**Problemas parabólicos
semilineares com expoente
crítico em escalas de interpolação**

Ricardo Parreira da Silva

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 09/02/2004

Assinatura: _____

Problemas parabólicos semilineares com expoente crítico em escalas de interpolação

*Ricardo Parreira da Silva**

Orientador: *Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2004

*Este trabalho contou com suporte financeiro da Fapesp, proc: 01/10260 – 2.

*A mathematician is a blind man in a dark room,
looking for a black cat, which is not there.*
(Charles Darwin)

Àqueles que me ensinaram o que os livros não contam,
meus pais...

Agradecimentos

Mais que agradecer, eu divido este trabalho com todos os que se mostraram presentes e companheiros no decurso desses anos de aprendizado e labor. Faço eu o cumprimento a vocês...

Ao sereno mestre, Alexandre Nolasco, cujas presteza e dedicação, mais que auxiliar deram-me motivação para talhar essa dissertação, dedico os meus mais sinceros votos de apreço e agradecimento. Foram a sua simpleza e absoluta humildade, que mostraram-me o prazer do fazer Matemática.

Aos professores do Departamento de Matemática do IGCE-UNESP, que mais do que educadores foram extensão de minha família, reitero aqui minha gratidão.

Também aos professores do Departamento de Matemática do ICMC-USP, deixo aqui minhas cordialidades.

Finalmente, guardo este parágrafo não somente para agradecer, dedicar ou ilustrar o empenho e sacrifício incondicionais que têm feito por mim: Papai, Mamãe, Tia Dirce, Juninho, Rodolfo e Gabrielzinho, mas simplesmente, para em poucas palavras, resumir meu amor e orgulho por tê-los ao meu lado...obrigado...

À Karina Schiabel, pelo apoio perante os obstáculos e tribulações, que conviveu, assistiu e participou da concepção desse trabalho, obrigado minha linda...

Contrariando o que de praxe se tem por costume, deixo para agradecer no final aos números primos que tanto me fascinam e abstraem a mente.

Resumo

Neste trabalho estudamos problemas parabólicos semilineares da forma

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(u(x, t)), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \in W^{1,q}(\Omega), \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 .

Nosso objetivo é estabelecer resultados de existência, unicidade, continuidade e continuação de soluções para o problema (1) quando f apresenta crescimento crítico.

Abstract

In this work we study semilinear parabolic problems in the form

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(u(x, t)), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \in W^{1,q}(\Omega), \end{aligned} \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with C^2 -class boundary $\partial\Omega$.

Our objective is to establish results on existence, uniqueness, continuity and continuation of solutions for the problem (1) when f presents critical growing.

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Introdução	1
1 Semigrupos e seus Geradores	7
1.1 Geração e Representação	8
1.2 O Teorema de Hille-Yosida	10
1.3 O Teorema de Lumer-Phillips	11
1.4 Operadores Setoriais e Analiticidade	13
2 O Operador Laplaciano	19
2.1 Operadores Elípticos	20
3 Espaços de Ordem Fracionária	27
3.1 Os Espaços Traço de Lions	28
3.2 Caracterização dos Espaços Traço via Semigrupos	43
3.3 Os Espaços $W^{s,p}(\Omega)$	53
3.4 Uma norma intrínseca para $W^{s,p}(\Omega)$	60
3.5 Teoremas de Imersão	67
4 Espaços de Interpolação	71
4.1 Propriedades dos Espaços de Interpolação	72
4.1.1 Categorias e Funtores	72
4.1.2 Espaços de Interpolação	72
4.1.3 Teorema de Dualidade	76

5	Escalas de Espaços de Banach	79
5.1	Escalas de Banach	80
5.1.1	Conceitos Gerais	80
5.1.2	Escalas de Potência	87
5.1.3	Espaços de Extrapolação	88
5.1.4	Escalas Duais	93
5.1.5	Escalas de Interpolação-Extrapolação	99
5.2	Equações de Evolução em Escalas de Banach	101
5.2.1	Semigrupos em Escalas de Interpolação-Extrapolação	102
6	Problemas Parabólicos com Não-Linearidades Críticas	117
6.1	Resultados Abstratos	118
6.2	Aplicações	130
6.2.1	Equação do Calor - Teoria $W^{1,q}$	131
A	Espaços de Ordem Fracionária	135
B	Escalas de Espaços de Banach	143
	Referências Bibliográficas	145
	Lista de Símbolos	148
	Índice Remissivo	149

Introdução

*D*espontando com o surgimento do cálculo diferencial, o estudo das equações diferenciais teve sua importância destacada em várias áreas do conhecimento científico. Com os trabalhos de Euler, d'Alembert, Lagrange e Laplace, motivados pela descrição física da então chamada mecânica do contínuo, e de forma mais geral, como a principal ferramenta para o estudo analítico de modelos provenientes das ciências experimentais, surgem no início do século XVIII as equações diferenciais parciais. Já com os trabalhos de Riemann na metade do século XIX, estas por sua vez, começam a ser também empregadas como ferramenta auxiliar em outros ramos da matemática pura. Com o estudo mais rigoroso, surgem especulações pertinentes sobre o que entendemos por solução de uma equação diferencial, e como objeto de extenso estudo, perguntas relativas a existência, unicidade e também à regularidade de tais soluções.

Buscamos neste trabalho apresentar alguns dos resultados que foram desenvolvidos nessa linha, e aplicá-los a algumas classes de problemas parabólicos semilineares. Porém, antes de descrever propriamente o trabalho que será desenvolvido nesta dissertação, apresentamos uma breve motivação que consideramos ser pertinente para justificar a necessidade de privilegiarmos certas classes de funções e introduzirmos algumas definições.

Consideramos problemas de valor inicial do tipo

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + f(e), & t > 0 \\ e(0) = e_0, \end{cases} \quad (2)$$

onde o operador linear $-A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador setorial em um espaço de Banach E . Denotamos por E_α , $\alpha \geq 0$, os espaços de potências fracionárias associados ao operador A (ver [2, 10, 17, 18]), e por e^{At} o semigrupo analítico gerado por A . Assumimos sem perda de generalidade que

$$\begin{aligned} \|e^{At}e\|_{E_\alpha} &\leq M\|e\|_{E_\alpha}, \quad \alpha \geq 0 \\ \|e^{At}e\|_{E_\alpha} &\leq Mt^{-\alpha}\|e\|_E, \quad \alpha \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

É bem conhecido que se $f : E_1 \rightarrow E_\alpha$, $\alpha > 0$, for Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de E_1 , então o problema (2) será localmente bem posto em E_1 . De fato, para cada $e_0 \in E_1$ fixado,

procuramos por pontos fixos da transformação T no espaço $K(\tau, \mu) = \{e(\cdot) \in C([0, \tau], E_1) : e(0) = e_0, \|e(t)\|_{L^\infty(0, \tau; E_1)} \leq \|e_0\|_{E_1} + \mu\}$, onde T é dada pela expressão

$$(Te)(t) = e^{At}e_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(e(s))ds. \quad (4)$$

Os cálculos simples,

$$\begin{aligned} \|(Tu)(t) - (Tv)(t)\|_{E_1} &\leq M \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|f(u(s)) - f(v(s))\|_{E_\alpha} ds \\ &\leq CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|u(s) - v(s)\|_{E_1} ds \\ &\leq \left(CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds \right) \sup_{0 \leq s \leq t} \{\|u(s) - v(s)\|_{E_1}\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|(Te)(t)\|_{E_1} &\leq \|e^{At}e_0\|_{E_1} + M \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|f(e(s))\|_{E_\alpha} ds \\ &\leq \|e^{At}e_0\|_{E_1} + CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds (1 + \sup_{0 \leq s \leq t} \{\|e(s)\|_{E_1}\}) \end{aligned}$$

juntamente com o fato $\|e^{At}e_0\|_{E_1} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \|e_0\|_{E_1}$ e

$$\int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds = t^\alpha \int_0^1 (1-s)^{-1+\alpha} ds \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow 0^+$, sugerem que ao fixarmos $\mu > 0$ podemos escolher $\tau > 0$ suficientemente pequeno, de tal forma que $T(K(\tau, \mu)) \subset K(\tau, \mu)$, com T uma contração estrita em $K(\tau, \mu)$. Uma vez feito, o Teorema do Ponto Fixo de Banach se encarrega da existência e unicidade de solução para a equação integral no espaço $K(\tau, \mu)$. Com algum esforço adicional, podemos ainda mostrar que a solução encontrada é uma solução da equação diferencial (2), (ver por exemplo [18]).

Na análise acima, a convergência da integral imprópria

$$\int_0^1 (1-s)^{-1+\alpha} ds,$$

equivalente a $\alpha > 0$ é essencial, e todo o argumento cai por terra quando $\alpha = 0$.

Nesta dissertação veremos como interpretar a solubilidade local do problema (2) quando $\alpha = 0$.

É claro que se a única hipótese feita sobre a não linearidade f for que $f : E_1 \rightarrow E_0$ seja localmente Lipschitz, será impossível mostrarmos que o problema (2) é localmente bem posto. Por exemplo, tomando $f(e) = -2Ae$, que satisfaz $f : E_1 \rightarrow E_0$ e é globalmente Lipschitz, teremos $\dot{e} = Ae + f(e) = -Ae$, que não é em geral localmente bem posto, (se $A = \Delta$ então $\dot{e} = -Ae$ é a

equação do calor para trás). Portanto alguma condição extra deve ser imposta sobre a não linearidade f para garantirmos a existência de soluções para o problema acima.

Para melhor compreender a necessidade das condições que devem ser impostas sobre as não linearidades, consideramos o exemplo dado pela equação

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u|u|^{\rho-1}, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (5)$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira regular em $\mathbb{R}^3$ e $\rho > 1$.

É conhecido que o operador Δ com condição de fronteira de Dirichlet pode ser visto como um operador ilimitado em $E = H^{-1}(\Omega)$ com domínio $E_1 = H_0^1(\Omega)$ (ver [19]). Adicionalmente, os espaços de potências fracionárias E_α satisfazem as seguintes relações de imersão

$$\begin{aligned} E_\alpha &\hookrightarrow H^{2\alpha-1}(\Omega), & \alpha > 1/2 \\ E_{\frac{1}{2}} &= L^2(\Omega), \\ E_\alpha &\hookleftarrow H^{2\alpha-1}(\Omega), & \alpha < 1/2 \end{aligned} \quad (6)$$

(ver [34, 35]).

Se $f(u) = u|u|^{\rho-1}$, então com (6) e algumas imersões de Sobolev, podemos mostrar que para $1 < \rho \leq 3$, temos o operador de Nemitskii $f : E_1 \equiv H_0^1(\Omega) \rightarrow E_{\frac{1}{2}} \equiv L^2(\Omega)$; para $3 < \rho \leq 5$ temos $f : E_1 \equiv H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{3-\rho}{2}}(\Omega) \hookrightarrow E_{\frac{5-\rho}{4}}$. Portanto, para $1 < \rho < 5$, f é uma função bem definida em E_1 tomando valores em E_α para algum $\alpha > 0$. Para $\rho = 5$, $f : E_1 \rightarrow E_0$ e estamos no caso crítico $\alpha = 0$. Mas observemos que ainda para $\rho = 5$, usando novamente imersões de Sobolev e (6), obtemos para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $f : E_{1+\varepsilon} \rightarrow E_{5\varepsilon}$, enquanto o operador linear $A : E_{1+\varepsilon} \rightarrow E_\varepsilon$. Isto significa que, embora A e f possam ser tomados de mesma ordem em E_1 , se consideramos um espaço ligeiramente melhor, $E_{1+\varepsilon}$, então f regulariza mais que A . Adicionalmente pode ser mostrado que f satisfaz, para cada par $u, v \in E_{1+\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\|_{E_{5\varepsilon}} &\leq c\|u - v\|_{E_{1+\varepsilon}}(\|u\|_{E_{1+\varepsilon}}^4 + \|v\|_{E_{1+\varepsilon}}^4 + 1), \\ \|f(u)\|_{E_{5\varepsilon}} &\leq c\|u\|_{E_{1+\varepsilon}}^5. \end{aligned}$$

Assim, restrita a subconjuntos limitados de $E_{1+\varepsilon}$, f é Lipschitz contínua, e em particular isto significa que podemos resolver o problema (5) com condição inicial em $E_{1+\varepsilon}$. Por sua vez, se consideramos agora a sequência de dados iniciais $u_n \in E_{1+\varepsilon}$ com $u_n \xrightarrow{E_1} u_0 \in E_1$, denotando por $u_n(t)$ a solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + f(u), & t > 0 \\ u(0) = u_n, \end{cases} \quad (7)$$

temos para cada $n = 1, 2, \dots$

$$u_n(t) = e^{At}u_n + \int_0^t e^{A(t-s)}f(u_n(s))ds.$$

Dos cálculos

$$\begin{aligned} t^\varepsilon \|u_n(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} &\leq t^\varepsilon \|e^{At}u_n\|_{E_{1+\varepsilon}} + t^\varepsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\varepsilon} \|u_n(s)\|_{E_{5\varepsilon}}^5 ds \\ &\leq t^\varepsilon \|e^{At}u_n\|_{E_{1+\varepsilon}} + t^\varepsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\varepsilon} s^{-5\varepsilon} ds \sup_{0 < s < t} \{s^\varepsilon \|u_n(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}\}^5 \end{aligned}$$

e de $t^\varepsilon \|e^{At}u_n\|_{E_{1+\varepsilon}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ uniformemente em compactos de E_1 , não fica difícil vermos que se $\mu > 0$ é suficientemente pequeno, podemos obter um tempo de existência $\tau_1 > 0$, independente de n , tal que $t^\varepsilon \|u_n(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq \mu$ para todo $t \in (0, \tau_1]$, $n = 1, 2, \dots$.

Mas também, para $0 < t \leq \tau_1$

$$\begin{aligned} t^\varepsilon \|u_n(t) - u_m(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} &\leq t^\varepsilon \|e^{At}(u_n - u_m)\|_{E_{1+\varepsilon}} \\ &\quad + t^\varepsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\varepsilon} \|u_n(s) - u_m(s)\|_{E_{1+\varepsilon}} (1 + \|u_n(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}^4 + \|u_m(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}^4) ds \\ &\leq \|u_n - u_m\|_{E_1} + \left(t^\varepsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\varepsilon} s^{-\varepsilon} ds \right) \sup_{0 < s \leq t} \{s^\varepsilon \|u_n(s) - u_m(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}\} \\ &\quad + \left(2\mu^4 t^\varepsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\varepsilon} s^{-5\varepsilon} ds \right) \sup_{0 < s \leq t} \{s^\varepsilon \|u_n(s) - u_m(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}\}, \end{aligned}$$

o que implica para algum $0 < t \leq \tau_0 \leq \tau_1$,

$$t^\varepsilon \|u_n(t) - u_m(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq C \|u_n - u_m\|_{E_1}.$$

Um argumento semelhante irá mostrar que

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_m(t)\|_{E_1} &\leq C_1 \sup_{0 < s \leq t} \{s^\varepsilon \|u_n(s) - u_m(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}\} \\ &\quad + C_2 \|u_n - u_m\|_{E_1} \leq C \|u_n - u_m\|_{E_1}. \end{aligned}$$

Isto nos permite fazer $n \rightarrow \infty$ e obter soluções em $C([0, \tau_0], E_1) \cap C((0, \tau_0], E_{1+\varepsilon})$ com condições iniciais em E_1 .

Da discussão acima, parece razoável introduzirmos as seguintes definições

Definição 1. Dizemos que $e : [t_0, \tau] \rightarrow E_1$ é uma solução fraca ε -regular para o problema (2) se $e \in C([t_0, \tau], E_1) \cap C((t_0, \tau], E_{1+\varepsilon})$ com

$$e(t) = e^{A(t-t_0)}e_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s, e(s))ds. \quad (8)$$

Definição 2. Para $\varepsilon \geq 0$, dizemos que a aplicação g é uma aplicação ε -regular relativamente ao par (E_1, E_0) , se existem constantes reais $\rho > 1$, $\gamma(\varepsilon)$ e c , com $\rho\varepsilon \leq \gamma(\varepsilon) < 1$, tais que $g : E_{1+\varepsilon} \rightarrow E_{\gamma(\varepsilon)}$ e para cada par $u, v \in E_{1+\varepsilon}$,

$$\|g(u) - g(v)\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}} \leq c \|u - v\|_{E_{1+\varepsilon}} (\|u\|_{E_{1+\varepsilon}}^{\rho-1} + \|v\|_{E_{1+\varepsilon}}^{\rho-1} + 1). \quad (9)$$

Observamos que no problema 5 ao trocarmos a condição de fronteira para Neumann ($\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$), as imersões (6), (que são a base para nosso estudo), só são conhecidas no caso em que Ω é um domínio limitado com fronteira de classe C^∞ (ver [32]).

Entretanto, ao traduzirmos o problema para as escalas de interpolação-extrapolação as imersões 6 permanecem verdadeiras mesmo com Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^2 .

Nesta dissertação provaremos que se a não linearidade f for uma transformação ε -regular, para algum $\varepsilon > 0$, então existirá uma única solução ε -regular para o problema (2). Em [8] este resultado é aplicado para provar a existência de ε -soluções para a equação do calor com não linearidades críticas, baseando-se em resultados de imersão conhecidos para os espaços de potências fracionárias associados ao operador Laplaciano. Utilizando-nos da teoria de equações de evolução em escalas de espaços de Banach (ver [2]) introduzida por H. Amann, provamos este resultado nos valendo da interpolação entre os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, além de estudar as propriedades de ε -regularidade da não-linearidade f nestas escalas de espaços.

Com este objetivo, organizamos este trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentamos definições e resultados básicos concernentes a teoria de semi-grupos de operadores lineares, deixamos de provar vários dos resultados apresentados a fim de tornar a leitura menos cansativa. O Capítulo 2 é devotado ao estudo das propriedades espectrais do operador Laplaciano. No Capítulo 3 desenvolvemos a teoria introduzida por Lions e Magenes com o intuito de construir os Espaços de Sobolev de Ordem Fracionária, e provamos os teoremas de imersão necessários ao Capítulo 6. Já o Capítulo 4 é um resumo bem sucinto das propriedades gerais dos funtores de interpolação, e o Capítulo 5 é desenvolvido com o objetivo de mostrarmos o teorema fundamental para escalas de interpolação-extrapolação, o qual nos permite fazer as estimativas cruciais para a obtenção do principal resultado desta dissertação. Finalmente, no Capítulo 6, provamos o teorema de existência de ε -solução e o aplicamos à equação do calor com não linearidades de expoente crítico.

Semigrupos e seus Geradores

*S*em pretensão de ser uma referência completa, este primeiro capítulo é devotado a teoria dos Semigrupos de Operadores Lineares. Expomos de forma rápida e sucinta um apanhado geral de definições e resultados que esperamos precisar nos capítulos subsequentes. Por se tratar de uma ferramenta clássica no estudo de equações de evolução em espaços abstratos, nos furtaremos de dar a prova da maioria dos resultados enunciados, podendo estas serem encontradas por exemplo em [10, 13, 17, 29].

1.1 Geração e Representação

Recordemos que se E e F são espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de E em F , munido da norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\substack{e \in E \\ e \neq 0}} \frac{\|Te\|_F}{\|e\|_E}, \quad T \in \mathcal{L}(E, F).$$

Em particular se $E = F$, escrevemos simplesmente $\mathcal{L}(E)$ para $\mathcal{L}(E, E)$. Por E^* denotamos o dual topológico de E , ou seja, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, cuja topologia é induzida pela norma acima. A fim de fixarmos a notação, denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $E - E^*$ -dualidade, e dessa forma o valor de $e^* \in E^*$ em $e \in E$ é denotado por $\langle e^*, e \rangle$.

Definição 1.1. *Um semigrupo de operadores lineares em E é uma família a um parâmetro $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ tal que*

- (i) $T(t+s) = T(t)T(s)$, quaisquer que sejam $t, s \geq 0$,
- (ii) $T(0) = I_E$,

onde I_E denota o operador identidade de E .

Se, adicionalmente,

- (iii) $\|T(t) - I_E\|_{\mathcal{L}(E)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, dizemos que o semigrupo é uniformemente contínuo.
- (iv) $\|T(t)e - e\|_E \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, para todo $e \in E$, dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo.

Todo semigrupo fortemente contínuo possui uma dominação exponencial dada pelo teorema

Teorema 1.2. *Se $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ é um semigrupo fortemente contínuo em E , então existem constantes $M \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Definição 1.3. *Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear, ao conjunto*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R(\lambda I - A)} = E, (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe e é limitado sobre } R(\lambda I - A)\}$$

chamamos o conjunto resolvente do operador A , e denotamos por $\rho(A)$. Ao conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ chamamos o espectro do operador A .

Definição 1.4. Se $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares no espaço de Banach E , seu gerador infinitesimal é o operador definido por $A : D(A) \subset E \rightarrow E$, onde

$$D(A) = \left\{ e \in E : \text{existe } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)e - e}{t} \right\}, \quad Ae = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)e - e}{t}.$$

O próximo resultado reúne algumas das propriedades dos semigrupos fortemente contínuos.

Teorema 1.5. Se $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares em E , então

(i) Para cada $e \in E$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)e d\tau = e.$$

(ii) Para cada $e \in E$ fixado, a aplicação $t \mapsto T(t)e$ é contínua para todo $t \geq 0$.

(iii) A aplicação $t \mapsto \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$ é semicontínua inferiormente, e portanto mensurável.

(iv) Se A é o gerador infinitesimal de $T(t)$, então A é um operador fechado e densamente definido. Além disso, para cada $e \in D(A)$, a aplicação $t \mapsto T(t)e$ é continuamente diferenciável com

$$\frac{d}{dt} T(t)e = AT(t)e = T(t)Ae, \quad t > 0.$$

(v) Para cada $e \in E$ e $t > 0$

$$\int_0^t T(\tau)e d\tau \in D(A) \quad \text{e} \quad A \int_0^t T(\tau)e d\tau = T(t)e - e.$$

(vi) $\bigcap_{m \geq 1} D(A^m)$ é um subespaço denso de E .

(vii) Para $\operatorname{Re} \lambda > \beta$, onde β é dado no Teorema 1.2, $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda - A)^{-1}e = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)e dt, \quad e \in E.$$

Teorema 1.6 (O Segundo Limite Fundamental). Se $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ é um semigrupo fortemente contínuo com gerador $A : D(A) \subset E \rightarrow E$, então

$$T(t)e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} \right]^n e,$$

para todo $e \in E$. Além disso os limites acima são uniformes para t em intervalos limitados de $\mathbb{R}$.

1.2 O Teorema de Hille-Yosida

Teorema 1.7 (Hille-Yosida). *Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear, então as seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

- (ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido, cujo conjunto resolvente contém propriamente o intervalo (ω, ∞) e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \lambda > \omega.$$

Observemos que ambas as condições (i) e (ii) do Teorema 1.7 dependem de uma particular escolha da norma em E . Daremos agora uma formulação independente da norma, entretanto na prática é usual procurarmos normas especiais para as quais este teorema se aplique.

Lema 1.8. *Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear tal que $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M\lambda^{-n}, \quad n \geq 1, \lambda > 0,$$

então existe uma norma $|\cdot|_E$ em E tal que

$$\|e\|_E \leq |e|_E \leq M\|e\|_E, \quad e \in E$$

e

$$|(\lambda - A)^{-1}e|_E \leq \lambda^{-1}|e|_E, \quad e \in E, \lambda > 0.$$

Teorema 1.9 (Forma Geral do Teorema de Hille-Yosida). *Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear, então as seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0.$$

- (ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido, cujo conjunto resolvente contém propriamente o intervalo (β, ∞) e*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M(\lambda - \beta)^{-n}, \quad \lambda > \beta, n = 1, 2, \dots$$

1.3 O Teorema de Lumer-Phillips

Definição 1.10. *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ o seu dual topológico. A aplicação dualidade $J : E \rightarrow 2^{E^*}$ é uma função multívoca definida por*

$$J(e) = \{e^* \in E^* : \operatorname{Re} \langle e^*, e \rangle = \|e\|_E^2, \|e^*\|_{E^*} = \|e\|_E\}.$$

Observemos que pelo Teorema de Hahn-Banach $J(e) \neq \emptyset$ para todo $e \in E$.

Definição 1.11. *Um operador linear $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é dito dissipativo, se para cada $e \in D(A)$ existe $e^* \in J(e)$ tal que*

$$\operatorname{Re} \langle e^*, Ae \rangle \leq 0.$$

Definição 1.12. *Se $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ é um semigrupo fortemente contínuo tal que*

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad t \geq 0,$$

então $T(t)$ é dito um semigrupo fortemente contínuo de contrações em E .

Lema 1.13. *O operador linear A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda - A)e\|_E \geq \lambda \|e\|_E, \quad e \in D(A), \quad \lambda > 0. \quad (1.1)$$

Teorema 1.14 (Lumer-Phillips). *Suponhamos que $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ seja um operador linear densamente definido em um espaço de Banach E .*

- (i) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, então A é dissipativo (de fato, $\operatorname{Re} \langle e^*, Ae \rangle \leq 0$ para todo $e^* \in J(e)$) e $R(\lambda - A) = E$ para todo $\lambda > 0$.*
- (ii) *Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = E$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

A seguir recordamos a definição de operadores adjuntos.

Definição 1.15. *Sejam E um espaço de Banach e E^* o seu dual topológico. Se $S : D(S) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear densamente definido, o adjunto $S^* : D(S^*) \subset E^* \rightarrow E^*$ de S é o operador linear definido por*

$$D(S^*) = \{e^* \in E^* : \exists f^* \in E^*, \langle e^*, Se \rangle = \langle f^*, e \rangle, e \in D(S)\}, \quad S^* e^* = f^*.$$

Observemos que o operador S^* é um operador bem definido graças a densidade de $D(S)$ em E .

Consideremos um espaço de Hilbert H , munido do produto interno $(\cdot, \cdot)$. Identificamos via $(\cdot, \cdot)$ os espaços H e H^* , e no que segue denotamos sistematicamente ambos por H .

Definição 1.16. Dizemos que um operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é simétrico se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$, isto é, $(Ae, f) = (e, Af)$ para todo par $e, f \in D(A)$. Adicionalmente, A é dito auto-adjunto se $A = A^*$.

Corolário 1.17. Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos, A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em E .

Em muitos exemplos, a técnica empregada para verificar as estimativas espectrais necessárias para garantir que um particular operador A seja o gerador de um semigrupo fortemente contínuo, são obtidas através do conhecimento da chamada imagem numérica de A .

Definição 1.18. Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear em um espaço de Banach complexo E , a sua imagem numérica $W(A)$ é o conjunto

$$W(A) = \{ \langle e^*, Ae \rangle : e \in D(A), \|e\|_E = 1, e^* \in E^*, \|e^*\|_{E^*} = 1, \langle e^*, e \rangle = 1 \}. \quad (1.2)$$

Observemos no caso em que E é um espaço de Hilbert $W(A) = \{ (Ae, e) : e \in D(A), \|e\|_E = 1 \}$.

Teorema 1.19. Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador fechado e densamente definido. Considerando $W(A)$, a imagem numérica de A , e Σ um subconjunto aberto e conexo inteiramente contido em $\mathbb{C} \setminus W(A)$, se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é um operador injetivo com imagem fechada, e, para todo $e \in E$

$$\|(\lambda - A)e\|_{\mathcal{L}(E)} \geq d(\lambda, W(A))\|e\|_E. \quad (1.3)$$

Adicionalmente, se $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$, então $\rho(A) \supset \Sigma$, e neste caso

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))}, \quad \lambda \in \Sigma, \quad (1.4)$$

onde $d(\lambda, W(A))$ representa a distância entre λ e $W(A)$.

Definição 1.20. Dizemos que um operador $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é fechável se $\overline{\text{Graf}(A)} \subset E \times E$ for gráfico de um operador $\bar{A} : D(\bar{A}) \subset E \rightarrow E$. Neste caso $\bar{A}$ é o menor operador fechado que estende A .

Teorema 1.21. *Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador dissipativo no espaço de Banach E .*

- (i) *Se $R(\lambda_0 - A) = E$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $R(\lambda - A) = E$ para todo $\lambda > 0$.*
- (ii) *Se A é fechável, então o seu fecho $\bar{A}$ é também dissipativo.*
- (iii) *Se $\overline{D(A)} = E$, então A é fechável.*

Teorema 1.22. *Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador dissipativo com $R(I - A) = E$. Se E for reflexivo, então $\overline{D(A)} = E$.*

1.4 Operadores Setoriais e Analiticidade

Teorema 1.23. *Suponhamos que $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ seja o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\}$ no espaço de Banach E , satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\beta t}$. Se $\gamma > \max\{0, \beta\}$, então para cada $e \in D(A^2)$ e $t > 0$*

$$T(t)e = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e d\lambda,$$

onde a integral é tomada ao longo do segmento de reta com $\operatorname{Re} \lambda = \gamma$. Além disso o limite converge uniformemente para todo $\varepsilon \leq t \leq 1/\varepsilon$, qualquer que seja $\varepsilon > 0$.

Definição 1.24. *Se $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ denota um setor no plano complexo e E um espaço de Banach, um semigrupo analítico em Δ é uma família a um parâmetro $\{T(z); z \in \Delta\} \subset \mathcal{L}(E)$ tal que*

- (i) *A aplicação $z \rightarrow T(z)$ é analítica no setor Δ ,*
- (ii) *$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todo par $z_1, z_2 \in \Delta$,*
- (iii) *$T(0) = I_E$, e $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Delta}} T(z)e = e$, para todo $e \in E$,*

onde I_E denota o operador identidade de E .

Um semigrupo de operadores lineares em E , $\{T(t); t \geq 0\}$, é dito analítico se for um semigrupo analítico em algum setor Δ do plano complexo que contém o eixo real não negativo.

Definição 1.25. *Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. Se existem constantes reais a, C e $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, tais que o setor $\Sigma_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \phi\}$ esteja contido propriamente em $\rho(A)$, com*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad \lambda \in \Sigma_{a,\phi}$$

dizemos que o operador $-A$ é setorial.

Teorema 1.26. *Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares no espaço de Banach E , tal que $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \phi\} \subset \rho(A)$, para algum $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{|\lambda|}$, para todo $\lambda \in \Sigma$, então o semigrupo gerado por A é analítico em um setor contendo o eixo real positivo.*

Demonstração: Observemos que pelo Teorema 1.23, existe um $\gamma > 0$ tal que

$$T(t)e = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e d\lambda,$$

para todo $e \in D(A^2)$, e $t > 0$. Sendo o integrando analítico para todo $\lambda \in \Sigma$, podemos deformar o contorno de integração para a curva Γ como na Figura 1.1.

Figura 1.1: contorno deformado

Observemos ainda que quando $\text{Im } \lambda = \pm N$, temos $-kN \leq \text{Re } \lambda \leq \gamma$ ($k = |\cot \phi| > 0$), e portanto

$$\|e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e\|_E \leq \frac{e^{\text{Re } \lambda} C \|e\|_E}{\sqrt{(\text{Re } \lambda)^2 + N^2}}$$

com as integrais correspondentes tendendo a zero quando $N \rightarrow \infty$.

Portanto

$$T(t)e = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e d\lambda,$$

sendo esta última expressão válida para todo $e \in E$ e $t > 0$. De fato, para $t > 0$, $\arg \lambda = \pm \phi$, logo

$$\|e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C \frac{e^{-t|\lambda|k_1}}{|\lambda|},$$

onde $k_1 = |\cos \phi| > 0$, e portanto

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

com convergência na norma de $\mathcal{L}(E)$, qualquer que seja $t > 0$. Além disso, essa convergência é uniforme para todo $\varepsilon \leq t$, qualquer que seja $\varepsilon > 0$. Dessa forma, segue que aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(E)$ é contínua para $t > 0$ (mas claramente a convergência não é uniforme quando $t \rightarrow 0$, a menos que A seja limitado). Ainda mais, esta integral converge uniformemente para todo t no setor $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \varepsilon_1 < \phi - \frac{\pi}{2}\}$, $\varepsilon_0 \leq |t|$, para $(\varepsilon_i > 0, i = 0, 1)$, e dessa forma, a aplicação $t \mapsto T(t)$ é analítica em um setor do plano complexo contendo o eixo real positivo, o que mostra o teorema. ■

A prova da analiticidade acima não usou explicitamente o fato do operador A ser o gerador de um semigrupo fortemente contínuo, mas somente as propriedades de convergência do resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ quando $|\lambda| \rightarrow \infty$. De fato, qualquer operador A densamente definido tal que $-A$ seja setorial, é o gerador de um semigrupo analítico. Isto é exatamente o que diz o próximo resultado.

Teorema 1.27. *Suponhamos que o operador $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ seja densamente definido e $-A$ setorial. Então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$, onde*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

sendo Γ_a a fronteira do conjunto $\Sigma_{a,\phi} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| \leq r\}$, para $\frac{\pi}{2} < \phi < \phi$, e r suficientemente pequeno, orientada no sentido da parte imaginária crescente. Adicionalmente, a aplicação $t \mapsto T(t)$ se estende analiticamente a uma função de $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \phi - \frac{\pi}{2}\}$ em $\mathcal{L}(E)$ (ou a complexificação de E , se E for um espaço de Banach real). Ainda, para algum $K > 0$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K e^{at}, \quad t > 0, \quad \text{e} \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K t^{-1} e^{at}, \quad t > 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) \quad (1.5)$$

é um operador limitado qualquer que seja $t > 0$ fixo.

Demonstração: Não há perda de generalidade em assumirmos $a = 0$. De fato, ao definir $T(t)$ por

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

tomando $\lambda = a + \mu$ obtemos

$$e^{-at}T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu t} (\mu - (A - a))^{-1} d\mu$$

e $\|(\mu - (A - a))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C/|\mu|$.

Como observado acima, a aplicação $t \mapsto T(t)$ é analítica, e com isso vamos mostrar que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$ e $t\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$ são limitados para todo $t > 0$. De fato, considerando a mudança $\mu = \lambda t$ na variável de integração, vemos que

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} \frac{d\mu}{t},$$

onde o contorno é ainda Γ_0 , visto ser o integrando analítico. Logo

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{C}{\frac{|\mu|}{t}} \frac{|d\mu|}{t} = K < \infty$$

uniformemente para todo $t > 0$.

De forma semelhante,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} A(\lambda - A)^{-1} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} [-I + \lambda(\lambda - A)^{-1}] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} d\lambda + \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} d\mu, \end{aligned}$$

onde o primeiro termo é claramente zero. Para o segundo temos a seguinte estimativa

$$\left\| \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} d\mu \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} C |d\mu| = K_1 t^{-1} < \infty.$$

Para vermos que realmente $AT(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} A(\lambda - A)^{-1} d\lambda$, basta lembrarmos que A é um operador fechado, visto que $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ para todo $\lambda \in \Sigma_0$. Como a integral que define $T(t)$ é um limite de somas de Riemann, não é difícil concluirmos que $AT(t)e = T(t)Ae$ para todo $e \in D(A)$.

Pela analiticidade e pela convergência uniforme, podemos então escrever para cada $t > 0$

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \lambda (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

mostrando de fato (1.5).

Vejamos agora que $T(t)$ é um semigrupo analítico, cujo gerador é o operador A .

Se $e \in D(A)$, obtemos através da expressão

$$T(t)e = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \frac{d\lambda}{\lambda} \right) e + \frac{t}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} - A \right)^{-1} A e \frac{d\mu}{\mu^2}$$

para $t > 0$, que

$$\|T(t)e - e\|_E \leq \frac{t}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} C \|Ae\|_E \left| \frac{d\mu}{\mu^2} \right| = \mathcal{O}(t) \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Sendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$ uniformemente limitado, temos pela densidade de $D(A)$ em E que $T(t)e \xrightarrow{E} e$ quando $t \rightarrow 0^+$ para todo $e \in E$.

Finalmente, fixado $t > 0$, a aplicação $s \mapsto T(t-s)T(s)e$ é contínua para $0 \leq s \leq t$, sendo também diferenciável (analítica) no intervalo $(0, t)$, com

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)T(s)e) = -AT(t-s)T(s)e + T(t-s)AT(s)e = 0,$$

ou seja, $T(t-s)T(s)e$ é constante no intervalo $(0, t)$, e portanto

$$T(t-s)T(s)e = T(t)e, \quad \text{para } 0 \leq s \leq t, \quad e \in E.$$

Assim provamos que de fato a família de operadores $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo. Para finalizar a prova do teorema, devemos mostrar que A é o seu gerador. De fato, seja B o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$, ao observarmos que

$$T(t)e - e = \int_0^t T(s)Ae ds,$$

para todo $e \in D(A)$ e $t > 0$, fica claro então que $\frac{1}{t}(T(t)e - e) \rightarrow Ae$ quando $t \rightarrow 0^+$, mostrando que $A \subset B$. Por outro lado desde que $1 \in \rho(A)$, vemos que $E = (I - A)D(A) = (I - B)D(A)$ o que implica $(I - B)D(B) = (I - A)D(A)$ e portanto $D(A) = R((I - B)^{-1}) = D(B)$, mostrando que $A = B$. ■

O Operador Laplaciano

*O*peradores do tipo elíptico estão constantemente associados a problemas de evolução em espaços de dimensão infinita. Nas aplicações da teoria abstrata, frequentemente é mostrado que um dado operador diferencial é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em um espaço de funções concreto (Espaços de Lebesgue, Sobolev, Besov,...). Em particular, buscando nos orientar nas aplicações do Capítulo 6, este capítulo será introduzido para tentarmos encontrar algumas estimativas espectrais que sejam suficientes para garantir que o operador $-\tilde{\Delta}$ seja o gerador de um semigrupo analítico de operadores lineares em $L^p(\Omega)$.

Particularizamos a teoria para preservar o cronograma apresentado, as referências para esta parte do texto podem ser encontradas basicamente em [16, 29].

2.1 Operadores Elípticos

Nesta seção, a menos que se afirme o contrário, consideraremos em $\mathbb{R}^n$ um domínio limitado Ω com fronteira $\partial\Omega$ suave e números reais $1 < p, q < \infty$.

A uma n -upla de inteiros não negativos, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ chamamos *multi-índice* e colocamos $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, fazemos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Dessa forma, denotando $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, e $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$, definimos de forma semelhante o operador diferencial

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Introduzidas as notações, podemos agora apresentar as seguintes definições

Definição 2.1. Para cada inteiro não negativo m consideremos o operador diferencial de ordem $2m$,

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

onde os coeficientes $a_\alpha(x)$ são funções a valores complexos definidas em $\overline{\Omega}$ suficientemente regulares.

A parte principal do operador $A(x, D)$ é o operador

$$A'(x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Definição 2.2. O operador diferencial $A(x, D)$ é dito fortemente elíptico em Ω se existe uma constante positiva C tal que

$$\operatorname{Re}((-1)^m A(x, \xi)) \geq C \|\xi\|^{2m}, \quad x \in \partial\Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 2.3. Seja $A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ um operador diferencial fortemente elíptico em Ω . O adjunto formal do operador $A(x, D)$ é o operador $A^*(x, D)$ definido por

$$A^*(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overline{a_\alpha(x)} u).$$

Observemos que sendo o operador $A(x, D)$ fortemente elíptico, seu adjunto formal $A^*(x, D)$ também o é.

Se $A(x, D)$ é um operador fortemente elíptico, nós associamos um operador ilimitado em $L^p(\Omega)$ através da seguinte definição

Definição 2.4. *Seja $A(x, D)$ um operador diferencial de ordem $2m$ fortemente elíptico em Ω . Definimos o operador $A_p : D(A_p) \subset L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ por*

$$A_p(u) = A(x, D)u, \quad u \in D(A_p), \quad \text{onde } D(A_p) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observemos que $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A_p)$ e dessa forma $D(A_p)$ é um subespaço denso de $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.5. *Sejam $A(x, D)$ um operador diferencial de ordem $2m$ fortemente elíptico em Ω e A_p o operador associado a $A(x, D)$ via Definição 2.4. O operador A_q^* , $q = \frac{p}{p-1}$, associado ao adjunto formal $A^*(x, D)$ de $A(x, D)$ em $L^q(\Omega)$, é o operador adjunto de A_p .*

Seja $A(x, D)$ um operador diferencial de segunda ordem fortemente elíptico escrito na forma da divergência, ou seja,

$$A(x, D)u = - \sum_{k, \ell=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{k, \ell}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \right),$$

onde os coeficientes $a_{k, \ell}(x) = a_{\ell, k}(x)$ são funções a valores reais continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$.

Munido deste operador diferencial simétrico de segunda ordem, associamos através da Definição 2.4, o operador A_p em $L^p(\Omega)$. Nestas condições pode-se mostrar o seguinte resultado

Teorema 2.6. *O operador $-A_p$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de contrações em $L^p(\Omega)$.*

Será necessário a nossos propósitos o particular caso em que o operador elíptico a ser considerado é o operador Laplaciano ($\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$). Optamos então por dar a prova do seguinte (caso particular) resultado

Teorema 2.7. *Consideremos o operador $A_0 : D(A_0) \subset L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ definido por*

$$D(A_0) = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\} \text{ e } A_0 u = \Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \quad u \in D(A_0).$$

Então A_0 é fechável em $L^p(\Omega)$, e seu fecho A é o gerador de um semigrupo analítico de operadores lineares em $L^p(\Omega)$.

Demonstração: No que segue mostraremos que o operador A_0 é dissipativo, fechável, e seu fecho A é também dissipativo.

Primeiramente observemos que se $0 \neq u \in D(A_0)$, ao considerarmos a função $u^* = \frac{|u|^{p-2} \bar{u}}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-2}}$, vemos que

$$\begin{aligned} \|u^*\|_{L^{p^*}(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |u^*(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} = \frac{1}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-2}} \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^{p-2} |\bar{u}(x)|)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \frac{1}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-2}} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

e também

$$\langle u^*, u \rangle = \frac{1}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-2}} \int_{\Omega} \bar{u}(x) |u(x)|^{p-2} (x) u(x) dx = \frac{1}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-2}} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \|u\|_{L^p(\Omega)}^2.$$

Portanto $u^* \in J(u)$, onde $J : L^p(\Omega) \rightarrow 2^{L^{p^*}}$ denota a aplicação dualidade definida no Capítulo 1. Sendo $L^p(\Omega)$ reflexivo para $1 < p < \infty$, segue então que $J(u) = \{u^*\}$. Se $u = 0$, colocamos $u^* = 0$.

Em princípio consideramos o caso $2 \leq p < \infty$. Do Teorema da Divergência

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (A_0 u(x)) |u(x)|^{p-2} \bar{u}(x) dx &= \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla (|u(x)|^{p-2} \bar{u}(x))) dx \\ &= \int_{\Omega} (|u(x)|^{p-2} (\nabla u(x), \nabla \bar{u}(x)) \\ &\quad + (p-2) |u(x)|^{p-3} \bar{u}(x) (\nabla u(x), \nabla |u(x)|)) dx, \end{aligned}$$

onde $(\cdot, \cdot) : (L^p(\Omega))^n \times (L^p(\Omega))^n \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma bilinear anti-simétrica usual.

Uma vez que $|u|^2 (\nabla u, \nabla \bar{u}) = (\bar{u} \nabla u, u \nabla \bar{u}) = |\operatorname{Re} \bar{u} \nabla u|^2 + |\operatorname{Im} \bar{u} \nabla u|^2$, ao fazermos $u = \alpha + i\beta$, onde α, β são funções a valores reais de classe C^2 , obtemos*

$$\begin{aligned} \bar{u} \nabla u &= (\alpha - i\beta)(\nabla \alpha + i\nabla \beta) = (\alpha \nabla \alpha + \beta \nabla \beta) + i(\alpha \nabla \beta - \beta \nabla \alpha) \\ &= |u| \nabla |u| + i(\alpha \nabla \beta - \beta \nabla \alpha). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (A_0 u) |u(x)|^{p-2} |\bar{u}(x)| dx &= \int_{\Omega} |u(x)|^{p-4} \left((p-1) |\operatorname{Re} \bar{u}(x) \nabla u(x)|^2 + |\operatorname{Im} \bar{u}(x) \nabla u(x)|^2 \right) dx \\ &\quad + i \int_{\Omega} (p-2) |u(x)|^{p-4} (\operatorname{Re} \bar{u}(x) \nabla u(x), \operatorname{Im} \bar{u}(x) \nabla u(x)) dx, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\operatorname{Re} (\langle v, A_0 u \rangle) \leq 0, \quad v \in J(u),$$

qualquer que seja $u \in D(A_0)$.

No caso $1 < p < 2$, devemos ser mais cuidadosos ao aplicarmos o Teorema da Divergência, visto que $\bar{u} |u|^{p-2}$ deixa de ser de classe C^1 , nos pontos onde u se nula. Em princípio suponhamos u

* $|u|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow |u| \nabla |u| = \alpha \nabla \alpha + \beta \nabla \beta$.

de classe C^∞ . Neste caso a aplicação $x \mapsto |u(x)|^2$ é também de classe C^∞ , e portanto, pelo Teorema de Sard[†], quase todo $\varepsilon > 0$ é valor regular de $|u(\cdot)|^2$, e dessa forma

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x \in \Omega : |u(x)|^2 > \varepsilon \right\}$$

possui fronteira suave. Podemos agora aplicar o Teorema da Divergência em Ω_ε , obtendo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (A_0 u(x)) \bar{u}(x) |u(x)|^{p-2} dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \bar{u}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} |u(x)|^{p-2} d\sigma - \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u(x), \nabla(\bar{u}(x) |u(x)|^{p-2})) dx,$$

onde ν representa a normal unitária exterior a $\partial\Omega_\varepsilon$.

Como visto acima,

$$\operatorname{Re} \left(\nabla u, \nabla(\bar{u} |u|^{p-2}) \right) = -|u|^{p-4} \left((p-1) |\operatorname{Re} \bar{u} \nabla u|^2 + |\operatorname{Im} \bar{u} \nabla u|^2 \right) \leq 0.$$

Além disso, como $\nabla(|u|^2) = 2|u| \nabla|u|$ é normal à superfície de nível ε , $|u(x)|^2 > \varepsilon$ em Ω_ε e $|u(x)|^2 = \varepsilon$ em $\partial\Omega_\varepsilon$, vemos que $\nu(x) = -\eta(x) \nabla u(x)$, onde $\eta(x) \geq 0$ em $\partial\Omega_\varepsilon$. E dessa forma,

$$\operatorname{Re} \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) = \operatorname{Re}(\bar{u} \nabla u, \nu) = |u| \frac{\partial |u|}{\partial \nu} \leq 0.$$

Assim, para $u \in C^\infty(\Omega) \cap D(A_0)$,

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} (A_0 u(x)) \bar{u}(x) |u(x)|^{p-2} dx \right) \leq 0,$$

para quase todo $\varepsilon > 0$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ através dos valores regulares de $|u(\cdot)|^2$, obtemos

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} (A_0 u(x)) \bar{u}(x) |u(x)|^{p-2} dx \right) \leq 0.$$

Agora, tomando-se limites na topologia C^2 , obtemos que de fato A_0 é um operador dissipativo em $L^p(\Omega)$, para $1 < p < \infty$.

Além disso suponhamos que $\{u_m\}$ seja uma sequência em $D(A_0)$ tal que

$$u_m \xrightarrow{L^p(\Omega)} 0 \text{ e } A_0 u_m \xrightarrow{L^p(\Omega)} v.$$

Logo, para toda $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (A_0 u_m(x)) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} (\nabla u_m(x), \nabla \phi(x)) dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

[†]Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação suficientemente regular. Dizemos que $y \in \mathbb{R}^p$ é um valor regular para a aplicação f , se $f'(x)$ for uma transformação linear sobrejetora sempre que $x \in f^{-1}(\{y\})$. Dessa forma, $y \in \mathbb{R}^p$ é um valor regular para f se, ou $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\{y\})$ é uma subvariedade suave de $\mathbb{R}^n$ de codimensão p .

Dizemos que $y \in \mathbb{R}^p$ é um valor singular de f se não for regular. Nestas condições temos o seguinte Teorema Teorema(Sard). Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ for uma aplicação suficientemente regular, então o conjunto dos valores regulares de f tem medida nula em $\mathbb{R}^p$.

mostrando que $v = 0$, ou seja, que A_0 é fechável em $L^p(\Omega)$.

