Existência de soluções para equações integro-diferenciais neutras

José Paulo Carvalho dos Santos

Orientador: Eduardo Alex Hernández Morales

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação - ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção
do título de Doutor em Ciências - área
Matemática.

USP - São Carlos

Março/2006

“Retroceder nunca...
render-se jamais!”

Filme: “No Retreat, No Surrender”.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela saúde e perseverança.

Ao Prof. Eduardo Hernandez, por ter aceito me orientar no doutorado e pela forma segura e dedicada que conduziu todo processo de Tese.

À Ni, por tornar minha vida tão mais feliz.

Ao meu irmão Luis Antônio, pelos conselhos valiosos e pela grande ajuda financeira durante os primeiros anos do doutorado, período em que estava sem bolsa.

Aos Meus pais Carmo e Aparecida e minhas irmãs Ana Maria e Cláudia, pelo amor, apoio e orações.

Ao Professor Ladeira por ter me apresentado ao Professor Eduardo Hernandez, o que tornou meu doutorado possível.

Aos funcionários e funcionárias do ICMC-USP, pela dedicação que empregam no desenvolvimento de seu trabalho.

Aos amigos, pelo apoio e pelos muitos momentos divertidos, os quais não irei esquecer.

À Capes, pelo suporte financeiro.

Abstract

In this work we study the existence of mild, semi-classical and classical solution, concepts introduced be later for a class of abstract neutral functional integrodifferential systems with unbounded delay in the form

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{D}(t, x_t) &= A\mathcal{D}(t, x_t) + \int_0^t B(t-s)\mathcal{D}(s, x_s)ds + g(t, x_t), \quad t \in (0, a), \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x(t) + F(t, x_t)) &= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + G(t, x_t), \quad t \in (0, a), \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B},\end{aligned}$$

where $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ is a closed linear densely defined operator in a Banach space X , each $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$ is a closed linear operator, the history $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, belongs to some abstract phase space $\mathcal{B}$ defined axiomatically and $\mathcal{D}, F, g : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ are appropriate functions.

To establish some of our results, we studied the existence and qualitative properties of a resolvent of bounded linear operators $(R(t))_{t \geq 0}$, for a system in the form

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(x(t) + \int_0^t N(t-s)x(s)ds \right) &= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s) ds, \quad t \in (0, a), \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

where $(N(t))_{t \geq 0}$ is a family of bounded linear operators on X . We mention that this class of system arise in the study of heat conduction in material with fading memory.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções fracas, semi-clássicas e clássicas, conceitos introduzidos no texto para uma classe de sistemas integro-diferenciais do tipo neutro com retardamento não limitado modelados na forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{D}(t, x_t) &= A\mathcal{D}(t, x_t) + \int_0^t B(t-s)\mathcal{D}(s, x_s)ds + g(t, x_t), \quad t \in (0, a), \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x(t) + F(t, x_t)) &= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + G(t, x_t), \quad t \in (0, a), \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B},\end{aligned}$$

onde A é um operador linear fechado densamente definido em um espaço de Banach X , cada $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$, $t \geq 0$ é um operador linear fechado, a história $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, pertence a um espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ definido axiomáticamente e $\mathcal{D}, F, g, G : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ são funções apropriadas.

Para obter alguns de nossos resultados, estudamos a existência e propriedades qualitativas de uma família resolvente de operadores lineares limitados $(R(t))_{t \geq 0}$, para o sistema integro-diferencial

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(x(t) + \int_0^t N(t-s)x(s)ds \right) &= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds, \quad t \in (0, a), \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

onde $(N(t))_{t \geq 0}$ é uma família de operadores lineares limitados em X . Mencionamos que este tipo de sistemas aparece no estudo da condução de calor em materiais com memória amortecida.

Sumário

Introdução	xiii
1 Preliminares	1
1.1 Semigrupos de operadores lineares	1
1.2 Operador resolvente para equações integro-diferenciais	6
1.3 Espaços de fase abstratos e alguns Teoremas	10
2 Existência de soluções para uma equação integro-diferencial	13
2.1 Existência de soluções fracas	13
2.2 Resultados de regularidade	22
2.2.1 Existência de solução semi-clássica	22
2.2.2 Existência de solução clássica	25
2.3 Exemplo	30
3 Existência de soluções para um sistema integro-diferencial	33
3.1 Existência de soluções fracas	33
3.2 Resultados de regularidade	43
3.2.1 Existência de soluções semi-clássicas	44
3.2.2 Existência de solução clássica	48
3.3 Exemplo	56
4 Famílias “N-resolventes”	59
4.1 Preliminares	60
4.2 Existência de uma família N-resolvente	61
4.3 O problema integro-diferencial não homogêneo	81
4.4 Aplicações a equações neutras com retardamento não limitado	90

Referências Bibliográficas

95

Introdução

Nas últimas décadas o estudo de sistemas com memória tem recebido muita atenção devido, fundamentalmente, ao fato de que o retardo temporal tem uma influência significativa sobre o comportamento qualitativo do sistema. A maior parte da literatura relativa a este assunto está relacionada com o problema de Cauchy abstrato

$$\dot{u}(t) = F(t, u_t), \quad (1)$$

$$u_\sigma = \varphi \in C([-r, 0] : \mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Como referências para este tipo de equações citamos Hale & Lunel [29] e Hale & Kato [30]. Sistemas com retardamento não limitado e valores em $\mathbb{R}^n$ também são considerados, veja entre outros, Corduneanu & Lakshmikantham [16] e o livro Hino, Murakami & Naito [49].

Como a solução de (1)-(2) assume valores em um espaço de dimensão finita, o sistema (1)-(2) não permite o estudo de equações diferenciais parciais, deixando de lado muitos sistemas diferenciais interessantes e importantes. Este fato motivou muitos pesquisadores a estudar uma classe de sistemas abstratos descritos na forma

$$\frac{d}{dt}(u(t) + f(t, u_t)) = Au(t) + g(t, u_t), \quad t \in [\sigma, \sigma + a], \quad (3)$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \quad (4)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0}$ definido sobre um espaço de Banach X e $\mathcal{B}$ é um espaço de fase definido de maneira axiomática. No que segue, nos referimos a este sistema como “ Abstract Neutral Functional Differential Equations ”.

O sistema diferencial (3)-(4) é uma generalização do sistema clássico onde $f \equiv 0$, o qual tem sido extensamente estudado, veja entre outros Travis & Weeb [67, 68, 69] e Wu [72]. Mas o modelo (3)-(4) é mais que uma simples generalização abstrata. “ Abstract Neutral Functional Differential Equations ” aparecem no estudo de diferentes problemas aplicados. O

sistema (3), por exemplo, aparece na teoria desenvolvida por Gurtin & Pipkin [27] e Nunziato [62] para a descrição da condução de calor em materiais com memória amortecida. Na teoria de condução de calor é assumido, de maneira geral, que a energia e o fluxo de calor dependem linearmente da temperatura $u(\cdot)$ e do gradiente $\nabla u(\cdot)$. Nestas condições, a clássica equação do calor descreve de maneira satisfatória a evolução da temperatura em diferentes tipos de materiais. Esta situação é diferente em materiais com memória amortecida (materials with fading memory). Neste tipo de material, veja [27, 62], a energia interna do material e o fluxo de temperatura são funcionais da $u(\cdot)$ e do gradiente de $u(\cdot)$, respectivamente. Um modelo amplamente aceito para descrever o fluxo de calor em materiais com memória amortecida, veja [12, 13, 56, 62, 65], é o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[c_0 u(t, x) + \int_{-\infty}^t K_1(t-s) u(s, x) ds \right] &= c_1 \Delta u(t, x) + \int_{-\infty}^t K_2(t-s) \Delta u(s, x) ds, \\ u(t, x) &= 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Neste sistema, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e com fronteira regular; $(t, x) \in [0, \infty) \times \Omega$; $u(\cdot)$ representa a temperatura em x no tempo t ; c_1, c_2 são constantes positivas com significado físico e $K_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são funções apropriadas.

Outra motivação importante para o desenvolvimento da teoria de equações funcionais do tipo neutro é o estudo de uma classe de equações parciais do tipo hiperbólico com certas condições de fronteira não lineares, que surgem no estudo de linhas de transmissão. Com relação a isto, veja os trabalhos de Abolinia & Mishkis [1], Brayton [10], Brayton & Moser [11], Cooke & Krumme [15], Cruz & Hale [17], Lopes [52, 53], Hale [54] e Wu & Xia [73, 74] para detalhes relativos à história, referências e o estado atual do tema.

Em Wu and Xia [73], a partir de um sistema ordinário do tipo neutro, os autores deduzem a seguinte equação escalar do tipo neutro em derivadas parciais definida sobre o círculo unitário

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D(u_t) &= k \frac{\partial}{\partial \xi} D(u_t) + g(t, u_t), \\ u_\sigma &= \varphi \in C([-r, 0] : C(S^1 : \mathbb{R})). \end{aligned} \quad (6)$$

Neste sistema, k é uma constante positiva e $(D\phi)(s) = \phi(0)(s) - \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)] \phi(\theta)(s)$ onde η é uma função de variação limitada não atômica em zero. Esta equação neutra foi investigada por Hale em [54]. Neste trabalho, Hale estabelece uma pequena teoria para o sistema, considerando a existência e unicidade de soluções, propriedades condensantes do operador solução, bifurcação de Hopf e estabilidade de órbitas periódicas.

Observe que o sistema neutro (6) pode ser descrito por meio do problema de Cauchy abstrato

$$\frac{d}{dt}(D(t, u_t)) = AD(t, u_t) + g(t, u_t), \quad (7)$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \quad (8)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo e $\mathcal{B}$ é um espaço de fase apropriado. Com relação a este tipo de sistema mencionamos Dakto [19] e Addimy [2, 3, 4, 5].

Em relação a sistemas abstratos do tipo neutro de primeira ordem modelados como (3)-(4) ou (7)-(8) citamos entre outros trabalhos, [2, 3, 4, 5, 22, 33, 45, 46] para existência de soluções fracas; [5, 45] para regularidade de soluções fracas; [2] para estabilidade de soluções; [32, 35, 34] para existência de soluções periódicas; [36] para a existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas; [37, 38, 39] para soluções pseudo quase periódicas; [40, 41] para sistemas impulsivos e [22, 43] para sistemas com condições não locais. É interessante citar também [46, 42], onde são feitas algumas correções de recentes trabalhos tratando sobre a existência e controlabilidade exata de soluções associadas a sistemas do tipo neutro.

Embora haja extensa literatura para sistemas neutros, o estudo da existência e propriedades qualitativas de soluções de sistemas neutros do tipo integro-diferencial são tópicos até agora não desenvolvidos. Este fato e as interessantes aplicações relacionadas ao problema de condução de calor em materiais com memória são as principais motivações de nosso trabalho.

Esta Tese possui quatro capítulos. No Capítulo 1 são introduzidas de maneira resumida as diferentes ferramentas técnicas que nos auxiliaram na obtenção de nossos resultados.

No Capítulo 2 estudamos diferentes questões relacionadas com a existência e regularidade de soluções para o sistema integro-diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{D}(t, u_t) = A\mathcal{D}(t, u_t) + \int_0^t B(t-s)\mathcal{D}(s, u_s)ds + g(t, u_t), & t \in (0, a), \\ u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \quad (9)$$

onde $\mathcal{D}(t, \psi) = \psi(0) + f(t, \psi)$ e $f, g : [0, a] \times X \rightarrow X$ são funções apropriadas. Usando diferentes resultados de ponto fixo, nos Teoremas 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3, é estabelecida a existência de soluções fracas para (9). Por outro lado, nos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 são estabelecidas condições às quais uma solução fraca é uma solução semi-clássica e clássica respectivamente. Como aplicação dos resultados do Capítulo 2, no Exemplo 2.3 estudamos um sistema abstrato que permite a análise do sistema integro-diferencial (5) no caso particular onde $K_1 = K_2$.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo do sistema integro-diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x(t) + F(t, x_t)) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + G(t, x_t), & t \in (0, a), \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \quad (10)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$, $t \geq 0$ são operadores fechados em X , a história $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ pertence a um espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ definido axiomáticamente e $F, G : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ são funções apropriadas.

Como é observado no Capítulo 3, o tratamento deste sistema é diferente e de fato mais complicado que aquele usado no estudo de (9). Para obter nossos resultados de existência usamos propriedades e conceitos relacionados com a teoria de Resolventes analíticos, veja como referência [25].

Em geral os resultados de existência do Capítulo 3 são obtidos usando Teoremas de ponto fixo. Especificamente, no Teorema 3.1.1 é provado a existência de soluções fracas usando o critério da contração. Por outro lado, os Teoremas 3.1.2 e 3.1.3 estabelecem a existência de soluções fracas por meio dos Teoremas de Schauder e Leray-Schauder, respectivamente. Neste Capítulo também consideramos a existência de soluções semi-clássicas, veja Teorema 3.2.1 e clássicas, veja Teorema 3.2.3, para (10). O Capítulo é completado com uma aplicação dos resultados abstratos.

No Capítulo 4 estudamos a existência e regularidade de soluções para uma classe de sistemas neutros integro-diferenciais descritos da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(x(t) + \int_{-\infty}^t N(t-s)x(s)ds \right) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + G(t, x_t), & t > 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \quad (11)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$, $t \geq 0$ são operadores lineares fechados com $D(B(t)) \supset D(A)$, $t \geq 0$ e $(N(t))_{t \geq 0}$ é uma família de operadores lineares contínuos em X .

Para obter nossos resultados de existência de soluções, na primeira parte do Capítulo 4 desenvolvemos uma teoria de operadores resolventes para o sistema integro-diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(x(t) + \int_0^t N(t-s)x(s)ds \right) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds, & t \in (0, a), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (12)$$

à qual denominaremos família “N-resolvente”. Dizemos que uma família de operadores lineares fortemente contínua $(R(t))_{t \geq 0}$ em X é uma família N-resolvente para (12) se $R(0) =$

I_d e as equações

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(R(t)x + \int_0^t N(t-s)R(s)x ds \right) &= AR(t)x + \int_0^t B(t-s)R(s)x ds, \\ \frac{d}{dt} \left(R(t)x + \int_0^t R(t-s)N(s)x ds \right) &= R(t)Ax + \int_0^t R(t-s)B(s)x ds,\end{aligned}$$

são satisfeitas para todo $t \geq 0$.

Os resultados básicos deste Capítulo são os Teorema 4.2.1 onde é provado a existência de uma família N-resolvente analítica para (12), e o Teorema 4.3.1 onde é introduzida uma forma da variação dos parâmetros para (12). Finalmente, no Teorema 4.4.3 aplicamos a teoria de operadores N-resolvente para o estudo da existência de soluções clássicas para o sistema (11).

As notações presentes nesta Tese são aquelas usadas em Análise Funcional. Em particular, para espaços normados $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$, $\mathcal{L}(Y, Z)$ representa o espaço dos operadores lineares contínuos de Y em Z munido da norma uniforme de operadores. A notação $\mathcal{L}(Y)$ é reservada para $\mathcal{L}(Y, Y)$. Para $x \in Z$ e $r > 0$, $B_r(x, Z)$ representa a bola de centro x e raio r em Z .

Capítulo 1

Preliminares

Resumo

Neste capítulo introduzimos definições, conceitos e propriedades básicas da teoria de semigrupos de operadores lineares, operadores resolventes para equações integro-diferenciais e espaço de fase abstrato que serão usados durante o decorrer do trabalho.

1.1 Semigrupos de operadores lineares

Introduzimos a seguir, conceitos e propriedades básicas da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach. No que segue, X é um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ é o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X munido da norma uniforme de operadores.

Definição 1.1.1 *Uma família de operadores $(T(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores se*

(a) $T(0) = I_d,$

(b) $T(t+s) = T(t)T(s), \quad t, s \geq 0.$

Definição 1.1.2 *Um semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado de C_0 -semigrupo se para todo $x \in X$, a função $t \rightarrow T(t)x$ é contínua no zero. O semigrupo é chamado uniformemente contínuo se a função $[0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X); t \rightarrow T(t)$ é contínua no zero.*

Definição 1.1.3 *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de operadores lineares em X e $D(A)$ o conjunto*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

O operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x|_{t=0}, \quad x \in D(A),$$

é chamado o gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

No próximo resultado, resumiremos algumas propriedades básicas relativas a C_0 -semigrupos.

Teorema 1.1.1 [63] *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de operadores lineares em X e A seu gerador infinitesimal. Então as seguintes propriedades são verificadas.*

- (a) *O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo, se e somente se, A é um operador limitado.*
- (b) *Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M > 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$.*
- (c) *Para todo $t > 0$ e todo $x \in X$, $\lim_{s \rightarrow t} T(s)x = T(t)x$. Mais ainda, se o semigrupo é uniformemente contínuo então $\lim_{s \rightarrow t} T(s) = T(t)$ em $\mathcal{L}(X)$.*
- (d) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x$.*
- (e) *Para todo $x \in X$ e todo $t > \tau \geq 0$, $\int_\tau^t T(s)x \, ds \in D(A)$ e $A \int_\tau^t T(s)x \, ds = T(t)x - T(\tau)x$.*
- (f) *Para todo $x \in D(A)$ e todo $t \geq 0$, $T(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.*
- (g) *A é linear, fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

Apresentamos a seguir o famoso Teorema de Hille Yosida. Este Teorema estabelece condições necessárias e suficientes para que um operador linear fechado seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X . Previamente consideremos algumas definições.

Definição 1.1.4 *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo operadores lineares em X . Diremos $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações se $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 1.1.5 *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A , denotado por $\rho(A)$, é definido por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A) \text{ é inversível e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

A função de $\rho(A)$ em $\mathcal{L}(X)$, definida por $\lambda \mapsto R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, é chamada resolvente de A .

Teorema 1.1.2 (Hille-Yosida)[63, Theorem 3.1] *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações se, e somente se,*

- (i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*
- (ii) *$\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.*

A seguir resumiremos e comentaremos alguns fatos básicos a respeito de semigrupos compactos e analíticos. Incluímos também de forma sucinta, algumas propriedades das potências fracionárias associadas com o gerador de um semigrupo analítico.

Definição 1.1.6 *Um C_0 -semigrupo, $(T(t))_{t \geq 0}$, de operadores lineares é compacto para $t > t_0$, se para todo $t > t_0$ o operador $T(t)$ é compacto. O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado compacto, se é compacto para todo $t > 0$.*

Notemos que se X é um espaço de dimensão finita então todo C_0 -semigrupo de operadores lineares é compacto. Mais ainda, se um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo compacto para $t \geq 0$ então X é de dimensão finita.

Teorema 1.1.3 [63, Theorem 3.2] *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de operadores lineares em X . Se $T(t)$ é compacto para $t > t_0$, então a função $(t_0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X); t \mapsto T(t)$ é contínua.*

O próximo Teorema caracteriza quando um C_0 -semigrupo é compacto.

Teorema 1.1.4 [63, Theorem 3.3] *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados em X e A seu gerador infinitesimal. O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto, se e somente se, a função $(0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X); t \mapsto T(t)$ é contínua e $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

Nossos resultados de existência, em alguns casos, são especialmente aplicados para o caso em que A é o gerador de um semigrupo analítico. Por isto, introduzimos agora elementos básicos associados a este tipo de semigrupo.

Definição 1.1.7 *Sejam $0 < \phi_1 < \phi_2$ e $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 \leq \arg(z) \leq \phi_2\}$. Uma família de operadores lineares limitados $(T(z))_{z \in \Delta}$ em X é um semigrupo analítico em Δ , se as seguintes condições são verificadas.*

- (i) *A função $z \rightarrow T(z)$ é analítica em Δ ;*
- (ii) *$T(0) = I_d$ e $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$ para todo $x \in X$;*
- (iii) *$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in \Delta$.*

O seguinte resultado é um clássico Teorema de caracterização de semigrupos analíticos.

Teorema 1.1.5 [63, Theorem 5.2] *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo uniformemente limitado de operadores lineares, A seu gerador infinitesimal e suponha que $0 \in \rho(A)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ pode ser estendido a um semigrupo analítico em um setor $\Delta_\delta = \{z : |\arg(z)| < \delta\}, \delta > 0$, tal que $(T(z))_{z \in \Delta_\delta}$ é uniformemente limitado em cada sub-setor $\Delta_{\delta'}$, com $\delta' < \delta$.*
- (b) *Existe uma constante $C > 0$ tal que para cada $\sigma > 0$ e todo $\tau \neq 0$ $\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}$.*
- (c) *Existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tal que*

$$\rho(A) \supset \Sigma^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \omega < |\arg(\lambda)| \leq \pi\} \cup \{0\}$$

e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma, \quad \lambda \neq 0.$$

- (d) *A função $t \rightarrow T(t)$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e existe $C > 0$ tal que*

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t}, \quad t > 0.$$

No que resta deste capítulo assumiremos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares e A é seu gerador infinitesimal. Para estabelecermos o conceito de potência fracionária de A introduzimos a seguinte condição.

(H) Existem constantes ω e M positivas tais que

$$\rho(A) \supset \Sigma^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \omega < |\arg(\lambda)| \leq \pi\} \cup V$$

e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma^+,$$

onde V é uma vizinhança do zero

Definição 1.1.8 *Assuma que A verifica a condição (H). Para $\alpha > 0$ definimos*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} z^{-\alpha} (A - zI)^{-1} dz$$

onde $C_r = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \subset \Sigma^+$ é uma curva dada por

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\rho e^{iv} : \rho \geq r\}, \\ C_2 &= \{re^{i\theta} : -v \leq \theta \leq v\}, \\ C_3 &= \{-\rho e^{-iv} : \rho \geq r\}, \end{aligned}$$

sendo $\omega < v < \pi$ e $r > 0$.

Teorema 1.1.6 [63, Lemmas 6.2-6.6] *As seguintes propriedades são válidas.*

- (a) Se $\alpha, \beta \geq 0$ então $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} A^{-\beta}$.
- (b) O conjunto $\{A^{-\alpha} : \alpha \in (0, 1)\}$ é limitado em $\mathcal{L}(X)$.
- (c) $\lim_{\alpha \downarrow 0} A^{-\alpha} x = x$ para todo $x \in X$.
- (d) $A^{-\alpha}$ é injetora para cada $\alpha \geq 0$.

Definição 1.1.9 *Suponha que A satisfaz a condição (H) com $\omega < \frac{\pi}{2}$. Para cada $\alpha > 0$ definimos $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$.*

Teorema 1.1.7 [63, Theorem 6.8] *Seja A^α como na Definição 1.1.9. As seguintes propriedades são válidas.*

- (a) A^α é um operador fechado com $D(A^\alpha) = \text{Im}(A^{-\alpha})$.
- (b) Para $\alpha \geq \beta > 0$ temos $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.
- (c) $\overline{D(A^\alpha)} = X$ para cada $\alpha \geq 0$.

(c) $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$ para cada $x \in D(A^\gamma)$ onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Teorema 1.1.8 [63, Theorem 6.13] *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$ e $0 < \gamma \leq \eta \leq 1$. Se $0 \in \rho(A)$ e X_α é o espaço $D(A^\alpha)$ munido da norma do gráfico, então as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) X_η é um espaço de Banach, $X_\eta \hookrightarrow X_\gamma$.

(b) Para cada $\eta > 0$, a função $s \rightarrow (-A)^\eta T(s)$ é contínua sobre $(0, \infty)$ na topologia uniforme de operadores, e existe $C_\eta > 0$ tal que $\|(-A)^\eta T(t)\| \leq \frac{C_\eta}{t^\eta}$, para todo $t > 0$.

(c) Para todo $t > 0$ e todo $\alpha > 0$, $T(t)(X) \subset D(A^\alpha)$. Mais ainda, para $t \geq 0$ e $x \in D(A^\alpha)$, temos que $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$.

(d) Para cada $\alpha \in (0, 1]$ existe $C_\alpha > 0$ tal que $\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|$, para todo $x \in D(A^\alpha)$ e todo $t > 0$.

1.2 Operador resolvente para equações integro-diferenciais

Nosso estudo de existência de soluções para sistemas neutros do tipo integro-diferencial será feito fazendo uso da teoria de operadores resolventes. Brevemente, um operador resolvente de operadores lineares em X é uma família a um parâmetro de operadores lineares em X , que se relaciona com o sistema integro-diferencial

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s) ds, \quad t > 0, \\ x(0) &= x_0 \in X, \end{aligned}$$

de maneira similar como semigrupo de operadores lineares se relaciona com a equação linear $x'(t) = Ax(t)$.

Em relação a teoria de operadores resolventes associados a sistemas integro-diferenciais citamos, [26] para existência de operadores resolvente; [57] para o estudo de existência e regularidade das soluções para sistemas integro-diferenciais semi-lineares e [25] para resolvente analíticos entre outros.

Considere o sistema integro-diferencial

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds, \quad t \in (0, a), \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0 \in X. \quad (1.2)$$

Nesta tese sempre assumiremos que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador fechado densamente definido em X ; que cada $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear fechado em X com $D(B(t)) \supset D(A)$ e que a seguinte hipótese é verificada.

(H₀) $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador fechado densamente definido em X ; que cada $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear fechado em X com $D(B(t)) \supset D(A)$, para todo $x \in D(A)$ a função $t \rightarrow B(t)x$ é fortemente mensuráveis em $(0, \infty)$ e existe $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ e $\beta \in \mathbb{R}^+$ com $b(t)e^{-\beta t} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ tal que $\|B(t)x\| \leq b(t)(\|x\| + \|Ax\|)$ para todo $x \in D(A)$.

Definição 1.2.1 *Uma família de operadores lineares $(R(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{L}(X)$ é chamada operador resolvente associada a (1.1)-(1.2) se as seguintes propriedades são verificadas:*

- (a) $R(0) = I_d$, a função $t \rightarrow R(t)x$ é contínua sobre $[0, \infty)$ para todo $x \in X$ e $R(t)D(A) \subset D(A)$ para todo $t > 0$;
- (b) Se $x \in D(A)$, $t \rightarrow AR(t)x$ é contínua sobre $[0, \infty)$ e a função $t \rightarrow R(t)x$ é continuamente diferenciável sobre $[0, \infty)$ e para todo $t \geq 0$ e

$$R'(t)x = AR(t)x + \int_0^t B(t-\xi)R(\xi)x d\xi,$$

$$R'(t)x = R(t)Ax + \int_0^t R(t-\xi)B(\xi)x d\xi.$$

Apresentamos agora algumas propriedades básicas da teoria de operadores resolvente que serão usadas em nosso trabalho.

Lema 1.2.1 [26, Lemma 1] *Seja $(R(t))_{t \geq 0}$ uma família resolvente associada a (1.1)-(1.2). Então as seguintes propriedades são válidas.*

- (1) *A família resolvente $(R(t))_{t \geq 0}$ é única.*
- (2) *Se $U(t), t \geq 0$, é o operador definido por $U(t) = \int_0^t R(s)ds$, então $U(t)X \subset D(A)$.*

Definição 1.2.2 [26, Definition 2] *O sistema (1.1)-(1.2) é chamado de bem posto se as seguintes condições são verificadas.*

- (a) *Para cada $x \in D(A)$ existe uma única solução $u(\cdot, x)$ de (1.1)-(1.2).*
- (b) *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ então $u(t, x_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente em intervalos limitados de $[0, \infty)$.*

A relação entre a existência de família resolvente para (1.1)-(1.2) e do sistema ser bem posto é estabelecida no seguinte resultado.

Teorema 1.2.1 [26, Theorem 4] *A equação (1.1)-(1.2) admite um operador resolvente, se e somente se, o sistema (1.1)-(1.2) é bem posto.*

Como no caso de semigrupos lineares, existem resultados de geração do tipo Hille-Yosida para operadores resolvente, veja por exemplo, Grimmer & Prüss [26] e Sforza [66]. No próximo resultado, $\widehat{B}(\lambda)$ é a transformada de Laplace da função $t \rightarrow B(t)$.

Definição 1.2.3 *Uma família resolvente $(R(t))_{t \geq 0}$ associada a (1.1)-(1.2) é dita exponencialmente limitada se existem constantes ω_0 e $M \geq 1$ tais que $\|R(t)\| \leq Me^{\omega_0 t}$ para todo $t \geq 0$.*

Teorema 1.2.2 [26, Theorem 8] *Assuma que (H_0) é verificada. Então existe um operador resolvente exponencialmente limitado $(R(t))_{t \geq 0}$ associado a (1.1)-(1.2), se e somente se, as seguintes condições são verificadas.*

- (a) *Existe $\omega > \beta$ e $M \geq 1$ tal que $(\lambda - A - \widehat{B}(\lambda))$ é fechado, com domínio $D(A)$;*
- (b) *O operador $(\lambda - A - \widehat{B}(\lambda))$ é invertível para $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$; a função $\lambda \rightarrow H(\lambda) = (\lambda - A - \widehat{B}(\lambda))^{-1}$ é analítica e holomorfa sobre $\mathcal{L}(X)$ e*

$$\left\| \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} H(\lambda) \right\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \omega, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Observação 1.2.1 *Se $(R(t))_{t \geq 0}$ é uma família resolvente exponencialmente limitada associado a (1.1)-(1.2) e $B(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, então $(R(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em X .*

Teorema 1.2.3 [26, Theorem 6] *Seja $(R(t))_{t \geq 0}$ uma família resolvente associada (1.1)-(1.2) exponencialmente limitada. Então*

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{h \downarrow 0} \frac{R(h)x - x}{h} \text{ existe} \}$$

e

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} \frac{R(h)x - x}{h}, \quad x \in D(A).$$

Para continuar incluímos alguns resultados relacionados com o problema não homogêneo

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s) ds + f(t), \quad t \in (0, a), \quad (1.3)$$

$$x(0) = x_0 \in X. \quad (1.4)$$

No que segue desta seção assumiremos que $(R(t))_{t \geq 0}$ é uma família resolvente para (1.1)-(1.2).

Definição 1.2.4 *Uma função $u : [0, a] \rightarrow X$ é chamada solução clássica de (1.3)-(1.4), se $u(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0, a)$, $u(t) \in C((0, a) : [D(A)])$ e (1.3)-(1.4) é verificada em $[0, a)$.*

Teorema 1.2.4 [26, Theorem 2] *Seja $x_0 \in X$ e $f \in C([0, a] : X)$. Se $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (1.3)-(1.4) então*

$$u(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0, a]. \quad (1.5)$$

Como no caso de semigrupos lineares, a função $u(\cdot)$ definida por (1.5) não é em geral solução clássica de (1.3)-(1.4). Por isso introduzimos os seguintes conceitos.

Definição 1.2.5 *Seja $f \in L^1([0, a] : X)$. Dizemos que uma função $u \in C([0, a] : X)$ é uma solução fraca de (1.3)-(1.4) se*

$$u(t) = R(t)x + \int_0^t R(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0, a].$$

Os próximos resultados estabelecem condições básicas nas quais uma solução fraca é clássica. No que segue $[D(A)]$ é o espaço $D(A)$ munido da norma do gráfico.

Teorema 1.2.5 [26, Theorem 8] *Seja $u_0 \in D(A)$. Se a função $f \in L^1([0, a] : [D(A)])$ ou $f \in W^{1,1}([0, a] : X)$ então a função $u(\cdot)$ definida por (1.5) é uma solução clássica de (1.3)-(1.4).*

Corolário 1.2.1 [26, Corollary 2] *Assuma que $f \in C([0, a] : X)$. A função definida por $u(t) = \int_0^t R(t-s)f(s)ds$ é solução de (1.3)-(1.4) com $u_0 = 0$, se uma das seguintes condições são satisfeitas*

(i) $u \in C^1([0, a] : X);$

(ii) $u \in C([0, a] : [D(A)]).$

Se u é uma solução clássica sobre $[0, a]$ então u satisfaz as condições (i) e (ii).

1.3 Espaços de fase abstratos e alguns Teoremas

Neste trabalho, o espaço de fase $\mathcal{B}$ é definido de maneira axiomática. Especificamente, $\mathcal{B}$ será um espaço vetorial formado por funções definidas de $(-\infty, 0]$ em X , munido de uma seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ e tal que as seguintes propriedades são verificadas.

(A) Se $x : (-\infty, \sigma + b) \rightarrow X$, $b > 0$, é contínua sobre $[\sigma, \sigma + b)$ e $x_{\sigma} \in \mathcal{B}$, onde $x_{\sigma}(\theta) := x(\sigma + \theta)$, então para cada $t \in [\sigma, \sigma + b)$, as seguintes propriedades são válidas:

- (i) $x_t \in \mathcal{B}$,
- (ii) $\|x(t)\| \leq H \|x_t\|_{\mathcal{B}}$,
- (iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \sup\{\|x(s)\| : \sigma \leq s \leq t\} + M(t - \sigma) \|x_{\sigma}\|_{\mathcal{B}}$,

sendo H uma constante positiva, $K, M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $K(\cdot)$ contínua, $M(\cdot)$ localmente limitada e onde H, K e M são independentes de $x(\cdot)$.

(A1) Para a função $x(\cdot)$ em (A), a função $t \rightarrow x_t$ é uma função contínua de $[\sigma, \sigma + b)$ em $\mathcal{B}$.

(B) O espaço $\mathcal{B}$ é completo.

Para $t \geq 0$ definimos $S(t), W(t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ por

$$[S(t)\varphi](\theta) = \begin{cases} \varphi(0) & \text{se } -t \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(t + \theta) & \text{se } -\infty < \theta < -t, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$[W(t)\varphi](\theta) = \begin{cases} R(t + \theta)\varphi(0) & \text{se } -t \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(t + \theta) & \text{se } -\infty < \theta < -t. \end{cases} \quad (1.7)$$

Dos axiomas do espaço $\mathcal{B}$ é fácil deduzir que $(S(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 sobre $\mathcal{B}$.

Para obter alguns dos nossos resultados, precisaremos de algumas propriedades adicionais para o espaço de fase $\mathcal{B}$.

(C2) Se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência uniformemente limitada em $C_{00}(X)$ e assumamos que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente em compactos. Então $\varphi \in \mathcal{B}$ e $\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

(C3) Seja $x : (-\infty, \sigma + b] \rightarrow X$ contínua, com $x_{\sigma} = 0$ e tal que derivada a direita $x'(\sigma^+)$ existe. Seja $\psi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ a função definida por $\psi(\theta) = 0$ para $\theta < 0$ e $\psi(0) = x'(\sigma^+)$. Se $\psi \in \mathcal{B}$ então $\|\frac{1}{h}x_{\sigma+h} - \psi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ quando $h \downarrow 0$.

Para detalhes relacionados com os axiomas **(C2)**, **(C3)** veja [33, 49]. Como complemento, apresentamos alguns exemplo de espaços de fases.

Exemplo 1.3.1 O espaço $C_g(\cdot)$.

Seja $g : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$ uma função positiva, contínua, com $g(0) = 1$, e tal que as seguintes condições são verificadas.

(g-1) A função $\gamma(t) := \sup_{-\infty < \theta \leq -t} \frac{g(t + \theta)}{g(\theta)}$ é localmente limitada para $t \geq 0$.

(g-2) $g(\theta) \rightarrow \infty$ quando $\theta \rightarrow -\infty$.

Definimos por C_g^0 o espaço formado pelas funções contínuas $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ tais que $\frac{\|\varphi(\theta)\|}{g(\theta)} \rightarrow 0$ quando $\theta \rightarrow -\infty$. Consideraremos C_g^0 munido com a norma

$$\|\varphi\|_g := \sup_{-\infty < \theta \leq -t} \frac{\|\varphi(\theta)\|}{g(\theta)}.$$

Nessas condições, o par $(C_g^0, \|\cdot\|_g)$ é um espaço de fase que verifica os axiomas **A**, **A₁** e **B**.

Exemplo 1.3.2 O espaço $C_r \times L^2(\rho, X)$.

