}{\|z_k\|} \longrightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow +\infty \quad (5.7)$$

Afirmamos que:

$$\frac{1}{\|z_k\|} \sum_{j=1}^d (d-j) f_j(z_k) \longrightarrow 0$$

De fato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|z_k\|} \sum_{j=1}^d (d-j) f_j(z_k) &= \frac{1}{\|z_k\|} \sum_{j=1}^d (d-1) f_j(z_k) - \frac{1}{\|z_k\|} \sum_{j=1}^d (j-1) f_j(z_k) \\ &= (d-1) \frac{f(z_k) - f_0}{\|z_k\|} - \sum_{j=1}^d (j-1) \|z_k\|^{j-1} f_j(\bar{z}_k) \end{aligned}$$

De 5.7 o primeiro somando da direita tende para zero e de 5.6 o segundo somando tende para zero, logo a afirmação esta provada.

Da seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|z_k\|} \sum_{j=1}^d (d-j) f_j(z_k) &= \|z_k\|^{d-2} f_{d-1}(\bar{z}_k) + 2\|z_k\|^{d-3} f_{d-2}(\bar{z}_k) + \dots + (d-1) f_1(\bar{z}_k) \\ &= \|z_k\|^{d-2} \left(f_{d-1}(\bar{z}_k) + 2 \frac{f_{d-2}(\bar{z}_k)}{\|z_k\|} + \dots + (d-1) \frac{f_1(\bar{z}_k)}{\|z_k\|^{d-2}} \right) \end{aligned}$$

e da afirmação anterior, temos

$$\left(f_{d-1}(\bar{z}_k) + 2 \frac{f_{d-2}(\bar{z}_k)}{\|z_k\|} + \dots + (d-1) \frac{f_1(\bar{z}_k)}{\|z_k\|^{d-2}} \right) \longrightarrow 0 \text{ se } k \rightarrow +\infty.$$

por outro lado

$$\left(f_{d-1}(\bar{z}_k) + 2 \frac{f_{d-2}(\bar{z}_k)}{\|z_k\|} + \dots + (d-1) \frac{f_1(\bar{z}_k)}{\|z_k\|^{d-2}} \right) \longrightarrow f_{d-1}(\bar{z}^\infty) \text{ se } k \rightarrow +\infty$$

o qual é um absurdo pois $f_{d-1}(\bar{z}^\infty) \neq 0$. □

No caso em que $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função polinomial quasitame, Némethi em [Némethi 1986] e [Némethi 1988] provou o seguinte resultado interessante:

Proposição 5.9. Seja $f \in \mathcal{QT}$. Então qualquer de suas fibras genéricas tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas de dimensão n .

Demonstração do teorema 5.8

Demonstração. Demonstraremos por indução sobre $s = \dim \Sigma^\infty(f) = \dim(S(\bar{X}) \cap H_\infty)$.

Se $\Sigma^\infty(f) = \emptyset$, então pelo lema anterior temos que f é um polinômio quasitame e pela proposição 5.9 segue-se que X é $(n-1)$ -conexo.

Por convenção $\dim \Sigma^\infty(f) = \dim \phi = -1 = s$ então X é $(n-2-s)$ -conexo.

Agora suponha que o teorema cumpre para $s-1$.

Seja H um hiperplano genérico em $\mathbb{P}^{n+1}$, isto é dado um $a \in \mathbb{C}^{n+2}$ fixo então

$$H = \{[z_0 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{P}^{n+1} : a_0 z_0 + \dots + a_{n+1} z_{n+1} = 0.\}$$

Claramente $\dim(S(\bar{X} \cap H) \cap H_\infty) = s-1$,

logo pela hipótese de indução, segue-se que a hipersuperfície

$$X \cap H \text{ é } (n-2-(s-1)) = (n-s-1)\text{-conexo.}$$

Assim usando a sequência exata longa de grupo de homotopia de par $(X, X \cap H)$, temos

$$\dots \rightarrow \pi_p(X \cap H) \rightarrow \pi_p(X) \rightarrow \pi_p(X, X \cap H) \rightarrow \dots \quad (5.8)$$

como $X \cap H$ é $(n-s-1)$ -conexo, então $\pi_p(X \cap H) = 0$, $0 \leq p \leq n-s-1$.

Então da sequência 5.8 segue-se que

$$\pi_p(X) \cong \pi_p(X, X \cap H), \quad 0 \leq p \leq n-2-s \quad (5.9)$$

Agora consideremos dois casos. No primeiro caso, suponhamos que o conjunto $X - X \cap H$ é não singular, isto é, os pontos singulares de X moram no hiperplano H . Logo pelo corolário 3.9 o par $(X, X \cap H)$ é $(n-1)$ -conexo e como $n-2-s \leq n-1$, $(-1 \leq s)$ em particular temos que o par $(X, X \cap H)$ é $(n-2-s)$ -conexo. Finalmente, de 5.9 concluímos que X é $(n-2-s)$ -conexo.