Seja A o fecho de A_0 em $L^p(\Omega)$. Se $u \in D(A)$, então existe uma sequência $\{u_m\}$ em $D(A_0)$, tal que $u_m \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$ e $A_0 u_m = \Delta u_m \xrightarrow{L^p(\Omega)} Au$. Podemos assumir que $u_m(x) \rightarrow u(x)$ q.s. em Ω e que também $|u_m(x)| \leq \omega(x)$ q.s. em Ω , para alguma função $\omega \in L^p(\Omega)$ e todo $m = 1, 2, \dots$. Portanto, se $v = \frac{\bar{u}|u|^{p-2}}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-2}} \in J(u)$, é claro que

$$\bar{u}_m |u_m|^{p-2} \xrightarrow{L^1(\Omega)} v \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-2}.$$

Dessa forma, $\operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} (A_0 u_m(x)) \bar{u}_m(x) |u_m(x)|^{p-2} dx \right) \leq 0$ implica

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} (Au(x)) v(x) dx \right) \leq 0.$$

Visto ser, portanto, o operador A dissipativo, para aplicarmos o Teorema de Lumer-Phillips devemos também mostrar que $R(\lambda - A) = L^p(\Omega)$ para algum $\lambda > 0$.

Mas observemos agora que ao fixarmos $\lambda > 0$, sendo A um operador dissipativo,

$$\operatorname{Re} \langle u^*, (\lambda - A)u \rangle \geq \lambda \operatorname{Re} \langle u^*, u \rangle - \operatorname{Re} \langle u^*, Au \rangle \geq \lambda \operatorname{Re} \langle u^*, u \rangle.$$

Logo, temos para todo $\lambda > 0$ e $u \in D(A)$,

$$\lambda \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|(\lambda - A)u\|_{L^p(\Omega)}^{\dagger}. \quad (2.2)$$

Portanto vemos que $\lambda - A$ é um operador injetivo com imagem fechada para todo $\lambda > 0$. De fato, suponhamos que $\{(\lambda - A)u_n\}$ seja uma sequência em $R(\lambda - A)$, a imagem do operador $\lambda - A$, tal que $(\lambda - A)u_n \rightarrow v$ em $L^p(\Omega)$. Por (2.2) a sequência $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$ e dessa forma $u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$, para alguma função $u \in L^p(\Omega)$. Sendo $\lambda - A$ fechado, $u \in D(\lambda - A)$ e $(\lambda - A)u = v$, concluímos que $R(\lambda - A)$ é de fato um subespaço fechado de $L^p(\Omega)$. Basta mostramos então que para algum $\lambda > 0$, $R(\lambda - A)$ é um subespaço denso de $L^p(\Omega)$.

De fato, sendo $\partial\Omega$ uma hipersuperfície regular de $\mathbb{R}^n$, para cada $f \in C_o^\infty(\Omega)$, existe $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $(1 - \Delta)u = f$ em Ω , e $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Portanto, pelo Teorema de Lumer-Phillips,[§] o operador A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em $L^p(\Omega)$.

[†] $\|e\|_E = \sup_{\substack{\|\phi\|_{E^*}=1 \\ \phi \in E^*}} |\operatorname{Re} \langle \phi, e \rangle|$

[§] desde que $1 \in \rho(A)$.

Por fim, se $J = \int_{\Omega} (A_0 u(x)) \bar{u}(x) |u(x)|^{p-2} dx$, fazendo $v + iw = |u|^{\frac{p}{2}-2} \bar{u} \nabla u$, para cada $u \in D(A_0)$, vemos que

$$-\operatorname{Re} J = \int_{\Omega} \left((p-1) |v(x)|^2 + |w(x)|^2 \right) dx \text{ e } -\operatorname{Im} J = (p-2) \int_{\Omega} (v(x), w(x)) dx$$

e consequentemente[¶]

$$\frac{|\operatorname{Im} J|}{-\operatorname{Re} J} \leq \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}} \frac{2 \|\sqrt{p-1} |v|\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}}{\int_{\Omega} \left((p-1) |v(x)|^2 + |w(x)|^2 \right) dx} \leq \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}.$$

Vemos portanto que a imagem numérica $W(A_0)$ está contida propriamente no setor do plano complexo $\Sigma'_p = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| + \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}} \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \right\}$ se $1 < p < \infty$ e $p \neq 2$, e em $\Sigma'_2 = (-\infty, 0]$ se $p = 2$. Lembrando que se A é o fecho de A_0 , então $W(A)$ está contido no fecho de $W(A_0)$, e portanto também $W(A) \subset \Sigma'_p$. Como $1 \in \rho(A)$, o resolvente de A contém $\mathbb{C} \setminus \Sigma'_p = \Sigma_p$ que é um setor do tipo considerado no Teorema 1.27.

Logo, para $\lambda \in \Sigma_p$, $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$, se $\operatorname{Re} > 0$, e $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{|\lambda|} \cos(\varphi - \delta)$, se $|\arg \lambda| \leq \varphi$, onde $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} + \delta$ com $\cot \delta = \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}} < \infty$.

Portanto A é um operador setorial, e dessa forma, o gerador de um semigrupo analítico de operadores lineares em $L^p(\Omega)$.

■

Lema 2.8. *Se $A : D(A) \subset L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ é o operador (fecho de A_0) nas hipóteses do Teorema 2.7, então $D(A) = W_v^{2,p}(\Omega)$.*

Demonstração: O resultado é consequência da densidade de $D(A_0)$ em $W_v^{2,p}(\Omega)$.

■

[¶] $0 \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}$
 vemos portanto que de fato $1 \in \rho(A)$.

Espaços de Ordem Fracionária

Neste capítulo nos preocupamos em estender, para valores não inteiros de m , a noção dos Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. Não existe um único método, e diferentes “approaches” podem nos fornecer diferentes famílias de espaços, como por exemplo

- (i) Os espaços $W^{s,p}(\Omega)$ podem ser definidos via “interpolação real”, mas podem também ser caracterizados em termos de normas definidas intrinsicamente através de derivadas primeiras e de ordem superior.
- (ii) Os espaços $L^{s,p}(\Omega)$ podem ser definidos via “interpolação complexa”, mas se $\Omega = \mathbb{R}^n$, podem também ser caracterizados em termos de Transformadas de Fourier.
- (iii) Os espaços de Besov $B^{s,p}(\Omega)$, definidos em termos de uma norma dada intrinsicamente, similar a de $W^{s,p}(\Omega)$, porém envolvendo derivadas segundas ao invés de primeiras.
- (iv) Os espaços de Nikol'skii $H^{s,p}(\Omega)$, definidos em termos de uma norma envolvendo condições de Hölder-continuidade na métrica L^p .

Somente os espaços $W^{s,p}(\Omega)$ e $L^{s,p}(\Omega)$ coincidem com os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ quando $s = m$ é um inteiro. Já os espaços de Besov, $B^{s,p}(\Omega)$, coincidem com os espaços $W^{s,p}(\Omega)$ para todo real s sempre que $p = 2$, caso contrário, somente para valores não inteiros de s (ver [35]).

Uma grande parte deste capítulo é dedicada ao estudo do método de interpolação real conhecido como o “método do traço” de Lions, no qual se baseia nosso estudo dos espaços $W^{s,p}(\Omega)$. Este método é apenas um dos vários, essencialmente equivalentes, métodos de interpolação real (ver [35]).

3.1 Os Espaços Traço de Lions

Consideremos os espaços de Banach B_1 e B_2 munidos das normas $\|\cdot\|_{B_1}$ e $\|\cdot\|_{B_2}$ respectivamente, e X um espaço vetorial topológico no qual B_1 e B_2 estão continuamente imersos. Então a soma vetorial de B_1 com B_2

$$B_1 + B_2 = \{b_1 + b_2 \in X : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$$

é também um espaço de Banach (Teorema A.2) quando munido da norma

$$\|u\|_{B_1+B_2} = \inf_{\substack{b_1 \in B_1 \\ b_2 \in B_2 \\ b_1+b_2=u}} \{\|b_1\|_{B_1} + \|b_2\|_{B_2}\}.$$

Dados $-\infty \leq a, b \leq \infty$, denotaremos por $L^p(a, b; B_i)$, $(i = 1, 2)$ o espaço vetorial das (classes de equivalência) funções f , mensuráveis de (a, b) em B_i , tais que $\|f(\cdot)\|_{B_i} \in L^p(a, b)$. O espaço $L^p(a, b; B_i)$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|f\|_{L^p(a, b; B_i)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|f(t)\|_{B_i}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t \in (a, b)} \|f(t)\|_{B_i}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Similarmente, se $f \in L^p(c, d; B_i)$, $(i = 1, 2)$ para quaisquer números reais c, d com $a < c < d < b$, então escreveremos $f \in L_{loc}^p(a, b; B_i)$, e em particular, no caso $p = 1$, dizemos que f é *localmente integrável* em (a, b) .

Uma função localmente integrável g em (a, b) é dita a j -ésima derivada (no sentido das distribuições) de uma função f localmente integrável em (a, b) se

$$\int_a^b f(t) \phi^{(j)}(t) dt = (-1)^j \int_a^b g(t) \phi^{(j)}(t) dt,$$

qualquer que seja a função teste $\phi \in C_0^\infty(a, b)$.

Para cada número real ν , consideramos a função escalar t^ν definida em $[0, \infty)$ por $t^\nu(s) = s^\nu$. Assim, se $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por $W(p, \nu, B_1, B_2)$, ou quando não houver possibilidade de confusão, simplesmente por W , o espaço vetorial das (classes de equivalência) funções mensuráveis f de $[0, \infty)$ em $B_1 + B_2$ tais que

$$t^\nu f \in L^p(0, \infty; B_1) \quad \text{e} \quad t^\nu f' \in L^p(0, \infty; B_2),$$

onde f' denota a derivada distribucional de f . O espaço W é um espaço de Banach (Teorema A.3) quando munido da norma

$$\|f\|_W = \max \left(\|t^\nu f\|_{L^p(0, \infty; B_1)}, \|t^\nu f'\|_{L^p(0, \infty; B_2)} \right).$$

Exemplo 3.1. Como um exemplo dessa construção mostramos que o espaço $W(p, 0, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$ é isomorfo ao espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, onde $\Omega = \{(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$.

Consideremos o seguinte operador linear

$$T : W(p, 0, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n)) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$$

$$f \mapsto Tf(x, t) = f(t)(x), \quad (x, t) \in \Omega.$$

Se $f \in W(p, 0, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$ então para cada $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$ e para cada $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Tf(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x, t) d(x, t) &= \int_{\Omega} f(t)(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x, t) d(x, t) \\ &= \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} f(t)(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x, t) dx \\ &= - \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(t)}{\partial x_i}(x) \phi(x, t) dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial f(t)}{\partial x_i}(x) \phi(x, t) d(x, t), \end{aligned}$$

mostrando que

$$\frac{\partial(Tf)}{\partial x_i}(x, t) = \frac{\partial f(t)}{\partial x_i}(x), \quad (x, t) \in \Omega,$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(Tf) \in L^p(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ainda, de forma similar,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Tf(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) d(x, t) &= \int_{\Omega} f(t)(x) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) d(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^\infty f(t)(x) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^\infty f'(t)(x) \phi(x, t) dt \\ &= - \int_{\Omega} f'(t)(x) \phi(x, t) d(x, t) \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\frac{\partial(Tf)}{\partial t}(x, t) = f'(t)(x), \quad (x, t) \in \Omega,$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial t}(Tf) \in L^p(\Omega).$$

Logo, $T : W(p, 0, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n)) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ é um operador bem definido. Além disso, observemos que se $f \in W(p, 0, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$ é tal que $Tf = 0$, então $\|Tf\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$. Dessa

forma,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(0,\infty;W^{1,p}(\mathbb{R}^n))}^p &= \int_0^\infty \|f(t)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p dt = \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)(x)|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(t)}{\partial x_i}(x) \right|^p dx \\ &= \int_\Omega |f(t)(x)|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(t)}{\partial x_i}(x) \right|^p d(x,t) \leq \|Tf\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = 0,\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\|f'\|_{L^p(0,\infty;L^p(\mathbb{R}^n))}^p &= \int_0^\infty \|f'(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p dt = \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} |f'(t)(x)|^p dx \\ &= \int_\Omega |f'(t)(x)|^p d(x,t) = \left\| \frac{\partial(Tf)}{\partial t} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|Tf\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = 0,\end{aligned}$$

provando ser $f = 0$, ou seja, $\text{Ker } T = \{0\}$.

Além disso, se $g \in W^{1,p}(\Omega)$, ao definirmos a função

$$\begin{aligned}f : [0, \infty) &\rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \\ t &\mapsto f(t)(x) = g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

obtemos $f \in W(p, 0, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$, e claramente $Tf = g$.

Finalmente mostramos através da desigualdade

$$\|Tf\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq \|f\|_{L^p(0,\infty;W^{1,p}(\mathbb{R}^n))}^p + \|f'\|_{L^p(0,\infty;L^p(\mathbb{R}^n))}^p \leq 2\|f\|_W^p,$$

a continuidade do operador T .

Lema 3.2. Para cada $f \in W$ existe $b \in B_1 + B_2$ tal que

$$f(t) = b + \int_1^t f'(\tau) d\tau \quad q. s. em (0, \infty). \quad (3.1)$$

Demonstração: Visto que $t^\nu f \in L^p(0, \infty; B_1)$, $f \in L_{loc}^p(0, \infty; B_1)$. De fato, se $0 < a < b < \infty$,

$$\begin{aligned}\int_a^b \|f(t)\|_{B_1}^p dt &= \int_a^b t^{-\nu p} \|t^\nu f(t)\|_{B_1}^p dt \\ &\leq \sup_{a \leq t \leq b} \{t^{-\nu p}\} \int_a^b \|t^\nu f(t)\|_{B_1}^p dt < \infty.\end{aligned}$$

Desde que $L_{loc}^p(0, \infty; B_1) \subset L_{loc}^1(0, \infty; B_1)$, em particular, obtemos também que $f \in L_{loc}^1(0, \infty; B_1)$.

Analogamente, uma vez que $t^\nu f' \in L^p(0, \infty; B_2)$ obtemos $f' \in L_{loc}^1(0, \infty; B_2)$.

Agora ao definirmos v quase sempre de $(0, \infty)$ em $B_1 + B_2$ por

$$v(t) = f(t) - \int_1^t f'(\tau) d\tau,$$

obtemos $v \in L_{loc}^1(0, \infty; B_1 + B_2)$. De fato, observando que para quaisquer $0 < a < b < \infty$

$$\int_a^b \|f(t)\|_{B_1+B_2} dt \leq \int_a^b \|f(t)\|_{B_1} dt < \infty,$$

e também,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left\| \int_1^t f'(\tau) d\tau \right\|_{B_1+B_2} dt &\leq \int_a^b \left(\int_1^t \|f'(\tau)\|_{B_1+B_2} d\tau \right) dt \\ &\leq \int_a^b \left(\int_1^t \|f'(\tau)\|_{B_2} d\tau \right) dt \\ &\leq M \int_a^b \left(\int_1^t \|f'(\tau)\|_{B_2}^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} dt = M \int_a^b \|f'\|_{L^p(1,b;B_2)} dt < \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b \|v(t)\|_{B_1+B_2} dt &= \int_a^b \left\| f(t) + \int_0^1 f'(\tau) d\tau \right\|_{B_1+B_2} dt \\ &\leq \int_a^b \|f(t)\|_{B_1+B_2} dt + \int_a^b \left\| \int_1^t f'(\tau) d\tau \right\|_{B_1+B_2} dt < \infty, \end{aligned}$$

ou seja, $v \in L_{loc}^1(0, \infty; B_1 + B_2)$.

Com isso, para cada $b^* \in (B_1 + B_2)^*$

$$\int_a^b |\langle b^*, v(t) \rangle| dt \leq \|b^*\|_{(B_1+B_2)^*} \int_a^b \|v(t)\|_{B_1+B_2} dt < \infty,$$

para quaisquer $0 < a < b < \infty$, ou seja, $\langle b^*, v(\cdot) \rangle \in L_{loc}^1(0, \infty)$. Aqui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade entre os espaços $(B_1 + B_2)^*$ e $B_1 + B_2$.

Além disso, para $\phi \in C_o^\infty([0, \infty))$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \langle b^*, v(t) \rangle \phi'(t) dt &= \int_0^\infty \langle b^*, \phi'(t) v(t) \rangle dt = \langle b^*, \int_0^\infty \phi'(t) v(t) dt \rangle \\ &= \langle b^*, \int_0^\infty \phi'(t) f(t) dt - \int_0^\infty \phi'(t) \left(\int_1^t f'(\tau) d\tau \right) dt \rangle \\ &= \langle b^*, - \int_0^\infty \phi(t) f'(t) dt - \int_0^\infty \phi'(t) \left(\int_1^t f'(\tau) d\tau \right) dt \rangle \\ &= \langle b^*, - \int_0^\infty \phi(t) f'(t) dt + \int_0^\infty \phi(t) f'(t) dt \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, (ver [6]) para cada $b^* \in (B_1 + B_2)^*$, $\langle b^*, v(\cdot) \rangle$ é igual quase sempre a uma constante em $(0, \infty)$, o que implica a existência de $b \in B_1 + B_2$ tal que $v(t) = b$ q.s. em $(0, \infty)$, isto é,

$$f(t) = b + \int_1^t f'(\tau) d\tau \quad \text{q. s. em } (0, \infty).$$

■

Observação 3.3. O Lema 3.2 assegura que se $f \in W$ então f coincide quase sempre com uma função contínua de $(0, \infty)$ em $B_1 + B_2$.

Lema 3.4. Suponhamos $\frac{1}{p} + \nu < 1$. Então o lado direito de (3.1) converge em $B_1 + B_2$ quando $t \rightarrow 0^+$. O limite é definido como sendo o traço, $f(0)$, de f em $t = 0$.

Demonstração: Para cada número real s , com $0 < s < t$ fixado, e $1 < p < \infty$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_s^t f'(\tau) d\tau \right\|_{B_2} &\leq \int_s^t \|f'(\tau)\|_{B_2} d\tau \\ &\leq \int_s^t \tau^{-\nu} \|\tau^\nu f'(\tau)\|_{B_2} d\tau \\ &\leq \|t^\nu f'\|_{L^p(0, \infty; B_2)} \left(\int_0^t \tau^{\frac{-\nu p}{p-1}} d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{1}{p} + \nu < 1$, temos $\nu p < p - 1$, e concluímos que o último fator tende a zero à medida que $t \rightarrow 0^+$.

Suponhamos agora que $p = 1$. Neste caso $\nu < 0$ e portanto

$$\begin{aligned} \left\| \int_s^t f'(\tau) d\tau \right\|_{B_2} &\leq \int_s^t \|f'(\tau)\|_{B_2} d\tau \\ &\leq \int_s^t \tau^{-\nu} \|\tau^\nu f'(\tau)\|_{B_2} d\tau \\ &\leq \|t^\nu f'\|_{L^1(0, \infty; B_2)} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{\tau^{-\nu}\} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Finalmente, se $p = \infty$, então $\nu < 1$ e obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_s^t f'(\tau) d\tau \right\|_{B_2} &\leq \int_s^t \|f'(\tau)\|_{B_2} d\tau \\ &\leq \int_s^t \tau^{-\nu} \|\tau^\nu f'(\tau)\|_{B_2} d\tau \\ &\leq \|t^\nu f'\|_{L^\infty(0, \infty; B_2)} \int_0^t \tau^{-\nu} d\tau \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Logo, se $1 \leq p \leq \infty$ os seguintes limites existem em B_2

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^t f'(\tau) d\tau = \int_0^t f'(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t f'(\tau) d\tau = 0.$$

Além disso, para $0 < s < t$

$$\int_1^t f'(\tau) d\tau = - \int_t^1 f'(\tau) d\tau = \int_s^t f'(\tau) d\tau - \int_s^1 f'(\tau) d\tau,$$

e dessa forma concluímos que $\int_1^t f'(\tau) d\tau$ converge em B_2 quando $t \rightarrow 0^+$, e portanto em $B_1 + B_2$ provando o lema. ■

Lema 3.5. *O subespaço de $W(p, \nu, B_1, B_2)$ constituído das funções que são infinitamente diferenciáveis de $(0, \infty)$ em B_1 é denso em $W(p, \nu, B_1, B_2)$ sempre que $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Consideremos uma função localmente integrável f definida quase sempre em $(0, \infty)$ tomando valores em $B_1 + B_2$, com derivada (distribucional) f' .

Seja $\tilde{f}$ a função definida quase sempre em $(-\infty, \infty)$ tomando valores em $B_1 + B_2$ dada por

$$\tilde{f}(t) = f(e^t).$$

É claro que $\tilde{f}$ é também uma função localmente integrável em $(-\infty, \infty)$ e, além disso, se $\phi \in C_o^\infty(-\infty, \infty)$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \phi'(t) dt &= \int_0^{\infty} \tilde{f}(\log \tau) \phi'(\log \tau) \frac{1}{\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) \frac{d}{d\tau} (\phi(\log \tau)) d\tau = - \int_0^{\infty} f'(\tau) \phi(\log \tau) d\tau \\ &= - \int_0^{\infty} \tau f'(\tau) \frac{\phi(\log \tau)}{\tau} d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} e^t f'(e^t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} e^t (\widetilde{f'}) (t) \phi(t) dt \end{aligned}$$

mostrando que

$$(\tilde{f})'(t) = e^t f'(e^t) = e^t (\widetilde{f'}) (t).$$

Dessa forma, $f \in W(p, \nu, B_1, B_2)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\|t^\nu f(t)\|_{B_1}^p + \|t^\nu f'(t)\|_{B_2}^p \right) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\tau(\nu p + 1)} \|f(e^\tau)\|_{B_1}^p + e^{\tau(\nu p + 1)} \|f'(e^\tau)\|_{B_2}^p \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\tau(\nu p + 1)} \|\tilde{f}(\tau)\|_{B_1}^p + e^{\tau(\nu p + 1)} \|e^{-\tau} (\widetilde{f'})'(\tau)\|_{B_2}^p \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\tau(\nu p + 1)} \|\tilde{f}(\tau)\|_{B_1}^p + e^{\tau(\nu p - p + 1)} \|(\widetilde{f'})'(\tau)\|_{B_2}^p \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\tau\theta p} \|\tilde{f}(\tau)\|_{B_1}^p + e^{\tau(\theta - 1)p} \|(\widetilde{f'})'(\tau)\|_{B_2}^p \right) d\tau < \infty, \end{aligned}$$

onde $\theta = \frac{1}{p} + \nu$.

Consideremos agora uma sequência regularizante $\{\rho_n\}$, isto é,

- $\rho_n \in C_o^\infty(-\infty, \infty)$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t) dt = 1$,
- $\text{supp } \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$.

Definindo para cada s real a função escalar

$$e^{\theta t}(s) = e^{\theta s}$$

vemos que também $e^{\theta t} \tilde{f} \in L^p(-\infty, \infty; B_1)$, e portanto

$$(\rho_n * e^{\theta t} \tilde{f}) \rightarrow e^{\theta t} \tilde{f} \text{ em } L^p(-\infty, \infty; B_1), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (\rho_n * e^{\theta t} \tilde{f})(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(\tau) e^{\theta(t-\tau)} \tilde{f}(t-\tau) d\tau \\ &= e^{\theta t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta \tau} \rho_n(\tau) \tilde{f}(t-\tau) d\tau = e^{\theta t} (e^{-\theta t} \rho_n * \tilde{f})(t). \end{aligned}$$

Logo, se denotamos $\psi_n(t) = e^{-\theta t} \rho_n(t)$, vemos que $\psi_n \in C^\infty(-\infty, \infty)$, $n = 1, 2, \dots$, e ainda $e^{\theta t}(\psi_n * \tilde{f}) \rightarrow e^{\theta t} \tilde{f}$ em $L^p(-\infty, \infty; B_1)$.

Além disso, se $\phi \in C_o^\infty(-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n * \tilde{f})(t) \phi'(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\tau) \tilde{f}(t-\tau) d\tau \right) \phi'(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\tau) \tilde{f}(t-\tau) \phi'(t) dt \right) d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\tau) (\tilde{f})'(t-\tau) \phi(t) dt \right) d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\tau) (\tilde{f})'(t-\tau) \phi(t) d\tau \right) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n * (\tilde{f})')(t) \phi(t) dt, \end{aligned}$$

mostrando que $(\psi_n * \tilde{f})'(t) = (\psi_n * (\tilde{f})')(t)$.

Cálculos análogos aos anteriores mostram que

$$\begin{aligned} e^{(\theta-1)t} (\psi_n * \tilde{f})'(t) &= e^{(\theta-1)t} (\psi_n * (\tilde{f})')(t) = e^{(\theta-1)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta \tau} \rho_n(\tau) (\tilde{f})'(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \rho_n(\tau) e^{(\theta-1)(t-\tau)} (\tilde{f})'(t-\tau) d\tau = (e^{-t} \rho_n * e^{(\theta-1)t} (\tilde{f})')(t). \end{aligned}$$

Similarmente, $e^{(\theta-1)t} (\tilde{f})' \in L^p(-\infty, \infty; B_2)$, e dessa forma não é difícil mostrarmos que $(e^{-t} \rho_n * e^{(\theta-1)t} (\tilde{f})') \rightarrow e^{(\theta-1)t} (\tilde{f})'$ em $L^p(-\infty, \infty; B_2)$, e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\theta p t} \left\| \psi_n * \tilde{f}(t) - \tilde{f}(t) \right\|_{B_1}^p + e^{(\theta-1)p t} \left\| (\psi_n * \tilde{f})'(t) - (\tilde{f})'(t) \right\|_{B_2}^p \right) dt = 0.$$

É claro que a sequência de funções infinitamente diferenciáveis $\{\psi_n * \tilde{f}(\log(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $(0, \infty)$ em B_1 satisfaz

$$\psi_n * \tilde{f}(\log(\cdot)) \rightarrow f \text{ em } W, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

■

Dados p e v com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + v < 1$ denotaremos por $T(p, v, B_1, B_2)$, ou quando não houver possibilidade de confusão, simplesmente por T , o espaço constituído de todos os traços $f(0)$ de funções $f \in W = W(p, v, B_1, B_2)$, chamado o *Espaço Traço de W* . Do Teorema A.4 segue que o espaço T é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|u\|_T = \inf_{\substack{u=f(0) \\ f \in W}} \|f\|_W.$$

O espaço T definido acima é um subespaço de $B_1 + B_2$ que está topologicamente “entre” B_1 e B_2 em um sentido que explicitaremos através do próximo teorema.

Teorema 3.6. *Consideremos $\theta = \frac{1}{p} + v$ satisfazendo $0 < \theta < 1$. Então*

(i) *para cada $u \in T$*

$$\|u\|_T = \inf_{\substack{f \in W \\ u=f(0)}} \|t^v f\|_{L^p(0, \infty; B_1)}^{1-\theta} \|t^v f'\|_{L^p(0, \infty; B_2)}^\theta. \quad (3.2)$$

(ii) *se $u \in B_1 \cap B_2$, então $u \in T$ com*

$$\|u\|_T \leq K \|u\|_{B_1}^{1-\theta} \|u\|_{B_2}^\theta \quad (3.3)$$

para alguma constante K independente de u .

Demonstração: (i). Inicialmente fixemos $u \in T$, $\varepsilon > 0$ e $f \in W(p, v, B_1, B_2)$ com $f(0) = u$ satisfazendo $\|f\|_W < \|u\|_T + \varepsilon$.

Sejam $R = \|t^v f\|_{L^p(0, \infty; B_1)}$ e $S = \|t^v f'\|_{L^p(0, \infty; B_2)}$.

Para cada real positivo λ , consideremos a função f_λ definida quase sempre em $(0, \infty)$ dada por $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$. Observemos que $f_\lambda \in L^1_{loc}(0, \infty; B_1 + B_2)$ e para cada $\phi \in C^\infty_c([0, \infty))$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_\lambda(t) \phi'(t) dt &= \int_0^\infty f(\lambda t) \phi'(t) dt = \int_0^\infty f(t) \phi'\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda} d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \frac{d}{d\tau} \left(\phi\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)\right) d\tau = - \int_0^\infty f'(\tau) \phi\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau \\ &= - \int_0^\infty f'(\lambda t) \phi(t) \lambda dt = - \int_0^\infty (\lambda f'(\lambda t)) \phi(t) dt, \end{aligned}$$

de modo que $(f_\lambda)' = \lambda(f')_\lambda$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|t^v f_\lambda(t)\|_{B_1}^p dt &= \int_0^\infty \|t^v f(\lambda t)\|_{B_1}^p dt = \int_0^\infty \left\| \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^v f(\tau) \right\|_{B_1}^p \frac{1}{\lambda} d\tau \\ &= \int_0^\infty \lambda^{-\theta p} \|\tau^v f(\tau)\|_{B_1}^p d\tau = \lambda^{-\theta p} R^p, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|t^\nu (f_\lambda)'(t)\|_{B_2}^p dt &= \int_0^\infty \|t^\nu \lambda f'(\lambda t)\|_{B_2}^p dt = \int_0^\infty \left\| \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^\nu \lambda f'(\tau) \right\|_{B_2}^p \frac{1}{\lambda} d\tau \\ &= \int_0^\infty \lambda^{(1-\theta)p} \|\tau^\nu f'(\tau)\|_{B_2}^p d\tau = \lambda^{(1-\theta)p} S^p, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\|t^\nu f_\lambda\|_{L^p(0,\infty;B_1)} = \lambda^{-\theta} R \text{ e } \|t^\nu (f_\lambda)'\|_{L^p(0,\infty;B_2)} = \lambda^{1-\theta} S.$$

Além disso, é claro que $f_\lambda \in W$ com $f_\lambda(0) = u$ qualquer que seja $\lambda > 0$.

Em particular, ao fazermos $\lambda = \frac{R}{S}$, $\lambda^{-\theta} R = R^{1-\theta} S^\theta = \lambda^{1-\theta} S$, obtemos

$$\begin{aligned} R^{1-\theta} S^\theta &\leq \max(R, S) = \|f\|_W \leq \|u\|_T + \varepsilon \\ &\leq \inf_{\lambda > 0} \|f_\lambda\|_W + \varepsilon \\ &\leq \inf_{\lambda > 0} \max(\lambda^{-\theta} R, \lambda^{1-\theta} S) + \varepsilon \\ &\leq R^{1-\theta} S^\theta + \varepsilon \leq \max(R, S) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, a afirmação (i) está provada.

Por fim provemos (ii). Se $u \in B_1 \cap B_2$ consideremos $\phi \in C^\infty([0, \infty))$ satisfazendo $\phi(0) = 1$, $\phi(t) = 0$ para $1 \leq t < \infty$, $|\phi(t)| \leq 1$ e $|\phi'(t)| < K_1$ para alguma constante $K_1 > 0$, $t \geq 0$.

Seja $f : [0, \infty) \rightarrow B_1 + B_2$ dada por $f(t) = \phi(t)u$.

Logo, $f'(t) = \phi'(t)u$ e ainda

$$\int_0^\infty \|t^\nu f(t)\|_{B_1}^p dt = \int_0^\infty \|t^\nu \phi(t)u\|_{B_1}^p dt = \int_0^1 t^{\nu p} |\phi(t)|^p \|u\|_{B_1}^p dt \leq \|u\|_{B_1}^p \int_0^1 t^{\nu p} dt < \infty$$

e

$$\int_0^\infty \|t^\nu f'(t)u\|_{B_2}^p dt = \int_0^\infty \|t^\nu \phi'(t)u\|_{B_2}^p dt = \int_0^1 t^{\nu p} |\phi'(t)|^p \|u\|_{B_2}^p dt \leq K_1^p \|u\|_{B_2}^p \int_0^1 t^{\nu p} dt < \infty.$$

Logo

$$\|t^\nu f\|_{L^p(0,\infty;B_1)} \leq \left(\int_0^1 t^{\nu p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{B_1} \text{ e } \|t^\nu f'\|_{L^p(0,\infty;B_2)} \leq K_1 \left(\int_0^1 t^{\nu p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{B_2}.$$

Portanto $f \in W$ e é claro que $f(0) = u$. Dessa forma pelo item (i)

$$\begin{aligned} \|u\|_T &= \inf_{\substack{g \in W \\ u=g(0)}} \|t^\nu g\|_{L^p(0,\infty;B_1)}^{1-\theta} \|t^\nu g'\|_{L^p(0,\infty;B_2)}^\theta \\ &\leq \left(\left(\int_0^1 t^{\nu p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{B_1} \right)^{1-\theta} \left(K_1 \left(\int_0^1 t^{\nu p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{B_2} \right)^\theta \leq K \|u\|_{B_1}^{1-\theta} \|u\|_{B_2}^\theta. \end{aligned}$$

■

O item (ii) do lema anterior sugere o sentido no qual dizemos que o espaço T é um espaço “entre” os espaços de Banach B_1 e B_2 para cada $0 < \theta < 1$ fixado. Ao fazermos θ percorrer o intervalo $(0, 1)$, a família de espaços T_θ obtidos constituem o que chamaremos no Capítulo 5 uma *Escala de Espaços de Banach*. Observemos que muitas das propriedades de T podem ser deduzidas a partir de propriedades correspondentes de B_1 e B_2 via o seguinte teorema de interpolação.

Teorema 3.7 (Teorema de Interpolação). *Suponhamos que $B_1 \cap B_2$ seja denso em B_1 e B_2 . Consideremos $\widetilde{B}_1$ e $\widetilde{B}_2$ dois espaços de Banach continuamente imersos em um espaço vetorial topológico $\widetilde{X}$. Se L é um operador linear definido em $B_1 \cap B_2$ tomando valores em $\widetilde{B}_1 \cap \widetilde{B}_2$, tal que para todo $u \in B_1 \cap B_2$, existem constantes positivas K_1 e K_2 tais que*

$$\|Lu\|_{\widetilde{B}_1} \leq K_1 \|u\|_{B_1}, \quad (3.4)$$

$$\|Lu\|_{\widetilde{B}_2} \leq K_2 \|u\|_{B_2}, \quad (3.5)$$

então L possui uma única extensão contínua, a qual denotaremos também por L , a B_1 e a B_2 satisfazendo 3.4 e 3.5 respectivamente, e portanto a $B_1 + B_2$ satisfazendo

$$\|Lu\|_{\widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2} \leq \max(K_1, K_2) \|u\|_{B_1 + B_2}. \quad (3.6)$$

Adicionalmente se $\theta = \frac{1}{p} + v$ satisfaz $0 < \theta < 1$, então para todo $u \in T = T(p, v, B_1, B_2)$ temos $Lu \in \widetilde{T} = T(p, v, \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2)$ e ainda

$$\|Lu\|_{\widetilde{T}} \leq K_1^{1-\theta} K_2^\theta \|u\|_T. \quad (3.7)$$

Demonstração: Sendo $B_1 \cap B_2$ denso em $(B_1, \|\cdot\|_{B_1})$, e $(\widetilde{B}_1, \|\cdot\|_{\widetilde{B}_1})$ um espaço de Banach, podemos estender (de modo único) o operador L a um operador linear contínuo $L_1 : B_1 \rightarrow \widetilde{B}_1$ preservando norma, ou seja,

$$\|L_1(b_1)\|_{\widetilde{B}_1} \leq K_1 \|b_1\|_{B_1}, \quad b_1 \in B_1.$$

Similarmente, a densidade de $B_1 \cap B_2$ em B_2 , e o fato de ser $(\widetilde{B}_2, \|\cdot\|_{\widetilde{B}_2})$ um espaço de Banach, garantem a existência de uma única extensão de L a um operador linear contínuo $L_2 : B_2 \rightarrow \widetilde{B}_2$ tal que

$$\|L_2(b_2)\|_{\widetilde{B}_2} \leq K_2 \|b_2\|_{B_2}, \quad b_2 \in B_2.$$

Definimos $\widetilde{L} : B_1 + B_2 \rightarrow \widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2$ por

$$\widetilde{L}(b_1 + b_2) = L_1(b_1) + L_2(b_2), \quad b_1 \in B_1, b_2 \in B_2.$$

Inicialmente verifiquemos que o operador $\tilde{L}$ está bem definido. De fato, se $b_1 + b_2 = b'_1 + b'_2$ com $b_1, b'_1 \in B_1$ e $b_2, b'_2 \in B_2$, então $b_1 - b'_1 = b'_2 - b_2 \in B_1 \cap B_2$. Logo

$$L_1(b_1 - b'_1) = L_1(b_1 - b'_1) = L(b'_2 - b_2) = L_2(b'_2 - b_2)$$

e portanto $L_1(b_1) - L_1(b'_1) = L_2(b'_2) - L_2(b_2)$, ou seja, $L_1(b_1) + L_2(b_2) = L_1(b'_1) + L_2(b'_2)$.

No que segue denotaremos a extensão $\tilde{L}$ de $B_1 + B_2$ em $\widetilde{B_1 + B_2}$ também por L .

Se $u \in B_1 + B_2$ é tal que $u = b_1 + b_2$, onde $b_1 \in B_1$ e $b_2 \in B_2$, então

$$\begin{aligned} \|L(u)\|_{\widetilde{B_1 + B_2}} &= \|L_1(b_1) + L_2(b_2)\|_{\widetilde{B_1 + B_2}} \\ &\leq \|L_1(b_1)\|_{\widetilde{B_1 + B_2}} + \|L_2(b_2)\|_{\widetilde{B_1 + B_2}} \leq \|L_1(b_1)\|_{\widetilde{B_1}} + \|L_2(b_2)\|_{\widetilde{B_2}} \\ &\leq K_1 \|b_1\|_{B_1} + K_2 \|b_2\|_{B_2} \leq \max(K_1, K_2) (\|b_1\|_{B_1} + \|b_2\|_{B_2}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|L(u)\|_{\widetilde{B_1 + B_2}} \leq \inf_{\substack{b_i \in B_i \\ b_1 + b_2 = u}} (\max(K_1, K_2) (\|b_1\|_{B_1} + \|b_2\|_{B_2})) = \max(K_1, K_2) \|u\|_{B_1 + B_2}$$

qualquer que seja $u \in B_1 + B_2$, mostrando de fato (3.6).

Fixemos agora $1 \leq p \leq \infty$ e $v \in \mathbb{R}$ tais que $0 < \theta = \frac{1}{p} + v < 1$ e mostremos que $Lu \in \tilde{T}$ sempre que $u \in T$. De fato, se $u \in T$, consideremos $f \in W = W(p, v, B_1, B_2)$ com $f(0) = u$.

Definamos $\tilde{f}$ q. s. de $[0, \infty)$ em $\widetilde{B_1 + B_2}$ por

$$\tilde{f}(t) = L(f(t)). \quad (3.8)$$

Desde que o operador $L \in \mathcal{L}(B_1 + B_2, \widetilde{B_1 + B_2})$ é claro que $\tilde{f} \in L^1_{loc}(0, \infty, \widetilde{B_1 + B_2})$. Além disso, se $\phi \in C^\infty_c([0, \infty))$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tilde{f}(t) \phi'(t) dt &= \int_0^\infty L(f(t)) \phi'(t) dt = \int_0^\infty L(\phi'(t) f(t)) dt \\ &= L\left(\int_0^\infty \phi'(t) f(t) dt\right) = L\left(-\int_0^\infty \phi(t) f'(t) dt\right) \\ &= -\int_0^\infty L(\phi(t) f'(t)) dt = -\int_0^\infty L(f'(t)) \phi(t) dt \end{aligned}$$

mostrando que $(\tilde{f})' = L \circ f'$.

Observemos ainda que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|t^v \tilde{f}(t)\|_{\widetilde{B_1}}^p dt &= \int_0^\infty \|t^v L(f(t))\|_{\widetilde{B_1}}^p dt \\ &\leq \int_0^\infty (K_1 \|t^v f(t)\|_{B_1})^p dt \leq K_1^p \int_0^\infty \|t^v f(t)\|_{B_1}^p dt < \infty, \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\| t^\nu (\tilde{f})'(t) \right\|_{\widetilde{B_2}}^p dt &= \int_0^\infty \|t^\nu L(f'(t))\|_{\widetilde{B_2}}^p dt \\ &\leq \int_0^\infty \left(K_2 \|t^\nu f'(t)\|_{B_2} \right)^p dt \leq K_2^p \int_0^\infty \|t^\nu f'(t)\|_{B_2}^p dt < \infty, \end{aligned}$$

permitindo-nos concluir que $\tilde{f} = L \circ f \in \widetilde{W} = W(p, \nu, \widetilde{B_1}, \widetilde{B_2})$.

Por fim, a continuidade de L nos fornece

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{f}(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} L(f(t)) = L(\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)) = L(u)$$

e assim $L(u) \in \widetilde{T} = T(p, \nu, \widetilde{B_1}, \widetilde{B_2})$.

Provemos agora que $L: (T, \|\cdot\|_T) \rightarrow (\widetilde{T}, \|\cdot\|_{\widetilde{T}})$ é um operador linear contínuo.

Para $u \in T = T(p, \nu, B_1, B_2)$ e $\varepsilon > 0$, de (3.2) obtemos $f \in W$ tal que $f(0) = u$ e

$$\|t^\nu f\|_{L^p(0, \infty; B_1)}^{1-\theta} \|t^\nu f'\|_{L^p(0, \infty; B_2)}^\theta < \|u\|_T + \varepsilon.$$

Definimos $\tilde{f}$ quase sempre em $(0, \infty)$ como em (3.8), e assim $\tilde{f} \in \widetilde{W}$ com $\tilde{f}(0) = Lu$. Também das desigualdades (3.9)-(3.10) obtemos

$$\left\| t^\nu \tilde{f} \right\|_{L^p(0, \infty; \widetilde{B_1})}^{1-\theta} \left\| t^\nu (\tilde{f})' \right\|_{L^p(0, \infty; \widetilde{B_2})}^\theta \leq K_1^{1-\theta} \|t^\nu f\|_{L^p(0, \infty; B_1)}^{1-\theta} K_2^\theta \|t^\nu f'\|_{L^p(0, \infty; B_2)}^\theta$$

e portanto,

$$\|L(u)\|_{\widetilde{T}} \leq K_1^{1-\theta} K_2^\theta (\|u\|_T + \varepsilon).$$

Como nossa escolha de $\varepsilon > 0$ é arbitrária segue que

$$\|L(u)\|_{\widetilde{T}} \leq K_1^{1-\theta} K_2^\theta \|u\|_T, \quad u \in T.$$

■

Observação 3.8. Se denotarmos por $\|L\|_{\mathcal{L}(T, \widetilde{T})}$ a norma da transformação L vista como um elemento do espaço de Banach $\mathcal{L}(T, \widetilde{T})$, podemos reescrever (3.7) na forma

$$\|L\|_{\mathcal{L}(T, \widetilde{T})} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(B_1, \widetilde{B_1})}^{1-\theta} \|L\|_{\mathcal{L}(B_2, \widetilde{B_2})}^\theta. \quad (3.10)$$

Lema 3.9. Suponhamos que $B_1 \cap B_2$ seja denso em B_1 e B_2 , e também que exista uma sequência $\{P_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de operadores lineares tais que para cada $j = 1, 2, \dots$, $P_j \in \mathcal{L}(B_1) \cap \mathcal{L}(B_2)$ com imagem em $B_1 \cap B_2$. Suponhamos também que para cada $b_i \in B_i$, $i = 1, 2$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j b_i - b_i\|_{B_i} = 0.$$

Então para cada $u \in T$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j u - u\|_T = 0.$$

Em particular, $B_1 \cap B_2$ é denso em T .

Demonstração: Observemos que pelo Teorema 3.7, para cada $j = 1, 2, \dots$ o operador P_j pode ser estendido (de forma única) a um operador linear contínuo $P_j : B_1 + B_2 \rightarrow B_1 + B_2$, com

$$\|P_j\|_{\mathcal{L}(B_1+B_2)} \leq \max\left(\|P_j\|_{\mathcal{L}(B_1)}, \|P_j\|_{\mathcal{L}(B_2)}\right).$$

Fixado $u \in T$, escolhemos $f \in W$ tal que $f(0) = u$, e para cada j , definimos

$$f_j = P_j \circ f \in L^1_{loc}(0, \infty; B_1 + B_2).$$

Como $P_j \in \mathcal{L}(B_1) \cap \mathcal{L}(B_2)$, $t^\nu f_j \in L^p(0, \infty; B_1)$, e $f'_j = P_j \circ f' \in L^p(0, \infty; B_2)$, obtemos que $f_j \in W$ e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f_j(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} P_j \circ f(t) = P_j\left(\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)\right) = P_j(u) \text{ em } B_1 + B_2.$$

Portanto $P_j(u) \in T = T(p, \nu, B_1, B_2)$ para todo $j = 1, 2, \dots$

Além disso, para cada $b_1 \in B_1$ fixo $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j b_1 - b_1\|_{B_1} = 0$. Logo existe um índice $j_0 = j_0(b_1)$ tal que $\|P_j b_1 - b_1\|_{B_1} < 1$, sempre que $j > j_0$.

Portanto o conjunto $\{P_j b_1\}$ é limitado independentemente de j , e assim pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe uma constante K_1 tal que $\|P_j\|_{\mathcal{L}(B_1)} \leq K_1$, $j = 1, 2, \dots$.

Analogamente existe uma constante K_2 tal que $\|P_j\|_{\mathcal{L}(B_2)} \leq K_2$, $j = 1, 2, \dots$.

Finalmente, desde que

$$\begin{aligned} \|f_j(t) - f(t)\|_{B_1}^p &\leq \left(\|f_j(t)\|_{B_1} + \|f(t)\|_{B_1}\right)^p \leq (K_1 \|f(t)\|_{B_1} + \|f(t)\|_{B_1})^p \leq (K_1 + 1)^p \|f(t)\|_{B_1}^p, \quad t > 0; \\ \|f'_j(t) - f'(t)\|_{B_2}^p &\leq \left(\|f'_j(t)\|_{B_2} + \|f'(t)\|_{B_2}\right)^p \leq (K_2 \|f'(t)\|_{B_2} + \|f'(t)\|_{B_2})^p \leq (K_2 + 1)^p \|f'(t)\|_{B_2}^p, \quad t > 0; \\ \|f_j(t) - f(t)\|_{B_1}^p &= \|P_j f(t) - f(t)\|_{B_1}^p \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow \infty, t > 0; \\ \|f'_j(t) - f'(t)\|_{B_2}^p &= \|P_j f'(t) - f'(t)\|_{B_2}^p \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow \infty, t > 0, \end{aligned}$$

concluimos pelo do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $f_j \rightarrow f$ em $W = W(p, \nu, B_1, B_2)$, e portanto, $P_j u = P_j f(0) \rightarrow f(0) = u$ em $T = T(p, \nu, B_1, B_2)$.

Quanto à densidade de $B_1 \cap B_2$ em T , basta observarmos que tanto $f_j = P_j \circ f$ quanto $f'_j = P_j \circ f'$ tomam valores em $B_1 \cap B_2$, o que é suficiente para garantir que $P_j u \in B_1 \cap B_2$. ■

Teorema 3.10. *Suponhamos que os espaços B_1 e B_2 sejam reflexivos e satisfaçam as hipóteses do Teorema 3.9. Se $1 < p < \infty$ e $0 < \theta < 1$, onde $\theta = \frac{1}{p} + \nu$, então*

$$[T(p, \nu, B_1, B_2)]' \simeq T(p', -\nu, B'_2, B'_1),$$

onde $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

Em seu trabalho Lions introduz os espaços traço de forma mais geral do que os que estamos considerando. Este teorema é um caso particular do Teorema 1.1 de [21], e caracteriza o dual de um espaço traço como outro espaço traço.

Provaremos agora um teorema de imersão para espaços traço entre dois espaços L^p . Este resultado desempenhará um papel fundamental para obtermos as extensões dos teoremas clássicos de imersão de Sobolev no caso dos espaços de ordem fracionária (Teorema 3.31).

Teorema 3.11. *Se Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$ e p, q, θ são tais que $1 \leq p \leq q < \infty$ e $0 < \theta < 1$, onde $\theta = \frac{1}{p} + \nu$, então*

$$T(p, \nu, L^q(\Omega), L^p(\Omega)) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad (3.11)$$

$$\text{onde } \frac{1}{r} = \frac{(1-\theta)}{q} + \frac{\theta}{p}.$$

Demonstração: Observemos que pelo Teorema A.5 o espaço $T(p, \nu, L^q(\Omega), L^p(\Omega))$ é bem definido.

