BIFURCAÇÃO DE HOPF
COM SIMETRIA

- *Célia Junko Manabe* -

- *Hildebrando Munhoz Rodrigues* -
Orientador

Dissertação apresentada ao
Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos -
USP, para a obtenção do
título de Mestre em
Matemática.

- SÃO CARLOS - 1991 -

*Ao meu pai e
à memória da minha mãe
com eterna gratidão.*

感謝を込めて父母へ

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues pela paciência e atenção dedicadas na orientação deste trabalho.
- Ao Prof. Dr. Carlos Biasi pelos inúmeros auxílios e incentivos.
- A Prof^a. Dr^a. Maria Aparecida Soares Ruas pela colaboração e apoio.
- Aos demais professores e servidores do ICMSC-USP que de alguma forma colaboraram neste trabalho.
- Aos colegas do IBILCE - UNESP - Campus de São José do Rio Preto. pelas condições favoráveis que me foram propiciadas.
- Ao Getulio Ap. Salinas que com capricho inestimável auxiliou-me no trabalho de digitação.
- Ao CNPq e Capes pelo auxílio financeiro.
- Aos amigos pelo apoio, em especial ao Peter cujas palavras de estímulo estiveram sempre constantes.
- A minha família pela formação, amparo e incentivo
- Agradeço enfim a todas as pessoas, que de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

In this work we discuss the standard Hopf Bifurcation Theorem, but our main purpose is to analyse Hopf Bifurcation for symmetric differential equations. In this case it is given an application that involves coupled Van der Pol equations.

The main tools used here are the Liapunov-Schmidt Method and Group Representations techniques.

ÍNDICE

Introdução	i
------------------	---

CAPÍTULO 1

Representação de Grupos

1.1. Grupos de Lie	1
1.2. Ação de Grupos	3
1.3. Irredutibilidade de Representações	6
1.4. Decomposição Isotípica	9
1.5. Funções Equivariantes e Irredutibilidade Absoluta.....	14
1.6. Órbitas e Subgrupos de Isotropia.....	19

CAPÍTULO 2

Redução de Liapunov-Schmidt

2.1. Redução de Liapunov-Schmidt	23
2.2. Redução de Liapunov-Schmidt Equivariante	36
2.3. Soluções Invariantes	40

CAPÍTULO 3

Bifurcação de Hopf.

3.1. Aplicação do Redução de Liapunov-Schmidt	43
3.2. Determinação de Bases do $\ker(L)$ e $\ker(L^*)$	48

3.3. Forma Normal da Função de Bifurcação	53
3.4. Teorema de Hopf	61
3.6. Exemplo	73

CAPÍTULO 4

Bifurcação de Hopf Equivariante

4.1. Apresentação do Problema	76
4.2. Condição Sobre os Auto Valores.....	77
4.3. Aplicação da Redução de Liapunov Schmidt Equivariante	88
4.4. Analisando os Subespaços $\text{Fix}(\Sigma)$	89
4.5. Forma Normal da Função de Bifurcação	93
4.6. Teorema de Hopf Equivariante	103
4.7. Exemplo	107

BIBLIOGRAFIA	115
--------------------	-----

INTRODUÇÃO

Apresentamos neste trabalho um estudo do Teorema da Bifurcação de Hopf com simetria.

Mais precisamente dada uma família de equações diferenciais ordinárias a um parâmetro do tipo:

$$x' = F(x, \alpha)$$

analisaremos a existência de soluções periódicas bifurcando de uma solução estacionária com a hipótese adicional de que F é equivariante em relação a ação de algum grupo de Lie compacto Γ , i.e.,

$$F(\gamma.x, \alpha) = \gamma.F(x, \alpha) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Verificamos também como a simetria anterior pode ser transferida para as soluções da equação inicial.

O assunto que tratamos tem sua origem nos trabalhos de Poincaré por volta de 1892, e foi extensivamente discutido por Andronov, Witt entre outros, por volta de 1930. No entanto, o trabalho básico foi apresentado por Hopf em 1942 [9].

As hipóteses assumidas por Hopf apresentaram por vezes restrições na aplicação da teoria, de modo que ao longo do tempo obtiveram-se resultados um pouco mais gerais. Entre esses resultados citamos o Teorema de Hopf Equivariante, que será objeto de nossos estudos.

No primeiro capítulo deste trabalho apresentamos as principais definições e resultados a respeito da teoria de representação de grupos, que serão utilizados no decorrer do trabalho..

No capítulo 2 apresentamos os Método de Redução de Liapunov-Schmidt e uma versão da Redução aplicada a equações equivariantes em relação a ação de algum grupo de Lie compacto. Denominamos tal método de Redução Liapunov-Schmidt equivariante, e o utilizamos para analisarmos soluções invariantes de equações equivariantes.

No capítulo 3 apresentamos uma demonstração do Teorema de Bifurcação de Hopf na qual utilizamos como ferramenta a Redução Liapunov-Schmidt e a forma normal das funções S^1 -equivariantes.

Finalmente no capítulo 4 demonstramos o Teorema de Hopf equivariante e fornecemos um exemplo aplicado a duas equações de Van der Pol acopladas, utilizando a ação do grupo diedral D_4 .

Na abordagem dos tópicos deste trabalho seguimos a linha adotada por Golubitsky [5], e o exemplo aplicativo teve sua motivação no trabalho de Swift [10].

CAPÍTULO I

REPRESENTAÇÃO DE GRUPOS

Apresentaremos neste capítulo alguns pré-requisitos, sobre representação de grupos, para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

1.1 GRUPOS DE LIE

Definição 1.1 Definimos um grupo de Lie como sendo um subgrupo fechado de $Gl(n)$, o grupo das transformações lineares inversíveis do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Exemplos 1.2 São exemplos de grupos de Lie:

(a) O grupo ortogonal n -dimensional $O(n) = \{ A \in Gl(n) / A.A^t = Id \}$. Em particular, o grupo $O(2)$ é o grupo gerado pelas rotações $R(\theta)$ no plano e pela reflexão k , onde,

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) O grupo n-dimensional das rotações $SO(n) = \{ A \in O(n) / \det A = 1 \}$.

Em particular, o grupo $SO(2)$ é o grupo gerado pelas rotações $R(\theta)$, que identificaremos com o grupo $S^1 = \mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)$.

(c) O grupo, de ordem n , das matrizes gerado por $R(\frac{2\pi}{n})$, o qual identificaremos com o grupo cíclico de ordem n , $\mathbb{Z}_n$.

(d) O grupo das matrizes 2×2 geradas por $R(\frac{2\pi}{n})$ e k , o qual identificaremos com o grupo dihedral D_n , de ordem $2n$, gerado por $\mathbb{Z}_n$ e um elemento de ordem 2 que não comuta com $\mathbb{Z}_n$.

(e) Todos os grupos finitos de $GL(n)$ são grupos de Lie.

(f) O grupo das matrizes de $GL(2n)$ da forma:

$$\begin{bmatrix} R(\theta_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(\theta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R(\theta_n) \end{bmatrix}$$

que é isomorfo ao toro n-dimensional $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$.

(g) O grupo das matrizes de $GL(n+1)$ da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$, o qual é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3 Um grupo de Lie é compacto se for compacto como subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Exemplos 1.4 Os grupos, $O(n)$, $SO(n)$, $\mathbb{T}^n$ e todos os grupos finitos são exemplos de grupos de Lie compactos.

1.2 AÇÃO DE GRUPOS

Definição 1.5 Seja Γ um grupo de Lie e V um espaço vetorial topológico. A ação de Γ em V é uma função contínua,

$$\begin{aligned}\Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (\gamma, v) &\longrightarrow \gamma.v\end{aligned}$$

tal que:

(a) Para cada $\gamma \in \Gamma$ a aplicação:

$$\begin{aligned}\rho(\gamma): V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow \rho(\gamma)(v) = \gamma.v\end{aligned}$$

é linear.

(b) Se γ_1 e γ_2 pertencem a Γ então $\gamma_1.(\gamma_2.v) = (\gamma_1.\gamma_2).v$.

A aplicação:

$$\begin{aligned}\Gamma &\longrightarrow Gl(V) \\ \gamma &\longrightarrow \rho(\gamma)\end{aligned}$$

onde $Gl(V)$ é o grupo das transformações inversíveis de V em V , é denominada representação de Γ em V .

Observação 1.6 Devido a (a) usualmente a ação de Γ em V será definido apenas pela ação dos geradores de Γ .

Exemplo 1.7 São exemplos de ação de grupos:

(a) A ação trivial

$$\begin{aligned}\Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (\gamma, v) &\longrightarrow v\end{aligned}$$

(b) A ação natural do grupo Γ de $Gl(n)$ em $\mathbb{R}^n$ dada pela multiplicação de matrizes:

$$\begin{aligned}\Gamma \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\gamma, v) &\longrightarrow \gamma \cdot v\end{aligned}$$

(c) A ação de S^1 em $\mathbb{C}$ dada por:

$$\begin{aligned}S^1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\longrightarrow e^{ik\theta} z\end{aligned}$$

para algum inteiro $k \in \mathbb{Z}$.

(d) A ação de $O(2)$ em $\mathbb{C}$ dada por:

$$\begin{aligned}O(2) \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\longrightarrow e^{ik\theta} z \\ (k, z) &\longrightarrow \bar{z}\end{aligned}$$

(e) A ação de $\Gamma \subseteq Gl(n)$ em M_n , o espaço das matrizes $n \times n$ dada pela similaridade:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times M_n & \longrightarrow & M_n \\ (\gamma, A) & \longrightarrow & \gamma \cdot A \cdot \gamma^{-1} \end{array}$$

Definição 1.8 Seja Γ um grupo de Lie, V e W espaços vetoriais n -dimensionais, dizemos que as ações:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times V & \longrightarrow & V \\ (\gamma, v) & \longrightarrow & \gamma \cdot v \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \Gamma \times W & \longrightarrow & W \\ (\gamma, w) & \longrightarrow & \gamma * w \end{array}$$

são Γ -isomorfas ou equivalentemente que V e W são Γ -isomorfas, se existir um isomorfismo linear $\psi : V \longrightarrow W$ tal que:

$$\psi(\gamma \cdot v) = \gamma * \psi(v) \quad \forall \gamma \in \Gamma \text{ e } v \in V.$$

Denominamos de Γ -isomorfismo um isomorfismo ψ que satisfaz as condições anteriores.

Exemplo 1.9 Consideremos as ações:

$$\begin{array}{ccc} O(2) \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\theta, z) & \longrightarrow & \theta \cdot z = e^{ik\theta} z \\ (k, z) & \longrightarrow & k \cdot z = \bar{z} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} O(2) \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\theta, z) & \longrightarrow & \theta \cdot z = e^{-ik\theta} z \\ (k, z) & \longrightarrow & k \cdot z = \bar{z} \end{array}$$

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} \psi: \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & \bar{z} \end{array}$$

é um Γ -isomorfismo. Logo as duas ações acima são $O(2)$ -isomorfas.

1.3 - IRREDUTIBILIDADE DE REPRESENTAÇÕES

Muitas vezes é interessante observarmos que uma dada representação pode ser decomposta em representações de análise mais simples. Com esse objetivo introduziremos a seguinte definição:

Definição 1.10 Seja Γ um grupo de Lie agindo no espaço vetorial V de dimensão finita.