Seja $\rho : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, contínua, decrescente, com $\rho(0) = 1$ e tal que $\rho(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Seja $\mathcal{B} = C_r \times L^2(\rho, X)$ o espaço formado pelas funções $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ tais que $\rho \|\varphi\|^2$ é Lebesgue integrável sobre $(-\infty, r]$ e $\varphi|_{[-r, 0]} \in C([-r, 0]; X)$. Sobre o espaço $C_r \times L^2(\rho, X)$ consideramos a semi-norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ definida por

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} := \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(\theta) \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \right)^{1/2} + \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Assumamos adicionalmente que existe uma função integrável e localmente limitada $\gamma : (-\infty, -r] \rightarrow [1, \infty)$ tal que $\rho(\xi + \theta) \leq \gamma(\xi) \rho(\theta)$, para todo $\xi \leq 0$ e todo $\theta \in (-\infty, -r] \setminus N_\xi$ sendo $N_\xi \subseteq (-\infty, -r]$ um conjunto de medida zero. Nessas condições, o par $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ é um espaço de fase que verifica os axiomas **A**, **A₁** e **B**. Mais ainda, no caso $r = 0, p = 2$ temos que $M(t) = \gamma(-t)^{\frac{1}{2}}$ e que $K(t) = 1 + \left(\int_{-t}^0 \rho(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$ para todo $t \geq 0$.

Nossos resultados sobre existência de soluções são obtidos usando Teoremas de ponto fixo. Assim para facilitar a leitura deste trabalho considere os seguintes resultados.

Teorema 1.3.1 [59, Corollary 4.3.2] *Seja D um subconjunto convexo, limitado e fechado de um espaço de Banach Z . Se $B, C : D \rightarrow Z$ são funções contínuas tais que:*

- (a) $Bz + Cz \in D$ para todo $z \in Z$;
- (b) $\overline{C(D)}$ é compacto;
- (c) Existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $\|Bz - Bw\| \leq \gamma \|z - w\|$ para todo $z, w \in D$,

então existe $u \in D$ tal que $Bu + Cu = u$.

Observação 1.3.1 Se um operador $L : D \rightarrow C$, pode ser escrito da forma $L = B + C$, onde B, C estão nas condições do Teorema 1.3.1, então L é dito operador condensante.

Teorema 1.3.2 [23, Theorem 6.5.4] (Leray Schauder Alternative) Seja D um subconjunto convexo fechado de um espaço de Banach Z e assumamos que $0 \in D$. Se $F : D \rightarrow D$ uma aplicação completamente contínua, então o conjunto $\{x \in D : x = \lambda F(x), 0 < \lambda < 1\}$ é não limitado ou F possui um ponto fixo em D .

Para finalizar este capítulo, consideramos o seguinte critério de valor médio para a integral de Bochner o qual será usado frequentemente neste trabalho. No que segue deste trabalho $co\{A\}$ representa a envoltória convexa do conjunto A .

Teorema 1.3.3 [59, Lemma 1.3] Seja Z um espaço de Banach e $f : [\alpha, \beta] \rightarrow Z$ uma função integrável. Então

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau) d\tau \in \overline{co}\{f(\tau) : \tau \in [\alpha, \beta]\}.$$

Capítulo 2

Existência e regularidade de soluções para uma equação integro-diferencial do tipo neutra

Resumo

Neste capítulo usaremos a teoria de operadores resolventes para estudar a existência de soluções fracas, semi-clássicas e clássicas para o sistema integro-diferencial do tipo neutro

$$\frac{d}{dt}\mathcal{D}(t, x_t) = A\mathcal{D}(t, x_t) + \int_0^t B(t-s)\mathcal{D}(s, x_s)ds + g(t, x_t), \quad t \in (0, a), \quad (2.1)$$

$$x_0 = \varphi \in \Omega \subset \mathcal{B}, \quad (2.2)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$ $t \geq 0$ são operadores fechados em X com $D(B(t)) \supset D(A)$ para todo $t \geq 0$; $\mathcal{B}$ é um espaço de fase definido de maneira axiomática; $\Omega \subset \mathcal{B}$ é aberto; $\mathcal{D}(t, \varphi) = \varphi(0) + f(t, \varphi)$ e $f, g : [0, a] \times \Omega \rightarrow X$ são funções apropriadas.

2.1 Existência de soluções fracas

Neste capítulo assumiremos que $(R(t))_{t \geq 0}$ é uma família resolvente para (1.1)-(1.2). Assumiremos também que $M > 0$ é tal que $\|R(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, a]$. No que segue $\mathcal{B}$ é um espaço de fase abstrato que verifica os axiomas **(A)**, **(A1)** e **(B)** do Capítulo 1 e $H, K(\cdot), M(\cdot)$ são como no axioma **(A)**. Adicionalmente, para uma função limitada $\xi :$

$[0, b] \rightarrow [0, \infty)$ e $t \in [0, b]$, usaremos a notação ξ_t para $\xi_t = \sup\{\xi(s) : s \in [0, t]\}$. Para um espaço de Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$ e uma função contínua $\eta : [0, b] \rightarrow Z$ usaremos a notação $\|\eta(\theta)\|_t = \sup\{\|\eta(\theta)\| : \theta \in [0, t]\}$. Por $B_r(x, Z)$ denotaremos a bola fechada de centro em x e raio r no espaço Z e por $B_r(\psi, \mathcal{B})$ denotaremos a bola de centro em ψ e raio r no espaço de fase $\mathcal{B}$.

Começamos introduzindo o conceito de solução fraca para o sistema (2.1)-(2.2).

Definição 2.1.1 *Uma função $x : (-\infty, b] \rightarrow X$ é chamada de solução fraca de (2.1)-(2.2) sobre $[0, b]$, $0 < b \leq a$, se $x \in C([0, b] : X)$; $x_0 = \varphi$ e*

$$x(t) = R(t)(\varphi(0) + f(0, \varphi)) - f(t, x_t) + \int_0^t R(t-s)g(s, x_s)ds, \quad t \in [0, b]. \quad (2.3)$$

Observação 2.1.1 *No que segue, $y : (-\infty, a] \rightarrow X$ é a função definida por*

$$y(t) = \begin{cases} R(t)\varphi(0) & \text{se } 0 \leq t \leq a, \\ \varphi(t) & \text{se } -\infty < t < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Agora estamos em condições de estabelecer nosso primeiro resultado de existência de soluções fracas, para isto usaremos o clássico Princípio da Contração.

Teorema 2.1.1 *Suponha que as funções $f, g : [0, a] \times \Omega \rightarrow X$ são contínuas e que existem constantes positivas L_f, L_g tais que*

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| &\leq L_f \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \\ \|g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2)\| &\leq L_g \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, a]$ e todo $\psi_1, \psi_2 \in \Omega$.

Se $K(0)L_f < 1$, então existe uma única solução fraca do problema (2.1)-(2.2) sobre $[0, b]$ para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração: Usando que f e g são contínuas, fixamos constantes b_φ, r_1, C_f e C_g tais que $B_{r_1}(\varphi, \mathcal{B}) \subseteq \Omega$ e $\|f(t, \psi)\| \leq C_f, \|g(t, \psi)\| \leq C_g$, para todo $0 \leq t \leq b_\varphi$ e todo $\psi \in B_{r_1}(\varphi, \mathcal{B})$.

Seja $y(\cdot)$ a função introduzida em (2.4). Pelo axioma **(A1)**, a função $t \rightarrow y_t$ é contínua em $[0, b_\varphi]$, assim podemos fixar $\rho > 0$ e $0 < b_1 < b_\varphi$ tais que

$$\mu = L_f K_{b_1} < 1, \quad (2.5)$$

$$K_{b_1}\rho + \sup_{t \in [0, b_1]} \|y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} < r_1. \quad (2.6)$$

Fixemos agora $0 < b \leq b_1$ tal que as seguintes desigualdades sejam verificadas.

$$\| (R(\theta) - I)f(0, \varphi) \|_b \leq \frac{(1 - \mu)\rho}{3}, \quad (2.7)$$

$$\| f(\theta, y_\theta) - f(0, \varphi) \|_b \leq \frac{(1 - \mu)\rho}{3}, \quad (2.8)$$

$$MbC_g \leq \frac{(1 - \mu)\rho}{3}, \quad (2.9)$$

$$K_b(L_f + ML_gb) < 1. \quad (2.10)$$

Sobre o espaço

$$S(b) = \{u : (-\infty, b] \rightarrow X : u|_{[0, b]} \in C([0, b], X), u_0 = 0, \| u(\theta) \|_b \leq \rho\},$$

munido com a norma da convergência uniforme, definimos o operador $\Gamma : S(b) \rightarrow C([0, b] : X)$ por

$$\Gamma x(t) = R(t)f(0, \varphi) - f(t, x_t + y_t) + \int_0^t R(t-s)g(s, x_s + y_s)ds.$$

No que segue, mostraremos que Γ é uma contração de $S(b)$ em $S(b)$. É claro que para $x \in S(b)$, Γx é contínua em $[0, b]$. Por outro lado, se $x \in S(b)$, de (2.6) temos que

$$\| x_t + y_t - \varphi \|_{\mathcal{B}} \leq \| x_t \|_{\mathcal{B}} + \| y_t - \varphi \|_{\mathcal{B}} \leq K_{b_1}\rho + \sup_{t \in [0, b_1]} \| y_t - \varphi \|_{\mathcal{B}} < r_1,$$

o que mostra que $x_t + y_t \in B_{r_1}(\varphi, \mathcal{B})$ para todo $t \in [0, b]$. Assim temos que $\| f(t, x_t + y_t) \| < C_f$ e $\| g(t, x_t + y_t) \| < C_g$ para todo $t \in [0, b]$ e todo $x \in S(b)$. Logo para $x \in S(b)$ e $t \in [0, a]$ vemos que

$$\begin{aligned} \| \Gamma x(t) \| &\leq \| R(t)f(0, \varphi) - f(0, \varphi) \| + \| f(t, x_t + y_t) - f(t, y_t) \| \\ &\quad + \| f(t, y_t) - f(0, \varphi) \| + \left\| \int_0^t R(t-s)g(s, x_s + y_s)ds \right\| \\ &\leq \frac{(1 - \mu)\rho}{3} + L_f \| x_t \|_{\mathcal{B}} + \frac{(1 - \mu)\rho}{3} + MbC_g \\ &\leq \frac{(1 - \mu)\rho}{3} + L_f K_b \| x(\theta) \|_b + \frac{(1 - \mu)\rho}{3} + \frac{(1 - \mu)\rho}{3} \\ &= (1 - \mu)\rho + \mu\rho = \rho, \end{aligned}$$

o que prova que $\Gamma x \in S(b)$ e então que $\Gamma(S(b)) \subset S(b)$. Mais ainda se $u, v \in S(b)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \| \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \| &\leq \| f(t, u_t + y_t) - f(t, v_t + y_t) \| \\ &\quad + \int_0^t M \| g(s, u_s + y_s) - g(s, v_s + y_s) \| ds \\ &\leq L_f \| u_t - v_t \|_{\mathcal{B}} + L_g M \int_0^t \| u_s - v_s \|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq K_b(L_f + L_g Mb) \| u(\theta) - v(\theta) \|_b, \end{aligned}$$

o que prova que $\| \Gamma u(\theta) - \Gamma v(\theta) \|_b < K_b(L_f + L_g Mb) \| u(\theta) - v(\theta) \|_b$. Portanto, Γ é uma contração de $S(b)$ em $S(b)$ por (2.10). Do princípio da Contração, existe um único ponto fixo $x \in X$ de Γ . É claro que $u = x + y$ é a única solução fraca de (2.1)-(2.2). Assim a prova do Teorema está completa. ■

Para mostrar nossos próximos resultados de existência de soluções fracas, é necessário considerar o seguinte lema que estabelece condições nas quais um certo operador do tipo convolução é completamente contínuo.

Lema 2.1.1 *Sejam $(Z_i, \| \cdot \|_{Z_i})$, $i = 1, 2, 3$, espaços de Banach, $\beta > 0$; $(C(t))_{t \in [0, \beta]}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(Z_2, Z_3)$ e $f : [0, \beta] \times Z_1 \rightarrow Z_2$. Assuma que as seguintes condições são verificadas*

- (a) *Para cada $x \in Z_2$, a função $t \rightarrow C(t)x$ é contínua sobre $(0, \beta]$ e existe $J \in L^1([0, \beta] : \mathbb{R}^+)$ tal que $\| C(t) \|_{\mathcal{L}(Z_2, Z_3)} \leq J(t)$ para todo $t \in [0, \beta]$;*
- (b) *A função $f(\cdot, x)$ é fortemente mensurável sobre $[0, \beta]$ para cada $x \in Z_1$ e a função $f(s, \cdot) : Z_1 \rightarrow Z_2$ é contínua para todo $s \in [0, \beta]$;*
- (c) *Existe uma função contínua $m : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ e uma função contínua e não decrescente $\Omega : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que $\| f(t, x) \|_{Z_2} \leq m(t)\Omega(\| x \|_{Z_1})$ para todo $(t, x) \in [0, \beta] \times Z_1$.*

Seja $\Gamma : C([0, \beta] : Z_1) \rightarrow C([0, \beta], Z_3)$ o operador definido por

$$\Gamma x(t) = \int_0^t C(t-s)f(s, x(s))ds.$$

Então Γ é contínua. Mais ainda, se alguma das seguintes condições é verificada,

- (i) *A função $f(\cdot)$ é completamente contínua;*
- (ii) *A função $t \rightarrow C(t)$ é contínua em $\mathcal{L}(Z_2, Z_3)$ sobre $(0, \beta]$ e para cada $t \in (0, \beta]$ e $r > 0$ o conjunto $\{C(t)f(s, x(s)) : s \in [0, \beta], x \in B_r(0, Z_1)\}$ é relativamente compacto em Z_3 ,*

então Γ é um operador completamente contínuo.

Demonstração: Usando (a), (b) e (c) é fácil ver que $\Gamma x \in C([0, \beta] : Z_3)$ se $x \in C([0, \beta] : Z_1)$. Para mostrar que Γ é contínua, fixemos uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C([0, \beta] : Z_1)$ e

$u \in C([0, \beta] : Z_1)$ tal que $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$. É óbvio que $f(s, u_n(s)) \rightarrow f(s, u(s))$ q.t.p. sobre $[0, \beta]$. Isto junto a estimativa

$$\| C(t-s)f(s, u_n(s)) \|_{Z_3} \leq J(t-s)m(s)W(\| u_n(s) \|_{Z_1}) \leq J(t-s)m(s)W(L),$$

onde $L \geq \sup_{s \in [0, \beta], n \in \mathbb{N}} \| u_n(s) \|_{Z_1}$, e o Teorema da convergência dominada, nos permite concluir que Γ é contínua.

Para mostrar que Γ é um operador compacto usaremos o clássico Teorema de Ascoli-Arzelà. Para isto, fixamos $B_r = B_r(0, C([0, \beta] : Z_1))$, $r > 0$. No que segue estudamos separadamente a equicontinuidade de ΓB_r e a pre-compacidade do conjunto $\Gamma B_r(t) = \{\Gamma x(t) : x \in B_r\}$.

Suponha inicialmente que (i) é verificada. Mostraremos que $\Gamma(B_r)(t)$ é relativamente compacto para todo $t \in [0, \beta]$. Sejam $0 < \epsilon < t \leq \beta$. Como a função $s \rightarrow C(s)$ é fortemente contínua sobre $[0, \beta]$, segue que o conjunto $W = \{C(s)y : s \in [\epsilon, \beta], y \in f([0, \beta] \times B_r)\}$ é relativamente compacto em Z_3 . Usando agora o Teorema 1.3.3, vemos que para $x \in B_r$

$$\begin{aligned} \Gamma x(t) &= \int_0^\epsilon C(s)f(t-s, x(t-s))ds + \int_\epsilon^t C(s)f(t-s, x(t-s))ds \\ &\in C_\epsilon + (t-\epsilon)\overline{co(W)}, \end{aligned}$$

onde $diam(C_\epsilon) \leq W(r) \int_0^\epsilon J(s)m(t-s)ds$. Isto prova que $\{\Gamma x(t) : x \in B_r\}$ é totalmente limitado em Z_3 e portanto relativamente compacto. Como $\Gamma B_r(0) = \{0\}$, deduzimos que a propriedade é válida para todo $t \in [0, \beta]$.

Mostraremos agora que ΓB_r é equicontínuo sobre $[0, \beta]$. Seja $t \in (0, \beta]$ e fixemos $0 < \epsilon < t$. Usando que $U = \{f(s, y) : (s, y) \in [0, \beta] \times B_r\}$ é relativamente compacto em Z_2 , e que $s \rightarrow C(s)x$ é contínua sobre $[\epsilon, \beta]$ para todo $x \in Z_2$, segue que o conjunto de funções $\{s \rightarrow C(s)x : x \in U\}$ é equicontínuo sobre $[\epsilon, \beta]$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que $\| C(s)x - C(s')x \|_{Z_3} < \epsilon$, para todo $s, s' \in [\epsilon, \beta]$ e todo $x \in U$ tal que $|s - s'| < \delta$. Nestas condições, para $x \in B_r$ e $0 < h < \delta$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t+h) - \Gamma x(t)\|_{Z_3} &\leq \int_0^{t-\epsilon} \|C(t+h-s) - C(t-s)f(s, x(s))\|_{Z_2} ds \\ &\quad + \int_{t-\epsilon}^t \|C(t+h-s) - C(t-s)\|_{\mathcal{L}(Z_2, Z_3)} \|f(s, x(s))\|_{Z_2} ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \|C(t+h-s)\|_{\mathcal{L}(Z_2, Z_3)} \|f(s, x(s))\|_{Z_2} ds \\ &\leq W(r) \left(\epsilon \int_0^{t-\epsilon} m(s)ds + \int_{t-\epsilon}^t (J(t+h-s) + J(t-s)) m(s)ds \right) \\ &\quad + W(r) \int_t^{t+h} J(t+h-s)m(s)ds, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que ΓB_r é equicontínuo a direita em $t \in (0, \beta]$. Procedendo de forma similar podemos mostrar a equicontinuidade em $t = 0$ e a equicontinuidade a esquerda em $t \in (0, \beta]$. Portanto, ΓB_r é equicontínuo sobre $[0, \beta]$. Segue dos passos anteriores que Γ é completamente contínuo quando (i) é válido.

Suponha válida a condição (ii). Mostraremos para começar que o conjunto $\Gamma B_r(t)$ é relativamente compacto. Sejam $t \in (0, \beta]$ e $0 < \epsilon < t$. Como $t \rightarrow C(t)$ é contínua sobre $[\epsilon, \beta]$, existem pontos $\epsilon = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = t$, tais que $\|C(s) - C(s')\|_{\mathcal{L}(Z_2, Z_3)} \leq \epsilon$ se $s, s' \in [t_i, t_{i+1}]$ para algum $i = 1, 2, \dots, n$. Nessas condições, do Teorema do valor medio para a integral de Bochner, veja Teorema 1.3.3, para $x \in B_r$ vemos que

$$\begin{aligned} \Gamma x(t) &= \int_{\epsilon}^t C(s)f(t-s, x(t-s))ds + \int_0^{\epsilon} C(s)f(t-s, x(t-s))ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} (C(s) - C(t_i))f(t-s, x(t-s))ds + \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} C(t_i)f(t-s, x(t-s))ds \\ &\quad + \int_0^{\epsilon} C(s)f(t-s, x(t-s))ds \\ &\in \sum_{i=1}^n C_{\epsilon}^i + \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) \overline{\text{co}(\{C(t_i)f(\xi, y) : \xi \in [0, \beta], y \in B_r(0, Z_1)\})} + B_{\epsilon} \end{aligned}$$

onde $\text{diam}(C_{\epsilon}^i) \leq \epsilon W(r) \int_0^{\beta} m(t-s)ds$ e $\text{diam}(B_{\epsilon}) \leq W(r) \int_0^{\epsilon} J(s)m(t-s)ds$. Isto nos permite concluir que $\Gamma(B_r)(t)$ é totalmente limitado em Z_3 e como consequência que $\Gamma B_r(t)$ é relativamente compacto em Z_3 para todo $t \in [0, \beta]$, pois $\Gamma B_r(0) = \{0\}$.

Vejamos agora que ΓB_r é equicontínuo sobre $[0, \beta]$. Seja $t \in (0, \beta)$. Como a função $s \rightarrow C(s)$ é contínua sobre $[\epsilon, \beta]$, existe $\delta > 0$ tal que $\|C(s) - C(s')\|_{\mathcal{L}(Z_2, Z_3)} < \epsilon$, para todo $s, s' \in [\epsilon, \beta]$ quando $|s - s'| < \delta$. Usando isto, para $x \in B_r$ e $0 < h < \delta$ com $t+h \in (0, \beta)$ vemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t+h) - \Gamma x(t)\|_{Z_3} &\leq \int_0^{t-\epsilon} \|C(t+h-s) - C(t-s)\|_{\mathcal{L}(Z_2, Z_3)} \|f(s, x(s))\|_{Z_2} ds \\ &\quad + \int_{t-\epsilon}^t \|C(t+h-s) - C(t-s)\|_{\mathcal{L}(Z_2, Z_3)} \|f(s, x(s))\|_{Z_2} ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \|C(t+h-s)\|_{\mathcal{L}(Z_2, Z_3)} \|f(s, x(s))\|_{Z_2} ds \\ &\leq W(r) \left(\epsilon \int_0^{t-\epsilon} m(s)ds + \int_{t-\epsilon}^t (J(t+h-s) + J(t-s))m(s)ds \right) \\ &\quad + W(r) \int_t^{t+h} J(t+h-s)m(s)ds, \end{aligned}$$

o que permite concluir que ΓB_r é equicontínuo a direita em $t \in (0, \beta)$. Usando um argumento similar podemos mostrar a equicontinuidade em $t = 0$ e a equicontinuidade a esquerda em

$t \in (0, \beta]$. Portanto, ΓB_r é equicontínuo. Segue do anterior que se (ii) é válido, então Γ é completamente contínuo. Agora a prova está completa. ■

Para mostrar nossos próximos Teoremas introduzimos a seguinte hipótese sobre a função $g(\cdot)$.

(H_g) A função $g : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ satisfaz as seguintes condições.

- (i) A função $g(t, \cdot) : \mathcal{B} \rightarrow X$ é contínua para cada $t \in [0, a]$;
- (ii) Para cada $x \in X$, a função $g(\cdot, x) : [0, a] \rightarrow X$ é fortemente mensurável;
- (iii) Existe uma função contínua $m_g : [0, a] \rightarrow [0, \infty)$ e uma função contínua não decrescente $\Omega_g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$\|g(t, \psi)\| \leq m_g(t)\Omega_g(\|\psi\|_{\mathcal{B}}), \quad (t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}.$$

Para a prova do nosso próximo resultado usaremos o Teorema 1.3.1.

Teorema 2.1.2 *Suponha que a hipótese (H_g) é válida e que as seguintes condições são verificadas*

(a) *A função $f : [0, a] \times \Omega \rightarrow X$ é contínua e existe $L_f > 0$ tal que*

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq L_f \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},$$

para todo $t \in [0, a]$ e todo $\psi_1, \psi_2 \in \Omega$;

(b) *Existe uma constante $r_\varphi > 0$, tal que para cada $t \in [0, a]$ existe um compacto $W_t \subseteq X$ tal que $R(t)g(s, \psi) \in W_t$ para todo $\psi \in B_{r(\varphi)}(\varphi, \mathcal{B})$ e todo $s \in [0, a]$.*

Se $K(0)L_f < 1$, então existe uma solução fraca do problema (2.1)-(2.2) sobre $[0, b]$ para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração: Sejam $S(b), \rho, r$ e $\Gamma(\cdot)$ como na prova do Teorema 2.1.1. Sem perda de generalidade assumiremos que $r < r_\varphi$. Considere a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\Gamma_1 x(t) = R(t)f(0, \varphi) - f(t, x_t + y_t),$$

$$\Gamma_2 x(t) = \int_0^t R(t-s)g(s, x_s + y_s)ds.$$

Da prova do Teorema 2.1.1 sabemos que Γ_1 é uma contração de $S(b)$ em $S(b)$. Pelo Lema 2.1.1, deduzimos que Γ_2 é completamente contínuo de $S(b)$ em $S(b)$. Assim, Γ é um

operador condensante o que pelo Teorema 1.3.1 permite concluir que Γ possui um ponto fixo $x \in S(b)$. É claro que $u = x + y$ é solução fraca de (2.1)-(2.2). A prova está completa. ■

Para a demonstração do nosso próximo Teorema introduzimos a seguinte hipótese sobre a função $f(\cdot)$.

(H_f) A função $f : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é completamente contínua e existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\|f(t, \psi)\| \leq c_1 \|\psi\|_{\mathcal{B}} + c_2, \quad (t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}.$$

Seja $y(\cdot)$ a função definida em (2.4) e $S(a) = \{x : (-\infty, a] \rightarrow X : x_0 = 0, x|_{[0, a]} \in C([0, a] : X)\}$ munido com a norma da convergência uniforme. Para todo $Q \subset S(a)$ limitado, o conjunto de funções $\{t \rightarrow f(t, x_t + y_t) : x \in Q\}$ é equicontínuo sobre $[0, a]$.

Teorema 2.1.3 *Suponha que as hipóteses (H_f), (H_g) e a condição (b) do Teorema 2.1.2 são verificadas. Assuma também que*

$$\frac{MK_a}{\mu} \int_0^t m_g(s) ds < \int_{\frac{C}{\mu}}^{\infty} \frac{ds}{\Omega_g(s)}, \quad (2.11)$$

onde $C = ((M_a + K_a MH) + Mc_1 K_a) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + (M + 1)c_2 K_a$ e $\mu = 1 - K_a c_1 > 0$. Então existe uma solução fraca do problema (2.1)-(2.2) sobre $[0, a]$.

Demonstração: Sobre o espaço $S(a)$ definimos o operador $\Gamma : S(a) \rightarrow S(a)$ por

$$\Gamma x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ R(t)f(0, \varphi) - f(t, x_t + y_t) + \int_0^t R(t-s)g(s, x_s + y_s)ds, & \text{se } 0 \leq t \leq a. \end{cases} \quad (2.12)$$

Para mostrar nosso resultado, usaremos o Teorema 1.3.2. Inicialmente, obtemos estimativas *a priori* para as soluções da equação integral $x = \lambda \Gamma x, \lambda \in (0, 1)$. Seja x^λ uma solução de $x = \lambda \Gamma x$. Usando a notação $v^\lambda(s) = (M_a + K_a MH) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_a \|x^\lambda(\theta)\|_s$, dos axiomas do espaço de fase segue que

$$\begin{aligned} \|x^\lambda(t)\| &\leq \|R(t)f(0, \varphi)\| + \|f(t, x_t^\lambda + y_t^\lambda)\| + \left\| \int_0^t R(t-s)g(s, x_s^\lambda + y_s^\lambda)ds \right\| \\ &\leq M(c_1 \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + c_2) + (c_1 \|x_t^\lambda + y_t^\lambda\|_{\mathcal{B}} + c_2) + \int_0^t Mm_g(s)\Omega_g(\|x_s^\lambda + y_s^\lambda\|_{\mathcal{B}})ds \\ &\leq (Mc_1 \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + (M + 1)c_2) + c_1 \|x_t^\lambda + y_t^\lambda\|_{\mathcal{B}} + \int_0^t Mm_g(s)\Omega_g(\|x_s^\lambda + y_s^\lambda\|_{\mathcal{B}})ds \\ &\leq (Mc_1 \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + (M + 1)c_2) + c_1 v^\lambda(t) + \int_0^t Mm_g(s)\Omega_g(v^\lambda(s))ds. \end{aligned}$$

Da definição de v^λ temos agora que

$$\begin{aligned} v^\lambda(t) &\leq (M_a + K_a M H) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_a \|x^\lambda(\theta)\|_s \\ &\leq ((M_a + K_a M H) + M c_1 K_a) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + (M + 1) c_2 K_a + K_a c_1 v^\lambda(t) \\ &\quad + M K_a \int_0^t m_g(s) \Omega_g(v^\lambda(s)) ds, \end{aligned}$$

e portanto

$$v^\lambda(t) \leq \frac{C}{\mu} + \frac{M K_a}{\mu} \int_0^t m_g(s) \Omega_g(v^\lambda(s)) ds.$$

Seja $\beta_\lambda(t)$ o lado direito da desigualdade anterior. Derivando β_λ temos que

$$\beta'_\lambda(t) \leq \frac{M K_a}{\mu} m_g(t) \Omega_g(\beta_\lambda(t)),$$

e assim que

$$\frac{\beta'_\lambda(t)}{\Omega_g(\beta_\lambda(t))} \leq \frac{M K_a}{\mu} m_g(t).$$

Portanto,

$$\int_{\beta_\lambda(0)}^{\beta_\lambda(t)} \frac{ds}{\Omega_g(s)} \leq \frac{M K_a}{\mu} \int_0^t m_g(s) ds < \int_{\frac{C}{\mu}}^\infty \frac{ds}{\Omega_g(s)}, \quad t \in [0, a].$$

Da última desigualdade e de (2.11), podemos concluir que o conjunto $\{\beta_\lambda(t) : t \in [0, a]; \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado o que mostra que o conjunto $\{x^\lambda(\cdot) : \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em $S(a)$.

Para mostrar que Γ é um operador completamente contínuo, introduzimos a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde $(\Gamma_i x)_0 = 0, i = 1, 2$, e

$$\Gamma_1 x(t) = R(t) f(0, \varphi) - f(t, x_t + y_t), \quad t \in [0, a], \quad (2.13)$$

$$\Gamma_2 x(t) = \int_0^t R(t-s) g(s, x_s + y_s) ds, \quad t \in [0, a]. \quad (2.14)$$

Devido as propriedades do operador resolvente e as hipóteses $(\mathbf{H}_f)$ e $(\mathbf{H}_g)$ temos que Γ_1 e Γ_2 são bem definidas e assumem valores em $S(a)$. Mais adiante, das propriedades de f e do Lema 2.1.1 segue que os operadores $\Gamma_i, i = 1, 2$, são compactos. Assim, para completar a prova, é suficiente mostrar que cada $\Gamma_i, i = 1, 2$, é contínuo. Sejam $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $S(a)$ e $u \in S(a)$ tais que $u^n \rightarrow u$ em $S(a)$. Dos axiomas do espaço de fase, deduzimos que o conjunto $U = \{u_s^n, u_s : s \in [0, a], n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{B}$. Como f é uniformemente contínua sobre U , segue que $f(s, u_s^n) \rightarrow f(s, u_s)$ uniformemente sobre $[0, a]$ quando $n \rightarrow \infty$, o que mostra que Γ_1 é contínua.

Para provar a continuidade de Γ_2 , fixamos $r > 0$ tal que $\|u_s^n\|_{\mathcal{B}} \leq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $s \in [0, a]$. Como $\|g(s, x_s)\| \leq m_g(s)\Omega_g(r + \sup_{s \in [0, a]} \|y_s\|_{\mathcal{B}})$, podemos deduzir a continuidade de Γ_2 a partir do Teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Como consequência do anterior, obtemos que Γ é um operador completamente contínuo sobre $S(a)$ e do Teorema 1.3.2, que Γ possui um ponto fixo $x \in S(a)$. Agora a prova do resultado está completa pois $u = x + y$ é uma solução fraca de (2.1)-(2.2). ■

2.2 Resultados de regularidade

Nesta seção estudaremos a regularidade das soluções fracas de (2.1)-(2.2) obtidas na seção anterior. Para isto assumiremos que $(R(t))_{t \geq 0}$ é um operador resolvente exponencialmente limitado para (1.1)-(1.2). Por simplicidade, no que segue assumiremos que $\Omega = \mathcal{B}$.

2.2.1 Existência de solução semi-clássica

Para começar, introduzimos o seguinte conceito de solução.

Definição 2.2.1 *Uma função $u : (-\infty, b) \rightarrow X$ é uma solução semi-clássica de (2.1)-(2.2) se $u_0 = \varphi$; as funções $u(\cdot)$ e $t \rightarrow f(t, u_t)$ são funções em $W^{1,1}([0, b] : X)$; a função $t \rightarrow u(t) + f(t, u_t) \in C([0, b] : D(A)) \cap C^1((0, b) : X)$ e (2.1) é satisfeita em $[0, b)$.*

Para provar nosso primeiro resultado de regularidade precisamos de algumas preliminares. No próximo Lema, $W(\cdot)$ e $S(\cdot)$ são as famílias de operadores definidas em (1.6) e (1.7) respectivamente. Como antes, $y : (-\infty, a] \rightarrow X$ é a função introduzida em (2.4).

Lema 2.2.1 *Se as funções $R(\cdot)\varphi(0)$ e $S(\cdot)\varphi$ são Lipschitz em $[0, a]$, então a função $s \rightarrow y_s$ também é Lipschitz em $[0, a]$.*

Demonstração: É obvio que $y_t = W(t)\varphi$ para $t \geq 0$. Se $s \in [0, a]$ e $h > 0$ são tais que $s + h \in [0, a]$, então

$$\begin{aligned} \|y_{s+h} - y_s\|_{\mathcal{B}} &\leq M_a \|y_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|y(\theta + h) - y(\theta)\|_a \\ &\leq M_a \|W(h)\varphi - S(h)\varphi\|_{\mathcal{B}} + M_a \|S(h)\varphi - \varphi\|_{\mathcal{B}} + C_1 h \\ &\leq M_a K_a \|R(\theta)\varphi(0) - \varphi(0)\|_h + C_2 h \\ &\leq C_3 h, \end{aligned}$$

onde as constantes $C_i, i = 1, 2, 3$ são independentes de t e h . Isto prova que $s \rightarrow y_s$ é Lipschitz sobre $[0, a]$. ■

Lema 2.2.2 *Assuma que as condições do Lema 2.2.1 são verificadas. Suponha também que a função $t \rightarrow R(t)f(0, \varphi)$ é Lipschitz em $[0, a]$ e que existem constantes $L_f, L_g > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi_1) - f(s, \psi_2)\| &\leq L_f(|t - s| + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}), \\ \|g(t, \psi_1) - g(s, \psi_2)\| &\leq L_g(|t - s| + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}), \end{aligned}$$

para todo $0 \leq s, t \leq a$ e todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$. Se $x(\cdot)$ é uma solução fraca de (2.1)-(2.2) sobre $[0, b], 0 < b \leq a$, e $K_b L_f < 1$, então as funções $x(\cdot)$ e $s \rightarrow x_s$ são Lipschitz sobre $[0, b]$.