Suponhamos primeiramente $f \in C_o^\infty([0, \infty))$. Da identidade

$$f(0) = f(t) - \int_0^t f'(\tau) d\tau$$

obtemos

$$\begin{aligned} |f(0)| &= \left| \int_0^1 f(0) dt \right| = \left| \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 \int_0^t f'(\tau) d\tau dt \right| \leq \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \left| \int_0^1 \int_0^t f'(\tau) d\tau dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 \int_0^t |f'(\tau)| d\tau dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 \int_0^1 |f'(t)| dt d\tau \\ &\leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \int_0^1 t^{-\nu} |t^\nu f(t)| dt + \int_0^1 t^{-\nu} |t^\nu f'(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty t^{-\nu} |t^\nu f(t)| dt + \int_0^\infty t^{-\nu} |t^\nu f'(t)| dt \leq \left(\int_0^\infty t^{\nu p} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{-\nu p^*} dt \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\quad + \left(\int_0^\infty t^{\nu p} |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{-\nu p^*} dt \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty t^{-\nu p^*} dt \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\|t^\nu f\|_{L^p(0, \infty)} + \|t^\nu f'\|_{L^p(0, \infty)} \right), \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Uma vez que $\theta = \frac{1}{p} + \nu < 1$, temos $p^* \nu < 1$, e portanto $K_1 = \left(\int_0^\infty t^{-\nu p^*} dt \right)^{\frac{1}{p^*}} < \infty$. Logo $f \in W(p, \nu, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $|f(0)| \leq 2K_1 \|f\|_W$. Agora aplicando o item (i) do Teorema 3.6

$$|f(0)| \leq 2K_1 \|t^\nu f\|_{L^p(0, \infty)}^{1-\theta} \|t^\nu f'\|_{L^p(0, \infty)}^\theta. \quad (3.12)$$

Suponhamos agora que $f \in W = W(p, \nu, L^q(\Omega), L^p(\Omega)) \cap C_o^\infty((0, \infty); L^q(\Omega))$, e consideremos a função escalar $\tilde{f}(x, t) = f(t)(x)$, definida quase sempre em $\Omega \times (0, \infty)$.

É claro que $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = f'(t)(x)$, e a desigualdade (3.12) mostra que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x, t)$ existe e satisfaz

$$\left| \tilde{f}(x, 0) \right|^r \leq 2^r K_1^r \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \left| \tilde{f}(x, t) \right|^p dt \right)^{\frac{(1-\theta)r}{p}} \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(x, t) \right|^p dt \right)^{\frac{\theta r}{p}} \quad \text{q. s. em } \Omega.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left| \tilde{f}(x, 0) \right|^r dx &\leq \int_\Omega \left(2^r K_1^r \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \left| \tilde{f}(x, t) \right|^p dt \right)^{\frac{(1-\theta)r}{p}} \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(x, t) \right|^p dt \right)^{\frac{\theta r}{p}} \right) dx \\ &\leq 2^r K_1^r \left(\int_\Omega \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \left| \tilde{f}(x, t) \right|^p dt \right)^{\frac{(1-\theta)rs}{p}} dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(x, t) \right|^p dt \right)^{\frac{\theta rs^*}{p}} dx \right)^{\frac{1}{s^*}}, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^*} = 1$.

Ao escolhermos s um número real tal que $(1-\theta)rs = q$ desde que $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p}$ obtemos a seguinte identidade

$$1 = (1-\theta)\frac{r}{q} + \frac{\theta r}{p} \Rightarrow 1 = \frac{(1-\theta)r}{(1-\theta)rs} + \frac{\theta r}{p} \Rightarrow 1 = \frac{1}{s} + \frac{\theta r}{p} = 1 - \frac{1}{s^*} + \frac{\theta r}{p} \Rightarrow \theta rs^* = p$$

e daí obtemos,

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{f}(\cdot, 0) \right\|_{L^r(\Omega)} &\leq K_2 \left(\int_\Omega \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \left| \tilde{f}(x, t) \right|^p dt \right)^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{1-\theta}{q}} \left(\int_\Omega \int_0^\infty t^{\nu p} \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(x, t) \right|^p dt dx \right)^{\frac{\theta}{p}} \\ &= K_2 \left\| \int_0^\infty t^{\nu p} |f(t)|^p dt \right\|_{L^{\frac{q}{p}}(\Omega)}^{\frac{1-\theta}{p}} \left\| t^\nu f' \right\|_{L^p(0, \infty; L^p(\Omega))}^\theta \\ &\leq K_2 \left(\int_0^\infty t^{\nu p} \| |f(t)|^p \|_{L^{\frac{q}{p}}(\Omega)} dt \right)^{\frac{1-\theta}{p}} \left\| t^\nu f' \right\|_{L^p(0, \infty; L^p(\Omega))}^\theta \\ &= K_2 \| t^\nu f \|_{L^p(0, \infty; L^q(\Omega))}^{1-\theta} \left\| t^\nu f' \right\|_{L^p(0, \infty; L^p(\Omega))}^\theta. \end{aligned}$$

Portanto segue pela densidade das funções infinitamente diferenciáveis em W (Lema 3.5), que a desigualdade acima é válida para toda função $f \in W$.

Ou seja, se $u \in T(p, \nu, L^q(\Omega), L^p(\Omega))$,

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \inf_{\substack{f \in W \\ f(0)=u}} K_2 \| t^\nu f \|_{L^p(0, \infty; L^q(\Omega))}^{1-\theta} \left\| t^\nu f' \right\|_{L^p(0, \infty; L^p(\Omega))}^\theta = K_2 \|u\|_T.$$

■

3.2 Caracterização dos Espaços Traço via Semigrupos

Consideremos um semigrupo fortemente contínuo e uniformemente limitado G em um espaço de Banach B . Ou seja, G é um semigrupo fortemente contínuo e existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(B)} \leq M, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Se Λ é seu gerador infinitesimal, então $D(\Lambda) \subset B$ é também um espaço de Banach quando munido da norma do gráfico

$$\|u\|_{D(\Lambda)} = \|u\|_B + \|\Lambda u\|_B,$$

sendo também um subespaço denso de B .

É claro que os espaços de Banach $B_1 = D(\Lambda)$ e $B_2 = B$ estão continuamente imersos no espaço vetorial topológico $X = B$, ficando dessa maneira bem definido o Espaço Traço $T = T(p, \nu, D(\Lambda), B)$ sempre que $0 < \frac{1}{p} + \nu < 1$.

O Teorema 3.13 caracteriza o espaço Traço T em termos de uma norma explícita envolvendo o semigrupo G , porém, primeiramente obteremos uma desigualdade devido a Hardy, Littlewood e Pólya, da qual faremos extensivo uso no desenvolver desta seção.

Lema 3.12. *Seja f uma função escalar definida quase sempre em $[0, \infty)$. Se*

$$g(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

para quaisquer números reais p e ν satisfazendo $1 \leq p < \infty$ e $0 < \theta = \frac{1}{p} + \nu < 1$, verifica-se a seguinte desigualdade

$$\int_0^\infty t^{\nu p} |g(t)|^p dt \leq \frac{1}{(1-\theta)^p} \int_0^\infty t^{\nu p} |f(t)|^p dt. \quad (3.13)$$

Demonstração: Observemos primeiramente que se o lado direito de (3.13) for infinito não há nada o que se demonstrar. Suponhamos então que $\frac{1}{(1-\theta)^p} \int_0^\infty t^{\nu p} |f(t)|^p dt < \infty$.

Através das identidades

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{\nu p} |g(t)|^p dt &= \int_{-\infty}^\infty e^{\nu p \tau} |g(e^\tau)|^p e^\tau d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{(\theta p - 1)\tau} |g(e^\tau)|^p e^\tau d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{\theta p \tau} |\tilde{g}(\tau)|^p d\tau, \end{aligned}$$

onde $\tilde{g}(\tau) = g(e^\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, e também,

$$\int_0^\infty t^{\nu p} |f(t)|^p dt = \int_{-\infty}^\infty e^{\theta p \tau} |\tilde{f}(\tau)|^p d\tau,$$

onde $\tilde{f}(\tau) = f(e^\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, verifica-se que (3.13) é equivalente a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta pt} |\tilde{g}(t)|^p dt \leq \frac{1}{(1-\theta)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta pt} |\tilde{f}(t)|^p dt. \quad (3.14)$$

Observemos ainda que

$$e^{\theta t} \tilde{g}(t) = g(e^t) = \frac{e^{\theta t}}{e^t} \int_0^{e^t} f(\tau) d\tau = e^{(\theta-1)t} \int_{-\infty}^t f(e^\tau) e^\tau d\tau.$$

Consideremos agora as seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$

$$E(t) = e^{\theta t}$$

$$F(t) = \begin{cases} e^{(\theta-1)t} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

e verifiquemos que $E\tilde{g} = F * (E\tilde{f})$. De fato, isto segue da identidade

$$\begin{aligned} (F * (E\tilde{f}))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(s) E(t-s) \tilde{f}(t-s) ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{(\theta-1)s} e^{\theta(t-s)} \tilde{f}(t-s) ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{\theta t-s} \tilde{f}(t-s) ds = \int_{-\infty}^t e^{(\theta-1)t} e^\tau \tilde{f}(\tau) d\tau \\ &= e^{(\theta-1)t} \int_{-\infty}^t e^\tau \tilde{f}(\tau) d\tau = e^{(\theta-1)t} \int_{-\infty}^t f(e^\tau) e^\tau d\tau = E(t) \tilde{g}(t). \end{aligned}$$

Desde que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{(\theta-1)t} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(\theta-1)t}}{\theta-1} - \frac{1}{\theta-1} \right) = \frac{1}{1-\theta} < \infty,$$

e também, já que estamos supondo o lado direito de (3.14) finito

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(t) \tilde{f}(t)|^p dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta pt} |\tilde{f}(t)|^p dt < \infty,$$

obtemos via Teorema de Young

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |E(t) \tilde{g}(t)|^p dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |(F * (E\tilde{f}))(t)|^p dt \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt \right)^p \int_{-\infty}^{\infty} |E(t) \tilde{f}(t)|^p dt \\ &= \frac{1}{(1-\theta)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta pt} |\tilde{f}(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta pt} |\tilde{g}(t)|^p dt \leq \frac{1}{(1-\theta)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta pt} |\tilde{f}(t)|^p dt,$$

e o resultado segue agora de (3.14). ■

Teorema 3.13. *Seja Λ o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo e uniformemente limitado G , em um espaço de Banach B . Se $1 \leq p < \infty$ e $0 < \frac{1}{p} + \nu < 1$, o espaço $T = T(p, \nu, D(\Lambda), B)$ coincide com o espaço $T^0 = T(p, \nu, D(\Lambda), B)$ constituído dos elementos $u \in B$ para os quais a norma*

$$\|u\|_{T^0} = \left(\|u\|_B^p + \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} \|G(t)u - u\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

é finita. Além disso, as normas $\|\cdot\|_T$ e $\|\cdot\|_{T^0}$ são equivalentes.

Demonstração: Para $u \in T$ consideremos $f \in W = W(p, \nu, D(\Lambda), B)$ tal que $f(0) = u$.

Em princípio suponhamos f uma função infinitamente diferenciável de $[0, \infty)$ em $D(\Lambda)$ (em particular f também é uma função infinitamente diferenciável quando vista como uma função tomando valores em B).

Seja $h(t) = f'(t) - \Lambda f(t)$, $0 \leq t < \infty$.

Do Teorema A.1, se $t \geq \varepsilon > 0$

$$f(t) = G(t - \varepsilon)f(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t G(t - \tau)h(\tau) d\tau.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G(t - \varepsilon)f(\varepsilon) - f(\varepsilon) &= f(t) - f(\varepsilon) - \int_\varepsilon^t G(t - \tau)h(\tau) d\tau \\ &= \int_\varepsilon^t f'(\tau) d\tau - \int_\varepsilon^t G(t - \tau)h(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Neste ponto será oportuno observarmos que as normas $\|\cdot\|_B$ e $\|\cdot\|_{D(\Lambda)+B}$ são equivalentes*. De fato, se $u \in B$

$$\begin{aligned} \|u\|_B &\leq \|u_1\|_B + \|u_2\|_B \leq \|u_1\|_B + \|\Lambda u_1\|_B + \|u_2\|_B \\ &\leq \|u_1\|_{D(\Lambda)} + \|u_2\|_B, \end{aligned}$$

sempre que $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in D(\Lambda)$ e $u_2 \in B$. Logo,

$$\|u\|_B \leq \inf_{u_1+u_2=u} \left\{ \|u_1\|_{D(\Lambda)} + \|u_2\|_B \right\} = \|u\|_{D(\Lambda)+B}.$$

Por outro lado, como $D(\Lambda) \subset B$ é claro que

$$\|u\|_{D(\Lambda)+B} \leq \|0\|_{D(\Lambda)} + \|u\|_B.$$

*na verdade isométricas.

Logo

$$\begin{aligned}
& \|G(t-\varepsilon)f(\varepsilon) - f(\varepsilon) - (G(t)f(0) + f(0))\|_{D(\Lambda)+B} \\
& \leq \|G(t-\varepsilon)f(\varepsilon) - f(\varepsilon) - (G(t)f(0) + f(0))\|_B \\
& \leq \|G(t-\varepsilon)f(\varepsilon) - G(t-\varepsilon)f(0)\|_B + \|G(t-\varepsilon)f(0) - G(t)f(0)\|_B + \|f(0) - f(\varepsilon)\|_B \\
& \leq M\|f(\varepsilon) - f(0)\|_B + \|G(t-\varepsilon)f(0) - G(t)f(0)\|_B + \|f(0) - f(\varepsilon)\|_B \\
& \leq M\|f(\varepsilon) - f(0)\|_B + \|G(t-\varepsilon)f(0) - G(t)f(0)\|_B + \|f(0) - f(\varepsilon)\|_B \rightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, desde que $f(\varepsilon) \rightarrow f(0)$ em $D(\Lambda) + B$, e portanto em B , e G é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares em B .

Além disso,

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\varepsilon}^t f'(\tau) d\tau - \int_{\varepsilon}^t G(t-\tau)h(\tau) d\tau - \int_0^t f'(\tau) d\tau + \int_0^t G(t-\tau)h(\tau) d\tau \right\|_B \\
& \leq \left\| \int_0^{\varepsilon} f'(\tau) d\tau \right\|_B + \left\| \int_0^{\varepsilon} G(t-\tau)h(\tau) d\tau \right\|_B \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Tomando limite em (3.15), segue a identidade

$$G(t)f(0) - f(0) = \int_0^t f'(\tau) d\tau + \int_0^t G(t-\tau)h(\tau) d\tau.$$

Suponhamos agora que $f \in W = W(p, \nu, D(\Lambda), B)$, abandonando a hipótese inicial de que f seja infinitamente diferenciável. O Lema 3.5 garante a existência de uma sequência $\{f_n\}$ de funções infinitamente diferenciáveis de $(0, \infty)$ em $D(\Lambda)$ tal que $f_n \rightarrow f$ em W .

Afirmamos que

$$\|f_n(0) - f(0)\|_{D(\Lambda)+B} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

De fato, fixemos $\xi > 0$. Para $0 < t < \xi$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_1^t (f'_n - f)(\tau) d\tau \right\|_{D(\Lambda)+B} & \leq \int_1^t \|(f'_n - f)(\tau)\|_{D(\Lambda)+B} d\tau \\
& \leq \int_1^t \|(f'_n - f)(\tau)\|_B d\tau \leq \int_1^t \tau^{-\nu} \|\tau^{\nu}(f'_n - f)(\tau)\|_B d\tau \\
& \leq \|t^{\nu}(f'_n - f)\|_{L^p(0, \infty; B)} \left(\int_0^{\xi} \tau^{\frac{-\nu p}{p-1}} d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\xi} \|(f_n - f)(t)\|_{D(\Lambda)} dt & < \varepsilon \\
\int_1^{\xi} \|(f'_n - f)(t)\|_B dt & < \varepsilon, \quad t \in (0, \xi).
\end{aligned}$$

Do Lema 3.2 para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in D(\Lambda) + B$ tal que

$$(f_n - f)(t) = b_n + \int_1^t (f'_n - f')(\tau) d\tau, \text{ q.s. em } [0, \infty).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \int_0^\xi \|(f_n - f)(t)\|_{D(\Lambda)} dt = \int_0^\xi \left\| b_n + \int_1^t (f'_n - f')(\tau) d\tau \right\|_{D(\Lambda)} d\tau \\ &\geq \int_0^\xi \left\| b_n + \int_1^t (f'_n - f')(\tau) d\tau \right\|_{D(\Lambda)+B} d\tau \\ &\geq \int_0^\xi \|b_n\|_{D(\Lambda)+B} d\tau - \left\| \int_1^t (f'_n - f')(\tau) d\tau \right\|_{D(\Lambda)+B} d\tau \\ &\geq \int_0^\xi \|b_n\|_{D(\Lambda)+B} d\tau - \left\| \int_1^t (f'_n - f')(\tau) d\tau \right\|_B d\tau \\ &\geq \int_0^\xi (\|b_n\|_{D(\Lambda)+B} - \varepsilon) d\tau \\ &= \xi \|b_n\|_{D(\Lambda)+B} - \xi \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\|b_n\|_{D(\Lambda)+B} < (\frac{1+\xi}{\xi})\varepsilon$, sempre que $n > N$. Provamos, pois, que $\|b_n\|_{D(\Lambda)+B} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Com isso, concluímos que $\|(f_n - f)(t)\|_{D(\Lambda)+B} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente no intervalo $(0, \xi)$.

Assim, dado $\delta > 0$, seja $N_\delta > 0$ tal que para $n > N_\delta$ tenhamos $\|(f_n - f)(t)\|_{D(\Lambda)+B} < \delta$, para todo $t \in (0, \xi)$.

Logo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(f_n - f)(t)\|_{D(\Lambda)+B} < \delta, \text{ para todo } n > N_\delta,$$

mostrando que

$$\|f_n(0) - f(0)\|_{D(\Lambda)+B} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

e conseqüentemente

$$\|f_n(0) - f(0)\|_B \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\|G(t)f_n(0) - f_n(0) - (G(t)f(0) - f(0))\|_B \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim para cada $f \in W$,

$$G(t)f(0) - f(0) = \int_0^t f'(\tau) d\tau + \int_0^t G(t - \tau)h(\tau) d\tau,$$

onde $h(\tau) = f'(\tau) - \Lambda f(\tau)$, $0 \leq \tau < \infty$.

Portanto para cada $u \in T$ e $f \in W$ com $f(0) = u$,

$$G(t)u - u = \int_0^t f'(\tau) d\tau - \int_0^t G(t-\tau)h(\tau) d\tau,$$

e obtemos

$$\left\| \frac{G(t)u - u}{t} \right\|_B = \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (f'(\tau) - G(t-\tau)h(\tau)) d\tau \right\|_B.$$

Se $\theta = \frac{1}{p} + \nu$, aplicando o Lema 3.12 (e sucessivamente desigualdades do tipo Young) obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{\nu p} \left\| \frac{G(t)u - u}{t} \right\|_B^p dt &\leq \frac{1}{(1-\theta)^p} \int_0^\infty t^{\nu p} (\|f'(t)\|_B + M\|h(t)\|_B)^p dt \\ &\leq \frac{1}{(1-\theta)^p} \int_0^\infty t^{\nu p} (\|f'(t)\|_B + M\|f'(t)\|_B + M\|\Lambda f(t)\|_B)^p dt \\ &\leq \frac{2^{p-1}}{(1-\theta)^p} \int_0^\infty ((M+1)^p t^{\nu p} \|f'(t)\|_B^p + M^p t^{\nu p} \|\Lambda f(t)\|_B^p) dt \\ &\leq \frac{2^{p-1}}{(1-\theta)^p} (M+1)^p \int_0^\infty \|t^\nu f'(t)\|_B^p + \|t^\nu \Lambda f(t)\|_B^p dt \\ &\leq \frac{2^{p-1}}{(1-\theta)^p} (M+1)^p \int_0^\infty \|t^\nu f'(t)\|_B^p + \|t^\nu \Lambda f(t)\|_{D(\Lambda)}^p dt \\ &\leq \frac{2^{p-1}}{(1-\theta)^p} (M+1)^p \left(\|t^\nu f'\|_{L^p(0,\infty;B)}^p + \|t^\nu \Lambda f\|_{L^p(0,\infty;D(\Lambda))}^p \right) \\ &\leq \frac{2^p(M+1)^p}{(1-\theta)^p} \|f\|_W^p. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Uma vez que a desigualdade (3.16) é válida para toda $f \in W$ com $f(0) = u$,

$$\int_0^\infty t^{(\nu-1)p} \|G(t)u - u\|_B^p dt \leq \left(\frac{2M+2}{1-\theta} \right)^p \|u\|_T^p$$

Além disso, o operador inclusão $i : D(\Lambda) \cap B \rightarrow B \cap B$ satisfaz

$$\|i(u)\|_B = \|u\|_B \leq \|u\|_{D(\Lambda)}, \quad u \in D(\Lambda)$$

$$\|i(u)\|_B \leq \|u\|_B, \quad u \in B$$

de modo que pelo Teorema de Interpolação 3.7

$$T(p, \nu, D(\Lambda), B) \hookrightarrow T(p, \nu, B, B) \cong B.$$

Assim existe uma constante positiva C tal que

$$\|u\|_B \leq C \|u\|_{T(p, \nu, D(\Lambda), B)}.$$

Portanto se $u \in T$

$$\begin{aligned} \|u\|_{T^0} &= \left(\|u\|_B^p + \int_0^\infty t^{(v-)^p} \|G(t)u - u\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\left(\frac{2M+2}{1-\theta} \right)^p \|u\|_T^p + C^p \|u\|_T^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(C + \frac{2M+2}{1-\theta} \right) \|u\|_T < \infty. \end{aligned}$$

mostrando que também $u \in T^0$.

Reciprocamente, suponhamos $u \in T^0$.

Consideremos $\phi \in C_o^\infty([0, \infty))$ satisfazendo $\phi(0) = 1$, $\phi(t) = 0$ para $1 \leq t < \infty$, $|\phi(t)| \leq 1$ e $|\phi'(t)| \leq K_1$, para alguma constante $K_1 > 0$ e $t \geq 0$. Seja $f(t) = \phi(t)g(t)$, onde

$$g(t) = \frac{1}{t} \int_0^t G(\tau)u d\tau, \quad t > 0. \quad (3.17)$$

Para mostrarmos que $u \in T = T(p, v, D(\Lambda), B)$ e $\|u\|_T \leq K \|u\|_{T^0}$, uma vez que

$$\begin{aligned} \|f(t) - u\|_{D(\Lambda)+B} &\leq \|f(t) - u\|_B \leq \left\| \phi(t) \frac{1}{t} \int_0^t G(\tau)u d\tau - \phi(t)u \right\|_B + \|\phi(t)u - u\|_B \\ &\leq \left\| \frac{1}{t} \int_0^t G(\tau)u d\tau - u \right\|_B + |\phi(t) - 1| \|u\|_B \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

mostrando ser $f(0) = u$, é suficiente mostrarmos que $f \in W$ e

$$\|f\|_W \leq K \|u\|_{T^0}.$$

Neste caso, é ainda suficiente mostrarmos que $t^v f \in L^p(0, \infty; D(\Lambda))$ e $t^v f' \in L^p(0, \infty; B)$, com normas limitadas por $\tilde{K} \|u\|_{T^0}$, para alguma constante $\tilde{K}$ positiva.

Desde que para todo $t \geq 0^\dagger$

$$\int_0^t G(\tau)u d\tau \in D(\Lambda) \text{ e } \Lambda \int_0^t G(\tau)u d\tau = G(t)u - u$$

[†]item v do Lema 1.5

obtemos[‡]

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{\nu p} \|f(t)\|_{D(\Lambda)}^p dt &\leq \int_0^1 t^{\nu p} \|g(t)\|_{D(\Lambda)}^p dt \\
&= \int_0^1 t^{(\nu-1)p} \left(\left\| \int_0^t G(\tau)u d\tau \right\|_B + \left\| \Lambda \int_0^t G(\tau)u d\tau \right\|_B \right)^p dt \\
&= \int_0^1 t^{(\nu-1)p} \left(\left\| \int_0^t G(\tau)u d\tau \right\|_B + \|G(t)u - u\|_B \right)^p dt \\
&\leq \int_0^1 t^{(\nu-1)p} 2^{p-1} \left(\left\| \int_0^t G(\tau)u d\tau \right\|_B^p + \|G(t)u - u\|_B^p \right) dt \\
&\leq \int_0^1 t^{(\nu-1)p} 2^{p-1} \left(\int_0^t \|G(\tau)u\|_B^p d\tau + \|G(t)u - u\|_B^p \right) dt \\
&\leq \int_0^1 t^{(\nu-1)p} 2^{p-1} \left((M\|u\|_B t)^p + \|G(t)u - u\|_B^p \right) dt \\
&\leq 2^{p-1} M^p \|u\|_B^p \int_0^1 t^{\nu p} dt + 2^{p-1} \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} \|G(t)u - u\|_B^p dt \\
&\leq 2^{p-1} M^p \|u\|_B^p \frac{1}{(\theta p)} + 2^{p-1} \|u\|_{T^0}^p \leq 2^{p-1} \max \left(\frac{M^p}{\theta p}, 1 \right) \|u\|_{T^0}^p.
\end{aligned}$$

Agora através da identidade

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{1}{t} G(t)u - \frac{1}{t^2} \int_0^t G(\tau)u d\tau \\
&= \frac{1}{t} (G(t)u - u) + \frac{1}{t^2} \int_0^t u d\tau - \frac{1}{t^2} \int_0^t G(\tau)u d\tau \\
&= \frac{1}{t} (G(t)u - u) - \frac{1}{t^2} \int_0^t (G(\tau)u - u) d\tau,
\end{aligned}$$

visto que $u \in T^0$ e portanto

$$\int_0^1 t^{\nu p} \left\| \frac{G(t)u - u}{t} \right\|_B^p dt \leq \|u\|_{T^0}^p,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\nu p} \left\| \frac{1}{t^2} \int_0^t (G(\tau)u - u) d\tau \right\|_B^p dt &= \int_0^1 t^{(\nu-1)p} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (G(\tau)u - u) d\tau \right\|_B^p dt \\
&\leq \int_0^1 t^{(\nu-1)p} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|G(\tau)u - u\|_B d\tau \right)^p dt \\
&\leq \frac{1}{(2-\theta)^p} \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} \|G(\tau)u - u\|_B^p d\tau \leq \frac{1}{(2-\theta)^p} \|u\|_{T^0}^p,
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade é obtida do Lema 3.12 com $(\nu-1)$ no lugar de ν . E portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\nu p} \|g'(t)\|_B^p dt &= \int_0^1 t^{\nu p} \left\| \frac{G(t)u - u}{t} - \frac{1}{t^2} \int_0^t (G(\tau)u - u) d\tau \right\|_B^p dt \\
&\leq 2^{p-1} \int_0^1 t^{\nu p} \left\| \frac{G(t)u - u}{t} \right\|_B^p dt + 2^{p-1} \int_0^1 t^{\nu p} \left\| \frac{1}{t^2} \int_0^t (G(\tau)u - u) d\tau \right\|_B^p dt \\
&\leq 2^{p-1} \max \left(1, \frac{1}{(2-\theta)^p} \right) \|u\|_{T^0}^p.
\end{aligned}$$

[‡]novamente usando sucessivas desigualdades do tipo Young.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{\nu p} \|f'(t)\|_B^p dt &= \int_0^\infty t^{\nu p} \|\phi'(t)g(t) + \phi(t)g'(t)\|_B^p dt \\
&\leq 2^{p-1} \int_0^\infty t^{\nu p} (\|\phi'(t)g(t)\|_B^p + \|\phi(t)g'(t)\|_B^p) dt \\
&\leq 2^{p-1} \int_0^1 t^{\nu p} K_1^p \|g(t)\|_B^p dt + \int_0^1 t^{\nu p} \|g'(t)\|_B^p dt \\
&\leq 2^{p-1} K_1^p \int_0^1 t^{\nu p} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t G(\tau)u d\tau \right\|_B^p dt + (2^{p-1})^2 \max(1, \frac{1}{(2-\theta)^p}) \|u\|_{T^0}^p \\
&\leq 2^{p-1} K_1^p \int_0^1 t^{(\nu-1)p} \left(\int_0^t \|G(\tau)u\|_B d\tau \right)^p dt + (2^{p-1})^2 \max(1, \frac{1}{(2-\theta)^p}) \|u\|_{T^0}^p \\
&\leq 2^{p-1} K_1^p \int_0^1 t^{(\nu-1)p} \left(\int_0^t M \|u\|_B d\tau \right)^p dt + (2^{p-1})^2 \max(1, \frac{1}{(2-\theta)^p}) \|u\|_{T^0}^p \\
&\leq 2^{p-1} K_1^p M^p \|u\|_B^p \int_0^1 t^{\nu p} dt + (2^{p-1})^2 \max(1, \frac{1}{(2-\theta)^p}) \|u\|_{T^0}^p \\
&\leq \frac{2^{p-1} K_1^p M^p}{\theta p} \|u\|_{T^0}^p + (2^{p-1})^2 \max(1, \frac{1}{(2-\theta)^p}) \|u\|_{T^0}^p \leq \tilde{K} \|u\|_{T^0}^p,
\end{aligned}$$

nos mostrando que $\|f\|_W^p \leq \tilde{K} \|u\|_{T^0}^p$ e, conseqüentemente existe uma constante positiva K tal que

$$\|u\|_T \leq \|f\|_W \leq K \|u\|_{T^0},$$

completando a prova do teorema. ■

Será útil a nossos propósitos uma generalização do Teorema 3.13. Para tal consideremos $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ uma família de geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos e uniformemente limitados $G_1, G_2, \dots, G_n$ respectivamente, que comutam entre si, isto é, existem constantes $M_1, M_2, \dots, M_n$ tais que

$$\|G_i(t)\|_{\mathcal{L}(B)} \leq M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \geq 0$$

e

$$G_i(t)G_k(s) = G_k(s)G_i(t), \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad t, s \geq 0.$$

Se B^n denota o espaço produto $\underbrace{B \times B \cdots \times B}_n$ então B^n é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|(b_1, b_2, \dots, b_n)\|_{B^n} = \sum_{i=1}^n \|b_i\|_B.$$

Consideremos o operador $\Lambda : D(\Lambda) = \bigcap_{i=1}^n D(\Lambda_i) \subset B \rightarrow B^n$ dado por

$$\Lambda u = (\Lambda_1 u, \Lambda_2 u, \dots, \Lambda_n u). \quad (3.18)$$

O operador Λ é um operador linear fechado em B . De fato, se $\{u_k\}$ é uma sequência em $D(\Lambda)$ tal que

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u \text{ em } B \\ \Lambda u &= (\Lambda_1 u, \Lambda_2 u, \dots, \Lambda_n u) \rightarrow v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ em } B^n \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u \text{ em } B \\ \Lambda_i u_k &\rightarrow v_i \text{ em } B \end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, \dots$. Sendo Λ_i então $u \in D(\Lambda_i)$ e $\Lambda_i u = v_i$. Portanto, $u \in D(\Lambda)$ e $\Lambda u = v$. Consequentemente, $D(\Lambda)$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|u\|_{D(\Lambda)} = \|u\|_B + \|\Lambda u\|_{B^n} = \|u\|_B + \sum_{i=1}^n \|\Lambda_i u\|_B,$$

continuamente imerso em B .

Afirmamos ainda que $D(\Lambda) = \bigcap_{i=1}^n D(\Lambda_i)$ é um subespaço denso de B . De fato, vamos mostrar que $D(\Lambda_1) \cap D(\Lambda_2) \stackrel{d}{\subset} B$.[§] Lembremos que pelo Lema 1.5, se $b \in B$ e $t > 0$

$$\frac{1}{t} \int_0^t G_i(\tau) b d\tau \in D(\Lambda_i), \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t G_i(\tau) b d\tau = b, \quad i = 1, 2.$$

Logo, se $b \in B$ e $s, t > 0$

$$D(\Lambda_1) \ni \int_0^t G_1(\xi) \int_0^s G_2(\tau) b d\tau d\xi = \int_0^t \int_0^s G_1(\xi) G_2(\tau) b d\tau d\xi = \int_0^s G_2(\tau) \int_0^t G_1(\xi) b d\xi d\tau \in D(\Lambda_2).$$

Além disso, é fácil vermos que

$$\lim_{s, t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \frac{1}{s} \int_0^t \int_0^s G_1(\xi) G_2(\tau) b d\tau d\xi = b,$$

o que mostra a afirmação.

Logo, para $0 < \frac{1}{p} + \nu$ fica bem definido, também neste caso, o Espaço Traço $T(p, \nu, D(\Lambda), B)$.

Teorema 3.14. *Sejam $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ uma família de geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos e uniformemente limitados $G_1, G_2, \dots, G_n$ respectivamente, que comutam entre si, e Λ o operador linear definido em (3.18). Se $1 \leq p < \infty$ e $0 < \frac{1}{p} + \nu < 1$, então o espaço $T = T(p, \nu, D(\Lambda), B)$ coincide com o espaço T^0 constituído dos elementos $u \in B$ para os quais a norma*

$$\|u\|_{T^0} = \left(\|u\|_B^p + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} \|G_i(t)u - u\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

é finita. Além disso, as normas $\|\cdot\|_T$ e $\|\cdot\|_{T^0}$ são equivalentes.

[§]O caso geral segue da mesma forma.

Demonstração: A prova é similar à do teorema anterior substituindo-se no lugar da função g a nova função $g(t) = \frac{1}{t^n} \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t G_1(\tau_1) G_2(\tau_2) \cdots G_n(\tau_n) u d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n$.

■

Exemplo 3.15. Como ilustração do Teorema 3.14, consideremos $B = L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p < \infty$ e para $u \in B$

$$(G_i(t)u)(x) = u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$$

É claro que para cada $i = 1, 2, \dots, n$ o operador G_i é um semigrupo fortemente contínuo em $B = L^p(\mathbb{R}^n)$ e para $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$G_i(t)G_j(s) = G_j(s)G_i(t), \quad t, s \geq 0,$$

e ainda

$$\|G_i(t)u\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|u(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|u(x_1, x_2, \dots, x_n)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p},$$

de modo que $\|G_i(t)\|_{\mathcal{L}(B)} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Além disso, os correspondentes geradores infinitesimais satisfazem

$$D(\Lambda_i) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : D^i u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

$$\Lambda_i u = D^i u, \quad u \in D(\Lambda)$$

resultando que

$$D(\Lambda) = \bigcap_{i=1}^n D(\Lambda_i) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

e pelo Teorema 3.14 a norma

$$\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \sum_{i=1}^n t^{(v-1)p} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_n)|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

é equivalente à norma $\|u\|_T$ no espaço $T = T(p, v, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R})), 0 < \frac{1}{p} + v$.

3.3 Os Espaços $W^{s,p}(\Omega)$

Definiremos agora os *espaços de Sobolev Fracionários* $W^{s,p}(\Omega)$ para domínios arbitrários em $\mathbb{R}^n$, e números reais s, p com $1 < p < \infty$. Esses espaços coincidem, para valores inteiros de s , com

os usuais espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,p}(\Omega)$. Para valores de $s \geq 0$, as definições podem ser estendidas para os casos limite $p = 1$ e $p = \infty$, porém nos limitaremos ao caso $1 < p < \infty$.

Fixados um domínio Ω em $\mathbb{R}^n$ e um número real $1 < p < \infty$, consideremos os espaços $B_1 = W^{1,p}(\Omega)$ e $B_2 = L^p(\Omega) = X$. É claro que os espaços B_1 e B_2 estão continuamente imersos no espaço vetorial topológico X , e neste caso para $0 < \theta = \frac{1}{p} + \nu < 1$ escrevemos

$$T^{\theta,p}(\Omega) = T(p, \nu, W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)).$$

Se W denota o espaço $W(p, \nu, W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega))$, então escrevemos a norma de $u \in T^{\theta,p}(\Omega)$ como

$$\|u\|_{T^{\theta,p}(\Omega)} = \inf_{\substack{f \in W \\ f(0)=u}} \max \left[\left(\int_0^\infty t^\nu \|f(t)\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\int_0^\infty t^\nu \|f'(t)\|_{L^p(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \quad (3.19)$$

Dado $s \geq 0$ um número real positivo, se $s = m$, um inteiro, definimos o espaço $W^{s,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. Se s não é um inteiro, escrevemos unicamente $s = m + \sigma$ onde $m \geq 0$ é um inteiro e $0 < \sigma < 1$. O espaço $W^{s,p}(\Omega)$, neste caso, consiste das (classes de equivalência) funções $u \in W^{m,p}(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais $D^\alpha u$, $|\alpha| = m$, pertencem a $T^{1-\sigma}(\Omega)$. O espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{T^{1-\sigma}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.20)$$

Consideremos agora o seguinte operador linear

$$\begin{aligned} P : W^{s,p}(\Omega) &\rightarrow W^{m,p}(\Omega) \times \prod_{|\alpha|=m} T^{1-\sigma,p}(\Omega) \\ u &\mapsto Pu = (u, (D^\alpha u)_{|\alpha|=m}) \end{aligned}$$

onde os multi-índices α estão ordenados convenientemente. Então P define um isomorfismo isométrico de $W^{s,p}(\Omega)$ sobre um subespaço fechado do espaço de Banach $S = W^{m,p}(\Omega) \times \prod_{|\alpha|=m} T^{1-\sigma,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|(u, (v_\alpha)_{|\alpha|=m})\|_S = \left(\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \|v_\alpha\|_{T^{1-\sigma,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.21)$$

Portanto sendo os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ e $T^{1-\sigma,p}(\Omega)$ reflexivos, temos também que o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo (ver [6]).

Teorema 3.16. *Se $s \geq 0$ é um número real positivo fixado, então o subespaço $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Assumiremos o resultado válido para $s = 0, 1, 2, \dots$. Suponhamos então, que $s = m + \sigma$, onde $m \geq 0$ é um inteiro e $0 < \sigma < 1$.

Seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo $\psi(t) = 1$, para $t \leq 0$, $\psi(t) = 0$, para $t \geq 1$, $|\psi(t)| \leq 1, t \geq 0$ e para cada $j = 1, 2, \dots$ consideremos a função $\psi_j \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\psi_j(x) = \psi(|x| - j), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Se $\{\rho_n\}$ é uma sequência regularizante como a introduzida na página 33, e u é uma função definida quase-sempre em $\mathbb{R}^n$, definimos o seguinte operador

$$P_j u = \rho_j * (\psi_j u), \quad j = 1, 2, \dots$$

Afirmamos que quando restrito a $W^{m,p}(\Omega)$, $P_j : W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear limitado para cada $m = 1, 2, \dots$ com imagem em $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, temos

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(\rho_j * (\psi_j u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|(D^\alpha \rho_j) * (\psi_j u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|(D^\alpha \rho_j)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|(\psi_j u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|(D^\alpha \rho_j)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|(D^\alpha \rho_j)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Seja $c_j = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha \rho_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, então

$$\|P_j u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha P_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} c_j^p \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \tilde{c}_j^p \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Mostrando que $\|P_j\|_{\mathcal{L}(W^{m,p}(\mathbb{R}^n))} \leq \tilde{c}_j$.

Além disso, é claro que $P_j(W^{m,p}(\mathbb{R}^n)) \subset C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim deduzimos que se $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j u - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, escolhamos para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m$ um inteiro positivo j_α suficientemente grande tal que ¶

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B^{\mathbb{R}^n}(0, j_\alpha)} |(D^\alpha P_{j_\alpha} u - D^\alpha u)(\xi)|^p d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $j_0 = \max_{|\alpha| \leq m} j_\alpha$, então para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m$,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B^{\mathbb{R}^n}(0, j_0)} |(D^\alpha P_{j_0} u - D^\alpha u)(\xi)|^p d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

¶ $D^\alpha P_{j_\alpha} u, D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Portanto desde que

$$\begin{aligned} P_{j_0} u(x) &= (\rho_{j_0} * \psi_{j_0} u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{j_0}(\xi - x) \psi(|x| - j_0) u(x) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{j_0}(\xi - x) u(x) d\xi \\ &= (\rho_{j_0} * u)(x), \text{ sempre que } x \in B^{\mathbb{R}^n}(0, j_0), \end{aligned}$$

temos para $j > j_0$

$$P_j u = \rho_j * u \text{ em } B^{\mathbb{R}^n}(0, j_0).$$

Dessa forma para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m$ e $j > j_0$,

$$D^\alpha P_j u = D^\alpha (\rho_j * u) = \rho_j * (D^\alpha u) \rightarrow D^\alpha u, \text{ em } L^p(B^{\mathbb{R}^n}(0, j_0)).$$

Logo deve existir um índice $\tilde{j}_0 > j_0$ tal que se $|\alpha| \leq m$,

$$\int_{B^{\mathbb{R}^n}(0, \tilde{j}_0)} |(D^\alpha P_{\tilde{j}_0} - D^\alpha u)(\xi)|^p d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para $j > \tilde{j}_0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha P_j - D^\alpha u)(\xi)|^p d\xi &= \int_{B^{\mathbb{R}^n}(0, \tilde{j}_0)} |(D^\alpha P_j - D^\alpha u)(\xi)|^p d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^{\mathbb{R}^n}(0, \tilde{j}_0)} |(D^\alpha P_j - D^\alpha u)(\xi)|^p d\xi < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Uma vez que os operadores $P_j : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ e $P_j : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ são contínuos e satisfazem

$$P_j(L^p(\mathbb{R}^n)) \subset C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \text{ e } P_j(W^{1,p}(\mathbb{R}^n)) \subset C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

obtemos pelo Teorema de interpolação 3.7 que também

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j u - u\|_{T^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (3.22)$$

para todo $u \in T^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \theta < 1$.

Observemos que se o multi-índice α é tal que $|\alpha| \leq m$, então

$$D^\alpha P_j u = D^\alpha (\rho_j * (\psi_j u)) = \rho_j * D^\alpha (\psi_j u) = P_j D^\alpha u + \rho_j * \omega_j$$

$$\text{onde } \omega_j = \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \psi_j D^\beta u.$$

Como $\psi_j \rightarrow 1$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n$, obtemos para $u \in W^{|\alpha|,p}(\mathbb{R}^n)$ que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\omega_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Portanto se $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ vemos por (3.22) tomando $|\alpha| = m$, que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha P_j u - D^\alpha u\|_{T^{1-\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|P_j D^\alpha u + \rho_j * \omega_j - D^\alpha u\|_{T^{1-\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|P_j D^\alpha u - D^\alpha u\|_{T^{1-\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_j * \omega_j\|_{T^{1-\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|P_j D^\alpha u - D^\alpha u\|_{T^{1-\sigma,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_j * \omega_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^\sigma \|\rho_j * \omega_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\sigma} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

à medida que $j \rightarrow \infty$.

Logo

$$\|P_j u - u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\|P_j u - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha P_j u - D^\alpha u\|_{T^{1-\sigma,p}(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

o que mostra de fato o teorema. ■

Se Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$ e $W_o^{s,p}(\Omega)$ denota o fecho de $C_o^\infty(\Omega)$ em $W^{s,p}(\Omega)$, ($s \geq 0$) então definimos para cada $s < 0$ o espaço

$$W^{s,p}(\Omega) = \left[W_o^{-s,p^*}(\Omega) \right]',$$

onde $p^* = \frac{p}{p-1}$ é o expoente conjugado de p .

Do Teorema 3.16 vemos que $W_o^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, e da reflexibilidade de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ temos para cada número real s a caracterização

$$[W^{s,p}(\mathbb{R}^n)]' \cong W^{-s,p^*}(\mathbb{R}^n).$$

Muitas das propriedades dos espaços $W^{s,p}(\Omega)$ são por conveniência provados para $\Omega = \mathbb{R}^n$, e deduzidos para domínios mais gerais^{||} com o auxílio de operadores de extensão, definidos de Ω em $\mathbb{R}^n$, preservando propriedades diferenciais. Neste sentido motivamos a seguinte definição

Definição 3.17. *Dados Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ e números reais s, p com $1 < p < \infty$ um operador linear*

$$E : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

é dito um operador de extensão para Ω , se existe uma constante positiva K , tal que

- $Eu(x) = u(x)$ quase sempre em Ω ;
- $\|Eu\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.

^{||}algumas hipóteses adicionais a cerca da geometria do domínio são feitas

Um operador linear E mapeando funções definidas quase sempre em Ω em funções definidas quase sempre em $\mathbb{R}^n$ é dito um s -operador forte de extensão se para cada $1 < p < \infty$ e $0 \leq r \leq s$, a restrição de E a $W^{r,p}(\Omega)$ for um operador de extensão para Ω .

Definição 3.18. Um domínio Ω de $\mathbb{R}^n$ é dito ter a propriedade do segmento, se para todo $x \in \Omega$ existir uma vizinhança U_x de x em $\mathbb{R}^n$ e um vetor não nulo $y_x \in \mathbb{R}^n$, tais que se $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$ então o vetor $z + ty_x \in \Omega$ sempre que $0 < t < 1$.

Teorema 3.19. Se Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$ para o qual existe um $(m+1)$ -operador forte de extensão E , e $s = m + \sigma$ é um número real, onde m é um inteiro positivo e $0 < \sigma < 1$, então o conjunto das restrições a Ω de funções de $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço denso de $W^{s,p}(\Omega)$.

Demonstração: As conclusões do Teorema são válidas para os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ adicionando-se a hipótese de Ω possuir a propriedade do segmento (ver [1]). O restante da prova é similar à apresentada no Teorema 3.16, substituindo-se o operador P_j pelo novo operador

$$\tilde{P}_j u = R_\Omega P_j E u ,$$

onde u é definida q.s. em Ω e R_Ω é operador restrição (evidentemente contínuo) à Ω de funções definidas em $\mathbb{R}^n$. ■

Teorema 3.20. Se Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$ para o qual existe um $(m+1)$ -operador forte de extensão E , e suponhamos que para multi-índices α, γ com $|\gamma| \leq |\alpha| = m$ existam operadores lineares $E_{\alpha\gamma} \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^p(\mathbb{R}^n))$ tais que se $u \in W^{m,p}(\Omega)$, então

$$D^\alpha E u(x) = \sum_{|\gamma| \leq m} E_{\alpha\gamma} D^\gamma u(x) \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^n. \quad (3.23)$$

Se $s = m + \sigma$, então o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ coincide com o conjunto das restrições à Ω de funções em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Se $\sigma = 0$ então para $u \in W^{m,p}(\Omega)$ segue de (3.23) que $E u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, toda função $u \in W^{m,p}(\Omega)$ é a restrição de uma função em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, a saber $E u$.

Suponhamos agora $0 < \sigma < 1$. Se $u \in W^{s,p}(\Omega)$, então $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e portanto $E u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\|E u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K_1 \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq K_1 \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}. \quad (3.24)$$

Se $|\gamma| \leq m$, então pelo Teorema 3.6, segue que $D^\gamma u \in T^{1-\sigma,p}(\Omega)$ e ainda pela definição da norma em $W^{s,p}(\Omega)$, obtemos

- Se $|\gamma| = m$ então $\|D^\gamma u\|_{T^{1-\sigma,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.
- Se $|\gamma| < m$ então $D^\gamma u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, e assim

$$\begin{aligned} \|D^\gamma u\|_{T^{1-\sigma,p}(\Omega)} &\leq \widetilde{K}_1 \|D^\gamma u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^\sigma \|D^\gamma u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\sigma} \\ \widetilde{K}_1 &\leq \|D^\gamma u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^\sigma \|D^\gamma u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{1-\sigma} \leq \widetilde{K}_1 \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|D^\gamma u\|_{T^{1-\sigma,p}(\Omega)} \leq K_2 \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \quad (3.25)$$

sempre que $|\gamma| \leq m$.

Desde que os operadores $E_{\alpha,\gamma} \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^p(\mathbb{R}^n))$ segue novamente do Teorema de interpolação 3.7 que $E_{\alpha,\gamma} \in \mathcal{L}(T^{1-\sigma}(\Omega), T^{1-\sigma}(\mathbb{R}^n))$.