- (i) Um subespaço $W \subseteq V$ é Γ -invariante se $\gamma.w \in W$, $\forall \gamma \in \Gamma$ e $\forall w \in W$.
- (ii) A ação de Γ em V é Γ -irredutível, ou equivalentemente, V é um espaço Γ -irredutível, se os únicos subespaços Γ -invariantes de V são $\{0\}$ e V . Caso contrário diremos que é Γ -redutível.
- (iii) Um subespaço $W \subseteq V$ é Γ -irredutível se W é Γ -invariante e a ação de Γ em W é irredutível. Caso contrário diremos que é Γ -redutível.

Observação 1.11 Os subespaços que consideraremos daqui, até o restante da secção, serão tomados todos de dimensão finita.

Exemplos 1.12

- (a) A ação usual do $SO(2)$ em $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\begin{aligned} SO(2) \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, (x, y)) &\longrightarrow R(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é irredutível, pois não possui subespaço unidimensional $SO(2)$ -invariante.

(b) A ação de $O(2)$ em $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\begin{aligned} O(2) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, (x, y, z)) &\longrightarrow \begin{bmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (k, (x, y, z)) &\longrightarrow (x, -y, -z) \end{aligned}$$

é $O(2)$ -redutível.

Os subespaços $V_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e $V_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$ são subespaços próprios e $O(2)$ -invariantes do $\mathbb{R}^3$.

Proposição 1.13 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V , e $W \leq V$ um subespaço Γ -invariante. Então existe um subespaço U de V , Γ invariante, tal que $V = W \oplus U$.

Demonstração: O subespaço U é tomado como sendo o suplemento ortogonal de W em relação ao produto interno definido através da integral de Haar.

Ver Golubitsky [5]. ■

Teorema 1.14 (Teorema da Completa Redutibilidade).

Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existem subespaços Γ -irredutíveis $V_1, V_2, \dots, V_s$ de V tal que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$.

Demonstração: Assumamos $V \neq \{0\}$ e Γ -redutível. Seja V_1 um subespaço Γ -invariante de dimensão mínima. Pela Proposição 1.13 existe um subespaço Γ -invariante U tal que $V_1 \oplus U = V$, reinicia-se o processo agora com U .

Como V é um espaço de dimensão finita existirá um número finito de subespaço, $V_1, V_2, \dots, V_s$ tal que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$. ■

Exemplos 1.15

(a) No Exemplo 1.12.(b) temos que $V = \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, onde V_1 e V_2 são subespaços $O(2)$ -irredutíveis.

(b) Seja V o espaço das matrizes reais, 3×3 , simétricas e de traço zero. Consideremos a seguinte ação:

$$\begin{aligned} SO(2) \times V &\longrightarrow V \\ (\theta, A) &\longrightarrow \begin{bmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \end{aligned}$$

Se,

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \\ c & d & 0 \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Temos que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, onde V_1 , V_2 e V_3 são subespaços $O(2)$ -irredutíveis.

(c) Seja V espaço das matrizes 2×2 e consideremos a ação:

$$\begin{aligned} SO(2) \times V &\longrightarrow V \\ (\theta, A) &\longrightarrow R(\theta)A. \end{aligned}$$

Seja:

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} c & c \\ d & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Os subespaços V_1, V_2, V_3 são $SO(2)$ -irredutíveis e $V = V_1 \oplus V_2$ e $V = V_1 \oplus V_3$.

1.4 DECOMPOSIÇÃO ISOTÍPICA

Pelo Exemplo 1.15.(c) observamos que a decomposição descrita no Teorema 1.14 não é única, no entanto existem resultados interessantes, um pouco mais informativos, que apresentaremos nesta secção.

Lema 1.16 Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Se $V = \sum_{\alpha} V_{\alpha}$ com V_{α} Γ -isomorfo a um subespaço Γ -irredutível U , então existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, tais que $V = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_k}$.

Demonstração: Façamos a demonstração por recorrência.

Suponhamos que determinamos

$$V' = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_{t-1}} \subseteq V.$$

Se $V' = V$ nada temos a demonstrar.

Se $V' \neq V$, existe V_{α_t} tal que não está contido em V' . Como $V_{\alpha_t} \cap V'$ é Γ -invariante e V_{α_t} é Γ -irredutível temos que $(V_{\alpha_t} \cap V') = \{0\}$.

Consideremos agora o subespaço $V'' = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_t}$ e recomeçamos o processo.

Como V é de dimensão finita, existirá um k tal que

$$V = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_k} \quad \blacksquare$$

Lema 1.17 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Se $V = \sum V_{\alpha_i}$, com cada V_{α_i} Γ -isomorfo a um subespaço U , Γ -irredutível e não nulo de V , então todo subespaço não nulo de V é Γ -isomorfo a U .

Demonstração: Pelo Lema 1.16 podemos considerar $V = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_k}$ onde V_{α_i} , $i = 1, 2, \dots, k$, é Γ -isomorfo a U .

Seja W um subespaço não nulo Γ -irredutível de V . Então existe um único $t \in \mathbb{N}$ tal que:

$$W \not\subseteq V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_{t-1}} \quad \text{e} \quad W \subseteq V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_{t-1}} \oplus V_{\alpha_t} \quad (1.1)$$

Pela irredutibilidade de W :

$$W \cap \left(V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_{t-1}} \right) = \{0\}$$

Consideremos a seguinte projeção sobre V_{α_t} :

$$\Pi : V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_{t-1}} \oplus V_{\alpha_t} \longrightarrow V_{\alpha_t}$$

Devido a (1.1), $\Pi|_W : W \longrightarrow \Pi(W)$ é um Γ -isomorfismo de W sobre $\Pi(W) \subseteq V_{\alpha_t}$.

Mas $(\Pi(W) \cap V_{\alpha_t})$ é um subespaço Γ -invariante contido em V_{α_t} que é Γ -irredutível, logo ou

$$(\Pi(W) \cap V_{\alpha_t}) = \{0\} \quad \text{ou} \quad (\Pi(W) \cap V_{\alpha_t}) = W$$

Como $W \neq \{0\}$ temos que $\Pi(W) = V_{\alpha_t}$.

Logo W será Γ -isomorfo a U . ■

Lema 1.18 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Sejam U e W subespaços Γ -invariantes de V tal que não há dois subespaços Γ -irredutíveis $U_0 \subseteq U$ e $W_0 \subseteq W$, Γ -isomorfos. Então $(U \cap W) = \{0\}$ e se $Z \subseteq (U \oplus W)$ é Γ -irredutível então $Z \subseteq U$ ou $Z \subseteq W$.

Demonstração: Suponhamos que $(U \cap W) \neq \{0\}$. Temos que $(U \cap W) \subseteq W$ e $(U \cap W) \subseteq U$. O subespaço $(U \cap W)$ é Γ -irredutível ou $(U \cap W)$ é Γ -redutível e no segundo caso pelo Teorema 1.14 existirá um subespaço Γ -irredutível contido em $(U \cap W)$. Em ambos os casos estaremos contrariando a hipótese.

Logo $U \cap W = \{0\}$.

Suponhamos que $Z \subseteq (U \oplus W)$ e que $Z \not\subseteq U$ e $Z \not\subseteq W$. Temos que $(Z \cap U)$ e $(Z \cap W)$ são Γ -invariantes, mas como Z é Γ -irredutível, $(Z \cap U) = \{0\}$ ou $(Z \cap U) = Z$ e $(Z \cap W) = \{0\}$ ou $(Z \cap W) = Z$. Porém $(Z \cap U) = Z$ implica que $Z \subseteq U$, e $Z \cap W = Z$ implica que $Z \subseteq W$, o que contraria nossa hipótese.

Logo $(Z \cap U) = (Z \cap W) = \{0\}$.

Definamos as projeções:

$$\begin{array}{ccc} \Pi|_U : U \oplus W & \longrightarrow & U \\ (u + w) & \longrightarrow & u \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Pi|_W : U \oplus W & \longrightarrow & W \\ (u + w) & \longrightarrow & w \end{array}$$

As projeções acima restritas a Z são Γ -isomorfismos sobre a imagem. Logo, $\Pi|_U(Z) \subseteq U$ e $\Pi|_W(Z) \subseteq W$ são subespaços Γ -isomorfos e Γ -irredutíveis. O que contraria nossa hipótese.

Portanto $Z \subseteq U$ ou $Z \subseteq W$.

Teorema 1.19 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existe um número finito de subespaços Γ -irredutíveis de V não Γ -isomorfos entre si. Denominêmo-los $U_1, U_2, \dots, U_s$ e se W_k é a soma de todos os subespaços Γ -irredutíveis W de V , tal que W é Γ -isomorfo a U_k , então existe uma decomposição de V como:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s.$$

Demonstração: Seja U_1 um subespaço Γ -irredutível de V e W'_1 a soma de todos os subespaços Γ -isomorfos a U_1 . Se $W'_1 \neq V$, pela Proposição 1.13, existe um subespaço Z_2 , Γ -invariante tal que $V = W'_1 \oplus Z_2$ e então repetimos o processo para Z_2 obtendo W'_2 .

Como V é um espaço vetorial de dimensão finita existe $s \in \mathbb{N}$ tal que:

$$V = W'_1 \oplus W'_2 \oplus \dots \oplus W'_s.$$

Seja U um subespaço Γ -irredutível de V . Temos que $U \subseteq W'_1 \oplus \dots \oplus W'_s$,

onde não existem $X_i \subseteq W'_1$ e $X_j \subseteq W'_j$ Γ -isomorfos com $i \neq j$. Pelo Lema 1.18, $U \subseteq W'_k$ para algum k , mas $W'_k = \sum_i M_i$ onde os M_i são Γ -isomorfos a U_k então pelo Lema 1.17 U é Γ -isomorfo a U_k . Assim existe um número finito $U_1, U_2, \dots, U_s$ de subespaços Γ -irredutíveis, não Γ -isomorfos e a menos de reordenação $W_i = W'_i$. Portanto $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$. ■

Definição 1.20 Definimos os subespaços W_k dados no teorema anterior como componentes isotópicas de V do tipo U_k e a decomposição $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$ como sendo a decomposição isotópica de V .

Corolário 1.21 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Se existir uma decomposição de V em subespaços $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$ onde os V_i não são Γ -isomorfos, então estes são os únicos subespaços Γ -irredutíveis não nulos de V . E a decomposição anterior é a decomposição isotópica.

Demonstração: Seja $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ a decomposição isotópica de V . Cada V_j é isomorfo a algum U_k então $V_j \subseteq W_k$, logo $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s \subseteq W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$, e portanto a menos de um rearranjo $V_j = W_j$.

Se $W \neq \{0\}$ é um subespaço Γ -irredutível de V , pelo Teorema 1.19, $W \subseteq W_i = V_i$ para um único i . Mas $(W \cap V_i)$ é um subespaço Γ -invariante não nulo em V_i , que é Γ -irredutível, então $W \cap V_i = V_i$. Logo $W = V_i$.

Portanto os únicos subespaços Γ -irredutíveis não nulos de V , são os V_i com $i = 1, 2, \dots, s$. ■

1.5 - FUNÇÕES EQUIVARIANTES E IRREDUTIBILIDADE ABSOLUTA

Introduziremos a seguir conceitos que serão extensivamente utilizados nos próximos capítulos.

Definição 1.22 Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Dizemos que uma aplicação $f : V \longrightarrow V$ comuta com a ação de Γ ou que é Γ -equivariante se:

$$f(\gamma.v) = \gamma.f(v) \quad \forall \gamma \in \Gamma \text{ e } \forall v \in V.$$

Definição 1.23 Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Se as únicas aplicações lineares de V em V que comutam com a ação são múltiplos reais da identidade, dizemos que ação de Γ em V é absolutamente irredutível.