Demonstração: Considere a descomposição $x(t) = y(t) + z(t)$ onde y é a função introduzida em (2.4). Para começar vejamos que $z(\cdot)$ é Lipschitz sobre $[0, b]$. Usando que as funções $y(\cdot)$ e $t \rightarrow y_t$ são Lipschitz, veja Lema 2.2.1, para $t \in [0, b]$ e $h > 0$ tais que $t + h \in [0, b]$ temos que

$$\begin{aligned} \|z(t+h) - z(t)\| &\leq \|R(t+h)f(0, \varphi) - R(t)f(0, \varphi)\| \\ &\quad + \|f(t+h, y_{t+h} + z_{t+h}) - f(t, y_t + z_t)\| \\ &\quad + \int_0^t \|R(t-s)\| \|g(s+h, y_{s+h} + z_{s+h}) - g(s, y_s + z_s)\| ds \\ &\quad + \int_0^h \|R(t+h-s)\| \|g(s, x_s)\| ds \\ &\leq C_1 h + L_f(h + \|y_{t+h} + z_{t+h} - y_t - z_t\|_{\mathcal{B}}) \\ &\quad + M \int_0^t L_g(h + \|y_{s+h} + z_{s+h} - y_s - z_s\|_{\mathcal{B}}) ds + M \|g(\theta, x_\theta)\|_{\mathcal{B}} h \\ &\leq C_2 h + L_f \|z_{t+h} - z_t\|_{\mathcal{B}} + M L_g \int_0^t \|z_{s+h} - z_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq C_2 h + M_b L_f \|z_h\|_{\mathcal{B}} + K_b L_f \|z(\theta+h) - z(\theta)\|_t \\ &\quad + M L_g M_b \|z_h\|_{\mathcal{B}} + M L_g K_b \int_0^t \|z(\theta+h) - z(\theta)\|_s ds, \end{aligned}$$

onde $C_i, i = 1, 2$ são constantes independentes de t e h . Tomando supremo em $[0, t]$ e usando que $K_b L_f < 1$, vemos que existem constantes $C_i, i = 3, 4, 5$, independentes de t e h tais que

$$\|z(\theta+h) - z(\theta)\|_t \leq C_3 h + C_4 \|z(\theta)\|_h + C_5 \int_0^t \|z(\theta+h) - z(\theta)\|_s ds. \quad (2.15)$$

Estudaremos agora o termo $\|z(\theta)\|_h$. Veja que para $s \in [0, h]$,

$$\begin{aligned}
\|z(s)\| &\leq \|R(s)f(0, \varphi) - f(0, \varphi)\| + \|f(0, \varphi) - f(s, y_s + z_s)\| \\
&\quad + \int_0^s \|R(s-\tau)g(\tau, y_\tau + z_\tau)\| d\tau \\
&\leq C_6 h + L_f \|y_s - \varphi\|_{\mathcal{B}} + L_f \|z_s\|_{\mathcal{B}} + M \|g(\theta, y_\theta + z_\theta)\|_b h \\
&\leq C_7 h + L_f \|z_s\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq C_7 h + L_f K_b \|z(\theta)\|_s,
\end{aligned}$$

de onde concluímos a existência de $C_8 > 0$ independente de t e h tal que

$$\|z(\theta)\|_h \leq C_8 h, \quad (2.16)$$

pois $L_f K_b < 1$. O que da desigualdade de Gronwall nos permite concluir que $z(\cdot)$ é Lipschitz sobre $[0, b]$ e como consequência que $x(\cdot)$ é Lipschitz sobre $[0, b]$. Finalmente da desigualdade

$$\|x_{t+h} - x_t\|_{\mathcal{B}} \leq \|y_{t+h} - y_t\|_{\mathcal{B}} + K_a \|z(\theta + h) - z(\theta)\|_t + M_a K_a \|z(\theta)\|_h, \quad (2.17)$$

e de (2.16) obtemos que $t \rightarrow x_t$ é Lipschitz. A prova está completa. $\blacksquare$

Nosso primeiro resultado de regularidade será obtido assumindo que X possui a propriedade de Radon-Nikodým. Para isto, dado um intervalo $J \in \mathbb{R}$ e um espaço de Banach Z , definimos por $W^{1,1}(J : Z)$ o seguinte espaço de funções.

$$W^{1,1}(J : Z) = \{f \in L^1(J, Z) \text{ e } f(s) = f(s_0) + \int_{s_0}^s g(s) ds, \text{ para algum } s_0 \in J \text{ e } g \in L^1(J, Z)\}.$$

Definição 2.2.2 *Um espaço de Banach Z tem a propriedade de Radon-Nikodým com respeito a um espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) , se para cada medida vetorial μ -contínua de variação limitada $G : \Sigma \rightarrow Z$ existe $g \in L^1(\mu : Z)$ tal que $G(E) = \int_E g d\mu$ para todo $E \in \Sigma$. Dizemos que Z possui a propriedade de Radon-Nikodým, no que segue **(RNP)** se Z tem a propriedade de Radon-Nikodým com respeito a todo espaço de medida finita.*

Lema 2.2.3 [20] *Se Z é um espaço Banach que possui a **(RNP)** e $w : [0, a] \rightarrow X$ é uma função Lipschitz, então $w \in W^{1,1}([0, a] : X)$.*

Teorema 2.2.1 *Suponha que X possui a **(RNP)**. Assuma também as hipóteses do Lema 2.2.2 são satisfeitas e que $\varphi(0) + f(0, \varphi) \in D(A)$. Se $x(\cdot)$ é uma solução fraca de (2.1)-(2.2) sobre $[0, b]$, então $x(\cdot)$ é uma solução semi-clássica de (2.1)-(2.2) em $[0, b]$.*

Demonstração: Do Lema 2.2.2 sabemos que as funções $x(\cdot)$ e $t \rightarrow x_t$ são Lipschitz sobre $[0, b]$, o que por sua vez implica que $t \rightarrow g(t, x_t)$ e $t \rightarrow f(t, x_t)$ são Lipschitz sobre $[0, b]$. Pelo Lema 2.2.3 segue que $x(\cdot), t \rightarrow g(t, x_t)$ e $t \rightarrow f(t, x_t) \in W^{1,1}([0, a] : X)$. Seja $w(\cdot)$ a solução fraca de

$$\frac{dw(t)}{dt} = Aw(t) + \int_0^t B(t-s)w(s)ds + g(t, x_t), \quad t \in (0, b), \quad (2.18)$$

$$w(0) = \varphi(0) + f(0, \varphi). \quad (2.19)$$

Pelo Teorema 1.2.5 segue que $w \in C([0, b] : D(A)) \cap C^1((0, b) : X)$ e que $w(\cdot)$ verifica a equação sobre $[0, b]$. Agora, da unicidade das soluções fracas de (2.18)-(2.19) podemos concluir que $w(t) = x(t) + f(t, x_t)$ para $t \in [0, b]$. Isto, junto ao fato que $t \rightarrow f(t, x_t) \in W^{1,1}([0, b] : X)$ permite concluir a prova de que $x(\cdot)$ é uma solução semi-clássica. ■

2.2.2 Existência de solução clássica

Nesta seção estabelecemos condições suficientes para que uma solução fraca de (2.1)-(2.2) seja uma solução clássica.

Definição 2.2.3 *Uma função $x : (-\infty, b) \rightarrow X$ é uma solução clássica de (2.1)-(2.2) sobre $[0, b]$ se $x_0 = \varphi; x \in C([0, b] : X) \cap C^1((0, b) : X); x(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, b]$ e (2.1) é satisfeita em $(0, b)$.*

Para continuar introduzimos algumas notações que serão usadas durante o restante deste trabalho. Sejam $(Y, \|\cdot\|_Y), (Z, \|\cdot\|_Z)$ espaços de Banach. Para uma função Frechet diferenciável $\xi : [\alpha, \beta] \times Y \rightarrow Z$ denotaremos por $D_1\xi(t, x)$ a derivada em relação a primeira variável t e por $D_2\xi(t, x)$ a derivada em relação a segunda variável x . Além disso, usaremos a decomposição.

$$\xi(t_0 + t, x_0 + x) - \xi(t_0, x_0) = D_1\xi(t_0, x_0)t + D_2\xi(t_0, x_0)x + \| (t, x) \| r(\xi, t_0, x_0, t, x), \quad (2.20)$$

onde $r(\xi, t_0, x_0, 0, 0) = 0$ e $\| r(\xi, t_0, x_0, t, x) \|_Z \rightarrow 0$ quando $\| (t, x) \| = |t| + \|x\|_Y \rightarrow 0$.

No que segue, para uma função $j : [0, a] \rightarrow Z$ denotaremos por $\partial_h j : [0, a] \rightarrow Z$ a função definida por

$$\partial_h j(t) = \frac{j(t+h) - j(t)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Adicionalmente, para $x \in X$ usaremos a notação χ_x para a função $\chi_x : (-\infty, 0] \rightarrow X$ definida por

$$\chi_x(\theta) = \begin{cases} x & \text{se } \theta = 0, \\ 0 & \text{se } \theta < 0. \end{cases}$$

O seguinte Lema será importante na prova do Teorema 2.2.2. Para não estender o texto omitiremos a demonstração.

Lema 2.2.4 *Seja $K \subset J \times \Lambda$ compacto e $\Lambda \subset Y$ aberto. Se $\xi : J \times \Lambda \rightarrow Z$ é uma função continuamente Frechet diferenciável, então para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|r(\xi, t_0, x_0, t, x)\|_Z < \epsilon$ para todo $(t_0, x_0) \in K$ quando $\|(t, x)\| < \delta$.*

No próximo resultado estabelecemos a existência de solução clássica para (2.1)-(2.2) usando a usual hipótese de f e g serem funções diferenciáveis.

Teorema 2.2.2 *Assuma que a função $S(\cdot)\varphi$ é Lipschitz sobre $[0, a]$ e que $\varphi(0) \in D(A)$. Suponha também que funções f e g são de classe C^1 sobre $[0, a] \times \mathcal{B}$; $f([0, a] \times \mathcal{B}) \subset D(A)$; $Df(0, \varphi) \equiv 0$ e que $W(\cdot)\varphi$ possui derivada a direita em $t = 0$. Se $g(0, \varphi) \equiv Af(0, \varphi) \equiv 0$ ou se $\chi_{g(0, \varphi)}$ e $\chi_{Af(0, \varphi)} \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ verifica o axioma **(C3)**, então existe uma solução clássica de (2.1)-(2.2) sobre $[0, b]$ para algum $0 < b \leq a$.*

Demonstração: Usando que $f, g \in C^1([0, a] \times \mathcal{B} : X)$ e que $D(f(0, \varphi)) \equiv 0$, do Teorema 2.1.1 deduzimos a existência de uma única solução fraca $x \in C([0, b] : X)$ de (2.1)-(2.2) para algum $0 < b \leq a$. Mais ainda, usando novamente o fato que $Df(0, \varphi) \equiv 0$, podemos assumir que f é Lipschitz em uma vizinhança de $(0, \varphi)$ com constante L_f tal que $L_f K_b < 1$. Agora como consequência do Lema 2.2.2 podemos também assumir que as funções $x(\cdot)$ e $s \rightarrow x_s$ são Lipschitz sobre $[0, b]$.

No que segue tomaremos $b > 0$ de forma que

$$\mu = K_b(\|D_2f(\theta, x_\theta)\|_b + Mb\|D_2g(\theta, x_\theta)\|_b) < 1. \quad (2.21)$$

Considere agora a equação integral,

$$\begin{aligned} z(t) = & R(t)[A(\varphi(0) + f(0, \varphi)) + g(0, \varphi)] + \int_0^t R(t-s)B(s)(\varphi(0) + f(0, \varphi))ds \\ & - D_1f(t, x_t) - D_2f(t, x_t)z_t + \int_0^t R(t-s)(D_1g(s, x_s) + D_2g(s, x_s)z_s)ds, \quad t \in [0, b], \end{aligned} \quad (2.22)$$

com $z_0 = \psi + \chi_{Af(0,\varphi)} + \chi_{g(0,\varphi)}$, onde $\psi = \frac{d}{dt}W(t)\varphi|_{t=0}$.

Fazendo uso de (2.21) e do princípio da contração, é possível mostrar a existência de uma única solução $z(\cdot) \in C([0, b] : X)$ de (2.22). Como a prova é usual será omitida.

Agora mostraremos que $x'(\cdot) = z(\cdot)$ em $[0, b]$. Para $t \in [0, b)$ e $0 < h < 1$ suficientemente pequeno de modo que $t + h \in [0, b]$ temos que

$$\begin{aligned} & \| \partial_h x(t) - z(t) \| \\ & \leq \| \partial_h R(t)(\varphi(0) + f(0, \varphi)) - R(t)(A(\varphi(0) + f(0, \varphi))) - \int_0^t R(t-s)B(s)(\varphi(0) + f(0, \varphi))ds \| \\ & \quad + \| \partial_h f(t, x_t) - D_1 f(t, x_t) - D_2 f(t, x_t)z_t \| \\ & \quad + \| \int_0^t R(t-s)(\partial_h g(s, x_s) - D_1 g(s, x_s) - D_2 g(s, x_s)z_s)ds \| \\ & \quad + \| \frac{1}{h} \int_0^h R(t+h-s)g(s, x_s)ds - R(t)g(0, \varphi) \| = \sum_1^4 I_i(t, h). \end{aligned} \quad (2.23)$$

No que segue, mostraremos que cada termo $I_i(t, h)$ converge a zero uniformemente sobre $[0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Como $\varphi(0) + f(0, \varphi) \in D(A)$, é fácil ver que das propriedades do operador resolvente que $I_1(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente sobre $[0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Usando que a família $(R(t))_{t \geq 0}$ é fortemente contínua e que a função $t \rightarrow g(t, x_t)$ é contínua, obtemos que $I_4(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente sobre $[0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Estudaremos agora o termo $I_2(t, h)$. Usando a decomposição introduzida em (2.20) vemos que

$$I_2(t, h) \leq \| D_2 f(t, x_t) \| \| \frac{x_{t+h} - x_t}{h} - z_t \|_{\mathcal{B}} + \frac{\| (h, x_{t+h} - x_t) \|}{h} \| r(f, t, x_t, h, x_{t+h} - x_t) \|.$$

Como a aplicação $t \rightarrow x_t$ é Lipschitz, temos do Lema 2.2.4 que

$$\frac{\| (h, x_{t+h} - x_t) \|}{h} \| r(f, t, x_t, h, x_{t+h} - x_t) \| \rightarrow 0,$$

uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$. Assim podemos reescrever a desigualdade anterior na forma

$$I_2(t, h) \leq \Lambda_2(t, h) + \| D_2 f(t, x_t) \| \| \frac{x_{t+h} - x_t}{h} - z_t \|_{\mathcal{B}}, \quad (2.24)$$

onde $\Lambda_2(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Usando um argumento similar ao anterior é possível mostrar que

$$I_3(t, h) \leq \Lambda_3(t, h) + M \int_0^t \| D_2 g(s, x_s) \| \| \frac{x_{s+h} - x_s}{h} - z_s \|_{\mathcal{B}} ds, \quad (2.25)$$

onde $\Lambda_3(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Dos passos anteriores, podemos reescrever (2.23) na forma

$$\begin{aligned} \|\partial_h x(t) - z(t)\| &\leq H(t, h) + \|D_2 f(t, x_t)\| \left\| \frac{x_{t+h} - x_t}{h} - z_t \right\|_{\mathcal{B}} \\ &\quad + M \int_0^t \|D_2 g(s, x_s)\| \left\| \frac{x_{s+h} - x_s}{h} - z_s \right\|_{\mathcal{B}} ds, \end{aligned}$$

onde $H(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$. Mais ainda, dos axiomas do espaço de fase segue que

$$\begin{aligned} &\|\partial_h x(t) - z(t)\| \\ &\leq H(t, h) + \|D_2 f(t, x_t)\| (K_b \|\partial_h x(\theta) - z(\theta)\|_t + M_b \left\| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \right\|_{\mathcal{B}}) \\ &\quad + \int_0^t M \|D_2 g(s, x_s)\| (K_b \|\partial_h x(\theta) - z(\theta)\|_s + M_b \left\| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \right\|_{\mathcal{B}}) ds \\ &\leq H(t, h) + \mu \|\partial_h x(\theta) - z(\theta)\|_t + \frac{M_b \mu}{K_b} \left\| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \right\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Tomando supremo em $[0, t]$ e usando o fato de que $\mu < 1$, obtemos

$$\|\partial_h x(\theta) - z(\theta)\|_t \leq \frac{1}{1 - \mu} \sup_{s \in [0, t]} H(s, h) + \frac{M_b}{K_b(1 - \mu)} \left\| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \right\|_{\mathcal{B}}.$$

Conseqüentemente, para mostrar que $x'(\cdot) = z(\cdot)$ em $[0, b]$, é suficiente provar que $\frac{x_h - \varphi}{h} \rightarrow z_0$ quando $h \rightarrow 0^+$. Para isto, considere a decomposição $x = z^1 + z^2$ onde $(z^i)_0 = 0$ e

$$\begin{aligned} z^1(\theta) &= R(\theta)f(0, \varphi) - f(\theta, x_\theta), \quad \theta \in [0, b], \\ z^2(\theta) &= \int_0^\theta R(\theta - s)g(s, x_s)ds, \quad \theta \in [0, b]. \end{aligned}$$

Com estas notações temos que $x_s = W(s)\varphi + z_s^1 + z_s^2$ e assim que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \right\|_{\mathcal{B}} &\leq \left\| \frac{W(h)\varphi + z_h^1 + z_h^2 - \varphi}{h} - (\psi + \chi_{Af(0, \varphi)} + \chi_{g(0, \varphi)}) \right\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \left\| \frac{W(h)\varphi - \varphi}{h} - \psi \right\|_{\mathcal{B}} + \left\| \frac{z_h^1}{h} - \chi_{Af(0, \varphi)} \right\|_{\mathcal{B}} + \left\| \frac{z_h^2}{h} - \chi_{g(0, \varphi)} \right\|_{\mathcal{B}} \\ &= \sum_{i=1}^3 I_i(h, \mathcal{B}). \end{aligned}$$

É claro que $I_1(h, \mathcal{B}) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Suponha agora que $Af(0, \varphi) \equiv g(0, \varphi) \equiv 0$.

Usando o axioma **(A)**, vemos que

$$\left\| \frac{z_h^1}{h} \right\|_{\mathcal{B}} + \left\| \frac{z_h^2}{h} \right\|_{\mathcal{B}} \leq K_b \left\| \frac{z^1(\theta)}{h} \right\|_h + K_b \left\| \frac{z^2(\theta)}{h} \right\|_h.$$

Se $[x, y]$ representa o segmento de reta ligando os vetores x, y . Para z^1 , das propriedades do operador resolvente e o fato de que $Af(0, \varphi) = 0$ vemos para $\theta \in (0, h)$ que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \| z^1(\theta) \| \\
& \leq \frac{1}{h} \| R(\theta)f(0, \varphi) - f(0, \varphi) \| + \frac{1}{h} \| f(0, \varphi) - f(\theta, x_\theta) \| \\
& \leq \frac{1}{h} \left\| \int_0^\theta R'(\xi)f(0, \varphi)d\xi \right\| + \frac{1}{h} \| f(0, \varphi) - f(\theta, x_\theta) \| \\
& \leq \frac{1}{h} \left\| \int_0^\theta \int_0^\xi R(\xi - \tau)B(\tau)f(0, \varphi)d\tau d\xi \right\| + \frac{1}{h} \sup_{(s, \zeta) \in [(0, \varphi), (\theta, x_\theta)]} \| Df(s, \zeta) \| \| (\theta, \varphi - x_\theta) \| \\
& \leq \frac{M\theta}{h} \int_0^\theta \| B(\tau)f(0, \varphi) \| d\tau + \frac{\| (\theta, \varphi - x_\theta) \|}{\theta} \frac{\theta}{h} \sup_{(s, \zeta) \in [(0, \varphi), (\theta, x_\theta)]} \| Df(s, \zeta) \|,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\frac{1}{h} \| z^1(\theta) \|_h \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$ pois $s \rightarrow x_s$ é Lipschitz em $[0, b]$ e

$$\sup_{(s, \zeta) \in [(0, \varphi), (\theta, x_\theta)]} \| Df(s, \zeta) \| \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow 0$. Por outro lado, para z^2 obtemos que

$$\frac{1}{h} \| z^2(\theta) \|_h \leq \frac{1}{h} \int_0^\theta \| R(\theta - s)g(s, x_s) \| ds \leq \frac{M\theta}{h} \| g(\theta, x_\theta) \|_h,$$

o que prova que $\frac{1}{h} \| z^2(\theta) \|_h \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$, uma vez que $\| g(\theta, x_\theta) \|_h \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Assuma agora que $g(0, \varphi) \neq 0, Af(0, \varphi) \neq 0$ e que $\mathcal{B}$ verifica o axioma **(C3)**. É fácil ver que $\frac{d}{dt}z^2(t)|_{t=0+} = g(0, \varphi)$, e como por hipótese $\chi_{g(0, \varphi)} \in \mathcal{B}$, temos pelo axioma **(C3)** que $I_3(h, \mathcal{B}) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Em relação a z^1 , veja que

$$\begin{aligned}
\frac{z^1(\theta) - z^1(0)}{\theta} &= \frac{R(\theta)f(0, \varphi) - f(0, \varphi)}{\theta} + \frac{f(0, \varphi) - f(\theta, x_\theta)}{\theta} \\
&= \frac{R(\theta)f(0, \varphi) - f(0, \varphi)}{\theta} + \frac{Df(0, \varphi)(\theta, \varphi - x_\theta)}{\theta} \\
&\quad + r(f, 0, \varphi, \theta, \varphi - x_\theta) \frac{\| (\theta, \varphi - x_\theta) \|}{\theta}.
\end{aligned}$$

Como $\theta \rightarrow x_\theta$ é Lipschitz vemos que do Teorema 1.2.3 que o termo da direita na última igualdade converge para $Af(0, \varphi)$, como por hipótese $\chi_{Af(0, \varphi)} \in \mathcal{B}$ usando o axioma **(C3)** concluímos que $I_2(h, \mathcal{B}) \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$.

Portanto, em qualquer dos casos considerados, $Af(0, \varphi) = g(0, \varphi) = 0$ ou quando $Af(0, \varphi) \neq 0$ e $g(0, \varphi) \neq 0$ e $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma **(C3)**, temos que $I_i(h, \mathcal{B}) \rightarrow 0, i = 2, 3$, quando $h \rightarrow 0$.

Mais ainda, é necessário observar que das estimativas anteriores obtemos que $\partial_h x(t) \rightarrow x'(t)$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Agora mostraremos que a função $t \rightarrow x_t$ é continuamente diferenciável em $\mathcal{B}$. Para isto definimos a função $w : (-\infty, b] \rightarrow X$ por

$$w(\theta) = \begin{cases} z(\theta), & \text{se } \theta \in (-\infty, 0], \\ x'(\theta), & \text{se } \theta \in [0, b]. \end{cases}$$

Das etapas anteriores obtemos que $\frac{d}{dt}x(t)|_{t=0} = \psi(0) + Af(0, \varphi) + g(0, \varphi)$, o que implica que $x'(0^+) = z(0)$, assim concluímos que $w_0 = z_0 \in \mathcal{B}$ e w é contínua em $[0, b]$, temos pelo axioma do espaço de fase **(A1)** que $w_t \in \mathcal{B}$ para todo $t \in [0, b]$ e que a aplicação $t \rightarrow w_t$ é contínua em $[0, b]$. Isto junto com a desigualdade

$$\| \partial_h x_t - w_t \|_{\mathcal{B}} \leq M_b \| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \|_{\mathcal{B}} + K_b \| \partial_h x(\theta) - x'(\theta) \|_t,$$

mostra que $t \rightarrow x_t$ é continuamente diferenciável em $[0, b]$.

Seja $v(\cdot)$ a solução fraca de

$$\frac{dw(t)}{dt} = Aw(t) + \int_0^t B(t-s)w(s)ds + g(t, x_t), \quad t \in [0, b], \quad (2.26)$$

$$w(0) = \varphi(0) + f(0, \varphi). \quad (2.27)$$

Como a função $s \rightarrow g(s, x_s)$ é de classe C^1 sobre $[0, b]$ e $\varphi(0) + f(0, \varphi) \in D(A)$, do Corolário 1.2.1 obtemos que $v(\cdot)$ é uma solução clássica de (2.26)-(2.27). Da unicidade da solução fraca de (2.26)-(2.27) concluímos que $v(t) = x(t) + f(t, x_t)$ para todo $t \in [0, b]$. Como consequência, $x(\cdot)$ verifica (2.1)-(2.2) sobre $[0, b]$ e $x(t) + f(t, x_t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, b]$. Mais ainda como $f(t, x_t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, b]$, segue que $x(t) \in D(A)$ para cada $t \in [0, b]$ o que finalmente prova que $x(\cdot)$ é uma solução clássica de (2.1)-(2.2). A prova está completa. ■

2.3 Exemplo

Para finalizar este capítulo, nesta seção aplicamos alguns de nossos resultados abstratos. Previamente, introduzimos os elementos técnicos necessários. Seja $X = L^2([0, \pi])$. Considere o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por $Af(\xi) = f''(\xi)$, onde

$$D(A) = \{f \in X : f'' \in X, f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

É conhecido que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e compacto $(T(t))_{t \geq 0}$ sobre X . Além disso, A possui espectro discreto, com autovalores $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, e autovetores normalizados $z_n(\xi) = (\frac{2}{\pi})^{1/2} \sin(n\xi)$. Além disso, as seguintes propriedades são verificadas:

- (a) $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X ;
- (b) Se $f \in D(A)$ então $Af = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle f, z_n \rangle z_n$;
- (c) Para $f \in X$, $T(t)f = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle f, z_n \rangle z_n$. Em particular, vemos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente estável com $\|T(t)\| \leq e^{-t}$ para $t \geq 0$.

No que segue usaremos como espaço de fase o espaço $\mathcal{B} = C_r \times L^2(\rho, X)$ com $r = 0$, o qual foi introduzido em 1.3.

Considere o sistema integro-diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u(t) + a_0 * u(t)) &= A(u(t) + a_0 * u(t)) + A(b * (u + a_0 * u))(t) + a_1 * u(t), \quad (2.28) \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0, \quad t \in [0, a], \\ u(\theta, \xi) &= \phi(\theta, \xi), \quad \theta \leq 0, \quad \xi \in [0, \pi], \end{aligned} \quad (2.29)$$

No sistema anterior, $a_0, a_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, $b(t) = t^{\alpha-1} e^{-\omega t}$ com $\alpha \in (0, 1)$ e $\omega > 0$ e

$$\begin{aligned} a_0 * u(t) &= \int_{-\infty}^t a_0(t-s)u(s, \xi)ds, \\ a_1 * u(t) &= \int_{-\infty}^t a_1(t-s)u(s, \xi)ds, \\ b * u(t) &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-\omega(t-s)} u(s, \xi)ds. \end{aligned}$$

Para estudar este sistema assumiremos que

$$L_f := \left(\int_{-\infty}^0 \frac{a_0(-s)^2}{\rho(s)} ds \right)^{\frac{1}{2}} < 1, \quad L_g := \left(\int_{-\infty}^0 \frac{a_1(-s)^2}{\rho(s)} ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

e que a função φ definida por $\varphi(\theta)(\xi) = \phi(\theta, \xi)$ pertence a $\mathcal{B}$.

Lema 2.3.1 *Existe uma família Resolvente $(R(t))_{t \geq 0}$ associada ao sistema integro-diferencial*

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + \int_0^t Ab(t-s)x(s)ds, \\ x(0) &= x_0 \in X. \end{aligned}$$

Demonstração: Basta observar que o operador A e a família de operadores $(Ab(t))_{t \geq 0}$ satisfazem as hipóteses de [24, Theorem 3.1]. ■

Proposição 2.3.1 *Nas condições anteriores, existe uma única solução fraca para o sistema (2.28)-(2.29) sobre $[0, b]$ para algum $0 < b \leq a$.*

Demonstração: Definamos $f, g : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ por

$$\begin{aligned} f(t, \psi)(\xi) &= \int_{-\infty}^0 a_0(-s) \psi(s)(\xi) ds, \\ g(t, \psi)(\xi) &= \int_{-\infty}^0 a_1(-s) \psi(s)(\xi) ds. \end{aligned}$$

Das propriedades das funções a_0 e a_1 é fácil ver que as funções f e g estão bem definidas. Mais ainda, $f(t, \cdot)$ e $g(t, \cdot)$ são operadores lineares contínuos com $\| f(t, \cdot) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, X)} \leq L_f$ e $\| g(t, \cdot) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, X)} \leq L_g$ para todo $t \in [0, a]$. Nestas condições, o Teorema 2.1.1 garante a existência de uma única solução fraca para o sistema (2.28)-(2.29) sobre $[0, b]$, para algum $0 < b \leq a$, isto conclui a prova. ■

O próximo resultado é consequência direta do Teorema 2.2.1.

Corolário 2.3.1 *Suponha que $R(\cdot)\varphi(0)$, $S(\cdot)\varphi$ e $R(\cdot)f(0, \varphi)$ são Lipschitz sobre $[0, a]$. Se $\varphi(0) + f(0, \varphi) \in D(A)$, então existe uma solução semi-clássica de (2.28)-(2.29) em algum intervalo $[0, b]$ com $0 < b \leq a$.*

Capítulo 3

Existência e regularidade de soluções para um sistema integro-diferencial do tipo neutro

Resumo

Neste capítulo estudaremos a existência de soluções fracas, semi-clássicas e clássicas para uma equação integro-diferencial do tipo neutro com retardamento não limitado modelada na forma

$$\frac{d}{dt}(x(t) + F(t, x_t)) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + G(t, x_t), \quad t \in (0, a), \quad (3.1)$$

$$x_0 = \varphi \in \Omega \subset \mathcal{B}, \quad (3.2)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$, $t \geq 0$ são operadores fechados em X ; $\mathcal{B}$ é um espaço de fase definido de maneira axiomática; $\Omega \subset \mathcal{B}$ é aberto e $F, G : I \times \mathcal{B} \rightarrow Y_i$, $i = 1, 2$ são funções apropriadas.

3.1 Existência de soluções fracas

Nesta seção usaremos a teoria de operadores resolventes e vários resultados de ponto fixo no estudo da existência de soluções fracas, semi-clássicas e clássicas (conceitos a serem introduzidos), para o sistema neutro (3.1)-(3.2). Neste capítulo, assumiremos que $(R(t))_{t \geq 0}$ é uma família resolvente associada ao sistema (1.1)-(1.2); que os operadores A , $B(t)$, $t \geq 0$, e

$(R(t))_{t \geq 0}$ comutam entre si quando $x \in D(A)$ e que $M > 0$ é tal que $\|R(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, a]$. Como no capítulo anterior, $y : (-\infty, a] \rightarrow X$ é a função definida por

$$y(t) = \begin{cases} R(t)\varphi(0) & \text{se } 0 \leq t \leq a, \\ \varphi(t) & \text{se } -\infty < t < 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Lembrando que para uma função limitada $\xi : [0, b] \rightarrow [0, \infty)$ e $t \in [0, b]$, usaremos a notação ξ_t para $\xi_t = \sup\{\xi(s) : s \in [0, t]\}$. E para uma função contínua $\eta : [0, b] \rightarrow Z$ usaremos a notação $\|\eta(\theta)\|_t = \sup\{\|\eta(\theta)\| : \theta \in [0, t]\}$.

Para começarmos introduzimos o conceito de solução fraca para o sistema (3.1)-(3.2).

Definição 3.1.1 *Uma função $x : (-\infty, b] \rightarrow X$, $0 < b \leq a$, é uma solução fraca de (3.1)-(3.2) sobre $[0, b]$ se $x_0 = \varphi$; $x \in C([0, b] : X)$; as funções $s \rightarrow AR(t-s)F(s, x_s)$ e $s \rightarrow \int_0^s B(s-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi)d\xi$ são integráveis sobre $[0, t)$ para todo $t \in [0, b]$ e*

$$\begin{aligned} x(t) &= R(t)(\varphi(0) + F(0, \varphi)) - F(t, x_t) - \int_0^t AR(t-s)F(s, x_s)ds \\ &\quad - \int_0^t \int_0^s B(s-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi)d\xi ds + \int_0^t R(t-s)G(s, x_s)ds, \quad t \in [0, b]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Antes de continuar, é necessário observar que o sistema (3.1)-(3.2) apresenta uma dificuldade maior que o sistema (2.1)-(2.2) tratado no capítulo anterior. A diferença entre os dois sistemas tem origem no conceito de solução fraca. Observe que de modo geral, a menos do caso trivial em que A é um operador limitado, a função $s \rightarrow AR(t-s)$ não é integrável em $[0, t)$, $t > 0$, na topologia uniforme de operadores, e que uma situação similar acontece com a função $s \rightarrow B(t-s)$. Assim, no estudo do sistema (3.1)-(3.2) é necessário introduzir alguma hipótese (sobre F , por exemplo) de modo de garantir a integrabilidade das funções $s \rightarrow AR(t-s)F(s, x_s)$ e $\tau \rightarrow B(s-\tau)R(t-s)F(\tau, x_\tau)$ que aparecem na definição de solução fraca.

Motivados pelo comentário anterior, introduzimos o seguinte esquema técnico. Nesta seção $(Y_i; \|\cdot\|_{Y_i})$, $i = 1, 2$ serão espaços de Banach continuamente incluídos em X e assumiremos que a seguinte hipótese é verificada.

(H₁) Para cada $t > 0$, e todo $s \in [0, a]$, $R(t) \in \mathcal{L}(X, Y_1)$, $AR(t) \in \mathcal{L}(Y_1, X)$ e $B(s)R(t) \in \mathcal{L}(Y_2, X)$. Mais ainda, as seguintes propriedades são válidas.

- (i) Para todo $x \in Y_1$ e todo $t > 0$, $AR(\cdot)x \in C((0, a] : X)$. Para todo $x \in Y_2$ e todo $t > 0$, $B(\cdot)R(t)x \in L^1([0, a] : X)$.

(ii) Existem funções $\mathcal{H}_i(\cdot), a(\cdot) \in L^1([0, a])$ tais que

$$\begin{aligned} \|AR(t)\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} &\leq \mathcal{H}_1(t), \quad t \in (0, a], \\ \|B(s)R(t)\|_{\mathcal{L}(Y_2, X)} &\leq a(s)\mathcal{H}_2(t), \quad s \in [0, a], \quad t > 0. \end{aligned}$$

Observação 3.1.1 *É interessante justificar a condição $(\mathbf{H}_1)$. Como mencionamos previamente, as funções $s \rightarrow AR(s)$, $s \rightarrow B(s)$ não são integráveis de $[0, a]$ em $\mathcal{L}(X)$. Se $(\mathbf{H}_1)$ é válida, $u \in C([0, a] : Y_1)$ e $v \in C([0, a] : Y_2)$, então do critério de Bochner para funções integráveis e das estimativas*

$$\begin{aligned} \|AR(t-s)u(s)\| &\leq \|AR(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} \|u(s)\|_{Y_1} \leq \mathcal{H}_1(t-s) \|u(s)\|_{Y_1}, \\ \|B(s-\tau)R(\mu)y(\tau)\| &\leq \|B(s-\tau)R(\mu)\|_{\mathcal{L}(Y_2, X)} \|y(\tau)\|_{Y_2} \\ &\leq a(s-\tau)\mathcal{H}_2(\mu) \|y(\tau)\|_{Y_2}, \quad \mu > 0, \end{aligned}$$

segue que $s \rightarrow AR(t-s)x(s)$ e $\tau \rightarrow B(s-\tau)R(\mu)y(\tau)$ são integráveis sobre $[0, t]$ $0 < t < a$, o que é essencial em nosso objetivo de estudar a existência de soluções fracas por meio da técnica de ponto fixo. Este tipo de condições é verificada em vários casos. Se $(R(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores, veja Rankin [64, Theorem 2], Lunardi [55] e Pazy [63, Theorem 6.13]. Para o caso geral, considere Grimmer [25, Theorem 3.4].

Estamos agora em condições de estabelecer nosso primeiro resultado de existência de solução fraca. Para isto usaremos o Princípio da Contração.