Portanto obtemos de (3.23) e (3.25), para $|\alpha| = m$ que

$$\|D^\alpha Eu\|_{T^{1-\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{|\gamma| \leq m} \|E_{\alpha,\gamma} D^\gamma u\|_{T^{1-\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{|\gamma| \leq m} K_{\alpha,\gamma} \|D^\gamma u\|_{T^{1-\sigma}(\Omega)} \leq K_3 \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

e de (3.24)

$$\|Eu\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K_4 \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

mostrando ser u de fato a restrição à Ω de $Eu \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, o operador R_Ω , restrição à Ω , é por definição contínuo de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ para todo inteiro positivo m , e dessa forma, também através do Teorema de interpolação 3.7, contínuo de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ em $W^{s,p}(\Omega)$. Assim a restrição $R_\Omega u$ de $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ pertence a $W^{s,p}(\Omega)$, concluindo a prova do lema. ■

Observação 3.21. A existência dos operadores nas hipóteses do Teorema 3.20 é garantida sob certas restrições à geometria do domínio Ω (ver [1]).

Corolário 3.22. Nas hipóteses do Teorema 3.20, o operador de extensão E é contínuo de $W^{s,p}(\Omega)$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ qualquer que seja $0 \leq s \leq m$. ■

3.4 Uma norma intrínseca para $W^{s,p}(\Omega)$

Nesta seção investigaremos a possibilidade de construirmos uma nova norma em $W^{s,p}(\Omega)$, $s \geq 0$, que seja equivalente à “norma do traço” mas que seja expressa “intrinsecamente” em termos das propriedades dos elementos envolvidos.

Por conveniência iniciaremos com o caso $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Seguindo Lions e Magenes (ver [22]) definiremos um espaço $\tilde{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ cuja norma é dada intrinsecamente através de seus elementos, e então, ao menos para domínios Ω suficientemente regulares, mostraremos que os espaços $\tilde{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ e $W^{s,p}(\Omega)$ coincidem.

Definição 3.23. *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ e números reais $0 < \theta = \frac{1}{p} + \nu$, com $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais a norma*

$$\|u\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n-1+(1-\nu)p}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.26)$$

é finita.

Teorema 3.24. *O espaço $\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ coincide com o espaço $T^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ e suas normas são equivalentes.*

Demonstração: Denotemos a norma dada em 3.26 por $\|\cdot\|_{\tilde{T}}$. A norma de um elemento $u \in T^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ como foi definida é a norma do espaço traço $T(p, \nu, W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$, a qual pelo Exemplo 3.15, pode ser substituída equivalentemente pela norma

$$\|u\|_T = \left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \sum_{j=1}^n \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_n)|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Seja $u \in T^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$, mostraremos agora que $u \in \tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante positiva K tal que $\|u\|_{\tilde{T}} \leq K \|u\|_T$.

Da identidade

$$u(x) - u(y) = \sum_{j=1}^n u(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - u(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n),$$

fazendo $\lambda = \frac{1}{2}(n-1+(1-\nu)p)$, e após sucessivas desigualdades do tipo Young segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n-1+(1-\nu)p}} dx dy \leq K_1 \sum_{j=1}^n Q_j$$

onde

$$Q_j = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - u(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n)|^p}{(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)^\lambda},$$

que por sua vez pode ser escrito na forma

$$Q_j = \int_{\mathbb{R}^j} dy_1 \cdots dy_j \int_{\mathbb{R}^{n+1-j}} dx_j \cdots dx_n |u(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_n) - u(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n)|^p R_j \quad (3.27)$$

onde

$$R_j = \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \int_{\mathbb{R}^{j-1}} \frac{dx_1 \cdots dx_{j-1} dy_{j+1} \cdots dy_n}{(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)^\lambda}.$$

Usando agora a mudança de coordenadas polares (ver [15]),

$$\rho^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{j-1} - y_{j-1})^2 + (x_{j+1} - y_{j+1})^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2,$$

obtemos a seguinte estimativa para R_j

$$\begin{aligned} R_j &= K_2 \left(\int_0^{|x_j - y_j|} + \int_{|x_j - y_j|}^\infty \right) \frac{\rho^{n-2}}{(\rho^2 + (x_j - y_j)^2)^\lambda} d\rho \\ &\leq \frac{K_2}{(x_j - y_j)^{2\lambda}} \int_0^{|x_j - y_j|} \rho^{n-2} d\rho + K_2 \int_{|x_j - y_j|}^\infty \rho^{n-2-2\lambda} d\rho \\ &= \frac{K_2}{(x_j - y_j)^{2\lambda}} \left[\frac{\rho^{n-1}}{n-1} \right]_0^{|x_j - y_j|} + K_2 \left[\frac{\rho^{n-1-2\lambda}}{n-1-2\lambda} \right]_{|x_j - y_j|}^\infty = K_3 |x_j - y_j|^{(v-1)p}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

uma vez que $\lambda > 0$ e $n-1-2\lambda < 0$.

Ao fazermos a mudança de variáveis

$$z_i = \begin{cases} y_i & \text{se } 1 \leq i \leq j \\ t + y_j & \text{se } i = j \\ x_i & \text{se } j+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

na desigualdade (3.28), e usando a expressão para Q_j obtida em (3.27), vemos que

$$\begin{aligned} Q_j &= \int_{\mathbb{R}^j} dy_1 \cdots dy_j \int_{\mathbb{R}^{n+1-j}} dx_j \cdots dx_n |u(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_n) - u(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n)|^p R_j \\ &\leq K_3 \int_{-\infty}^\infty t^{(v-1)p} dt \int_{\mathbb{R}^n} |u(z_1, \dots, z_j + t, z_{j+1}, \dots, z_n) - u(z_1, \dots, z_n)|^p dz \\ &\leq 2K_3 \int_0^\infty t^{(v-1)p} dt \int_{\mathbb{R}^n} |u(z_1, \dots, z_j + t, z_{j+1}, \dots, z_n) - u(z_1, \dots, z_n)|^p dz \leq \infty, \end{aligned}$$

obtendo $u \in \tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ com $\|u\|_{\tilde{T}} \leq K_4 \|u\|_T$.

Reciprocamente, suponhamos $u \in \tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$, $z' = (z_2, z_3, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, ao integrarmos a desigualdade**

$$|u(x_1 + t, x') - u(x_1, x')|^p \leq K_5 (|u(x_1 + t, x') - u(x_1 + \frac{t}{2}, z')|^p + |u(x_1 + \frac{t}{2}, z') - u(x_1, x')|^p)$$

** obtida após sucessivas desigualdades do tipo Young

em relação a z' , sobre o disco $D^{\mathbb{R}^{n-1}}(x', \frac{t}{2})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, obtemos

$$|u(x_1 + t, x') - u(x_1 + \frac{t}{2}, x')|^p \leq \frac{K_6}{t^{n-1}} (I_t(t, x) + I_t(0, x)),$$

onde

$$I_t(s, x) = \int_{D^{\mathbb{R}^{n-1}}(x', \frac{t}{2})} |u(x_1 + s, x') - u(x_1 + \frac{t}{2}, x')|^p$$

para $s = 0$ ou $s = t$.

Agora

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{(v-1)p} dt \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{n-1}} I_t(t, x) dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^\infty \frac{1}{t^{2\lambda}} dt \int_{D^{\mathbb{R}^{n-1}}(x', \frac{t}{2})} dz' \int_{-\infty}^\infty |u(x_1 + t, x') - u(x_1 + \frac{t}{2}, z')|^p dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^\infty \frac{1}{t^{2\lambda}} dt \int_{D^{\mathbb{R}^{n-1}}(x', \frac{t}{2})} dz' \int_{-\infty}^\infty |u(x_1, x') - u(x_1 - \frac{t}{2}, z')|^p dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dz' \int_{2|x'-z'|}^\infty \frac{1}{t^{2\lambda}} \frac{|u(x_1, x') - u(x_1 - \frac{t}{2}, z')|^p}{t^{2\lambda}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dz' \int_{-\infty}^{x_1 - |z' - x'|} \frac{|u(x) - u(z)|^p}{(2(x_1 - z_1))^{2\lambda}} dz_1 \\ &\leq \frac{1}{2^{\lambda+1}} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(z)|^p}{|x - z|^{2\lambda}} dz, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} = |x_1 - z_1| &\geq |x' - z'| = ((x_2 - z_2)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow 2|x_1 - z_1|^2 \geq (x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2 = |x - z|^2. \end{aligned}$$

De maneira similar temos uma desigualdade análoga pra $I_t(0, x)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{(v-1)p} dt \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{n-1}} I_t(0, x) dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^\infty \frac{1}{t^{2\lambda}} dt \int_{D^{\mathbb{R}^{n-1}}(x', \frac{t}{2})} dz' \int_{-\infty}^\infty |u(x_1, x') - u(x_1 + \frac{t}{2}, z')|^p dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dz' \int_{2|z' - x'|}^\infty \frac{|u(x_1, x') - u(x_1 + \frac{t}{2}, z')|^p}{t^{2\lambda}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dz' \int_{x_1 + |x' - z'|}^\infty \frac{|u(x) - u(z)|^p}{(2x_1 - 2z_1)^{2\lambda}} dz \\ &\leq \frac{1}{2^{\lambda+1}} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(z)|^p}{|x - z|^{2\lambda}} dz. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty t^{(v-1)p} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_n)|^p dx dt \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(z)|^p}{|x - z|^{n-1+(1-v)p}} dx dz.$$

Desigualdades similares se verificam para as outras variáveis $x_2, x_3, \dots, x_n$ e as combinando obtemos

$$\|u\|_T \leq \tilde{K} \|u\|_{\tilde{T}},$$

concluindo dessa forma a prova do teorema. ■

Definição 3.25. Se ϕ é uma aplicação injetora definida em um domínio Ω de $\mathbb{R}^n$ sobre um domínio Γ de $\mathbb{R}^n$ com inversa ϕ^{-1} , dizemos que ϕ é uma aplicação m -suave se as funções coordenadas $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ e $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ de ϕ e ϕ^{-1} respectivamente pertencem a $C^m(\overline{\Omega})$ e $C^m(\overline{\Gamma})$, respectivamente.

Definição 3.26. Um domínio Ω de $\mathbb{R}^n$ possui a propriedade de C^m -regularidade uniforme se existem uma cobertura aberta, enumerável e localmente finita $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de sua fronteira $\partial\Omega$, e uma sequência $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de transformações m -suaves e injetoras, $\phi_j : U_j \rightarrow B^{\mathbb{R}^n}(0, 1)$, tais que

- Existe $\delta > 0$, tal que $\bigcap_{j=1}^{\infty} \phi^{-1}(B^{\mathbb{R}^n}(0, \frac{1}{2})) \supset \Omega_\delta$, onde $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$
- Existe um inteiro positivo m tal que toda coleção contendo $m+1$ conjuntos da cobertura $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ possui intersecção vazia
- Para cada j , $\phi_j(U_j \cup \Omega) = \{x \in B^{\mathbb{R}^n}(0, 1) : x_n > 0\}$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Se $(\phi_{j,1}, \phi_{j,2}, \dots, \phi_{j,n})$ e $(\psi_{j,1}, \psi_{j,2}, \dots, \psi_{j,n})$ denotam as componentes de ϕ_j e ψ_j respectivamente, então existe uma constante positiva M tal que para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$, e $1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned} |D^\alpha \phi_{j,i}(x)| &\leq M, & x \in U_j \\ |D^\alpha \psi_{j,i}(x)| &\leq M, & x \in B^{\mathbb{R}^n}(0, 1). \end{aligned}$$

No que segue diremos apenas que o domínio Ω é um domínio C^m -regular em $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.27. Se Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$ tal que

- $\Omega = \mathbb{R}^n$, ou
- Ω é um semi-espaço de $\mathbb{R}^n$, ou
- Ω é um domínio C^1 -regular cuja fronteira é limitada,

então existe um operador linear $E : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, tal que se $u \in L^p(\Omega)$, então

$$Eu(x) = u(x), \quad \text{q. s. em } \Omega.$$

Adicionalmente, se $0 < \theta < 1$, para $u \in \tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ tem-se $Eu \in \tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ com

$$\|Eu\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K \left\| \tilde{T}^{\theta,p}(\Omega) \right\|,$$

onde K é uma constante positiva independente de u .

Demonstração: Iniciemos supondo Ω um semi-espço de $\mathbb{R}^n$, sem perda de generalidade, podemos supor (a menos de rotações) $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

Se $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $u \in L^p(\Omega)$, consideremos o operador definido em $L^p(\Omega)$

$$Eu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{q. s. em } \Omega \\ u(x', -x_n) & \text{q. s. em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Logo

$$\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \left(\int_0^\infty |u(x)|^p dx_n + \int_{-\infty}^0 |u(x', -x_n)|^p dx_n \right) = 2 \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Por conveniência de notação façamos $2\lambda = n - 1 + (1 - \nu)p$, de forma a obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|Eu(x) - Eu(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx dy = I_{++} + I_{+-} + I_{-+} + I_{--},$$

onde

$$\begin{aligned} I_{++} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx dy; \\ I_{+-} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{|u(x) - u(y', -y_n)|^p}{(|x' - y'|^2 + (x_n - y_n)^2)^\lambda} dy_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|u(x) - u(y)|^p}{(|x' - y'|^2 + (x_n + y_n)^2)^\lambda} dy_n \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx dy, \end{aligned}$$

com a última desigualdade proveniente de $(x_n + y_n)^2 \geq (x_n - y_n)^2$, quando $x_n, y_n \geq 0$.

Desigualdades similares se verificam para I_{-+} e I_{--} , e portanto

$$\|Eu\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 4^{\frac{1}{p}} \|u\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)}.$$

Suponhamos agora que Ω seja um domínio C^1 -regular em $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira é limitada. Assim a cobertura aberta $\{U_j\}$ de $\partial\Omega$ e a correspondente coleção $\{\phi_j\}$ de aplicações 1-suaves, como na Definição 3.26, são ambas coleções finitas, digamos $1 \leq j \leq N$, além disso, podemos supor que os conjuntos U_j são limitados.

Seja U_0 um subconjunto aberto de Ω limitado “longe” da fronteira $\partial\Omega$, tal que $\Omega \subset \bigcup_{j=0}^N U_j$. Consideremos também $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma partição da unidade para Ω subordinada a $\{U_j\}$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Para $u \in L^p(\Omega)$, definimos a função u_j quase sempre em Ω por

$$u_j(x) = \omega_j(x)u(x).$$

Claramente $u_j \in L^p(\Omega)$ com $\|u_j\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Agora se $u \in \tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$, então para $1 \leq j \leq N$, usando a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |\omega_j(x)u(x) - \omega_j(y)u(y)|^p &\leq (|\omega_j(x)u(x) - \omega_j(x)u(y)| + |\omega_j(x)u(y) - \omega_j(y)u(y)|)^p \\ &\leq K_1 (|\omega_j(x)u(x) - \omega_j(x)u(y)|^p + |u(y)|^p |\omega_j(x) - \omega_j(y)|^p) \\ &\leq K_1 (|u(x) - u(y)|^p + |u(y)|^p |\omega_j(x) - \omega_j(y)|^p), \end{aligned}$$

obtida após sucessivas desigualdades do tipo Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx dy &\leq K_1 \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega \cap U_j} |u(y)|^p dy \int_{U_j} \frac{|\omega_j(x) - \omega_j(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx \right). \end{aligned}$$

Sendo U_j limitado, temos do Lema A.6, para $y \in \Omega \cap U_j$,

$$\int_{U_j} \frac{|\omega_j(x) - \omega_j(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx \leq K_2 \int_{U_j} |x - y|^{p+1-n} dx \leq K_3,$$

onde K_3 pode ser tomado independente de $j = 1, 2, \dots, N$.

Portanto $u_j \in \tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ com

$$\|u_j\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)} \leq K_4 \|u\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)}. \quad (3.29)$$

Uma vez que $\omega_0(x) = 1$ para todo $x \in \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^N U_j$, segue que (3.29) é também válida para u_0 .

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_0(x) - u_0(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx dy &\leq K_1 \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} |u(y)|^p dy \int_{\Omega} \frac{|\omega_0(x) - \omega_0(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx \right) \\ &\leq K_1 \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} |u(y)|^p dy \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \frac{|\omega_0(x) - \omega_0(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx \right) \end{aligned}$$

e obtemos (3.29) dos argumentos utilizados anteriormente.

Consideremos agora para $1 \leq j \leq N$, a função v_j definida em $\mathbb{R}_+^n$ por

$$v_j(\xi) = \begin{cases} u_j \circ \phi_j^{-1}(y) & \text{se } \xi \in B^{\mathbb{R}^n}(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^n \\ 0 & \text{se } \xi \in \mathbb{R}_+^n \setminus B^{\mathbb{R}^n}(0, 1). \end{cases}$$

Afirmamos que $v_j \in \tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}_+^n)$. De fato, colocando $\xi = \phi_j(x)$ e $\eta = \phi_j(y)$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|v_j(\xi) - v_j(\eta)|^p}{|\xi - \eta|^{2\lambda}} d\xi d\eta &= \int_{B^{\mathbb{R}^n}(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n} \int_{B^{\mathbb{R}^n}(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n} \frac{|u_j(\phi_j^{-1}(\xi)) - u_j(\phi_j^{-1}(\eta))|^p}{|\xi - \eta|^{2\lambda}} d\xi d\eta \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^p}{|\phi_j(x) - \phi_j(y)|^{2\lambda}} |\det \phi_j'(x)| |\det \phi_j'(y)| dx dy \\ &\leq K_5 \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^p}{|x - y|^{2\lambda}} dx dy < \infty, \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde a última desigualdade é obtida devido à $|\det \phi_j'|$ ser limitado e a ϕ^{-1} ser 1-suave em $B^{\mathbb{R}^n}(0,1)$, nos fornecendo

$$|x - y| = |\phi_j^{-1}(\xi) - \phi_j^{-1}(\eta)| \leq K_6 |\xi - \eta| = K_6 |\phi_j(x) - \phi_j(y)|.$$

A desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |v_j(\xi)|^p d\xi = \int_{B^{\mathbb{R}^n}(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n} |u_j(\phi_j^{-1}(\xi))|^p d\xi \leq \int_{\Omega} |u_j(x)|^p |\det \phi_j'(x)| dx \leq K_7 \|u_j\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}^p$$

mostra que

$$\|u_j\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq K_8 \|u_j\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)}.$$

Agora, se E é o operador definido na prova do caso anterior, temos que $Ev_j \in \tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ com

$$\|Ev_j\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K_9 \|v_j\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Observemos também, que $\text{supp } Ev_j \subset B^{\mathbb{R}^n}(0,1)$. Assim definimos a função w_j quase sempre em $\mathbb{R}^n$ por

$$w_j(x) = \begin{cases} Ev_j(\phi(x)) & \text{se } x \in U_j \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus U_j, \end{cases}$$

claramente $w_j(x) = u_j(x)$ q. s. em Ω , $\text{supp } w_j \subset \subset U_j$ e por cálculos similares aos feitos em (3.30), $w_j \in \tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ com

$$\|w_j\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K_{10} \|Ev_j\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalmente ao definirmos o operador

$$\tilde{E}u(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^N w_j(x),$$

obtemos todas as conclusões do lema. ■

Corolário 3.28. *Nas hipóteses do Lema 3.27 os espaços $\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ e $T^{\theta,p}(\Omega)$ coincidem algébrica e topologicamente.*

Demonstração: A coincidência algébrica é derivada do Teorema 3.24 uma vez que os espaços $\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ e $T^{\theta,p}(\Omega)$ são constituídos de restrições à Ω de funções em $\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ e $T^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ respectivamente. Além disso se $u \in \tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$, e E é o operador de extensão dado no Lema 3.27, então

$$\|u\|_{T^{\theta,p}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{T^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K_1 \|Eu\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K_2 \|u\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)} .$$

As hipóteses a respeito de Ω nos garantem a existência (ver [1]) de um 1-operador forte de extensão para Ω , como no Teorema 3.20. Assim se $\tilde{E}$ é tal operador, segue da prova desse mesmo teorema, que para $u \in \tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)} \leq \|\tilde{E}u\|_{\tilde{T}^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{K}_1 \|\tilde{E}u\|_{T^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{K}_2 \|u\|_{T^{\theta,p}(\Omega)} .$$

■

Se $s \geq 0$ é um número real e Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$, consideremos o espaço $\tilde{W}^{s,p}(\Omega)$ construído exatamente da mesma forma que o espaço $W^{s,p}(\Omega)$, porém usando na sua construção o espaço $\tilde{T}^{\theta,p}(\Omega)$ ao invés do espaço $T^{\theta,p}(\Omega)$.

Em vista do Corolário 3.28, fica provado o seguinte teorema

Teorema 3.29. *Se Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$ tal que*

- $\Omega = \mathbb{R}^n$, ou
- Ω é um semi-espaço de $\mathbb{R}^n$, ou
- Ω é um domínio C^1 -regular cuja fronteira é limitada,

então os espaços $\tilde{W}^{s,p}(\Omega)$ e $W^{s,p}(\Omega)$ coincidem algébrica e topologicamente para todo $s \geq 0$.

Em particular, se $s = m + \sigma$, onde $m \geq 0$ é um inteiro e $0 < \sigma < 1$, então a norma em $\tilde{W}^{s,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{\tilde{W}^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

é equivalente à norma original $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ em $W^{s,p}(\Omega)$.

3.5 Teoremas de Imersão

Mostraremos agora que teoremas de imersão para os espaços $W^{s,p}(\Omega)$ podem ser obtidos a partir dos teoremas usuais de imersão de Sobolev através do Teorema de Interpolação 3.7.

Definição 3.30. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e B_1 uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ disjunta de x , se $r > 0$ é tal que $B^{\mathbb{R}^n}(0, r) \cap B_1 = \emptyset$, ao conjunto

$$\mathcal{C}_x = B_1 \cap \left\{ x + \lambda(y - x) : y \in B^{\mathbb{R}^n}(0, r), \lambda > 0 \right\}$$

denominamos cone finito em $\mathbb{R}^n$ com vértice em x .

Um domínio Ω em $\mathbb{R}^n$ possui a propriedade do cone, se existe um cone finito $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, tal que para cada $x \in \Omega$, existe um cone finito $\mathcal{C}_x$ inteiramente contido em Ω , com vértice em x , congruente^{††} a $\mathcal{C}$.

Teorema 3.31. Se Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a propriedade do cone, então para $s > 0$ e $1 < p < n$

(i) Se $n > sp$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $p \leq r \leq \frac{np}{n-sp}$.

(ii) Se $n = sp$, então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $p \leq r < \infty$.

(iii) Se $n < (s-j)p$ para algum inteiro não negativo j , então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$,

onde $C_B^j(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega) : \exists K > 0, |D^\alpha u(x)| \leq K, x \in \Omega, |\alpha| \leq j\}$.

Demonstração: Este teorema para valores inteiros de s é usual e será suposto conhecido. Assim, supomos $s = m + \sigma$, onde m é um inteiro não negativo e $0 \leq \sigma \leq 1$.

(i)

Suponhamos inicialmente $m = 0$. Logo

$$W^{\sigma,p}(\Omega) = L^p(\Omega) \cap T^{1-\sigma,p}(\Omega) = L^p(\Omega) \cap T(p, 1 - (\sigma + \frac{1}{p}), W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)).$$

Dos teoremas usuais de imersão de Sobolev (caso inteiro), temos que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ e trivialmente $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Do Teorema de Interpolação 3.7 segue

$$T(p, 1 - (\sigma + \frac{1}{p}), W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)) \hookrightarrow T(p, 1 - (\sigma + \frac{1}{p}), L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), L^p(\Omega))$$

e agora pelo Teorema 3.11

$$T(p, 1 - (\sigma + \frac{1}{p}), L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), L^p(\Omega)) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-\sigma p}}(\Omega)$$

uma vez que $\frac{(1-(1-\sigma))(n-p)}{np} + \frac{1-\sigma}{p} = \frac{n-\sigma p}{np}$. Portanto

$$T(p, 1 - (\sigma + \frac{1}{p}), W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-\sigma p}}(\Omega)$$

^{††}por congruência entendemos movimento rígido.

o que implica

$$W^{\sigma,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-\sigma p}}(\Omega).$$

Agora se m é um inteiro positivo, para todo $u \in W^{m+\sigma,p}(\Omega)$ temos

- Se $|\alpha| = m$, então $D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-\sigma p}}$,
- Se $|\alpha| \leq m-1$, então $D^\alpha u \in W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-\sigma p}}$, visto que $p \leq \frac{np}{n-\sigma p} \leq \frac{np}{n-p}$.

o que implica naturalmente que $W^{m+\sigma,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,\frac{np}{n-\sigma p}}(\Omega)$.

Logo se $n > sp > mp$ temos diretamente dos teoremas clássicos de Sobolev

$$W^{m,\frac{np}{n-\sigma p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-\sigma p}}(\Omega)$$

visto que $p \leq \frac{np}{n-\sigma p} \leq \frac{np}{n-sp}$, provando assim o item (i).

(ii)

Se $n = sp$, por um lado, dos teoremas de Sobolev, obtemos

$$W^{m,\frac{sp}{m}}(\Omega) = W^{m,\frac{np}{n-\sigma p}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad \frac{sp}{m} \leq r < \infty.$$

Por outro lado, como $\frac{sp}{m} > p$

$$W^{m,\frac{sp}{m}}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p} \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad p \leq r \leq \frac{np}{n-mp} = \frac{sp}{\sigma} \leq \frac{sp}{m}$$

o que prova (ii).

A prova de (iii) segue diretamente dos Teoremas de Sobolev, uma vez que se $(s-j)p > n$, para algum inteiro não negativo j então

$$(m-j)p + \sigma p > n \Rightarrow (m-j)p > (n - \sigma p) \Rightarrow \frac{(m-j)np}{n - \sigma p} > n.$$

■

Espaços de Interpolação

Neste capítulo introduzimos algumas noções básicas e discutimos, sem muitos detalhes, alguns dos resultados gerais a respeito da teoria dos espaços de interpolação abstratos. As notações e resultados aqui apresentados são particularizações de uma teoria bem mais geral. Nosso intuito é apenas desenvolver a teoria de interpolação como uma ferramenta para a abordagem de aplicações relativas a problemas parabólicos semilineares, portanto não tentaremos obter resultados gerais, e sim, desenvolver o estritamente necessário para a aplicação nessa classe de problemas. Por esta razão não iniciamos a exposição pelos teoremas clássicos de Riesz-Thorin e Marcinkiewicz que deram origem aos métodos de interpolação real e complexo. Além disso adotamos a perspectiva de não privilegiar esse ou aquele método de interpolação, não apresentando, dessa forma, a construção de nenhum deles. Apresentamos assim um resumo bastante sucinto do que necessitamos para desenvolver as próximas seções como cabe a uma ferramenta. Para mais referências na evolução da teoria sugerimos textos como [5] ou [35] onde a teoria dos espaços de interpolação é desenvolvida com fim em si mesma.

4.1 Propriedades dos Espaços de Interpolação

4.1.1 Categorias e Funtores

Nesta seção resumimos algumas noções gerais, que necessitaremos no decorrer deste trabalho. Um tratamento mais detalhado pode ser encontrado por exemplo em [5, 31].

Fixado um corpo $\mathbb{K}$, denotaremos por $\mathfrak{B}$ a categoria dos espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Assim os objetos de $\mathfrak{B}$ são os espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$, os morfismos de $\mathfrak{B}$ são os operadores lineares limitados, e a composição é a composição usual entre operadores.

Sejam A_0 e A_1 dois espaços de Banach. Diremos que $\bar{A} = (A_0, A_1)$ é um *par admissível de espaços de Banach* se $A_1 \xhookrightarrow{d} A_0$. Ressaltamos que ao nos referirmos a um par, este será um par admissível de espaços de Banach.

Seja $\mathfrak{B}_1$ a categoria de todos os pares admissíveis de espaços de Banach. Os morfismos de $\mathfrak{B}_1$ são elementos $A \in \mathcal{L}(E_0 + E_1, F_0 + F_1)$ satisfazendo

$$A \in \mathcal{L}(E_0, F_0) \cap \mathcal{L}(E_1, F_1),$$

onde (E_0, E_1) e (F_0, F_1) são pares admissíveis de espaços de Banach. A composição é a composição usual entre operadores. Escrevemos $A : (E_0, E_1) \rightarrow (F_0, F_1)$ se (E_0, E_1) e (F_0, F_1) são pares admissíveis de espaços de Banach e A é um morfismo de $\mathfrak{B}_1$.

Por um *funtor* F de $\mathfrak{B}_1$ em $\mathfrak{B}$, entendemos uma regra que associa a cada par $\bar{A} = (A_0, A_1) \in \mathfrak{B}_1$, um elemento $F(\bar{A}) \in \mathfrak{B}$, de forma que para todo morfismo $T : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ de $\mathfrak{B}_1$, corresponda uma transformação linear limitada $F(T) : F(\bar{A}) \rightarrow F(\bar{B})$ de $\mathfrak{B}$ e

$$F(ST) = F(S)F(T) \tag{4.1}$$

$$F(I_A) = I_{F(A)}, \tag{4.2}$$

onde S, T são morfismos de $\mathfrak{B}_1$ e I_A denota a identidade para todo par $(A, A) \in \mathfrak{B}_1$.

4.1.2 Espaços de Interpolação

Nossa intenção agora é definir dois funtores básicos de $\mathfrak{B}_1$ em $\mathfrak{B}$, os quais serão denotados por Σ e Δ respectivamente.

Escrevemos $\Sigma(T) = \Delta(T) = T$, para todo morfismo T em $\mathfrak{B}_1$, e definimos os espaços associados

$$\Delta(\bar{A}) = A_0 \cap A_1 = A_0, \quad (4.3)$$

munido da norma

$$\|a\|_{\Delta(\bar{A})} = \max\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\}, \quad (4.4)$$

e também

$$\Sigma(\bar{A}) = A_0 + A_1 = A_0, \quad (4.5)$$

munido da norma

$$\|a\|_{\Sigma(\bar{A})} = \inf_{a=a_0+a_1} \{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\}. \quad (4.6)$$

Sendo as normas (4.4) e (4.6) equivalentes às normas $\|\cdot\|_{A_1}$ e $\|\cdot\|_{A_0}$ respectivamente, vemos que de fato Σ e Δ são funtores de $\mathfrak{B}_1$ em $\mathfrak{B}$, os quais são ditos *funtores básicos de $\mathfrak{B}_1$ em $\mathfrak{B}$* .

Escrevendo $\|T\|_{A,B}$ para a norma da transformação $T : A \rightarrow B$, concluímos que

$$\|T\|_{\Sigma(\bar{A}), \Sigma(\bar{B})} \leq \max\{\|T\|_{A_0, B_0}, \|T\|_{A_1, B_1}\}$$

e

$$\|T\|_{\Delta(\bar{A}), \Delta(\bar{B})} \leq \max\{\|T\|_{A_0, B_0}, \|T\|_{A_1, B_1}\}.$$

Definição 4.1. *Seja $\bar{A} = (A_0, A_1)$ um par em $\mathfrak{B}_1$. Então $A \in \mathfrak{B}$ é chamado um espaço intermediário entre A_0 e A_1 (ou com respeito a $\bar{A}$) se*

$$\Delta(\bar{A}) = A_1 \xhookrightarrow{d} A \xhookrightarrow{d} A_0 = \Sigma(\bar{A}). \quad (4.7)$$

O espaço A é chamado um espaço de interpolação entre A_0 e A_1 (ou relativamente a $\bar{A}$) se adicionalmente

$$T : \bar{A} \rightarrow \bar{A} \text{ implica } T \in \mathcal{L}(A). \quad (4.8)$$

Mais geralmente, sejam $\bar{A}$ e $\bar{B}$ dois pares em $\mathfrak{B}_1$. Dizemos que dois espaços A e B são espaços de interpolação relativamente a $\bar{A}$ e $\bar{B}$, se A e B são espaços intermediários relativamente a $\bar{A}$ e $\bar{B}$ respectivamente e

$$T : \bar{A} \rightarrow \bar{B} \text{ implica } T \in \mathcal{L}(A, B). \quad (4.9)$$

Observação 4.2. *Observamos que se A e B são espaços de interpolação com respeito a $\bar{A}$ e $\bar{B}$, então em geral não se tem que A é um espaço de interpolação com respeito a $\bar{A}$ ou que B é um espaço de interpolação com respeito a $\bar{B}$.*

Observemos que (4.9) significa que se $T : A_0 \rightarrow B_0$ e $T : A_1 \rightarrow B_1$ então $T : A \rightarrow B$.

Claramente $\Delta(\bar{A})$ e $\Delta(\bar{B})$ são espaços de interpolação com respeito a $\bar{A}$ e $\bar{B}$. O mesmo é verdade para $\Sigma(\bar{A})$ e $\Sigma(\bar{B})$. Se $A = \Delta(\bar{A})$ (ou $\Sigma(\bar{A})$) e $B = \Delta(\bar{B})$ (ou $\Sigma(\bar{B})$) então temos evidentemente

$$\|T\|_{A,B} \leq \max\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\}. \quad (4.10)$$

Em geral, se (4.10) vale dizemos que A e B são *espaços de interpolação exatos*. Entretanto em muitos casos só é possível provar

$$\|T\|_{A,B} \leq C \max\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\}. \quad (4.11)$$

Nestes casos dizemos que A e B são *espaços de interpolação uniformes*. De fato, o Teorema 4.4 nos diz que A e B são espaços de interpolação se e somente se (4.11) é válido, isto é, (4.9) e (4.11) são equivalentes. Também, (4.8) e (4.11) são equivalentes para $\bar{B} = \bar{A}$, $B_i = A_i$, $i = 0, 1$.

Os espaços de interpolação A e B são ditos de *expoente* θ , ($0 \leq \theta \leq 1$) se

$$\|T\|_{A,B} \leq C \|T\|_{A_0,B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1,B_1}^{\theta}. \quad (4.12)$$

Em particular se $C = 1$, dizemos que A e B são *exatos e de expoente* θ .

Agora discutimos algumas propriedades elementares de espaços de interpolação.

Teorema 4.3. *Sejam $\bar{X} = (X_0, X_1)$ e $\bar{A} = (A_0, A_1)$ pares de espaços de Banach.*

- (i) *Suponhamos X_0 e X_1 espaços de interpolação (exatos) relativamente a $\bar{A}$ e seja X um espaço de interpolação (exato) relativamente a $\bar{X} = (X_0, X_1)$. Então X é um espaço de interpolação (exato) relativamente a $\bar{A}$.*
- (ii) *Suponhamos X_0 e X_1 espaços de interpolação (exatos) de expoente θ_0 e θ_1 relativamente a $\bar{A}$, respectivamente e X um espaço de interpolação (exato) de expoente η relativamente a $\bar{X}$. Então X é um espaço de interpolação (exato) de expoente θ relativamente a $\bar{A}$ contanto que*

$$\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1.$$

Demonstração: Para provarmos (i) basta observarmos que

$$A_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_0 \hookrightarrow A_1$$

e se $T : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$, então $T \in \mathcal{L}(\bar{X})$ e dessa forma $T \in \mathcal{L}(X)$.

Em (ii) observando que X é um espaço de interpolação relativamente a $\bar{A}$, pelo item anterior, basta então mostrarmos que $\|T\|_X \leq c \|T\|_{A_0}^{1-\eta} \|T\|_{A_1}^\eta$. De fato, desde que são válidas as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}\|T\|_{X_0} &\leq c_1 \|T\|_{A_0}^{1-\theta_1} \|T\|_{A_1}^{\theta_1}, \\ \|T\|_{X_1} &\leq c_2 \|T\|_{A_0}^{1-\theta_2} \|T\|_{A_1}^{\theta_2}, \\ \|T\|_X &\leq c_3 \|T\|_{X_0}^{1-\eta} \|T\|_{X_1}^\eta,\end{aligned}$$

então segue trivialmente a afirmação acima com $c = c_1 c_2 c_3$. ■

Teorema 4.4. *Se A e B são espaços de interpolação relativamente aos pares $\bar{A}$ e $\bar{B}$ respectivamente, então A e B são espaços de interpolação uniforme.*

Demonstração: Consideremos L constituído por todos os morfismos T de $\mathfrak{B}_1$ tais que $T : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$.

Sobre L introduzimos os seguintes funcionais

$$\|T\|_1 = \max\{\|T\|_{A,B}, \|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\} \text{ e } \|T\|_2 = \max\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\}.$$

É de fácil verificação que $(L, \|\cdot\|_1)$ e $(L, \|\cdot\|_2)$ são espaços de Banach. Além disso, a aplicação identidade $i : (L, \|\cdot\|_1) \rightarrow (L, \|\cdot\|_2)$ é claramente linear, limitada e bijetiva, o que induz através do Teorema do Gráfico Fechado que $i^{-1} : L_2 \rightarrow L_1$ sé também limitada. Ou seja,

$$\|T\|_{A,B} \leq \max\{\|T\|_{A,B}, \|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\} \leq C \max\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\},$$

com C independente de T . ■

O principal objetivo em teoria de interpolação se concentra na construção dos espaços de interpolação. Para nossos objetivos a maneira de construí-los será através do que chamamos *functor de interpolação* de acordo com a seguinte definição.

Definição 4.5. *Por um functor de interpolação (ou método de interpolação) em $\mathfrak{B}$ entendemos um functor F de $\mathfrak{B}_1$ em $\mathfrak{B}$ tal que se $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são pares admissíveis em $\mathfrak{B}_1$, então $F(\bar{A})$ e $F(\bar{B})$ são espaços de interpolação relativamente a $\bar{A}$ e $\bar{B}$. Adicionalmente, temos*

$$F(T) = T, \text{ para todo } T : \bar{A} \rightarrow \bar{B}.$$

Pelo Teorema 4.4, qualquer funtor de interpolação F em $\mathfrak{B}$ será uniforme. Isto significa que

$$\|T\|_{F(\bar{A}), F(\bar{B})} \leq C \max\{\|T\|_{A_0, B_0}, \|T\|_{A_1, B_1}\},$$

para alguma constante C dependendo dos pares $\bar{A}$ e $\bar{B}$. Se escolhermos C independente de $\bar{A}$ e $\bar{B}$, estamos falando de um *funtor de interpolação limitado*. Observamos que F será exato se pudermos tomar $C = 1$.

O funtores de interpolação mais simples que podemos introduzir são os funtores Δ e Σ , além do que esses funtores são também funtores de interpolação exatos.

4.1.3 Teorema de Dualidade

Considerando a categoria $\mathfrak{B}$ dos espaços de Banach temos

Teorema 4.6 (Teorema de Dualidade). *Se $\bar{A} = (A_0, A_1) \in \mathfrak{B}_1$, então $\Delta(\bar{A})' = \Sigma(\bar{A}')$ e $\Sigma(\bar{A})' = \Delta(\bar{A}')$, onde $\bar{A}' = (A'_1, A'_0)$ e A' denota o espaço dual de A . Mais precisamente*

$$\|a'\|_{\Sigma(\bar{A}')} = \sup_{a \in \Delta(\bar{A})} \frac{|\langle a', a \rangle|}{\|a\|_{\Delta(\bar{A})}} \quad (4.13)$$

e

$$\|a'\|_{\Delta(\bar{A}')} = \sup_{a \in \Sigma(\bar{A})} \frac{|\langle a', a \rangle|}{\|a\|_{\Sigma(\bar{A})}} \quad (4.14)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade entre $\Delta(\bar{A})$ e $\Delta(\bar{A})'$.

Demonstração: Provaremos somente (4.13), visto ser a prova de (4.14) bastante semelhante.

Primeiramente suponhamos $a' \in \Sigma(\bar{A}')$ com $a' = a'_0 + a'_1$, $a'_i \in A'_i$, $i = 0, 1$. Logo

$$|\langle a', a \rangle| \leq |\langle a'_0, a \rangle| + |\langle a'_1, a \rangle| \leq (\|a'_0\|_{A'_0} + \|a'_1\|_{A'_1}) \max\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\}, \quad a \in \Delta(\bar{A}).$$

Consequentemente, $a' \in \Delta(\bar{A})'$ com $\|a'\|_{\Delta(\bar{A})'} \leq \|a'\|_{\Sigma(\bar{A}')}.$

Reciprocamente, seja $\ell \in \Delta(\bar{A})'$. Logo

$$|\ell(a)| \leq \|\ell\|_{\Delta(\bar{A})'} \|a\|_{\Delta(\bar{A})}, \quad a \in \Delta(\bar{A}).$$

Então a forma linear

$$\lambda : (a_0, a_1) \rightarrow \ell((a_0 + a_1)/2)$$

definida em $E = \{(a_0, a_1) \in A_0 \oplus A_1 : a_0 = a_1\}$ é contínua na norma $\max\{\|a_0\|_{A_0}, \|a_1\|_{A_1}\}$ de $A_0 \oplus A_1$. Observemos ainda que E é um subespaço fechado de $A_0 \oplus A_1$. Então, do Teorema de Hahn-Banach, existe $(a'_0, a'_1) \in A'_0 \oplus A'_1$ tal que

$$\|a'_0\|_{A'_0} + \|a'_1\|_{A'_1} \leq \|\ell\|_{\Delta(\bar{A})'}$$

e

$$\lambda(a_0, a_1) = \langle a'_0, a_0 \rangle + \langle a'_1, a_1 \rangle, \quad (a_0, a_1) \in E.$$

Portanto, tomando $a_0 = a_1 = a$, obtemos

$$\ell(a) = \langle a'_0, a \rangle + \langle a'_1, a \rangle = \langle a'_0 + a'_1, a \rangle, \quad a \in \Delta(\bar{A}).$$

Pela hipótese de densidade, a'_0 e a'_1 são determinados por seus valores em $\Delta(\bar{A})$. Em particular se $\ell = a'_0 + a'_1$, então

$$\|\ell\|_{\Sigma(\bar{A})'} \leq \|\ell\|_{\Delta(\bar{A})'},$$

completando a prova de (4.13). ■

Escalas de Espaços de Banach

Neste capítulo desenvolvemos a teoria de semigrupos lineares sobre escalas de espaços de Banach construídos a partir dos métodos de interpolação exatos e de expoente θ . Essas escalas substituirão as escalas usuais de potências fracionárias.

Visto que a teoria das escalas de interpolação é em geral considerada mais complicada que a teoria das escalas de potências fracionárias, devemos então justificar a razão pela qual optamos por sua introdução. Esta se deve ao estudo da existência local de soluções para problemas parabólicos semilineares com não-linearidades de expoente crítico. Nestas aplicações surge a necessidade de se conhecer precisamente as imersões ótimas dos espaços da escala em espaços de funções conhecidos (em geral espaços L^p), via imersões do tipo Sobolev. Desta forma é necessário obtermos uma caracterização desses espaços, o que em geral não é possível para os espaços de potências fracionárias, exceto em condições particulares que serão melhores descritas ao falarmos das aplicações. Já para os espaços de interpolação, as imersões necessárias são bem conhecidas e num contexto bastante geral. De qualquer forma para se obter a caracterização dos espaços de potências fracionárias em termos de espaços conhecidos (Sobolev, Bessel ou Besov) devemos também lembrar que esses espaços são também obtidos via interpolação, e portanto, a teoria na verdade não é mais complicada quando a imaginamos aplicada a problemas interessantes. Assim, neste capítulo nos furtaremos, prezando a praticidade, de construir a teoria e estender os resultados para as escalas de potências fracionárias.

Os resultados contidos nesta seção seguem a apresentação feita por H. Amann em [2], com singelas simplificações para adaptarmos o texto às aplicações que temos em mente.

5.1 Escalas de Banach

Nesta seção discutiremos em detalhes o conceito de *escalas de espaços de Banach*, que são nada mais do que uma família a um parâmetro de espaços de Banach oportunamente imersos e conectados por uma estrutura adicional expressa em termos de operadores lineares. Em particular, mostramos como escalas de espaços de Banach podem ser construídas a partir de um Banach E e um operador fechado densamente definido $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ com resolvente não vazio. É muito importante que sejamos capazes de construir *super-espaços de E* e que possamos caracterizá-los em termos de teoremas simples de dualidade, pois estes espaços *extrapolados*, e as técnicas apresentadas nesta seção, constituirão a base abstrata de nossa teoria para problemas parabólicos semilineares críticos.

5.1.1 Conceitos Gerais

Inicialmente, antes de introduzirmos o conceito de escalas de espaços de Banach, provaremos um resultado técnico relacionado a restrições maximais de operadores lineares que empregaremos diversas vezes durante o desenvolvimento desta seção.

Definição 5.1. *Seja G um espaço vetorial topológico e $B : D(B) \subset G \rightarrow G$ um operador linear. Se $F \hookrightarrow G$, definimos a F -realização B_F de B por*

$$D(B_F) = \{e \in D(B) \cap F : Be \in F\} \text{ e } B_F e = Be, \quad e \in D(B_F).$$

Para fixarmos a notação, se F e G são espaços de Banach então consideraremos

$$\mathcal{L}is(F, G) = \{T \in \mathcal{L}(F, G) : T \text{ é um isomorfismo}\}.$$

Quando não houver possibilidade de confusão escreveremos simplesmente B para dizer B_F .

Lema 5.2. *Consideremos $(F, \|\cdot\|_F)$ e $(G, \|\cdot\|)$ dois espaços de Banach tais que $F \hookrightarrow G$ e $B \in \mathcal{C}(G)$. Se $(\mu + B)^{-1}(F) \subset F$ para algum $\mu \in \rho(-B)$, então $\mu \in \rho(-B_F)$ e*

$$(\mu + B_F)^{-1} = (\mu + B)^{-1}|_F. \quad (5.1)$$

Adicionalmente, se $D(B) \subset F$ então $\rho(B) = \rho(B_F)$ e (5.1) é válido para cada $\mu \in \rho(-B)$.

Demonstração: Primeiramente observemos que $B_F \in \mathcal{C}(F)$. De fato, consideremos uma sequência $\{x_n\}$ em $D(B_F)$ tal que

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x & \text{em } F \\ B_F x_n \rightarrow y & \text{em } F. \end{cases}$$

Como $F \hookrightarrow G$ e $B \in \mathcal{C}(G)$

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x & \text{em } G \\ B_F x_n = B x_n \rightarrow y & \text{em } G \end{cases}$$

e portanto, $x \in D(B)$ e $Bx = y$, ou seja, $x \in D(B) \cap F$ e $Bx \in F$, logo $x \in D(B_F)$ e $B_F x = Bx = y$, mostrando que de fato $B_F \in \mathcal{C}(F)$.

Agora se $(\mu + B)^{-1}(F) \subset F$ para algum $\mu \in \rho(-B)$, dado $y \in F$, então $(\mu + B)^{-1}y = f \in F \cap D(B)$, e como $y = (\mu + B)f$ obtemos $Bf \in F$. Portanto $f \in D(B_F)$ e $(\mu + B_F)f = (\mu + B)f = y$, o que mostra ser o operador $\mu + B_F$ uma sobrejeção de $D(B_F)$ sobre F . Por outro lado ao considerarmos $x \in D(B_F)$ tal que $0 = (\mu + B_F)x = (\mu + B)x$, segue que $x = 0$, e $\mu + B_F$ é na verdade uma bijeção. Além disso, como $B_F \in \mathcal{C}(F)$, $(\mu + B_F)^{-1} \in \mathcal{C}(F)$, e assim pelo Teorema do Gráfico Fechado $(\mu + B_F)^{-1}$ é um operador linear limitado ($(\mu + B_F)^{-1} \in \mathcal{L}(F)$), ou seja, $\mu \in \rho(-B_F)$.

Agora se $f \in F$, então $(\mu + B_F)^{-1}f = y \in D(B_F)$. Logo $f = (\mu + B_F)y = (\mu + B)y$ e portanto $(\mu + B)^{-1}f = y$, mostrando que $(\mu + B_F)^{-1} = (\mu + B)^{-1}|_F$.

Finalmente suponhamos que $D(B) \subset F$. Já que $(\lambda + B)^{-1}(G) \subset F$ para todo $\lambda \in \rho(-B)$, obtemos da parte anterior que $\rho(-B) \subset \rho(-B_F)$, e portanto, $\rho(B) \subset \rho(B_F)$. Além disso vemos também que $(\lambda + B_F)^{-1} = (\lambda + B)^{-1}|_F$.