Exemplo 1.24

(a) Consideremos a ação:

$$\begin{array}{ccc} SO(2) \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\theta, (x, y)) & \longmapsto & R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{array}$$

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de um operador de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que

$R(\theta).A = A.R(\theta) \quad \forall \theta \in SO(2)$. Em particular para $\theta = \frac{\pi}{2}$, teremos que $-c = b$ e $a = d$.

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Um cálculo natural mostra que qualquer matriz do tipo acima comuta com qualquer $R(\theta)$.

Assim as aplicações lineares $SO(2)$ -equivariantes sob a ação acima são do tipo (1.2).

Portanto a ação acima não é $SO(2)$ -absolutamente irredutível.

(b) Consideremos a ação:

$$\begin{array}{ccc} O(2) \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\theta, (x, y)) & \longrightarrow & R(\theta) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ (k, (x, y)) & \longrightarrow & k \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{array}$$

Se A comuta com $R(\theta)$ temos de (a) que A é da forma (1.2), impondo que $k.A = A.k$ temos que $A = a.Id$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

Logo a ação acima é $O(2)$ -absolutamente irredutível.

Proposição 1.25 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Se a ação de Γ é absolutamente irredutível então a ação é Γ -irredutível.

Demonstração: Suponhamos que a ação não seja irredutível. Então existe um subespaço próprio $W \subseteq V$, Γ -invariante. Pela Proposição 1.13 existe um subespaço U , Γ -invariante de V , tal que $V = W \oplus U$.

Definamos a projeção:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_W : W \oplus U & \longrightarrow & V \\ (w+u) & \longrightarrow & w \end{array}$$

A projeção Π_W é Γ -equivariante, porém não é um múltiplo real da identidade, uma contradição.

Logo a ação é Γ -irredutível. ■

Observação 1.26 A recíproca da proposição anterior não é verdadeira. A ação usual do $SO(2)$, Exemplo 1.24.(a), é $SO(2)$ -irredutível mas não é $SO(2)$ absolutamente irredutível.

Analisaremos agora o comportamento das funções equivariantes em relação à decomposição isotípica.

Lema 1.27 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V , $A : V \longrightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante e $W \subseteq V$ um subespaço Γ -irredutível. Então $A(W) = \{0\}$ ou A é um Γ -isomorfismo de W em $A(W)$.

Demonstração: Como A é Γ -equivariante, $\ker(A)$ é Γ -equivariante e então $(\ker(A) \cap W)$ é um subespaço Γ -invariante em W . Como W é Γ -irredutível ou:

- (i) $(\ker(A) \cap W) = W$, i.e., $W \subseteq \ker(A)$ e então $A(W) = \{0\}$, ou
- (ii) $(\ker(A) \cap W) = \{0\}$ e então $A|_W : W \longrightarrow A(W)$ é um Γ isomorfismo. ■

Teorema 1.28 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V , $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$ a decomposição isotípica de V e $A : V \longrightarrow V$ uma

aplicação linear Γ -equivariante. Então $A(W_k) \subseteq W_k$ para $k = 1, 2, \dots, s$.

Demonstração: Da definição de decomposição isotípica e do Lema 1.16 existe t tal que $W_k = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_t$ onde os V_i são Γ -isomorfos a um subespaço Γ -irredutível U_k . Pelo Lema 1.27 $A(V_1) = \{0\}$ ou $A(V_1)$ será Γ -isomorfo a U_k . Em ambos os casos $A(V_1) \subseteq W_k$ e da linearidade de A temos que $A(W_k) \subseteq W_k$. ■

Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo irredutivelmente em V . Consideremos o seguinte conjunto:

$$E_\Gamma = \{A : V \longrightarrow V / A.\gamma = \gamma.A ; \forall \gamma \in \Gamma\} \quad (1.3)$$

Verifiquemos que é possível fazer uma classificação dos E_Γ . Para este fim utilizaremos a seguinte definição:

Definição 1.29 Um anel associativo $(A, +, \cdot)$ é denominado uma álgebra associativa sobre K se A é um espaço vetorial de dimensão finita sobre K tal que $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ para todo $a, b \in A$ e $\alpha \in K$.

Um álgebra associativa é chamado de álgebra com divisão se como anel é um anel com divisão, i.e, seus elementos não nulos formam um grupo com a multiplicação.

Proposição 1.30 O conjunto E_Γ definido em (1.3) é uma álgebra de divisão

com a soma, a composição e a multiplicação por escalar usual.

Demonstração: É fácil observarmos que E_Γ é uma álgebra associativa com as operações dadas.

Mostremos então que todo elemento de E_Γ possui inverso multiplicativo.

Seja $A \in E_\Gamma$, $A \neq 0$ e consideremos a aplicação linear definida por:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 : E_\Gamma & \longrightarrow & E_\Gamma \\ X & \longrightarrow & X.A \end{array}$$

Afirmamos que φ_1 é injetiva. Com efeito, se $\varphi_1(X) = 0$, i.e., $X.A = 0$, temos do Lema 1.27 que $X = 0$ ou que X é um Γ -isomorfismo, e neste último caso teríamos $A = 0$, o que é uma contradição. Logo $X = 0$.

Desde que E_Γ é um espaço de dimensão finita temos que φ_1 é sobrejetora. Logo como o operador identidade Id pertence a E_Γ existe $B \in E_\Gamma$ tal que $BA = Id$.

Analogamente considerando

$$\begin{array}{ccc} \varphi_2 : E_\Gamma & \longrightarrow & E_\Gamma \\ X & \longrightarrow & A.X \end{array}$$

existirá $C \in E_\Gamma$ tal que $A.C = Id$.

$$\text{Logo } B.A = Id = A.C$$

$$\text{Porém } B = B.Id = B(A.C) = (B.A)C = Id.C = C.$$

Logo existe $B \in E_\Gamma$ tal que $B.A = Id = A.B$, i.e., A é inversível.

Portanto E_Γ é uma álgebra com divisão. ■

Assumiremos o seguinte teorema cuja a demonstração pode ser encontrada em Felzenszwald [2].

Teorema 1.31 (Teorema de Frobenius)

As únicas álgebras de divisão sobre os reais são (a menos de isomorfismo de álgebra) o corpo dos números reais $\mathbb{R}$, o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e a álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$.

Corolário 1.32 E_Γ é sempre isomorfo ao $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Corolário 1.33 A ação de Γ sobre V é absolutamente irredutível se e somente se E_Γ é isomorfo a $\mathbb{R}$.

1.6 ÓRBITAS E SUBGRUPOS DE ISOTROPIA

Damos nesta última secção mais alguns conceitos que utilizaremos no decorrer do trabalho

Definição 1.34 Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Definimos a órbita de x sob ação de Γ como sendo o conjunto $\{ \gamma.x / \gamma \in \Gamma \}$.

Observação 1.35 Se f é uma função Γ -invariante e $f(x) = 0$, então f se anula na órbita de x .

Definição 1.36 Definimos um subgrupo de isotropia de $x \in V$ como sendo o subgrupo $\Sigma_x = \{ \gamma \in \Gamma / \gamma.x = x \}$.

Proposição 1.37 Se Γ é um grupo de Lie agindo em V então, pontos de uma mesma órbita de Γ tem subgrupos de isotropia conjugados, mais precisamente para todo $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$ temos $\Sigma_{\gamma x} = \gamma . \Sigma_x . \gamma^{-1}$.

Demonstração: Basta observarmos que para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$ temos,

$$\begin{aligned} \sigma \in \Sigma_{\gamma x} &\Leftrightarrow \sigma(\gamma.x) = \gamma.x \Leftrightarrow \gamma^{-1}.\sigma.\gamma(x) = x \Leftrightarrow \gamma^{-1}.\sigma.\gamma \in \Sigma_x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma \in \gamma . \Sigma_x . \gamma^{-1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 1.38 Seja Σ um subgrupo de isotropia do grupo de Lie Γ e $\gamma \in \Gamma$. Definimos como subgrupo conjugado de Σ o subgrupo:

$$\gamma.\Sigma.\gamma^{-1} = \{ \gamma.\sigma.\gamma^{-1} / \sigma \in \Sigma \}$$

e como classe de conjugação de Σ o conjunto de todos os subgrupos de Γ que são conjugados a Σ .

Definição 1.39 Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Uma órbita-tipo é o conjunto de todos os pontos de V que possuem subgrupos de isotropia conjugados.

Exemplo 1.40

Consideremos a ação:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{D}_n \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
(\xi, z) & \longrightarrow & e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot z \\
(k, z) & \longrightarrow & \bar{z}
\end{array}$$

A ação acima pode ser interpretada geometricamente como as simetrias de um polígono regular com n lados com um dos vértices no eixo real.

fig.1.1 Órbitas da ação de D_5 em $\mathbb{C}$

Suponhamos que n é ímpar e determinemos as órbitas-tipo da ação.

Consideremos inicialmente um ponto $z \neq 0$, sob o vértice do polígono que está sob o eixo real. Sabemos que o subgrupo de isotropia de z é o subgrupo gerado por k . A órbita de z é constituída pelos outros vértices do polígono. Logo, pela Proposição 1.37, os vértices possuem subgrupos de isotropia conjugados. Temos também que $\Sigma_{tz} = \Sigma_z$ com $t \neq 0$, devido à linearidade da ação. Portanto todos os pontos nas retas que ligam os vértices à origem possuem subgrupos de isotropia conjugados, o

que implica que estão na mesma órbita-tipo.

Consideremos agora um ponto próximo ao eixo real mas não no eixo real. Sua órbita possui $2n$ elementos e seu grupo de isotropia é apenas a identidade e utilizando a linearidade observamos que todos os pontos diferentes da origem entre as retas vértices-origem possuem subgrupos de isotropia conjugados, portanto estão em uma mesma órbita-tipo.

Finalmente a origem é fixado por todo o $\mathbb{D}_n$ e sua órbita é ele próprio.

Temos assim a seguinte tabela:

Órbita tipo	Subgrupo de isotropia	nº de elem.da órbita
$\{ 0 \}$	$\mathbb{D}_n$	1
$\{ z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z^n)=0, z \neq 0 \}$	$\mathbb{Z}_2$	n
$\{ z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z^n) \neq 0 \}$	1	$2n$

CAPÍTULO II

REDUÇÃO DE LIAPUNOV-SCHIMIDT

Objetivamos introduzir neste capítulo, na secção 2.1, o método de Redução de Liapunov-Schmidt, e na secção 2.2 o método de Redução de Liapunov-Schmidt Equivariante, onde o segundo é uma adaptação do primeiro aplicada a equações equivariantes. Posteriormente, na secção 2.3, analisaremos o comportamento das soluções invariantes quando aplicamos o método equivariante.

2.1 REDUÇÃO DE LIAPUNOV-SCHIMIDT

Sejam X e Y espaços de Banach.

Se $A : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação linear, denotaremos a imagem e núcleo de A respectivamente por $R(A)$ e $\ker(A)$. $\mathcal{L}(X,Y)$ denotará o conjunto das aplicações lineares contínuas de X em Y .

Seja $\Phi : X \times \mathbb{R}^k \longrightarrow Y$ uma aplicação de classe C^1 tal que:

$$\Phi(0,0) = 0.$$

Estamos interessados em resolver:

$$\Phi(x,\alpha) = 0 \quad (2.1)$$

com (x,α) numa vizinhança da origem $(0,0) \in X \times \mathbb{R}^k$.