Teorema 3.1.1 *Seja $\varphi \in \Omega$ e suponha que a condição $(\mathbf{H}_1)$ é verificada. Assuma também que as seguintes condições são válidas.*

(a) *A função F assume valores em $Y_i, i = 1, 2$; $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow Y_i, i = 1, 2$ é contínua e existe uma constante $L_F > 0$ tal que*

$$\|F(t, \psi_1) - F(t, \psi_2)\|_{Y_i} \leq L_F \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad \psi_j \in \Omega, \quad i, j = 1, 2, \quad t \in [0, a];$$

(b) *A função $G : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow X$ é contínua e existe uma constante $L_G > 0$ tal que*

$$\|G(t, \psi_1) - G(t, \psi_2)\| \leq L_G \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad \psi_j \in \Omega, \quad j = 1, 2, \quad t \in [0, a].$$

Se $L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} K(0) < 1$, então existe uma única solução fraca de (3.1)-(3.2) sobre $[0, b]$ para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração: Fixemos constantes b_φ, r_1, C_F e C_G tais que $B_{r_1}(\varphi, \mathcal{B}) \subseteq \Omega, \|F(t, \psi)\|_{Y_i} \leq C_F, i = 1, 2$, e $\|G(t, \psi)\| \leq C_G$, para todo $t \in [0, b_\varphi]$ e $\psi \in B_{r_1}(\varphi, \mathcal{B})$. Usando a continuidade das funções $t \rightarrow y_t$ e $K(\cdot)$, escolhemos $\rho > 0$ e $0 < b_1 < b_\varphi$ de forma que

$$\mu = L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} K_{b_1} < 1, \quad (3.5)$$

$$K_{b_1}\rho + \sup_{t \in [0, b_1]} \|y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} < r_1. \quad (3.6)$$

Seja $0 < b \leq b_1$ tal que as seguintes desigualdades sejam validas.

$$\|(R(\theta) - I)F(\theta, y_\theta)\|_b \leq \frac{(1 - \mu)\rho}{3}, \quad (3.7)$$

$$M \|F(0, \varphi) - F(\theta, y_\theta)\|_b \leq \frac{(1 - \mu)\rho}{3}, \quad (3.8)$$

$$C_F \int_0^b \mathcal{H}_1(s)ds + C_F \int_0^b \mathcal{H}_2(s)ds \int_0^b a(\tau)d\tau + bMC_G \leq \frac{(1 - \mu)\rho}{3}, \quad (3.9)$$

$$K_b \left(L_F \int_0^b \mathcal{H}_1(s)ds + L_F \int_0^b \mathcal{H}_2(s)ds \int_0^b a(\tau)d\tau + bML_G \right) < \frac{1 - \mu}{2}. \quad (3.10)$$

Sobre o espaço $S(b) = \{u : (-\infty, b] \rightarrow X : u|_{[0, b]} \in C([0, b], X), u_0 = 0, \|u(\theta)\|_b \leq \rho\}$, munido da norma da convergência uniforme, definimos $\Gamma : S(b) \rightarrow C((-\infty, b] : X)$ por $(\Gamma x)_0 = 0$ e

$$\begin{aligned} \Gamma x(t) &= R(t)F(0, \varphi) - F(t, x_t + y_t) - \int_0^t AR(t-s)F(s, x_s + y_s)ds \\ &\quad - \int_0^t \int_0^s B(s-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi + y_\xi)d\xi ds + \int_0^t R(t-s)G(s, x_s + y_s)ds, \quad t \in [0, b]. \end{aligned}$$

Nas próximas linhas mostraremos que Γ é uma contração de $S(b)$ em $S(b)$. Vejamos inicialmente que Γ está corretamente definida. Se $x \in S(b)$, por (3.6) temos que

$$\|x_t + y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \|x_t\|_{\mathcal{B}} + \|y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq K_{b_1}\rho + \sup_{t \in [0, b_1]} \|y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} < r_1.$$

Assim, $x_t + y_t \in B_{r_1}(\varphi, \mathcal{B})$ para todo $t \in [0, b]$ e conseqüentemente $\|F(s, x_s + y_s)\|_{Y_i} \leq C_F, i = 1, 2$ e $\|G(s, x_s + y_s)\| \leq C_G$ para todo $s \in [0, b]$. Logo,

$$\begin{aligned} \|AR(t-s)F(s, x_s + y_s)\| &\leq \|AR(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} \|F(s, x_s + y_s)\|_{Y_1} \\ &\leq \mathcal{H}_1(t-s)C_F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|B(s-\tau)R(t-s)F(\tau, x_\tau + y_\tau)\| &\leq \|B(s-\tau)R(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y_2, X)} \|F(\tau, x_\tau + y_\tau)\|_{Y_2} \\ &\leq a(s-\tau)\mathcal{H}_2(t-s)C_F, \end{aligned}$$

$$\|R(t-s)G(s, x_s + y_s)\| \leq \|R(t-s)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \|G(s, x_s + y_s)\| \leq MC_G,$$

o que do Teorema de integração de Bochner, veja [20, Theorem 2], nos permite concluir que as funções $s \rightarrow AR(t-s)F(s, x_s + y_s)$, $s \rightarrow R(t-s)G(s, x_s + y_s)$ e $\tau \rightarrow B(s-\tau)R(t-s)F(\tau, x_\tau + y_\tau)$ são integráveis sobre $[0, t]$ e $[0, s]$ respectivamente. Isto motra que Γx está corretamente definida e que $\Gamma x \in C((-\infty, b] : X)$.

Mostramos agora que $\Gamma S(b) \subset S(b)$. Se $x \in S(b)$ e $t \in [0, b]$, vemos que

$$\begin{aligned}
& \| \Gamma x(t) \| \\
& \leq \| R(t)(F(0, \varphi) - F(t, y_t)) \| + \| R(t)F(t, y_t) - F(t, y_t) \| \\
& \quad + \| F(t, y_t) - F(t, x_t + y_t) \| + \int_0^t \| AR(t-s)F(s, x_s + y_s) \| ds \\
& \quad + \int_0^t \int_0^s \| B(s-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi + y_\xi) \| d\xi ds + \int_0^t \| R(t-s)G(s, x_s + y_s) \| ds \\
& \leq M \| F(0, \varphi) - F(\theta, y_\theta) \|_b + \| R(t)F(\theta, y_\theta) - F(\theta, y_\theta) \|_b \\
& \quad + \| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} L_F \| x_t \|_{\mathcal{B}} + C_F \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds + C_F \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds + MC_G b \\
& \leq \frac{(1-\mu)\rho}{3} + \frac{(1-\mu)\rho}{3} + \| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} L_F K_b \| x(\theta) \|_b + \frac{(1-\mu)\rho}{3} \\
& \leq (1-\mu)\rho + \mu\rho = \rho.
\end{aligned}$$

Como consequencia $\| \Gamma x(t) \| \leq \rho$ para todo $t \in [0, b]$ o que implica que $\Gamma S(b) \subset S(b)$.

Vejamos finalmente que Γ é uma contração. Se $u, v \in S(b)$, então

$$\begin{aligned}
& \| \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \| \\
& \leq \| F(t, u_t + y_t) - F(t, v_t + y_t) \| \\
& \quad + \int_0^t \| AR(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} \| F(s, u_s + y_s) - F(s, v_s + y_s) \|_{Y_1} ds \\
& \quad + \int_0^t \int_0^s \| B(s-\xi)R(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y_2, X)} \| F(\xi, u_\xi + y_\xi) - F(\xi, v_\xi + y_\xi) \|_{Y_2} d\xi ds \\
& \quad + \int_0^t M \| G(s, u_s + y_s) - G(s, v_s + y_s) \| ds \\
& \leq \| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} L_F K_b \| u(\theta) - v(\theta) \|_b + (L_F K_b \int_0^b \mathcal{H}_1(t-s) \| u(\theta) - v(\theta) \|_b ds \\
& \quad + L_F K_b \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds \| u(\theta) - v(\theta) \|_b ds \\
& \quad + MK_b \int_0^b L_G \| u(\theta) - v(\theta) \|_b ds),
\end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\| \Gamma u(\theta) - \Gamma v(\theta) \|_b \leq \mu \| u(\theta) - v(\theta) \|_b + \frac{1-\mu}{2} \| u(\theta) - v(\theta) \|_b \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} \right) \| u(\theta) - v(\theta) \|_b,$$

o que mostra Γ é uma contração.

Finalmente, pelo princípio da contração, Γ possui um ponto fixo $x(\cdot) \in S(b)$. É claro que $u(\cdot) = y(\cdot) + x(\cdot)$ é a única solução fraca de (3.1)-(3.2), o que completa a demonstração. ■

Nos próximos resultados, estudamos a existência de soluções fracas sem assumir que F ou G sejam Lipschitz.

Teorema 3.1.2 *Seja $\varphi \in \Omega$ e suponha que a condição $(\mathbf{H}_1)$ é válida. Assuma também, $R(\cdot) \in C((0, b], \mathcal{L}(X))$ e que as seguintes condições são válidas.*

(a) *A função F é tal que $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow Y_i, i = 1, 2$, é contínua e existe $L_F > 0$ tal que*

$$\|F(t, \psi_1) - F(t, \psi_2)\|_{Y_i} \leq L_F \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad \psi_j \in \Omega, \quad i, j = 1, 2, \quad t \in [0, a];$$

(b) *A função $G : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow X$ é contínua e existe uma constante $r_\varphi > 0$, tal que para cada $0 < t < a$ existe um compacto $W_t \subseteq X$ tal que $R(t)G(s, \psi) \in W_t$ para todo $\psi \in B_{r_\varphi}(\varphi, \mathcal{B})$ e todo $s \in [0, a]$.*

Se $L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} K(0) < 1$, então existe uma solução fraca de (3.1)-(3.2) sobre $[0, b]$ para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração: Sejam $b, S(b), \rho, r_1, \Gamma(\cdot)$ como na prova do Teorema 3.1.1, e assuma que $r_1 \leq r_\varphi$. Considere a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde $(\Gamma_i x)_0 = 0, i = 1, 2$, e

$$\begin{aligned} \Gamma_1 x(t) &= R(t)F(0, \varphi) - F(t, x_t + y_t) - \int_0^t AR(t-s)F(s, x_s + y_s)ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s B(s-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi + y_\xi)d\xi ds, \quad t \in [0, a], \\ \Gamma_2 x(t) &= \int_0^t R(t-s)G(s, x_s + y_s)ds, \quad t \in [0, a]. \end{aligned}$$

Da prova do Teorema 3.1.1, sabemos que Γ_1 é uma contração de $S(b)$ em $S(b)$. Mais ainda, uma aplicação do Lema 2.1.1 mostra que Γ_2 é completamente contínua.

O anterior, junto com Teorema 1.3.1, mostra que Γ possui um ponto fixo $x \in S(b)$ o que completa a prova, pois $u = x + y$ é uma solução fraca de (3.1)-(3.2). ■

(H_G) A função $G : I \times \mathcal{B} \rightarrow X$ satisfaz as seguintes condições

- (i) A função $G(t, \cdot) : \mathcal{B} \rightarrow X$ é contínua para quase todo $t \in [0, a]$ e $G(\cdot, x) : [0, a] \rightarrow X$ é fortemente mensurável para todo $x \in X$;

- (ii) Existe uma função contínua $m_G : [0, a] \rightarrow [0, \infty)$ e uma função contínua e não decrescente $\Omega_G : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$\|G(t, \psi)\| \leq m_G(t)\Omega_G(\|\psi\|_{\mathcal{B}}), \quad (t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}.$$

- (H_F) A função $F : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é tal que $F([0, a] \times \mathcal{B}) \subset Y_i, i = 1, 2$, $F : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow Y_1$ é completamente contínua e existem constantes positivas c_1, c_2 tais que

$$\|F(t, \psi)\|_{Y_i} \leq c_1 \|\psi\|_{\mathcal{B}} + c_2, \quad i = 1, 2, \quad (t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}.$$

Sejam $y(\cdot)$ a função em (3.3) e $S(a) = \{x : (-\infty, a] \rightarrow X : x_0 = 0, x|_{[0, a]} \in C([0, a] : X)\}$, munido com a norma da convergência uniforme. Para todo $Q \subset S(a)$ limitado, o conjunto de funções $\{t \rightarrow F(t, x_t + y_t) : x \in Q\}$ é equicontínuo sobre $[0, a]$.

Teorema 3.1.3 *Seja $\varphi \in \mathcal{B}$ e assuma que as condições (H₁), (H_G) e (H_F) são verificadas. Suponha também que $AR(\cdot) \in C((0, a] : \mathcal{L}(Y_1, X))$, $R(\cdot) \in C((0, a] : \mathcal{L}(X))$, a constante $0 < \mu = K(0) \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} c_1 < 1$ e que as seguintes propriedades são válidas.*

- (a) *Para todo $t \in (0, a]$ e todo $r > 0$, existem conjuntos compactos $W_r^i(t) \subset X, i = 1, 2$, tais que $B(s)R(t)F(s, \psi) \in W_r^1(t)$ e $R(t)G(s, \psi) \in W_r^2(t)$ para todo $s \in [0, a]$ e todo $\psi \in B_r(0, \mathcal{B})$;*
- (b) *Existe uma função positiva $\beta \in L^1([0, a])$ tal que para todo $c \in (0, a]$ existe uma função positiva $W_c \in C([0, a])$ com $W_c(0) = 0$ tal que*

$$\|B(\tau)R(s) - B(\tau)R(s')\|_{\mathcal{L}(Y_2, X)} \leq \beta(\tau)W_c(|s - s'|), \quad \tau \in [0, a], s, s' \in [c, a].$$

Então existe uma solução fraca de (3.1)-(3.2) sobre $[0, b]$ para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração: Seja $0 < b \leq a$ tal que

$$\frac{K_a M}{(1 - \mu_1)} \int_0^b m_G(s) ds < \int_C \frac{ds}{\Omega_G(s)}, \quad (3.11)$$

$$c_1 K_b \left(\|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} + \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds + \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(\tau) d\tau \right) = \mu_1 < \mu + \frac{(1 - \mu)}{2}, \quad (3.12)$$

onde

$$C = (M_a + K_a M H) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \frac{K_a M}{1 - \mu_1} \|F(0, \varphi)\| \\ + \frac{K_a c_2 + K_a (M_a + K_a M H) c_1 \|\varphi\|_{\mathcal{B}}}{1 - \mu_1} \left(\|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} + \int_0^a \mathcal{H}_1(s) ds + \int_0^a \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^a a(s) ds \right).$$

Sobre o espaço $S(b) = \{u : (-\infty, b] \rightarrow X : u|_{[0,b]} \in C([0,b], X), u_0 = 0\}$, munido da norma da convergência uniforme, definimos o operador $\Gamma : S(b) \rightarrow S(b)$ como na prova do Teorema 3.1.1. Usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 3.1.1 segue que $\Gamma x \in S(b)$.

Mostraremos agora que Γ verifica as condições do Teorema 1.3.2. Vejamos inicialmente que Γ é contínua. Seja $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $S(b)$ convergente a $x(\cdot) \in S(b)$. Dos axiomas do espaço de fase, vemos que o conjunto $U = \{x_s^n + y_s, x_s + y_s : s \in [0, b], n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{B}$ e que existe $r > 0$ tal que $\|x_s^n + y_s\|_{\mathcal{B}} < r$ para todo $s \in [0, b]$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Como $F : [0, b] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é contínua e $[0, b] \times U$ é relativamente compacto em $[0, b] \times \mathcal{B}$, segue que $F(\cdot)$ é uniformemente contínua sobre $[0, b] \times U$ e como conseqüência, que $F(s, x_s^n + y_s) \rightarrow F(s, x_s + y_s)$ uniformemente sobre $[0, b]$ quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, das propriedades de $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ temos que

$$\begin{aligned} AR(t-s)F(s, x_s^n + y_s) &\rightarrow AR(t-s)F(s, x_s + y_s), \\ B(s-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi^n + y_\xi) &\rightarrow B(s-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi + y_\xi), \\ G(s, x_s^n + y_s) &\rightarrow G(s, x_s + y_s), \end{aligned}$$

para quase todo $0 \leq \xi < s < t$ quando $n \rightarrow \infty$. Dos fatos anteriores e do Teorema da convergência dominada de Lebesgue concluímos que $\Gamma x^n \rightarrow \Gamma x$ em $S(b)$, o que prova que Γ é contínua.

Para continuar, obteremos estimativas *a priori* para as soluções da equação integral $z = \lambda \Gamma z$, $\lambda \in (0, 1)$. Seja $x^\lambda \in S(b)$ uma solução de $z = \lambda \Gamma z$, $\lambda \in (0, 1)$. Se α^λ é a função definida por $\alpha^\lambda(t) = \|x^\lambda(\theta)\|_t$, então para $t \in [0, b]$ vemos que

$$\begin{aligned} \|x^\lambda(t)\| &\leq \|R(t)F(0, \varphi)\| + \|F(t, x_t^\lambda + y_t)\| + \int_0^t \|AR(t-s)F(s, x_s^\lambda + y_s)\| ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s \|B(s-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi^\lambda + y_\xi)\| d\xi ds + \int_0^t \|R(t-s)G(s, x_s^\lambda + y_s)\| ds \\ &\leq M \|F(0, \varphi)\| + \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} (c_1 \|x_t^\lambda + y_t\|_{\mathcal{B}} + c_2) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{H}_1(t-s)(c_1 \|x_s^\lambda + y_s\|_{\mathcal{B}} + c_2) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s a(s-\xi) \mathcal{H}_2(t-s)(c_1 \|x_\xi^\lambda + y_\xi\|_{\mathcal{B}} + c_2) d\xi ds \\ &\quad + \int_0^t M m_G(s) \Omega_G(\|x_s^\lambda + y_s\|_{\mathcal{B}}) ds \\ &\leq M \|F(0, \varphi)\| + \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} c_1 K_b \alpha^\lambda(t) + \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} c_1 (M_b + K_b M H) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} c_2 + c_1 K_b \alpha^\lambda(t) \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds + c_1 (M_b + K_b M H) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds \\
& + c_2 \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds + c_1 K_b \alpha^\lambda(t) \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds \\
& + c_1 (M_b + K_b M H) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds + c_2 \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds \\
& + \int_0^t M m_G(s) \Omega_G(K_a \alpha^\lambda(s) + (M_a + K_a M H) \| \varphi \|_{\mathcal{B}}) ds \\
\leq & M \| F(0, \varphi) \| + c_2 (\| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} + \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds + \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds) \\
& + c_1 (M_b + K_b M H) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} (\| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} + \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds + \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds) \\
& + \mu_1 \alpha^\lambda(t) + M \int_0^t m_G(s) \Omega_G(K_a \alpha^\lambda(s) + (M_a + K_a M H) \| \varphi \|_{\mathcal{B}}) ds,
\end{aligned}$$

e assim obtemos que

$$\begin{aligned}
\alpha^\lambda(t) \leq & \frac{1}{1 - \mu_1} (M \| F(0, \varphi) \| + c_2 (\| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} + \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds + \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds)) \\
& + \frac{(M_b + K_b M H) c_1 \| \varphi \|_{\mathcal{B}}}{1 - \mu_1} (\| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} + \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds + \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds) \\
& + \frac{M}{1 - \mu_1} \int_0^t m_G(s) \Omega_G(K_a \alpha^\lambda(s) + (M_a + K_a M H) \| \varphi \|_{\mathcal{B}}) ds.
\end{aligned}$$

Definindo $\beta^\lambda(t) = K_a \alpha^\lambda(t) + (M_a + K_a M H) \| \varphi \|_{\mathcal{B}}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\beta^\lambda(t) \leq & (M_a + K_a M H) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + \frac{K_a}{1 - \mu_1} (M \| F(0, \varphi) \| + c_2 (\| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} + \int_0^a \mathcal{H}_1(s) ds \\
& + \int_0^a \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^a a(s) ds)) \\
& + \frac{K_a (M_a + K_a M H) c_1 \| \varphi \|_{\mathcal{B}}}{1 - \mu_1} (\| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} + \int_0^a \mathcal{H}_1(s) ds + \int_0^a \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^a a(s) ds) \\
& + \frac{K_a M}{1 - \mu_1} \int_0^t m_G(s) \Omega_G(\beta^\lambda(s)) ds.
\end{aligned}$$

Denotando por $\gamma_\lambda(t)$ o lado direito da desigualdade anterior, segue que

$$\gamma'_\lambda(t) \leq \frac{K_a M}{1 - \mu_1} m_G(t) \Omega_G(\gamma_\lambda(t))$$

e então,

$$\int_C^{\gamma_\lambda(t)} \frac{ds}{\Omega_G(s)} < \frac{K_a M}{(1 - \mu_1)} \int_0^b m_G(s) ds < \int_C^\infty \frac{ds}{\Omega_G(s)},$$

de onde concluímos que o conjunto $\{\gamma_\lambda(\cdot) : \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em $C([0, b] : X)$ e assim que $\{x^\lambda(\cdot) : \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em $C([0, b] : X)$.

Para completar a prova, mostraremos que Γ é um operador compacto. Para isto introduzimos a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ onde $\Gamma_1, \Gamma_2 : S(b) \rightarrow S(b)$ são tais que $(\Gamma_i x)_0 = 0, i = 1, 2$ e

$$\begin{aligned}\Gamma_1 x(t) &= R(t)F(0, \varphi) - F(t, x_t + y_t) - \int_0^t AR(t-s)F(s, x_s + y_s)ds \\ &\quad + \int_0^t R(t-s)G(s, x_s + y_s)ds, \quad t \in [0, b], \\ \Gamma_2 x(t) &= \int_0^t \int_0^s B(s-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi + y_\xi) d\xi ds, \quad t \in [0, b].\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.1.1 podemos deduzir facilmente que o operador Γ_1 é compacto. Mais ainda, usando o mesmo Lema vemos que Γ_2 é também compacto. Embora mostraremos com detalhes a compacidade de Γ_2 . No que segue $B_r = B_r(0, S(b))$.

Passo 1: O conjunto $\Gamma_2 B_r$ é equicontínuo sobre $[0, b]$.

Seja $0 < \epsilon < t < b$ e $h > 0$ tal que $t+h \in [0, b]$. Das hipóteses sabemos que existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $W_{\frac{\epsilon}{2}}(s) \leq \epsilon$ para todo $0 < s \leq \delta$. Nestas condições, para $0 < h < \delta$ vemos que

$$\begin{aligned}\| \Gamma_2 u(t+h) - \Gamma_2 u(t) \| &\leq \int_0^{t-\epsilon} \int_0^s \| B(s-\xi)(R(t+h-s) - R(t-s))F(\xi, u_\xi + y_\xi) \| d\xi ds \\ &\quad + \int_{t-\epsilon}^t \int_0^s \| B(s-\xi)(R(t+h-s) - R(t-s))F(\xi, u_\xi + y_\xi) \| d\xi ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \int_0^s \| B(s-\xi)R(t+h-s)F(\xi, u_\xi + y_\xi) \| d\xi ds \\ &\leq \epsilon b \| F(\theta, u_\theta + y_\theta) \|_{Y_2, b} \int_0^s \beta(\theta) d\theta \\ &\quad + \| F(\theta, u_\theta + y_\theta) \|_{Y_2, b} \int_{t-\epsilon}^t (\mathcal{H}_2(t+h-s) + \mathcal{H}_2(t-s)) ds \int_0^b a(\theta) d\theta \\ &\quad + \| F(\theta, u_\theta + y_\theta) \|_{Y_2, b} \int_t^{t+h} \mathcal{H}_2(t+h-s) ds \int_0^b a(\theta) d\theta,\end{aligned}$$

de onde podemos concluir que $\Gamma_2 B_r$ é equicontínuo em t pela direita. Estimativas similares permitem mostrar que $\Gamma_2 B_r$ é equicontínuo em zero e a equicontinuidade a esquerda em $t \in (0, b]$.

Passo 2: O conjunto $\{\Gamma_2 u(t) : u \in B_r\}$ é relativamente compacto.

Seja $0 < \epsilon < t < a$. Usando as hipóteses, existe $\delta > 0$ tal que

$$\| B(\tau)R(s) - B(\tau)R(s') \|_{\mathcal{L}(Y_2, X)} < \beta(\tau)W_\epsilon(|s - s'|) < \beta(\tau)\epsilon,$$

para todo $\tau \in [0, b]$, e todo $s, s' \in [\epsilon, a]$ com $|s - s'| < \delta$. Fixemos agora pontos $0 = t_1 < t_2, \dots < t_n = t - \epsilon$, tais que $|t_i - t_{i+1}| < \delta$ para cada $i = 1, \dots, n$. Nestas condições, para $u \in B_r$ temos que

$$\begin{aligned}
& \Gamma_2 u(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^s B(s-\tau)(R(t-s) - R(t-t_i))F(\tau, u_\tau + y_\tau) d\tau ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^s B(s-\tau)R(t-t_i)F(\tau, u_\tau + y_\tau) d\tau ds \\
&\quad + \int_{t-\epsilon}^t \int_0^s B(s-\tau)R(t-s)F(\tau, u_\tau + y_\tau) d\tau ds \\
&\in \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon^* B_1(0 : X) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \overline{co(\{ \int_0^s B(s-\tau)R(t-t_i)F(\tau, u_\tau + y_\tau) d\tau : u_\tau + y_\tau \in B_{r^*}(0, \mathcal{B}), s \in [0, t] \})} \\
&\quad + \lambda B_1(0 : X) \\
&\subset \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon^* B_1(0 : X) + \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \overline{co([0, t] \times W_{r^*}^1(t - t_i))} + \lambda B_1(0 : X),
\end{aligned}$$

onde $\lambda = \|F(\theta, u_\theta + y_\theta)\|_{Y_2, b} \int_0^\epsilon \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(\theta) d\theta$, $\epsilon^* = \epsilon(\delta \|F(\theta, u_\theta + y_\theta)\|_{Y_2, b} \int_0^b \beta(\tau) d\tau)$ e $r^* = K_b r + (M_b + K_b M H) \|\varphi\|_{\mathcal{B}}$. Como para cada i o conjunto $\overline{co([0, t] \times W_{r^*}^1(t - t_i))}$ é relativamente compacto e tando λ como ϵ^* convergem a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, podemos concluir que $\Gamma_2 B(t)$ é relativamente compacto. Isto completa a prova que Γ_2 é completamente contínuo.

Dos passos anteriores, segue que Γ verifica as hipóteses do Teorema 1.3.2, o que nos permite concluir que $\Gamma(\cdot)$ possui um ponto fixo $x \in S(b)$. Obviamente $u = x + y$ é solução fraca de (3.1)-(3.2), o que permite concluir a prova. ■

3.2 Resultados de regularidade

Nesta seção estudaremos a regularidade das soluções fracas estudada na seção anterior. Especificamente, estabelecemos condições de modo de obter a existência de soluções clássicas e semi-clássicas.

3.2.1 Existência de soluções semi-clássicas

No que segue desta seção assumiremos que as hipóteses do Teorema 3.1.1 são satisfeitas e que $x : (-\infty, b] \rightarrow X$ é uma solução fraca de (3.1)-(3.2). Como consequência da prova do Teorema 3.1.1, também suporemos que $K_b L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} < 1$.

Além do anterior, assumiremos que a seguinte propriedade de tipo Gronwall é verificada.

(H₂) Sejam $z, \alpha \in C([0, b] : \mathbb{R})$, α crescente, tais que

$$0 \leq z(t) \leq \alpha(t) + c_1 \int_0^t (\mathcal{H}_1(t-s) + \mathcal{H}_2(t-s))z(s)ds + c_2 \int_0^t z(s)ds,$$

para todo $t \in [0, a]$. Então existe $c_3 > 0$ independente de t e $\Theta \in L^1([0, a])$ tal que

$$z(t) \leq \alpha(t)c_3 \int_0^t \Theta(t-s)ds.$$

Observação 3.2.1 A motivação para a hipótese **(H₂)** é o fato da seguinte condição do tipo Gronwall ser verdadeira “ Se $\phi : [0, a] \rightarrow [0, \infty)$ contínua e existe uma função não decrescente $\alpha : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ e constantes positivas μ_1, μ_2 e $\beta \in (0, 1)$ tais que

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \mu_1 \int_0^t \phi(\sigma)d\sigma + \mu_2 \int_0^t \frac{\phi(\sigma)}{(t-\sigma)^{1-\beta}}d\sigma,$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha(t) \left(\mu_3 + \mu_1 \mu_3^2 \int_0^t e^{\mu_1 \mu_3 (t-s)} ds \right), \text{ onde } \mu_3 = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\mu_2 a^\beta}{\beta} \right)^j e^{\frac{\mu_2^\beta \Gamma(\beta)^n a^{n\beta}}{\Gamma(n\beta)}},$$

e n é o primeiro inteiro positivo tal que $n\beta > 1$. ”

A prova do fato anterior pode ser deduzida com facilidade da prova do [63, Lemma 6.7], omitiremos detalhes adicionais. Observamos que este tipo de desigualdade apareceram freqüentemente nesta seção.

Para nosso primeiro resultado de regularidade, precisamos do seguinte Lema.

Lema 3.2.1 Assuma que a hipótese **(H₂)** ocorra; que as funções $R(\cdot)\varphi(0)$ e $S(\cdot)\varphi$ são Lipschitz sobre $[0, b]$; que $F(t, x_t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, b]$ e que o conjunto

$$U = \{AR(s)F(t, x_t), \int_0^s B(\theta)R(t)F(s, x_s)d\theta : t, \theta, s \in [0, b]\}$$

é limitado. Assuma também que existem constantes positivas L_F e L_G tais que

$$\begin{aligned} \|F(t, \psi_1) - F(s, \psi_2)\|_{Y_i} &\leq L_F(|t-s| + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}), \quad i = 1, 2, \\ \|G(t, \psi_1) - G(s, \psi_2)\| &\leq L_G(|t-s| + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}), \end{aligned}$$

para todo $t, s \in [0, b]$ e todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$. Então as funções $x(\cdot)$ e $t \rightarrow x_t$ são Lipschitz sobre $[0, b]$.

Demonstração: Sejam $t \in [0, b)$ e $h > 0$ tais que $t + h \in [0, b]$. Usando que $R(t)(\varphi(0) + F(0, \varphi))$ é Lipschitz sobre $[0, b]$ e a limitação do conjunto U vemos que

$$\begin{aligned}
& \|x(t+h) - x(t)\| \\
& \leq c_1 h + L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} M_b \|x_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} + L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} K_b \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_t \\
& \quad + \int_0^t \|AR(t-s)(F(s+h, x_{s+h}) - F(s, x_s))\| ds + \int_0^h \|AR(t+h-s)F(s, x_s)\| ds \\
& \quad + \int_0^t \int_0^s \|B(s-\xi)R(t-s)(F(\xi+h, x_{\xi+h}) - F(\xi, x_\xi))\| d\xi ds \\
& \quad + \int_0^t \int_0^h \|B(s+h-\xi)R(t-s)F(\xi, x_\xi)\| d\xi ds \\
& \quad + \int_0^h \int_0^s \|B(s-\xi)R(t+h-s)F(\xi, x_\xi)\| d\xi ds \\
& \quad + \int_0^t \|R(t-s)(G(s+h, x_{s+h}) - G(s, x_s))\| ds + \int_0^h \|R(t+h-s)G(s, x_s)\| ds \\
& \leq c_2 h + L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} M_b \|x_h - \varphi\| + L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} K_b \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_t \\
& \quad + L_F M_b \|x_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} \int_0^t \mathcal{H}_1(s) ds + L_F K_b \int_0^t \mathcal{H}_1(t-s) \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_s ds \\
& \quad + L_F M_b \int_0^t \int_0^s a(s-\xi) \mathcal{H}_2(t-s) \|x_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} d\xi ds \\
& \quad + L_F K_b \int_0^t \int_0^s a(s-\xi) \mathcal{H}_2(t-s) \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_\xi d\xi ds \\
& \quad + L_G M_b M_b \|x_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} + L_G M K_b \int_0^t \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_s ds,
\end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas independentes de t e h . Da desigualdade anterior, deduzimos a existência de constantes positivas $c_i, i = 3, \dots, 6$ tais que

$$\begin{aligned}
& \|x(t+h) - x(t)\| \\
& \leq c_3 h + c_4 \|x_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} + L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} K_b \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_t \\
& \quad + c_5 \int_0^t (\mathcal{H}_1(t-s) + \mathcal{H}_2(t-s)) \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_s ds + c_6 \int_0^t \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_s ds.
\end{aligned}$$

Como $K_b L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} < 1$ e a função $\xi(t) = \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_t$ é crescente, podemos reescrever a última desigualdade na forma

$$\begin{aligned}
& \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_t \\
& \leq c_7 h + c_8 \|x_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} + c_9 \int_0^t (\mathcal{H}_1(t-s) + \mathcal{H}_2(t-s)) \|x(\theta+h) - x(\theta)\|_s ds
\end{aligned}$$

$$+c_{10} \int_0^t \|x(\theta + h) - x(\theta)\|_s ds,$$

e assim concluir por $(\mathbf{H}_2)$ que

$$\|x(\theta + h) - x(\theta)\|_t \leq (c_7 h + c_8 \|x_h - \varphi\|_{\mathcal{B}}) C \int_0^t \Theta(t-s) ds. \quad (3.13)$$

onde $C > 0$ é independente de t . Agora é fácil ver que o Lema estará provado se $\|x_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} = O(h)$. Para mostrar isto considere a decomposição $x = y + u$ onde $y(\cdot)$ é a função definida em (3.3). Pelo Lema 2.2.1, sabemos que existe $L_y > 0$ tal que $\|y(s + \mu) - y(s)\| \leq L_y \mu$ para todo $s \in [0, b]$, de onde obtemos que

$$\|x_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \|y_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|u_h\|_{\mathcal{B}} \leq L_y h + K_b \|u(\theta)\|_h. \quad (3.14)$$

Por outro lado, para $s \in [0, h]$,

$$\begin{aligned} & \|u(s)\| \\ & \leq \|R(s)F(0, \varphi) - F(0, \varphi)\| + \|F(s, y_s + u_s) - F(0, \varphi)\| \\ & \quad + \int_0^s \|AR(s-\xi)F(\xi, y_\xi + u_\xi)\| d\xi + \int_0^s \int_0^\xi \|B(\xi-\tau)R(s-\xi)F(\tau, y_\tau + u_\tau)\| d\tau d\xi \\ & \quad + \int_0^s \|R(s-\xi)G(\xi, y_\xi + u_\xi)\| d\xi \\ & \leq c_{11}h + K_b \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} L_F \|u(\theta)\|_s + \sup_{\xi, \theta \in [0, b]} \|AR(\xi)F(\theta, x_\theta)\|_h h \\ & \quad + \sup_{\theta, s, t \in [0, b]} \left\| \int_0^s B(\theta)R(t)F(s, x_s) d\theta \right\| h + M \|G(\theta, x_\theta)\|_h. \end{aligned}$$

Usando novamente que $K_b L_F \|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} < 1$, obtemos que $\|u(\theta)\|_h \leq C_1 h$ para $h > 0$. Isto junto a (3.13), e (3.14) permite concluir que $x(\cdot)$ é Lipschitz.

Finalmente, da desigualdade

$$\|x_{t+h} - x_t\|_{\mathcal{B}} \leq M_a \|y_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} + M_a K_a \|u(\theta)\|_h + K_a \|x(\theta + h) - x(\theta)\|_t$$

deduzimos que $t \rightarrow x_t$ é também Lipschitz sobre $[0, b]$. A prova está agora completa. $\blacksquare$

Introduzimos agora os conceito de solução semi-clássica para (3.1)-(3.2)

Definição 3.2.1 *Uma função $u : (-\infty, b) \rightarrow X$ é uma solução semi-clássica de (3.1)-(3.2) se $u \in C([0, b] : X)$; $u_0 = \varphi$; $t \rightarrow u(t) + F(t, u_t) \in C([0, b] : D(A)) \cap C^1((0, b) : X)$; $u \in W^{1,1}([0, b] : X)$ e a função $t \rightarrow F(t, u_t) \in W^{1,1}([0, b] : X)$ e (3.1) é satisfeita em $[0, b]$.*

No próximo resultado estabeleceremos a existência de solução semi-clássica para (3.1)-(3.2).

Teorema 3.2.1 *Assuma que as hipóteses do Lema 3.2.1 são satisfeitas. Suponha que $\varphi(0) \in D(A)$; $F([0, b] \times \mathcal{B}) \subset D(A)$; que a função $B(\cdot) \in L^\infty([0, a] : \mathcal{L}([D(A)] : X))$ e que existe $L_F > 0$ tal que*

$$\| AF(t, \psi_1) - AF(s, \psi_2) \| \leq L_F(|t - s| + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}),$$

para todo $0 \leq s, t \leq b$ e $\psi_1, \psi_2 \in \Omega$.

Se X satisfaz a (RNP), então $x(\cdot)$ é uma solução semi-clássica de (3.1)-(3.2) sobre $[0, b]$.

Demonstração: Dos Lemas 2.2.1 e 3.2.1 segue que as funções $v_i : [0, b] \rightarrow X, i = 1, 2$ definidas por

$$v_1(t) = AF(t, x_t),$$

$$v_2(t) = G(t, x_t),$$

são Lipschitz sobre $[0, b]$ e do Lema 2.2.3 deduzimos que $v_i(\cdot) \in W^{1,1}([0, b] : X)$ para $i = 1, 2$. Pelo fato de que $B(\cdot) \in L^\infty([0, a] : \mathcal{L}([D(A)] : X))$ é fácil ver que a função $v_3(t) = \int_0^t B(t-s)F(s, x_s)ds \in W^{1,1}([0, b] : X)$. Logo do Teorema 1.2.5 segue que o problema de Cauchy

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + \int_0^t B(t-s)z(s)ds + v_1(t) + v_2(t) + v_3(t), \quad t \in (0, b), \quad (3.15)$$

$$z(0) = \varphi(0) + F(0, \varphi). \quad (3.16)$$

tem uma única solução clássica $w(\cdot) \in C([0, b] : D(A)) \cap C^1((0, b) : X)$ que é dada por

$$w(t) = R(t)(\varphi(0) + F(0, \varphi)) + \int_0^t R(t-s)(v_1(s) + v_2(s) + v_3(s))ds.$$

Agora da unicidade de soluções fracas de (3.15)-(3.16), podemos concluir que $w(t) = x(t) + F(t, x_t)$ para todo $t \in [0, b]$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t) + F(t, x_t)) &= A(x(t) + F(t, x_t)) + \int_0^t B(t-s)(x(s) + F(s, x_s)) - AF(t, x_t) \\ &\quad - \int_0^t B(t-s)F(s, x_s)ds + G(t, x_t) \\ &= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + G(t, x_t), \end{aligned}$$

pois $F(s, x_s) \in D(A)$ para todo $s \in [0, b]$. Portanto $x(\cdot)$ verifica (3.1)-(3.2), o que finaliza a prova. ■

3.2.2 Existência de solução clássica

Nesta seção estabelecemos condições suficientes para que uma solução fraca de (3.1)-(3.2) seja uma solução clássica. Para começar, uma função $f : J \rightarrow Y$ é dita η -Hölder contínua, para $\eta \in (0, 1)$, se existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(s) - f(t)\| \leq L |t - s|^\eta, \quad \forall s, t \in J.$$

No que segue $C^\eta(J : Y)$ representa o espaço das funções η -Hölder contínuas.