Reciprocamente, se $\lambda \in \rho(-B_F)$ e $y \in G$, colocando

$$x = (\mu + B)^{-1}y + (\mu - \lambda)(\lambda + B_F)^{-1}(\mu + B)^{-1}y$$

temos $x \in D(B)$ e

$$\begin{aligned} (\lambda + B)x &= (\lambda + B)(\mu + B)^{-1}y + (\mu - \lambda)(\lambda + B)(\lambda + B_F)^{-1}(\mu + B)^{-1}y \\ &= (\lambda + B)(\mu + B)^{-1}y + (\mu - \lambda)(\lambda + B_F)(\lambda + B_F)^{-1}(\mu + B)^{-1}y \\ &= (\lambda + B)(\mu + B)^{-1}y + (\mu - \lambda)(\mu + B)^{-1}y = y, \end{aligned}$$

de onde segue a sobrejetividade do operador $(\lambda + B)$.

Agora, se $x \in D(B)$ é tal que $(\lambda + B)x = 0$, lembrando que $D(B) \subset F$, temos que $x \in D(B_F)$ e portanto $(\lambda + B_F)x = 0$, o que implica $x = 0$, e obtemos dessa forma que de fato o operador $(\lambda + B)$ é uma bijeção.

Novamente, uma vez que $B \in \mathcal{C}(G)$ também $(\lambda + B)^{-1} \in \mathcal{C}(G)$, o que pelo Teorema do Gráfico Fechado é suficiente para concluir que este operador também é limitado, ou seja, que de fato $\lambda \in \rho(-B)$ e dessa forma que $\rho(-B_F) = \rho(-B)$ como queríamos.

■

Observação 5.3. Observemos que a condição feita na hipótese do lema anterior, $D(B) \subset F$, equivale a garantir que $(\mu + B)^{-1}(G) \subset F$ para algum $\mu \in \rho(-B)$. Adicionalmente, ao iterarmos convenientemente a identidade do resolvente, podemos facilmente generalizar (Lema B.1) o Lema 5.2 no caso em que $(\mu + B)^{-k}(G) \subset F$ para algum inteiro positivo k .

Definição 5.4. Se $\Lambda \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ é um conjunto de índices, consideramos para cada $\alpha \in \Lambda$ um espaço de Banach $E_\alpha = (E_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ e um operador linear $A_\alpha \in \mathcal{L}is(E_{\alpha+1}, E_\alpha)$, tal que para todo par $\alpha, \beta \in \Lambda$ com $\alpha > \beta$

$$E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$$

e o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \hookrightarrow & E_{\alpha+1} & \hookrightarrow & E_{\beta+1} & \hookrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow A_\alpha \cong & & \downarrow A_\beta \cong & & \\ \cdots & \hookrightarrow & E_\alpha & \hookrightarrow & E_\beta & \hookrightarrow & \cdots \end{array} \quad (5.2)$$

comuta. À família

$$\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$$

chamamos uma escala de espaços de Banach sobre o conjunto de índices Λ .

A escala é dita unilateral se $\Lambda \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}_+\}$ e bilateral caso contrário. É dita discreta se $\Lambda \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ e contínua caso contrário. A escala de espaços de Banach $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ é dita densamente imersa se $E_\alpha \xrightarrow{d} E_\beta$, sempre que $\alpha > \beta$.

Definição 5.5. Duas escalas de Banach $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ e $\{(F_\alpha, B_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ sobre o mesmo conjunto de índices Λ são ditas isomorfas se existe um isomorfismo $I_\alpha \in \mathcal{L}is(E_\alpha, F_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, tal que se $\alpha, \beta \in \Lambda$ com $\alpha > \beta$, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E_{\alpha+1} & \xrightarrow{I_{\alpha+1}} & F_{\alpha+1} & & \\ & \searrow & \downarrow \cong & \searrow & \\ & E_{\beta+1} & \xrightarrow{I_{\beta+1}} & F_{\beta+1} & \\ & \downarrow A_\beta \cong & & \downarrow B_\beta \cong & \\ A_\alpha \cong \downarrow & E_\alpha & \xrightarrow{I_\alpha} & F_\alpha & \\ & \searrow & \downarrow \cong & \searrow & \\ & E_\beta & \xrightarrow{I_\beta} & F_\beta & \end{array} \quad (5.3)$$

comuta.

Adicionalmente se cada I_α é também uma isometria, as duas escalas são isometricamente isomorfas. Duas escalas de Banach são equivalentes se forem isomorfas e $E_\alpha = F_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$ (ou seja, se os espaços forem os mesmos e suas normas equivalentes).

Uma escala de Banach é reflexiva se cada E_α for um espaço de Banach reflexivo. É de Hilbert se cada E_α for um espaço de Hilbert. Por fim, dizemos que uma escala de Banach $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ satisfaz as desigualdades de interpolação se

$$\|e\|_\beta \leq c(\alpha, \beta, \gamma) \|e\|_\gamma^{(\alpha-\beta)/(\alpha-\gamma)} \|e\|_\alpha^{(\beta-\gamma)/(\alpha-\gamma)}, \quad e \in E_\alpha,$$

sempre que $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ satisfizerem $\gamma < \beta < \alpha$.

Exemplo 5.6. Como exemplo de escalas de Espaços de Banach densamente imersas e que satisfazem as desigualdades de interpolação, temos as escalas de potências fracionárias associadas a geradores de semigrupos analíticos de operadores lineares em espaços de Banach. De fato, se $-A$ é um operador setorial em um espaço de Banach E , então as escalas de potências fracionárias são tais que (ver [2], Teorema III.4.6.5)

- (i) $D(A^\alpha) \xrightarrow{d} D(A^\beta)$, $\alpha \geq \beta > 0$,
- (ii) $A \in \mathcal{L}is(D(A^{\alpha+1}), D(A^\alpha))$, $\alpha > 0$,
- (iii) $\|A^\beta e\|_E \leq c \|e\|^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \|A^\alpha e\|_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}$, $e \in D(A^\alpha)$, $\alpha > \beta > 0$.

Logo, considerando $E_\alpha = (D(A^\alpha), \|A^\alpha \cdot\|_E)$ e $A_\alpha = A$, para todo $\alpha \geq 0$, então é claro que $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ é uma escala de Banach densamente imersa que satisfaz as desigualdades de interpolação.

Observação 5.7. Se $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ é uma escala de espaços de Banach sobre o conjunto de índices Λ , então obtemos as seguintes consequências decorrentes das definições anteriores

- (i) Para cada $\alpha \in \Lambda$, $A_\alpha \in \mathcal{C}(E_\alpha)$.

Demonstração: Sendo $A_\alpha : E_{\alpha+1} \rightarrow E_\alpha$ um isomorfismo linear, a norma do gráfico de A_α é uma norma equivalente em $E_{\alpha+1}$. De fato, por um lado

$$\|x\|_{D(A_\alpha)} = \|A_\alpha x\|_{E_\alpha} + \|x\|_{E_\alpha} \leq \left(\|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)} + \|i_\alpha\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)} \right) \|x\|_{E_{\alpha+1}}, \quad x \in E_{\alpha+1},$$

onde $i_\alpha : E_{\alpha+1} \rightarrow E_\alpha$ é o operador inclusão. Por outro lado, se $x \in E_{\alpha+1}$ então $x = A_\alpha^{-1}z$ para algum $z \in E_\alpha$, logo

$$\begin{aligned} \|x\|_{E_{\alpha+1}} &= \|A_\alpha^{-1}z\|_{E_{\alpha+1}} \leq \|A_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+1})} \|z\|_{E_\alpha} \\ &\leq \|A_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+1})} \left(\|A_\alpha A_\alpha^{-1}z\|_{E_\alpha} + \|x\|_{E_\alpha} \right) = \|A_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+1})} \|x\|_{D(A_\alpha)}. \end{aligned}$$

Agora a afirmação é consequência do Lema B.2. ■

- (ii) Se $\alpha > \beta$ então $A_\beta \supset A_\alpha$. Além disso, A_α considerado como um operador linear ilimitado em E_α é fechável em E_β , e seu fecho é igual a restrição de A_β a

$$E_{\alpha+1, \beta+1} = \text{fecho de } E_{\alpha+1} \text{ em } E_{\beta+1},$$

considerado como um operador linear ilimitado de E_β .

Demonstração: A primeira afirmação segue da comutatividade do diagrama (5.2). Além disso, se $\{x_n\}$ é uma sequência em $E_{\alpha+1}$ tal que $x_n \xrightarrow{E_\beta} 0$ e $A_\alpha x_n \xrightarrow{E_\beta} y$, visto ser A_β , pelo item (i), um operador fechado de E_β

$$A_\alpha x_n = A_\beta x_n \xrightarrow{E_\beta} 0,$$

mostrando que A_α é fechável em E_β .

Por fim se $\bar{A}_\alpha$ denota o fecho em E_β do operador A_α , observamos que se $x \in D(\bar{A}_\alpha)$, então existe uma sequência $\{x_n\}$ em $D(A_\alpha) = E_{\alpha+1}$ tal que

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x & \text{em } E_\beta \\ A_\alpha x_n = A_\beta x_n \rightarrow \bar{A}_\alpha x & \text{em } E_\beta. \end{cases} \quad (5.4)$$

Sendo A_β um operador fechado de E_β segue que $x \in D(A_\beta)$ e $A_\beta x = \bar{A}_\alpha x$, ou seja, $A_\beta \supset \bar{A}_\alpha$.

Além disso se $x \in D(\bar{A}_\alpha)$ considerando uma sequência $\{x_n\}$ como em (5.4), obtemos da continuidade do operador $A_\beta^{-1} : E_\beta \rightarrow E_{\beta+1}$ que

$$A_\beta^{-1}(A_\beta x_n) = x_n \xrightarrow{E_{\beta+1}} A_\beta^{-1}(\bar{A}_\alpha x) = A_\beta^{-1}(A_\beta x) = x,$$

mostrando que $x \in E_{\alpha+1, \beta+1}$.

Reciprocamente suponhamos que $x \in E_{\alpha+1, \beta+1}$, logo existe uma sequência $\{x_n\}$ em $E_{\alpha+1}$ tal que $x_n \xrightarrow{E_{\beta+1}} x$, e consequentemente $x_n \xrightarrow{E_\beta} x$. Agora pela continuidade do operador $A_\beta : E_{\beta+1} \rightarrow E_\beta$, obtemos $A_\beta x_n \xrightarrow{E_\beta} A_\beta x = \bar{A}_\alpha x$, mostrando que $x \in D(\bar{A}_\alpha)$ e concluindo a prova da afirmação. ■

- (iii) O operador A_α é a E_α -realização de A_β sempre que $\alpha > \beta$.

Demonstração: De fato, se $R_\alpha = E_\alpha$ -realização de A_β , então $D(R_\alpha) = \{x \in E_\alpha \cap E_{\beta+1} : A_\beta x \in E_\alpha\}$. Logo para $x \in D(R_\alpha)$ temos $A_\beta x \in E_\alpha$, logo existe $z \in E_{\alpha+1} \subset E_{\beta+1}$ tal que $A_\alpha z = A_\beta x$. Sendo o operador A_β um isomorfismo de $E_{\beta+1}$ sobre E_β com $A_\beta \supset A_\alpha$ (item (ii)), vemos que $A_\beta z = A_\beta x$, e assim $x = z$, mostrando que $D(R_\alpha) \subset E_{\alpha+1}$.

Reciprocamente, se $x \in E_{\alpha+1}$, então $x \in E_\alpha \cap E_{\beta+1}$ e ainda novamente graças ao item (ii) $A_\beta x = A_\alpha x \in E_\alpha$ e portanto $x \in D(R_\alpha)$. É claro que $R_\alpha = A_\alpha$. ■

- (iv) Se a escala $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ for densamente imersa, os operadores A_α são completamente determinados por A_0 (ou por A_{α_0} para algum $\alpha_0 \in \Lambda$).

Demonstração: De fato, para $\alpha > 0$ (resp. $\alpha > \alpha_0$), pelo item (iii) o operador A_α pode ser considerado como a E_α -realização de A_0 (resp. A_{α_0}). E para $\alpha < 0$ (resp. $\alpha < \alpha_0$) de (ii), uma vez que a escala é densamente imersa, obtemos A_α como o fecho de A_0 (resp. A_{α_0}) em E_α cujo domínio é $E_{\alpha+1}$. ■

- (v) $\rho(A_\alpha) = \rho(A_\beta)$ para todo par $\alpha, \beta \in \Lambda$.

Demonstração: Não é difícil concluir do Lema 5.2 e do item (iii) que $\rho(A_\alpha) = \rho(A_{\alpha+1})$ para todo $\alpha \in \Lambda$, e assim, por indução, $\rho(A_\alpha) = \rho(A_{\alpha+n})$ para todo $\alpha \in \Lambda$ e todo $n \in \mathbb{N}$. No caso em que $\alpha, \beta \in \Lambda$ são tais que $\beta < \alpha < \beta + 1$, segue dos itens (i)-(iii) que $E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$, o operador $A_\beta \in \mathcal{C}(E_\beta)$, $A_\beta^{-1}(E_\alpha) \subset E_\alpha$ e $D(A_\beta) = E_{\beta+1} \subset E_\alpha$. Portanto do Lema 5.2 concluímos que $\rho(A_\beta) = \rho((A_\beta)_{E_\alpha}) = \rho(A_\alpha)$.

Agora sem perda de generalidade podemos supor $\alpha > \beta$. Logo, existe um inteiro não negativo n tal que $\beta + n < \alpha < \beta + (n+1)$, e já que $\rho(A_\beta) = \rho(A_{\beta+n}) = \rho(A_{\beta+(n+1)})$ obtemos do caso anterior que $\rho(A_\beta) = \rho(A_\alpha)$ como queríamos. ■

- (vi) Para cada $j = 0, 1, \dots$ fixo e $\alpha \in \Lambda$, $(A_\alpha)^j \in \mathcal{L}is(E_{\alpha+j}, E_\alpha)$.

Demonstração: É suficiente mostrarmos a afirmação para $j = 2$. Neste caso considerando a sequência

$$E_{\alpha+2} \xrightarrow[\cong]{A_{\alpha+1}} E_{\alpha+1} \xrightarrow[\cong]{A_{\alpha+1}} E_\alpha$$

e observando que pelo item (ii) $A_{\alpha+1} = A_\alpha|_{E_{\alpha+2}}$, concluímos que o operador

$$A_\alpha^2 : E_{\alpha+2} \rightarrow E_\alpha$$

é uma bijeção. E a desigualdade

$$\begin{aligned} \|A_\alpha^2 x\|_{E_\alpha} &= \|A_\alpha(A_{\alpha+1}x)\|_{E_\alpha} \leq \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)} \|A_{\alpha+1}x\|_{E_{\alpha+1}} \\ &\leq \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)} \|A_{\alpha+1}\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+2}, E_{\alpha+1})} \|x\|_{E_{\alpha+2}}, \quad x \in E_{\alpha+2} \end{aligned}$$

juntamente com o Teorema da Aplicação Aberta, mostram que de fato $A_\alpha^2 \in \mathcal{L}is(E_{\alpha+2}, E_\alpha)$. ■

(vii) Se a escala for discreta, ela será densamente imersa se e somente se $E_{\alpha+1} \xhookrightarrow{d} E_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Demonstração: De fato, dados $\alpha, \beta \in \Lambda$, sem perda de generalidade podemos supor $\alpha > \beta$, logo existe um inteiro positivo j tal que $\alpha = \beta + j$, e assim basta observarmos a sequência de imersões densas

$$E_\alpha \xhookrightarrow{d} E_{\beta+(j-1)} \xhookrightarrow{d} \dots \xhookrightarrow{d} E_\beta$$

para concluir que $E_\alpha \xhookrightarrow{d} E_\beta$. ■

Definição 5.8. Uma escala de Banach é dita compactamente imersa se $E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$, onde a inclusão além de contínua, for também compacta sempre que $\alpha > \beta$.

Proposição 5.9. Uma escala de Banach discreta $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ é compactamente imersa se e somente se $A_0^{-1} \in \mathcal{K}(E_0)$.

Demonstração: Se $i_0 \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ denota a inclusão natural de E_1 em E_0 , então deduzimos da fatoração

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{A_0^{-1}} & E_1 \\ & \cong & \\ & \searrow A_0^{-1} & \swarrow i_0 \\ & E_0 & \end{array}$$

que $E_1 \hookrightarrow E_0$ com inclusão compacta se e somente se $(A_0)^{-1} \in \mathcal{K}(E_0)$. Portanto basta mostrarmos que $E_1 \hookrightarrow E_0$ com imersão compacta garante que $E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$ com imersão compacta para todo $\alpha > \beta$. Desde que $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, é suficiente mostrarmos que $E_{j+1} \hookrightarrow E_j$ com imersão compacta sempre que $j \in \Lambda$.

De fato, no caso em que $j \geq 1$, o item (vi) da Observação 5.7, e a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_{j+1} & \hookrightarrow & E_j \\ (A_1)^j \downarrow & & \downarrow (A_0)^{-j} \\ E_1 & \hookrightarrow & E_0 \end{array} \quad (5.5)$$

implicam o resultado desejado. E para $j \leq -1$ derivamos o resultado como consequência da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_{j+1} & \hookrightarrow & E_j \\ (A_{j+1})^j \downarrow & & \downarrow (A_j)^{-j} \\ E_1 & \hookrightarrow & E_0 \end{array} \quad (5.6)$$

via itens (ii) e (vi) da Observação 5.7. ■

5.1.2 Escalas de Potência

Nesta subseção exibiremos uma técnica geral, porém bastante simples para a construção de escalas discretas e unilaterais de espaços de Banach. Para isso assumimos que $(E, \|\cdot\|_E)$ seja um espaço de Banach e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear fechado, densamente definido com $0 \in \rho(A)$. Neste caso sabemos que para todo $j = 0, 1, \dots$, $A^j : D(A^j) \subset E \rightarrow E$ também é um operador linear fechado e densamente definido com $0 \in \rho(A^j)$, onde evidentemente $A^0 = I_E$.

Para cada inteiro positivo $j = 0, 1, \dots$, definimos

$$E_j = E_j(A) = (E_j, \|\cdot\|_j) = (D(A^j), \|A^j \cdot\|_E),$$

onde $E_0 = (E, \|\cdot\|_E)$. Como $0 \in \rho(A^j)$ tem-se facilmente que $\|\cdot\|_j$ é uma norma equivalente a norma do gráfico de A^j , e portanto E_j é um espaço de Banach tal que para todo inteiro $j > k$ a desigualdade

$$\|e\|_k = \|A^k e\|_E = \|A^{k-j} A^j e\|_E \leq \|A^{k-j}\|_{\mathcal{L}(E, E_{j-k})} \|e\|_j, \quad e \in E_j,$$

mostra que $E_j \hookrightarrow E_k$. E assim o operador

$$A_j = E_j - \text{realização de } A$$

é bem definido para todo $j = 0, 1, \dots$.

Teorema 5.10. *Consideremos E um espaço de Banach e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador fechado densamente definido com $0 \in \rho(A)$. Se para cada $j = 0, 1, \dots$, os pares E_j e A_j são como acima definidos, então*

$$\{(E_j, A_j); j = 0, 1, 2, \dots\} \tag{5.7}$$

constitui uma escala de espaços Banach unilateral discreta e densamente imersa, a qual chamamos a escala de potências gerada pelo par (E, A) . Adicionalmente a escala (5.7) é compactamente imersa se e somente se o operador $A^{-1} \in \mathcal{K}(E)$.

Demonstração: A primeira parte do teorema segue da construção dos espaços E_j e dos operadores A_j . Além disso sendo o operador A densamente definido temos $E_1 \xhookrightarrow{d} E$. Dessa forma para cada $j = 0, 1, \dots$ fixado, se $e \in E_j$, $A^j e \in E$, e portanto existe uma sequência $\{e_n\} \subset E_1$ tal que $e_n \xrightarrow{E} A^j e$. Ainda, como $A^{-j} \in \mathcal{L}is(E, E_j) \cap \mathcal{L}is(E_1, E_{j+1})$ segue que $A^{-j} e_n \in E_{j+1}$ e que

$$\|A^{-j} e_n - e\|_{E_j} = \|A^{-j} e_n - A^{-j} A^j e\|_{E_j} \leq \|A^{-j}\|_{\mathcal{L}(E, E_j)} \|e_n - A^j e\|_E \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto $E_{j+1} \xrightarrow{d} E_j$ sempre que $j \geq 1$. Agora do item (vii) da Observação 5.7, segue a afirmação a respeito da densidade da escala (5.7). Por fim a Proposição 5.9 garante a prova da última afirmação contida no teorema. ■

Proposição 5.11. *Sejam E um espaço de Banach e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear fechado com $0 \in \rho(A)$. Fixado $m \in \mathbb{N}$ definimos*

$$(F_j, B_j) = (E_{j+m}, A_{j+m})$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. A escala de Banach resultante, $\{(F_j, B_j); j = 0, 1, 2, \dots\}$, é a escala de potências gerada pelo par (E_m, A_m) . Além disso essa escala é isometricamente isomorfa a escala de potências gerada por (E, A) .

Demonstração: Inicialmente temos pelo item (iii) da Observação 5.7 que A_{j+m} é a E_j -realização de A_m qualquer que seja $j = 0, 1, \dots$. Além disso $A_m : D(A_m) \subset E_m \rightarrow E_m$ é um operador linear fechado com $0 \in \rho(A_m)$, o que implica a primeira parte da proposição.

Agora, para cada $j = 0, 1, \dots$, definimos $I_j := (A_j)^{-m}$.

Desde que $(A_j)^{-m} \in \mathcal{L}is(E_j, E_{m+j})$, para todo $j = 0, 1, \dots$, segue se $e \in E_j$ que

$$\|(A_j)^{-m}e\|_{E_{m+j}} = \|A^m(A_j)^{-m}e\|_{E_j} = \|e\|_{E_j}.$$

Da mesma forma, obtemos para todo $e \in E_{j+m}$

$$\|(A_j)^{-m}e\|_{E_j} = \|e\|_{E_{j+m}},$$

mostrando que de fato I_j é um isomorfismo isométrico de E_j sobre E_{m+j} , isto é, as duas escalas são isometricamente isomorfas. ■

5.1.3 Espaços de Extrapolação

Se F é um espaço vetorial normado, o completamento $(\tilde{F}, \tilde{j})$, de F , é constituído por um espaço de Banach $\tilde{F}$, e um isomorfismo isométrico $\tilde{j}$ de F sobre um subespaço denso de $\tilde{F}$.

Um particular completamento pode ser obtido tomando por $\tilde{F}$ o espaço de Banach cujos elementos são classes de equivalência, $\widetilde{(e_j)}$, de sequências de Cauchy em F , onde duas sequências

de Cauchy são ditas equivalentes se a sequência diferença converge para zero. Este espaço é dotado de uma estrutura linear natural e sua norma é definida por

$$\|\widetilde{(e_j)}\|_{\widetilde{F}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|e_j\|_F.$$

Considerando $\tilde{j}(e) = \widetilde{(e)}$, onde (e) representa a sequência constante $(e, e, \dots)$ com $e \in F$, obtemos um isomorfismo isométrico sobre a imagem de F em $\widetilde{F}$, a qual é densa em $\widetilde{F}$.

Seja $(\widetilde{F}_1, \tilde{j}_1)$ outro completamento de F . Então existe uma isometria $h \in \mathcal{L}is(\widetilde{F}, \widetilde{F}_1)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \tilde{j} \nearrow & & \searrow \tilde{j}_1 \\ \widetilde{F} & \xrightarrow[\cong]{h} & \widetilde{F}_1 \end{array}$$

seja comutativo. Neste sentido completamentos são únicos (exceto por isometrias). Se não houver possibilidade de confusão, fixaremos um particular completamento $(\widetilde{F}, \tilde{j})$ de F e identificaremos F com o subespaço $\tilde{j}(F)$ de $\widetilde{F}$.

Ao longo desta seção, $E = (E, \|\cdot\|_E)$ será um espaço de Banach e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear fechado, densamente definido com $0 \in \rho(A)$. Nestas condições podemos considerar $\{(E_j, A_j); j = 0, 1, 2, \dots\}$, a escala unilateral de potências, discreta e densamente imersa gerada pelo par (E, A) .

Considerando em E a nova norma, $\|A^{-1} \cdot\|_E$, mais fraca que a norma usual $\|\cdot\|_E$, ao completamento

$$(E_{-1}, \|\cdot\|_{E_{-1}}) = E_{-1}(A) = (E, \|A^{-1} \cdot\|_E)^\sim$$

do espaço vetorial normado $(E, \|A^{-1} \cdot\|_E)$, chamamos um *espaço de extrapolação de E gerado por A* . Observemos que o espaço E_{-1} é um espaço de Banach bem definido que satisfaz

$$E \xhookrightarrow{d} E_{-1}$$

e ainda

$$\|Ae\|_{-1} = \|e\|_E, \quad e \in E_1, \quad (5.8)$$

e

$$\|A^{-1}f\|_E = \|f\|_{-1}, \quad f \in E. \quad (5.9)$$

Logo por (5.8) e (5.9) garantem a existência de uma única extensão contínua A_{-1} de A tal que A_{-1} seja um isomorfismo isométrico de $E_0 = E$ sobre E_{-1} com $(A_{-1})^{-1} \subset A^{-1}$. Nestas condições A_{-1} será dita a *E_{-1} -realização de A* .

Proposição 5.12. *Com as notações introduzidas acima*

- (i) $A_{-1} \in \mathcal{L}is(E_0, E_{-1}) \cap \mathcal{C}(E_{-1})$ e este isomorfismo é isométrico.
- (ii) A é fechável em E_{-1} com fecho A_{-1} .
- (iii) $\rho(A_{-1}) = \rho(A)$.

Demonstração: (i) Sendo A_{-1} um isomorfismo entre os espaços E_0 e E_{-1} , a norma do gráfico de $A_{-1} : E_0 \subset E_{-1} \rightarrow E_{-1}$ é uma norma equivalente à usual de E_0 . Portanto $A_{-1} \in \mathcal{C}(E_{-1})$ pelo Lema B.2. Além disso, de (5.8) este isomorfismo é também isométrico.

Agora (ii) segue do argumento utilizado no item (ii) da Observação 5.7.

Finalmente (iii) segue como consequência imediata de (i), (ii), e do Lema 5.2. ■

Sendo $A_{-1} : D(A_{-1}) \subset E_{-1} \rightarrow E_{-1}$ um operador fechado densamente definido com $0 \in \rho(A_{-1})$, podemos construir de forma similar

$$(E_{-2}, \|\cdot\|_{E_{-2}}) = E_{-1}(A_{-1}),$$

o espaço de extrapolação de E_{-1} gerado por A_{-1} . Logo a E_{-2} -realização de A_{-1} , isto é, o operador A_{-2} , é bem definido. Nestas condições obtemos a cadeia de inclusões densas

$$E \xhookrightarrow{d} E_{-1} \xhookrightarrow{d} E_{-2}, \quad (5.10)$$

com $A_{-2} : D(A_{-2}) \subset E_{-2} \rightarrow E_{-2}$ um operador linear fechado, densamente definido com $0 \in \rho(A_{-2})$. Adicionalmente

$$A_{-2} \in \mathcal{L}is(E_{-1}, E_{-2}) \cap \mathcal{C}(E_{-2}),$$

sendo este isomorfismo isométrico. Pelo Lema 5.12, ainda vemos que A_{-1} é um operador fechável em E_{-2} cujo fecho é A_{-2} .

Contudo estas relações devem ser interpretadas com cuidado. Mais precisamente, sejam (E_{-1}, j_{-1}) e (E_{-2}, j_{-2}) os completamentos de $(E, \|A^{-1} \cdot\|_E)$ e $(E_{-1}, \|(A_{-1})^{-1} \cdot\|_{E_{-1}})$ respectivamente, então

$$E \xrightarrow{j_{-1}} E_{-1} \xrightarrow{j_{-2}} E_{-2},$$

com j_{-1} e j_{-2} isometrias lineares sobre subespaços densos de E_{-1} e E_{-2} respectivamente. Portanto, se identificamos como acima, E_{-1} com sua imagem $j_{-2}(E_{-1})$ em E_{-2} , também identificamos $j_{-1}(E)$ com $j_{-2}(j_{-1}(E))$. Portanto na construção de E_{-2} somos obrigados a substituir o espaço

de extrapolação já construído E_{-1} por uma imagem isomorfa de tal forma que (5.10) seja ainda válida.

Veremos no próximo teorema como construir, de forma indutiva, os espaços extrapolados aos quais nos referimos.

Teorema 5.13. *Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador fechado, densamente definido com $0 \in \rho(A)$, para cada $m = 0, 1, \dots$ fixado, consideremos E_{-k} e A_{-k} definidos indutivamente para cada $1 \leq k \leq m$, por*

$$E_{-k} = (E_{-k}, \|\cdot\|_{E_{-k}}) = (E_{-k+1}, \|(A_{-k+1})^{-1} \cdot\|_{E_{-k+1}})^{\sim}$$

e

$$A_{-k} = \text{fecho de } A_{-k+1} \text{ em } E_{-k}.$$

Definimos

$$(F_j, B_j) = (E_{j-m}, A_{j-m}), \quad j = 0, 1, 2, \dots.$$

Então $\{(F_j, B_j); j = 0, 1, 2, \dots\}$ é a escala de potências gerada por (E_{-m}, A_{-m}) . Essa escala é isometricamente isomorfa a escala de potências gerada por (E, A) .

Demonstração: As considerações acima implicam que os pares (E_{-k}, A_{-k}) estão bem definidos para todo $1 \leq k \leq m$. Sendo A um operador densamente definido, temos como consequência de (5.8) e (5.9) que $B_j = F_j$ -realização de A_{-m} . Logo $\{(F_j, B_j); j = 0, 1, 2, \dots\}$ é de fato a escala de potências gerada por (E_{-m}, A_{-m}) . A última parte do teorema segue agora da Proposição 5.11. ■

Definição 5.14. *Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador densamente definido com $0 \in \rho(A)$, para cada $m \in \mathbb{N}$ a escala $\{(E_{j-m}, A_{j-m}); j = 0, 1, 2, \dots\}$ é dita uma escala extrapolada de potências de ordem m gerada por (E, A) , e também denotada por*

$$\{(E_j, A_j); j = -m, -m+1, -m+2, \dots\}.$$

Ainda pelo Teorema (5.10), essa escala é uma escala de Banach unilateral, discreta e densamente imersa.

Observação 5.15. *Ao fixarmos um inteiro positivo m , podemos considerar para cada inteiro $k \geq -m$, $\{(E_{j+k}, A_{j+k}); j = 0, 1, 2, \dots\}$, a escala de potências gerada pelo par (E_k, A_k) . Observemos que $\{(E_j, A_j); j = -m, -m+1, \dots\}$ é a escala de potências extrapolada de ordem $m+k$ gerada pelo par (E_k, A_k) .*

Proposição 5.16. *Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador densamente definido com $0 \in \rho(A)$, então para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo a escala*

$$\{(E_j, A_j); j = -m, -m+1, -m+2, \dots\}$$

é compactamente imersa se e somente se $(A_k)^{-1} \in \mathcal{K}(E)$ para algum inteiro $k \geq -m$. Neste caso, $(A_k)^{-1} \in \mathcal{K}(E_k)$ para todo inteiro $k \geq -m$.

Demonstração: Suponhamos que a escala

$$\{(E_j, A_j); j = -m, -m+1, \dots\} \quad (5.11)$$

seja compactamente imersa, logo para cada inteiro $k \geq -m$ a escala

$$\{(E_{j+k}, A_{j+k}); j = 0, 1, 2, \dots\} \quad (5.12)$$

é compactamente imersa. Pela Observação 5.15 sabemos ser esta escala gerada pelo par (E_k, A_k) , e assim da Proposição 5.9 segue que $(A_k)^{-1} \in \mathcal{K}(E_k)$.

Reciprocamente, ao supormos que exista um inteiro $k \geq -m$ tal que $(A_k)^{-1} \in \mathcal{K}(E_k)$, novamente pela Proposição 5.9, a escala (5.12) é compactamente imersa. Do Teorema 5.13 e da Observação 5.15 a escala (5.11) é isomorfa à escala (5.12) e portanto, também compactamente imersa. ■

Se $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ é outro operador fechado densamente definido e com $0 \in \rho(B)$, a escala extrapolada de potências de ordem m gerada pelo par (E, B) , $\{(E_j(B), B_j); j = -m, -m+1, \dots\}$, é bem definida. A seguinte proposição nos dará condições suficientes para que $E_{-k}(B) = E_{-k} = E_{-k}(A)$, com normas equivalentes para todo $1 \leq k \leq m$.

Antes porém, recordemos que o dual de um operador linear fechado e densamente definido é um operador bem definido que possui o mesmo conjunto resolvente de seu pré-dual. Portanto as seguintes hipóteses são significativas.

Proposição 5.17. *Suponhamos que os operadores $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ e $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ sejam fechados, densamente definidos e com $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Além disso suponhamos também que*

$$D((A^*)^k) = D((B^*)^k), \text{ para todo } 1 \leq k \leq m. \quad (5.13)$$

Então $E_{-k}(B) = E_{-k} = E_{-k}(A)$ e

$$\|(B^*)^k (A^*)^{-k}\|_{\mathcal{L}(E^*)}^{-1} \|e\|_{E_{-k}} \leq \|e\|_{E_{-k}(B)} \leq \|(A^*)^k (B^*)^{-k}\|_{\mathcal{L}(E^*)} \|e\|_{E_{-k}}$$

para todo $e \in E_{-k}$ e todo inteiro $1 \leq k \leq m$.

Demonstração: Sendo os operadores $(A^*)^k$ e $(B^*)^k$ fechados em E^* , de (5.13) e do Teorema do Gráfico Fechado concluímos que $(B^*)^k(A^*)^{-k}$ e $(A^*)^k(B^*)^{-k}$ pertencem a $\mathcal{L}(E^*)$. Portanto deduzimos de

$$\langle (B^*)^k(A^*)^{-k}e', e \rangle = \langle e', A^{-k}B^ke \rangle, \quad e \in E_k(B), \quad e' \in E^*,$$

e da densidade de $E_k(B)$ em E , que $A^{-k}B^k$ possui uma única extensão $(A^{-k}B^k)^- \in \mathcal{L}(E)$ tal que

$$\|(A^{-k}B^k)^-\|_{\mathcal{L}(E)} = \|(B^*)^k(A^*)^{-k}\|_{\mathcal{L}(E^*)}.$$

Portanto para cada $e \in E$,

$$\|e\|_{E_{-k}} = \|A^{-k}e\| = \|A^{-k}B^kA^{-k}e\| \leq \|(B^*)^k(A^*)^{-k}\|_{\mathcal{L}(E^*)}\|e\|_{E_{-k}(B)}.$$

Semelhantemente, existe uma única extensão $(B^{-k}A^k)^- \in \mathcal{L}(E)$ de $B^{-k}A^k$ satisfazendo

$$\|B^{-k}A^k\|_{\mathcal{L}(E)} = \|(A^*)^k(B^*)^{-k}\|_{\mathcal{L}(E^*)}.$$

o que nos remete a

$$\|e\|_{E_{-k}(B)} = \|B^{-k}e\| = \|B^{-k}A^kA^{-k}e\| \leq \|(A^*)^k(B^*)^{-k}\|_{\mathcal{L}(E^*)}\|e\|_{E_{-k}}$$

para cada $e \in E$.

Agora a proposição segue como consequência da densidade de E em E_{-k} . ■

5.1.4 Escalas Duais

Ao longo desta seção assumiremos que E é um espaço de Banach reflexivo e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear fechado, densamente definido com $0 \in \rho(A)$, a menos que explícito o contrário. Recordemos por um momento que se assumimos a reflexibilidade do espaço E então o operador $A^* : D(A^*) \subset E^* \rightarrow E^*$ é um operador linear fechado, densamente definido com $\rho(A^*) = \rho(A)$. A fim de evitarmos confusão introduziremos a seguinte notação

$$E^\# = E^*, \text{ e } A^\# = A^*.$$

Nestas condições fixado um inteiro positivo $m = 1, 2, \dots$ as escalas de potências extrapoladas de ordem m

$$\{(E_j, A_j); j = -m, -m+1, -m+2, \dots\}, \quad (5.14)$$

e

$$\{(E_j^\#, A_j^\#); j = -m, -m+1, -m+2, \dots\}, \quad (5.15)$$

geradas por (E, A) e $(E^\#, A^\#)$ respectivamente, estão bem definidas. Além disso, a escala (5.15) é dita a *escala dual* da escala de Banach (5.14).

O objetivo principal desta seção é o de estabelecer o Teorema de Dualidade 5.24, porém necessitamos ainda de algumas definições e resultados preliminares. No que segue denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_E$ o par de dualidade entre E^* e E .

Lema 5.18. *Para cada inteiro $1 \leq k \leq m$ fixado, ao definirmos*

$$\langle e^\#, e \rangle_k = \langle (A_{-k}^\#)^{-k} e^\#, A^k e \rangle, \quad e \in E_k, \quad e^\# \in E_{-k}^\#.$$

obtemos que a forma bilinear

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_k = E_{-k}^\# \times E_k \rightarrow \mathbb{K}$$

é uma forma bilinear contínua de norma 1.

Demonstração: Observemos que para cada $1 \leq k \leq m$, $A^k \in \mathcal{L}is(E_k, E)$ bem como $(A_{-k}^\#)^{-k} \in \mathcal{L}is(E_{-k}^\#, E^\#)$, além disso esses isomorfismos são isométricos. Logo

$$\langle e^\#, e \rangle_k = \langle (A_{-k}^\#)^{-k} e^\#, A^k e \rangle \leq \| (A_{-k}^\#)^{-k} \|_{\mathcal{L}(E_{-k}^\#, E^\#)} \| A^k \|_{\mathcal{L}(E_k, E)} \| e^\# \|_{E^\#} \| e \|_E = \| e^\# \|_{E^\#} \| e \|_E.$$

■

Lema 5.19. *Sejam E e F espaços vetoriais, $B: D(B) \subset E \rightarrow F$ e $C: D(C) \subset E \rightarrow F$ transformações lineares tais que $B \supset C$. Se B for injetor e C sobrejetor então $B = C$.*

Demonstração: Seja $e \in D(B)$. Da sobrejetividade da transformação C , existe $f \in D(C)$ tal que $Cf = Be$. Desde que $B \supset C$ é injetor temos que $e = f \in D(C)$, e portanto $D(B) \subset D(C)$ provando o lema.

■

Observação 5.20. *Aqui e em situações similares $(A_k)^*$ denotará o dual do operador $A_k \in \mathcal{C}(E_k)$, isto é, A_k será considerado como um operador linear ilimitado em E_k , e não como um operador linear contínuo de E_{k+1} em E_k .*

Proposição 5.21. *Se m é um inteiro positivo fixado, então para todo inteiro $1 \leq k \leq m$, com as notações introduzidas acima*

$$(E_k)^* = E_{-k}^\# \quad (5.16)$$

e

$$(A_k)^* = A_{-k}^\# \quad (5.17)$$

relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$.

Demonstração: O Lema 5.18 garante que a aplicação

$$e^\# \rightarrow \langle e^\#, \cdot \rangle_k$$

define uma isometria linear entre os espaços $E_{-k}^\#$ e $(E_k)^*$, mostrando que $E_{-k}^\# \subset (E_k)^*$ relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$.

Reciprocamente se $f \in (E_k)^*$, desde que $A^k \in \mathcal{L}is(E_k, E)$ existe $f^\# \in E^\#$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_k & \xrightarrow{A^k} & E \\ & \searrow f & \swarrow f^\# \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

é comutativo, isto é

$$\langle f, e \rangle = \langle f^\#, A^k e \rangle, \quad e \in E_k. \quad (5.18)$$

De fato, observando a sequência

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{A^{-k}} & E_k & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ & & & \searrow f^\# & \\ & & & & \end{array}$$

vemos que $f^\# = f \circ A^{-k}$.

Além disso, como $(A_{-k}^\#)^k \in \mathcal{L}is(E^\#, E_{-k}^\#)$, colocando

$$e^\# = (A_{-k}^\#) f^\# \in E_{-k}^\#$$

(5.18) implica

$$\langle f, e \rangle = \langle e^\#, e \rangle_k \text{ para todo } e \in E_k,$$

ou seja, $f = e^\#$ relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$, mostrando que $(E_k)^* = E_{-k}^\#$.

Pela densidade de $D(A_k) = E_{k+1}$ em E_k , o dual $(A_k)^*$ de A_k relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ é um operador linear bem definido e (5.16) implica que $(A_k)^* : D((A_k)^*) \subset E_k^\# \rightarrow E_k^\# \in \mathcal{C}(E_k^\#)$. Além disso, sendo A_k a E_k -realização de A e $A_{-k}^\# \supset A^\#$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle e^\#, A_k e \rangle_k &= \langle (A_{-k}^\#)^{-k} e^\#, A^k A_k e \rangle = \langle (A_{-k}^\#)^{-k} e^\#, A^k A e \rangle \\ &= \langle A^\# (A_{-k}^\#)^{-k} e^\#, A^k e \rangle = \langle A_{-k}^\# (A_{-k}^\#)^{-k} e^\#, A^k e \rangle = \langle A_{-k}^\# e^\#, e \rangle_k \end{aligned}$$

para todo $e^\# \in E_{-k+1}^\#$ e $e \in E_{k+1}$, mostrando que

$$(A_k)' \supset A_{-k}^\#, \quad (5.19)$$

relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$. Uma vez que $\rho(A_k) = \rho((A_k)^*)$, aplicando o item (iii) da Proposição 5.12 ao operador $(A_k)^*$, vemos que $0 \in \rho((A_k)^*) \cap \rho(A_{-k}^\#)$, o que mostra ser $(A_k)^*$ um operador injetivo e $A_{-k}^\#$ um operador sobrejetivo. Portanto (5.19) implica pelo Lema 5.19, que $(A_k)^* = A_{-k}^\#$ relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$, mostrando o teorema. ■

Corolário 5.22. *Para cada par $0 \leq \ell < k \leq m$ de inteiros fixados $\langle e^\#, e \rangle_k = \langle e^\#, e \rangle_\ell$, $e \in E_k$, $e^\# \in E_{-\ell}^\#$.*

Demonstração: Consideremos $e^\# \in E^\#$ e $e \in E_k$. Desde que $A_{-k}^\# \supset A_{-\ell}^\# \supset A^\#$ e $A \supset A_\ell$

$$\begin{aligned} \langle e^\#, e \rangle_k &= \langle (A_{-k}^\#)^{-k} e^\#, A^k e \rangle = \langle (A^\#)^{-k} e^\#, A^k e \rangle = \langle (A^\#)^\ell (A^\#)^{-k} (A^\#)^{-\ell} e^\#, A^k A^{-\ell} A^\ell e \rangle \\ &= \langle (A^k)' (A^\#)^{-k} (A^\#)^{-\ell} e^\#, (A)^\ell A^{-\ell} A^\ell e \rangle = \langle (A_{-\ell}^\#)^{-\ell} e^\#, A^\ell e \rangle = \langle e^\#, e \rangle_\ell. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Sendo a aplicação dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_\ell : E_{-\ell}^\# \times E_k \rightarrow \mathbb{K}$ contínua, a densidade de $E^\#$ em $E_{-\ell}^\#$ garante a identidade 5.20 para todo $e^\# \in E_{-\ell}^\#$. ■

Como consequência do corolário acima (caso $\ell = 0$)

$$\langle e^\#, e \rangle_k = \langle e^\#, e \rangle, \quad e \in E_k, \quad e^\# \in E^\#, \quad 0 < k \leq m,$$

logo pela densidade de $E^\#$ em $E_{-k}^\#$ a aplicação dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ é unicamente determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e assim dizemos que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ é *naturalmente induzida por* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A partir deste ponto, caso não haja risco de confusão, abusaremos da notação escrevendo simplesmente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$, para cada inteiro $0 \leq k \leq m$.

Observação 5.23.

- (a) *Todos os resultados obtidos permanecem válidos caso o espaço de Banach E não seja reflexivo, desde que o operador A^* seja densamente definido.*
- (b) *Porém se o espaço E não for reflexivo e também o operador A^* não for densamente definido, ainda é verdade que $A^* : D(A^*) \subset E^* \rightarrow E^*$ é um operador linear fechado com $0 \in \rho(A^*)$. Portanto, considerando $E^\# = E^*$ e $A^\# = A^*$ como antes, a escala dual de potências $\{(E_j^\#, A_j^\#); j = 0, 1, 2, \dots\}$ continua bem definida.*

Como consequência da Proposição 5.21, podemos provar o próximo teorema e a principal caracterização dos espaços de extrapolação E_{-k} via dualidade.

Teorema 5.24. *Com as hipóteses anteriores ao fixarmos um inteiro positivo m , obtemos que para todo inteiro $k \geq -m$ os espaços E_k e $E_k^\#$ são espaços de Banach reflexivos, e ainda com respeito ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$*

$$(E_k)^* = E_{-k}^\#, \text{ e } (A_k)^* = A_{-k}^\#, \quad -m \leq k \leq m. \quad (5.21)$$

Demonstração: Sendo o espaço E_k (resp. $E_k^\#$) isomorfo ao espaço E (resp. $E^\#$), uma vez que E , e portanto $E^\#$, são ambos espaços reflexivos, segue a primeira parte do teorema.

Agora, da Proposição 5.21 sabemos da validade de (5.21) no caso em que $0 \leq k \leq m$. Portanto, via reflexibilidade obtemos

$$E_k = (E_{-k}^\#)^*, \quad A_k = (A_{-k}^\#)^*, \quad 0 \leq k \leq m,$$

relativamente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Para cada $k = -m, -m+1, \dots$, consideremos o par

$$(F_k, B_k) = (E_k^\#, A_k^\#).$$

Logo de (5.21), com $k = 0$, a escala $\{(F_k, B_k); k = -m, -m+1, \dots\}$ é a escala dual da escala $\{(E_k, A_k); k = -m, -m+1, \dots\}$. Assim ao aplicarmos novamente (5.21) para os novos pares (F_k, B_k) , obtemos

$$E_k^\# = (E_{-k})^*, \text{ e } A_k^\# = (A_{-k})^*, \quad 0 \leq k \leq m,$$

mostrando que

$$E_{-k}^\# = (E_k)^*, \text{ e } A_{-k}^\# = (A_k)^*$$

para todo inteiro $-m \leq k \leq 0$, relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ■

Corolário 5.25. *Se m é um inteiro positivo fixado, então para cada $1 \leq k \leq m$*

$$E_{-k} = (E_k^\#)^* \text{ e } A_{-k} = (A_k^\#)^*$$

relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ■

Baseados no Teorema 5.24, podemos agora estender nossas escalas de extrapolação, a escalas bilaterais. Porém necessitamos de algumas considerações preliminares.

Se F e G são espaços de Banach com $F \xhookrightarrow{d} G$, então a inclusão natural $i^* : G^* \rightarrow F^*$ define um isomorfismo entre os espaços de Banach G^* e F^* . Além disso, observemos que

$$i^*(e^*) = e^* \circ i = e^*|_F \in F_G^* \text{ para todo } e^* \in G^*,$$

onde $F_G^* = \{f^* \in F^* : f^* \in \mathcal{L}((F, \|\cdot\|_G), \mathbb{K})\}$.

Reciprocamente, se $f^* \in F_G^*$, a densidade de F em G garante a existência de um único $e^* \in G^*$ satisfazendo $e^* \supset f^*$. Logo $i^*(G^*) = F_G^*$, e portanto no que segue identificamos sem maiores restrições os espaços G^* e F_G^* via a inclusão i^* .

Consideremos

$$\{(E_j, A_j); j = 0, 1, \dots\} \text{ e } \{(E_j^\#, A_j^\#); j = 0, 1, \dots\}$$

as escalas de potências unilaterais geradas pelos pares (E, A) e $(E^\#, A^\#)$ respectivamente. É claro que

$$E_j \xhookrightarrow{d} E_k \xhookrightarrow{d} E,$$

sempre que $0 < k < j$, e portanto,

$$E^* \xhookrightarrow{d} (E_k)^* \xhookrightarrow{d} (E_j)^*,$$

para todo inteiro $0 < k < j$. Além disso,

$$\langle e^*, e \rangle_{E_j} = \langle e^*, e \rangle_{E_k} = \langle e^*, e \rangle,$$

para todo $e^* \in E^*$, $e \in E_j$ sempre que $0 < k < j$.