Seja

$$L = D_x \Phi(0,0) : X \longrightarrow Y$$

a derivada de Frechet de Φ na origem em relação a X .

Suponhamos satisfeita a hipótese:

(H_1) $R(L)$ é fechado em Y e

$\ker(L)$ e $R(L)$ possuem suplementos topológicos respectivamente em X e Y , i.e., existem subespaços M e N tais que:

$$X = M \oplus \ker(L) \quad \text{e} \quad Y = N \oplus R(L) \quad (2.2)$$

e

$$\begin{array}{ccc} M \times \ker(L) & \longrightarrow & X \\ (x_1, x_2) & \longrightarrow & x_1 + x_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} N \times R(L) & \longrightarrow & Y \\ (y_1, y_2) & \longrightarrow & y_1 + y_2 \end{array}$$

são homeomorfismos.

Um caso particularmente interessante onde (H_1) é satisfeita é o caso em que :

(H'_1) L é um operador de Fredholm, i.e., L é um operador contínuo tal que:

- (a) $\dim \ker(L) < \infty$.
- (b) $\operatorname{codim} R(L) < \infty$. (2.3)
- (c) $R(L)$ é fechada .

Para nossos propósitos assumiremos o seguinte teorema cujo demonstração pode ser encontrada em Köthe [8].

Teorema 2.1 Um subespaço fechado M de um espaço de Banach X tem um suplemento topológico se e somente se existe uma projeção $P \in \mathcal{L}(X, X)$ tal que $M = R(P)$. Então $X = M \oplus N$ onde $N = \ker(P)$, enquanto X/N é topologicamente isomorfo a M .

Lema 2.2 Suponhamos (H_1) satisfeita. Então existem projeções contínuas $P \in \mathcal{L}(X, X)$ e $Q \in \mathcal{L}(Y, Y)$ tais que:

$$\ker(L) = R(P) \text{ e } R(L) = \ker(Q) \quad (2.4)$$

e a restrição de L ao $\ker(P) = M$ possui inversa contínua

$$K : R(L) \longrightarrow M \quad (2.5)$$

tal que

$$K.L = I - P \quad L.K = Id_{R(L)}. \quad (2.6)$$

Demonstração: A existência de P e Q seguem do Teorema 2.1.

A restrição de L a M , $L|_M : M \longrightarrow R(L)$, é uma aplicação

linear contínua e bijetora entre espaços de Banach, logo pelo Teorema da Aplicação Aberta existe $K : \text{Im}(L) \longrightarrow M$, inversa contínua de $L|_M$.

Claramente $LK = \text{Id}|_M$ e se $x = x_1 + x_2 \in M \oplus \ker(L)$ temos que

$$KL(x) = KL(x_1 + x_2) = K(L(x_1) + L(x_2)) = KL(x_1) = x_1 = (I-P)x . \quad \blacksquare$$

Lema 2.3 Suponhamos H_1 satisfeita. Se $P(x) = v$ e $(I-P)(x) = w$ então são equivalentes as seguintes afirmações:

$$(i) \quad \Phi(x, \alpha) = 0$$

$$(ii) \quad \begin{cases} (I-Q)\Phi(v+w, \alpha) = 0 & (2.7.a) \\ Q\Phi(v+w, \alpha) = 0 & (2.7.b) \end{cases}$$

Demonstração: Imediata.

Lema 2.4 Suponhamos (H_1) satisfeita. Existirão V, W, Λ vizinhanças da origem, respectivamente no $\ker(L)$, M e $\mathbb{R}^k$, e uma aplicação continuamente diferenciável $w^* : V \times \Lambda \longrightarrow W$ tal que:

(i) Para cada $(v, w, \alpha) \in V \times W \times \Lambda$, (2.7.a) está satisfeita se e somente se

$$w = w^*(v, \alpha).$$

$$(ii) \quad w^*(0, 0) = 0$$

$$(iii) \quad D_v w^*(0, 0) = 0$$

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned} \varphi : \ker(L) \times M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow R(L) \\ (v, w, \alpha) &\longrightarrow (I-Q)\Phi(v+w, \alpha) \end{aligned}$$

Temos que φ é continuamente diferenciável, $\varphi(0,0,0) = 0$ e $D_w \varphi(0,0,0) = L|_M$ que é um isomorfismo pelo Lema 2.2. O resultado segue do Teorema da Função Implícita. ■

O lema anterior permite-nos definir as aplicações:

$$\begin{aligned} x^* : V \times \Lambda &\longrightarrow X \\ (v, \alpha) &\longrightarrow v + w^*(v, \alpha) \end{aligned} \quad (2.8)$$

e

$$\begin{aligned} \Psi : V \times \Lambda &\longrightarrow N \\ (v, \alpha) &\longrightarrow Q\Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha) \end{aligned} \quad (2.9)$$

e então

$$\begin{aligned} x^*(0,0) &= 0 & D_v x^*(0,0) &= I_{\ker(L)} \\ \Psi(0,0) &= 0 & D_v \Psi(0,0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Concluimos assim o resultado principal da Redução de Liapunov-Schmidt.

Teorema 2.5 Suponhamos (H_1) satisfeita. Sejam V, W, Λ vizinhanças da origem dadas no Lema 2.4, x^* e Ψ aplicações definidas em (2.8) e (2.9).

Então para todo $v \in V$ e $x \in V \times W \subseteq X$ e $\alpha \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ são equivalentes as seguintes afirmações:

$$(i) \quad Px = v \quad \text{e} \quad \Phi(x, \alpha) = 0 \quad (2.11)$$

$$(ii) \quad x = x^*(v, \alpha) \quad \text{e} \quad \Psi(v, \alpha) = 0$$

Observação 2.6

(a) A função Ψ definida em (2.9) é denominada Função de Bifurcação e a equação $\Psi(v, \alpha) = 0$ é chamada de Equação de Bifurcação.

(b) Desde que $v \in \ker L$ e $\Psi(v, \alpha) \in N$, quando L é um operador de Fredholm reduzimos (2.1) a um problema em dimensão finita.

Suponhamos, como nos casos que estudaremos posteriormente, que exista um produto interno, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definido em Y e que N seja um suplemento ortogonal de $R(L)$, i.e.,

$$N = R(L)^\perp = \{y \in Y ; \langle y, z \rangle = 0 \forall z \in R(L)\} \quad (2.12)$$

Suponhamos também que N e $\ker(L)$ sejam de dimensão finita como é o caso quando L é um operador de Fredholm.

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_t$ e $v_1^*, v_2^*, \dots, v_s^*$ bases ortogonais de $\ker(L)$ e N respectivamente, e V e Λ as vizinhanças determinadas no Lema 2.4.

Seja $V' \subseteq \mathbb{R}^t$ vizinhança suficientemente próxima da origem tal que se $(x_1, x_2, \dots, x_t) \in V'$ então $x_1 v_1 + \dots + x_t v_t \in V$.

Definimos:

$$\begin{aligned} g_1: V' \times \Lambda &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_t, \alpha) &\longrightarrow \langle v_1^*, \Psi(x_1 v_1 + \dots + x_t v_t, \alpha) \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mas,

$$\begin{aligned}
& \langle v_1^*, \Psi(x_1 v_1 + \dots + x_t v_t, \alpha) \rangle = \\
& = \langle v_1^*, Q\Phi(x_1 v_1 + \dots + x_t v_t + w^*(x_1 v_1 + \dots + x_t v_t, \alpha), \alpha) \rangle = \\
& = \langle v_1^*, \Phi(x_1 v_1 + \dots + x_t v_t + w^*(x_1 v_1 + \dots + x_t v_t, \alpha), \alpha) \rangle.
\end{aligned}$$

Logo, se denotarmos por $v = x_1 v_1 + \dots + x_t v_t$ e $x = (x_1, \dots, x_t)$ temos que:

$$g_1(x, \alpha) = \langle v_1^*, \Phi(x_1 v_1 + \dots + x_t v_t + w^*(x_1 v_1 + \dots + x_t v_t, \alpha), \alpha) \rangle \quad (2.14)$$

e

$$\Psi(v, \alpha) = 0 \iff g_i(x, \alpha) = 0 \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, s.$$

Observação 2.7 Se Ψ_i forem as funções coordenadas de Ψ temos que

$$\Psi_i(v, \alpha) = \frac{g_i(x, \alpha)}{\|v_1^*\|^2}.$$

Se as bases v_i^* , $i = 1, 2, \dots, s$, forem tomadas ortonormais teremos que $\Psi_i(v, \alpha) = g_i(v, \alpha)$.

Proposição 2.8 Supondo w^* e g_i , $i = 1, 2, \dots, s$ suficientemente diferenciáveis, são válidas as seguintes relações:

- (a) $D_v w^*(0, 0) = 0$
- (b) $D_v^2 w^*(0, 0) = -K(I - Q)D_x^2 \Phi(0, 0)$
- (c) $D_{\alpha_1} w^*(0, 0) = -K(I - Q)D_{\alpha_1} \Phi(0, 0)$
- (d) $\frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1}(0, 0) = \langle v_1^*, D_{\alpha_1} \Phi(0, 0) \rangle$

$$(e) \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_j \partial \alpha_1} (0,0) = \langle v_1^*, D_x^2 \Phi(0,0)(v_j, -K(I-Q)D_{\alpha_1} \Phi(0,0)) + D_x D_{\alpha_1} \Phi(0,0)(v_j) \rangle$$

$$(f) \frac{\partial g_1}{\partial x_j} (0,0) = 0$$

$$(g) \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_k \partial x_j} (0,0) = \langle v_1^*, D_x^2 \Phi(0,0)(v_k, v_j) \rangle$$

$$(h) \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1 \partial x_k \partial x_j} (0,0) = \langle v_1^*, D_x^3 \Phi(0,0)(v_j, v_k, v_1) + D_x^2 \Phi(0,0)(W_{kl}, v_j) + \\ + D_x^2 \Phi(0,0)(W_{jl}, v_k) + D_x^2 \Phi(0,0)(W_{jk}, v_1) \rangle$$

onde $W_{kl} = -K(I-Q)D_x^2 \Phi(0,0)(v_k, v_1)$.