Para nossos próximos resultados assumiremos válida a seguinte hipótese.

(**H_R**) Existe $K > 0$ e $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$\|(-A)^2 R(t)\|_{\mathcal{L}(Y_2, X)} \leq \frac{K}{t^{2-\beta}}, \quad t > 0.$$

Para mostrar alguns de nossos resultados, é necessário fazer o estudo prévio do seguinte sistema.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s) ds + (-A)g(t), \quad 0 < t < a, \quad (3.17)$$

$$x(0) = 0, \quad (3.18)$$

onde $g(\cdot) \in C^\vartheta([0, a] : Y_2) \cap C([0, a] : [D(A)])$, $\vartheta \in (0, 1)$.

Teorema 3.2.2 *Sejam $\beta, \vartheta \in (0, 1)$ tal que $\beta + \vartheta > 1$ e a função $g(\cdot) \in C^\vartheta([0, a] : Y_2) \cap C([0, a] : [D(A)])$. Se $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (3.17)-(3.18), então $u(\cdot)$ é uma solução clássica para (3.17)-(3.18).*

Demonstração: Para começar, consideremos a seguinte decomposição

$$u(t) = \int_0^t (-A)R(t-s)(g(s) - g(t)) ds + \int_0^t (-A)R(t-s)g(t) ds = w_1(t) + w_2(t).$$

Do Lema 1.2.1 temos que $Aw_2(t) \in C([0, a] : X)$. Em relação a $w_1(\cdot)$, defina a sequência de funções $w_{1,\epsilon} \in C([0, a] : X)$ por

$$w_{1,\epsilon}(t) = \begin{cases} \int_0^{t-\epsilon} (-A)R(t-s)(g(s) - g(t)) ds & \text{se } t \in [\epsilon, a], \\ 0 & \text{se } t \in [0, \epsilon]. \end{cases}$$

Segue da desigualdade

$$\begin{aligned} \|(-A)^2 R(t-s)(g(s) - g(t))\| &\leq \|(-A)^2 R(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y_2, X)} \|g(s) - g(t)\|_{Y_2} \\ &\leq KL(t-s)^{\beta+\vartheta-2}, \end{aligned}$$

que a função $s \rightarrow (-A)^2 R(t-s)(g(s) - g(t))$ é integrável em $[0, t]$ para cada $t \in [0, a]$, segue deste fato que $w_{1,\epsilon}(\cdot) \in D(A)$. Assim podemos definir a sequência de funções

$$Aw_{1,\epsilon}(t) = \begin{cases} \int_0^{t-\epsilon} (-A)^2 R(t-s)(g(s) - g(t)) ds & \text{se } t \in [\epsilon, a], \\ 0 & \text{se } t \in [0, \epsilon]. \end{cases}$$

É fácil ver que a sequência $w_{1,\epsilon}(t) \rightarrow \int_0^t (-A) R(t-s)(g(s) - g(t)) ds$ e que $Aw_{1,\epsilon}(t) \rightarrow \int_0^t (-A)^2 R(t-s)(g(s) - g(t)) ds$ em X , usando que o operador A é fechado concluímos que $w_1(t) \in D(A)$ e que $Aw_1(t) = \int_0^t (-A)^2 R(t-s)(g(s) - g(t)) ds$, para todo $t \in [0, a]$, portanto a função $s \rightarrow (-A) R(t-s)(g(s) - g(t)) \in L^1([0, a] : D(A))$. Segue do fato anterior que $w_1(\cdot) \in C([0, a] : [D(A)])$, e assim que $w(t) \in C([0, a] : [D(A)])$. Do Corolário 1.2.1 podemos concluir que $w(t)$ é uma solução clássica para (3.17)-(3.18). O que finaliza a prova. ■

Introduzimos agora o seguinte conceito de solução clássica para (3.1)-(3.2).

Definição 3.2.2 *Uma função $u : (-\infty, b] \rightarrow X$ é uma solução clássica de (3.1)-(3.2) sobre $[0, b]$ se $u_0 = \varphi$; $u \in C([0, b] : X) \cap C^1((0, b) : X)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, b)$, a função $s \rightarrow B(t-s)u(s)$ é integrável em $[0, t]$ para todo $t \in [0, b)$ e (3.1) é satisfeita.*

No próximo resultado estudamos a existência de solução clássica para (3.1)-(3.2).

Teorema 3.2.3 *Assuma que as hipóteses $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ e $(\mathbf{H}_R)$ ocorram, que $S(\cdot)\varphi$ é Lipschitz sobre $[0, a]$ e que $\varphi(0) \in D(A)$. Suponha também que*

- (a) $F \in C^1([0, a] \times \mathcal{B} : Y_i) \cap C([0, a] \times \mathcal{B} : [D(A)]), i = 1, 2$ e $DF(0, \varphi) \equiv 0$;
- (b) O operador $W(\cdot)\varphi$ possui derivada a direita em $t = 0$ dada por $\psi \in \mathcal{B}$;
- (c) $G \in C^1([0, a] \times \mathcal{B} : X)$ e $G(0, \varphi) \equiv 0$ ou $\chi_{G(0, \varphi)} \in \mathcal{B}$ onde $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma **(C3)**;
- (d) Existe $\eta \in L^1([0, a])$ tal que $\frac{1}{h} \int_s^{s+h} b(\theta) d\theta \leq \eta(s)$, para todo $h \in [0, 1]$.

Então existe uma única solução clássica de (3.1)-(3.2) para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração: Usando que $F \in C^1([0, a] \times \mathcal{B} : Y_i), i = 1, 2$, $G \in C^1([0, a] \times \mathcal{B} : X)$ e o fato que $D(F(0, \varphi)) \equiv 0$, do Teorema 3.1.1 deduzimos a existência de uma única solução fraca $x \in C([0, b] : X)$ de (3.1)-(3.2) para algum $0 < b \leq a$. Além disso, usando novamente o fato que $DF(0, \varphi) \equiv 0$, podemos assumir que F é Lipschitz como função de Ω em $Y_i, i = 1, 2$,

sendo Ω aberto de $(0, \varphi)$. No que segue, L_F será a constante de Lipschitz de F em Ω e assumiremos que $L_F K_b < 1$. Agora como consequência do Lema 3.2.1 podemos supor que as funções $x(\cdot)$ e $s \rightarrow x_s$ são Lipschitz sobre $[0, b]$. Mais ainda, assumiremos sem perda de generalidade que b é de tal forma que

$$\begin{aligned} \mu &= K_b \|D_2 F(s, x_s)\|_{Y_1, b} \left(\|I\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} + \int_0^b \mathcal{H}_1(s) ds + \int_0^b a(s) ds \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \right) \\ &\quad + K_b M b \|D_2 G(s, x_s)\|_b < 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Seja $z \in C([0, b] : X)$ uma solução da equação integral

$$\begin{aligned} z(t) &= R(t)(A\varphi(0) + G(0, \varphi)) + \int_0^t R(t-s)B(s)\varphi(0)ds - D_1 F(t, x_t) - D_2 F(t, x_t)z_t \\ &\quad + \int_0^t AR(t-s)(D_1 F(s, x_s) + D_2 F(s, x_s)z_s)ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s B(s-\xi)R(t-s)(D_1 F(\xi, x_\xi) - D_2 F(\xi, x_\xi)z_\xi)d\xi ds \\ &\quad + \int_0^t R(t-s)(D_1 G(s, x_s) - D_2 G(s, x_s)z_s)ds, \end{aligned} \quad (3.20)$$

com $z_0 = \psi + \chi_{G(0, \varphi)}$. A existência de $z(\cdot)$ é consequência de (3.19) e do princípio da contração. Omitiremos detalhes adicionais.

No que segue mostraremos que $x'(\cdot) = z(\cdot)$ em $[0, b]$. Para $t \in [0, b]$ e $0 < h < 1$ suficientemente pequeno de forma que $t+h \in [0, b]$ temos que

$$\begin{aligned} &\| \partial_h x(t) - z(t) \| \\ &\leq \| \partial_h R(t)\varphi(0) - R(t)A\varphi(0) - \int_0^t R(t-s)B(s)\varphi(0)ds \| \\ &\quad + \| \partial_h F(t, x_t) - D_1 F(t, x_t) - D_2 F(t, x_t)z_t \| \\ &\quad + \| \partial_h R(t)F(0, \varphi) - \frac{1}{h} \int_0^h AR(t+h-s)F(s, x_s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t \int_0^h R(t-s)B(s-\xi+h)F(\xi, x_\xi)d\xi ds \| \\ &\quad + \| \frac{1}{h} \int_0^h R(t+h-s) \int_0^s B(s-\xi)F(\xi, x_\xi)d\xi ds \| \\ &\quad + \| \int_0^t AR(t-s)(\partial_h F(s, x_s) - D_1 F(s, x_s) - D_2 F(s, x_s)z_s)ds \| \\ &\quad + \| \int_0^t \int_0^s B(s-\xi)R(t-s)(\partial_h F(\xi, x_\xi) - D_1 F(\xi, x_\xi) - D_2 F(\xi, x_\xi)z_\xi)d\xi ds \| \\ &\quad + \| \int_0^t R(t-s)(\partial_h G(s, x_s) - D_1 G(s, x_s) - D_2 G(s, x_s)z_s)ds \| \\ &\quad + \| \frac{1}{h} \int_0^h R(t+h-s)G(s, x_s)ds - R(t)G(0, \varphi) \| . \\ &= \sum_{i=1}^8 I_i(t, h). \end{aligned}$$

Analisaremos agora os termos $I_i(t, h), i = 1, \dots, 8$. Como $\varphi(0) \in D(A)$, das propriedades do operador resolvente, é fácil ver que $I_1(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Para estudar $I_3(t, h)$ considere a desigualdade

$$\begin{aligned} I_3(t, h) &\leq \left\| \frac{R(t+h) - R(t)}{h} F(0, \varphi) - R(t) A F(0, \varphi) - \int_0^t R(t-s) B(s) F(0, \varphi) ds \right\| \\ &\quad + \left\| -\frac{1}{h} \int_0^t R(t-s) \int_0^h B(s-\xi+h) F(\xi, x_\xi) d\xi ds + \int_0^t R(t-s) B(s) F(0, \varphi) ds \right\| \\ &\quad + \left\| -\frac{1}{h} \int_0^h A R(t+h-s) F(s, x_s) ds + R(t) A F(0, \varphi) \right\| \\ &= \sum_{i=1}^3 \widehat{I}_i(t, h). \end{aligned}$$

Como $F(0, \varphi) \in D(A)$, das propriedades do operador resolvente temos que $\widehat{I}_1(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$. Pelo fato de $F \in C([0, b] \times \mathcal{B}, [D(A)])$ segue que $\frac{1}{h} \int_0^h B(s-\xi+h) F(\xi, x_\xi) d\xi \rightarrow B(s) F(0, \varphi)$ q.t.p. sobre $[0, b]$. Além disso, como $\left\| \frac{1}{h} \int_0^h B(s-\xi+h) F(\xi, x_\xi) d\xi \right\| \leq \int_s^{s+h} b(\xi) d\xi \left\| F(\theta, x_\theta) \right\|_{[D(A)], b} \leq \eta(s) \left\| F(\theta, x_\theta) \right\|_{[D(A)], b}$ em $[0, b]$, deduzimos do Teorema da convergência dominada que $\widehat{I}_2(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$. Finalmente, $\widehat{I}_3(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente quando $h \rightarrow 0$, desde que $F \in C([0, b] \times \mathcal{B}, [D(A)])$. Como consequência do anterior, podemos concluir que $I_3(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Da continuidade das funções $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$, da integrabilidade da função $B(\cdot)$ e das propriedades do operador resolvente podemos deduzir facilmente que o termos $I_4(t, h) \rightarrow 0$ e $I_8(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Usando as conclusões anteriores e a decomposição (2.20), podemos reescrever a desigualdade inicial desta prova na forma

$$\begin{aligned} &\left\| \partial_h x(t) - z(t) \right\| \\ &\leq H(t, h) + \left\| I \right\|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} \left\| D_2 F(t, x_t) \right\|_{Y_1} \left\| \frac{x_{t+h} - x_t}{h} - z_t \right\|_{\mathcal{B}} \\ &\quad + \frac{\left\| (h, x_{t+h} - x_t) \right\|}{h} \left\| r(F, t, x_t, h, x_{t+h} - x_t) \right\|_{Y_1} \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{H}_1(t-s) \left\| D_2 F(s, x_s) \right\|_{Y_1} \left\| \frac{x_{s+h} - x_s}{h} - z_s \right\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{H}_1(t-s) \frac{\left\| (h, x_{s+h} - x_s) \right\|}{h} \left\| r(F, s, x_s, h, x_{s+h} - x_s) \right\|_{Y_1} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^s a(s-\xi) \mathcal{H}_2(t-s) \| D_2 F(\xi, x_\xi) \|_{Y_2} \| \frac{x_{\xi+h} - x_\xi}{h} - z_\xi \|_{\mathcal{B}} d\xi ds \\
& + \int_0^t \int_0^s a(s-\xi) \mathcal{H}_2(t-s) \frac{\| (h, x_{\xi+h} - x_\xi) \|}{h} \| r(F, \xi, x_\xi, h, x_{\xi+h} - x_\xi) \|_{Y_2} d\xi ds \\
& + M \int_0^t \| D_2 G(s, x_s) \| \| \frac{x_{s+h} - x_s}{h} - z_s \|_{\mathcal{B}} ds \\
& + M \int_0^t \frac{\| (h, x_{s+h} - x_s) \|}{h} \| r(G, s, x_s, h, x_{s+h} - x_s) \| ds,
\end{aligned}$$

onde $H(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$. Mais ainda, dos Lemas 2.2.4 e 3.2.1 temos que para $P = F, G$,

$$\frac{\| (h, x_{s+h} - x_s) \|}{h} \| r(P, s, x_s, h, x_{s+h} - x_s) \| \rightarrow 0$$

uniformemente para $s \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$. Isto permite reescrever a desigualdade anterior na forma

$$\begin{aligned}
\| \partial_h x(t) - z(t) \| & \leq H_1(t, h) + \| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} \| D_2 F(t, x_t) \|_{Y_1} \| \frac{x_{t+h} - x_t}{h} - z_t \|_{\mathcal{B}} \\
& + \int_0^t \mathcal{H}_1(t-s) \| D_2 F(s, x_s) \|_{Y_1} \| \frac{x_{s+h} - x_s}{h} - z_s \|_{\mathcal{B}} ds \\
& + \int_0^t \int_0^s a(s-\xi) \mathcal{H}_2(t-s) \| D_2 F(\xi, x_\xi) \|_{Y_2} \| \frac{x_{\xi+h} - x_\xi}{h} - z_\xi \|_{\mathcal{B}} d\xi ds \\
& + M \int_0^t \| D_2 G(s, x_s) \| \| \frac{x_{s+h} - x_s}{h} - z_s \|_{\mathcal{B}} ds,
\end{aligned}$$

onde $H_1(t, h) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Agora, como consequência da desigualdade

$$\| \frac{x_{t+h} - x_t}{h} - z_t \|_{\mathcal{B}} \leq M_b \| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \|_{\mathcal{B}} + K_b \| \frac{x(\theta+h) - x(\theta)}{h} - z(\theta) \|_t,$$

segue que

$$\| \partial_h x(\theta) - z(\theta) \|_t \leq H(\theta, h)_t + \mu \| \partial_h x(\theta) - z(\theta) \|_t + \frac{\mu M_b}{K_b} \| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \|_{\mathcal{B}},$$

e assim que

$$\| \partial_h x(\theta) - z(\theta) \|_t \leq \frac{1}{1-\mu} H(\theta, h)_t + \frac{\mu M_b}{(1-\mu)K_b} \| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \|_{\mathcal{B}},$$

Da última desigualdade, é claro que $x' = z$ em $[0, b]$ se $\| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Para mostra este fato, introduzimos a decomposição $x_t = W(t)\varphi + \sum_{i=1}^4 z_t^1$, onde

$(z^i)_0 = 0$ e para $\theta \in [0, h]$

$$\begin{aligned} z^1(\theta) &= R(\theta)F(0, \varphi) - F(\theta, x_\theta), \\ z^2(\theta) &= \int_0^\theta AR(\theta - s)F(s, x_s)ds, \\ z^3(\theta) &= \int_0^\theta R(\theta - s) \int_0^s B(s - \xi)F(\xi, x_\xi)d\xi ds, \\ z^4(\theta) &= \int_0^\theta R(\theta - s)G(s, x_s)ds. \end{aligned}$$

Com as notações anteriores, segue que,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \right\|_{\mathcal{B}} &\leq \left\| \frac{W(h)\varphi - \varphi}{h} - \psi \right\|_{\mathcal{B}} + \left\| \frac{z_h^1 + z_h^2 + z_h^3}{h} \right\|_{\mathcal{B}} + \left\| \frac{z_h^4}{h} - \chi_{G(0, \varphi)} \right\|_{\mathcal{B}} \\ &= \sum_{i=1}^3 I_i(h, \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Das hipóteses é óbvio que $I_1(h, \mathcal{B}) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Para o termo $I_3(h, \mathcal{B})$, suponha primeiro que $G(0, \varphi) \equiv 0$. Se $\theta \in (0, h)$, então

$$\| z^4(\theta) \| \leq \int_0^\theta \| R(\theta - s)G(s, x_s) \| ds \leq M\theta \| G(\theta, x_\theta) \|_h,$$

o que da desigualdade $\frac{1}{h} \| z_h^4 \|_{\mathcal{B}} \leq K_b M \frac{\theta}{h} \| G(\theta, x_\theta) \|_h$, prova que $\| \frac{z_h^4}{h} \|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, pois $G(0, \varphi) = 0$. Por outro lado, se $G(0, \varphi) \neq 0$, $\chi_{G(0, \varphi)} \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma **(C3)**, temos portanto que $I_3(h, \mathcal{B}) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, uma vez que $\frac{d}{dt} z^4(t)|_{t=0+} = G(0, \varphi)$.

Para o termo $I_2(h, \mathcal{B})$ veja que

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{z_h^1 + z_h^2 + z_h^3}{h} \right\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \frac{K_b}{h} \| R(\theta)F(0, \varphi) - F(\theta, x_\theta) + \int_0^\theta (AR(\theta - s)F(s, x_s)ds + R(\theta - s) \int_0^s B(s - \xi)F(\xi, x_\xi)d\xi)ds \|_h \\ &\leq \frac{K_b}{h} \| F(\theta, x_\theta) - F(0, \varphi) \|_h \\ &+ \frac{K_b}{h} \| R(\theta)F(0, \varphi) - F(0, \varphi) + \int_0^\theta (AR(\theta - s)F(s, x_s)ds + R(\theta - s) \int_0^s B(s - \xi)F(\xi, x_\xi)d\xi)ds \|_h. \end{aligned}$$

Seja $\theta \in [0, h]$, como a função $s \rightarrow x_s$ é Lipschitz, existe $L > 0$ tal que $\| x_s - \varphi \|_{\mathcal{B}} \leq Ls$ para todo $s \in [0, b]$. Nestas condições temos que

$$\| F(\theta, x_\theta) - F(0, \varphi) \| \leq \| (\theta, x_\theta - \varphi) \| \| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} \sup_{(s, \zeta) \in [(0, \varphi), (\theta, x_\theta)]} \| DF(s, \zeta) \|_{Y_1},$$

onde $[(0, \varphi), (\theta, x_\theta)]$ representa o segmento de reta que liga os ponto $(0, \varphi)$ a (θ, x_θ) . O fato acima implica que $\frac{K_b}{h} \| F(\theta, x_\theta) - F(0, \varphi) \|_h \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, pois $DF(0, \varphi) = 0$.

Usando novamente que a função $s \rightarrow x_s$ é Lipschitz e o fato que $R'(\mu)F(0, \varphi) = AR(\mu)F(0, \varphi) + \int_0^\mu B(\mu - s)R(s)F(0, \varphi)ds$ vemos que

$$\begin{aligned}
& \| R(\theta)F(0, \varphi) - F(0, \varphi) + \int_0^\theta AR(\theta - s)F(s, x_s)ds + \int_0^\theta R(\theta - s) \int_0^s B(s - \xi)F(\xi, x_\xi)d\xi ds \| \\
&= \| \int_\theta^0 R'(\theta - s)F(0, \varphi)ds + \int_0^\theta AR(\theta - s)F(s, x_s)ds + \int_0^\theta R(\theta - s) \int_0^s B(s - \xi)F(\xi, x_\xi)d\xi ds \| \\
&\leq \int_0^\theta \| AR(\theta - s)(F(s, x_s) - F(0, \varphi)) \| ds \\
&\quad + \int_0^\theta \| \int_0^s B(s - \xi)R(\theta - s)(F(\xi, x_\xi) - F(0, \varphi)) \| d\xi ds \\
&\leq \int_0^\theta \mathcal{H}_1(\theta - s)L_F(1 + L) |s| ds + \int_0^\theta \int_0^s a(s - \xi)\mathcal{H}_2(\theta - s)L_F(1 + L) |\xi| d\xi ds \\
&\leq L_F(1 + L)\theta \int_0^h \mathcal{H}_1(s)ds + L_F(1 + L)\theta \int_0^h \mathcal{H}_2(s)ds \int_0^b a(\xi)d\xi,
\end{aligned}$$

de onde inferimos que a expressão acima dividida por h converge a zero quando $h \rightarrow 0$, pois $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são funções integráveis sobre $[0, b]$. Portanto $I_2(h, \mathcal{B}) \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$

Resumindo as conclusões anteriores obtemos que $\frac{x_h - \varphi}{h} \rightarrow z_0$ quando $h \rightarrow 0$. Logo temos que $x'(\cdot) = z(\cdot)$, e que $x \in C^1([0, b] : X)$. Mais ainda, das estimativas é fácil observar que $\partial_h x(t) \rightarrow x'(t)$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Agora mostraremos que a função $t \rightarrow x_t$ é continuamente diferenciável em $\mathcal{B}$. Para isto definimos a função $w : (-\infty, b] \rightarrow X$ por

$$w(\theta) = \begin{cases} z(\theta), & \text{se } \theta \in (-\infty, 0], \\ x'(\theta), & \text{se } \theta \in [0, b]. \end{cases}$$

Das etapas anteriores obtemos que $\frac{d}{dt}x(t)|_{t=0} = \psi(0) + G(0, \varphi)$, o que implica que $x'(0^+) = z(0)$, assim temos que $w_0 = z_0 \in \mathcal{B}$ e como w é contínua em $[0, b]$, segue dos axiomas do espaço de fase que $w_t \in \mathcal{B}$ para todo $t \in [0, b]$ e que a aplicação $t \rightarrow w_t$ é contínua em $[0, b]$. O anterior, junto com a desigualdade

$$\| \partial_h x_t - w_t \|_{\mathcal{B}} \leq M_b \| \frac{x_h - \varphi}{h} - z_0 \|_{\mathcal{B}} + K_b \| \partial_h x(\theta) - x'(\theta) \|_t,$$

mostra que $t \rightarrow x_t$ é continuamente diferenciável sobre $[0, b]$. Ainda por cima, $\partial_h x_t \rightarrow \frac{d}{dt}x_t$ uniformemente para $t \in [0, b]$ quando $h \rightarrow 0$.

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{aligned}
\frac{dw(t)}{dt} &= Aw(t) + \int_0^t B(t - s)w(s)ds - AF(t, x_t) - \int_0^t B(t - s)F(s, x_s)ds + G(t, x_t), \\
w(0) &= \varphi(0) + F(0, \varphi).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dos fatos anteriores podemos concluir que $t \rightarrow G(t, x_t) \in C^1([0, b] : X)$ e que $t \rightarrow F(t, x_t) \in C([0, b] : [D(A)]) \cap C^\vartheta([0, b] : Y_2)$, $\vartheta = 1$. Agora vamos mostrar que a função

$$t \rightarrow \zeta(t) = \int_0^t R(t-s) \int_0^s B(s-\xi) F(\xi, x_\xi) d\xi ds \in C^1([0, b] : X).$$

De fato, seja

$$\zeta'(t) = \int_0^t \int_0^s B(s-\xi) R(t-s) \left(D_1 F(\xi, x_\xi) + D_2 F(\xi, x_\xi) \frac{d}{d\xi}(x_\xi) \right) d\xi ds - \int_0^t R(t-s) B(s) F(0, \varphi) ds.$$

Pelas hipóteses sobre $F(\cdot)$ e do fato que a aplicação $t \rightarrow x_t \in C^1([0, b] : \mathcal{B})$, temos que a aplicação $\zeta'(\cdot) \in C([0, b] : X)$. Assim vemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\zeta(t+h) - \zeta(t)}{h} - \zeta'(t) \right\| \\ & \leq \left\| \int_0^t \int_0^s B(s-\xi) R(t-s) \left(\partial_h F(\xi, x_\xi) - D_1 F(\xi, x_\xi) - D_2 F(\xi, x_\xi) \frac{d}{d\xi}(x_\xi) \right) d\xi ds \right\| \\ & \leq \left\| \frac{1}{h} \int_0^h R(t+h-s) \int_0^s B(s-\xi) F(\xi, x_\xi) d\xi ds \right\| \\ & \quad + \left\| \frac{1}{h} \int_0^t R(t-s) \int_0^h B(s+h-\xi) F(\xi, x_\xi) d\xi ds - \int_0^t R(t-s) B(s) F(0, \varphi) ds \right\| \\ & = \sum_{i=1}^3 I_i. \end{aligned}$$

Por estimativas já feitas obtemos que $I_i, i = 1, 2$, convergem a zero quando $h \rightarrow 0$. Usando a decomposição (2.20), vemos que

$$\begin{aligned} I_1 & \leq \int_0^t \int_0^s a(s-\xi) \mathcal{H}_2(t-s) \| D_2 F(\xi, x_\xi) \|_{Y_2} \left\| \frac{x_{\xi+h} - x_\xi}{h} - \frac{d}{d\xi}(x_\xi) \right\|_{\mathcal{B}} d\xi ds \\ & \quad + \int_0^t \int_0^s a(s-\xi) \mathcal{H}_2(t-s) \frac{\| (h, x_{\xi+h} - x_\xi) \|}{h} \| r(F, \xi, x_\xi, h, x_{\xi+h} - x_\xi) \|_{Y_2} d\xi ds \\ & \leq \left(\| D_2 F(\theta, x_\theta) \|_{Y_2, b} \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds \right) \sup_{\xi \in [0, b]} \left\| \frac{x_{\xi+h} - x_\xi}{h} - \frac{d}{d\xi}(x_\xi) \right\|_{\mathcal{B}} \\ & \quad + \left((1+L) \int_0^b \mathcal{H}_2(s) ds \int_0^b a(s) ds \right) \| r(F, \theta, x_\theta, \theta, x_{\theta+h} - x_\theta) \|_{Y_2, b}, \end{aligned}$$

o que permite concluir que $I_1 \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Como $\varphi(0) + F(0, \varphi) \in D(A)$, do Corolário 1.2.1 e do Teorema 3.2.2 temos que

$$\begin{aligned} w(t) & = R(t)(\varphi(0) + F(0, \varphi)) - \int_0^t AR(t-s)F(s, x_s)ds \\ & \quad - \int_0^t R(t-s) \int_0^s B(s-\xi)F(\xi, x_\xi)d\xi ds + \int_0^t R(t-s)G(s, x_s) ds, \end{aligned}$$

é uma solução clássica para (3.21). Da unicidade das soluções fracas de (3.1)-(3.2) segue que $w(t) = x(t) + F(t, x_t)$. Mais ainda, como $F(t, x_t) \in D(A)$ se $t \in [0, b]$, obtemos que

$x(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, b]$ e que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t) + F(t, x_t)) &= A(x(t) + F(t, x_t)) + \int_0^t B(t-s)(x(s) + F(s, x_s)) - AF(t, x_t) \\ &\quad - \int_0^t B(t-s)F(s, x_s)ds + G(t, x_t) \\ &= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s) + G(t, x_t). \end{aligned}$$

O anterior completa a prova do resultado. ■

3.3 Exemplo

Nesta seção consideramos alguns exemplos de sistemas neutros que podem ser estudados fazendo uso dos nossos resultados abstratos deste capítulo. Previamente, introduzimos os elementos técnicos necessários. No que segue $X = L^2([0, \pi])$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o operador definido por $Af = f''$, onde

$$D(A) = \{f \in X : f'' \in X, f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

É conhecido que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e compacto $(T(t))_{t \geq 0}$ em X . Além disso, A possui espectro discreto, os autovalores são $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$ e os autovetores normalizados são $z_n(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin(n\xi)$. Além do anterior, as seguintes propriedades são verificadas

- (a) $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X ;
- (b) Se $f \in D(A)$ então $Af = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle f, z_n \rangle z_n$;
- (c) Para $f \in X$, $T(t)f = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle f, z_n \rangle z_n$. Em particular, vemos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente estável com $\|T(t)\| \leq e^{-t}$ para todo $t \geq 0$,
- (d) Para cada $f \in X$ e todo $\alpha \in (0, 1)$, temos que $(-A)^{-\alpha} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \langle f, z_n \rangle z_n$. Em particular, $\|(-A)^{-1/2}\| = 1$,
- (e) Para cada $\alpha \in (0, 1)$ e $f \in D((-A)^\alpha)$, $(-A)^\alpha f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} \langle f, z_n \rangle z_n$. Mais ainda, $D((-A)^\alpha) = \{f \in X : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} \langle f, z_n \rangle z_n \in X\}$.

Seja $B(t)f(\xi) := a(t)Af(\xi)$, onde $a(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $a(\cdot)$ é limitada em intervalos da forma $0 < t_1 \leq t_2 < \infty$. Assumiremos também que $\hat{a}(\lambda)$ é absolutamente convergente para

$Re(\lambda) > 0$. Com as condições anteriores, o operador A e a família de operadores $(B(t))_{t \geq 0}$ satisfazem as hipóteses do Teorema [25, Theorem 3.1], e existe $K > 0$ tal que

$$\| (-A)^\alpha R(t)x \| \leq \frac{K}{t^\alpha} \| x \|, \quad t > 0,$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$ e $x \in X$, para este último fato, veja [25, Theorem 3.4]. Assim concluímos que existe uma família resolvente analítica $(R(t))_{t \geq 0}$ associada ao sistema (1.1)-(1.2) tal que a hipótese $(\mathbf{H}_1)$ seja verdadeira com $X = L^2([0, \pi])$ e $Y_1 = Y_2 = D((-A)^{1/2})$.

Para estudar nossos próximos exemplos, escolhemos o espaço de fase $\mathcal{B} = C_r \times L^2(\rho, X)$ com $r = 0$.

Considere o sistema integro-diferencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(u(t, \xi) + \int_{-\infty}^t \int_0^\pi b(t-s, \eta, \xi) u(s, \eta) d\eta ds \right) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(t, \xi) + \int_0^t a(t-s) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(s, \xi) ds, \\ &+ \int_{-\infty}^t a_0(s-t) u(s, \xi) ds, \quad (t, \xi) \in [0, a] \times [0, \pi], \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0, & t \in [0, a], \\ u(\theta, \xi) &= \phi(\theta, \xi), & \theta \leq 0, \xi \in [0, \pi]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde se verificam as seguintes propriedades

(i) A função $\frac{\partial}{\partial \xi} b(\theta, \eta, \xi)$ é contínua, $b(\theta, \eta, 0) = b(\theta, \eta, \pi) = 0$ para todo (θ, η) e

$$L_F := \max \left\{ \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \xi} b(\theta, \eta, \xi) d\eta d\theta d\xi, \left(\int_0^\pi \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi \left(\frac{\partial}{\partial \xi} b(\theta, \eta, \xi) \right)^2 \rho^{-1}(\theta) d\eta d\theta d\xi \right)^{1/2} \right\} < \infty.$$

(ii) A função $a_0(\cdot)$ é contínua e $L_0 := \left(\int_{-\infty}^0 \frac{(a_0(s))^2}{\rho(s)} ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

(iii) A função φ definida por $\varphi(\theta)(\xi) = \phi(\theta, \xi)$ pertence a $\mathcal{B}$.

Definimos as funções F e $G : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ por

$$\begin{aligned} F(t, \psi)(\xi) &:= \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi b(s, \eta, \xi) \psi(s, \eta) d\eta ds, \\ G(t, \psi)(\xi) &:= \int_{-\infty}^0 a_0(s) \psi(s, \xi) ds. \end{aligned}$$

Assim podemos escrever o sistema (3.22)-(3.23) na forma abstrata

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x(t) + F(t, x_t)) &= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + G(t, x_t), \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Alem disso, é fácil mostrar que $F(t, \cdot), G(t, \cdot)$ são operadores lineares contínuos com

$$\| F(t, \cdot) \| \leq L_F, \| G(t, \cdot) \| \leq L_G.$$

Mais ainda, usando a caracterização de $D((-A)^{\frac{1}{2}})$ dada em (e), podemos mostrar após alguns cálculos extensos que $F(\mathbb{R} \times \mathcal{B}) \subset D((-A)^{\frac{1}{2}})$ e que

$$\| (-A)^{\frac{1}{2}} F(t, \psi) \| \leq L_F \| \psi \|_{\mathcal{B}},$$

para todo $\psi \in \mathcal{B}$.

O seguinte resultado é consequência direta do Teorema 3.1.1

Proposição 3.3.1 *Suponha que as condições (i)-(iii) ocorram. Se $L_F \| I \|_{\mathcal{L}(Y_1, X)} K(0) < 1$. Então existe uma única solução fraca para o sistema (3.22)-(3.23) sobre $[0, b]$ para algum $0 < b \leq a$.*

Se além das condições anteriores assumirmos que

(iv) A função $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} b(\theta, \eta, \xi)$ é contínua e

$$\widetilde{L}_F := \left(\int_0^\pi \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} b(\theta, \eta, \xi) \right)^2 \rho^{-1}(\theta) d\eta d\theta d\xi \right)^{1/2} < \infty,$$

obtemos o seguinte resultado como consequência do Teorema 3.2.1.

Corolário 3.3.1 *Seja $u(\cdot)$ a solução fraca de (3.22)-(3.23) garantida pela Proposição 3.3.1. Se $R(\cdot)\varphi(0)$ e $S(\cdot)\varphi$ são Lipschitz em $[0, b]$, então $u(\cdot)$ é uma solução semi-clássica de (3.22)-(3.23).*

Capítulo 4

Famílias “N-resolventes” e aplicações a equações integro-diferenciais do tipo neutro

Resumo

Neste capítulo estudamos a existência de uma família “N-resolvente” de operadores para um sistema integro-diferencial descrito na forma.

$$\frac{d}{dt} \left(x(t) + \int_0^t N(t-s)x(s)ds \right) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds, \quad t \in (0, a), \quad (4.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.2)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$, $t \geq 0$ são operadores lineares fechados com $D(B(t)) \supset D(A)$, $t \geq 0$, e $(N(t))_{t \geq 0}$ é uma família de operadores lineares contínuos em X . Estudamos também propriedades qualitativas da família N-resolvente e a existência e regularidade de soluções fracas para o problema não homogêneo associado. Na seção 4.4 aplicamos a teoria desenvolvida, no estudo da existência e regularidade de soluções fracas para um sistema integro-diferencial do tipo neutro com retardamento não limitado.

4.1 Preliminares

Neste seção estudamos a existência e propriedades qualitativas de uma família “N-resolvente” de operadores lineares limitados para o sistema (4.1)-(4.2). Brevemente, uma família N-resolvente é uma família de operadores em $\mathcal{L}(X)$, que se relaciona com o sistema (4.1)-(4.2) de maneira similar como um semigrupo de operadores lineares se relacionam com a equação $x'(t) = Ax(t)$.