No segundo caso admitimos que o conjunto $X - X \cap H$ seja singular, Helmut A. Hamm [Hamm 1983] utilizando conceito de "grau de conexidade local fortemente" (não apresentamos neste trabalho) demonstra o mesmo resultado, isto é o par $(X, X \cap H)$ é $(n-1)$ -conexo. O resto da prova é similar na anterior. $\square$

Agora suponha que $f_{d-1} = 0$ e seja e o maior inteiro tal que $f_e \neq 0$ e $e < d$. De maneira similar definimos o conjunto

$$S(f) = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \partial f_d = 0, f_e = 0\}.$$

Um resultado mais forte também provado por Alexandru Dimca em [Dimca 2012] mostra que a fibra genérica da função polinomial $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ é $(n - 2 - \dim S(f))$ -conexo. Ver detalhes na referência citada.

REFERÊNCIAS

- ANDREOTTI, A.; FRANKEL, T. The lefschetz theorem on hyperplane sections. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 713–717, 1959. Citado na página [41](#).
- BENEDETTI, R.; RISLER, J.-J. **Real algebraic and semi-algebraic sets**. [S.l.: s.n.], 1990. Citado nas páginas [18](#), [19](#), [47](#), [48](#) e [52](#).
- BREDON, G. E. **Topology and geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 139. Citado na página [26](#).
- BRIESKORN, E. Beispiele zur differentialtopologie von singularitäten. **Inventiones mathematicae**, v. 2, p. 1–14, 1966. Citado na página [28](#).
- BROUGHTON, S. On the topology of polynomial hypersurfaces. **Singularities**, American Mathematical Soc., v. 40, n. Part 1, p. 167–178, 1983. Citado nas páginas [17](#), [64](#) e [66](#).
- BROUGHTON, S. A. Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 92, n. 2, p. 217–241, 1988. Citado nas páginas [17](#) e [64](#).
- COSTE, M. An introduction to semialgebraic geometry. **RAAG network school**, Citeseer, v. 145, p. 30, 2002. Citado na página [47](#).
- DIMCA, A. On the connectivity of complex affine hypersurfaces. **Topology**, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 511–514, 1990. Citado na página [18](#).
- _____. **Singularities and topology of hypersurfaces**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado nas páginas [66](#) e [71](#).
- DIMCA, A.; PAUNESCU, L. On the connectivity of complex affine hypersurfaces ii. **arXiv preprint math/9906064**, 1999. Citado na página [18](#).
- HAMM, H. A. Lefschetz theorems for singular varieties. **Topology**, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 547–557, 1983. Citado na página [70](#).
- HATCHER, A. **Algebraic topology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. Citado na página [25](#).
- KATO, M.; MATSUMOTO, Y. On the connectivity of the milnor fiber of a holomorphic function at a critical point. **Annals of Mathematics**, p. 131–136, 1973. Citado na página [62](#).
- LEE, J. M. Smooth manifolds. In: **Introduction to Smooth Manifolds**. [S.l.]: Springer, 2003. Citado na página [35](#).
- LIU, Y. The total milnor number of the weighted-le-yomdin-at-infinity polynomial. **arXiv preprint arXiv:1412.7688**, 2014. Citado na página [65](#).
- MATOUSEK, J. **Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado na página [27](#).

MILNOR, J. Construction of universal bundles, ii. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 430–436, 1956. Citado nas páginas 27 e 28.

_____. **Morse Theory**. [S.l.]: Princeton university press, 1963. v. 51. Citado nas páginas 29, 35, 42 e 63.

_____. **Singular Points of Complex Hypersurfaces**. [S.l.]: Princeton University Press, 1968. v. 61. Citado nas páginas 17, 59 e 61.

NÉMETHI, A. Théorie de lefschetz pour les variétés algébriques affines. **CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math**, v. 303, n. 12, p. 567–570, 1986. Citado na página 69.

_____. **Lefschetz theory for complex affine varieties**. [S.l.]: Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 1988. Citado na página 69.

NÉMETHI, A.; ZAHARIA, A. Milnor fibration at infinity. **Indagationes Mathematicae**, Elsevier, v. 3, n. 3, p. 323–335, 1992. Citado nas páginas 17, 59, 64 e 65.

OKA, M. On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials. **Topology**, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 19–32, 1973. Citado na página 28.

SPANIER, E. H. **Algebraic topology**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1994. v. 55. Citado nas páginas 25 e 26.

SWITZER, R. M. **Algebraic topology: homotopy and homology**. [S.l.: s.n.], 1975. Citado na página 26.