Demonstração:

(a) Conforme Lema 2.4, o resultado segue do Teorema da Função Implícita. ■

(b) Sabemos que:

$$(I-Q)\Phi(v+w^*(v,\alpha),\alpha) = 0. \quad (2.15)$$

Diferenciado (2.15) em relação a v e aplicando em $v_1 \in \ker(L)$,

$$(I-Q)D_x \Phi(v+w^*(v,\alpha),\alpha)(v_1 + D_v w^*(v,\alpha)(v_1)) = 0 \quad (2.16)$$

Derivando (2.16) novamente em relação a v e aplicando em v_j

temos:

$$(I-Q)[D_x^2 \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)(v_j + D_v w^*(v, \alpha)(v_j)), (v_1 + D_v w^*(v, \alpha)(v_1)) + \\ + D_x \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)(D_v^2 w^*(v, \alpha)(v_1, v_j))] = 0$$

Na origem temos:

$$(I-Q)[D_x^2 \Phi(0,0)(v_j + D_v w^*(0,0)(v_j))(v_1 + D_v w^*(0,0)(v_1)) + \\ + L(D_v^2 w^*(0,0)(v_1, v_j))] = 0$$

Utilizando (a):

$$(I-Q)[D_x^2 \Phi(0,0)(v_j, v_1)] + LD_v^2 w^*(0,0)(v_1, v_j) = 0$$

Logo,

$$L(D_v^2 w^*(0,0)(v_1, v_j)) = (I-Q)[D_x^2 \Phi(0,0)(v_1, v_j)]$$

Aplicando K em ambos os lados e utilizando (2.6) segue-se que:

$$D_v^2 w^*(0,0)(v_1, v_j) = -K(I-Q)[D_x^2 \Phi(0,0)(v_1, v_j)] \quad \forall v_1, v_j \in \ker(L)$$

Portanto:

$$\hat{D}_v^2 w^*(0,0) = -K(I-Q)D_x^2 \Phi(0,0).$$

(c) Derivando (2.15) em relação a α_1 temos:

$$(I-Q)[D_x \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)(D_{\alpha_1} w^*(v, \alpha)) + D_{\alpha_1} \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)] = 0.$$

Na origem,

$$(I-Q)[LD_{\alpha_1} w^*(0,0) + D_{\alpha_1} \Phi(0,0)] = 0,$$

então como $R(L)=\ker(Q)$ segue-se que:

$$LD_{\alpha_1} w^*(0,0) = -(I-Q)D_{\alpha_1} \Phi(0,0)$$

e aplicando K em ambos os lados e utilizando (2.6) temos:

$$(I-P) D_{\alpha_1} w^*(0,0) = -K(I-Q)D_{\alpha_1} \Phi(0,0).$$

Como $D_{\alpha_1} w^*(0,0) \in M = \ker(P)$ concluímos que

$$D_{\alpha_1} w^*(0,0) = -K(I-Q)D_{\alpha_1} \Phi(0,0).$$

(d) Derivando (2.14) em relação a α_1 temos:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1}(x, \alpha) = \langle v_1^*, D_x \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)(D_{\alpha_1} w^*(v, \alpha)) + D_{\alpha_1} \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha) \rangle \quad (2.17)$$

Na origem temos:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1}(0,0) = \langle v_1^*, LD_{\alpha_1} w^*(0,0) + D_{\alpha_1} \Phi(0,0) \rangle$$

Então de (2.12):

$$\frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1}(0,0) = \langle v_1^*, D_{\alpha_1} \Phi(0,0) \rangle$$

(e) Derivando (2.17) em relação a x_j segue que:

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_j \partial \alpha_1}(x, \alpha) = \langle v_1^*, D_x^2 \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)(v_j + D_v w^*(v, \alpha)(v_j), D_{\alpha_1} w^*(v, \alpha)) +$$

$$\begin{aligned}
& + D_x \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha) (D_v D_{\alpha_1} w^*(v, \alpha)(v_j)) + \\
& + D_x D_{\alpha_1} \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha) (v_j + D_v w^*(v, \alpha)(v_j)) \rangle.
\end{aligned}$$

Na origem,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_j \partial \alpha_1} (0,0) &= \langle v_1^*, D_x^2 \Phi(0,0)(v_j + D_v w^*(0,0)(v_j), D_{\alpha_1} w^*(0,0)) + \\
& + L(D_v D_{\alpha_1} w^*(0,0)(v_j)) + D_x D_{\alpha_1} \Phi(0,0)(v_j + D_v w^*(0,0)(v_j)) \rangle.
\end{aligned}$$

Segue de (a) que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_j \partial \alpha_1} (0,0) &= \langle v_1^*, D_x^2 \Phi(0,0)(v_j, D_{\alpha_1} w(0,0)) + L(D_v D_{\alpha_1} w(0,0)(v_j)) + \\
& + D_x (D_{\alpha_1} \Phi(0,0)(v_j)) \rangle
\end{aligned}$$

Portanto utilizando (b) e (2.12)

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_j \partial \alpha_1} (0,0) = \langle v_1^*, D_x^2 \Phi(0,0)(v_j, -K(I-Q)(D_{\alpha_1} \Phi(0,0)) + D_x D_{\alpha_1} \Phi(0,0)(v_j)) \rangle. \blacksquare$$

(f) Derivando (2.14) em relação a x_j temos

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_j} (x, \alpha) = \langle v_1^*, D_x \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha) (v_j + D_v w^*(v, \alpha)(v_j)) \rangle \quad (2.18)$$

Na origem,

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_j} (0,0) = \langle v_1^*, L(v_j + D_v w^*(0,0)(v_j)) \rangle$$

Portanto de (2.12) concluímos que:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(0,0) = 0$$

(g) Derivando (2.18) em relação a x_k temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_k \partial x_j}(x, \alpha) = & \langle v_1^*, D_x^2 \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)(v_k + D_v w^*(v, \alpha)(v_k), v_j + \\ & + D_v w^*(v, \alpha)(v_j)) + D_x \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha) (D_v^2 w^*(v, \alpha)(v_j, v_k)) \rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_k \partial x_j}(0,0) = & \langle v_1^*, D_x^2 \Phi(0,0)(v_k + D_v w^*(0,0)(v_k), v_j + D_v w^*(0,0)(v_j)) + \\ & + L(D_v^2 w^*(v, \alpha)(v_j, v_k)) \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando (2.12) e (a)

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_k \partial x_j}(0,0) = \langle v_1^*, D_x^2 \Phi(0,0)(v_k, v_j) \rangle$$

(h) Derivando (2.19) em relação a x temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1 \partial x_k \partial x_j}(x, \alpha) = & \langle v_1^*, D_x^3 \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)[v_1 + D_v w^*(v, \alpha)(v_1), v_k + \\ & + D_v w^*(v, \alpha)(v_k), v_j + D_v w^*(v, \alpha)(v_j)] + D_x^2 \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [D_v^2 w^*(v, \alpha)(v_k, v_1), v_j + D_v w^*(v, \alpha)(v_j)] + \\
& + D_x^2 \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)[v_k + D_v w^*(v, \alpha)(v_k), D_v^2 w^*(v, \alpha)(v_1, v_j)] + \\
& + D_x^2 \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha)[v_1 + D_v w^*(v, \alpha)(v_1), D_v^2 w^*(v, \alpha)(v_j, v_k)] + \\
& + D_x \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha) [D_v^3 w^*(v, \alpha)(v_j, v_k, v_1)].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1 \partial x_k \partial x_j} (0,0) = & \langle v_1^*, D_x^3 \Phi(0,0)(v_1 + D_v w^*(0,0)(v_1), v_k + D_v w^*(0,0)(v_k), \\
& v_j + D_v w^*(0,0)(v_j) + D_x^2 \Phi(0,0)[D_v^2 w^*(0,0)(v_k, v_1), v_j + \\
& + D_v w^*(0,0)(v_j)] + D_x^2 \Phi(0,0)[v_k + D_v w^*(0,0)(v_k), D_v^2 w^*(0,0)(v_1, v_j)] + \\
& + D_x^2 \Phi(0,0)[(v_1 + D_v w^*(0,0)(v_1), D_v^2 w^*(0,0)(v_j, v_k)] + \\
& + L(D_v^3 w^*(0,0)(v_j, v_k, v_1)) \rangle.
\end{aligned}$$

Utilizando (a), (b) e (2.12) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1 \partial x_k \partial x_j} (0,0) = & \langle v_1^*, D_x^3 \Phi(0,0)(v_j, v_k, v_1) + D_x^2 \Phi(0,0)(W_{kl}, v_j) + \\
& + D_x^2 \Phi(0,0)(W_{jl}, v_k) + D_x^2 \Phi(0,0)(W_{jk}, v_1) \rangle
\end{aligned}$$

onde $W_{ij} = -K(I-Q) D_x^2 \Phi(0,0)(v_i, v_j)$ ■

2.2 REDUÇÃO DE LIAPUNOV SCHIMIDT EQUIVARIANTE

Nesta secção estudaremos a Redução de Liapunov-Schmidt para aplicações equivariantes.

Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo no espaço de Banach Y , e $X \subseteq Y$ um subespaço de Banach Γ -invariante.

Seja

$$\begin{aligned}\Phi : X \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow Y \\ (x, \alpha) &\longrightarrow \Phi(x, \alpha)\end{aligned}$$

uma aplicação de classe C^1 , tal que $\Phi(0,0) = 0$.

Estamos interessados em resolver:

$$\Phi(x, \alpha) = 0 \tag{2.20}$$

com (x, α) em uma vizinhança da origem.

Seja

$$L = D_x \Phi(0,0) : X \longrightarrow Y$$

a linearização de Φ .

Suponhamos nesta secção as seguintes hipóteses satisfeitas:

(H_1) $R(L)$ é fechado em Y , $\ker(L)$ e $R(L)$ possuem suplemento topológico respectivamente em X e Y .

(H_2) Φ é Γ -equivariante

Observação 2.9 Consideramos $X \subseteq Y$ e a ação de Γ em X a restrição da

ação de Γ em Y por simplicidade, mas poderíamos considerar $X \subseteq Y$ com ações distintas de Γ em X e Y .

Segue de imediato das hipóteses acima as seguintes afirmações:

Lema 2.10

- (a) L é Γ -equivariante.
- (b) $\gamma(\ker(L)) = \ker(L) \quad \forall \gamma \in \Gamma$.
- (c) $\gamma(R(L)) = R(L) \quad \forall \gamma \in \Gamma$.

Teorema 2.11 Nas hipóteses anteriores, as projeções contínuas P, Q satisfazendo (2.4) podem ser escolhidas Γ -equivariantes, i.e., tais que:

$$\gamma P = P\gamma \quad \text{e} \quad \gamma Q = Q\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Demonstração: As projeções são construídas através da integral de Haar. Ver Vanderbauwhede [11].

Observação 2.12 Consideraremos no restante do capítulo as projeções P e Q sendo Γ -equivariantes.

Lema 2.13 Nas condições anteriores temos no $R(L)$ que K dado em (2.5) é Γ -equivariante, i.e., satisfaz $K\gamma = \gamma.K \quad \forall \gamma \in \Gamma$.

Demonstração: Seja $y = L(x) \in R(L)$, como $KL = I - P$ e L e P são Γ -equivariantes temos para todo γ pertencente a Γ :

$$\begin{aligned} K\gamma.(y) &= K\gamma.(L(x)) = KL(\gamma.x) = (I - P)(\gamma.x) = \gamma.(I - P)(x) = \gamma.KL(x) = \\ &= \gamma.K(y). \end{aligned}$$

■

Lema 2.14 Nas hipóteses anteriores as vizinhanças V e W e a aplicação $w^* : V \times \Lambda \longrightarrow W$ dadas no Lema 2.4 podem ser escolhidos de modo que satisfaçam:

$$\gamma.(V) = V \quad \gamma.(W) = W \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

$$w^*(\gamma.v, \alpha) = \gamma.w^*(v, \alpha) \quad \forall \gamma \in \Gamma \text{ e } \forall (v, \alpha) \in V \times \Lambda$$

Demonstração: Sejam V , W , Λ e w^* determinadas no Lema 2.4.

Como $\gamma.w^*(0,0) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$, Γ é compacto, w^* e a ação são aplicações contínuas, podemos assumir que V e Λ são tais que para cada $(v, \alpha) \in V \times \Lambda$ temos $\gamma.w^*(v, \alpha) \in W$, $\forall \gamma \in \Gamma$. (2.21)

Como a ação é uma aplicação contínua e Γ é compacto, existe uma vizinhança da origem $V' \subseteq V$ no $\ker L$ tal que $\gamma(V') \subseteq V \quad \forall \gamma \in \Gamma$.