Na seqüência usaremos a notação $(H * p)$ para representar a convolução entre funções H e p , a qual é definida por $(H * p)(t) = \int_0^t H(t-s)p(s)ds$. Adicionalmente, para um Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$ e uma função $\xi : [0, \infty) \rightarrow Z$, usaremos a notação $\widehat{\xi}$ para representar a transformada de Laplace de ξ .

Neste capítulo assumiremos as seguintes hipóteses.

- (HN₁) O operador A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em X . Em particular, assumiremos que existem constantes $M > 0$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$ tais que $\rho(A) \supset \Lambda_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| < \theta\}$ e $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ para todo $\lambda \in \Lambda_\theta$.
- (HN₂) $(N(t))_{t \geq 0}$ é uma família uniformemente limitada de operadores em $\mathcal{L}(X)$; $N(t)(D(A)) \subset D(A)$, $AN(t)x = N(t)Ax \ \forall x \in D(A)$ e $t > 0$; $N(\cdot) \in L^1([0, \infty) : \mathcal{L}(X)) \cap L^1([0, \infty) : \mathcal{L}([D(A)])$; $\widehat{N}(\lambda)x$ é absolutamente convergente para todo $x \in X$ e $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Mais ainda, existe $\alpha > 0$ e uma extensão analítica de $\widehat{N}(\lambda)$ a Λ_θ , que denotaremos por $\widehat{N}(\lambda)$, tal que $\|\widehat{N}(\lambda)\| \leq \frac{N}{|\lambda|^\alpha}$ para todo $\lambda \in \Lambda_\theta$.
- (HN₃) Para cada $t \geq 0$, $B(t) : D(B(t)) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear fechado com $D(A) \subset D(B(t))$. Também assumiremos que $B(\cdot)x$ é uma função fortemente mensurável em $(0, \infty)$ para cada $x \in D(A)$ e que existe $b(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, com $\widehat{b}(\lambda)$ absolutamente convergente para $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, tal que $\|B(t)x\| \leq b(t) \|x\|_{[D(A)]}$ para todo $t > 0$ e cada $x \in D(A)$.
- (HN₄) Existe um subconjunto $D \subset D(A^2)$ denso em $D(A)$ tal que $A(D) \subset D$, $\widehat{B}(\lambda)(D) \subset D$ e $A\widehat{B}(\lambda)(D) = \widehat{B}(\lambda)A(D)$ para todo λ tal que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

Observação 4.1.1 Como exemplo de um operador que verifica a hipótese (HN₄), considere A o operador Laplaciano com condições de Dirichlet, $B(t) = b(t)A$ e $D = C_0^\infty(\Omega)$.

Exemplo 4.1.1 Em relação a condição $(\mathbf{HN}_2)$, considere $N(t) = e^{-\omega t} t^{\alpha-1} L : X \rightarrow X$ onde $\omega > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ e L é um operador em $\mathcal{L}(X)$ que comuta com o operador A quando $x \in D(A)$. É fácil ver que $N(\cdot) \in L^1([0, \infty) : \mathcal{L}(X)) \cap L^1([0, \infty) : \mathcal{L}([D(A)])$. Além disso,

$$\|\widehat{N}(\lambda)x\| \leq \frac{\Gamma(\alpha) \|L\|}{|\lambda|^\alpha} \|x\|,$$

para todo $x \in X$.

Definição 4.1.1 Uma família de operadores lineares $(R(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{L}(X)$, é chamada operador N-resolvente para (4.1)-(4.2) se as seguintes propriedades são verificadas.

- (a) $R(0) = I$, a função $t \rightarrow R(t)x$ é contínua sobre $[0, \infty)$ para todo $x \in X$ e existem constantes η e $M \geq 1$ tais que $\|R(t)\| \leq Me^{\eta t}$ para todo $t \geq 0$.
- (b) $R(t)D(A) \subset D(A)$ para todo $t \geq 0$ e a função $R(\cdot)x \in C([0, \infty); [D(A)])$ para todo $x \in D(A)$.
- (c) Se $x \in D(A)$, então $R(\cdot)x \in C^1((0, \infty) : X)$; $R(\cdot)x + (N * R)(\cdot)x$ e $R(\cdot)x + (R * N)(\cdot)x$ são funções em $C^1([0, \infty) : X)$ e

$$\frac{d}{dt} \left(R(t)x + \int_0^t N(t-s)R(s)x ds \right) = AR(t)x + \int_0^t B(t-s)R(s)x ds, \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(R(t)x + \int_0^t R(t-s)N(s)x ds \right) = R(t)Ax + \int_0^t R(t-s)B(s)x ds, \quad (4.4)$$

para todo $t \geq 0$.

4.2 Existência de uma família N-resolvente

Nesta seção estabelecemos condições suficientes para a existência de uma família N-resolvente para (4.1)-(4.2). Previamente, é necessário introduzir algumas notações e mostrar alguns resultados preliminares.

Denotaremos por ρ_F o conjunto

$$\rho_F = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda + \lambda\widehat{N}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

e $F : \rho_F \rightarrow \mathcal{L}(X)$ será o operador definido por $F(\lambda) = (\lambda + \lambda\widehat{N}(\lambda) - A)^{-1}$. Similarmente, ρ_G será o conjunto

$$\rho_G = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda + \lambda\widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

e $G(\lambda) : \rho_G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ será o operador $G(\lambda) = (\lambda + \lambda\widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)^{-1}$.

Lema 4.2.1 *Assuma que as hipóteses $(\mathbf{HN}_1)$ e $(\mathbf{HN}_2)$ são válidas. Então existem constantes positivas r, M_1, M_2 tais que $\rho_F \supset \Lambda_{r,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\lambda| > r \text{ e } |\arg(\lambda)| < \theta\}$,*

$$\|F(\lambda)\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{r,\theta}, \quad (4.5)$$

$$F(\lambda) = R(\lambda, A)(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))^{-1}, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{r,\theta}, \quad (4.6)$$

$$\|AF(\lambda)x\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|} \|x\|_{[D(A)]}, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{r,\theta}, \quad x \in D(A), \quad (4.7)$$

$$\|AF(\lambda)\| \leq M_2, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{r,\theta}. \quad (4.8)$$

Demonstração: Sejam $\lambda \in \Lambda_\theta$ e $r = (2NM)^\frac{1}{\alpha}$. Da estimativa

$$\|\lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A)x\| \leq \frac{NM}{|\lambda|^\alpha} \|x\|,$$

temos que $\|\lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{2}$ para $|\lambda| > r$, o que implica que $(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))^{-1}$ existe e que $\|(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))^{-1}\| \leq 2$.

Por outro lado, para $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned} (\lambda + \lambda \widehat{N}(\lambda) - A)R(\lambda, A)(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))^{-1}x &= \\ (I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))(\lambda - A)R(\lambda, A)(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))^{-1}x &= \\ (I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))^{-1}x &= x, \end{aligned}$$

e que para $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))^{-1}(\lambda + \lambda \widehat{N}(\lambda) - A)x &= \\ R(\lambda, A)(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))^{-1}(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))(\lambda - A)x &= \\ R(\lambda, A)(\lambda - A)x &= x, \end{aligned}$$

o que permite concluir que $F(\lambda)$ existe para todo λ em $\Lambda_{r,\theta}$, que

$$F(\lambda) = R(\lambda, A)(I + \lambda \widehat{N}(\lambda)R(\lambda, A))^{-1}$$

e que

$$\|F(\lambda)\| \leq \frac{2M}{|\lambda|}.$$

Do anterior temos que (4.5) e (4.6) são verificadas.

Como A é um operador fechado, para $x \in D(A)$ segue que

$$AF(\lambda)x = AR(\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda \widehat{N}(\lambda) R(\lambda, A))^n x = R(\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda \widehat{N}(\lambda) R(\lambda, A))^n Ax,$$

de onde obtemos que

$$\| AF(\lambda)x \| \leq \frac{2M}{|\lambda|} \| x \|_{[D(A)]}.$$

Finalmente, da definição de $F(\lambda)$ e das propriedades anteriores segue que

$$\begin{aligned} \| AF(\lambda) \| &= \| AR(\lambda, A)(I + \lambda \widehat{N}(\lambda) R(\lambda, A))^{-1} \| \\ &= \| \lambda R(\lambda, A)(I + \lambda \widehat{N}(\lambda) R(\lambda, A))^{-1} \| + \| (I + \lambda \widehat{N}(\lambda) R(\lambda, A))^{-1} \| \\ &\leq 2M + 2 = M_2, \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Lema 4.2.2 *Assuma que as hipóteses $(\mathbf{HN}_1)$, $(\mathbf{HN}_2)$ e $(\mathbf{HN}_3)$ são válidas. Sejam r, M_1, M_2 as constantes garantidas no Lema 4.2.1 e suponha que $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \widehat{b}(\lambda) M_2 < 1$. Então existem constantes r_1, M_3, M_4 e M_5 tais que $\rho_G \supset \Lambda_{r_1, \theta}$*

$$\| G(\lambda) \| \leq \frac{M_3}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}, \quad (4.9)$$

$$G(\lambda) = F(\lambda)(I - \widehat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1}, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}, \quad (4.10)$$

$$\| AG(\lambda)x \| \leq \frac{M_4}{|\lambda|} \| x \|_{[D(A)]}, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}, \quad x \in D(A), \quad (4.11)$$

$$\| AG(\lambda) \| \leq M_5, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}. \quad (4.12)$$

Demonstração: Sejam $\lambda \in \Lambda_{r, \theta}$ e $x \in X$. Do Lema 4.2.1 vemos que

$$\begin{aligned} \| \widehat{B}(\lambda)F(\lambda)x \| &\leq \widehat{b}(\lambda)(\| F(\lambda)x \|_{[D(A)]}) \\ &\leq \widehat{b}(\lambda)(\| AF(\lambda)x \| + \| F(\lambda)x \|) \\ &\leq \widehat{b}(\lambda)(M_2 + \frac{M_1}{|\lambda|}) \| x \|. \end{aligned}$$

Como $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \widehat{b}(\lambda) M_2 < 1$, deduzimos a existência de $\delta \in (0, 1)$ e de $r_1 > r$ tais que $\widehat{b}(\lambda)(M_2 + \frac{M_1}{|\lambda|}) \leq \delta$ se $|\lambda| > r_1$. Isto implica que o operador $(I - \widehat{B}(\lambda)F(\lambda))$ é inversível e que $\| (I - \widehat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \delta}$ para $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$.

Por outro lado, para $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned} (\lambda + \lambda\hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A)F(\lambda)(I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1}x &= \\ (I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))(\lambda + \lambda\hat{N}(\lambda) - A)F(\lambda)(I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1}x &= \\ (I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))(I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1}x &= x, \end{aligned}$$

e que quando $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} F(\lambda)(I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1}(\lambda + \lambda\hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A)x &= \\ F(\lambda)(I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1}(I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))(\lambda + \lambda\hat{N}(\lambda) - A)x &= \\ F(\lambda)(\lambda + \lambda\hat{N}(\lambda) - A)x &= x. \end{aligned}$$

Portanto, o operador $(\lambda + \lambda\hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A)$ possui inversa contínua para $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$, a qual é dada por $G(\lambda) = F(\lambda)(I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1}$. Além disso, como $F(\lambda)(X) \subset D(A)$, temos que $G(\lambda)$ assume valores em $D(A)$ e que

$$\begin{aligned} \|G(\lambda)\| &\leq \|F(\lambda)\| \| (I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1} \| \\ &\leq \frac{2M_1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \delta} \\ &\leq \frac{M_3}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Do anterior vemos que (4.9)-(4.10) são verificadas.

Vejamos agora que (4.11) e (4.12) também são válidas. Sejam $x \in D(A)$ e $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$. Observe que quando $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$ temos que $M_2\hat{b}(\lambda) < 1$ e $\hat{b}(\lambda)(M_2 + \frac{M_1}{|\lambda|}) \leq \delta$. Como consequência,

$$\begin{aligned} \|AG(\lambda)x\| &\leq \|AF(\lambda)(I - \hat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1}x\| \\ &\leq \|AF(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{B}(\lambda)F(\lambda))^n x\| \\ &\leq \|AF(\lambda)x\| + \|AF(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{B}(\lambda)F(\lambda))^n x\| \\ &\leq \|AF(\lambda)x\| + \|AF(\lambda)\| \sum_{n=1}^{\infty} \|(\hat{B}(\lambda)F(\lambda))^n x\| \\ &\leq \frac{M_1}{|\lambda|} \|x\|_{[D(A)]} + M_2\hat{b}(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \left((M_2 + \frac{M_1}{|\lambda|})\hat{b}(\lambda) \right)^{n-1} \|F(\lambda)x\|_{[D(A)]} \\ &\leq \frac{M_1}{|\lambda|} \|x\|_{[D(A)]} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} \frac{2M_1}{|\lambda|} \|x\|_{[D(A)]} \\ &\leq \frac{M_4}{|\lambda|} \|x\|_{[D(A)]}. \end{aligned}$$

Finalmente, da definição de $G(\lambda)$ e (4.8) vemos que para $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$,

$$\|AG(\lambda)\| = \|AF(\lambda)(I + \widehat{B}(\lambda)F(\lambda))^{-1}\| \leq M_2 \frac{1}{1-\delta} = M_5,$$

o que permite concluir a demonstração. ■

Observação 4.2.1 *Antes de continuar é necessario enfatizar que a constante r_1 do Lema 4.2.2 foi escolhida de forma que $\widehat{b}(\lambda)M_2 < 1$ para todo $|\lambda| > r_1$ e que esta escolha é básica para a obtenção do resultado. Também observamos que o operador $\lambda \rightarrow G(\lambda)$ é escrito como o produto de operadores analíticos se $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$. Como as conseqüências do Lema 4.2.2 são de fundamental importância no que resta deste trabalho, achamos conveniente introduzir formalmente as seguintes hipóteses.*

(HN₅) Seja $M_2 = 2M + 2$ a constante garantida pelo Lema 4.2.1 e $r_0 > r_1$. Então $\widehat{b}(\lambda)M_2 < 1$ para todo $|\lambda| \geq r_0$.

(HN₆) Os operadores $G(\lambda)$ e $AG(\lambda)$ são analíticos para todo $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$. Se $x \in D$, então $AG(\lambda)x = G(\lambda)Ax$ para todo $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$.

No que segue, usaremos a técnica de transformada de Laplace para definir uma família N-resolvente $(R(t))_{t \geq 0}$ para (4.1)-(4.2). Também mostraremos que $(R(t))_{t \geq 0}$ possui uma extensão analítica a uma região apropriada do plano complexo.

No que segue deste capítulo, assumiremos que as condições (HN₁)-(HN₆) são verificadas e que $M_1, \dots, M_5$ são as constantes dos Lemas 4.2.1, 4.2.2. No resto da seção, ϕ será um número fixo em $(\frac{\pi}{2}, \theta)$ e $r_0 > r_1$. Para $r > 0$, $\Gamma(r) = \Gamma_r^1 \cup \Gamma_r^2 \cup \Gamma_r^3$ será a curva dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_r^1 &= \{\gamma e^{i\phi} : \gamma \geq r\}, \\ \Gamma_r^2 &= \{re^{i\xi} : -\phi \leq \xi \leq \phi\}, \\ \Gamma_r^3 &= \{-\gamma e^{-i\phi} : \gamma \leq -r\}. \end{aligned}$$

onde cada curva $\Gamma_r^i, i = 1, 2, 3$ é orientada de forma que $Im(\lambda)$ é crescente em Γ_r^1 e Γ_r^3 .

Usando as notações anteriores, definimos a família de operadores $(R(t))_{t \geq 0}$ por

$$R(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} (\lambda + \lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)^{-1} d\lambda, & t > 0, \\ Id, & t = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Nos próximos Lemas, mostraremos que $(R(t))_{t \geq 0}$ é uma família N-resolvente para (4.1)-(4.2).

Lema 4.2.3 *Suponha que $(\mathbf{HN}_1)$ – $(\mathbf{HN}_6)$ são satisfeitas. Então, $R(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Se $x \in X$, do Lema 4.2.2 segue que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} G(\lambda) x d\lambda \right\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} |e^{\lambda t}| \frac{M_3}{|\lambda|} |d\lambda| \|x\| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} |e^{\lambda t}| \frac{M_3}{|\lambda|} |d\lambda| \|x\| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} e^{-rt \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} \frac{M_3}{r} dr \|x\| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} e^{r_0 t \cos \xi} \frac{M_3}{r_0} r_0 d\xi \|x\| \\ &\leq \left(\frac{M_3}{\pi r_0} \frac{e^{-r_0 t \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}}{\operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} + \frac{M_3}{\pi} e^{r_0 t \phi} \right) \|x\|, \end{aligned}$$

o que prova que $R(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \geq 0$, pois $R(0) = I$. ■

Lema 4.2.4 *Se $(\mathbf{HN}_1)$ – $(\mathbf{HN}_6)$ são satisfeitas, então $(R(t))_{t \geq 0}$ é família uniformemente limitada em $\mathcal{L}(X)$.*

Demonstração: Estudaremos inicialmente a limitação de $R(t)$ para $t \geq 1$. Sejam $x \in X$ e $t \geq 1$. Fazendo a mudança de coordenada $\lambda t = \gamma$, é fácil ver que

$$R(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(tr_0)} t^{-1} e^{\gamma} G(\gamma t^{-1}) x d\gamma.$$

Mais ainda, como $G(\cdot)$ é analítica em $\Lambda_{r_1, \theta}$, do Teorema de Cauchy podemos concluir que

$$R(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} t^{-1} e^{\gamma} G(\gamma t^{-1}) x d\gamma.$$

Nestas condições, do Lema 4.2.2 obtemos que

$$\begin{aligned} \|R(t)x\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} |e^{\gamma}| \frac{M_3}{|\gamma|} |d\gamma| \|x\| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} |e^{\gamma}| \frac{M_3}{|\gamma|} |d\gamma| \|x\| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} e^{-r \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} \frac{M_3}{r} dr \|x\| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} e^{r_0 \cos \xi} \frac{M_3}{r_0} r_0 d\xi \|x\| \\ &\leq \left(\frac{M_3}{\pi r_0} \frac{e^{-r_0 \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}}{\operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} + \frac{M_3}{\pi} e^{r_0 \phi} \right) \|x\|. \end{aligned}$$

O anterior mostra que $\{R(t) : t \geq 1\}$ é limitado em $\mathcal{L}(X)$.

Estudemos agora o caso onde $t \in (0, 1)$. Como $t < 1$, segue que $t^{-1}r_0 > r_0$. Usando como antes a analiticidade de $G(\cdot)$ e o Teorema de Cauchy, segue que

$$R(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(t^{-1}r_0)} e^{\lambda t} G(\lambda) x d\lambda.$$

Como consequência,

$$\begin{aligned}
\| R(t)x \| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{t^{-1}r_0}^{\infty} |e^{\lambda t}| \frac{M_3}{|\lambda|} |d\lambda| \|x\| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} |e^{\lambda t}| \frac{M_3}{|\lambda|} |d\lambda| \|x\| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{t^{-1}r_0}^{\infty} e^{-rtsen(\phi-\frac{\pi}{2})} \frac{M_3}{r} dr \|x\| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} e^{t^{-1}r_0t \cos \xi} \frac{M_3}{t^{-1}r_0} t^{-1}r_0 d\xi \|x\| \\
&\leq \left(\frac{M_3}{\pi r_0} \frac{e^{-r_0sen(\phi-\frac{\pi}{2})}}{sen(\phi-\frac{\pi}{2})} + \frac{M_3}{\pi} e^{r_0\phi} \right) \|x\|,
\end{aligned}$$

o que prova que $\{R(t) : t \in (0, 1)\}$ é limitado em $\mathcal{L}(X)$. Agora a demonstração está completa.

■

Lema 4.2.5 *Se $(\mathbf{HN}_1)$ - $(\mathbf{HN}_6)$ são válidas, então $R(\cdot)x \in C([0, \infty) : X)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: Sejam $t > 0$, $x \in X$. Observe que para $r_t > r_0$ e $s > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda : |\lambda| \geq r_t\}} e^{\lambda s} G(\lambda) x d\lambda \right\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_t}^{\infty} |e^{\lambda s}| \frac{M_3}{|\lambda|} |d\lambda| \|x\| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_t}^{\infty} e^{-rsen(\phi-\frac{\pi}{2})} \frac{M_3}{r} dr \|x\| \\
&\leq \frac{M_3}{\pi r_t s sen(\phi-\frac{\pi}{2})} \|x\|.
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher $r_t > r_0$ tal que

$$\left\| \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda : |\lambda| \geq r_t\}} e^{\lambda s} G(\lambda) d\lambda \right\| < \epsilon, \quad (4.14)$$

para todo $s \in [\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}]$. Por outro lado, como $e^{\lambda s} G(\lambda) \rightarrow e^{\lambda t} G(\lambda)$ quando $s \rightarrow t$, uniformemente sobre $\Gamma(r_0) \cap \{\lambda : |\lambda| \leq r_t\}$, existe $\delta_t > 0$ tal que

$$\left\| \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda : |\lambda| \leq r_t\}} e^{\lambda s} G(\lambda) d\lambda - \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda : |\lambda| \leq r_t\}} e^{\lambda t} G(\lambda) d\lambda \right\| < \epsilon, \quad (4.15)$$

se $|t - s| < \delta_t$. De (4.14) e (4.15) concluímos que $\|R(t) - R(s)\|_{\mathcal{L}(X)} < 2\epsilon$ se $|t - s| < \delta_t$, o que em particular prova que $R(\cdot)x$ é contínua se $t > 0$.

Mostraremos agora que $R(\cdot)x$ é contínua em zero. Estudemos inicialmente o caso onde $x \in D(A)$. Se $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$, temos que $G(\lambda)(\lambda + \lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A)x = x$, e então

$$G(\lambda)x - \lambda^{-1}x = \lambda^{-1}G(\lambda)(\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A)x$$

e

$$\begin{aligned}
R(t)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} G(\lambda) x d\lambda - x \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \left(e^{\lambda t} G(\lambda) x - \lambda^{-1} e^{\lambda t} x \right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A) x d\lambda.
\end{aligned}$$

Pelas hipóteses $(\mathbf{HN}_1)$ - $(\mathbf{HN}_3)$ e o Lema 4.2.2 temos que

$$\| e^{\lambda t} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x \| \leq M_3 |e^{\lambda t}| \left(-\frac{N}{|\lambda|^{1+\alpha}} + \frac{\widehat{b}(\lambda)}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \|x\|_{[D(A)]},$$

e o lado direito da desigualdade acima é integrável independentemente de t , por uma simples aplicação do Teorema da Convergência dominada de Lebesgue podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (R(t)x - x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x d\lambda.$$

Mostraremos agora que o termo a direita da última desigualdade é zero. Para isto, considere os caminhos $C^n = \{ne^{i\xi} : \phi \leq \xi \leq -\phi\}$ e $\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\} \cup C^n$ orientados de maneira de preservar a orientação em $\Gamma(r_0)$. Do Teorema de Cauchy, para cada $n > r_0$, temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\} \cup C^n} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x d\lambda = 0.$$

Por outro lado, das hipóteses $(\mathbf{HN}_1)$ - $(\mathbf{HN}_3)$ e do Lema 4.2.2 obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{C^n} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x d\lambda \right\| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} \frac{M_3 N}{n^{1+\alpha}} n d\xi \|x\| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} \frac{M_3}{M_2 n^2} n d\xi \|x\|_{[D(A)]} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} \frac{M_3}{n^2} n d\xi \|x\|_{[D(A)]}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^n} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x d\lambda \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Assim vemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x d\lambda \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\}} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x d\lambda \\ & \quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^n} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x d\lambda \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\} \cup C^n} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x d\lambda = 0, \end{aligned}$$

o que prova que $R(t)x \rightarrow x$ se $t \rightarrow 0^+$ para todo $x \in D(A)$.

Finalmente, do Lema 4.2.4 sabemos que $(R(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente limitada sobre $[0, \infty)$, o que junto a densidade de $D(A)$ em X permite concluir que $R(\cdot)x$ é contínua em zero para todo $x \in X$. ■

Nos próximos Lemas estudamos a diferenciabilidade de $R(\cdot)x$.

Lema 4.2.6 *Se as condições (HN₁)-(HN₆) são válidas, então a função $R(\cdot)x \in C^1((0, \infty) : X)$ para todo $x \in X$ e*

$$R'(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} G(\lambda) x d\lambda.$$

Demonstração: Para $x \in X, h > 0$ e $t > 0$,

$$\frac{R(t+h)x - R(t)x}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} e^{\lambda t} G(\lambda) x d\lambda.$$

É fácil mostrar que $\lambda e^{\lambda t}$ é integrável sobre $\Gamma(r_0)$. Este fato, junto a estimativa

$$\left\| \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} e^{\lambda t} G(\lambda) \right\| \leq |\lambda| e^{\lambda t} \left| \frac{M_3}{|\lambda|} \right|,$$

permite concluir por uma aplicação do Teorema da convergência dominada que $R(\cdot)x$ é diferenciável em t e que

$$R'(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} G(\lambda) x d\lambda. \quad (4.16)$$

Usando a estimativa

$$\left\| \lambda e^{\lambda s} G(\lambda) \right\| \leq |\lambda| e^{\lambda s} \left| \frac{M_3}{|\lambda|} \right|,$$

e procedendo como na primeira parte da prova do Lema 4.2.5, podemos mostrar a continuidade de $R'(\cdot)$ sobre $(0, \infty)$, em particular a continuidade de $R'(\cdot)x$ sobre $(0, \infty)$. Para não estender o texto, omitiremos esta parte da prova. A demonstração está completa. ■

As provas dos seguintes Lemas são similares as provas dos Lemas 4.2.4, 4.2.5. Por isto, serão resumidas convenientemente. Como sempre, assumiremos nos próximos resultados que (HN₁)-(HN₆) são satisfeitas.

Lema 4.2.7 *A família $(R(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{L}([D(A)])$.*

Demonstração: Para $x \in D(A)$ e $t > 0$ definamos o operador $(S(t))_{t > 0}$ por

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} A G(\lambda) x d\lambda.$$

Para $t \geq 1$ considere a mudança de coordenada $\lambda t = \gamma$. É fácil ver que

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(tr_0)} t^{-1} e^{\gamma} A G(\gamma t^{-1}) x d\gamma.$$

Como $AG(\cdot)$ é analítica em $\Lambda_{r_1, \theta}$, pelo Teorema de Cauchy podemos concluir que

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} t^{-1} e^{\gamma} A G(\gamma t^{-1}) x d\gamma.$$

Nestas condições, do Lema 4.2.2 obtemos que

$$\begin{aligned} \|S(t)x\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} |e^{\gamma}| \frac{M_4}{|\gamma|} |d\gamma| \|x\|_{[D(A)]} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} |e^{\gamma}| \frac{M_4}{|\gamma|} |d\gamma| \|x\|_{[D(A)]} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} e^{-r \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} \frac{M_4}{r} dr \|x\|_{[D(A)]} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} e^{r_0 \cos \xi} \frac{M_4}{r_0} r_0 d\xi \|x\|_{[D(A)]} \\ &\leq \left(\frac{M_4}{\pi r_0} \frac{e^{-r_0 \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}}{\operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} + \frac{M_4}{\pi} e^{r_0 \phi} \right) \|x\|_{[D(A)]}. \end{aligned}$$

Segue do anterior temos que $\{S(t) : t \geq 1\}$ é limitado em $\mathcal{L}([D(A)] : X)$.

Estudemos agora o caso onde $t \in (0, 1)$. Observe que $t^{-1}r_0 > r_0$. Usando como antes a analiticidade de $AG(\cdot)$ e o Teorema de Cauchy segue que

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(t^{-1}r_0)} e^{\lambda t} G(\lambda) x d\lambda.$$

Como consequência,

$$\begin{aligned} \|S(t)x\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{t^{-1}r_0}^{\infty} |e^{\lambda t}| \frac{M_4}{|\lambda|} |d\lambda| \|x\|_{[D(A)]} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} |e^{\lambda t}| \frac{M_4}{|\lambda|} |d\lambda| \|x\|_{[D(A)]} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{t^{-1}r_0}^{\infty} e^{-rt \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} \frac{M_4}{r} dr \|x\|_{[D(A)]} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} e^{t^{-1}r_0 t \cos \xi} \frac{M_4}{t^{-1}r_0} t^{-1}r_0 d\xi \|x\|_{[D(A)]} \\ &\leq \left(\frac{M_4}{\pi r_0} \frac{e^{-r_0 \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}}{\operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} + \frac{M_4}{\pi} e^{r_0 \phi} \right) \|x\|_{[D(A)]}, \end{aligned}$$

para $t > 0$ e $x \in D(A)$. Isto, mostra que a família de operadores $(S(t))_{t>0}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{L}([D(A)] : X)$. Usando agora que A é fechado, obtemos que $AR(t) = S(t)$ e assim que $(R(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{L}([D(A)])$. A prova está agora completa. ■

Lema 4.2.8 $R(\cdot)x \in C([0, \infty) : [D(A)])$ para todo $x \in D(A)$.

Demonstração: Procedendo como no Lema 4.2.5 podemos mostrar que $AR(\cdot)x$ é contínua sobre $(0, \infty)$ para todo $x \in D(A)$.

Para analisar a continuidade no zero, estudaremos inicialmente o caso onde $x \in D$, sendo D o conjunto introduzido em **(HN₄)**. Neste caso,

$$G(\lambda)x - \lambda^{-1}x = \lambda^{-1}G(\lambda)(\lambda\hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A)x,$$

o que do Lema 4.2.2 e **(HN₆)** implica que

$$\begin{aligned} &\|e^{\lambda t} \lambda^{-1} AG(\lambda)(\lambda\hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A)x\| \\ &\leq M_3 |e^{\lambda t}| \left(\frac{N}{|\lambda|^{1+\alpha}} \|x\|_{[D(A)]} + \frac{\hat{b}(\lambda) + 1}{|\lambda|^2} (\|x\|_{[D(A)]} + \|Ax\|_{[D(A)]}) \right). \quad (4.17) \end{aligned}$$

Agora, como consequência de que a função do lado direito em (4.17) é integrável sobre $\Gamma(r_0)$ independentemente de t , segue do Teorema da convergência dominada que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} (AR(t)x - Ax) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} (AG(\lambda)x - \lambda^{-1}Ax) d\lambda \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} \lambda^{-1} AG(\lambda) (\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A) x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda^{-1} AG(\lambda) (\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A) x d\lambda. \end{aligned}$$

Assim, para mostrar que a propriedade é válida para $x \in D$, é suficiente provar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda^{-1} AG(\lambda) (\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A) x d\lambda = 0.$$

Para mostrar isto, vamos proceder como na prova do Lema 4.2.5. Sejam os caminhos $C^n = \{ne^{i\xi} : -\phi \leq \xi \leq \phi\}$ e $\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\} \cup C^n$ orientados de forma de preservar a orientação original em $\Gamma(r_0)$. Observamos que da desigualdade (4.17) segue facilmente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^n} \lambda^{-1} G(\lambda) (\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A) x d\lambda = 0.$$

Agora, da analiticidade de $\lambda^{-1}G(\lambda)(\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A)x$ sobre $\Lambda_{r_1, \theta}$ e o Teorema de Cauchy, vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\} \cup C^n} \lambda^{-1} AG(\lambda) (\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A) x d\lambda \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\}} \lambda^{-1} AG(\lambda) (\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A) x d\lambda \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^n} \lambda^{-1} AG(\lambda) (\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A) x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-1} AG(\lambda) (\lambda \hat{N}(\lambda) - \hat{B}(\lambda) - A) x d\lambda, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t \downarrow 0} AR(t)x = Ax$ para todo $x \in D$.

Finalmente, como D é denso em $[D(A)]$ e $(R(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{L}([D(A)])$, concluímos que a propriedade é válida para todo $x \in D(A)$. A prova está completa. ■

Lema 4.2.9 $\hat{R}(\lambda)x = G(\lambda)x$ para todo $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$ e todo $x \in X$.

Demonstração: Da definição de $(R(t))_{t \geq 0}$, vemos que

$$\begin{aligned} \hat{R}(\lambda)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\gamma t} G(\gamma)x d\gamma dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \int_0^\infty e^{-(\lambda - \gamma)t} G(\gamma)x dt d\gamma \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} (\lambda - \gamma)^{-1} G(\gamma)x d\gamma. \end{aligned}$$

Se as curvas $C^n = \{ne^{i\xi} : \phi \leq \xi \leq \phi\}$ e $\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\} \cup C^n$, $n > r_0$, são orientadas de forma de manter a orientação em $\Gamma(r_0)$, da Teoria clássica de funções analíticas obtemos que

$$G(\lambda)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\} \cup C^n} (\lambda - \gamma)^{-1} G(\gamma)x \, d\gamma, \quad \lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}, |\lambda| < n.$$

Por outro lado, da estimativa

$$\left\| \int_{C^n} (\lambda - \gamma)^{-1} G(\gamma)x \, d\gamma \right\| \leq \int_{\phi}^{-\phi} \frac{M_3}{|ne^{i\xi}|} \frac{|ne^{i\xi} d\xi|}{|\lambda - ne^{i\xi}|} \|x\| \leq 2\phi \|x\| \frac{M_3}{n - |\lambda|},$$

concluimos que $\frac{1}{2\pi i} \int_{C^n} (\lambda - \gamma)^{-1} G(\gamma)x \, d\gamma \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Das observações anteriores, segue que para $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$

$$\begin{aligned} \widehat{R}(\lambda)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} (\lambda - \gamma)^{-1} G(\gamma)x \, d\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0) \cap \{\lambda; |\lambda| \leq n\}} (\lambda - \gamma)^{-1} G(\gamma)x \, d\gamma \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^n} (\lambda - \gamma)^{-1} G(\gamma)x \, d\gamma \\ &= G(\lambda)x. \end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{R}(\lambda)x = G(\lambda)x$ para todo $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$ e todo $x \in X$. ■

Lema 4.2.10 *A família $(R(t))_{t \geq 0}$ satisfaz as equações (4.3)-(4.4). Mais ainda, se $x \in D(A)$, então $R(\cdot)x + (R * N)(\cdot)x \in C^1([0, \infty) : X)$ e $R(\cdot)x + (N * R)(\cdot)x \in C^1([0, \infty) : X)$.*

Demonstração: Sejam $x \in D(A)$ e $M > 0$ tal que $\|R(t)\| \leq M$ para todo $t \geq 0$.