Por densidade, a $E_j^* - E_j$ -dualidade fica, para todo $j = 0, 1, 2, \dots$, completamente determinada pela $E^* - E$ -dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Portanto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_k} = \langle \cdot, \cdot \rangle_k$ para todo $0 \leq k \leq m$ e do Teorema 5.24 obtemos

$$E^\# \xhookrightarrow{d} (E_k)^\# \xhookrightarrow{d} (E_j)^\#, \quad 0 \leq k < j \leq m.$$

Observemos que isto permanece válido para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, ao substituirmos m por um inteiro $\tilde{m} > m$, nas condições acima podemos considerar a escala extrapolada

$$\{(E_j^\#, A_j^\#); j = -\tilde{m}, -\tilde{m} + 1, \dots\}$$

de ordem $\tilde{m}$, sem mudarmos a escala anteriormente construída de ordem m gerada por $A^\#$. Portanto, procedendo indutivamente, podemos agora de fato construir a escala de potências bilateral gerada pelo par $(E^\#, A^\#)$,

$$\{(E_k^\#, A_k^\#); k \in \mathbb{Z}\}.$$

Substituindo nos argumentos acima a escala de potências $\{(E_j, A_j); j = 0, 1, 2, \dots\}$ pela escala dual $\{(E_j^\#, A_j^\#); j = 0, 1, 2, \dots\}$ e usando o Corolário 5.25 obtemos também a *escala de potências bilateral* gerada por (E, A) ,

$$\{(E_k, A_k); k \in \mathbb{Z}\}.$$

As observações acima são sintetizadas no seguinte teorema

Teorema 5.26. *Se E é um espaço de Banach reflexivo e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear fechado, densamente definido com $0 \in \rho(A)$, então as escalas de potências bilaterais*

$$\{(E_k, A_k); k \in \mathbb{Z}\} \text{ e } \{(E_k^\#, A_k^\#); k \in \mathbb{Z}\}$$

geradas pelos pares (E, A) e $(E^\#, A^\#)$ respectivamente, onde $E^\# = E^$ e $A^\# = A^*$, são escalas de Banach densamente imersas e reflexivas. Além disso,*

$$(E_k)^* = E_{-k}^\#, \text{ e } (A_k)^* = A_{-k}^\#,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, relativamente ao par de dualidade naturalmente induzido por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

■

5.1.5 Escalas de Interpolação-Extrapolação

Nesta seção mostraremos como construir, a partir de uma escala de Banach discreta e densamente imersa, uma nova escala, agora contínua. Usaremos nesta construção os espaços de interpolação associados a funtores admissíveis e de expoente θ introduzidos no Capítulo 4.

Como visto, ao considerarmos um espaço de Banach E e um operador linear $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ fechado, densamente definido e com $0 \in \rho(A)$, para cada $m = 0, 1, \dots$ fixado, a escala de potências extrapolada discreta

$$\{(E_j, A_j); j = -m, -m+1, -m+2, \dots\}$$

de ordem m gerada por (E, A) , é uma escala de Banach densamente imersa. Assim para cada índice $\theta \in (0, 1)$ associamos um functor de interpolação admissível $(\cdot, \cdot)_\theta$ e definimos

$$E_\alpha = (E_j, E_{j+1})_{\alpha-j} \text{ e } A_\alpha = E_\alpha\text{-realização de } A_j$$

para todo $j < \alpha < j+1$ e $j = -m, -m+1, -m+2, \dots$.

Teorema 5.27. *Nas condições acima a família $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \geq -m\}$ é uma escala de Banach densamente imersa, denominada a escala de interpolação-extrapolação de ordem m gerada pelo par (E, A) e pelos funtores $(\cdot, \cdot)_\theta$, $0 < \theta < 1$. Além disso essa escala é compactamente imersa se e somente se $A^{-1} \in \mathcal{K}(E)$. Neste caso*

$$(A_\alpha)^{-1} \in \mathcal{K}(E_\alpha), \quad \alpha \geq -m.$$

Demonstração: Da admissibilidade dos funtores de interpolação $(\cdot, \cdot)_\theta$ obtemos a primeira parte por interpolação dos Teoremas 5.10, 5.13 e da Observação 5.7 (iii). A segunda afirmação é uma consequência da Proposição 5.16 e Teorema B.3. Por fim, a última afirmação contida no teorema é implicada pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_\alpha & \xrightarrow[\cong]{(A_\alpha)^{-1}} & E_{\alpha+1} \\ & \searrow (A_\alpha)^{-1} \quad \swarrow i_\alpha & \\ & E_\alpha & \end{array}$$

onde $i_\alpha : E_{\alpha+1} \rightarrow E_\alpha$ é a inclusão natural de $E_{\alpha+1}$ em E_α que sabemos ser compacta. ■

Suponhamos agora que E seja um espaço de Banach reflexivo e $(\cdot, \cdot)_\theta \in \{[\cdot, \cdot]_\theta, (\cdot, \cdot)_{\theta, q}; 1 < q < \infty\}$, para todo $0 < \theta < 1$.

Definimos o *funtor de interpolação dual* $(\cdot, \cdot)_\theta^\#$ por

$$(\cdot, \cdot)_\theta^\# = \begin{cases} [\cdot, \cdot]_\theta & \text{se } (\cdot, \cdot)_\theta = [\cdot, \cdot]_\theta, \\ (\cdot, \cdot)_{\theta, q^*} & \text{se } (\cdot, \cdot)_\theta = (\cdot, \cdot)_{\theta, q}^0, \end{cases} \quad 1 < q < \infty,$$

sendo assim também $(\cdot, \cdot)_\theta^\#$ um funtor de interpolação admissível para cada $0 < \theta < 1$. Portanto a *escala dual de interpolação-extrapolação*

$$\{(E_\alpha^\#, A_\alpha^\#); \alpha \in \mathbb{R}\},$$

isto é, a escala de interpolação-extrapolação gerada pelo par $(E^\#, A^\#)$ e pelos funtores $(\cdot, \cdot)_\theta^\#$, $0 < \theta < 1$, é uma escala de Banach densamente imersa. O próximo teorema estende o teorema semelhante para escalas de potências.

Teorema 5.28. *Se E é um espaço de Banach reflexivo, $(\cdot, \cdot)_\theta \in \{[\cdot, \cdot]_\theta, (\cdot, \cdot)_{\theta, q}; 1 < q < \infty\}$ para todo $0 < \theta < 1$ e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear fechado, densamente definido com $0 \in \rho(A)$, então*

$$(E_\alpha)^* = E_{-\alpha}^\# \text{ e } (A_\alpha)^* = A_{-\alpha}^\#$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ relativamente ao par de dualidade naturalmente induzido por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Além disso os espaços E_α são reflexivos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Do Teorema 5.26 podemos considerar o caso $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Assim suponhamos $j < \alpha < j+1$ para algum $j \in \mathbb{Z}$. Considerando propriedades elementares dos funtores de interpolação real e complexo, e novamente do Teorema 5.26

$$(E_\alpha)^* = (E_j, E_{j+1})_{\alpha-j}^* = ((E_j)^*, (E_{j+1})^*)_{\alpha-j}^\# = (E_{-j}^\#, E_{-j-1}^\#)_{\alpha-j}^\# = (E_{-j-1}^\#, E_{-j}^\#)_{1-(\alpha+j)}^\# = E_{-\alpha}^\#.$$

Suponhamos agora que $e \in E_{\alpha+1} \hookrightarrow E_{j+1}$ e $e^\# \in E_{-j+1}^\# \hookrightarrow E_{-\alpha+1}^\#$. Uma vez que $A_j \supset A_\alpha$ e $A_{-\alpha}^\# \supset A_{-j}^\#$, do Teorema 5.26 segue que

$$\langle e^\#, A_\alpha e \rangle = \langle e^\#, A_j e \rangle = \langle A_{-j}^\# e^\#, e \rangle = \langle A_{-\alpha}^\# e^\#, e \rangle.$$

Como $A_{-\alpha}^\# \in \mathcal{L}is(E_{-\alpha+1}^\#, E_{-\alpha}^\#)$, deduzimos da densidade de $E_{-j+1}^\#$ em $E_{-\alpha+1}^\#$ que

$$\langle e^\#, A_\alpha e \rangle = \langle A_{-\alpha}^\# e^\#, e \rangle$$

para todo $e^\# \in E_{-\alpha+1}^\#$ e todo $e \in E_{\alpha+1}$, mostrando portanto que $(A_\alpha)^* \supset A_{-\alpha}^\#$.

Observemos ainda já que $0 \in \rho((A_\alpha)^*) = \rho(A_\alpha)$ e $A_{-\alpha}^\# \in \mathcal{L}is(E_{-\alpha+1}^\#, E_{-\alpha}^\#)$, o operador $(A_\alpha)^*$ é injetivo e o operador $A_{-\alpha}^\#$ é sobrejetivo, e portanto o Lema 5.19 implica que $(A_\alpha)^* = A_{-\alpha}^\#$.

Por reflexibilidade temos $(E^\#)^\# = E$, $(A^\#)^\# = A$ e $((\cdot, \cdot)_\theta)^\# = (\cdot, \cdot)_\theta$, logo a escala $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$ é de fato a escala dual da escala $\{(E_\alpha^\#, A_\alpha^\#); \alpha \in \mathbb{R}\}$ gerada pelo par $(E^\#, A^\#)$ e pelos funtores $(\cdot, \cdot)_\theta^\#$, com $0 < \theta < 1$. Portanto pelo que já mostramos

$$((E_\alpha)^*)^* = (E_{-\alpha}^\#)^\# = E_\alpha,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, concluindo a prova do teorema. ■

5.2 Equações de Evolução em Escalas de Banach

Uma vez estabelecida a teoria de interpolação-extrapolação em escalas de Banach, nos voltamos ao estudo do comportamento dos semigrupos de operadores lineares nessas escalas. Mostraremos, falando informalmente, que podemos transladar uma equação de evolução ao longo da escala, para então dessa forma, obter um contínuo de problemas relacionados. De particular importância é o fato de podermos desenvolver uma boa teoria de dualidade. Isto conduz a interpretarmos as soluções dos problemas de Cauchy extrapolados de forma natural como soluções fracas.

5.2.1 Semigrupos em Escalas de Interpolação-Extrapolação

Escalas de interpolação-extrapolação são muito úteis para se obter informações precisas sobre propriedades de regularidade e suavização de operadores lineares. Nesta subseção estudamos, em particular, o comportamento de semigrupos em escalas de interpolação-extrapolação. Estas investigações são a base abstrata para a teoria fraca de sistemas parabólicos lineares e semilineares.

Antes de prosseguirmos, necessitamos introduzir algumas notações e resultados preliminares a respeito de operadores lineares.

Definição 5.29. Para cada par de números reais σ e $M \geq 1$, denotaremos por

$$\mathcal{G}(E, M, \sigma)$$

o conjunto de todos os operadores lineares fechados $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ tais que $-A$ seja o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$, em E satisfazendo

$$\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M e^{\sigma t}, \quad t \geq 0.$$

E também

$$\mathcal{G}(E) = \bigcup_{\substack{M \geq 1 \\ \sigma \in \mathbb{R}}} \mathcal{G}(E, M, \sigma).$$

Ainda, se $A \in \mathcal{G}(E)$, definimos

$$\text{tipo}(A) = \inf \{ \sigma \in \mathbb{R} : \exists M \geq 1 \text{ tal que } A \in \mathcal{G}(E, M, \sigma) \}.$$

Similarmente se E_0 e E_1 são dois espaços de Banach tais que $E_1 \hookrightarrow E_0$, então definimos a classe

$$\mathcal{H}(E_1, E_0)$$

de todos os operadores lineares $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$, tais que $-A$ considerado como um operador em E_0 com domínio E_1 seja o gerador de um semigrupo analítico de operadores lineares em E_0 .

Para derivarmos estimativas uniformes para estes semigrupos e seus respectivos geradores, é de fundamental importância termos em mãos descrições quantitativas em $\mathcal{H}(E_1, E_0)$. Nesta direção caminha a seguinte definição

Definição 5.30. Fixados números reais $k \geq 1$ e $\omega > 0$, escrevemos $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega)$ sempre que $\omega + A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ e

$$k^{-1} \leq \frac{\|(\lambda + A)e\|_{E_0}}{|\lambda| \|e\|_{E_0} + \|e\|_{E_1}} \leq k,$$

para todo $0 \neq e \in E_1$ e todo $\text{Re } \lambda \geq \omega$.

Lema 5.31. *Consideremos E e F dois espaços de Banach tais que exista um espaço de Banach G com $E, F \hookrightarrow G$. Se E é um subespaço vetorial de F então $E \hookrightarrow F$.*

Demonstração: Seja $i : E \rightarrow F$ a inclusão natural. Se $\{e_n\}$ é uma sequência em E tal que

$$\begin{cases} e_n & \xrightarrow{E} e \\ i(e_n) & \xrightarrow{F} f, \end{cases}$$

então desde que $E, F \hookrightarrow G$ temos que

$$\begin{cases} e_n & \xrightarrow{G} e \\ i(e_n) = e_n & \xrightarrow{G} f. \end{cases}$$

Portanto $e = f$, isto é, $i(e) = f$, ou seja, o gráfico de i é fechado em $E \times F$. Agora o lema segue como consequência do Teorema do Gráfico Fechado. ■

Se E é um espaço de Banach, considerando operadores lineares $A, B : E \rightarrow E$, definimos o seu *comutador* por

$$[A, B] = AB - BA.$$

Assim, os operadores A e B comutam se e somente se o comutador $[A, B] = 0$. Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ e $B : E \rightarrow E$ são lineares então A e B comutam se $AB \supset BA$. Isto significa que $B(D(A)) \subset D(A)$ e $ABe = BAe$ para todo $e \in D(A)$.

Lema 5.32. *Se E é um espaço de Banach e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear fechado, então*

$$(i) \quad A(\lambda + A)^{-1} \supset (\lambda + A)^{-1}A, \quad \lambda \in \rho(-A).$$

$$(ii) \quad \text{Se } B \in \mathcal{L}(E) \text{ então}$$

$$AB \supset BA \iff [(\lambda + A)^{-1}, B] = 0 \text{ para algum } \lambda \in \rho(-A)$$

$$\iff [(\lambda + A)^{-1}, B] = 0 \text{ para todo } \lambda \in \rho(-A)$$

$$(iii) \quad \text{Se } A, B \in \mathcal{G}(E, M, \sigma) \text{ então}$$

$$Ae^{-tB} \supset e^{-tB}A, \quad t \geq 0,$$

$$\iff A(\mu + B)^{-1} \supset (\mu + B)^{-1}A, \quad \mu > \text{tipo}(B),$$

$$\iff [(\lambda + A)^{-1}, (\mu + B)^{-1}] = 0, \quad \lambda > \text{tipo}(A), \quad \mu > \text{tipo}(B)$$

$$\iff [(\lambda + A)^{-1}, e^{-tB}] = 0, \quad \lambda > \text{tipo}(A), \quad t \geq 0,$$

$$\iff [e^{-sA}, e^{-tB}] = 0, \quad s, t \geq 0.$$

Além disso, as afirmações envolvendo $\lambda > \text{tipo}(A)$ ou $\mu > \text{tipo}(B)$ já são verdades se elas valem para algum $\lambda > \text{tipo}(A)$ ou pelo menos para algum $\mu > \text{tipo}(B)$, respectivamente.

Demonstração:

(i) Se $\lambda \in \rho(-A)$ é como consequência da identidade

$$A(\lambda + A)^{-1} = (\lambda + A - \lambda)(\lambda + A)^{-1} = I - \lambda(\lambda + A)^{-1}$$

que provamos o item (i).

De fato, se $e \in D(A)$ então

$$(\lambda + A)^{-1}Ae = I - (\lambda + A)^{-1}(\lambda + A - A)e = (I - \lambda(\lambda + A)^{-1})e = A(\lambda + A)^{-1}e,$$

ou seja, $A(\lambda + A)^{-1} \supset (\lambda + A)^{-1}A$.

(ii) Suponhamos que $AB \supset BA$. Logo se $\lambda \in \rho(-A)$

$$(\lambda + A)B \supset B(\lambda + A) \Leftrightarrow B \supset (\lambda + A)^{-1}B(\lambda + A) \Leftrightarrow B(\lambda + A)^{-1} \supset (\lambda + A)^{-1}B.$$

Isto mostra que $AB \supset BA \Rightarrow [(\lambda + A)^{-1}, B] = 0$ para todo $\lambda \in \rho(A)$. Também $[(\lambda + A)^{-1}, B] = 0$ para algum $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow AB = BA$, e assim segue obviamente a afirmação.

Por fim (iii) segue como consequência do item (ii) e das fórmulas de representação

$$(\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} dt, \quad e \in E, \quad \text{Re } \lambda > \text{tipo } A \quad \text{e} \quad e^{-tA} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{k}A\right)^{-k} e, \quad t \geq 0, \quad e \in E.$$

■

Definição 5.33. Se E é um espaço de Banach e $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ um operador linear fechado, dizemos que $\mathcal{D} \subset_{s.e.v.} D(B)$ é um “core” para o operador B , se $\mathcal{D}$ for um subespaço denso de $D(B)$, $D(B)$ munido da norma do gráfico.

Lema 5.34. Consideremos E um espaço de Banach e $B \in \mathcal{G}(E)$ o negativo do gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo $\{e^{-tB}; t \geq 0\}$. Se $\mathcal{D} \subset_{s.e.v.} D(B)$ for um subespaço denso em E e invariante sob o semigrupo $\{e^{-tB}; t \geq 0\}$ então $\mathcal{D}$ é um “core” para B .

Demonstração: Consideremos $\overline{\mathcal{D}}$ o fecho de $\mathcal{D}$ em $D(B)$, $D(B)$ munido da norma do gráfico. Se $e \in D(B)$ então pela densidade de $\mathcal{D}$ em E , podemos considerar uma sequência $\{e_n\}$ em $\mathcal{D}$ tal que $e_n \xrightarrow{E} e$. Observemos ainda que

$$\int_0^t e^{-sB} e_n ds \in \overline{\mathcal{D}}$$

e além disso

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{-sB} e_n ds - \int_0^t e^{-sB} e ds \right\|_{D(B)} &= \left\| B \left(\int_0^t e^{-sB} e_n ds - \int_0^t e^{-sB} e ds \right) \right\|_E + \left\| \int_0^t e^{-sB} e_n ds - \int_0^t e^{-sB} e ds \right\|_E \\
&= \left\| e^{-tB} e_n - e_n - e^{-tB} e + e \right\|_E + \left\| \int_0^t e^{-sB} (e_n - e) ds \right\|_E \\
&\leq \left(\|e^{-tB}\|_{\mathcal{L}(E)} + 1 + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|e^{-sB}\|_{\mathcal{L}(E)} \right) \|e_n - e\|_E \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

mostrando que também $\int_0^t e^{-sB} e ds \in \overline{\mathcal{D}}$.

Agora

$$\begin{aligned}
\left\| t^{-1} \int_0^t e^{-sB} e ds - e \right\|_{D(B)} &= \left\| B \left(t^{-1} \int_0^t e^{-sB} e ds - e \right) \right\|_E + \left\| t^{-1} \int_0^t e^{-sB} e ds - e \right\|_E \\
&= \left\| t^{-1} (e^{-tB} e - e) - B e \right\|_E + \left\| t^{-1} \int_0^t e^{-sB} e ds - e \right\|_E \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+,
\end{aligned}$$

e assim concluímos que $e \in \overline{\mathcal{D}}$ e portanto $\overline{\mathcal{D}} = D(B)$ como queríamos. ■

Observação 5.35. *Observemos que a definição anterior é equivalente a garantirmos que o operador B coincide com o fecho de sua restrição ao subespaço $\mathcal{D}$.*

Lema 5.36. *Consideremos F e G dois espaços de Banach tais que $F \hookrightarrow G$. Se $B \in \mathcal{G}(G)$ é tal que $D(B) \stackrel{d}{\subset} F$, e além disso o semigrupo $\{e^{-tB}; t \geq 0\}$ deixa F invariante com $\|e^{-tB}\|_{\mathcal{L}(F)} \leq c$ para todo $0 \leq t \leq 1$, então $B_F \in \mathcal{G}(F)$ e $e^{-tB_F} = e^{-tB}|_F$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Fixemos $\omega \in \rho(-B)$ e consideremos $G_1 = D(B)$ munido da norma $\|(\omega + B) \cdot\|_G$. Se B_1 denota a G_1 -realização de B , então como $(\omega + B)e^{-tB} \supset e^{-tB}(\omega + B)$ pelo Lema 5.32, obtemos a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
G_1 & \xrightarrow{U_1(t)=e^{-tB}|_{G_1}} & G_1 \\
\omega+B \Big\downarrow \cong & & \cong \Big\downarrow \omega+B \\
G & \xrightarrow{e^{-tB}} & G
\end{array}$$

e obtemos ainda que $\{U_1(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo sobre G_1 . De fato, se $e \in G_1$ e s, t são números reais não negativos, uma vez que $U_1 = e^{-tB}|_{G_1}$ temos

- $U_1(t+s)e = U_1(t)U_1(s)e$,
- $\|U_1(t)e - e\|_{G_1} = \|(\omega + B)U_1(t)e - (\omega + B)e\|_G = \|e^{-tB}(\omega + B)e - (\omega + B)e\|_G \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0^+.$

Consideremos $U_F(t) = e^{-tB}|_F$ para todo $t \geq 0$, é claro que $\{U_F(t); t \geq 0\}$ define um semigrupo sobre F e é tal que $U_F(t) \supset U_1(t)$ para todo $t \geq 0$. Desde que $G_1 \subset F$, segue do Lema 5.31 que $G_1 \hookrightarrow F$.

Logo, se $e \in G_1$, vemos que $U_F(t)e = U_1(t)e \rightarrow e \in G_1$ em G_1 , e portanto em F , quando $t \rightarrow 0$. Agora dado $e \in F$, sendo G_1 um subespaço denso de F , podemos considerar uma sequência $\{e_n\}$ em G_1 tal que $e_n \xrightarrow{F} e$. Assim dado $\varepsilon > 0$, tomando t suficientemente pequeno e n suficientemente grande

$$\begin{aligned} \|U_F(t)e - e\|_F &\leq \|U_F(t)e - U_F(t)e_n\|_F + \|U_F(t)e_n - e_n\|_F + \|e_n - e\|_F \\ &\leq c\|e - e_n\|_F + \|U_1(t)e_n - e_n\|_F + \|e_n - e\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

o que mostra ser $\{U_F(t); t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo sobre F . Observemos que na penúltima desigualdade usamos que $\|U_F(t)\|_{L(F)} \leq c$ uniformemente para $t \in [0, 1]$.

Seja $-A$ o gerador infinitesimal deste semigrupo. Dado $\lambda > \max\{\text{tipo}(A), \text{tipo}(B)\}$ concluímos da representação do resolvente pelo semigrupo que

$$(\lambda + A)^{-1}e = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_F(t)e dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-tB}e dt = (\lambda + B)^{-1}e, \quad e \in F.$$

Portanto do Lema (5.2), $(\lambda + A)^{-1} = (\lambda + B_F)^{-1}$ implicando $A = B_F$. ■

Suponhamos agora que E seja um espaço de Banach e $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ um operador linear densamente definido com $0 \in \rho(B)$, e $(\cdot, \cdot)_\theta$, $0 < \theta < 1$, funtores de interpolação exatos e admissíveis.

Fixado um inteiro positivo m consideremos

$$\{(E_\alpha, B_\alpha); \alpha \geq -m\}$$

a escala de interpolação-extrapolação de ordem m gerada pelo par (E, B) e pelos funtores $(\cdot, \cdot)_\theta$, $0 < \theta < 1$. Consideremos também

$$\{(E_j^\#, B_j^\#); j = 0, 1, \dots\}$$

a escala dual de potências gerada por $(E^\#, B^\#) = (E^*, B^*)$.

Dado $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um outro operador linear fechado e densamente definido, considerando $A^\# = A^*$, denotamos por A_α a E_α -realização de A para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainda, se o operador A for fechável em $E_{-\alpha}$ para algum $\alpha \in (0, m]$ então podemos considerar

$$A_{-\alpha} = \text{fecho de } A \text{ em } E_{-\alpha}$$

a $E_{-\alpha}$ -realização de A . Observemos ainda que $A_\alpha : D(A_\alpha) \subset E_\alpha \rightarrow E_\alpha$ é um operador fechado sempre que estiver bem definido.

Seja $n = 0, 1, \dots$ e suponhamos que $\rho(A) \neq \emptyset$ e ainda

$$D(A^k) = E_k, \text{ para todo inteiro } 0 \leq k \leq n. \quad (5.22)$$

Então, se $\mu \in \rho(-A)$ sendo $D((\mu + A)^k) = D(A^k)$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, do Teorema do Gráfico Fechado obtemos que ambos, $(\mu + A)^k B^{-k}$ e $B^k (\mu + A)^{-k}$, pertencem a $\mathcal{L}(E)$ para $0 \leq k \leq n$, ou equivalentemente,

$$(\mu + A)^k \in L(E_k, E) \text{ e } (\mu + A)^{-k} \in L(E, E_k) \quad (5.23)$$

para todo $0 \leq k \leq n$. Semelhantemente, se

$$D((A^\#)^k) = E_k^\#, \quad 0 \leq k \leq m, \quad (5.24)$$

sendo $\rho(A) = \rho(A^\#)$, obtemos

$$(\mu + A^\#) \in L(E_k^\#, E^\#) \text{ e } (\mu + A^\#)^{-k} \in L(E^\#, E_k^\#) \quad (5.25)$$

para todo $0 \leq k \leq m$. Portanto

$$N(A, \mu, m, n) = \text{máximo das normas de todos operadores} \\ \text{nas condições (5.23) e (5.25)}$$

é um número real bem definido sempre que as condições (5.22) e (5.24) estiverem satisfeitas.

O próximo teorema é o principal resultado deste capítulo. De fato, ele é um dos principais resultados da teoria das escalas de interpolação-extrapolação, mostrando que se um operador $A \in \mathcal{G}(E)$ satisfaz as condições (5.22) e (5.24), então o operador A_α é bem definido e pertence a $\mathcal{G}(E_\alpha)$ para todo $-m \leq \alpha \leq n$. Além disso, os semigrupos $\{e^{-tA_\alpha}; t \geq 0\}$ são obtidos como extensões ou restrições do semigrupo $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$.

Similarmente, se $-A$ é gerador de um semigrupo analítico o mesmo é verdade para o operador $-A_\alpha$.

Adicionalmente, este teorema contém informações quantitativas bastante úteis, sendo a base abstrata da formulação fraca de problemas de valor inicial e de fronteira bastante gerais para uma grande variedade de equações diferenciais concretas. Ele também fundamenta argumentos de *bootstrapping* abstratos que conduzem a resultados de regularidade bastante precisos e que ficarão claros no desenvolvimento das seções subsequentes.

Teorema 5.37. *Nas condições acima suponha-se $\{(E_\alpha, B_\alpha); \alpha \geq -m\}$ a escala de interpolação-extrapolação de ordem m gerada pelo par (E, B) e pelos funtores $(\cdot, \cdot)_\theta$, $0 < \theta < 1$, e $\{(E_j^\#, B_j^\#); j = 0, 1, 2, \dots\}$ a escala dual de potências gerada pelo par $(E^\#, B^\#)$. Consideremos também um operador $A \in \mathcal{G}(E)$ e suponha-se que exista um inteiro não negativo n tal que*

$$D(A^k) = E_k, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (5.26)$$

e

$$D((A^\#)^k) = E_k^\#, \quad 0 \leq k \leq m. \quad (5.27)$$

Então $A_\alpha \in \mathcal{G}(E_\alpha)$ e $\rho(A_\alpha) = \rho(A)$ para todo $-m \leq \alpha \leq n$. Além disso, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_\alpha & \xrightarrow{e^{-tA_\alpha}} & E_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\beta & \xrightarrow{e^{-tA_\beta}} & E_\beta \end{array}$$

é comutativo sempre que $-m \leq \beta \leq \alpha \leq n$ e $t \geq 0$.

Mais precisamente, se $A \in \mathcal{G}(E, M, \omega)$ para algum $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$, fixando $\mu \in \rho(-A)$ e definindo $N = N(A, \mu, m, n)$, obtemos

$$A_\alpha \in \mathcal{G}(E_\alpha, N^2 M, \omega), \quad -m \leq \alpha \leq n,$$

e no caso em que $n \geq 1$,

$$\lambda + A_\alpha \in \mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha), \quad \text{para todo } \lambda \in \rho(-A) \text{ e todo } -m \leq \alpha \leq n-1.$$

Ainda mais,

$$\|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)} \leq N^2 \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E)} \quad (5.28)$$

e

$$\|(\lambda + A_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+j})} \leq N^2 \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_j)} \quad (5.29)$$

para todo $\lambda \in \rho(-A)$, $j = 0, 1$, e todo $-m \leq \alpha \leq n-1$.

Similarmente, se $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ e $n \geq 1$ então $A_\alpha \in \mathcal{H}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)$ para todo $-m \leq \alpha \leq n-1$. Mais precisamente se $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega_0)$ para algum $k \geq 1$ e $\omega_0 > 0$ então

$$A_\alpha \in \mathcal{H}(E_{\alpha+1}, E_\alpha, k_0, \omega_0), \quad -m \leq \alpha \leq n-1,$$

onde $k_0 = N^2(1 + k + kN^2\|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)})$. Além disso dado $\sigma > \text{tipo}(A)$,

$$\|e^{-tA_\beta}\|_{\mathcal{L}(E_\beta, E_\alpha)} \leq ct^{\beta-\alpha} e^{\sigma t}, \quad t > 0, \quad (5.30)$$

para todo $-m \leq \beta \leq \alpha \leq n$, onde a constante c depende somente de $\alpha - \beta$.

Demonstração: Dados números reais ω e $M \geq 1$, suponhamos que $A \in \mathcal{G}(E, M, \omega)$. Considerando $\mu \in \rho(-A)$ mostraremos primeiramente as afirmações do teorema restringindo-nos ao caso particular $B = \mu + A$. Logo as condições (5.26) e (5.27), exigidas nas hipóteses do teorema, estão trivialmente satisfeitas para cada $m, n \in \mathbb{N}$ fixados. Ainda $N = N(A, \mu, m, n) = 1$, já que $B = \mu + A$ restringe ou estende isomorfismos isométricos de E_{k+1} a E_k para todo inteiro k (restringe se $k < 0$ e estende se $k > 0$).

O Lema 5.32 nos garante que

$$B^j e^{-tA} \supset e^{-tA} B^j, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } j \in \mathbb{Z}, \quad (5.31)$$

o que, em particular, ($j=1$), mostra que $D(B) = E_1$ é invariante sob o semigrupo $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$ e

$$\|e^{-tA}e\|_{E_1} = \|Be^{-tA}e\|_E = \|e^{-tA}Be\|_E \leq \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(E)}\|e\|_{E_1}, \quad t \geq 0, \quad e \in E_1.$$

Agora do Lema 5.31 deduzimos que $A_1 \in \mathcal{G}(E_1, M, \omega)$ sendo $e^{-tA_1} = e^{-tA}|_{E_1}$, e pelo Lema 5.2 $\rho(A_1) = \rho(A)$. Observemos ainda que do Lema 5.32 também obtemos

$$\|(\lambda + A_1)^{-1}e\|_{E_{1+k}} = \|B(\lambda + A_1)^{-1}e\|_{E_k} = \|B(\lambda + A)^{-1}e\|_{E_k} = \|(\lambda + A)^{-1}Be\|_{E_k} \leq \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_k)}\|e\|_{E_1}$$

para cada $\lambda \in \rho(-A)$, $k = 0, 1$ e $e \in E_1$ o que prova (5.29) para $\alpha = 1$.

Considerando agora o operador $B_1 = \mu + A_1$, obtemos de forma similar aos argumentos anteriores

$$\begin{aligned} \|(\lambda + A_2)^{-1}e\|_{E_{2+k}} &= \|B^2(\lambda + A_2)^{-1}e\|_{E_k} = \|B^2(\lambda + A)^{-1}e\|_{E_k} = \|(\lambda + A)^{-1}B^2e\|_{E_k} \\ &\leq \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_k)}\|e\|_{E_2} \end{aligned}$$

para cada $\lambda \in \rho(-A)$, $k = 0, 1$ e $e \in E_2$ provando (5.29) para $\alpha = 2$. Assim aplicando esses argumentos indutivamente, obtemos as afirmações correspondentes para todo $\alpha \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que ao fazer $j = -1$ em (5.31) o operador e^{-tA} estende-se a um operador $U_{-1}(t) \in \mathcal{L}(E_{-1})$. De fato, isto segue da densidade de E_0 em E_{-1} e da desigualdade

$$\|e^{-tA}e\|_{E_{-1}} = \|B^{-1}e^{-tA}e\|_E = \|e^{-tA}B^{-1}e\|_E \leq \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(E)}\|e\|_{E_{-1}}$$

válida para todo $e \in E_0$.

Além disso, desde que $B_{-1} \in \mathcal{L}is(E, E_{-1})$ a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e^{-tA}} & E \\ B_{-1} \downarrow \cong & & \cong \downarrow B_{-1} \\ E_{-1} & \xrightarrow{U_{-1}} & E_{-1} \end{array}$$

implica

$$U_{-1}(t) = B_{-1} e^{-tA} (B_{-1})^{-1}, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (5.32)$$

Com isso fica fácil vermos que $\{U_{-1}(t); t \geq 0\}$ define um semigrupo fortemente contínuo sobre E_{-1} satisfazendo

$$\|U_{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(E_{-1})} \leq \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(E)}, \quad t \geq 0.$$

De fato, considerando s, t reais não negativos temos para cada $e \in E$

- $U_1(t+s)e = B_{-1} e^{-(t+s)A} (B_{-1})^{-1} e = B_{-1} e^{-tA} e^{-sA} (B_{-1})^{-1} e$
 $= B_{-1} e^{-tA} (B_{-1})^{-1} B_{-1} e^{-sA} (B_{-1})^{-1} e = U_1(t) U_1(s) e$
- A densidade de E em E_{-1} nos garante a existência de uma sequência $\{e_n\}$ em E tal que $e_n \xrightarrow{E_{-1}} e$. Logo

$$\begin{aligned} \|U_{-1}(t)e - e\|_{E_{-1}} &\leq \|U_{-1}(t)e - U_{-1}(t)e_n\|_{E_{-1}} + \|U_{-1}(t)e_n - e_n\|_{E_{-1}} + \|e_n - e\|_{E_{-1}} \\ &= \|U_{-1}(t)e - U_{-1}(t)e_n\|_{E_{-1}} + \|e^{-tA}e_n - e_n\|_{E_{-1}} + \|e_n - e\|_{E_{-1}} \\ &= \|U_{-1}(t)e - U_{-1}(t)e_n\|_{E_{-1}} + \|B^{-1}(e^{-tA}e_n - e_n)\|_E + \|e_n - e\|_{E_{-1}} \\ &\leq C\|e - e_n\|_{E_{-1}} + \|e^{-At}B^{-1}e_n - B^{-1}e_n\|_E + \|e_n - e\|_{E_{-1}}^* \end{aligned}$$

e como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \|e^{-tA}B^{-1}e_n - B^{-1}e_n\|_E \right) = 0,$$

deduzimos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} U_{-1}(t)e = e$.

- Finalmente se $\tilde{e} \in E_1$, obtemos do Lema 5.32 que

$$\|U_{-1}(t)\tilde{e}\|_{E_{-1}} = \|e^{-tA}\tilde{e}\|_{E_{-1}} = \|B^{-1}e^{-tA}\tilde{e}\|_E = \|e^{-tA}B^{-1}\tilde{e}\|_E \leq \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(E)} \|\tilde{e}\|_{E_{-1}}. \quad (5.33)$$

Desde que $U_{-1}(t) \in \mathcal{L}(E_{-1})$, obtemos pela densidade de E_1 em E_{-1} que (5.33) é válida para todo $\tilde{e} \in E_{-1}$, isto é, $\|U_{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(E_{-1})} \leq \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(E)}$ como queríamos.

Seja $-C$ o gerador infinitesimal do semigrupo $\{U_{-1}(t); t \geq 0\}$. De (5.32) deduzimos que $C = B_{-1}AB^{-1}$ com $D(C) = E$. De fato, se $e \in E$ então

$$\begin{aligned} \|t^{-1}(U_{-1}(t)e - e) - B_{-1}AB^{-1}e\|_{E_{-1}} &= \|t^{-1}(B_{-1}e^{-tA}(B_{-1})^{-1}e - e) - B_{-1}AB^{-1}e\|_{E_{-1}} \\ &= \|t^{-1}(Be^{-tA}B^{-1}e - e) - BAB^{-1}e\|_{E_{-1}} \\ &= \|t^{-1}(e^{-tA}B^{-1}e - B^{-1}e) - AB^{-1}e\|_E \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

*usamos o fato de U_{-1} ser uniformemente limitado para t em intervalos limitados.

Agora a inclusão de operadores

$$C = B_{-1}AB^{-1} = B_{-1}A(\mu + A)^{-1} \supset B_{-1}(\mu + A)^{-1}A = B_{-1}B^{-1}A = A$$

garantida pelo item (i) do Lema 5.32, assegura-nos que $C \supset A$. E assim garantimos que A é um operador fechável em E_{-1} com $C \supset A_{-1}$ (= fecho de A em E_{-1}).

Novamente pela inclusão de operadores

$$e^{-tA_1} \subset e^{-tA} \subset U_{-1}(t), \quad t \geq 0, \quad (5.34)$$

obtemos que E_1 é invariante sob o semigrupo $\{U_{-1}(t); t \geq 0\}$, e assim, a densidade de E_1 em E_{-1} e o Teorema 5.34 asseguram ser E_1 um “core” para o operador C , ou seja, C é o fecho de sua restrição a E_1 . Consequentemente $C = A_{-1}$, provando que o operador $A_{-1} \in \mathcal{G}(E_{-1}, M, \omega)$ e $e^{-tA} \subset e^{-tA_{-1}}$. Ainda pelo Lema 5.2 obtemos $\rho(A_{-1}) = \rho(A)$.

Observemos agora que

$$\begin{aligned} \|(\lambda + A_{-1})^{-1}e\|_{E_{-1+k}} &= \|B^{-1}(\lambda + A_{-1})^{-1}e\|_{E_k} = \|(\mu + A)^{-1}(\lambda + A)^{-1}e\|_{E_k} \\ &= \|(\lambda + A)^{-1}(\mu + A)^{-1}e\|_{E_k} \leq \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_k)} \|e\|_E \end{aligned}$$

para $k = 0, 1$, $\lambda \in \rho(-A)$ e $e \in E_0 = E$ provando (5.29) para $\alpha = -1$.

Considerando agora o operador $B_{-1} = \lambda + A_{-1}$, obtemos similarmente os resultados para $\alpha = -2$. Portanto aplicando esses argumentos indutivamente, obtemos as afirmações correspondentes para cada inteiro $\alpha \geq -m$.

Agora consideremos $j < \alpha < j+1$ para algum inteiro $j \geq -m$. Deduzimos por interpolação do que foi provado que E_α é invariante sob o semigrupo $\{e^{-tA_j}; t \geq 0\}$ e que

$$\|e^{-tA_j}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} \leq \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

É claro do Lema 5.36 que $C_\alpha = (A_j)_{E_\alpha} \in \mathcal{G}(E_\alpha, M, \omega)$, com e^{-tC_α} a restrição de e^{-tA_j} a E_α para todo $t \geq 0$.

Portanto $j \in \mathbb{N}$ nos fornece $C_\alpha = A_\alpha$ por definição.

Por outro lado, se $j < 0$ observamos que por analogia a (5.34) o espaço E_1 é invariante sob o semigrupo $\{e^{-tC_\alpha}; t \geq 0\}$, e ainda $e^{-tC_\alpha}|_{E_1} = e^{-tA_1}$ para todo $t \geq 0$. Similarmente como acima, o Teorema 5.34 nos garante que o operador A_α está bem definido com $A_\alpha = C_\alpha$.

Logo as afirmações contidas no teorema relativas a $A \in \mathcal{G}(E, M, \omega)$ são agora óbvias exceto as estimativas (5.28) e (5.29).

Por exemplo, a estimativa (5.29) é consequência da densidade de E_{j+1} em E_α . De fato, seja $e \in E_{j+1}$, do já que mostramos segue para todo $\lambda \in \rho(-A)$

$$\|(\lambda + A_\alpha)^{-1}e\|_{E_{j+1+k}} = \|(\lambda + A_{j+1})^{-1}e\|_{E_{j+1+k}} \leq \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_k)} \|e\|_{E_{j+1}}, \quad k = 0, 1,$$

e assim por densidade

$$\|(\lambda + A_\alpha)^{-1}e\|_{E_{\alpha+k}} \leq \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_k)} \|e\|_{E_\alpha}, \quad e \in E_\alpha, \quad k = 0, 1.$$

Já para mostrarmos a estimativa (5.28), observemos que o Lema 5.32 implica $AB^{-j} \supset B^{-j}A$ para todo $j = 0, 1, \dots$. Portanto, ao fixarmos $j = 0, 1, 2, \dots$ e $e \in E_{j+1}$,

$$\begin{aligned} \|A_j e\|_{E_j} &= \|AB^{-j}B^j e\|_{E_j} = \|B^{-j}AB^j e\|_{E_j} = \|AB^j e\|_E \\ &\leq \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|B^j e\|_{E_1} = \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|e\|_{E_{j+1}}, \end{aligned}$$

mostrando (5.28) no caso em que $\alpha \in \mathbb{N}$.

No caso $j = -1, \dots, -m$ e $e \in E_1$, a estimativa é consequência da desigualdade

$$\|A_j e\|_{E_j} = \|B^j A_j e\|_E = \|AB^j e\|_E \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E)} \|e\|_{E_{j+1}},$$

em virtude da densidade de E_1 em E_{1-j} , visto desse modo, ser válida esta última estimativa para todo $e \in E_{j+1}$. Agora (5.28) segue por interpolação do que acabamos de mostrar.

Suponhamos agora que $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega_0)$. Dessa forma sabemos que

$$\|e\|_{E_1} \leq k \|(\lambda + A)e\|_{E_0}, \quad e \in E_1,$$

permitindo-nos deduzir que

$$\|(\lambda + A)^{-1}e\|_{E_1} \leq k \|e\|_{E_0}$$

para todo $e \in E_0$. Além disso, em particular nós temos $A \in \mathcal{G}(E, k, \omega_0)$ e portanto da estimativa (5.29)

$$\|(\lambda + A_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+1})} \leq \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq k$$

sempre que $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_0$ e $\alpha \geq -m$. E assim obtemos de (5.28) $A_\alpha \in \mathcal{H}(E_{\alpha+1}, E_\alpha, k_0, \omega_0)$.

Fixado $\sigma > \operatorname{tipo}(A)$, sabemos existir $v \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $M_0 \geq 1$ tais que $\sigma + \Sigma_v \subset \rho(-A)$ e

$$\|(\lambda + A_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} + (1 + |\lambda|)^{1-k} \|(\lambda + \sigma + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0, E_k)} \leq M_0$$

para todo $\lambda \in \Sigma_v$ e $k = 0, 1$.

Desde que $\rho(A_\alpha) = \rho(A)$, ao substituírmos A por $\sigma + A$ e λ por $\lambda + \sigma$ em (5.28) e (5.29) respectivamente, obtemos

$$\sigma + \Sigma_v \subset \rho(-A_\alpha) \quad (5.35)$$

e

$$\|\sigma + A_\alpha\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)} + (1 + |\lambda|)^{1-k} \|(\lambda + \sigma + A_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+k})} \leq M_0, \quad (5.36)$$

para todo $\lambda \in \Sigma_v$, $k = 0, 1$ e $\alpha \geq -m$. Seguindo em particular para $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\|e^{-(\sigma+A_j)t}\|_{\mathcal{L}(E_j)} + t^{\ell+1} \|(\sigma + A_j)^\ell e^{-(\sigma+A_j)t}\|_{\mathcal{L}(E_j, E_{j+1})} \leq c(\ell), \quad (5.37)$$

para todo inteiro $j \geq -m$ e todo $t \geq 0$. Como (5.29) implica

$$\|(\sigma + A_j)^{-\ell}\|_{\mathcal{L}(E_j, E_{j+\ell})} \leq (\|(\sigma + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_1)})^\ell,$$

a estimativa (5.30) segue de (5.37) uma vez que $\alpha, \beta \geq -m$ são inteiros.

Denotando por $\{(E_{\alpha,q}, B_{\alpha,q}); \alpha \geq -m\}$ a escala de interpolação-extrapolação gerada pelo par (E, B) e pelos funtores $(\cdot, \cdot)_{\theta,q}$, $0 < \theta < 1$ onde $1 \leq q < \infty$, deduzimos por interpolação do que provamos que

$$t^{\alpha-j} \|e^{-tA_j}\|_{\mathcal{L}(E_j, E_{\alpha,q})} + t^{1+j-\alpha} \|e^{-tA_j}\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha,q}, E_{j+1})} + \|e^{-tA_j}\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha,q})} \leq ce^{\sigma t} \quad (5.38)$$

para todo $t > 0$, $j \geq -m$ inteiro, $\alpha \in (j, j+1)$ e $1 < q < \infty$. Portanto, ao interpolarmos novamente, usando a propriedade de reiteração[†] vemos que

$$\|e^{-tA_j}\|_{L(E_{\beta,q_1}, E_{\alpha,q_2})} \leq ct^{\beta-\alpha} e^{\sigma t}, \quad (5.39)$$

para todo $t \geq 0$, $-m \leq j \leq q_1$ inteiro, $j < \beta < \alpha < j+1$ e $1 < q_2 \leq q$. Concluimos portanto de (5.38)-(5.39) e do Teorema Extremal[‡] $((E_0, E_1)_{\theta, p_2} \xrightarrow{d} E_\theta)$, a validade de (5.30) contanto que $j \leq \beta \leq \alpha \leq j+1$ para algum inteiro $j \geq -m$.

Finalmente, suponhamos $-m \leq \beta < \alpha < \infty$ e (β, α) contendo um número inteiro. Então existem inteiros j, k tais que

$$-m \leq j \leq \beta < j+1 \leq k \leq \alpha < k+1.$$

Fazendo $s = \frac{t}{3}$, obtemos via propriedade de semigrupo

$$\|e^{-tA_\beta}\|_{\mathcal{L}(E_\beta, E_\alpha)} \leq \|e^{-sA_k}\|_{\mathcal{L}(E_k, E_\alpha)} \|e^{-sA_{j+1}}\|_{\mathcal{L}(E_{j+1}, E_k)} \|e^{-sA_\beta}\|_{\mathcal{L}(E_\beta, E_{j+1})}$$

[†]Suponhamos que $(E_0, E_1)_{\theta, p_1} \hookrightarrow F_j \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\theta, p_2}$, $j = 0, 1$.
Então $(F_0, F_1)_{\eta, q} = (E_0, E_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, q}$, $0 < \eta < 1$, $p_1 \leq q \leq p_2$.

[‡]ver Teo B.3.

para todo $t > 0$ e obtemos (5.30) como queríamos.