Definamos

$$V_1 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma.(V') \subseteq V \quad W_1 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma.(W)$$

Temos assim que $V_1 \times W_1 \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma (V \times W) \subseteq (\ker(L) \times M)$ e

$$\gamma.(V_1) = V_1 \quad \gamma.(W_1) = W_1$$

Mostraremos inicialmente que se (v_1, w_1, α) pertence a $(V_1 \times W_1 \times \Lambda)$ a equação (2.7.a) é satisfeita se e somente se $w_1 = w^*(v_1, \alpha)$.

Suponhamos que (v_1, w_1, α) é solução de (2.7.a). Sabemos que $w_1 = \gamma.(w)$ para algum $w \in W$ e $\gamma \in \Gamma$. Como Φ e Q são funções Γ -equivariantes $(\gamma^{-1}.v_1, \gamma^{-1}.w_1, \alpha) = (\gamma^{-1}.v_1, w, \alpha)$ também é solução de (2.7.a). Logo, como $\gamma^{-1}.v_1 \in V$ e $w \in W$, do Lema 2.4 temos que $w = w^*(\gamma^{-1}.v_1, \alpha)$ e então $w_1 =$

$$\gamma.w^*(\gamma^{-1}.v_1, \alpha).$$

De (2.21) como $\gamma^{-1}.v_1 \in V$, concluímos que $w_1 \in W$ e então $w_1 = w^*(v_1, \alpha)$.

Reciprocamente se $w_1 = w^*(v_1, \alpha)$ claramente (v_1, w_1, α) é solução de (2.7.a).

Mostremos agora que $w^* : V_1 \times \Lambda \longrightarrow V_1$ é Γ -equivariante.

Desde que $(v_1, \gamma.w^*(\gamma^{-1}.v_1), \alpha)$ e $(v_1, w^*(v_1, \alpha), \alpha)$ são soluções de (2.7.a) temos da unicidade do Teorema da Função Implícita que:

$$\gamma.w^*(\gamma^{-1}.v_1) = w^*(v_1, \alpha) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Logo para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v_1 \in V_1$, $\gamma.w^*(v_1, \alpha) = w^*(\gamma.v_1, \alpha)$.

Portanto tomando-se as vizinhanças $V = V_1$ e $W = W_1$, teremos satisfeitas todas as condições exigidas. ■

Observação 2.15 Consideraremos no restante do capítulo as vizinhanças V e W satisfazendo as condições do Lema 2.14.

Teorema 2.16 Nas hipóteses anteriores as funções x^* e Ψ definidas por (2.8) e (2.9) são equivariantes, i.e.,

$$x^*(\gamma.v, \alpha) = \gamma.x^*(v, \alpha) \quad \text{e} \quad \Psi(\gamma.v, \alpha) = \gamma.\Psi(v, \alpha).$$

$$\forall \gamma \in \Gamma \text{ e } \forall (v, \alpha) \in V \times \Lambda.$$

Demonstração: Utilizando a Γ -equivariância de w^* temos:

$$x^*(\gamma.v, \alpha) = \gamma.v + w^*(\gamma.v, \alpha) = \gamma.v + \gamma.w^*(v, \alpha) =$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma.(v + w^*(v, \alpha)) = \gamma.x^*(v, \alpha) \\
\Psi(\gamma, \alpha) &= Q \Phi(\gamma.v + w^*(\gamma.v, \alpha), \alpha) = \\
&= Q \Phi(\gamma.(v + w^*(v, \alpha)), \alpha) = \\
&= \gamma.Q \Phi(v + w^*(v, \alpha), \alpha) = \gamma.\Psi(v, \alpha)
\end{aligned}$$

Portanto x^* e Ψ são Γ equivariantes. ■

Observação 2.17 O teorema anterior leva-nos a concluir que a simetria da equação original (2.20) é preservada pela equação de bifurcação obtida após a Redução de Liapunov-Schmidt. Também concluímos que se a equação de bifurcação tiver solução, tal solução preserva a simetria de Φ .

2.3 SOLUÇÕES INVARIANTES

Mostraremos nesta secção que existe uma relação um a um entre as soluções de $\Phi(x, \alpha) = 0$ que são Γ -invariantes, i.e., tais que:

$$\gamma.x = x \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

e as soluções Γ -invariantes da equação de bifurcação $\Psi(v, \alpha) = 0$.

Continuaremos utilizando as notações da secção anterior e suponhamos que (H_1) e (H_2) estejam satisfeitas.

Sejam:

$$Fix(\Gamma)_X = \{ x \in X; \gamma.x = x, \forall \gamma \in \Gamma \}$$

e

$$Fix(\Gamma)_Y = \{ y \in Y; \gamma.y = y, \forall \gamma \in \Gamma \}$$

Para cada $(x, \alpha) \in (Fix(\Gamma)_X \times \Lambda)$ temos $\Phi(x, \alpha) \in Fix(\Gamma)_Y$. Assim para obtermos soluções Γ -invariantes restringiremos nossos estudos aos subespaços $Fix(\Gamma)_X$ e $Fix(\Gamma)_Y$.

Lema 2.18 Existem projeções $P_0 \in \mathcal{L}(X, X)$ e $Q_0 \in \mathcal{L}(Y, Y)$ respectivamente sobre $Fix(\Gamma)_X$ e $Fix(\Gamma)_Y$ tais que $P.P_0 = P_0.P$ e $Q.Q_0 = Q_0.Q$.

Demonstração: As projeções são definidas a partir da Integral de Haar. Ver Vanderbawhede [11].

Lema 2.19 Seja $v \in (V \cap Fix(\Gamma)_X)$ e $\alpha \in \Lambda$ então:

$$x^*(v, \alpha) = P_0 x^*(v, \alpha) \quad e \quad \Psi(v, \alpha) = Q_0 \Psi(v, \alpha)$$

Demonstração: Para todo $v \in (V \cap Fix(\Gamma)_X)$, $\alpha \in \Lambda$ e $\gamma \in \Gamma$,

$$x^*(v, \alpha) = x^*(\gamma.v, \alpha) = \gamma.x^*(v, \alpha) \quad e \quad \Psi(v, \alpha) = \Psi(\gamma.v, \alpha) = \gamma.\Psi(v, \alpha)$$

Portanto $x^*(v, \alpha) \in Fix(\Gamma)_X$ e $\Psi(v, \alpha) \in Fix(\Gamma)_Y$, donde segue o resultado. ■

Teorema 2.20 Se V, W, Λ , são as vizinhanças da origem dadas no Lema 2.14 e x^* e Ψ as funções definidas em (2.8) e (2.9) então para cada $x \in V \times W$, $v \in V$, $\alpha \in \Lambda$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $x \in Fix(\Gamma)_X$, $Px = v$, $\Phi(x, \alpha) = 0$.
- (ii) $v \in Fix(\Gamma)_X$, $x = x^*(v, \alpha)$, $Q_0 \Psi(v, \alpha) = 0$.

Demonstração: Suponhamos (i) satisfeita. Então $P_0 v = P_0 Px = PP_0 x = Px = v$ então $v \in (Fix(\Gamma)_X \cap V)$.

Do Teorema (2.5) temos que $x = x^*(v, \alpha)$ e $\Psi(v, \alpha) = 0$, logo $Q_0 \Psi(v, \alpha) = 0$.

Suponhamos (ii) satisfeita. Utilizando o Lema (2.18) temos que $x = x^*(v, \alpha) = P_0 x^*(v, \alpha) = P_0 x$ então $x \in \text{Fix}(\Gamma)_x$ e $\Psi(v, \alpha) = Q_0 \Psi(v, \alpha) = 0$ que pelo Teorema 2.5 conclui (i). ■

Corolário 2.21 Sob as hipóteses do teorema anterior temos que se $x \in (V \times W)$, $\alpha \in \Lambda$, $v = Px$ e $\Phi(x, \alpha) = 0$ então $x \in \text{Fix}(\Gamma)_x$ se e somente se $v \in \text{Fix}(\Gamma)_x$.

Conclusão 2.22 Dos resultados anteriores segue-se que para uma vizinhança suficientemente próxima da origem existe uma relação um a um entre soluções $x \in \text{Fix}(\Gamma)_x$ de (2.20) e as soluções $v \in (\ker(L) \cap \text{Fix}(\Gamma)_x)$ da equação de bifurcação.

CAPÍTULO III

BIFURCAÇÃO DE HOPF

Apresentaremos neste capítulo uma demonstração para o Teorema de Hopf. Para este fim olharemos as órbitas periódicas como os zeros de uma determinada função, e aplicaremos a redução de Liapunov-Schmidt. Posteriormente determinaremos uma forma normal para a equação de bifurcação, e então verificaremos que as hipóteses do Teorema de Hopf nos fornecem condições suficientes para resolver esta equação de bifurcação.

3.1 APLICAÇÃO DA REDUÇÃO DE LIAPUNOV-SCHMIDT

Seja

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \alpha) &\longrightarrow F(x, \alpha) \end{aligned}$$

uma função de classe C^∞ tal que $F(0, \alpha) = 0$ e $\alpha = (\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ onde λ

é o parâmetro de bifurcação e $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ são parâmetros auxiliares.

É de nosso interesse analisarmos as soluções periódicas de:

$$\frac{dx}{ds} = F(x, \alpha) \quad (3.1)$$

Aplicaremos para isto a Redução de Liapunov-Schmidt.

Consideremos a seguinte mudança de variável:

$$u(s) = x \left[\frac{s}{1+\tau} \right] \quad (3.2)$$

Estamos então interessados em resolver:

$$(1+\tau) \frac{du}{ds} = F(u, \alpha) \quad (3.3)$$

Consideremos agora os seguintes espaços de Banach:

$$C_{2\pi} = \{x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ função contínua e } 2\pi \text{ periódica}\} \quad (3.4)$$

$$C_{2\pi}^1 = \{x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ função } 2\pi \text{ periódica ; } x' \in C_{2\pi}\}$$

Com as normas dadas respectivamente por:

$$u_0 = \max_{s \in [0, 2\pi]} |u(s)| \quad \text{e} \quad u_1 = \max_{s \in [0, 2\pi]} |u(s)| + \max_{s \in [0, 2\pi]} |u'(s)| \quad (3.5)$$

e produto interno dado por:

$$\langle v, u \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s)^T v(s) ds \quad (3.6)$$

Definimos:

$$\begin{aligned} \Phi: C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow C_{2\pi} \\ (u, \alpha, \tau) &\longrightarrow (1 + \tau) \frac{du}{ds} - F(u, \alpha) \end{aligned} \quad (3.7)$$

As soluções de $\Phi(u, \alpha, \tau) = 0$ corresponderão as soluções 2π periódicas de (3.3), as quais corresponderão às soluções $\frac{2\pi}{1+\tau}$ de (3.1).

Seja $A = D_u F(0, 0)$ a derivada de Frechet em relação ao $\mathbb{R}^n$ na origem e seja:

$$\begin{aligned} L = D_u \Phi(0, 0, 0) : C_{2\pi}^1 &\longrightarrow C_{2\pi} \\ u &\longrightarrow \frac{du}{ds} - Au \end{aligned} \quad (3.8)$$

a linearização de (3.7) e:

$$\begin{aligned} L^* : C_{2\pi}^1 &\longrightarrow C_{2\pi} \\ u &\longrightarrow -\frac{du}{ds} - A^T u \end{aligned} \quad (3.9)$$

o operador adjunto associado a (3.8).

Lema 3.1 O operador L é um operador de Fredholm de índice zero, i.e.,

- (a) $\dim(\ker(L)) < \infty$,
- (b) $\text{codim}(R(L)) < \infty$,
- (c) $R(L)$ é fechado,
- (d) $\dim(\ker(L)) = \text{codim}(R(L))$.