Mostraremos inicialmente que a função $R(\cdot)$ verifica (4.4) para $t > 0$. Usando que a integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} x d\lambda = 0$, dos Lemas 4.2.5, 4.2.6 e 4.2.9, e do fato que as funções $\lambda e^{\lambda} G(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x$ e $\lambda e^{\lambda} G(\lambda) \widehat{B}(\lambda)x$ são integráveis sobre $\Gamma(r_0)$, segue que

$$\begin{aligned} R'(t)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda e^{\lambda t} G(\lambda)x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} [x - G(\lambda)(\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)x] d\lambda \\ &= R(t)Ax - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{B}(\lambda)x d\lambda. \end{aligned}$$

Assim, para mostrar que se verifica (4.4), é suficiente provar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x d\lambda = \frac{d}{dt} \int_0^t R(t-s)N(s)x ds, \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{B}(\lambda)x d\lambda = \int_0^t R(t-s)B(s)x ds. \quad (4.19)$$

Estudemos em primeiro lugar o termo (4.18). Definamos a função $\Theta : [0, \infty) \rightarrow X$ mediante a expressão $\Theta(s) = \int_0^s R(s - \mu)N(\mu)x d\mu$. Como $N(\cdot)x \in L^1(\mathbb{R}^+ : X)$, é claro que $\Theta \in C([0, \infty) : X)$. Mais ainda, Θ é limitada sobre $[0, \infty)$ pois $\|\Theta(s)\| \leq M \|N\|_{L^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{L}(X))}$ para todo $s \geq 0$. Seja agora $\xi(s) = \int_0^s \Theta(\mu)d\mu$. Nestas condições, a Transformada de Laplace-Stieltjes de ξ existe para $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ e

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} d\xi(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Theta(t) dt = \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x.$$

Agora, pelo Teorema da Transformada de Laplace inversa, veja [48, Theorem 6.3.1], e da definição de $\xi(\cdot)$, vemos que para $\gamma > r_0$

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\xi(t) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x \frac{d\lambda}{\lambda},$$

de onde obtemos que

$$\frac{d}{dt} \Theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x d\lambda.$$

Conseqüentemente, para finalizar esta parte da demonstração é suficiente provar

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x d\lambda. \quad (4.20)$$

Para mostrar (4.20), introduzimos as curvas

$$\begin{aligned} \gamma_1^n &= \{s + in : -n \leq s \leq \gamma\}, \\ \gamma_2^n &= \{-s - in : -n \leq s \leq \gamma\}, \\ \gamma^n &= \{\gamma + is : -n \leq s \leq n\}. \end{aligned}$$

No que segue assumiremos que as curvas $\Lambda_n = \Gamma(r_0) \cap \{\lambda : |\lambda| \leq n\} \cup \gamma_1^n \cup \gamma_2^n \cup \gamma^n$, $n \in \mathbb{N}$, estão orientadas de modo de preservar a orientação em $\Gamma(r_0)$. Da analiticidade de $\lambda \rightarrow \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x$ em $\Lambda_{r_1, \theta}$ e do Teorema de Cauchy é claro que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_n} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda)x d\lambda = 0, \quad (4.21)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, usando as estimativas do Lema 4.2.2 e o fato que $\widehat{R}(\lambda) =$

$G(\lambda)$, para $\lambda \in \Lambda_{r_1, \theta}$, segue que

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\gamma_1^n} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda) x d\lambda \right\| + \left\| \int_{\gamma_2^n} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda) x d\lambda \right\| \\
& \leq 2 \int_{-n \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}^{\gamma} e^{st} \sqrt{s^2 + n^2} \frac{M_3 N}{(\sqrt{s^2 + n^2})^{1+\alpha}} \|x\| ds \\
& \leq 2 \int_{-n \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}^{\gamma} e^{st} \frac{M_3 N}{(\sqrt{s^2 + n^2})^{\alpha}} \|x\| ds \\
& \leq 2 \int_{-n \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}^{\gamma} e^{st} \frac{M_3 N}{n^{\alpha}} \|x\| ds \\
& \leq 2 \frac{M_3 N}{n^{\alpha}} \left(\frac{e^{\gamma t}}{t} - \frac{e^{-nt \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}}{t} \right) \|x\|,
\end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i^n} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda) d\lambda = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.22)$$

Agora de (4.21) e (4.22) inferimos que (4.20) é válida e assim que (4.18) é satisfeita para todo $t > 0$.

De maneira similar podemos mostrar que (4.19) é também verificada para $t > 0$. Para isto, definamos a função $\Theta_1 : [0, \infty) \rightarrow X$ por $\Theta_1(s) = \int_0^s R(s - \mu) B(\mu) x d\mu$. Como $B(\cdot)x \in L^1(\mathbb{R}^+ : X)$, quando $x \in D(A)$, é claro que $\Theta_1 \in C_b([0, \infty) : X)$ pois

$$\|\Theta_1(s)\| \leq M \|b\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|x\|_{D(A)},$$

para todo $s \geq 0$. Seja agora $\xi_1(s) = \int_0^s \Theta_1(\mu) d\mu$. Nestas condições a Transformada de Laplace-Stieltjes de ξ_1 existe para $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ e

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} d\xi_1(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Theta_1(t) dt = \widehat{R}(\lambda) \widehat{B}(\lambda) x.$$

Pelo Teorema da Transformada de Laplace inversa [48, Theorem 6.3.1] e da definição de $\xi_1(\cdot)$, vemos que para $\gamma > r_0$

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\xi_1(t) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{B}(\lambda) x \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Do anterior segue que

$$\Theta_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{B}(\lambda) x d\lambda.$$

Para finalizar esta parte da demonstração mostraremos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{B}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{B}(\lambda) d\lambda. \quad (4.23)$$

Para isto, considere as curvas $\gamma_1^n, \gamma_2^n, \gamma^n$ e Λ_n introduzidas anteriormente. Da analiticidade de $\lambda \rightarrow e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{B}(\lambda)$ em $\Lambda_{r_1, \theta}$ e do Teorema de Cauchy concluímos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_n} \lambda e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{N}(\lambda) x d\lambda = 0, \quad (4.24)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, procedendo de forma semelhante ao o caso anterior inferimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i^n} e^{\lambda t} \widehat{R}(\lambda) \widehat{B}(\lambda) d\lambda = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.25)$$

Agora de (4.24) e (4.25) inferimos que (4.23) é válida e assim que (4.18) é satisfeita para $t > 0$.

O passo feito anteriormente mostra que $(R(t))_{t \geq 0}$ verifica a equação (4.4) para todo $t > 0$.

Vejamos agora que (4.3) também é válida. Usando que

$$\lambda G(\lambda)x = [I - (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)G(\lambda)]x,$$

e a integrabilidade das funções $\lambda \rightarrow e^{\lambda t} G(\lambda) Ax$, $\lambda \rightarrow \lambda e^{\lambda t} \widehat{N}(\lambda) \widehat{R}(\lambda)x$ e $\lambda \rightarrow e^{\lambda t} \widehat{B}(\lambda) \widehat{R}(\lambda)x$ sobre $\Gamma(r_0)$, vemos que

$$\begin{aligned} R'(t)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda e^{\lambda t} G(\lambda) x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} [x - (\lambda \widehat{N}(\lambda) - \widehat{B}(\lambda) - A)G(\lambda)x] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} G(\lambda) Ax d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda e^{\lambda t} \widehat{N}(\lambda) \widehat{R}(\lambda)x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} \widehat{B}(\lambda) \widehat{R}(\lambda)x d\lambda. \end{aligned}$$

Procedendo como antes, podemos mostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} \lambda e^{\lambda t} \widehat{N}(\lambda) \widehat{R}(\lambda)x d\lambda = \frac{d}{dt} \int_0^t N(t-s)R(s)x ds,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\lambda t} \widehat{B}(\lambda) \widehat{R}(\lambda)x d\lambda = \int_0^t B(t-s)R(s)x ds,$$

o que permite provar (4.3). Como os detalhes são extensos e muito similares aos anteriores, omitiremos esta parte da demonstração.

É fácil ver dos passos anteriores, que as funções $\Gamma_1(t) = R(t)x + \int_0^t R(t-s)N(s)x ds$ e $\Gamma_2(t) = R(t)x + \int_0^t N(t-s)R(s)x ds$ são de classe C^1 sobre $(0, \infty)$. Mostraremos agora que Γ_1

é continuamente diferenciável em zero e que (4.4) se verifica em zero. Para começar, observe que para $\epsilon > 0$, existe $a > 0$ tal que

$$\| R(t)Ax + \int_0^t R(t-s)N(s)xds - Ax \| \leq \epsilon, \quad t \in [0, a]. \quad (4.26)$$

Se $\zeta \in X'$, é claro que $\zeta \circ \Gamma_1 \in C([0, a] : \mathbb{R}) \cap C^1((0, a) : \mathbb{R})$. Assim, pelo Teorema do valor médio de Lagrange, para $t \in (0, a)$ existe $c_{\zeta, t} \in (0, t)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\zeta \circ \Gamma_1(t) - \zeta \circ \Gamma_1(0)}{t} &= \frac{d}{dt}(\zeta \circ \Gamma_1)|_{t=c_{\zeta, t}} \\ &= \zeta\left(\frac{d}{dt}\Gamma_1|_{t=c_{\zeta, t}}\right) \\ &= \zeta(R(c_{\zeta, t})Ax + \int_0^{c_{\zeta, t}} R(c_{\zeta, t}-s)N(s)xds). \end{aligned}$$

O anterior, junto com (4.26), implica que

$$\left| \frac{\zeta \circ \Gamma_1(t) - \zeta \circ \Gamma_1(0)}{t} - \zeta(Ax) \right| \leq \|\zeta\| \|R(c_{\zeta, t})Ax + \int_0^{c_{\zeta, t}} R(c_{\zeta, t}-s)N(s)xds - Ax\|,$$

o que mostra que

$$\left\| \frac{\Gamma_1(t) - \Gamma_1(0)}{t} - Ax \right\| = \sup_{\|\zeta\| \leq 1} \left| \frac{\zeta \circ \Gamma_1(t) - \zeta \circ \Gamma_1(0)}{t} - \zeta(Ax) \right| \leq \epsilon,$$

para todo $t \in [0, a]$. Por tanto, $\Gamma_1(\cdot)$ é diferenciável em 0 e $\lim_{t \downarrow 0} \frac{d}{dt}\Gamma_1(t) = \frac{d}{dt}\Gamma_1(t)|_{t=0} = Ax$, o que implica que $\Gamma_1(\cdot) \in C^1([0, \infty); X)$ e que (4.4) também se verifica em $t = 0$.

A prova que $\Gamma_2(\cdot) \in C^1([0, \infty); X)$ e que (4.3) é válida em $t = 0$ é similar à anterior e por isso será omitida. A demonstração está agora completa. ■

Lema 4.2.11 *A família $(R(t))_{t \geq 0}$ possui uma extensão analítica na região*

$$\Lambda_\delta = \{t \in \mathbb{C} : |\arg(t)| < \delta\} \setminus \{0\}, \quad \text{onde } 0 < \delta < \phi - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Demonstração: Primeiro mostraremos que a família de operadores definida em (4.13) converge em $\mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \Lambda_\delta$.

Para $\lambda \in \Gamma_{r_0}^1$, temos que $\lambda t = |\lambda t| e^{i(\arg(\lambda) + \arg(t))}$, onde $\arg(\lambda) = \phi$ e $-\delta < \arg(t) < \delta$. Assim segue que

$$\begin{aligned} \phi - \delta &< \arg(t) + \arg(\lambda) < \phi + \delta \Rightarrow \\ \phi - \delta + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} &< \arg(t) + \arg(\lambda) < \phi + \delta + \left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) - \left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \frac{\pi}{2} + \epsilon &< \arg(t) + \arg(\lambda) < \frac{3\pi}{2} - \epsilon, \end{aligned}$$

onde $\epsilon = \phi - \frac{\pi}{2} - \delta > 0$. Como $\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon) = \cos(\frac{3\pi}{2} - \epsilon) = -\sin(\epsilon)$, obtemos que

$$|e^{\lambda t}| \leq e^{|\lambda t| \cos(\arg(t) + \arg(\lambda))} \leq e^{|\lambda t| \cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)} = e^{-|\lambda t| \sin(\epsilon)}. \quad (4.27)$$

Para $\lambda \in \Gamma_{r_0}^3$ vemos que $\lambda t = |\lambda t| e^{i(-\arg(\lambda) + \arg(t))}$, onde $\arg(\lambda) = \phi$ e $-\delta < \arg(t) < \delta$. Logo obtemos que $-\frac{3\pi}{2} + \epsilon < \arg(t) - \arg(\lambda) < -\frac{\pi}{2} - \epsilon$, e que $\cos(-\frac{3\pi}{2} + \epsilon) = \cos(-\frac{\pi}{2} - \epsilon) = -\sin(\epsilon)$. Conseqüentemente,

$$|e^{\lambda t}| \leq e^{|\lambda t| \cos(\arg(t) - \arg(\lambda))} \leq e^{|\lambda t| \cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon)} = e^{-|\lambda t| \sin(\epsilon)}. \quad (4.28)$$

Quando $\lambda \in \Gamma_{r_0}^2$, é fácil ver que

$$|e^{\lambda t}| \leq e^{|t| r_0 \cos(\phi + \arg(t))} \leq e^{|t| r_0}. \quad (4.29)$$

Procedendo agora como no Lema 4.2.3, usando (4.27)-(4.29) podemos mostrar que a família de operador $(R(t))_{t \in \Lambda_\delta} \in \mathcal{L}(X)$. Mais ainda, usando as idéias da prova do Lema 4.2.6 podemos mostrar que $R'(\cdot) \in C(\Lambda_\delta, \mathcal{L}(X))$, o que permite concluir a prova. ■

Como conseqüência dos Lemas 4.2.3-4.2.11, estabelecemos sem demonstração, o principal resultado desta seção.

Teorema 4.2.1 *Se as condições (HN₁)-(HN₆) são satisfeitas, então a família $(R(t))_{t \geq 0}$ é uma família N-resolvente analítica para (4.1)-(4.2).*

Corolário 4.2.1 *Suponha que as condições (HN₁)-(HN₆) são satisfeitas. Então existem constantes positivas C_1, C_2 tais que*

$$\|R'(t)x\| \leq (C_1 + C_2 t^{\alpha-1}) \|x\|_{[D(A)]}, \quad (4.30)$$

para todo $x \in D(A)$.

Demonstração: Sejam $t > 0$ e $x \in D(A)$. Como $\lambda G(\lambda)x = G(\lambda)(A - \lambda \widehat{N}(\lambda) + \widehat{B}(\lambda))x$, do Lema 4.2.6 segue que

$$R'(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} G(\lambda)(A - \lambda \widehat{N}(\lambda) + \widehat{B}(\lambda))x d\lambda.$$

Para estabelecer a desigualdade (4.30), estudaremos os casos $t \in (0, 1)$ e $t \geq 1$. Assuma primeiramente que $t \in (0, 1)$. Se M_3 é a constante garantida pelo Lema 4.2.2, da condição

(HN₅) e da analiticidade de $\lambda \rightarrow G(\lambda)(A - \lambda\hat{N}(\lambda) + \hat{B}(\lambda))$ obtemos que

$$\begin{aligned}
& \| R'(t)x \| \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(t^{-1}r_0)} e^{|\lambda|} \| G(\lambda)(A - \lambda\hat{N}(\lambda) + \hat{B}(\lambda))x \| |d\lambda| \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(t^{-1}r_0)} e^{|\lambda|} \frac{M_3}{|\lambda|} (I + |\lambda| \frac{N}{|\lambda|^\alpha} + \hat{b}(\lambda)) \| x \|_{[D(A)]} |d\lambda| \\
& \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma(t^{-1}r_0)} e^{|\lambda|} \frac{M_3(1 + \frac{1}{M_2})}{|\lambda|} \| x \|_{[D(A)]} |d\lambda| + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(t^{-1}r_0)} e^{|\lambda|} \frac{M_3N}{|\lambda|^\alpha} \| x \|_{[D(A)]} |d\lambda| \\
& = \frac{2}{\pi} \int_{t^{-1}r_0}^{\infty} e^{-rt \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} \frac{M_3(1 + \frac{1}{M_2})}{r} dr \| x \|_{[D(A)]} \\
& \quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\phi}^{\phi} e^{t^{-1}r_0t \cos \xi} M_3(1 + \frac{1}{M_2}) d\xi \| x \|_{[D(A)]} \\
& \quad + \frac{1}{\pi} \int_{t^{-1}r_0}^{\infty} e^{-rt \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} \frac{M_3N}{r^\alpha} dr \| x \|_{[D(A)]} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} e^{t^{-1}r_0t \cos \xi} \frac{M_3N}{r^\alpha} r d\xi \| x \|_{[D(A)]} \\
& = M_3(1 + \frac{1}{M_2}) \left(\frac{2}{\pi r_0} \frac{e^{-r_0 \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}}{\operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{\pi} e^{r_0\phi} \right) \| x \|_{[D(A)]} \\
& \quad + \left(\frac{t^\alpha M_3N}{\pi r_0^\alpha} \frac{e^{-r_0 \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}}{t \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} + \frac{M_3N}{\pi r_0^{\alpha-1}} t^{\alpha-1} e^{r_0\phi} \right) \| x \|_{[D(A)]},
\end{aligned}$$

assim obtemos que

$$R'(t)x \leq (C_1 + C_2 t^{\alpha-1}) \| x \|_{[D(A)]}, \quad (4.31)$$

onde C_1 e C_2 são constantes independentes de t e x .

Vejamos agora o caso $t \geq 1$. Usando a mudança de variável $\lambda t = \gamma$, fazendo uso da analiticidade da função $\lambda \rightarrow G(\lambda)(A - \lambda\hat{N}(\lambda) + \hat{B}(\lambda))$ e do Lema 4.2.2 obtemos que

$$\begin{aligned}
& \| R'(t)x \| \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(r_0)} e^{|\gamma|} \| G(t^{-1}\gamma)(A - t^{-1}\lambda\hat{N}(t^{-1}\gamma) + \hat{B}(t^{-1}\gamma))x \| t^{-1} |d\gamma| \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(r_0)} e^{|\gamma|} \frac{M_3}{|\gamma| t^{-1}} (I + |\gamma| t^{-1} \frac{M_3N}{|\gamma|^\alpha t^{-\alpha}} + \hat{b}(t^{-1}\gamma)) \| x \|_{[D(A)]} t^{-1} |d\gamma| \\
& \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma(r_0)} e^{|\gamma|} \frac{M_3(1 + \frac{1}{M_2})}{|\gamma|} \| x \|_{[D(A)]} |d\gamma| + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(r_0)} e^{|\gamma|} \frac{M_3N}{|\gamma|^\alpha} \| x \|_{[D(A)]} |d\gamma| \right) t^{\alpha-1},
\end{aligned}$$

de onde inferimos a existência de C_3 e C_4 independentes de t e x tais que

$$\| R'(t)x \| \leq (C_3 + C_4 t^{\alpha-1}) \| x \|_{[D(A)]}. \quad (4.32)$$

A propriedade agora é consequência de (4.31) e (4.32). ■

Corolário 4.2.2 *Assuma que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico; $0 \in \rho(A)$ e que para todo $\vartheta \in (0, 1)$ o operador $\lambda \rightarrow (-A)^\vartheta G(\lambda)$ é analítico sobre $\Lambda_{r_1, \theta}$. Então, para cada $\vartheta \in (0, 1)$ existe $K_\vartheta > 0$ tal que*

$$\| (-A)^\vartheta R(t) \| \leq \frac{K_\vartheta}{t^\vartheta}, \quad t > 0. \quad (4.33)$$

Demonstração: Seja $\vartheta \in (0, 1)$. De [63, Theorem 6.10] sabemos que existe $C_\vartheta > 0$ tal que

$$\| (-A)^\vartheta x \| \leq C_\vartheta \| Ax \|^\vartheta \| x \|^{1-\vartheta}, \quad x \in D(A).$$

Como $G(\cdot)$ assume valores em $D(A)$, do Lemma 4.2.2 vemos que para $x \in X$

$$\begin{aligned} \| (-A)^\vartheta G(\lambda)x \| &\leq C_\vartheta \| AG(\lambda)x \|^\vartheta \| G(\lambda)x \|^{1-\vartheta} \\ &\leq C_\vartheta M_5^\vartheta \| x \|^\vartheta \frac{M_3^{1-\vartheta}}{\| \lambda \|^{1-\vartheta}} \| x \|^{1-\vartheta} \\ &\leq \frac{C_1}{\| \lambda \|^{1-\vartheta}} \| x \|, \end{aligned}$$

onde C_1 é independente de λ . A desigualdade anterior permite mostrar com facilidade a função $\lambda \rightarrow e^{\lambda t}(-A)^\vartheta G(\lambda)$ é integrável sobre $\Gamma(r)$, $r \geq r_0$.

Como $(-A)^\vartheta$ é fechado e $(-A)^\vartheta G(\lambda)$ é analítica em $\Lambda_{r_1, \theta}$, para $t \in (0, 1)$ obtemos que

$$(-A)^\vartheta R(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(t^{-1}r_0)} e^{\lambda t} (-A)^\vartheta G(\lambda)x d\lambda.$$

Usando a representação anterior, segue que

$$\begin{aligned} &\| (-A)^\vartheta R(t)x \| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{t^{-1}r_0}^{\infty} |e^{\lambda t}| \frac{C_1}{\| \lambda \|^{1-\vartheta}} |d\lambda| \| x \| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} |e^{\lambda t}| \frac{C_1}{\| \lambda \|^{1-\vartheta}} |d\lambda| \| x \| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{t^{-1}r_0}^{\infty} e^{-rt \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} \frac{C_1}{r^{1-\vartheta}} dr \| x \| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} e^{t^{-1}r_0 t \cos \xi} \frac{C_1}{t^{-1}r_0^{1-\vartheta}} t^{-1}r_0 d\xi \| x \| \\ &\leq \left(\frac{C_1}{\pi r_0^{1-\vartheta}} \frac{e^{-r_0 \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}}{\operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} + \frac{C_1}{\pi} e^{r_0 \phi} \right) t^{-\vartheta} \| x \|, \end{aligned}$$

de onde concluímos que existe $C_2 > 0$ independente de x tal que

$$\| (-A)^\vartheta R(t)x \| \leq C_2 t^{-\vartheta}, \quad t \in (0, 1). \quad (4.34)$$

Vejamos agora o caso em que $t \geq 1$. Fazendo a mudança de coordenada $\gamma = \lambda t$ e o fato que $(-A)^\vartheta G(\lambda)$ é analítica em $\Lambda_{r_1, \theta}$ obtemos que

$$(-A)^\vartheta R(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_0)} e^{\gamma} (-A)^\vartheta G(\gamma t^{-1}) x t^{-1} d\gamma.$$

Do anterior segue que

$$\begin{aligned}
& \| (-A)^\vartheta R(t)x \| \\
& \leq \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} t^{-1} |e^\gamma| \frac{C_1}{|t^{-1}\gamma|^{1-\vartheta}} |d\gamma| \|x\| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} t^{-1} |e^\gamma| \frac{C_1}{|t^{-1}\gamma|^{1-\vartheta}} |d\gamma| \|x\| \\
& \leq \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} e^{-r \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} \frac{C_1}{r^{1-\vartheta}} t^{-\vartheta} dr \|x\| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} e^{r_0 \cos \xi} \frac{C_1}{r_0^{1-\vartheta}} t^{-\vartheta} r_0 d\xi \|x\| \\
& \leq \left(\frac{C_1}{\pi r_0^{1-\vartheta}} \frac{e^{-r_0 \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})}}{\operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})} + \frac{C_1}{\pi} e^{r_0 \phi} \right) t^{-\vartheta} \|x\|,
\end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\| (-A)^\vartheta R(t)x \| \leq C_2 t^{-\vartheta}, \quad t \geq 1. \quad (4.35)$$

A conclusão do resultado é consequência de (4.34)-(4.35). A prova está concluída. ■

Para finalizar esta seção consideramos alguns exemplos de sistemas integrodiferenciais que podem ser estudados sob nossa teoria de resolventes.

Exemplo 4.2.1 *Considere o sistema integro-diferencial*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[u(t, \xi) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-\omega(t-s)} u(s, \xi) ds \right] = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[u(t, \xi) + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} u(s, \xi) ds \right], \quad t > 0, \quad (4.36)$$

$$u(0, \xi) = 0, \quad \xi \in [0, \pi], \quad (4.37)$$

onde $\alpha \in (0, 1)$ e ω, γ são números positivos. No que segue $X = L^2([0, \pi])$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o operador definido por $Af(\xi) = f''(\xi)$, onde

$$D(A) = \{f \in L^2([0, \pi]) : f'' \in L^2([0, \pi]), f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

É conhecido que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e compacto $(T(t))_{t \geq 0}$ sobre X . Se definirmos os operadores $N_1(t)f(\xi) = t^{\alpha-1}e^{-\omega t}f(\xi)$ e $B_1(t)f(\xi) = b_1(t)f''(\xi)$ em que $b_1(t) = e^{-\gamma t}$, então podemos representar o sistema (4.36)-(4.37) na forma abstrata

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[u(t) + \int_0^t N_1(t-s)u(s)ds \right] = Au(t) + \int_0^t B_1(t-s)u(s)ds, \quad t > 0, \quad (4.38)$$

$$u(0) = 0. \quad (4.39)$$

É fácil ver que as condições **(HN₁)** e **(HN₂)** são verificadas. Em relação a **(HN₃)** e **(HN₄)** somente observamos $\|B(t)f\| \leq b_1(t)\|f\|_{[D(A)]}$; sendo $\widehat{b}_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \gamma}$ e $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \widehat{b}_1(\lambda) = 0$ e a condição **(HN₄)** é verificada se considerarmos $D = C_0^\infty([0, \pi])$.

Como consequência dos fatos anteriores temos a seguintes proposição:

Proposição 4.2.1 *Existe uma família de operadores N -resolvente associada ao sistema (4.36)-(4.37).*

Demonstração: Conseqüência imediata do Teorema 4.2.1. ■

Exemplo 4.2.2 *Observe que a Proposição 4.2.1 também é verdadeira para o sistema*

$$\frac{\partial}{\partial t}[u(t, \xi) + \int_0^t k(t-s)u(s, \xi)ds] = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}u(t, \xi) + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \frac{\partial}{\partial \xi}u(s, \xi)ds, \quad (4.40)$$

$$u(0, \xi) = 0 \quad \xi \in [0, \pi]. \quad (4.41)$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, $\omega, \gamma > 0$ e o núcleo $k(\cdot)$ é dado por

$$k(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} & 0 < t < 1, \\ t^{\alpha-1}e^{-\omega t} & t \geq 1. \end{cases}$$

4.3 O problema integro-diferencial não homogêneo

Fazendo uso da teoria desenvolvida na seção anterior, estudamos a existência e regularidade das soluções para o problema não homogêneo.

$$\frac{d}{dt} \left(x(t) + \int_0^t N(t-s)x(s)ds \right) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [0, a], \quad (4.42)$$

$$x(0) = x_0 \in D(A), \quad (4.43)$$

onde $f : [0, a] \rightarrow X$ é apropriada. No que segue, sempre assumiremos que as condições $(\mathbf{HN}_1)$ -($\mathbf{HN}_4$) são satisfeitas e denotaremos por $(R(t))_{t \geq 0}$ a família N -resolvente associada a (4.1)-(4.2). Além do anterior, assumiremos a seguinte propriedade

$(\mathbf{H}_\alpha)$ Existe $\alpha(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, a qual é limitada em intervalos da forma $(a_1, a_2]$, $a_1 > 0$, tal que

$$\| R'(t)x \| \leq \alpha(t) \| x \|_{[D(A)]}, \quad \forall x \in D(A).$$

Para o sistema integro-diferencial (4.42)-(4.43), consideremos a seguinte definição de solução clássica.

Definição 4.3.1 *Uma função $x : [0, a) \rightarrow X$ é uma solução clássica de (4.42)-(4.43) se $x + N * x \in C^1((0, a) : X)$; $x \in C([0, a) : [D(A)]) \cap C^1((0, a) : X)$ e (4.42)-(4.43) é satisfeita sobre $[0, a)$.*

Uma conseqüência imediata da existência de uma família de operadores N -resolvente para (4.1)-(4.2) é a formula da variação dos parâmetros.

Teorema 4.3.1 *Seja $u_0 \in D(A)$ e $f \in C([0, a] : X)$. Se $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (4.42)-(4.43) e $u'(\cdot)$ é limitada sobre $(0, a]$, então*

$$u(t) = R(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, a].$$

Demonstração: Para começar, estudaremos a diferenciabilidade das funções

$$\begin{aligned} \Theta_1(s) &= \int_0^s N(s-\xi)u(\xi)d\xi, \\ \Theta_2(s) &= \int_0^s R(s-\xi)N(\xi)u_0d\xi. \end{aligned}$$

Para $s \in [0, a)$ e $h > 0$ tal que $s+h \in [0, a]$ temos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} [\Theta_1(s+h) - \Theta_1(s)] \\ &= \int_0^s N(s-\xi) \frac{u(\xi+h) - u(\xi)}{h} d\xi + \frac{1}{h} \int_0^h N(s+h-\xi)u(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (4.44)$$

É fácil ver que o segundo termo da direita em (4.44) converge para $N(s)u_0$ q.t.p. sobre $[0, a]$. Por outro lado, como $u'(\cdot)$ é limitada em $(0, a]$ e $N(\cdot)$ é integrável, concluímos que Θ_1 é diferenciável em s e que

$$\Theta_1'(s) = \int_0^s N(s-\xi)u'(\xi)d\xi + N(s)u_0, \quad \text{q.t.p. para } s \in [0, a].$$

Similarmente, para $u_0 \in D(A)$, $s \in [0, a)$ e $h > 0$ tal que $s+h \in [0, a]$ vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [\Theta_2(s+h) - \Theta_2(s)] &= \int_0^s \left(\frac{R(s+h-\xi) - R(s-\xi)}{h} \right) N(\xi)u_0d\xi \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_s^{s+h} R(s+h-\xi)N(\xi)u_0d\xi. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Como $N(\cdot) \in L^1([0, \infty) : \mathcal{L}(X))$, segue facilmente que o segundo termo da direita em (4.45), converge q.t.p. para $N(s)u_0$ quando $h \rightarrow 0$. Mais ainda, como $N(t)D(A) \subset D(A)$ e a função $\mu \rightarrow R(\mu)N(\xi)u_0$ é diferenciável temos que

$$\frac{R(s+h-\xi) - R(s-\xi)}{h} N(\xi)u_0 \rightarrow R'(s-\xi)N(\xi)u_0,$$

q.t.p. para $s \in [0, a]$. Usando agora a propriedade $(\mathbf{H}_\alpha)$ na definição de N-resolvente, e a desigualdade

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R(s+h-\xi) - R(s-\xi)}{h} N(\xi)x \right\| &\leq \left\| \frac{1}{h} \int_0^h R'(s-\xi+\theta)N(\xi)d\theta \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \alpha(s-\xi+\theta)d\theta \left\| N(\xi)x \right\|_{[D(A)]} = g(\xi), \end{aligned}$$

do Teorema da Convergência Dominada obtemos que a função $\xi \rightarrow R'(s-\xi)N(\xi)x$ é integrável sobre $[0, s]$. Como consequência dos passos anteriores, Θ_2 é diferenciável e

$$\Theta_2'(s) = \int_0^s R'(s-\xi)N(\xi)x d\xi + N(s)x, \text{ q.t.p. para } s \in [0, a].$$

Usando agora que $R(\cdot)u_0 \in C^1((0, \infty) : X)$, as equações N-resolventes, a diferenciabilidade de Θ_1, Θ_2 é o fato que $u(\cdot)$ é solução clássica segue que

$$\begin{aligned} & u(t) - R(t)u_0 - \int_0^t R(t-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} (R(t-s)u(s)) ds - \int_0^t R(t-s)f(s)ds \\ &= - \int_0^t R'(t-s)u(s)ds + \int_0^t R(t-s)u'(s)ds - \int_0^t R(t-s)f(s)ds \\ &= - \int_0^t R'(t-s)u(s)ds + \int_0^t R(t-s) \left(Au(s) + \int_0^s B(s-\xi)u(\xi)d\xi + f(s) \right) ds \\ &\quad - \int_0^t R(t-s) \frac{d}{ds} \left(\int_0^s N(s-\xi)u(\xi)d\xi \right) ds - \int_0^t R(t-s)f(s)ds \\ &= - \int_0^t \left(R(t-s)A + \int_0^{t-s} R(t-s-\xi)B(\xi)d\xi \right) u(s)ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{d}{ds} \left(\int_0^{t-s} R(t-s-\xi)N(\xi)d\xi \right) u(s)ds \\ &\quad + \int_0^t R(t-s)Au(s)ds + \int_0^t R(t-s) \int_0^s B(s-\xi)u(\xi)d\xi ds \\ &\quad - \int_0^t R(t-s) \frac{d}{ds} \left(\int_0^s N(s-\xi)u(\xi)d\xi \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left(\int_0^{t-s} R(t-s-\xi)N(\xi)d\xi \right) u(s)ds - \int_0^t R(t-s) \frac{d}{ds} \left(\int_0^s N(s-\xi)u(\xi)d\xi \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left(\int_0^{t-s} R(t-s-\xi)N(\xi)d\xi \right) u(s)ds \\ &\quad - R(t-s) \int_0^s N(s-\xi)u(\xi)d\xi \Big|_0^t + \int_0^t R'(t-s) \int_0^s N(s-\xi)u(\xi)d\xi ds \\ &= \int_0^t \int_0^{t-s} -R'(t-s-\xi)N(\xi)u(s)d\xi + \int_0^t N(t-s)u(s)ds \\ &\quad - \int_0^t N(t-s)u(s)ds + \int_0^t R'(t-s) \int_0^s N(s-\xi)u(\xi)d\xi ds \\ &= \int_0^t \int_0^{t-s} R'(t-s-\xi)N(\xi)d\xi u(s)ds + \int_0^t R'(t-s) \int_0^s N(s-\xi)u(\xi)d\xi ds = 0, \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, a]$. Isto prova que

$$u(t) = R(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, a].$$

O que completa a demonstração. ■

Corolário 4.3.1 *Existe uma única família N-resolvente associada ao sistema (4.1)-(4.2).*

Demonstração: Assuma que $(R_1(t))_{t \geq 0}$ é uma outra família N-resolvente para (4.1)-(4.2). Se $x \in D(A)$, a função $u(t) = R_1(t)x$ é uma solução clássica de (4.42)-(4.43) com $f \equiv 0$. Agora do Teorema 4.3.1 segue que $R_1(t)x = R(t)x$ para todo $x \in D(A)$. Como $D(A)$ é denso em X e $R_1(\cdot), R(\cdot)$ são limitadas sobre compactos de $\mathbb{R}$ segue que $R_1(t) = R_2(t)$ para todo $t \geq 0$. ■

Motivados pelo Teorema 4.3.1, introduzimos o seguinte conceito de solução fraca para (4.42)-(4.43).

Definição 4.3.2 *Seja $f \in L^1([0, a] : X)$. A função $u \in C([0, a] : X)$ definida por*

$$u(t) = R(t)x + \int_0^t R(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, a]. \quad (4.46)$$

é chamada solução fraca de (4.42)-(4.43).

Para estudar condições sob as quais uma solução fraca é clássica, precisamos do seguinte Lema.

Lema 4.3.1 *Seja $V(\cdot) \in C([0, \infty) : \mathcal{L}(X))$ a função definida por $V(t) = \int_0^t R(s)ds$. Então $V(t)X \subset D(A)$ para todo $t \geq 0$ e $AV(\cdot)x \in C([0, a] : X)$ para todo $a > 0$ e todo $x \in X$.*

Demonstração: Sejam $x \in D(A)$ e $a > 0$. Integrando a equação N-resolvente (4.3), obtemos que

$$R(t)x + \int_0^t N(t-s)R(s)xds - x = \int_0^t AR(s)xds + \int_0^t \int_0^s B(s-\xi)R(\xi)x d\xi ds.$$

Como A é fechado e $AR(\cdot)x$ é integrável obtemos do fato anterior que

$$AV(t)x = R(t)x + \int_0^t N(t-s)R(s)xds - x - \int_0^t B(t-s)V(s)xds, \quad t \in [0, a], \quad (4.47)$$

o que implica que $AV(\cdot)x \in C([0, a] : X)$ se $x \in D(A)$.

Para estudar o caso geral precisamos de uma estimativa para $AV(\cdot)x$ em X .

Seja $\phi(t) = \|V(t)x\|_{[D(A)]}$, de (4.47) segue que

$\phi(t)$

$$\begin{aligned} &\leq \|V(t)x\| + \|AV(t)\| \\ &\leq \left\| \int_0^t R(s)xds \right\| + \|R(t)x\| + \left\| \int_0^t N(t-s)R(s)xds \right\| + \|x\| + \left\| \int_0^t B(t-s)V(s)ds \right\| \\ &\leq Ma \|x\| + M \|x\| + M \|x\| \int_0^a \|N(s)\| ds + \|x\| + \int_0^t \|B(t-s)V(s)\| ds, \end{aligned}$$

assim

$$\phi(t) \leq c_1 \|x\| + \int_0^t b(t-s)\phi(s)ds, \quad (4.48)$$

onde $c_1 > 0$ é uma constante independente de $t \in [0, a]$ e $x \in D(A)$. Sejam $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = a$ tais que $\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s)ds \leq \frac{1}{2}$ para cada $i = 1 \dots n$. Para $t \in [0, t_1]$, da desigualdade (4.48) segue que

$$\phi(t) \leq c_1 \|x\| + \sup_{s \in [0, t_1]} \phi(s) \int_0^t b(s)ds$$

logo

$$\sup_{s \in [0, t_1]} \phi(s) \leq c_1 \|x\| + \frac{1}{2} \sup_{s \in [0, t_1]} \phi(s).$$

Como consequência,

$$\sup_{s \in [0, t_1]} \phi(s) \leq 2c_1 \|x\|. \quad (4.49)$$

Usando (4.49), para $t \in [t_1, t_2]$ obtemos que

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq c_1 \|x\| + \int_0^{t_1} b(t-s)\phi(s)ds + \int_{t_1}^t b(t-s)\phi(s)ds \\ &\leq c_1 \|x\| + \|b\|_{L^1} 2c_1 \|x\| + \sup_{s \in [0, t_2]} \phi(s) \int_0^{t-t_1} b(s)ds \\ &\leq c_1 \|x\| + \|b\|_{L^1} 2c_1 \|x\| + \frac{1}{2} \sup_{s \in [0, t_2]} \phi(s), \end{aligned}$$

e assim

$$\sup_{s \in [0, t_2]} \phi(s) \leq 2c_1(1 + 2\|b\|_{L^1}) \|x\|.$$

Reinterando o processo anterior, deduzimos a existência de $c_2 > 0$, independente de $t \in [0, a]$ e $x \in D(A)$, tal que

$$\sup_{s \in [0, a]} \phi(s) \leq c_2 \|x\|. \quad (4.50)$$

Seja agora $x \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Da desigualdade (4.50), é claro que a sequência $(AV(t)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para um ponto $y \in X$. Como A é fechado, concluímos que $V(t)x \in D(A)$ e que $AV(t)x = y$. Mais ainda, é fácil ver que $AV(t)x_n \rightarrow AV(t)x$ uniformemente em $[0, a]$ o que mostra que $AV(\cdot)x \in C([0, a] : X)$. ■

O próximo Teorema é um clássico resultado de regularidade de soluções fracas. Especificamente, no Teorema 4.3.2, estabeleceremos condições de modo que uma solução fraca seja uma solução clássica.