Consideramos agora o caso geral. Denotando por

$$\{(E_\alpha(\mu), B_\alpha(\mu)); \alpha \geq -m\}$$

a escala de interpolação-extrapolação de ordem m gerada por $(E, B(\mu))$ e $(\cdot, \cdot)_\theta$, $0 < \theta < 1$. Obtemos de (5.26) que $D(B^k(\mu)) = E_k$ para $0 \leq k \leq n$, onde $B^k(\mu) = [B(\mu)]^k$. Portanto do item (vi) da observação 5.7, $E_k = E_k(\mu)$ e

$$\|B^k B^{-k}(\mu)\|_{\mathcal{L}(E)}^{-1} \|e\|_{E_k} \leq \|e\|_{E_k(\mu)} \leq \|B^k(\mu) B^{-k}\|_{\mathcal{L}(E)} \|e\|_{E_k}$$

para $e \in E_k$ e $0 \leq k \leq n$. Semelhantemente, $D([(B(\mu))^*]^k) = D([B^*]^k)$ para $0 \leq k \leq m$ segue de (5.27). Consequentemente, pela Proposição 5.17, $E_{-k} = E_{-k}(\mu)$ e

$$\|(B^*(\mu))^k (B^*)^{-k}\|_{L(E^*)}^{-1} \|e\|_{E_{-k}} \leq \|e\|_{E_{-k}(\mu)} \leq \|(B^*)^k (B^*(\mu))^{-k}\|_{\mathcal{L}(E^*)} \|e\|_{E_{-k}}$$

para $e \in E_{-k}$ e $0 \leq k \leq m$ onde $B^*(\mu) = (B(\mu))^*$. Como B^k (resp. $(B^*)^k$) é um isomorfismo isométrico de E_k sobre E (resp. $E_k^\#$ sobre $E^\#$), vemos que

$$\|B^k B^{-k}(\mu)\|_{\mathcal{L}(E)} = \|(\mu + A)^{-k}\|_{\mathcal{L}(E, E_k)}$$

e

$$\|B^k(\mu) B^{-k}\|_{\mathcal{L}(E)} = \|(\mu + A)^k\|_{\mathcal{L}(E_k, E)}$$

para $0 \leq k \leq n$, e

$$\|(B^*(\mu))^j (B^*)^{-j}\|_{\mathcal{L}(E^*)} = \|(\mu + A^\#)^j\|_{\mathcal{L}(E_j^\#, E^\#)}$$

e

$$\|(B^*)^j (B^*(\mu))^{-j}\|_{\mathcal{L}(E^*)} = \|(\mu + A^\#)^{-j}\|_{\mathcal{L}(E_j^\#, E^\#)}$$

para $0 \leq j \leq m$. Portanto segue que $E_k = E_k(\mu)$ e

$$N^{-1} \|e\|_{E_k} \leq \|e\|_{E_k(\mu)} \leq N \|e\|_{E_k}, \quad e \in E_k \quad (5.40)$$

para $-m \leq k \leq n$. Disto obtemos por interpolação que

$$E_\alpha = E_\alpha(\mu), \quad -m \leq \alpha \leq n, \quad (5.41)$$

e

$$N^{-1} \|e\|_{E_\alpha} \leq \|e\|_{E_\alpha(\mu)} \leq N \|e\|_{E_\alpha}, \quad e \in E_\alpha, \quad -m \leq \alpha \leq n.$$

Agora as afirmações contidas no teorema são consequências de (5.40)-(5.41) e da primeira parte da prova. ■

Corolário 5.38. *Suponha que $A \in \mathcal{G}(E)$ e $B = \mu + A$ para algum $\mu \in \rho(-A)$. Então (5.26) é verdade para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ e (5.27) também está satisfeita. Portanto as afirmativas do Teorema 5.37 valem para cada $-m \leq \beta \leq \alpha < \infty$. Além disso, neste caso temos $N = 1$.*

Observação 5.39. *Se $A \in \mathcal{G}(E)$, e $\mu \in \rho(-A)$, denotando por*

$$\{(E_\alpha(\mu), B_\alpha(\mu)); \alpha \geq -m\}$$

a escala de interpolação-extrapolação gerada por $\mu + A$ e $(\cdot, \cdot)_\theta$, $0 < \theta < 1$, obtemos

$$E_\alpha(\mu) = E_\alpha(\nu), \quad \mu, \nu \in \rho(-A).$$

Mais precisamente

$$\|e\|_{E_\alpha(\nu)} \leq (1 + |\mu - \nu| \|(\mu + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)})^\alpha \|e\|_{E_\alpha(\mu)}, \quad \alpha \geq 0,$$

e

$$\|e\|_{E_{-\alpha}(\nu)} \leq (1 + |\mu - \nu| \|(\nu + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)})^\alpha \|e\|_{E_{-\alpha}(\mu)}, \quad \alpha \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq m,$$

para $\mu, \nu \in \rho(-A)$.

Problemas Parabólicos com Não-Linearidades Críticas

A teoria desenvolvida nos capítulos precedentes concretiza-se neste capítulo na forma do “principal” resultado dessa dissertação. Apresentamos um teorema abstrato de existência e unicidade para equações semilineares com não linearidades satisfazendo certas condições de ε -regularidade. Com as ferramentas em mãos pudemos então estudar para um particular modelo as propriedades de “criticalidade” da parte não linear.

Condições mais gerais relativas às condições de contorno podem ser encontradas em [9].

6.1 Resultados Abstratos

Relativamente ao operador $A : D(A) \subset E \rightarrow E$, este será um operador linear fechado e densamente definido, de forma a ser $-A$ seja um operador setorial no espaço de Banach E . Fixado um inteiro positivo m , consideramos $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \geq -m\}$ a escala de interpolação-extrapolação de ordem m , gerada pelo par (E, A) e pelos funtores de interpolação $(\cdot, \cdot)_\theta$, $0 \leq \theta < 1$, e e^{At} , o respectivo semigrupo analítico gerado por A . Para nossos propósitos podemos, sem perda de generalidade, assumir que este semigrupo seja uniformemente limitado em $\mathcal{L}(E)$.

Seja M uma constante real positiva tal que

$$t^{1+\alpha-\beta} \|e^{At} x\|_{E_{1+\alpha}} \leq M \|x\|_{E_\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq 1 + \alpha \leq 2, \quad (6.1)$$

(ver Teorema 5.37).

Relativamente as não-linearidades, ao fixarmos constantes positivas ε , ρ , $\gamma(\varepsilon)$, c , e uma função real $v(t)^*$ tal que $0 \leq v(t) \leq \delta$, e $\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = 0$, consideramos a classe

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, v(\cdot))$$

constituída pelas funções f , tais que $f(t, \cdot)$ seja uma função ε -regular relativamente ao par (E_1, E_0) para todo $t > 0$, e satisfaça

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}} \leq c \|x - y\|_{E_{1+\varepsilon}} (\|x\|_{E_{1+\varepsilon}}^{\rho-1} + \|y\|_{E_{1+\varepsilon}}^{\rho-1} + v(t) t^{-\gamma(\varepsilon)+\varepsilon}) \quad (6.2)$$

$$\|f(t, x)\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}} \leq c (\|x\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho + v(t) t^{-\gamma(\varepsilon)}), \quad (6.3)$$

para todo $x, y \in E_{1+\varepsilon}$.

Nos argumentos que seguem será comum fixarmos os parâmetros ε , ρ , $\gamma(\varepsilon)$ e c . Dessa forma denotaremos a classe $\mathcal{F}(\varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, v(\cdot))$ simplesmente por $\mathcal{F}(v(\cdot))$.

Com essas definições podemos agora enunciar o principal resultado deste capítulo

Teorema 6.1. *Seja $f \in \mathcal{F}(\varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, v(\cdot))$. Para cada $y_0 \in E_1$ existem $r = r(y_0) > 0$, e $\tau_0 = \tau_0(y_0) > 0$ com a propriedade que para qualquer $x_0 \in B^{E_1}(y_0, r)$ existe uma função contínua $x(\cdot, x_0) : [0, \tau_0] \rightarrow E_1$, com $x(0) = x_0$, sendo a única solução fraca ε -regular começando em x_0 do problema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(t, x), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

*Sem perda de generalidade assumiremos que a função $v(t)$ é não-decrescente.

Esta solução ainda satisfaz

$$x \in C((0, \tau_0], E_{1+\theta}), \quad 0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$$

$$t^\theta \|x(t, x_0)\|_{E_{1+\theta}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0, \quad 0 < \theta < \gamma(\varepsilon).$$

Adicionalmente, se $x_0, z_0 \in B^{E_1}(y_0, r)$

$$t^\theta \|x(t, x_0) - x(t, z_0)\|_{E_{1+\theta}} \leq C \|x_0 - z_0\|_{E_1}, \quad t \in [0, \tau_0], \text{ e } 0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma(\varepsilon).$$

Também, se $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$, então r pode ser escolhido arbitrariamente grande, ou seja, neste caso o tempo de existência é uniforme em subconjuntos limitados de E_1 .

Se $t \rightarrow f(t, x)$, como uma aplicação de $(0, \infty)$ em $E_{\gamma(\varepsilon)}$, for localmente Hölder contínua uniformemente em conjuntos limitados de $E_{1+\gamma(\varepsilon)}$, então $x(\cdot, x_0) \in C^1((0, \tau_0], E_{\gamma(\varepsilon)}) \cap C((0, \tau_0], E_{1+\gamma(\varepsilon)})$ sendo uma solução clássica de (6.4).

As constantes acima dependem de $\tau_0 = \tau_0(y_0, A, v(\cdot), \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M)$, $r = r(y_0, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M)$ e $C = C(\theta_0, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), M)$.

Em diversas aplicações a função f é independente do tempo. O próximo corolário adapta os resultados do Teorema 6.1 ao caso autônomo.

Corolário 6.2. *Assumimos que f seja independente do tempo, e que seja também uma função ε -regular, para algum $\varepsilon > 0$, relativamente ao par (E_1, E_0) . Então para cada $y_0 \in E_1$ existem $r = r(y_0) > 0$ e $\tau_0 = \tau_0(y_0) > 0$, tal que para $x_0 \in E_1$ com $\|x_0 - y_0\|_{E_1} < r$, existe uma função contínua $x : [0, \tau_0] \rightarrow E_1$, com $x(0) = x_0$, sendo a única solução fraca ε -regular começando em x_0 do problema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Esta solução ainda satisfaz

$$x \in C((0, \tau_0], E_{1+\theta}), \quad 0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$$

$$t^\theta \|x(t, x_0)\|_{E_{1+\theta}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0, \quad 0 < \theta < \gamma(\varepsilon).$$

Adicionalmente, se $x_0, z_0 \in B^{E_1}(y_0, r)$

$$t^\theta \|x(t, x_0) - x(t, z_0)\|_{E_{1+\theta}} \leq C(\theta_0) \|x_0 - z_0\|_{E_1}, \quad t \in [0, \tau_0], \text{ e } 0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma(\varepsilon).$$

Também se $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$, então r pode ser escolhido arbitrariamente grande, ou seja, o tempo de existência pode ser escolhido uniformemente em subconjuntos limitados de E_1 .

Adicionalmente, $x(\cdot, x_0) \in C^1((0, \tau_0], E_{\gamma(\varepsilon)}) \cap C((0, \tau_0], E_{1+\gamma(\varepsilon)})$, sendo portanto, uma solução clássica de (6.5).

As constantes acima dependem de $\tau_0 = \tau_0(y_0, A, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M)$, $r = r(y_0, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M)$ e $C = C(\theta_0, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), M)$.

Observação 6.3. Observemos que não estamos assumindo em princípio que f seja uma função bem definida em E_1 . A única hipótese feita com relação a f , é simplesmente que ela seja uma função ε -regular relativa ao par (E_1, E_0) para algum $\varepsilon > 0$. Em particular, obtemos assim um teorema de existência e unicidade em E_1 sem que necessariamente a não-linearidade esteja definida em E_1 .

Antes porém de provarmos o Teorema 6.1 precisamos de alguns lemas auxiliares.

Lema 6.4. Os operadores $t^\alpha e^{At} : E_1 \rightarrow E_{1+\alpha}$, $t > 0$, $\alpha > 0$, são uniformemente limitados e satisfazem $\|t^\alpha e^{At}\|_{\mathcal{L}(E_1, E_{1+\alpha})} \leq M$. Adicionalmente, se J for um subconjunto compacto de E_1

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in J} \|t^\alpha e^{At} x\|_{E_{1+\alpha}} = 0. \quad (6.6)$$

Demonstração: A primeira parte da afirmação segue diretamente de (6.1) ao fazermos $\beta = 1$.

Para a segunda parte, observemos que os operadores $t^\alpha e^{At}$ são tais que $\|t^\alpha e^{At} x\|_{E_{1+\alpha}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, para todo $x \in E_{1+\alpha}$. De fato, basta observarmos que

$$\|t^\alpha e^{At} x\|_{E_{1+\alpha}} = \|A^{1+\alpha}(t^\alpha e^{At} x)\|_{E_0} = \|t^\alpha e^{At} A^{1+\alpha} x\|_{E_0} \leq t^\alpha M \|x\|_{E_{1+\alpha}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0. \quad (6.7)$$

Assim dado $\varepsilon > 0$, consideremos a cobertura aberta $\mathcal{B} = \{B^{E_1}(x, r); x \in J\}$, de J , onde $0 < r < \frac{\varepsilon}{2M}$. Portanto da compacidade de J podemos escolher uma subcobertura finita, digamos $\{B^{E_1}(x_1, r), B^{E_1}(x_2, r), \dots, B^{E_1}(x_n, r)\} \subset \mathcal{B}$, de J . Sendo $E_{1+\alpha}$ densamente imerso em E_1 , podemos sem perda de generalidade supor que cada $x_i \in E_{1+\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Agora se $x \in J$ então $x \in B^{E_1}(x_i, r)$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, e dessa forma

$$\begin{aligned} \|t^\alpha e^{At} x\|_{E_{1+\alpha}} &\leq \|t^\alpha e^{At} x - t^\alpha e^{At} x_i\|_{E_{1+\alpha}} + \|t^\alpha e^{At} x_i\|_{E_{1+\alpha}} \\ &\leq M \|x - x_i\|_{E_1} + \|t^\alpha e^{At} x_i\|_{E_{1+\alpha}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|t^\alpha e^{At} x_i\|_{E_{1+\alpha}} \end{aligned}$$

mostrando por (6.7) que $\|t^\alpha e^{At} x\|_{E_{1+\alpha}} < \varepsilon$, para t suficientemente pequeno. Logo concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in J} \|t^\alpha e^{At} x\|_{E_{1+\alpha}} = 0.$$

como queríamos.

■

Considerando a função beta $\mathbf{B}(\cdot, \cdot) : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, dada por

$$\mathbf{B}(a, b) = \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx,$$

o número real

$$\mathbf{B}_\varepsilon^\theta = \max_{0 \leq \xi \leq \theta} \{\mathbf{B}(\gamma(\varepsilon), 1 - \gamma(\varepsilon)), \mathbf{B}(\gamma(\varepsilon), 1 - \rho\varepsilon), \mathbf{B}(\gamma(\varepsilon) - \xi, 1 - \gamma(\varepsilon)), \mathbf{B}(\gamma(\varepsilon) - \xi, 1 - \rho\varepsilon)\}.$$

fica bem definido, e seguem os seguintes resultados

Lema 6.5. Se $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$, e $x \in C((0, \tau], E_{1+\varepsilon})$, então para todo $0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$,

$$t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{E_{1+\theta}} \leq cM\mathbf{B}_\varepsilon^\theta(\mathbf{v}(t) + t^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} \lambda^\rho(t)), \quad 0 < t \leq \tau,$$

onde $\lambda(t) = \sup_{0 < s \leq t} \{s^\varepsilon \|x(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}\}$.

Demonstração: Uma vez que a função $\mathbf{v}$ é não decrescente, ao fazermos a mudança $\tau = tu$ nas variáveis de integração, fica fácil vermos que

$$\begin{aligned} t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{E_{1+\theta}} &\leq Mt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} \|f(s, x(s))\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}} ds \\ &\leq cMt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} (\mathbf{v}(s)s^{-\gamma(\varepsilon)} + \|x(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho) ds \\ &\leq cMt^\theta \mathbf{v}(t) \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds \\ &\quad + cMt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} [s^\varepsilon \|x(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}]^\rho ds \\ &\leq cM\mathbf{v}(t) \int_0^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds \\ &\quad + cMt^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} \lambda^\rho(t) \int_0^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} ds \\ &\leq cM\mathbf{B}_\varepsilon^\theta(\mathbf{v}(t) + t^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} \lambda^\rho(t)). \end{aligned}$$

■

Lema 6.6. Consideremos $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$ e $\mu > 0$. Se $x, y \in C((0, \tau], E_{1+\varepsilon})$ são tais que $t^\varepsilon \|x(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq \mu$, $t^\varepsilon \|y(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq \mu$, para todo $t \in (0, \tau]$, então

$$t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right\|_{E_{1+\theta}} \leq \Gamma_\theta(t) \sup_{0 \leq s \leq \tau} \{s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}\}$$

para todo $0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$, onde $\Gamma_\theta(t) = cM\mathbf{B}_\varepsilon^\theta(\mathbf{v}(t) + t^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} 2\mu^{\rho-1})$.

Demonstração: Segue da ε -regularidade de f e novamente pela mudança $\tau = tu$ nas variáveis de integração que

$$\begin{aligned}
& t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right\|_{E_{1+\theta}} \\
& \leq t^\theta \int_0^t cM(t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} \|x(s) - y(s)\|_{E_{1+\varepsilon}} (v(s)s^{-\gamma(\varepsilon)+\varepsilon} + \|x(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}^{\rho-1} + \|y(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}^{\rho-1}) ds \\
& \leq cMt^\theta v(t) \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{E_{1+\varepsilon}} ds \\
& \quad + cMt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} [(s^\varepsilon \|x(s)\|_{E_{1+\varepsilon}})^{\rho-1} + (s^\varepsilon \|y(s)\|_{E_{1+\varepsilon}})^{\rho-1}] s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{E_{1+\varepsilon}} ds \\
& \leq cMv(t) \int_0^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds \sup_{t \in [0, \tau]} \{s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}\} + \\
& \quad \leq cMt^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} 2\mu^{\rho-1} \int_0^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} ds \sup_{t \in [0, \tau]} \{s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}\} \\
& \leq \Gamma_\theta(t) \sup_{t \in [0, \tau]} \{s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}\},
\end{aligned}$$

mostrando dessa forma o lema. ■

Finalmente vamos à prova do Teorema 6.1. Esta será dividida em duas partes, existência e unicidade. Na primeira delas mostramos a existência da solução garantida pelo Teorema.

Existência.

Seja $\mu > 0$ satisfazendo $cM\mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon \mu^{\rho-1} = \frac{1}{8}$.

Fixamos agora $r = r(\mu, M) > 0$ dado por

$$r = \frac{\mu}{4M} = \frac{1}{4M(8cM\mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon)^{\frac{1}{\rho-1}}}. \quad (6.8)$$

Ainda para $y_0 \in E_1$ fixo, escolhemos $\tau_0 = \tau_0(y_0, A, \mu, v(\cdot), \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M) \in (0, 1]$ tal que $v(t) < \delta$ para todo $t \in (0, \tau_0]$ e

$$t^\varepsilon \|e^{At} y_0\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq \frac{\mu}{2}, \quad 0 \leq t \leq \tau_0, \quad (6.9)$$

onde $cM\delta\mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon = \min\{\frac{\mu}{8}, \frac{1}{4}\}$.

Observemos que estas escolhas implicam $\Gamma_\varepsilon(t) \leq \frac{1}{2}$ para todo $t \in (0, \tau_0]$. De fato,

$$\Gamma_\varepsilon(t) = cM\mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon \left(v(t) + t^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} 2\mu^{\rho-1} \right) \leq cM\mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon \delta + cM\mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon 2\mu^{\rho-1} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como estamos procurando por soluções que regularizam imediatamente ($t > 0$), procuramos por soluções no espaço métrico completo

$$K(\tau_0) = \{x \in C((0, \tau_0], E_{1+\varepsilon}); \sup_{t \in (0, \tau_0]} t^\varepsilon \|x(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq \mu\}$$

munido da norma

$$\|x\|_{K(\tau_0)} = \sup_{t \in (0, \tau_0]} \{t^\varepsilon \|x(t)\|_{E_{1+\varepsilon}}\}.$$

Fixado $x_0 \in E_1$ de modo que $\|x_0 - y_0\|_{E_1} < r$, definimos o seguinte operador

$$(Tx)(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s, x(s))ds. \quad (6.10)$$

No que segue, mostramos que T é um operador de $K(\tau_0)$, sendo de fato, uma contração estrita em $K(\tau_0)$. Portanto pelo Princípio da Contração de Banach, existe um único ponto fixo de T , a solução do problema (6.4).

Primeiramente, provemos que $T(K(\tau_0)) \subset K(\tau_0)$. Iniciamos mostrando que para $x \in K(\tau_0)$

$$Tx \in C((0, \tau_0], E_{1+\theta}), \quad \theta \in [0, \gamma(\varepsilon)). \quad (6.11)$$

De fato, fixado $t_2 \in (0, \tau_0]$ consideremos $\tau_0 \geq t_1 \geq t_2$. Então para todo $0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)\|_{E_{1+\theta}} &\leq \|(e^{At_1} - e^{At_2})x_0\|_{E_{1+\theta}} + \left\| \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}f(s, x(s))ds - \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)}f(s, x(s))ds \right\|_{E_{1+\theta}} \\ &\leq \|(e^{At_1} - e^{At_2})x_0\|_{E_{1+\theta}} + \left\| \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}f(s, x(s))ds - \int_0^{t_2} e^{A(t_1-s)}f(s, x(s))ds \right\|_{E_{1+\theta}} \\ &\quad + \left\| \int_0^{t_2} e^{A(t_1-s)}f(s, x(s))ds - \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)}f(s, x(s))ds \right\|_{E_{1+\theta}} \\ &= \|(e^{At_1} - e^{At_2})x_0\|_{E_{1+\theta}} + \left\| \int_{t_2}^{t_1} e^{A(t_1-s)}f(s, x(s))ds \right\|_{E_{1+\theta}} \\ &\quad + \left\| \left(I - e^{A(t_1-t_2)} \right) \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)}f(s, x(s))ds \right\|_{E_{1+\theta}}. \end{aligned}$$

Na desigualdade acima, visto ser a aplicação

$$[0, \infty) \ni t \mapsto e^{At}x_0 \in E_{1+\theta}$$

contínua para todo $x_0 \in E_{1+\theta}$, segue que o primeiro e o terceiro termos da desigualdade acima convergem para zero quando $t_1 \rightarrow t_2$. Já a estimativa para o segundo termo segue das desigualdades

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_2}^{t_1} e^{A(t_1-s)}f(s, x(s))ds \right\|_{E_{1+\theta}} &\leq c \int_{t_2}^{t_1} M(t_1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} (\delta s^{-\gamma(\varepsilon)} + \|x(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho) ds \\ &\leq cM\delta \int_{t_2}^{t_1} (t_1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds \\ &\quad + cM \int_{t_2}^{t_1} (t_1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} (s^\varepsilon \|x(s)\|_{E_{1+\varepsilon}})^\rho ds \\ &\leq cM\delta t_1^{-\theta} \int_{\frac{t_2}{t_1}}^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds \\ &\quad + cM\mu^\rho t_1^{\gamma(\varepsilon)-\theta-\rho\varepsilon} \int_{\frac{t_2}{t_1}}^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} ds. \end{aligned}$$

Uma vez que $t_1 \geq t_2$, segue das majorações

$$\int_{\frac{t_2}{t_1}}^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds \leq \mathbf{B}(\gamma(\varepsilon)-\theta, 1-\gamma(\varepsilon)),$$

e

$$\int_{\frac{t_2}{t_1}}^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} ds \leq \mathbf{B}(\gamma(\varepsilon)-\theta, 1-\rho\varepsilon),$$

que de fato o termo $\left\| \int_{t_2}^{t_1} e^{A(t_1-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{E_{1+\theta}}$ vai para zero quando $t_1 \rightarrow t_2^+$. O caso $t_1 < t_2$ é tratado similarmente, e assim verificamos a validade de (6.11).

Mostremos agora que $t^\varepsilon \|T(x)(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq \mu$, para todo $t \in (0, \tau_0]$, para então concluirmos que $T(K(\tau_0)) \subset K(\tau_0)$. De fato

$$\begin{aligned} t^\varepsilon \|(Tx)(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} &\leq \|t^\varepsilon e^{At} x_0\|_{E_{1+\varepsilon}} \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{E_{1+\varepsilon}} \\ &\leq \|t^\varepsilon e^{At} x_0\|_{E_{1+\varepsilon}} + cMt^\varepsilon \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\varepsilon} \left(\delta s^{-\gamma(\varepsilon)} + \|x(s)\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho \right) ds \\ &\leq \|t^\varepsilon e^{At} x_0\|_{E_{1+\varepsilon}} + cMt^\varepsilon \delta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\varepsilon} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds \\ &\quad + cMt^\varepsilon \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\varepsilon} s^{-\rho\varepsilon} (s^\varepsilon \|x(s)\|_{E_{1+\varepsilon}})^\rho ds \\ &\leq \|t^\varepsilon e^{At} x_0\|_{E_{1+\varepsilon}} + cM\delta \mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon + cM\mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon \mu^\rho \leq \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{8} + \frac{\mu}{8} \leq \mu. \end{aligned}$$

Finalmente do Lema 6.6, tomando $\theta = \varepsilon$, T é uma contração estrita em $K(\tau_0)$ com

$$\|T(x) - T(y)\|_{K(\tau_0)} \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_{K(\tau_0)}.$$

Agora pelo princípio da contração de Banach, T possui um único ponto fixo em $K(\tau_0)$. No que segue denotaremos este ponto fixo por $X(\cdot, x_0)$.

Observemos que $X(\cdot, x_0)$ está definido para todo $0 \leq t \leq \tau_0$, e de (6.11), $X(\cdot, x_0) \in C((0, \tau_0], E_{1+\theta})$, para todo $0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$.

Mostremos agora que também $t^\theta \|X(t, x_0)\|_{E_{1+\theta}} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ para todo $0 < \theta < \gamma(\varepsilon)$. De fato, do Lema 6.5

$$\begin{aligned} t^\theta \|X(t, x_0)\|_{E_{1+\theta}} &\leq t^\theta \|e^{At} x_0\|_{E_{1+\theta}} + t^\theta \int_0^t \|e^{A(t-s)} f(s, X(s, x_0))\|_{E_{1+\theta}} ds \\ &\leq t^\theta \|e^{At} x_0\|_{E_{1+\theta}} + cM\mathbf{B}_\varepsilon^\theta v(t) + cM\mathbf{B}_\varepsilon^\theta \mu^{\rho-1} \sup_{0 < s \leq t} \{s^\varepsilon \|X(s, x_0)\|_{E_{1+\varepsilon}}\} \end{aligned}$$

Em particular ao fazermos $\theta = \varepsilon$,

$$t^\varepsilon \|X(t, x_0)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq t^\varepsilon \|e^{At} x_0\|_{E_{1+\varepsilon}} + cM\mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon v(t) + \frac{1}{8} \sup_{0 < s \leq t} \{s^\varepsilon \|X(s, x_0)\|_{E_{1+\varepsilon}}\}.$$

Logo, desde que a função v é não decrescente obtemos de (6.6)

$$\sup_{0 < s \leq t} \{s^\varepsilon \|X(s, x_0)\|_{E_{1+\varepsilon}}\} \leq \frac{8}{7} \left(\sup_{0 < s \leq t} \{s^\varepsilon \|e^{As} x_0\|_{E_{1+\varepsilon}}\} + cM\mathbf{B}_\varepsilon^\varepsilon v(t) \right) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0, \quad (6.12)$$

uma vez que $\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = 0$.

Se $0 < \theta < \gamma(\varepsilon)$, de (6.12) e (6.6) segue que $t^\theta \|X(t, x_0)\|_{E_{1+\theta}} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, como queríamos.

Provemos agora que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|X(t, x_0) - x_0\|_{E_1} = 0.$$

De fato, novamente como consequência do Lema 6.5 vemos que

$$\begin{aligned} \|X(t, x_0) - x_0\|_{E_1} &\leq \|e^{At} x_0 - x_0\|_{E_1} + \int_0^t \|e^{A(t-s)} f(s, X(s, x_0))\|_{E_1} ds \\ &\leq \|e^{At} x_0 - x_0\|_{E_1} + cM\mathbf{B}_\varepsilon \left(v(t) + \left[\sup_{0 < s \leq t} \{t^\varepsilon \|X(t, x_0)\|_{E_{1+\varepsilon}}\} \right]^\rho \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Dessa forma acabamos de mostrar que $X(t, x_0)$ é uma solução ε -regular começando em x_0 , sendo ainda, a única solução ε -regular começando em x_0 no conjunto $K(\tau_0)$. Nos referimos a $X(t, x_0)$ como a *K-solução começando em x_0* .

Adicionalmente, se $x_0, z_0 \in B^{E_1}(y_0, r)$, desde que $t^\varepsilon \|X(t, x_0)\|_{X^{1+\varepsilon}}, t^\varepsilon \|X(t, z_0)\|_{X^{1+\varepsilon}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, podemos escolher $\bar{\tau}_0 \leq \tau$ suficientemente pequeno tal que $t^\varepsilon \|X(t, x_0)\|_{X^{1+\varepsilon}} \leq \mu$, e $t^\varepsilon \|X(t, z_0)\|_{X^{1+\varepsilon}} \leq \mu$. Assim levando em conta as estimativas do Lema 6.6

$$\begin{aligned} t^\theta \|X(t, x_0) - X(t, z_0)\|_{E_{1+\theta}} &\leq t^\theta \|e^{At}(x_0 - z_0)\|_{E_{1+\theta}} + t^\theta \int_0^t \|e^{A(t-s)} [f(s, X(s, x_0)) - f(s, X(s, z_0))]\|_{E_{1+\theta}} ds \\ &\leq M\|x_0 - z_0\|_{E_1} + \Gamma_\theta(t) \sup_{0 \leq s \leq \bar{\tau}_0} s^\varepsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{E_{1+\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Em particular ao fazermos $\theta = \varepsilon$

$$t^\varepsilon \|X(t, x_0) - X(t, z_0)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq M\|x_0 - z_0\|_{E_1} + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq s \leq \bar{\tau}_0} s^\varepsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{E_{1+\varepsilon}}.$$

Portanto

$$\sup_{0 \leq s \leq \bar{\tau}_0} s^\varepsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq M\|x_0 - z_0\|_{E_1} + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq s \leq \bar{\tau}_0} s^\varepsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{E_{1+\varepsilon}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \sup_{0 \leq s \leq \bar{\tau}_0} s^\varepsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq M\|x_0 - z_0\|_{E_1}.$$

Para $0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma(\varepsilon)$ basta observarmos que por (6.13)

$$t^\theta \|X(t, x_0) - X(t, z_0)\|_{E_{1+\theta}} \leq M\|x_0 - z_0\|_{E_1} + \Gamma_\theta(t) 2M\|x_0 - z_0\|_{E_1} \leq C(\theta_0)\|x_0 - z_0\|_{E_1},$$

onde $C(\theta_0) = M(1 + 2\sup\{\Gamma_\theta(t); t \in [0, \tau_0], 0 \leq \theta \leq \theta_0\})$. Com isto mostramos a dependência contínua com relação aos dados iniciais e concluimos, dessa forma, a prova referente a existência.

Unicidade.

É garantido pelo que acabamos de mostrar que dado qualquer $x_0 \in B^{E_1}(y_0, r)$ e qualquer $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$, existe uma única K -solução definida no intervalo $[0, \tau_0]$, do problema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(t, x) \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Para enfatizarmos a dependência da K -solução com relação a não linearidade f , denotaremos esta por $X_f(t, x_0)$.

Lema 6.7. *Se $\phi(t)$ é uma solução ε -regular em $[0, t_0]$ de (6.14), e $t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, então $\phi(t) = X_f(t, x_0)$ para todo $0 \leq t \leq \min\{\tau_0, t_0\}$.*

Demonstração: Nessas condições é claro que $\phi \in K(\bar{\tau})$ para $\bar{\tau} \leq \tau_0$ suficientemente pequeno, como também $X_f(\cdot, x_0)$. Além disso ambos, ϕ e $X_f(\cdot, x_0)$, são soluções da equação integral (6.10), obtendo dessa maneira que $X_f(t, x_0) = \phi(t)$ para todo $0 \leq t \leq \bar{\tau}$. Dessa forma nos fazendo valer de um argumento usual de continuação de soluções, devemos ter realmente, $X_f(t, x_0) = \phi(t)$ para todo $0 \leq t \leq \min\{t_0, \tau_0\}$. ■

Lema 6.8. *Se $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$ então $f_a \in \mathcal{F}(\mathbf{v}_a(\cdot))$ para todo $a \geq 0$, onde $f_a(t, x) \equiv f(t+a, x)$ e $\mathbf{v}_a(t) = \mathbf{v}(t+a)(t/t+a)^{\gamma(\varepsilon)-\varepsilon} \leq \mathbf{v}(t+a)$. Adicionalmente, existe um número real $a_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que para todo $a \in [0, a_0]$ o tempo de existência $\tau_0(a)$ dado por (6.9) pode ser escolhido independente de a .*

Demonstração: É claro, visto que a condição de ε -regularidade é independente com relação a variável temporal, que a aplicação $f_a(t, \cdot)$ é uma aplicação ε -regular para cada $t > 0$ fixado. Por outro lado,

$$\mathbf{v}_a(t)t^{-\gamma(\varepsilon)+\varepsilon} = \mathbf{v}(a+t)(t/a+t)^{\gamma(\varepsilon)-\varepsilon}t^{-\gamma(\varepsilon)+\varepsilon} = \mathbf{v}(a+t)(a+t)^{-\gamma(\varepsilon)+\varepsilon},$$

e

$$\mathbf{v}_a(t)t^{-\gamma(\varepsilon)} = \mathbf{v}(a+t)(t/a+t)^{\gamma(\varepsilon)-\varepsilon}t^{-\gamma(\varepsilon)} = \mathbf{v}(a+t)(t/a+t)^{-\varepsilon}(a+t)^{-\gamma(\varepsilon)} \geq \mathbf{v}(a+t)(a+t)^{-\gamma(\varepsilon)},$$

mostram que $f_a \in \mathcal{F}(\mathbf{v}_a(\cdot))$.

Para a segunda parte como $v(t) < \delta$ para $t \in [0, \tau_0]$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = 0$, para a suficientemente pequeno, também temos $v(t+a) < \delta$ para todo $t \in [0, \tau_0]$. ■

Obtidos tais resultado preliminares, podemos agora cuidar da parte referente a unicidade de soluções ε -regulares.

Seja $\phi(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, uma solução ε -regular começando em $x_0 \in B^{E_1}(y_0, r)$. Como $\phi \in C([0, t_0], E_1)$, com $\phi(0) = x_0$, existe $0 < a_0 \leq t_0$ tal que $\phi(a) \in B^{E_1}(y_0, r)$, para todo $0 \leq a \leq a_0$.

É claro que $\phi_a(\cdot) \equiv \phi(a + \cdot) \in C([0, t_0 - a], E_{1+\varepsilon})$, e portanto $t^\varepsilon \|\phi_a(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Além disso, ϕ_a é uma solução ε -regular do problema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f_a(t, x) \\ x(0) &= \phi(a). \end{aligned} \tag{6.15}$$

O Lema 6.8 juntamente com os resultados da parte de existência, mostram que existe uma única K -solução para problema (6.15), $X_{f_a}(\cdot, \phi(a))$, definida em todo o intervalo $[0, \tau_0]$. Adicionalmente, do Lema 6.7, obtemos $X_{f_a}(t, \phi(a)) = \phi_a(t)$ para todo $0 \leq t \leq \min\{\tau_0, t_0 - a\}$, e todo $0 < a \leq a_0$. Em particular isto implica que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $t_0 \geq \tau_0$. De fato, caso contrário, poderíamos definir $\tilde{\phi}(t) = \phi(t)$ para $0 \leq t \leq t_0$ e $\tilde{\phi}(t) = X_{f_{a_0}}(t - a_0, \phi(a_0))$ para todo $t_0 \leq t \leq \tau_0$. Logo as afirmações acima mostrariam que $\tilde{\phi}$ também uma solução ε -regular começando em x_0 .

Em vista da definição de K -solução, basta mostrarmos que $t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq \mu$ para todo $0 < t \leq \tau_0$, para então concluir que $\phi(\cdot) = X(\cdot, x_0)$. Mas observemos que para $0 < a < a_0$,

$$t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq t^\varepsilon \|\phi(t) - \phi(t+a)\|_{E_{1+\varepsilon}} + t^\varepsilon \|X_{f_a}(t, \phi(a))\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq t^\varepsilon \|\phi(t) - \phi(t+a)\|_{E_{1+\varepsilon}} + \mu$$

Mas para cada $0 < t \leq \tau_0$ fixado, ao fazermos $a \rightarrow 0$ temos que $t^\varepsilon \|\phi(t) - \phi(t+a)\|_{E_{1+\varepsilon}} \rightarrow 0$, implicando $t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq \mu$ para todo $t \in (0, \tau_0]$.

Consideremos agora o caso $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$.

Ao fazermos $y(t) = x(at)$, para algum número real $a < 1$, a equação equivalente para a função y é

$$\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{f}(t, y) \tag{6.16}$$

onde $\tilde{f}(t, x) = af(at, x)$, e $\tilde{A} = aA$.

Além disso, observemos que $x(t)$ será uma solução da equação original definida em $(0, \tau_0]$, se e somente se $y(t)$, $t \in [0, a\tau_0]$ for uma solução da nova equação. Para esta nova equação ao aplicarmos os resultados relativos a parte de existência garantida pelo Teorema 6.1, encontramos uma

constante real positiva $\tilde{r}$, tais que as conclusões do Teorema permanecem válidas. Observemos que por (6.8), $\tilde{r}$ é dada por

$$\tilde{r} = \frac{1}{4\tilde{M}(8\tilde{c}\tilde{M}B_\varepsilon^\varepsilon)^{\frac{1}{\rho-1}}}$$

com $\tilde{c}$ e $\tilde{M}$ constantes associadas a nova equação. Agora vamos relacionar as novas constantes $\tilde{r}, \tilde{c}, \tilde{M}$ com r, c and M respectivamente.

Se $\{(\tilde{E}_\alpha, \tilde{A}_\alpha); \alpha \geq -m\}$ é a escala de interpolação-extrapolação de ordem m gerada pelo par $(E, \tilde{A})$ e pelos funtores de interpolação $(\cdot, \cdot)_\theta$, $0 \leq \theta < 1$, então $\|\cdot\|_{\tilde{E}_\alpha} = a^\alpha \|\cdot\|_{E_\alpha}$ e

$$t^{\alpha-\beta} \|e^{Aat} x\|_{\tilde{E}_\alpha} = a^\beta (at)^{\alpha-\beta} \|e^{Aat} x\|_{E_\alpha} \leq M a^\beta \|x\|_{E_\beta} = M \|x\|_{\tilde{E}_\beta},$$

o que implica $\tilde{M} = M$. Para vermos que $\tilde{c} = a^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon+1-\rho} c$ basta observarmos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t, y)\|_{\tilde{E}_{\gamma(\varepsilon)}} &= a^{\gamma(\varepsilon)+1} \|f(at, y)\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}} \\ &\leq a^{\gamma(\varepsilon)+1-\rho(1+\varepsilon)} c \left(v(at) a^{\rho(1+\varepsilon)} (at)^{-\gamma(\varepsilon)} + a^{\rho(1+\varepsilon)} \|y\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho \right) \\ &= a^{\gamma(\varepsilon)+1-\rho(1+\varepsilon)} c \left(v(at) a^{\rho(1+\varepsilon)} (at)^{-\gamma(\varepsilon)} + \|y\|_{\tilde{E}_{1+\varepsilon}}^\rho \right) \\ &= a^{\gamma(\varepsilon)+1-\rho(1+\varepsilon)} c \left(\tilde{v}(t) t^{-\gamma(\varepsilon)} + \|y\|_{\tilde{E}_{1+\varepsilon}}^\rho \right), \end{aligned}$$

onde $\tilde{v}(t) = v(at) a^{\rho(1+\varepsilon)-\gamma(\varepsilon)}$. Os cálculos com as propriedades de Lipschitz de f são similares, com o que concluímos

$$\tilde{r} = \frac{1}{4\tilde{M}(8\tilde{c}\tilde{M}B_\varepsilon^\varepsilon)^{\frac{1}{\rho-1}}} = r a^{\frac{\rho\varepsilon-\gamma(\varepsilon)}{\rho-1}+1}.$$

Isto implica que se $\|y_0 - x_0\|_{\tilde{E}_1} < \tilde{r}$, então existe $\tilde{\tau}_0 > 0$, tal que a solução para o problema (6.16) começando em x_0 , está definida no intervalo $[0, \tilde{\tau}_0]$. Portanto, se $\|y_0 - x_0\|_{E_1} < r a^{\frac{\rho\varepsilon-\gamma(\varepsilon)}{\rho-1}}$ então $\dot{x} = Ax + f(t, x)$ tem como solução $x(t, x_0) = \tilde{x}(\frac{t}{a}, x_0)$ definida em $[0, a\tilde{\tau}_0]$. Desde que a pode ser escolhido arbitrariamente pequeno e $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$, temos que de fato as soluções possuem um intervalo comum de existência em subconjuntos limitados de E_1 .

Finalmente se $t \rightarrow f(t, x)$ for localmente Hölder contínua para $t > 0$, uniformemente em conjuntos limitados de $E_{1+\varepsilon}$, usando argumentos usuais de regularidade, (ver por exemplo [18]), obtemos a regularidade afirmada pelo teorema. ■

Do Teorema 6.1 temos o seguinte corolário

Corolário 6.9. *Se f for como no Teorema 6.1 e se K for um conjunto relativamente compacto de E_1 , então existe $\tau_0 = \tau(K)$ tal que a ε -solução regular começando em x_0 é definida no intervalo $[0, \tau_0]$ para todo $x_0 \in K$.*

Demonstração: Do Teorema 6.1, para qualquer $y_0 \in \bar{K}$ (fecho de K em E_1), existem $r(y_0)$ e $\tau(y_0)$ tais que para todo $x_0 \in E_1$ com $\|x_0 - y_0\|_{E_1} < r(y_0)$ a única ε -solução regular existe em $[0, \tau(y_0)]$. Pela compacidade de $\bar{K}$ podemos escolher $y_1, \dots, y_n \in \bar{K}$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B^{E_1}(y_i, r(y_i))$. Tomando $\tau_0 = \min\{\tau(y_i) : 1 \leq i \leq n\}$ provamos o corolário. ■

Com este corolário em mãos não é difícil provarmos um resultado de existência de tempo maximal para ε -soluções.

Proposição 6.10. *Se f for como no Teorema 6.1 e $x(t, x_0)$ for uma ε -solução regular começando em x_0 com um tempo de existência maximal τ_m , então ou $\tau_m = \infty$ ou $\lim_{t \rightarrow \tau_m^-} \|x(t, x_0)\|_{E_{1+\varepsilon}} = \infty$.*

Demonstração: Suponhamos que $\tau_m < \infty$ e também $\lim_{t \rightarrow \tau_m^-} \|x(t, x_0)\|_{E_{1+\varepsilon}} = M < \infty$. Isto garante a existência de uma sequência $t_n \rightarrow \tau_m^-$ tal que $\|x(t_n, x_0)\|_{E_{1+\varepsilon}} \leq 2M$ para todo n . Isto implica que a sequência $\{x(t_n, x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $E_{1+\varepsilon}$ e portanto uma sequência relativamente compacta em E_1 . Do corolário anterior e da unicidade da ε -solução regular podemos estender a solução além de τ_m , o que contraria ser τ_m o tempo de existência maximal. ■

No caso autônomo, que é frequentemente o caso em que a não linearidade f aparece como uma aplicação ε -regular para diversos valores do parâmetro ε , temos o seguinte resultado

Corolário 6.11. *Se f for uma aplicação ε -regular para todo $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1]$, então se denotamos por $x_\varepsilon(t, x_0)$ a única solução ε -regular começando em x_0 , para $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ fixado, então $x_\varepsilon(\cdot, x_0) = x_{\varepsilon_1}(\cdot, x_0)$ e ainda $x_\varepsilon(\cdot, x_0) \in C((0, \tau], E_{1+\gamma(\varepsilon_1)})$.*

As funções f independentes do tempo que são ε -regulares (em um intervalo I) relativamente ao par (E_1, E_0) , são classificadas como segue

- Se $I = [0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > 0$ e $\gamma(0) > 0$. Dizemos que f é uma aplicação *subcrítica* relativamente ao par (E_1, E_0) .
- Se $I = [0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > 0$ com $\gamma(\varepsilon) = \rho\varepsilon$, $\varepsilon \in I$ e se f não for subcrítica, dizemos então que f é uma aplicação *crítica* relativamente ao par (E_1, E_0) .
- Se $I = (0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > 0$ com $\gamma(\varepsilon) = \rho\varepsilon$, $\varepsilon \in I$, e se f não for subcrítica ou crítica, então dizemos que f é uma aplicação *duplamente crítica* relativamente ao par (E_1, E_0) .

- Se $I = [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > \varepsilon_0 > 0$ com $\gamma(\varepsilon_0) > \rho\varepsilon_0$ e f não for subcrítica, crítica ou duplamente crítica; então dizemos que f é uma aplicação *ultra-subcrítica* relativamente ao par (E_1, E_0) .
- Se $I = [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > \varepsilon_0 > 0$ com $\gamma(\varepsilon) = \rho\varepsilon$, $\varepsilon \in I$, e se f não for subcrítica, crítica, duplamente crítica ou ultra-subcrítica; então dizemos que f é uma aplicação *ultra-crítica* relativamente ao par (E_1, E_0) .

Observemos que se f for subcrítica então $f : E_1 \rightarrow E_{\gamma(0)}$, $\gamma(0) > 0$, que é a definição usual de aplicação subcrítica. Quando f é uma aplicação crítica ela leva E_1 em E_0 mas não existe uma constante positiva α tal que f leve E_1 em E_α . Quando f é duplamente crítica não é definida como uma aplicação de E_1 em E_0 mas ela é ε -regular para valores positivos arbitrariamente pequenos de ε . Quando f é ultrasubcrítica ou ultra-crítica não é bem definida como uma aplicação em $E_{1+\varepsilon}$ para valores pequenos de $\varepsilon > 0$, sendo somente uma aplicação ε -regular quando $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$, para algum ε_0 . A principal diferença entre aplicações ultra-subcríticas e ultra-críticas é que para a primeira delas o tempo de existência da solução pode ser escolhido uniformemente em conjuntos limitados de E_1 , enquanto que para a outra tal propriedade é desconhecida. Na Seção 6.2 iremos considerar exemplos de não linearidades provenientes, da equação do calor e classificá-las de acordo com suas propriedades de ε -regularidade.

6.2 Aplicações

Ficou claro através dos resultados da seção anterior que ao estudarmos o problema $\dot{x} = Ax + f(t, x)$, onde $-A$ é um operador setorial e $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \geq -m\}$ é a escala de interpolação-extrapolação gerada pelo par (E, A) e pelos funtores $(\cdot, \cdot)_\theta$, $0 \leq \theta < 1$, precisamos estudar as propriedades de ε -regularidade da não linearidade f nesta escala. Neste sentido, a existência local de soluções para o problema $\dot{x} = Ax + f(t, x)$ se resume a conhecermos bem as propriedades do operador linear A .

Para nós não será necessário uma caracterização completa dos espaços que compõem a escala acima, bastando somente termos em mãos algumas relações de imersão com espaços $L^p(\Omega)$.

6.2.1 Equação do Calor - Teoria $W^{1,q}$

Existem diversos trabalhos versando sobre o estudo em espaços $L^q(\Omega)$ do modelo dado pela equação

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + u|u|^{\rho-1}, \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 .

O objetivo de nosso estudo é encontrar para cada valor de q , o maior valor de ρ para o qual tenhamos existência e (possivelmente) unicidade de solução para o problema (6.17).

O operador $L = \Delta$ com condição de fronteira de Neumann em um domínio limitado e suave $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, pode ser visto como um operador ilimitado de $E_0 = L^q(\Omega)$, para $1 < q < \infty$, com domínio $E_1 = W_v^{2,q}(\Omega)$.

No que segue faremos uso do seguinte resultado que pode ser encontrado em [34]

Teorema 6.12. *Se $(\cdot, \cdot)_{\theta,q}$ é um funtor de interpolação real, então para cada par de números reais s_0 e s_1 , é válida a seguinte identidade*

$$(W^{s_0,q}(\Omega), W^{s_1,q}(\Omega))_{\theta,q} = W^{s_{\theta},q},$$

onde $s_{\theta} = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$.