Demonstração:

- (a) Seja $X(\cdot)$ a matriz fundamental de $\frac{dx}{ds} = Ax$, i.e., a matriz

solução de $\frac{dx}{ds} = Ax$ tal que $X(0) = Id$, o operador identidade, e seja C a matriz tal que $X(s+2\pi) = X(s)C$.

As soluções de $\frac{dx}{ds} = Ax$ são da forma $X(.)x_0$ com $x_0 \in \mathbb{R}^n$ porém as soluções $X(.)x_0$ são 2π periódicas se e somente se $x_0 = Cx_0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \ker(L) &= \left\{ x(.) \in C_{2\pi}^1 ; \frac{dx}{ds} = Ax \right\} \\ &= \left\{ x(.) = X(.)x_0 ; x_0 \in \ker(I - C) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Assim } \dim(\ker(L)) = \dim(\ker(I-C)) \leq n. \quad (3.10)$$

Portanto $\ker(L)$ possui dimensão finita.

(b) Como

$$R(L) = \left\{ h(.) \in C_{2\pi}^1 ; \frac{dx}{ds} = Ax + h(.) \text{ com } x \in C_{2\pi}^1 \right\}$$

Pela alternativa de Fredholm temos que:

$$R(L) = \left\{ \varphi(.); \int_0^{2\pi} \varphi(s)^T \cdot z(s) ds = 0, \forall z(.) \in \ker L^* \right\} = (\ker L^*)^\perp$$

Por outro lado :

$$\begin{aligned} \ker(L^*) &= \left\{ y(.) \in C_{2\pi}^1 ; \frac{dy}{ds} = -A^T y \right\} \\ &= \left\{ y(.) = (X(.)^T)^{-1} \cdot y_0 ; y_0 \in \ker(I - ((C^T)^{-1})) \right\} \\ &= \left\{ y(.) = (X(.)^T)^{-1} \cdot y_0 ; y_0 \in \ker(I - (C^T)) \right\} \end{aligned}$$

Onde $X(\cdot)$ e C são dados em (a).

$$\text{Assim } \dim(\ker L^*) = \dim(\ker(I-C^T)) \leq n. \quad (3.11)$$

Logo temos $C_{2\pi} = R(L) \oplus \ker(L^*)$ e portanto $\text{codim}(R(L))$ é finita e será igual a $\dim(\ker(L^*))$.

(c) Seja $y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)$ uma base do $\ker(L^*)$.

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} \Psi_1 : C_{2\pi} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longrightarrow & \int_0^{2\pi} \varphi(s)^T y_1(s) ds \end{array}$$

é continua e

$$R_1 = \left\{ \varphi ; \int_0^{2\pi} \varphi(s)^T y_1(s) ds = 0 \right\} = \Psi_1^{-1}(0) \quad \text{é fechado em } C_{2\pi}$$

Pela alternativa de Fredholm sabemos que $R(L) = \bigcap_{i=1}^p R_i$.

Logo $R(L)$ é fechado em $C_{2\pi}$.

(d) Segue de (3.10), (3.11) e do fato de que $\dim(\ker(I-C)) = \dim(\ker(I-C^T))$.

O Lema 3.1 implica na existência de suplementares topológicos M e $N = \ker(L^*)$ para $\ker(L)$ e $R(L)$ respectivamente. Temos então:

$$C_{2\pi}^1 = \ker(L) \oplus M \quad C_{2\pi} = R(L) \oplus \ker(L^*).$$

Logo estamos nas condições de aplicabilidade da Redução de Liapunov-Schmidt à equação:

$$\Phi(u, \alpha, \tau) = 0$$

Seguindo os passos apresentados no capítulo 2 e utilizando as mesmas notações obteremos a função de bifurcação dada por:

$$\begin{aligned} \Psi : V \times \Lambda &\longrightarrow \ker(L^*) \\ (v, \alpha, \tau) &\longrightarrow Q\Phi(v + w^*(v, \alpha, \tau), \alpha, \tau) \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $V \times \Lambda \subseteq \ker(L) \times (\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R})$ é uma vizinhança da origem.

3.2 Determinação de bases do $\ker(L)$ e $\ker(L^*)$

Como nosso problema transferiu-se para o estudo dos zeros da Equação de Bifurcação cujo domínio e contradomínio dependem do $\ker(L)$ e $\ker(L^*)$, determinaremos bases convenientes para os mesmos.

Suponhamos satisfeita a seguinte hipótese em relação a $A = D_u F(0,0)$, que será básica para o Teorema de Hopf:

- (H₁) (a) A possui auto valores simples $\pm i$.
 (b) A não possui outros auto valores no eixo imaginário.

Sabemos que $v(.) \in \ker(L)$ se e somente se $v(.) \in C_{2\pi}^1$ e $\frac{dv}{ds} =$

Av. No entanto as soluções que nos conduzem às soluções 2π periódicas são do tipo $v(.) = e^{\lambda(.)} v_0$ onde $Av_0 = \lambda v_0$ e $\lambda = ki$ com $k \in \mathbb{Z}$. Então de (H_1) , temos que v_0 é auto vetor associado à $\pm i$.

Seja $c \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$Ac = ic \quad (3.13)$$

Assim,

$$v_1(s) = \operatorname{Re}(e^{is}c) \quad \text{e} \quad v_2(s) = \operatorname{Im}(e^{is}c) \quad (3.14)$$

formam uma base para $\ker(L)$.

Analogamente como A e A^T possuem os mesmos auto valores, existe $d \in \mathbb{C}^n$ é tal que:

$$A^T d = -id \quad (3.15)$$

Assim,

$$v_1^*(s) = \operatorname{Re}(e^{is}d) \quad \text{e} \quad v_2^*(s) = \operatorname{Im}(e^{is}d) \quad (3.16)$$

formam uma base do $\ker(L^*)$.

Lema 3.2 Os auto vetores c e d acima podem ser tomados tais que:

$$\begin{aligned} (a) \quad \bar{c}^T c &= 2 \\ (b) \quad \bar{d}^T d &= 2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Demonstração:

(a) Seja c um auto valor de A .

Desde que $c \neq 0$, o vetor $c_1 = \frac{\sqrt{2} c}{(\bar{c}^T c)^{1/2}}$ é um auto vetor

de A associado ao auto valor i que satisfaz as condições exigidas.

(b) Temos que:

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - iI) \oplus R(A - iI)$$

e
$$R(A - iI) = (\ker(A^T + iI))^{\perp} = \{ b \in \mathbb{C}^n ; \bar{d}^T \cdot b = 0 \}$$

onde d é um vetor que satisfaz (3.15).

Como $c \in \ker(A - iI)$ temos que $c \notin R(A - iI)$ então $\bar{d}^T \cdot c \neq 0$.

Seja $\bar{d}^T c = k \neq 0$ e $d_1 = \frac{d2}{k}$ e então d_1 satisfaz as condições exigidas. ■

Lema 3.3 As bases v_1, v_2 e v_1^*, v_2^* respectivamente do $\ker(L)$ e $\ker(L^*)$ dadas em (3.14) e (3.16), com as condições (3.17) satisfazem

$$(i) \quad \frac{d v_1}{d s} = -v_2 \quad \frac{d v_2}{d s} = v_1$$

$$(ii) \quad \frac{d v_1^*}{d s} = -v_2^* \quad \frac{d v_2^*}{d s} = v_1^*$$

$$(iii) \quad \langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2$$

$$(iv) \quad \langle v_i^*, v_j^* \rangle = \frac{1}{2} \bar{d}^T d \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2$$

$$(v) \quad \langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2$$

onde
$$\langle v, u \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{u(s)}^T v(s) ds$$

Demonstração:

(i)

$$\frac{dv_1}{ds} = \frac{d}{ds}(\operatorname{Re}(e^{1s}c)) = \operatorname{Re}\left(\frac{d}{ds}e^{1s}c\right) = \operatorname{Re}(ie^{1s}c) = -\operatorname{Im}(e^{1s}c) = -v_2(s)$$

$$\frac{dv_2}{ds} = \frac{d}{ds}(\operatorname{Im}(e^{1s}c)) = \operatorname{Im}\left(\frac{d}{ds}e^{1s}c\right) = \operatorname{Im}(ie^{1s}c) = \operatorname{Re}(e^{1s}c) = v_1(s)$$

(ii)

$$\frac{dv_1^*}{ds} = \frac{d(\operatorname{Re}(e^{1s}d))}{ds} = \operatorname{Re}\frac{d}{ds}(e^{1s}d) = \operatorname{Re}(ie^{1s}d) = -\operatorname{Im}(e^{1s}d) = -v_2^*(s)$$

$$\frac{dv_2^*}{ds} = \frac{d}{ds}\operatorname{Im}(e^{1s}d) = \operatorname{Im}\frac{d}{ds}(e^{1s}d) = \operatorname{Im}(ie^{1s}d) = \operatorname{Re}(e^{1s}d) = v_1^*(s)$$

(iii) Suponhamos que $c = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \dots, a_n + ib_n)^T$,

então

$$\operatorname{Re}(e^{1s}c) = (a_1 \cos(s) - b_1 \sin(s), a_2 \cos(s) + b_2 \sin(s), \dots, a_n \cos(s) - b_n \sin(s))^T$$

e

$$\operatorname{Im}(e^{1s}c) = (b_1 \cos(s) - a_1 \sin(s), b_2 \cos(s) + a_2 \sin(s), \dots, b_n \cos(s) - a_n \sin(s))^T$$

$$\begin{aligned} \langle v_1(s), v_1(s) \rangle &= \langle \operatorname{Re}(e^{1s}c), \operatorname{Re}(e^{1s}c) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(e^{1s}c)^T \operatorname{Re}(e^{1s}c) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \cos^2(s) - a_i b_i \sin(2s) + b_i^2 \sin^2(s) \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \pi(a_i^2 + b_i^2) = \frac{1}{2} c^T c = 1 \end{aligned}$$

A última igualdade sendo válida devido a (3.17.a)

$$\begin{aligned}
\langle v_2(s), v_2(s) \rangle &= \langle \text{Im}(e^{1s}c), \text{Im}(e^{1s}c) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Im}(e^{1s}c)^T \cdot \text{Im}(e^{1s}c) ds = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \cos^2(s) + a_i b_i \sin(2s) + a_i^2 \sin^2(s) \right) ds = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \pi(a_i^2 + b_i^2) = \frac{1}{2} \bar{c}^T c = 1
\end{aligned}$$

A última igualdade sendo válida devido a (3.17.a)

$$\begin{aligned}
\langle v_1(s), v_2(s) \rangle &= \langle \text{Re}(e^{1s}c), \text{Im}(e^{1s}c) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Im}(e^{1s}c)^T \text{Re}(e^{1s}c) ds = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^n a_i b_i \cos(2s) + (a_i^2 - b_i^2) \frac{\sin(2s)}{2} ds = \\
&= 0 = \langle v_2(s), v_1(s) \rangle
\end{aligned}$$

$$\text{Portanto } \langle v_i(s), v_j(s) \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2.$$

(iv) De modo análogo se,

$$d = (\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \dots, \alpha_n + i\beta_n)^T$$

teremos:

$$\langle v_1^*(s), v_1^*(s) \rangle = \langle v_2^*(s) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \pi(\alpha_i^2 + \beta_i^2) = \frac{\bar{d}^T d}{2}$$

$$\langle v_1^*(s), v_2^*(s) \rangle = \langle v_2^*(s), v_1^*(s) \rangle = 0$$

$$\text{Portanto } \langle v_i^*(s), v_j^*(s) \rangle = \frac{\bar{d}^T d}{2} \delta_{ij}.$$

(v) Usando as mesmas notações para c , d de (iii) e (iv), e efetuando os cálculos de modo análogo, obteremos que:

$$\langle v_1^*(s), v_1(s) \rangle = \langle v_2^*(s), v_2(s) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\alpha_i a_i + \beta_i a_i).$$

$$\langle v_1^*(s), v_2(s) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\alpha_i b_i - \beta_i a_i).$$

$$\langle v_2^*(s), v_1(s) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\beta_i a_i - \alpha_i b_i).$$

Como $\bar{d}^T c = 2$ temos que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (\alpha_i a_i + \beta_i b_i) = 2 \\ \sum_{i=1}^n (\alpha_i b_i - \beta_i a_i) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Logo } \langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2 \quad \blacksquare$$

Observação 3.4 Fixaremos até ao final do capítulo as bases dadas em (3.13) e (3.15) respectivamente do $\ker(L)$ e $\ker(L^*)$, satisfazendo as condições do Lema 3.2.