Teorema 4.3.2 *Seja $u_0 \in D(A)$ e $f \in C([0, a] : X)$. Se $f \in L^1([0, a] : [D(A)])$ ou $f \in W^{1,1}([0, a] : X)$, então solução fraca de (4.42)-(4.43) é uma solução clássica de (4.42)-(4.43).*

Demonstração: Seja $u(\cdot)$ a solução fraca de (4.42)-(4.43). Considere inicialmente o caso em que $f \in C^1([0, a] : [D(A)])$ e assumamos que $u_0 = 0$. Das propriedades da família $(R(t))_{t \geq 0}$, podemos mostrar que a função $\Lambda(t) = \int_0^t AR(t-s)f(s)ds$ é contínua sobre $[0, a]$. Isto implica que $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, a]$ e que $Au(t) = \int_0^t AR(t-s)f(s)ds$, pois A é fechado. Mais ainda, da hipótese $(\mathbf{H}_\alpha)$ e do fato que $f \in C^1([0, a] : [D(A)])$ segue que

$$u'(t) = \int_0^t R'(t-s)f(s)ds + f(t), \quad t \in [0, a]. \quad (4.51)$$

Além do anterior, procedendo como na prova do Teorema 4.3.1 vemos que para $x \in D(A)$, a função $\Gamma_2(t) = \int_0^t N(t-s)R(s)xds$ é diferenciável e que

$$\Lambda_2'(t) = \int_0^t N(t-s)R'(s)xds + N(t)x, \quad \text{q.t.p. para } t \in [0, a].$$

Usando as propriedades anteriores, vemos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (u + N * u)(t) - Au(t) - (B * u)(t) - f(t) \\ &= u'(t) + \frac{d}{dt} (N * u)(t) - \int_0^t AR(t-s)f(s)ds - \int_0^t B(t-s) \int_0^s R(s-\xi)f(\xi)d\xi ds - f(t) \\ &= \int_0^t R'(t-s)f(s)ds + f(t) + \int_0^t N(t-s)u'(s)ds + N(t)u(0) \\ & \quad - \int_0^t AR(t-s)f(s)ds - \int_0^t B(t-s) \int_0^s R(s-\xi)f(\xi)d\xi ds - f(t). \end{aligned}$$

Usando agora as equações N-resolvente, com $x = f(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (u + N * u)(t) - Au(t) - (B * u)(t) - f(t) \\ &= \int_0^t \left(AR(t-s)f(s)ds + \int_0^{t-s} B(t-s-\xi)R(\xi)f(s)d\xi \right) ds \\ & \quad - \int_0^t \frac{d}{ds} \left(\int_0^{t-s} N(t-s-\xi)R(s-\xi) \right) f(s)d\xi ds \\ & \quad + \int_0^t N(t-s) \left(\int_0^s R'(s-\xi)f(\xi)d\xi + R(0)f(s) \right) ds \\ & \quad - \int_0^t AR(t-s)f(s)ds - \int_0^t \int_0^s B(t-s)R(s-\xi)f(\xi)d\xi ds \\ &= \int_0^t \int_0^{t-s} B(t-s-\xi)R(\xi)f(s)d\xi ds - \int_0^t \int_0^{t-s} N(t-s-\xi)R'(\xi)f(s)d\xi ds \\ & \quad - \int_0^t N(t-s)f(s)ds + \int_0^t N(t-s) \int_0^s R'(s-\xi)f(\xi)d\xi ds \\ & \quad + \int_0^t N(t-s)f(s)ds - \int_0^t \int_0^s B(t-s)R(s-\xi)u(\xi)d\xi ds = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}(u(t) + \int_0^t N(t-s)u(s)ds) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s) ds + f(t), \quad t \in [0, a]. \quad (4.52)$$

Para estudar o caso geral, precisamos de algumas estimativas sobre as soluções de (4.52). Veja que nas condições anteriores,

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{[D(A)]} + \|(u + N * u)'(t)\| \\ & \leq \int_0^t \|R(t-s)f(s)\| ds + 2 \int_0^t \|AR(t-s)f(s)\| ds \\ & \quad + \int_0^t \|B(t-s) \int_0^s R(s-\xi)f(\xi) d\xi\| ds + \|f(t)\| \\ & \leq \int_0^t c_1 \|f(s)\|_{[D(A)]} ds + c_2 \int_0^t b(t-s) \int_0^s \|f(\xi)\|_{[D(A)]} d\xi ds + \|f(t)\|, \end{aligned}$$

onde c_1, c_2 são constantes independentes de t e f . Assim, existe $c_3 > 0$ independente de t e $f \in C^1([0, a] : [D(A)])$ tal que

$$\sup_{t \in [0, a]} \|u(t)\|_{[D(A)]} + \sup_{t \in [0, a]} \|(u + N * u)'(t)\| \leq c_3 \|f\|_{L^1([0, a] : [D(A)])} + \|f(\theta)\|_a. \quad (4.53)$$

Vejamos agora o caso geral. Seja $f \in C([0, a] : X) \cap L^1([0, a] : [D(A)])$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C^1([0, a] : [D(A)])$ tal que $f_n \rightarrow f$ em $C([0, a] : X)$ e $f_n \rightarrow f$ em $L^1([0, a] : [D(A)])$. Como consequência dos passos anteriores, obtemos que $u_n = R * f_n$ é solução clássica de

$$\frac{d}{dt} \left(w(t) + \int_0^t N(t-s)w(s)ds \right) = Aw(t) + \int_0^t B(t-s)w(s) ds + f_n(t), \quad (4.54)$$

$$w(0) = 0. \quad (4.55)$$

Mais ainda, segue da desigualdade (4.53) que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $C([0, a] : [D(A)])$. Seja $u \in C([0, a] : [D(A)])$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $C([0, a] : [D(A)])$. Como $N(\cdot) \in L^1([0, a] : \mathcal{L}([D(A)]))$ e $B(\cdot) \in L^1([0, a] : [D(A)])$, segue que $u_n + N * u_n \rightarrow u + N * u$ e $B * u_n \rightarrow B * u$ convergem em $C([0, a] : X)$. Similarmente, existe $v \in C([0, a] : X)$ tal que $\frac{d}{dt}(u_n + N * u_n) \rightarrow v$ em $C([0, a] : X)$. É fácil ver que nestas condições $\frac{d}{dt}(u + N * u) = v$ e portanto que $(u + N * u) \in C^1([0, a] : X)$. Das observações anteriores e de (4.54)-(4.55) obtemos que

$$\frac{d}{dt} \left(u(t) + \int_0^t N(t-s)u(s)ds \right) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s) ds + f(t),$$

o que prova que $u(\cdot)$ é solução clássica.

A prova do resultado para o caso em que $f \in W^{1,1}([0, a] : X)$ é similar ao anterior, por isso, daremos uma prova resumida.

Se $f \in W^{1,1}([0, a] : X)$ então existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C^1([0, a] : [D(A)])$ tal que $f_n \rightarrow f$ em $C([0, a] : X)$ e $f_n \rightarrow f$ em $W^{1,1}([0, a] : X)$. Da primeira parte da demonstração sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $u_n = R * f_n$ é solução clássica de (4.54)-(4.55). Se $V(\cdot)$ é a função introduzida no Lema 4.3.1, então

$$-V(t)f(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}(V(t-s)f(s))ds = -\int_0^t R(t-s)f(s)ds + \int_0^t V(t-s)f'(s)ds,$$

de onde segue que

$$u(t) = V(t)f(0) + \int_0^t V(t-s)f'(s)ds, \quad t \in [0, a]. \quad (4.56)$$

Usando (4.56) vemos que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{[D(A)]} + \|(u + N * u)'(t)\|_X &\leq \|V(t)f(0)\|_{[D(A)]} + \int_0^t \|V(t-s)f'(s)\|_{[D(A)]} ds \\ &\quad + \left\| A \int_0^t R(t-s)f(s)ds \right\| \\ &\quad + \int_0^t \|B(t-s) \int_0^s R(s-\xi)f(\xi) d\xi\| ds \\ &\leq c_4 \|f(\theta)\|_a + c_5 \|f'\|_{L^1([0,a];X)}, \end{aligned}$$

onde c_4, c_5 são constantes independentes de t, f e f' . Assim, segue que

$$\sup_{t \in [0, a]} \|u(t)\|_{[D(A)]} + \sup_{t \in [0, a]} \|(u + N * u)'(t)\|_X \leq c_4 \|f(\theta)\|_a + c_5 \|f'\|_{L^1([0,a];X)}. \quad (4.57)$$

Da desigualdade (4.57) temos que a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $C([0, a] : [D(A)])$. Seja $u \in C([0, a] : [D(A)])$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $C([0, a] : [D(A)])$. Como $N(\cdot) \in L^1([0, a] : \mathcal{L}([D(A)]))$ e $B(\cdot) \in L^1([0, a] : [D(A)])$ segue que $u_n + N * u_n \rightarrow u + N * u$ e $B * u_n \rightarrow B * u$ convergem em $C([0, a] : X)$. Por outro lado, existe $v \in C([0, a] : X)$ tal que $\frac{d}{dt}(u_n + N * u_n) \rightarrow v$ em $C([0, a] : X)$. É fácil ver que $\frac{d}{dt}(u + N * u) = v$ e portanto que $(u + N * u) \in C^1([0, a] : X)$. Das observações anteriores de (4.54)-(4.55) obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(u(t) + \int_0^t N(t-s)u(s)ds \right) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s) ds + f(t),$$

o que prova que $u(\cdot)$ é solução clássica. ■

Corolário 4.3.2 *Sejam $f \in C([0, a] : X)$ e $u(\cdot)$ a solução fraca de (4.42)-(4.43). Se $u(\cdot) \in C^1([0, a] : X)$, então $u(\cdot)$ é solução clássica de (4.42)-(4.43).*

Demonstração: Assuma sem perda de generalidade que $f(0) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a função $f_n \in C^1([0, a] : X)$ por

$$f_n(t) = (\rho_n * f)(t) = \int_0^t \rho_n(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, a],$$

onde $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família de funções em $C^\infty(\mathbb{R})$, tais que $\rho_n(t) \geq 0$, $\rho_n(t) = 0$ quando $t \geq \frac{a}{n}$ e $\int_0^\infty \rho_n(t)dt = 1$.

Como consequência do Teorema 4.3.2, sabemos que $u_n = R * f_n$ é solução clássica de

$$\frac{d}{dt} \left(w(t) + \int_0^t N(t-s)w(s)ds \right) = Aw(t) + \int_0^t B(t-s)w(s)ds + f_n(t), \quad (4.58)$$

$$w(0) = 0. \quad (4.59)$$

Mais ainda, como $u_n = R * f_n = \rho_n * (R * f) = \rho_n * u$ e $u \in C^1([0, a] : X)$, segue que $u_n \rightarrow u$ em $C^1([0, a] : X)$ e que $u_n + N * u_n \rightarrow u + N * u$ em $C^1([0, a] : X)$.

Seja $\phi_{n,m}(t) = \|u_n(t) - u_m(t)\|_{[D(A)]}$. Usando as propriedades anteriores, vemos que para $n, m \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} \phi_{n,m}(t) &\leq \|u_n(t) - u_m(t)\| + \|(u_n + N * u_m)'(t) - (u_n + N * u_m)'(t)\| \\ &\quad + \int_0^t b(t-s)\phi_{n,m}(s)ds + \|f_n(t) - f_m(t)\|. \end{aligned}$$

Assim podemos escrever que

$$\phi_{n,m}(t) \leq \Lambda_{n,m}(t) + \int_0^t b(t-s)\phi_{n,m}(s)ds,$$

onde $\Lambda_{n,m}(t) \rightarrow 0$ uniformemente em $[0, a]$ quando $n, m \rightarrow \infty$.

Sejam $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = a$ tais que $\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s)ds \leq \frac{1}{2}$ para cada $i = 1 \dots n$.

Nestas condições, para $t \in [0, t_1]$, vemos que

$$\begin{aligned} \phi_{n,m}(t) &\leq \sup_{s \in [0, a]} \Lambda_{n,m}(s) + \int_0^t b(s) \sup_{s \in [0, t_1]} \phi_{n,m}(s)ds \\ &\leq \sup_{s \in [0, a]} \Lambda_{n,m}(s) + \frac{1}{2} \sup_{s \in [0, t_1]} \phi_{n,m}(s) \end{aligned}$$

e assim

$$\sup_{s \in [0, t_1]} \phi_{n,m}(s) \leq 2 \sup_{s \in [0, a]} \Lambda_{n,m}(s).$$

Usando o anterior para $t \in [t_1, t_2]$ obtemos que

$$\begin{aligned} \phi_{n,m}(t) &\leq \sup_{s \in [0, a]} \Lambda_{n,m}(s) + \int_0^{t_1} b(t-s) \sup_{s \in [0, t_1]} \phi_{n,m}(s)ds \\ &\quad + \int_0^{t-t_1} b(s) \sup_{s \in [0, t_2]} \phi_{n,m}(s)ds \\ &\leq \sup_{s \in [0, a]} \Lambda_{n,m}(s)(1 + 2 \|b\|_{L^1}) + \frac{1}{2} \sup_{s \in [0, t_2]} \phi_{n,m}(s), \end{aligned}$$

e então

$$\sup_{s \in [0, t_2]} \phi_{n,m}(s) \leq 2(1 + 2 \|b\|_{L^1}) \sup_{s \in [0, a]} \Lambda_{n,m}(s).$$

É claro que após um número finito de passos obtemos a existência de $c > 0$ independente de t, n e m tal que

$$\sup_{s \in [0, a]} \phi_{n,m}(s) \leq c \sup_{s \in [0, a]} \Lambda_{n,m}(s).$$

Isto mostra que Au_n é convergente em $C([0, a] : X)$. Passando ao limite em (4.58)-(4.59), obtemos que

$$\frac{d}{dt} \left(u(t) + \int_0^t N(t-s)u(s)ds \right) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0, a],$$

o que prova que $u(\cdot)$ é solução clássica. ■

4.4 Aplicações a equações neutras com retardamento não limitado

Nesta seção usaremos a teoria de operadores N-resolventes desenvolvidas na seção anterior no estudo de uma classe de equações integro-diferenciais do tipo neutro que podem ser modeladas na forma

$$\frac{d}{dt} \left(x(t) + \int_{-\infty}^t N(t-s)x(s)ds \right) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + G(t, x_t), \quad t \in (0, a). \quad (4.60)$$

$$x_0 = \varphi, \quad (4.61)$$

onde A , $(N(t))_{t \geq 0}$ e $(B(t))_{t \geq 0}$ são operadores que verificam as condições **(HN₁)**-**(HN₄)**; a história $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, pertence a um espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ definido axiomáticamente que verifica os axiomas **(A)**, **(A1)** e **(B)** introduzidos no Capítulo 1 e $G : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é uma função apropriada.

Para introduzir um conceito conveniente de soluções fracas para (4.60)-(4.61), podemos assumir que $\varphi(\cdot)$ é suficientemente regular de modo que a função $\Lambda(\cdot, \varphi)$ definida por

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^0 N(t-s)\varphi(s)ds \right) = \Lambda(t, \varphi), \quad t \in [0, a].$$

exista e seja integrável sobre $[0, a]$. Neste caso, podemos dizer que uma função $u : (-\infty, a] \rightarrow X$ é solução fraca de (4.60)-(4.61) se $u_0 = \varphi$ e

$$u(t) = R(t)\varphi(0) + \int_0^t R(t-s)G(s, u_s)ds + \int_0^t R(t-s)\Lambda(s, \varphi)ds, \quad t \in [0, a].$$

No que segue sempre assumiremos que $\varphi(\cdot)$ é tal que $\Lambda(\cdot, \varphi)$ é contínua sobre $[0, a]$.

Definição 4.4.1 Dizemos que uma função $u : (-\infty, a] \rightarrow X$ é uma solução fraca de (4.60)-(4.61) em $[0, b]$, $0 < b \leq a$, se $u_0 = \varphi$; $u|_{[0, a]} \in C([0, a] : X)$ e

$$u(t) = R(t)\varphi(0) + \int_0^t R(t-s)(G(s, u_s) + \Lambda(s, \varphi)) ds, \quad t \in [0, a].$$

As provas dos seguintes resultados de existência de soluções fracas são análogas as provas dos Teoremas 2.1.1, 2.1.3 do Capítulo 2. Por isso decidimos não incluir a demonstração.

Teorema 4.4.1 Suponha que a função $G : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ é contínua e que existe constante positiva L_G tal que

$$\|G(t, \psi_1) - G(t, \psi_2)\| \leq L_G \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad t \in [0, a], \quad \psi_i \in \mathcal{B}, i = 1, 2.$$

Então existe uma única solução fraca de (4.60)-(4.61) sobre $[0, b]$ para algum $0 < b \leq a$.

Para o próximo resultado introduzimos a seguinte definição

Definição 4.4.2 Uma família N -resolvente $(R(t))_{t \geq 0}$ é compacta, se $R(t)$ é compacto para todo $t > 0$.

Teorema 4.4.2 Suponha que as seguintes condições são satisfeitas

(a) $(R(t))_{t \geq 0}$ é uma família N -resolvente compacta;

(b) A função $G : I \times \mathcal{B} \rightarrow X$ satisfaz as seguintes condições.

(i) A função $G(t, \cdot) : \mathcal{B} \rightarrow X$ é contínua para quase todo $t \in [0, a]$ e $G(\cdot, x) : [0, a] \rightarrow X$ é fortemente mensurável para todo $x \in X$;

(ii) Existe uma função contínua $m_G : [0, a] \rightarrow [0, \infty)$ e uma função contínua e não decrescente $\Omega_G : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$\|G(t, \psi)\| \leq m_G(t)\Omega_G(\|\psi\|_{\mathcal{B}}), \quad (t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}.$$

Se

$$MK_a \int_0^t m_G(s) ds \leq \int_C^\infty \frac{ds}{\Omega_G(s)}; \quad (4.62)$$

onde $C = M_a \|\varphi\| + K_a C(a, \varphi)$, então existe uma solução fraca para o problema (4.60)-(4.61) sobre $[0, a]$.

Nos próximos resultados estudaremos a regularidade das soluções fracas, equivalentemente, assumiremos que a função $\Lambda(\cdot, \varphi) \in W^{1,1}([0, a] : X)$.

Definição 4.4.3 *Uma função $u : (-\infty, a) \rightarrow X$ é uma solução clássica de (4.60)-(4.61) em $[0, b]$ se $u_0 = \varphi$, a função $t \rightarrow u(t) + \int_{-\infty}^t N(t-s)u(s)ds \in C^1((0, b) : X)$, $u(\cdot) \in C((0, b) : D(A))$ e (4.60) é satisfeita.*

No próximo Lema, $S(t)$ é o operador definido em (1.6) e $U(t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ é o operador definido por

$$[U(t)\varphi](\theta) = \begin{cases} R(t+\theta)\varphi(0), & \text{se } -t \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(t+\theta), & \text{se } -\infty < \theta < -t. \end{cases} \quad (4.63)$$

onde $(R(t))_{t \geq 0}$ é uma família N-resolvente para (4.1)-(4.2).

Lema 4.4.1 *Suponha que as funções $R(\cdot)\varphi(0)$ e $S(\cdot)\varphi$ são Lipschitz em $[0, a]$. Seja $y : (-\infty, a] \rightarrow X$ é a função definida por*

$$y(t) = \begin{cases} R(t)\varphi(0) & \text{se } 0 \leq t \leq a, \\ \varphi(t) & \text{se } -\infty < t < 0. \end{cases} \quad (4.64)$$

Então, a função $s \rightarrow y_s$ é Lipschitz em $[0, a]$.

Demonstração: Análoga a demonstração do Lema 2.2.1, apenas substituindo a função $W(\cdot)$ por $U(\cdot)$. ■

Lema 4.4.2 *Assuma que as condições do Lema 4.4.1 são verificadas e suponha que existam constantes positivas $L_G, L_\Lambda > 0$, tais que*

$$\begin{aligned} \|G(t, \psi_1) - G(s, \psi_2)\| &\leq L_F(|t - s| + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}), \\ \|\Lambda(t, \varphi) - \Lambda(s, \varphi)\| &\leq L_\Lambda |t - s|, \end{aligned}$$

para todo $t, s \in [0, b]$ e $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$. Se $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (4.60)-(4.61) sobre $[0, b]$, então $u(\cdot)$ é Lipschitz contínua sobre $[0, b]$.

Demonstração: Considere a decomposição $u(t) = y(t) + z(t)$, onde $y(\cdot)$ é a função introduzida em (4.64). Como $y(\cdot)$ é Lipschitz em $[0, b]$, somente mostraremos que $z(\cdot)$ é Lipschitz.

Usando que a função $s \rightarrow y_s$ é Lipschitz, para $t \in [0, b]$ e $h > 0$ tal que $t + h \in [0, b]$ obtemos que

$$\begin{aligned}
& \| z(t+h) - z(t) \| \\
& \leq \int_0^t \| R(t-s) \| \| \Lambda(t+h, \varphi) - \Lambda(t, \varphi) \| ds + \int_0^h \| R(t+h-s) \| \| \Lambda(t, \varphi) \| ds \\
& + \int_0^t \| R(t-s) \| \| G(s+h, y_{s+h} + z_{s+h}) - G(s, y_s + z_s) \| ds \\
& + \int_0^h \| R(t+h-s) \| \| G(s, x_s) \| ds \\
& \leq C_1 h + M \int_0^t L_G (h + \| y_{s+h} + z_{s+h} - y_s - z_s \|_{\mathcal{B}}) ds \\
& \leq C_2 h + M L_G \int_0^t \| z_{s+h} - z_s \|_{\mathcal{B}} ds \\
& \leq C_2 h + M L_G K_b \int_0^t \| z(\theta+h) - z(\theta) \|_s ds,
\end{aligned}$$

onde $C_i, i = 1, 2$, são constantes independentes de t e h . Tomando supremo em $[0, t]$ segue que

$$\| z(\theta+h) - z(\theta) \|_t \leq C_2 h + M L_G K_b \int_0^t \| z(\theta+h) - z(\theta) \|_s ds,$$

O resultado é agora consequência da desigualdade de Gronwall-Bellman. ■

Teorema 4.4.3 *Suponha que X possui (RNP). Assuma que as hipóteses do Lema 4.4.2 são verificadas e que $\varphi(0) \in D(A)$. Se $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (4.60)-(4.61) sobre $[0, b]$, então $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (4.60)-(4.61) sobre $[0, b]$.*

Demonstração: Segue do Lema 4.4.2 que a solução fraca $u(\cdot)$ é Lipschitz sobre $[0, b]$. Como consequência, as funções $t \rightarrow u_t$ e $t \rightarrow G(t, u_t)$ são Lipschitz sobre $[0, b]$. Mais ainda, pelo Lema 2.2.3 obtemos que $t \rightarrow G(t, u_t) \in W^{1,1}([0, b] : X)$.

Como por hipótese $t \rightarrow \Lambda(t, \varphi) \in W^{1,1}([0, b] : X)$, pelo Teorema 4.3.2 podemos inferir que $u(\cdot)$ é solução clássica de

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(w(t) + \int_0^t N(t-s)w(s)ds) &= Aw(t) + \int_0^t B(t-s)w(s)ds + G(t, x_t) \\
&\quad - \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 N(t-s)\varphi(s)ds, \quad t \in [0, b], \\
w(0) &= \varphi(0).
\end{aligned}$$

Isto nos permite afirmar que $u(\cdot)$ é solução clássica de (4.60)-(4.61). Agora a prova está completa. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Abolinia, V. E. & Mishkis, A. D., Mixed problems for quasilinear hyperbolic systems in the plane. *Mat. Sb.* 50, 423-442.
- [2] Adimy, M., Bouzahir, H. & Ezzinbi, K., Existence and stability for some partial neutral functional differential equations with infinite delay. *J. Math. Anal. Appl.* 294 (2004), no. 2, 438–461.
- [3] Adimy, M., Ezzinbi, K. & Laklach, M., Existence of solutions for a class of partial neutral differential equations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330 (2000), no. 11, 957–962.
- [4] Adimy, M. & Ezzinbi, K., A class of linear partial neutral functional-differential equations with nondense domain. *J. Differential Equations*, 147 (1998), no. 2, 285–332.
- [5] Adimy, M. & Ezzinbi, K., Strict solutions of nonlinear hyperbolic neutral differential equations. *Appl. Math. Lett.* 12 (1999), no. 1, 107-112.
- [6] Balachandran, K. & Dauer, J. P., Existence of solutions of nonlinear neutral integro-differential equations in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 251 (2000), no. 1, 93–105.
- [7] Balachandran, K., Sakthivel, R. & Dauer, J. P., Controllability of neutral functional integrodifferential systems in Banach spaces. *Comput. Math. Appl.* 39 (2000), no. 1-2,
- [8] Benchohra, M., Henderson, J. & Ntouyas, S. K., Existence results for impulsive multivalued semilinear neutral functional differential inclusions in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 263 (2001), no. 2, 763–780

- [9] Benchohra, M. & Ntouyas, S. K., Neutral functional differential and integrodifferential inclusions in Banach spaces. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* (8) 4 (2001), no. 3, 767–782.
- [10] Brayton, R. K., Bifurcation of periodic solutions in a nonlinear difference-differential equation of neutral type. *Q. Appl. Math.* 24, 215–224.
- [11] Brayton, R. K. & Moser, J. K., A theory of nonlinear networks. *Q. Appl. Math.* 24, 215–224.
- [12] Cannarsa, P. & Sforza, D., Global solutions of abstract semilinear parabolic equations with memory terms. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 10 (2003), no. 4, 399–430.
- [13] Clément, Ph. & Nohel, J. A., Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels. *SIAM J. Math. Anal.* 12 (1981), no. 4, 514–535.
- [14] Clément, Ph. & Da Prato G., Some results on nonlinear heat equations for materials of fading memory type. *Journal of Integral Equations and Appl.* v. 2 (1990) no. 3, 375–391
- [15] Cooke, K. L. & Krumme, D. W., Differential-difference equations and nonlinear initial-boundary value problems for linear hyperbolic partial differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* 24, 372–387.
- [16] Corduneanu, C. & Lakshmikantham, V., Equations with unbounded delay: a survey. *Nonlinear Anal* 4 (1980), no. 5, 831–877.
- [17] Cruz, M. A. & Hale, J. K., Stability of functional differential equations of neutral type. *J. Diff. Eqs.* 7, 334–355.
- [18] Da Prato, G. & Iannelli, M., Existence and regularity for a class of integro-differential equations of parabolic type. *J. Math. Anal. Appl.* 112 (1985), no. 1, 36–55.
- [19] Datko, R., Linear autonomous neutral differential equations in a Banach space. *J. Diff. Equations*, 25 (1977), no. 2, 258–274.

- [20] Diestel, J. & Uhl Jr, J.J., *Vector Measure*. Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematic Society, Volume 14.
- [21] Engel, K. J. & Nagel, R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer, New York, 1999.
- [22] Fu, X. & Ezzinbi, K., Existence of solutions for neutral functional differential evolution equations with nonlocal conditions. *Nonlinear Anal.* 54 (2003), no. 2, 215–227.
- [23] Granas, A. & Dugundji, J., *Fixed Point Theory*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [24] Grimmer, R. C. & Kappel, F., Series expansions for resolvents of volterra integrodifferential equations in Banch space. *Siam Journal of Math. Anal.* 15 (1984), no. 3, 595–604.
- [25] Grimmer, R. C. & Pritchard, A. J., Analytic resolvent operators for integral equations in Banach space. *J. Differential Equations* 50 (1983), no. 2, 234–259.
- [26] Grimmer, R. & Prüss, J., On linear Volterra equations in Banach spaces. Hyperbolic partial differential equations, II. *Comput. Math. Appl.* 11 (1985), no. 1-3, 189–205.
- [27] Gurtin, M.E. & Pipkin, A. C., A general theory of heat conduction with finite wave speed, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 31 (1968), 113–126.
- [28] Hale, J. K., Partial neutral functional-differential equations. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 39 (1994), no. 4, 339–344.
- [29] Hale, J. K., Verduyn, L. & Sjoerd M., Introduction to functional-differential equations. *Applied Mathematical Sciences*, 99. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [30] Hale, J. K. & Kato, J., Phase space for retarded equations with infinite delay. *Funkcial. Ekvac.* 21 (1978), no. 1, 11–41.
- [31] Henríquez, H. R. & Hernández, E., On the abstract Cauchy problem in Fréchet spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 115 (1992), no. 2, 353–360.
- [32] Henríquez, H. R., Existence of periodic solutions of neutral functional differential equations with unbounded delay. *Proyecciones.* 19 (2000), no. 3, 305–329.

- [33] Henríquez H. R., Regularity of solutions of abstract retarded functional-differential equations with unbounded delay. *Nonlinear Anal.* 28 (1997), no. 3, 513–531.
- [34] Hernández E., Massera type criterion for a partial neutral functional differential equation. *Electron. J. Differential Equations.* 2002, no. 40, 17 pp. (electronic).
- [35] Hernández, E. & Henríquez, H. R., Existence of periodic solutions of partial neutral functional-differential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 221 (1998), no. 2, 499–522.
- [36] Hernández, E. & Pelicer, M., Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for partial neutral differential equations. *Appl. Math. Lett.* 18 (2005), no. 11, 1265-1272.
- [37] Hernández, E. & Diagana, T., Existence and Uniqueness of Pseudo Almost Periodic Solutions to Some Abstract Partial Neutral Functional-Differential Equations. *Submetido para publicação.*
- [38] Hernández, E. & Diagana, T., On Pseudo Almost Periodic Solutions for Neutral Functional-Differential Equations. *Submetido para publicação.*
- [39] Hernández, E. & Diagana, T., Pseudo Almost Periodic Solutions for Abstract Partial Neutral Integrodifferential Equations. *Submetido para publicação.*
- [40] Hernández, E., Henríquez H. R. & Rabello, M., Existence of Solutions for Impulsive Partial Neutral Functional Differential Equations. *Submetido para publicação.*
- [41] Hernández, E. & Henríquez, Hernán., Impulsive partial neutral differential equations. *Appl. Math. Lett.* 19 (2006), no. 3, 215-222.
- [42] Hernández, E., Pierri M. & Táboas, P., A comment on the papers: “ A study on controllability of semilinear integrodifferential systems in Banach spaces ” [*Comput. Math. Appl.* 47 (2004), no. 4-5] and “ Controllability of neutral functional integrodifferential systems in Banach spaces ” [*Comput. Math. Appl.* 39 (2000), no. 1-2]”. *Comput. Math. Appl.* 50 (2005), no. 8-9, 1291-1292.
- [43] Hernández, E., Existence results for partial neutral functional differential equations with nonlocal conditions. *Dynam. Systems Appl.* 11 (2002), no. 2, 241–252.

- [44] Hernández, E. & Henríquez, H. R., Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 221 (1998), no. 2, 452–475.
- [45] Hernández, E., Regularity of solutions of partial neutral functional differential equations with unbounded delay. *Proyecciones* 21 (2002), no. 1, 65–95.
- [46] Hernández, E., Existence results for partial neutral functional integrodifferential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 292 (2004), no. 1, 194–210.
- [47] Hernández, E., dos Santos, J. P. C. & Pelicer, M. L., “ Asymptotically almost periodic and Almost Periodic Solutions for a class of Evolution Equation ” *Electron. J. Diff. Eqns.* Vol. 2004(2004), no. 61, pp. 1-15.
- [48] Hille, E. e Phillips, R. S., *Functional Analysis and Semigroups*. Third printing of the revised edition of 1957. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI.
- [49] Hino, Y., Murakami, S. e Naito, T., *Functional Differential Equations With Infinite Delay*. Lecture Notes in Mathematics, 1473. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [50] Komura, Y., Differentiability of nonlinear semigroups. *J. Math. Soc. Japan* 21 1969 375–402.
- [51] Lizama, C., On Volterra equations associated with a linear operator. *Proc. Amer. Math. Soc.* 118 (1993), no. 4, 1159–1166.
- [52] Lopes, O., Forced oscillations in nonlinear neutral differential equations. *SIAM J. Appl. Math.* 29, 196-201.
- [53] Lopes, O., Stability and forced oscillations. *J. Math. Anal. Appl.* 55, 686-698.
- [54] Hale J. K., Partial neutral functional-differential equations. *Rev. Roumaine Math Pures Appl.* 39 (1994), no. 4, 339-344
- [55] Lunardi, A., *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, PNLDE Vol. 16 , Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [56] Lunardi, A., On the linear heat equation with fading memory. *SIAM J. Math. Anal.* 21 (1990), no. 5, 1213–1224.

- [57] Lunardi, A., Laplace transform methods in integrodifferential equations, *J. Integral Equations Applications*. 10 (1985), 185-211.
- [58] Marle, C., *M. Mesures et Probabilités*. Hermann, Paris, 1974.
- [59] Martin, R. H., *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Robert E. Krieger Publ. Co., Florida, 1987.
- [60] Miller, R. K., An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory. *J. Math. Anal. Appl.* 66 (1978), no. 2, 313-332.
- [61] Nachbin, L., *Introduction to Functional Analysis: Banach Spaces and Differential Calculus*. Translated from the Portuguese by Richard M. Aron. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 60. Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.
- [62] Nunziato, J. W., On heat conduction in materials with memory. *Quart. Appl. Math.* 29 (1971), 187-204.
- [63] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
- [64] Rankin III, S. M., Semilinear evolution equations in Banach spaces with application to parabolic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 336 (1993), no. 2, 523-535.
- [65] Sforza, D., Existence in the large for a semilinear integrodifferential equation with infinite delay. *J. Differential Equations*. 120 (1995), no. 2, 289-303
- [66] Sforza, D., On the Hille-Yosida theorem for integro-differential equations in Banach spaces. *Boll. Un. Mat. Ital.* C (6) 5 (1986), no. 1, 169-173 (1987).
- [67] Travis, C. C. & Webb, G. F., Existence and stability for partial functional differential equations. *Trans. Amer. Soc.* 200 (1974), 395-418.
- [68] Travis, C. C. & Webb, G. F., Partial differential equations with deviating arguments in the time variable. *J. Math. Anal. Appl.* 56 (1976), no. 2, 397-409.

- [69] Travis, C. C. & Webb, G. F., Existence, stability, and compactness in the α -norm for partial functional differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 240 (1978), 129–143.
- [70] Travis, C. C. & Webb, G. F., Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 32 (1978) 76–96.
- [71] Travis, C. C. & Webb, G. F., Compactness, regularity, and uniform continuity properties of strongly continuous cosine families. *Houston J. Math.* 3 (4) (1977) 555–567.
- [72] Wu, J., *Theory and Applications of Partial Functional-Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, 119. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [73] Wu, J. & Xia, H., Rotating waves in neutral partial functional-differential equations. *J. Dynam. Differential Equations*. 11 (1999), no. 2, 209–238.
- [74] Wu, J. & Xia, H., Self-sustained oscillations in a ring array of coupled lossless transmission lines. *J. Differential Equations*, 124 (1996), no. 1, 247–278.