Consideremos a escala

$$\{(E_{\alpha}, L_{\alpha}); \alpha \geq -1\},$$

a escala de interpolação-extrapolação gerada pelo par (E_0, L) e pelos funtores de interpolação real $(\cdot, \cdot)_{\theta,q}$, $0 < \theta < 1$.

Visto que $W_v^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{2,q}(\Omega)$ e trivialmente $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$,

$$E_{\alpha} = (E_0, E_1)_{\alpha,q} \hookrightarrow (L^q(\Omega), W^{2,q}(\Omega))_{\alpha,q} = W^{2\alpha,q}(\Omega). \quad (6.18)$$

Em particular

$$E_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega). \quad (6.19)$$

Consideremos agora o operador $L^{\#} : E_1^{\#} \subset E_0^{\#} \rightarrow E_0^{\#}$, o adjunto formal de L , isto é, $E_1^{\#} = W_v^{2,q^*}(\Omega)$, $E_0^{\#} = L^{q^*}(\Omega)$ e $(L)^{\#} = L^{\#}$, onde $q^* = \frac{q}{q-1}$ é o expoente conjugado de q .

Como acima,

$$W_v^{2\alpha,q^*}(\Omega) = (E_0^{\#}, E_1^{\#})_{\alpha,q}^{\#} = E_{\alpha}^{\#}. \quad (6.20)$$

Em particular

$$W_V^{1,q^*}(\Omega) = (L^{q^*}(\Omega), W_V^{2,q^*})_{\frac{1}{2},q}^\# = E_{\frac{1}{2}}^\# = W^{1,q^*}(\Omega). \quad (6.21)$$

Observemos que a realização L_α de L em E_α , é um isomorfismo de $E_{\alpha+1}$ sobre E_α e $L_\alpha : E_{\alpha+1} \subset E_\alpha \rightarrow E_\alpha$ é um operador setorial (Teoremas 2.7, 5.37). Além disso, $D(L_\alpha^\beta) = E_{\alpha+\beta}$.

Denotando por X_α o espaço $E_{\alpha-\frac{1}{2}}$ para $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, e por $A : X_1 \subset X_0 \rightarrow X_0$ a $E_{-\frac{1}{2}}$ -realização de L , obtemos de (6.18)-(6.20) e dos Teoremas de imersão de Sobolev que os espaços X_α satisfazem as seguintes relações de imersão

$$\left. \begin{aligned} X_\alpha &\hookrightarrow L^r(\Omega), \text{ para } r \leq \frac{Nq}{N+q-2\alpha q}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{1}{2} + \frac{N}{2q} \\ X_{\frac{1}{2}} &= L^q(\Omega), \\ X_\alpha &\hookrightarrow L^s(\Omega), \text{ para } s \geq \frac{Nq}{N+q-2\alpha q}, \quad \frac{1}{2} - \frac{N}{2q'} < \alpha \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Assumimos que a não linearidade $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja de classe C^1 . Também supomos algumas condições de crescimento

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|(1 + |u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1}), \quad u \in \mathbb{R} \quad (6.23)$$

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{|f'(u)|}{e^{\eta|u|^{\frac{N}{N-1}}}} = 0, \quad \forall \eta > 0, \quad u \in \mathbb{R} \quad (6.24)$$

As propriedades de ε -regularidade da não linearidade f são dadas pela seguinte proposição

Proposição 6.13.

- Se $q > N$ então toda $f \in C^1$ é subcrítica relativamente ao par (X_1, X_0) .
- Se $q = N$ então toda $f \in C^1$ satisfazendo (6.24) é subcrítica relativamente ao par (X_1, X_0) .
- Se $\frac{N}{N-1} < q < N$ e $f \in C^1$ satisfaz (6.23)
 - (i) Se $\rho = \frac{N+q}{N-q}$, f é uma aplicação ε -regular relativa ao par (X_1, X_0) para $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2\rho}$.
Dessa forma f é crítica.
 - (ii) Se $\rho < \frac{N+q}{N-q}$, f é subcrítica relativamente ao par (X_1, X_0) .
- Se $\frac{N}{N-1} = q$ e $f \in C^1$ satisfaz (6.23)
 - (i) Se $\rho = \frac{N+q}{N-q} = \frac{N}{N-2}$, f é uma aplicação ε -regular relativa ao par (X_1, X_0) para $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\rho}$.
Portanto f é duplamente crítica.
 - (ii) Se $\rho < \frac{N}{N-2}$, f é subcrítica relativamente ao par (X_1, X_0) .
- Se $1 < q < \frac{N}{N-1}$ e $f \in C^1$ satisfaz (6.23)

- (i) Se $\rho = \frac{N+q}{N-q}$, f é uma aplicação ε -regular relativa ao par (X_1, X_0) para $0 < \varepsilon_0 = \frac{N-q}{2q} - \frac{N}{2\rho} < \varepsilon < \varepsilon_1 = \frac{N-q}{2q} - \frac{N}{2q\rho}$, com $\gamma(\varepsilon) = \rho\varepsilon$. Dessa forma f é ultra crítica.
- (ii) Se $\frac{Nq}{N-q} < \rho < \frac{N+q}{N-q}$, f é uma aplicação ε -regular relativa ao par (X_1, X_0) para $0 < \varepsilon_0 = \frac{N-q}{2q} - \frac{N}{2\rho} < \varepsilon < \varepsilon_1 = \frac{N-q}{2q} - \frac{N}{2q\rho}$, com $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$. Dessa forma f é ultra-subcrítica.
- (iii) Se $1 < \rho \leq \frac{Nq}{N-q}$, f é subcrítica relativamente ao par (E_1, E_0) .

Demonstração: Para o caso $q > N$ temos pelos Teoremas clássicos de Imersão de Sobolev que $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, e portanto

$$f : X_1 = E_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega) = X_{\frac{1}{2}}.$$

A ε -regularidade da aplicação f se deve ao fato de $f \in C^1(\mathbb{R})$.

O caso $q = N$ não é simplesmente consequência dos Teoremas de Sobolev e será tratado paralelamente.

Se $\frac{N}{N-1} < q < N$ ao considerarmos $\rho = \frac{N+q}{N-q}$ então

$$\frac{1}{2} < 1 + \frac{1}{2\rho} = 1 + \frac{N+q}{N-q} = \frac{1}{2} + \frac{N}{N+q} < \frac{1}{2} + \frac{N}{2q},$$

e portanto para $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\rho}$, $\frac{1}{2} < 1 + \varepsilon < \frac{N}{N+q} < \frac{1}{2} + \frac{N}{2q}$.

Além disso, observemos que neste caso ainda temos $\frac{1}{2} - \frac{N}{2q} = \frac{1}{2} + \frac{N-Nq}{2} < \frac{1}{2} - \frac{N}{2} < 0$. Portanto para todo $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2\rho}]$, $\rho\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$, e dessa forma pelo Teorema de imersão 6.22,

$$X^{1+\varepsilon} \hookrightarrow L^{\frac{Nq}{N+q-2q(1+\varepsilon)}}(\Omega) \xrightarrow{f} L^{\frac{Nq}{[N+q-2q(1+\varepsilon)]\rho}}(\Omega) = L^{\frac{Nq}{N+q-2q\rho\varepsilon}}(\Omega) \hookrightarrow X^{\rho\varepsilon}.$$

Porém no caso em que $\varepsilon = 0$, vemos que

$$X^1 \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Nq}{N-q}}(\Omega) \xrightarrow{f} L^{\frac{Nq}{N+q}}(\Omega) \hookrightarrow X^0,$$

sendo “justas” as imersões de Sobolev consideradas, não podemos melhorar o espaço de chegada, e dessa forma não existe $\gamma(0) > 0$ para o qual $f : X^1 \rightarrow X^{\gamma(0)}$.

A hipótese (6.23) feita com relação a não linearidade f implica a ε -regularidade desta aplicação, o que mostra ser f crítica relativamente ao par (X_1, X_0) .

Se $\rho < \frac{N+q}{N-q}$, então $\frac{Np}{(N-p)\rho} > \frac{Np}{N+p}$, e podemos escolher $\gamma(0) > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $\frac{N+q}{N-q} \geq \frac{Nq}{N+q-2q\gamma(0)}$ e dessa forma garantir novamente pelo Teorema 6.22 que

$$X^1 \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega) \xrightarrow{f} L^{\frac{Np}{(N-p)\rho}}(\Omega) \hookrightarrow X^{\frac{Nq}{N+q-2q\gamma(0)}}.$$

Da prova do item anterior concluímos então que f é uma aplicação ε -regular relativamente ao par (X_1, X_0) para todo $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2\rho}]$, e portanto f é sob essas condições uma aplicação subcrítica.

Os outros casos são detalhados de forma semelhante. ■

A prova para o caso $q = N$ é baseada no seguinte Lema devido a N. Trudinger (ver [25, 36])

Lema 6.14. *Dados $p \geq 1$ e $\sigma \leq \frac{1}{p}N(\omega_{N-1})^{\frac{1}{N-1}}$ existe uma constante positiva K tal que se $u \in W^{1,N}(\Omega)$, com $\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)} \leq 1$, então*

$$\|e^{\sigma|u(\cdot)|^{\frac{N}{N-1}}}\|_{L^p(\Omega)} \leq K,$$

onde ω_{N-1} representa a área de superfície da esfera unitária S^{N-1} .

Provemos que a função $f : E_1 \rightarrow E_{\frac{1}{2}}$, (caso $q=N$) é Lipschitz contínua em conjuntos limitados de E_1 .

Dados $r > 0$ e u, v funções de $W^{1,N}$ tais que $\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)} \leq r$, $\|v\|_{W^{1,N}(\Omega)} \leq r$, considerando $\eta < \frac{\sigma}{2Nr^{\frac{N}{N-1}}}$, (6.24) nos garante a existência de $c_\eta > 0$ tal que

$$|f(u) - f(v)|^N \leq c_\eta (e^{N\eta|u|^{\frac{N}{N-1}}} + e^{N\eta|v|^{\frac{N}{N-1}}})|u - v|^N,$$

e

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\|_{L^N(\Omega)}^N &\leq c_\eta \int_{\Omega} [e^{N\eta|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}} + e^{N\eta|v(x)|^{\frac{N}{N-1}}}] |u(x) - v(x)|^N dx \\ &\leq c_\eta \left(\int_{\Omega} [e^{N\eta|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}} + e^{N\eta|v(x)|^{\frac{N}{N-1}}}]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u(x) - v(x)|^{2N} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_\eta \|u - v\|_{L^{2N}(\Omega)}^N \left(\int_{\Omega} [e^{N\eta|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}} + e^{N\eta|v(x)|^{\frac{N}{N-1}}}]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \bar{c}_\eta \|u - v\|_{W^{1,N}(\Omega)}^N \left(\int_{\Omega} [e^{2N\eta|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}} + e^{2N\eta|v(x)|^{\frac{N}{N-1}}}] dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

O resultado agora segue uma vez que $E_1 \hookrightarrow W^{1,N}(\Omega)$, $E_{\frac{1}{2}} = L^N(\Omega)$ e da desigualdade

$$\|e^{2N\eta|\phi(\cdot)|^{\frac{N}{N-1}}}\|_{L^1(\Omega)} \leq K$$

derivada do Lema 6.14. ■

Espaços de Ordem Fracionária

Teorema A.1. *Seja Λ o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo G em um espaço de Banach B . Se $a \in D(\Lambda)$ e f é uma função continuamente diferenciável de $[0, \infty)$ em B , então existe uma única função contínua u definida em $[0, \infty)$ tomando valores em $D(\Lambda)$, com derivada u' contínua de $[0, \infty)$ em B , tal que*

$$\begin{aligned} u'(t) - \Lambda u(t) &= f(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) &= a. \end{aligned} \tag{A.1}$$

De fato, u é dada por

$$u(t) = G(t)a + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{A.2}$$

Demonstração: [unicidade] Sem perda de generalidade basta verificar que a única solução para o problema (A.1) com $f \equiv 0$ e $a = 0$ é a solução trivial $u \equiv 0$. De fato, pois se u_1 e u_2 são soluções de (A.1),

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)'(t) - \Lambda(u_1 - u_2)(t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ (u_1 - u_2)(0) &= 0, \end{aligned}$$

e recaímos no caso homogêneo.

Seja u uma solução qualquer, então para $t > \tau$, ($\tau \geq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} G(t-\tau)u(\tau) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(t-\tau-s)u(\tau+s) - G(t-\tau)u(\tau)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(t-\tau-s) - G(t-\tau)}{s} u(\tau) + \lim_{s \rightarrow 0} G(t-\tau-s) \frac{u(\tau+s) - u(\tau)}{s} \\ &= -G(t-\tau)\Lambda u(\tau) + G(t-\tau)u'(\tau) = 0. \end{aligned}$$

Portanto a aplicação $\tau \mapsto G(t-\tau)u(\tau)$ é constante. Logo

$$G(t-\tau)u(\tau) = G(t)u(0) = 0, \quad t > \tau.$$

Fazendo $t \rightarrow \tau^+$, obtemos que $u(\tau) = G(0)u(\tau) = 0$ para todo $\tau \geq 0$. Mostrando que de fato a única solução é a trivial.

[**existência**] Mostraremos que u dada por

$$u(t) = G(t)a + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \geq 0$$

é continuamente diferenciável e satisfaz a equação A.1.

É claro que $u(0) = a$ e $\frac{d}{dt}G(t)a = G(t)\Lambda a = \Lambda G(t)a$. Portanto, é suficiente mostrarmos que a função

$$g(t) = \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

é continuamente diferenciável em $[0, \infty)$, assume valores em $D(\Lambda)$ e satisfaz

$$g'(t) = \Lambda g(t) + f(t).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{g(t+s) - g(t)}{s} &= \frac{1}{s} \int_0^{t+s} G(t+s-\tau)f(\tau)d\tau - \frac{1}{s} \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{s} \int_{-s}^t G(t-\tau)f(s+\tau)d\tau - \frac{1}{s} \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t G(t-\tau) \left(\frac{f(s+\tau) - f(\tau)}{s} \right) d\tau + \frac{1}{s} \int_{-s}^0 G(t-\tau)f(\tau+s)d\tau \\ &= \int_0^t G(t-\tau) \left(\frac{f(s+\tau) - f(\tau)}{s} \right) d\tau + \frac{1}{s} \int_t^{t+s} G(\tau)f(\tau+s-t)d\tau \end{aligned}$$

sendo f continuamente diferenciável em $[0, \infty)$,

$$\frac{d^+}{dt}g(t) = \int_0^t G(t-\tau)f'(\tau)d\tau + G(t)f(0)$$

existe e é contínua em $[0, \infty)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{g(t+s) - g(t)}{s} &= \int_0^t \left(\frac{G(s) - G(0)}{s} \right) G(t-\tau)f(\tau)d\tau + \frac{1}{s} \int_t^{t+s} G(t+s-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \left(\frac{G(s) - G(0)}{s} \right) g(t) + \frac{1}{s} \int_0^s G(s-\tau)f(t+\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Observemos ainda que para s suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{s} \int_0^s G(s-\tau)f(t+\tau)d\tau - f(t) \right\|_B &\leq \left\| \frac{1}{s} \int_0^s G(s-\tau)f(t+\tau)d\tau - \frac{1}{s} \int_0^s G(s-\tau)f(t)d\tau \right\|_B \\ &\quad + \left\| \frac{1}{s} \int_0^s G(s-\tau)f(t)d\tau - f(t) \right\|_B \\ &\leq \frac{1}{s} \int_0^s \|G(s-\tau)\|_{L(B)} \|f(t+\tau) - f(t)\|_B d\tau \\ &\quad + \frac{1}{s} \sup_{0 \leq \tau \leq s} \|G(s-\tau)f(t) - f(t)\|_B \\ &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq s} \|G(s-\tau)\|_{L(B)} \sup_{0 \leq \tau \leq s} \|f(t+\tau) - f(t)\|_B \rightarrow 0, \text{ quando } s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Desde que $\frac{d^+}{dt}g(t)$ existe, concluímos também a existência do limite

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left(\frac{G(s) - G(0)}{s} \right) g(t),$$

ou seja, $g(t) \in D(\Lambda)$ e

$$g'(t) = \Lambda g(t) + f(t),$$

e portanto

$$u'(t) = \Lambda G(t)a + \Lambda g(t) + f(t) = \Lambda u(t) + f(t).$$

■

Teorema A.2. *Consideremos os espaços de Banach B_1 e B_2 munidos das normas $\|\cdot\|_{B_1}$ e $\|\cdot\|_{B_2}$ respectivamente. Então a soma vetorial de B_1 com B_2*

$$B_1 + B_2 = \{b_1 + b_2 \in X : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$$

é também um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|u\|_{B_1+B_2} = \inf_{\substack{b_i \in B_i \\ b_1+b_2=u}} \{\|b_1\|_{B_1} + \|b_2\|_{B_2}\}.$$

Demonstração: Mostremos primeiramente que a função escalar $\|\cdot\|_{B_1+B_2}$ define uma norma sobre $B_1 + B_2$.

- (i) É claro que $\|0\|_{B_1+B_2} = 0$. Por outro lado se $u \in B_1 + B_2$ é tal que $\|u\|_{B_1+B_2} = 0$, considere uma família $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de vizinhanças do 0 no espaço vetorial topológico X , tal que $\text{diam}\{V_\lambda\} \rightarrow 0$. Para mostrarmos que $u = 0$, provaremos que $u \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, pois sendo X um espaço de Hausdorff sabemos que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \{0\}$.

Assim se $\lambda \in \Lambda$, como a aplicação $+: X \times X \rightarrow X$ é contínua, existem índices $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tais que $x \in V_{\lambda_1}, y \in V_{\lambda_2} \Rightarrow x + y \in V_\lambda$. Desde que B_1 e B_2 estão imersos em X , $V_\lambda \cap V_{\lambda_1}$ e $V_\lambda \cap V_{\lambda_2}$ são abertos de B_1 e B_2 respectivamente, com $0 \in V_\lambda \cap V_{\lambda_1}$ e $0 \in V_\lambda \cap V_{\lambda_2}$. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $B^{B_1}(0, \varepsilon) \subset V_\lambda \cap V_{\lambda_1}$ e $B^{B_2}(0, \varepsilon) \subset V_\lambda \cap V_{\lambda_2}$.

Uma vez que $\|u\|_{B_1+B_2} = 0$, podemos escolher $b_i \in B_i$ satisfazendo $u = b_1 + b_2$ e $\|b_1\|_{B_1} + \|b_2\|_{B_2} < \varepsilon$ e assim $b_1 \in B^{B_1}(0, \varepsilon) \subset V_\lambda \cap V_{\lambda_1}$ e $b_2 \in B^{B_2}(0, \varepsilon) \subset V_\lambda \cap V_{\lambda_2}$, garantindo que $u = b_1 + b_2 \in V_\lambda$. Portanto $u \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$.

- (ii) Se $u \in B_1 + B_2$ e λ é um escalar, é fácil ver que $\{\|b_1\|_{B_1} + \|b_2\|_{B_2} : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2, b_1 + b_2 = \lambda u\} = \{|\lambda|(\|a_1\|_{B_1} + \|a_2\|_{B_2}) : a_1 \in B_1, a_2 \in B_2, a_1 + a_2 = u\}$ de onde segue imediatamente que $\|\lambda u\|_{B_1+B_2} = |\lambda| \|u\|_{B_1+B_2} = 0$.

(iii) Por fim, sejam $u, v \in B_1 + B_2$. Se $a_1, b_1 \in B_1$ e $a_2, b_2 \in B_2$ são tais que $u = a_1 + a_2$ e $v = b_1 + b_2$, então

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{B_1 + B_2} &\leq \|a_1 + b_1\|_{B_1} + \|a_2 + b_2\|_{B_2} \leq \|a_1\|_{B_1} + \|b_1\|_{B_1} + \|a_2\|_{B_2} + \|b_2\|_{B_2} \\ &= (\|a_1\|_{B_1} + \|a_2\|_{B_2}) + (\|b_1\|_{B_1} + \|b_2\|_{B_2}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{B_1 + B_2} &\leq \inf \{ (\|a_1\|_{B_1} + \|a_2\|_{B_2}) + (\|b_1\|_{B_1} + \|b_2\|_{B_2}) : a_i, b_i \in B_i, u = a_1 + a_2, v = b_1 + b_2 \} \\ &\leq \inf \{ (\|a_1\|_{B_1} + \|a_2\|_{B_2}) : a_1 \in B_1, a_2 \in B_2, u = a_1 + a_2 \} \\ &\leq \inf \{ (\|b_1\|_{B_1} + \|b_2\|_{B_2}) : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2, v = b_1 + b_2 \} \\ &= \|u\|_{B_1 + B_2} + \|v\|_{B_1 + B_2}. \end{aligned}$$

Resta verificarmos que $B_1 + B_2$ é completo com relação a essa norma. Para tal, consideremos em $B_1 + B_2$ uma série absolutamente convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{B_1 + B_2} < \infty$, onde $u_n \in B_1 + B_2$. Para cada n sejam $b_i^n \in B_i$, $i = 1, 2$ tais que $u_n = b_1^n + b_2^n$ e $\|b_1^n\|_{B_1} + \|b_2^n\|_{B_2} < \|u_n\|_{B_1 + B_2} + 2^{-n}$.

Desde que B_1 e B_2 são espaços de Banach, segue que $\sum_{n=0}^{\infty} b_1^n = b_1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_2^n = b_2$. Além disso,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} u_n - (b_1 + b_2) \right\|_{B_1 + B_2} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (b_1^n + b_2^n) - (b_1 + b_2) \right\|_{B_1 + B_2} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_1^n - b_1 \right\|_{B_1} + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_2^n - b_2 \right\|_{B_2} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_1^n - b_1 \right\|_{B_1} + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_2^n - b_2 \right\|_{B_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{B_1 + B_2} = \|b_1 + b_2\|_{B_1 + B_2}$, de onde segue que $B_1 + B_2$ é um espaço de Banach. ■

Teorema A.3. *O espaço $W(p, v, B_1, B_2)$ definido na página 28 é um espaço de Banach quando munido da norma*

$$\|f\|_W = \max \left\{ \|t^v f\|_{L^p(0, \infty; B_1)}, \|t^v f'\|_{L^p(0, \infty; B_2)} \right\}$$

Demonstração: Consideremos em $W(p, v, B_1, B_2)$ uma sequência de Cauchy $\{f_n\}$. Então as desigualdades

$$\begin{aligned} \bullet \quad \|t^v f_n - t^v f_m\|_{L^p(0, \infty; B_1)} &\leq \max \left\{ \|t^v f_n - t^v f_m\|_{L^p(0, \infty; B_1)}, \|t^v f'_n - t^v f'_m\|_{L^p(0, \infty; B_2)} \right\} = \|f_n - f_m\|_W \\ \bullet \quad \|t^v f'_n - t^v f'_m\|_{L^p(0, \infty; B_2)} &\leq \max \left\{ \|t^v f_n - t^v f_m\|_{L^p(0, \infty; B_1)}, \|t^v f'_n - t^v f'_m\|_{L^p(0, \infty; B_2)} \right\} = \|f_n - f_m\|_W \end{aligned}$$

garantem serem $\{f_n\}$ e $\{f'_n\}$ sequências de Cauchy em $L^p(0, \infty; B_1)$ e $L^p(0, \infty; B_2)$.

Sejam $g = \lim_{n \rightarrow \infty} t^v f_n$ em $L^p(0, \infty; B_1)$, e $h = \lim_{n \rightarrow \infty} t^v f'_n$ em $L^p(0, \infty; B_2)$.

Tomemos $f(t) = t^{-v} g(t)$, $0 < t < \infty$.

Mostraremos que $\|f_n - f\|_W \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Desde que $f \in L^p(0, \infty; B_1)$, então $f \in L^p(0, \infty; B_1 + B_2)$ e $f \in L^1_{loc}(0, \infty; B_1 + B_2)$.

Fixada $\phi \in C_0^\infty$, temos por um lado que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty f_n(t) \phi'(t) dt - \int_0^\infty f(t) \phi'(t) dt \right\|_{B_1+B_2} &\leq \int_0^\infty \|f_n(t) - f(t)\|_{B_1+B_2} |\phi'(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty \|f_n(t) - f(t)\|_{B_1} |\phi'(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty \|t^\nu f_n(t) - t^\nu f(t)\|_{B_1} |t^{-\nu} \phi'(t)| dt \\ &= \int_0^\infty \|t^\nu f_n(t) - g(t)\|_{B_1} |t^{-\nu} \phi'(t)| dt \\ &\leq \left(\int_{\text{supp } \phi'} |t^{-\nu} \phi'(t)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \|t^\nu f_n - g\|_{L^p(0, \infty; B_1)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty f'_n(t) \phi(t) dt - \int_0^\infty t^{-\nu} h(t) \phi(t) dt \right\|_{B_1+B_2} &\leq \int_0^\infty \|f'_n(t) - t^{-\nu} h(t)\|_{B_1+B_2} |\phi(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty \|f'_n(t) - t^{-\nu} h(t)\|_{B_2} |\phi(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty \|t^\nu f'_n(t) - h(t)\|_{B_1} |t^{-\nu} \phi(t)| dt \\ &\leq \left(\int_{\text{supp } \phi} |t^{-\nu} \phi(t)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \|t^\nu f'_n - h\|_{L^p(0, \infty; B_2)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Portanto,

$$\int_0^\infty f(t) \phi'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) \phi'(t) dt = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f'_n(t) \phi(t) dt = \int_0^\infty t^{-\nu} h(t) \phi(t) dt.$$

Sendo $\phi \in C_0^\infty$ arbitrária, comprovamos que $f' = t^{-\nu} h \in L^p(0, \infty; B_2)$ (no sentido das distribuições).

É claro que $\|f - f_n\|_W \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$

■

Teorema A.4. *O espaço $T(p, \nu, B_1, B_2)$ definido na página 35 é um espaço de Banach quando munido da norma*

$$\|u\|_T = \inf_{\substack{u=f(0) \\ f \in W}} \|f\|_W.$$

Demonstração: Mostremos primeiramente que a função real $\|\cdot\|_T$ define uma norma sobre $T(p, \nu, B_1, B_2)$.

É claro que $\|0\|_T = 0$. Se $u \in T$ é tal que $\|u\|_T = 0$, consideremos em $W(p, \nu, B_1, B_2)$ uma sequência $\{f_n\}$ tal que $u = f_n(0)$, $n \in \mathbb{N}$, e $\|f_n\|_W \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Fixemos $\xi > 0$. Para $0 < t < \xi$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_1^t f'_n(\tau) d\tau \right\|_{B_1+B_2} &\leq \int_1^t \|f'_n(\tau)\|_{B_1+B_2} d\tau \\ &\leq \int_1^t \|f'_n(\tau)\|_{B_2} d\tau \leq \int_1^t \tau^{-\nu} \|\tau^\nu f'_n(\tau)\|_{B_2} d\tau \\ &\leq \|t^\nu f_n\|_{L^p(0, \infty; B_2)} \left(\int_0^\xi \tau^{\frac{-\nu p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \|f_n(t)\|_{B_1} dt &< \varepsilon \\ \int_1^\xi \|f'_n(t)\|_{B_2} dt &< \varepsilon, \quad t \in (0, \xi). \end{aligned}$$

Do Lema 3.2 para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in B_1 + B_2$ tal que $f_n(t) = b_n + \int_1^t f'_n(\tau) d\tau$, q.s. em $(0, \infty)$.

Então,

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \int_0^\xi \|f_n(t)\|_{B_1} dt = \int_0^\xi \left\| b_n + \int_1^t f'_n(\tau) d\tau \right\|_{B_1} dt \\ &\geq \int_0^\xi \left\| b_n + \int_1^t f'_n(\tau) d\tau \right\|_{B_1+B_2} dt \\ &\geq \int_0^\xi \|b_n\|_{B_1+B_2} dt - \left\| \int_1^t f'_n(\tau) d\tau \right\|_{B_1+B_2} dt \\ &\geq \int_0^\xi \|b_n\|_{B_1+B_2} dt - \left\| \int_1^t f'_n(\tau) d\tau \right\|_{B_2} dt \\ &\geq \int_0^\xi (\|b_n\|_{B_1+B_2} - \varepsilon) dt \\ &= \xi \|b_n\|_{B_1+B_2} - \xi \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\|b_n\|_{B_1+B_2} < (\frac{1+\xi}{\xi})\varepsilon$, sempre que $n > N$.

Provamos, pois, que $\|b_n\|_{B_1+B_2} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Com isso, concluímos que $\|f_n(t)\|_{B_1+B_2} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente em $(0, \xi)$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, seja $N_\delta > 0$ tal que para $n > N_\delta$ tenhamos $\|f_n(t)\|_{B_1+B_2} < \delta$, para $t \in (0, \xi)$.

Então $\|u\|_{B_1+B_2} \leq \lim_{t \rightarrow 0} \|f_n(t)\|_{B_1+B_2} < \delta$ para todo $n > N$.

Como δ é arbitrário, segue que $u = 0$.

Se $u \in T$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então a igualdade $\{f \in W(p, v, B_1, B_2) : \alpha u = f(0)\} = \{\alpha f : f \in W(p, v, B_1, B_2), f(0) = u\}$ assegura que $\|\alpha u\|_T = |\alpha| \|u\|_T$.

Consideremos, por fim, $u, v \in T$. Se $f, g \in W(p, v, B_1, B_2)$ são tais que $f(0) = u$ e $g(0) = v$, então $\|u + v\|_T \leq \|f + g\|_W \leq \|f\|_W + \|g\|_W$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u + v\|_T &\leq \inf \{ \|f\|_W + \|g\|_W : f(0) = u, g(0) = v \} \\ &= \inf \{ \|f\|_W : f(0) = u \} + \inf \{ \|g\|_W : g(0) = v \} = \|u\|_T + \|v\|_T. \end{aligned}$$

Quanto à $(T, \|\cdot\|_T)$ ser um espaço de Banach, provaremos que toda série absolutamente convergente em T é convergente. Primeiramente observemos que na prova de que $\|u\|_T = 0 \rightarrow u = 0$, o argumento utilizado prova, na verdade que se $\{f_n\}$ é uma sequência em $W(p, v, B_1, B_2)$ tal que $\|f_n\|_W \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, então $\|f_n(0)\|_{B_1+B_2} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Consideremos em $T(p, v, B_1, B_2)$ a série absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_T$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n \in W(p, v, B_1, B_2)$ tal que $f_n(0) = u$ e $\|f_n\|_W < \|u_n\|_T + 2^{-n}$.

Desde que, $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_W < \infty$, sendo $W(p, v, B_1, B_2)$ um espaço de Banach, podemos considerar $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in W(p, v, B_1, B_2)$. Sabemos que $\left\| \sum_{k=1}^n f_k - f \right\|_W \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, o que implica $\left\| \left(\sum_{k=1}^n f_k - f \right) (0) \right\|_{B_1+B_2} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é, $\left\| \sum_{k=1}^n u_k - f(0) \right\|_{B_1+B_2} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = f(0)$ (convergência em $B_1 + B_2$). Para finalizarmos, mostremos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = f(0)$, onde a convergência agora é no espaço $T(p, v, B_1, B_2)$. Mas observemos que $\left\| f(0) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right\|_T \leq \left\| f - \sum_{k=1}^n f_k \right\|_W \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. ■

Teorema A.5. Se Ω denota um domínio em $\mathbb{R}^n$, então

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L_{loc}^1(\Omega),$$

para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Se $u \in L^q(\Omega)$ e $K \subset \subset \Omega$ então da desigualdade

$$\int_K |u(x)| dx = \int_K |u(x)| \cdot 1 dx \leq |K|^{\frac{1}{q^*}} \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

de onde obtemos que $u \in L_{loc}^1(\Omega)$.

Observemos que a topologia de $L^1_{loc}(\Omega)$ é dada por

$$U \subset L^1_{loc}(\Omega) \text{ é aberto } \Leftrightarrow u \in U, \exists \varepsilon > 0, K \subset\subset \Omega / \|v - u\|_{L^1(K)} < \varepsilon, v \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow v \in U.$$

Consideremos a aplicação de inclusão

$$i : L^q(\Omega) \rightarrow L^1_{loc}(\Omega).$$

Dado U um aberto de $L^1_{loc}(\Omega)$, mostremos que $i^{-1}(U)$ é um aberto de $L^q(\Omega)$, isto é, se $u \in i^{-1}(U)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B^{L^q}(u, \varepsilon) \subset i^{-1}(U)$. De fato, se $u \in i^{-1}(U)$ então da definição da topologia de $L^1_{loc}(\Omega)$, deve existir $\varepsilon > 0$ e $K \subset\subset \Omega$ tais que $\|u - v\|_{L^1_{loc}(K)} < \varepsilon \Rightarrow v \in U$. Afirmamos que $B^{L^p}(u, \frac{\varepsilon}{|K|^{\frac{1}{p^*}}}) \subset i^{-1}(U)$. De fato,

$$v \in B^{L^p}(u, \frac{\varepsilon}{|K|^{\frac{1}{p^*}}}) \Rightarrow \left(\int_K |u(x) - v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{K} \Rightarrow \int_K |u(x) - v(x)| dx \leq \left(\int_K |u(x) - v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |K|^{\frac{1}{p^*}} < \varepsilon$$

portanto $v \in U$.

■

Lema A.6. Se $z \in \mathbb{R}^n$ e Ω é um domínio com medida limitada em $\mathbb{R}^n$, então para todo número real $0 \leq \nu < n$,

$$\int_{\Omega} |x - z|^{-\nu} dx \leq M |\Omega|^{1 - \frac{\nu}{n}}, \quad (\text{A.3})$$

onde a constante M depende de ν e n , porém não depende de z ou Ω .

Demonstração: Consideremos em $\mathbb{R}^n$ uma bola aberta B centrada em z com mesma medida de Ω . É claro que o lado esquerdo de (A.3) não excede $\int_B |x - z|^{-\nu} dx$, entretanto a desigualdade (A.3) é evidentemente válida para $\Omega = B$.

■

Escalas de Espaços de Banach

Lema B.1. *Sejam $(F, \|\cdot\|_F)$ e $(G, \|\cdot\|)$ espaços de Banach com $F \hookrightarrow G$ e $B \in \mathcal{C}(G)$. Se $(\mu + B)^{-1}(F) \subset F$ para algum $\mu \in \rho(-B)$, então $\mu \in \rho(-B_F)$ e*

$$(\mu + B_F)^{-1} = (\mu + B)^{-1}|_F. \quad (\text{B.1})$$

Se $D(B^k) \subset F$ para algum inteiro positivo k , então $\rho(B) = \rho(B_F)$ e (B.1) vale para cada $\mu \in \rho(-B)$.

Demonstração: A primeira parte foi demonstrada no Lema 5.2 do Capítulo 5. Suponhamos então que $D(B^k) \subset F$ para algum inteiro positivo k , logo se $\lambda \in \rho(-B)$, da identidade do resolvente

$$(\lambda + B)^{-1}1 = (\mu + B)^{-1} + (\mu - \lambda)(\mu + B)^{-1}(\lambda + B)^{-1}$$

obtemos

$$(\lambda + B)^{-1} = (\mu + B)^{-1} + (\mu - \lambda)(\mu + B)^{-2} + (\mu - \lambda)^2(\mu + B)^{-2}(\lambda + B)^{-1},$$

e repetindo o argumento acima $k - 1$ vezes segue a identidade

$$(\lambda + B)^{-1} = \sum_{j=1}^k (\mu - \lambda)^{j-1}(\mu + B)^{-j} + (\mu - \lambda)^k(\mu + B)^{-k}(\lambda + B)^{-1}. \quad (\text{B.2})$$

Com isso mostramos que $(\lambda + B)^{-1}F \subset F$ e novamente da prova do lema 5.2 segue que $\lambda \in \rho(-B_F)$ e $(\lambda + B_F)^{-1} = (\lambda + B)^{-1}|_F$. Reciprocamente, suponhamos que $\lambda \in \rho(-B_F)$. Desde que os espaços $(F, \|\cdot\|_F)$ e $(D(B^k), \|(\mu + B)^k \cdot\|_G)$ são espaços de Banach continuamente imersos em G , obtemos pelo Teorema do Gráfico Fechado que $D(B^k) \hookrightarrow F$. Observando também que para cada inteiro positivo $1 \leq j \leq k$ o operador $(\lambda + B)^{-j}$ define um isomorfismo de G sobre $D(B^j)$, obtemos que

$$Qx = \sum_{j=1}^k (\mu - \lambda)^{j-1}(\mu + B)^{-j}x + (\mu - \lambda)^k(\lambda + B_F)^{-1}(\mu + B)^{-k}x, x \in G$$

define um operador linear limitado em G . Além disso, observemos que $Qx \in D(B)$ para todo $x \in G$ e novamente da identidade do resolvente obtemos

$$\begin{aligned}
 (\lambda + B)Qx &= \sum_{j=1}^k (\mu - \lambda)^{j-1} (\mu + B)^{-j+1} x + (\mu - \lambda)^k (\lambda + B)(\lambda + B_F)^{-1} (\mu + B)^{-k} x \\
 &= \sum_{j=1}^k (\mu - \lambda)^{j-1} (\mu + B)^{-j+1} (\lambda + B)(\mu + B)^{-1} x + (\mu - \lambda)^k (\lambda + B_F)(\lambda + B_F)^{-1} (\mu + B)^{-k} x \\
 &= \sum_{j=1}^k (\mu - \lambda)^{j-1} (\mu + B)^{-j+1} (I - (\mu - \lambda)(\mu + B)^{-1}) x + (\mu - \lambda)^k (\mu + B)^{-k} x \\
 &= \sum_{j=1}^k (\mu - \lambda)^{j-1} (\mu + B)^{-j+1} x + (\mu - \lambda)^j (\mu + B)^{-j} x + (\mu - \lambda)^k (\mu + B)^{-k} x = x
 \end{aligned}$$

e uma vez que $BQx = QBx$, sempre que $x \in D(B)$, segue que $\lambda \in \rho(-B)$ com $Q = (\lambda + B)^{-1}$. ■

Consideremos os espaços de Banach $E_1 \hookrightarrow E_0$. Se $A : E_1 \rightarrow E_0$ é uma transformação linear, podemos interpretá-la como um operador A_0 , em E_0 com domínio E_1 . Não havendo risco de confusão, escreveremos simplesmente A para denotar o operador A_0 .

Lema B.2. *Nas considerações acima, se $A : E_1 \rightarrow E_0$ é uma transformação linear, então $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0) \cap \mathcal{C}(E_0)$ se e somente se, a norma do gráfico (de A_0) for equivalente a norma de E_1 .*

Demonstração: Se $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0) \cap \mathcal{C}(E_0)$, desde que $E_1 \hookrightarrow E_0$,

$$\|x\|_{D(A)} = \|Ax\|_{E_0} + \|x\|_{E_0} \leq \left(\|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} + \|I\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \right) \|x\|_{E_1},$$

mostrando que $E_1 \hookrightarrow D(A)$. Sendo A um operador fechado, $D(A)$ é um espaço de Banach, e assim do Teorema da Aplicação Aberta, segue também que $D(A) \hookrightarrow E$.

Reciprocamente, se a norma do gráfico for equivalente a norma $\|\cdot\|_{E_1}$, existe uma constante positiva C tal que

$$\|Ax\|_{E_0} \leq \|x\|_{D(A)} \leq C \|x\|_{E_1}$$

para todo $x \in E_1$, mostrando que $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$. Além disso, desde que $D(A) \doteq E_1$, segue que $D(A)$ é um espaço de Banach e, conseqüentemente, $A \in \mathcal{C}(E_0)$. ■

Teorema B.3. *Se (E_0, E_1) é um par admissível de espaços de Banach, então*

$$E_1 \xrightarrow{d} E_\alpha \xrightarrow{d} E_\beta \xrightarrow{d} E_0, \quad 0 < \beta < \alpha < 1.$$

Demonstração: Ver [5] Teorema 3.9.1 .

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. ADAMS, “Sobolev Spaces”, Academic Press Inc, 1975.
- [2] H. AMANN, “Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Volume I: Abstract Linear Theory”, Monographs in mathematics, Birkhäuser, v. 89, 1995.
- [3] W. ARENTD, “ Gaussian estimates and interpolation of the spectrum in L^p ”, Diff. Int. Equ.,7 (1994), 1153-1168).
- [4] G. BACHMAN AND L. NARICI, “Functional Analysis”, Academic Press, 1966.
- [5] J. J. BERGH AND J. LÖFSTRÖM, “Interpolation Spaces. An Introduction”, Springer-Verlag, Berlin 1976.
- [6] H. BRÉZIS, “Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones”, Masson, Paris, 1983.
- [7] H. BRÉZIS, “Partial Differential Equations in 20th Century”, Advances in Mathematics, 135, 76-144, 1998.
- [8] A. N. CARVALHO AND J. M. ARRIETA, “Abstract Parabolic Problems with Critical Nonlinearities and Applications to Navier-Stokes and Heat Equations”, Transactions of the American Mathematical Society, 352, 285-310, 1999.
- [9] A. N. CARVALHO AND A. R. BERNAL AND J. M. ARRIETA, “Parabolic Problems with Nonlinear Boundary Conditions and Critical Nonlinearities”, Journal of Differential Equations, 156, 376-406, 1999.
- [10] A. N. CARVALHO, “Equações Parabólicas Semilineares”, *ICMC-USP*, notas de aula, 2002.
- [11] J. B. CONWAY, “Functions of one Complex variable”, Graduate Texts in Mathematics - Springer Verlag, New York, 1973.
- [12] R. CZAJA, “Differential Equations with Sectorial Operator”, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 2002.

- [13] E. B. DAVIES, “One-Parameter Semigroups”, Academic Press Inc, 1980.
- [14] N. DUNFORD AND J. T. SCHWARTZ, “Linear Operators Part I: General Theory”, Pure and Applied Mathematics, vol. vii 1958.
- [15] G. B. FOLLAND, “Real Analysis Modern Techiques and their applications”, John Wiley & Sons. Inc, 1984.
- [16] A. FRIEDMAN, “Partial Differential Equations”, Robert E. Kriger Publishing Company, Inc, 1969.
- [17] D. HENRY, “Semigroups”, *IME-USP*, course notes, 1981.
- [18] D. HENRY, “Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations”, Springer-Verlag, New York Inc; v. 840, 1981.
- [19] T. KATO, “Pertubation Theory for linear Operators”, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [20] S. G. KREĬN, “Linear Differential Equations in Banach Space”, AMS, 1971.
- [21] J. L. LIONS, “Sur les Espaces D' Interpolation; Dualité”, *Math. Scand.*, 9, 147-177, 1961.
- [22] J. L. LIONS AND E. MAGENES, “Problemi de limiti non omogenei (III)”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 15, 41-103, 1961.
- [23] J. L. LIONS AND E. MAGENES, “Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications”, v.1, Springer Verlag, New York, 1972.
- [24] M. MIKLAVCIC, “Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations”, World Scientific Publishing Co Pte. Ltd., 1998.
- [25] J. MOSER, “A sharp form of an inequality by N. Trudinger”, *Indiana U. Math. J.*, 20, 1971.
- [26] M. D. NASCIMENTO, “A interpolação complexa e a caracterização dos espaços de potências fracionárias associados a operadores acretivos”, *ICMC-USP*, dissertação de mestrado, 2002.
- [27] R. NAGEL, “Extrapolation Spaces for Semigroups”,
url = “citeseer.nj.nec.com/nagel97extrapolation.html”.
- [28] L. NIRENBERG, “On Elliptic Partial Differential Equations”, *Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa*, , 116-161 .

- [29] A. PAZY, “Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations”, Springer-Verlag, New York Inc; v. 44, 1983.
- [30] M. R. T. PRIMO, “Sincronização e Homogeneização em Problemas Parabólicos com Condição de Fronteira não Linear”, *ICMC-USP* Tese de Doutorado, 1999.
- [31] H. SCHUBERT, “Categories”, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [32] R. SEELEY, “Norms and domains of the complex powers A_B^z ”, *Amer. J. Math.*, 299-309, 93, 1971.
- [33] H. B. STEWART, “Generation of Analytic Semigroups by Strongly Elliptic Operators”, *Transactions of the American Mathematical Society*, 199, 141-162, 1974.
- [34] H. TRIEBEL, “Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis”, *Teubner-Texte zur Mathematik*, 1993.
- [35] H. TRIEBEL, “Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators”, *Johann Ambrosius Barth, Heidelberg*, second edition, 1955.
- [36] N. S. TRUDINGER, “On imbeddings into Orlicz spaces and some applications”, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17, 1967.
- [37] K. YOSIDA, “Functional Analysis”, Springer-Verlag, New York, 1974.

Lista de Símbolos

$[\cdot, \cdot]_{\theta}$ (resp. $(\cdot, \cdot)_{\theta, p}$): funtor de interpolação complexo (resp. real)

$\mathcal{C}(E)$: $\{A : D(A) \subset E \rightarrow E : A \text{ é fechado}\}$

$\mathcal{K}(E)$: $\{A : D(A) \subset E \rightarrow E : A \text{ é compacto}\}$

Σ_{ν} : $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \nu\} \cup \{0\}$

$B^E(e_0, \varepsilon)$: $\{e \in E : \|e - e_0\|_E < \varepsilon\}$

$D^E(e_0, \varepsilon)$: $\{e \in E : \|e - e_0\|_E \leq \varepsilon\}$

$F \hookrightarrow E$: $F \subset E$ com inclusão $i : F \rightarrow E$ contínua

$W_v^{2,p}(\Omega)$: $\left\{u \in W^{2,p}(\Omega) : \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega\right\}$

Índice Remissivo

- Aplicação
 - ε – regular, 4
 - m -suave, 63
 - dualidade, 11
 - naturalmente induzida, 96
- bootstrapping, 107
- Categorias, 72
- Cone
 - finito, 68
 - propriedade do, 68
- Congruência, 68
- Core, 104
- Derivada
 - distribucional, 28
- Desigualdade
 - interpolação, 83
- Escala
 - bilateral, 82
 - compactamente imersa, 86
 - contínua, 82
 - de Banach, 80
 - de interpolação
 - extrapolação, 100
 - de potência, 87
 - bilateral, 99
 - densamente imersa, 82
 - discreta, 82
 - dual, 94
 - de interpolação, 100
 - equivalente, 83
 - espaços de Banach, 37, 82
 - extrapolada, 91
 - Hilbert, 83
 - isometricamente isomorfa, 83
 - isomorfa, 82
 - reflexiva, 83
 - unilateral, 82
- Espaço
 - de Banach, 8
 - de Hilbert, 12
 - dual, 8
 - Traço, 35
 - complemento de, 89
 - extrapolação, 89
 - extrapolado, 80
 - intermediário, 73
 - interpolação, 73
 - exato, 74
 - potências fracionárias, 3
 - sobolev fracionário, 53
 - super-, 80
- Espectro, 8
- Extensão
 - s – operador forte de, 58

- operador de, 57
- Função
 - localmente integrável, 28
 - traço de, 32
- Funtor, 72
 - básico, 72
 - de interpolação, 75
 - dual, 100
 - exato, 76
- Gerador
 - infinitesimal, 9
- Imagem numérica, 12
- Isometria, 83
- Isomorfismo
 - isométrico, 54
- multi-índice, 20
- Norma
 - intrínseca, 60
- Operador
 - adjunto, 11
 - diferencial, 20
 - fortemente elíptico, 20
 - linear, 8
 - adjunto formal, 20
 - auto-adjunto, 12
 - dissipativo, 11
 - fechável, 12
 - realização de, 80
 - setorial, 14
 - simétrico, 12
 - tipo, 102
- Pares admissíveis, 72
- Problema
 - parabólico
 - semilinear, 80
- Propriedade
 - C^m -regularidade, 63
 - de reiteração, 113
- Resolvente, 8
 - identidade do, 82
- Segmento
 - propriedade do, 58
- Semigrupo, 8
 - fortemente contínuo, 8
 - analítico, 13
 - de contrações, 11
 - uniformemente contínuo, 8
- Sequência
 - regularizante, 33
- Solução
 - ε -, 4
- Teorema
 - de Hille-Yosida, 10
 - Forma Geral, 10
 - de Lumer-Phillips, 11
 - convergência dominada, 40
 - extremal, 113
 - imersão, 41
 - interpolação, 37
 - O Segundo Limite Fundamental, 9
 - Sard, 23