3.3 FORMA NORMAL DA FUNÇÃO DE BIFURCAÇÃO

Determinemos uma forma normal para a função de bifurcação utilizando a ação de grupos.

Consideremos a ação:

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times C_{2\pi} & \longrightarrow & C_{2\pi} \\ (\theta, v(\cdot)) & \longrightarrow & v(\cdot + \theta) \end{array} \quad (3.18)$$

Como F é autônoma temos que Φ , definido em (3.7), é tal que:

$$\Phi(\theta.u, \alpha, \tau) = \theta.\Phi(u, \alpha, \tau) \quad \forall \theta \in S^1 \quad (3.19)$$

i.e., Φ é S^1 -equivariante sob a ação (3.18).

Portanto do Teorema 2.16, podemos obter a Equação de Bifurcação, Ψ , S^1 -equivariante, i.e.,

$$\Psi(\theta.v, \alpha, \tau) = \theta.\Psi(v, \alpha, \tau) \quad \forall \theta \in S^1 \quad (3.20)$$

Proposição 3.5 Se identificarmos $\ker(L)$ com $\mathbb{R}^2$ via aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \ker(L) \\ (x, y) & \longrightarrow & xv_1 + yv_2 \end{array} \quad (3.21)$$

a ação de S^1 no $\ker(L)$ será dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Demonstração:

Sejam $v_1(s)$, $v_2(s)$ base do $\ker(L)$, dadas em (3.14),

$$\begin{aligned} \theta.(v_1(s)) &= v_1(s + \theta) = \operatorname{Re}(e^{1(s+\theta)}c) = \\ &= \operatorname{Re}(e^{1s}(\cos\theta + i\sin\theta)c) = \\ &= \cos\theta \operatorname{Re}(e^{1s}c) + \sin\theta \operatorname{Re}(ie^{1s}c) = \\ &= \cos\theta \operatorname{Re}(e^{1s}c) - \sin\theta \operatorname{Im}(e^{1s}c) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \theta \, v_1(s) - \sin \theta \, v_2(s) \\
\Theta(v_2(s)) &= v_2(s + \Theta) = \operatorname{Im}(e^{1(s+\Theta)} c) = \\
&= \operatorname{Im}(e^{1s}(\cos \theta + i \sin \theta) c) = \\
&= \cos \theta \operatorname{Im}(e^{1s} c) + \sin \theta \operatorname{Im}(i e^{1s} c) = \\
&= \cos \theta \operatorname{Im}(e^{1s} c) + \sin \theta \operatorname{Re}(e^{1s} c) = \\
&= \sin \theta \, v_1(s) + \cos \theta \, v_2(s)
\end{aligned}$$

Assim:

$$\Theta(xv_1(s) + yv_2(s)) = (x\cos\theta + y\sin\theta)v_1(s) + (-x\sin\theta + y\cos\theta)v_2(s).$$

Portanto utilizando a identificação (3.21) a ação de S^1 no $\ker(L)$ é dada por (3.22). ■

Desde que estamos interessados em resultados locais, mais especificamente em uma vizinhança da origem, convém introduzirmos a seguinte definição:

Definição 3.6 Dizemos que duas funções definidas nas vizinhanças da origem de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}$ de classe C^∞ , são iguais como germes se existir alguma vizinhança da origem na qual coincidem. Esta identificação nos fornece uma relação de equivalência e definimos cada classe de equivalência como sendo um germe.

Assumiremos o seguinte resultado cuja demonstração pode ser

encontrado em Golubitsky [5].

Lema 3.7 Se g é um germe em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ tal que $g(-x, \alpha) = -g(x, \alpha)$, então existe um germe r tal que $g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x$.

Proposição 3.8 Seja

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, \alpha) & \longrightarrow & \varphi(x, y, \alpha) \end{array}$$

uma função de classe C^∞ e S^1 -equivariante sob a ação (3.18), então existem germes p, q em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ tais que:

$$\varphi(x, y, \alpha) = p(x^2 + y^2, \alpha)(x, y) + q(x^2 + y^2, \alpha)(-y, x)$$

para (x, y) suficientemente próximos à origem.

Demonstração: Sejam φ_1 e φ_2 tais que:

$$\varphi(x, y, \alpha) = (\varphi_1(x, y, \alpha), \varphi_2(x, y, \alpha))$$

φ é S^1 -equivariante, em particular, φ comuta com a ação de π , i.e.,

$$\varphi(\pi.(x, y), \alpha) = \pi.\varphi(x, y, \alpha)$$

Logo

$$\varphi(-x, -y, \alpha) = (-\varphi_1(x, y, \alpha), -\varphi_2(x, y, \alpha))$$

Em particular, se $x = s$ e $y = 0$, temos:

$$\varphi_1(-s, 0, \alpha) = -\varphi_1(s, 0, \alpha) \quad \text{e} \quad \varphi_2(-s, 0, \alpha) = -\varphi_2(s, 0, \alpha)$$

Então pelo Lema 3.8, existem germes p e q tais que:

$$\varphi_1(s,0,\alpha) = p(s^2,\alpha)s \quad \text{e} \quad \varphi_2(s,0,\alpha) = q(s^2,\alpha)s.$$

Mas para quaisquer (x,y) , existe θ tal que:

$$\theta(s,0) = (x,y) \quad \text{onde} \quad s^2 = x^2 + y^2$$

Então

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,\alpha) &= \varphi(\theta(s,0),\alpha) = \theta.\varphi(s,0,\alpha) = \theta.(p(s^2,\alpha)s, q(s^2,\alpha)s) = \\ &= p(s^2,\alpha)\theta(s,0) + q(s^2,\alpha)\theta(0,s) \end{aligned}$$

Como

$$\theta(s,0) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta \\ -s \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

temos que

$$\theta(0,s) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \sin \theta \\ s \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

e então

$$\varphi(x,y,\alpha) = p(x^2+y^2,\alpha)(x,y) + q(x^2+y^2,\alpha)(-y,x)$$

Proposição 3.9 A função de bifurcação Ψ nas coordenadas definidas em (3.21) é da forma:

$$\Psi(x,y,\alpha,\tau) = p(x^2+y^2,\alpha,\tau)(x,y) + q(x^2+y^2,\alpha,\tau)(-y,x)$$

onde p,q são germes em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$(a) \quad p(0,0,0) = 0$$

$$(b) \quad q(0,0,0) = 0$$

$$(c) \quad \frac{\partial p}{\partial \tau}(0,0,0) = 0$$

$$(d) \quad \frac{\partial q}{\partial \tau}(0,0,0) = \frac{-1}{\|v_2^*\|^2}$$

Demonstração : Identificando $\ker(L)$ e o $\ker(L^*)$ com $\mathbb{R}^2$ via a aplicação do tipo (3.21) e observando que Ψ é S^1 -equivariante, resulta da Proposição 3.8, que existem germes p, q em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}$ tais que:

$$\Psi(x, y, \alpha, \tau) = p(x^2 + y^2, \alpha, \tau)(x, y) + q(x^2 + y^2, \alpha, \tau)(-y, x)$$

Logo

$$\Psi(x, 0, \alpha, \tau) = p(x^2, \alpha, \tau)(x, 0) + q(x^2, \alpha, \tau)(0, x) = (xp(x^2, \alpha, \tau), xq(x^2, \alpha, \tau))$$

Sejam Ψ_1 e Ψ_2 as funções coordenadas de Ψ , então,

$$\begin{cases} \Psi_1(x, 0, \alpha, \tau) = xp(x^2, \alpha, \tau) \\ \Psi_2(x, 0, \alpha, \tau) = xq(x^2, \alpha, \tau) \end{cases} \quad (3.23)$$

Diferenciando em relação a x na origem temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = p(0, 0, 0) \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = q(0, 0, 0) \end{cases} \quad (3.24)$$

por outro lado da Observação 2.7 temos que:

$$\Psi_1(x, y, \alpha, \tau) = \frac{1}{\|v_1^*\|^2} \langle v_1^*, \Phi(xv_1 + yv_2 + w^*(xv_1 + yv_2), \alpha, \tau) \rangle$$

$$\Psi_2(x, y, \alpha, \tau) = \frac{1}{\|v_2^*\|^2} \langle v_2^*, \Phi(xv_1 + yv_2 + w^*(xv_1 + yv_2), \alpha, \tau) \rangle$$

e da Proposição 2.8.(f):

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = 0$$

Logo de (3.24), (a) e (b) estão provadas.

Segue de (3.23) que:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tau \partial x} (0,0,0,0) = \frac{\partial p}{\partial \tau} (0,0,0) \\ \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \tau \partial x} (0,0,0,0) = \frac{\partial q}{\partial \tau} (0,0,0) \end{cases} \quad (3.25)$$

Por outro lado de (2.8.e):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \tau \partial x} (0,0,0,0) &= \frac{1}{\|v_j^*\|^2} \langle v_j^*, D_\tau D_u \Phi(0,0,0)v_1 - D_u^2 \Phi(0,0,0)(v_1, \\ &\quad K(I-Q)D_\tau \Phi(0,0,0) \rangle \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\text{mas como } \Phi(u, \alpha, \tau) = (1 + \tau) \frac{du}{ds} - F(u, \alpha), \quad (3.26)$$

$$D_\tau \Phi(u, \alpha, \tau) = \frac{du}{ds} \quad (3.27)$$

e então:

$$D_\tau \Phi(0,0,0) = 0 \quad \text{e} \quad D_\tau D_u \Phi(0,0,0)v_1 = \frac{dv_1}{ds}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \tau \partial x} (0,0,0,0) = \frac{1}{\|v_j^*\|^2} \langle v_j^*, \frac{dv_1}{ds} \rangle$$

Por (i) do Lema 3.3,

$$\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \tau \partial x} (0,0,0,0) = \frac{1}{\|v_j^*\|^2} \langle v_j^*, -v_2 \rangle ;$$

Segue de (v) do Lema 3.3:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tau \partial x} (0,0,0,0) = 0 ; \quad \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \tau \partial x} (0,0,0,0) = \frac{-1}{\|v_2^*\|^2}$$

Logo de (3.25),

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} (0,0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial q}{\partial \tau} (0,0,0) = \frac{-1}{\|v_2^*\|^2} \quad \blacksquare$$

Teorema 3.10 As soluções de $\Psi(v, \alpha, \tau) = 0$ estão em correspondência biunívoca com as soluções de $g(x, \alpha) = 0$, com $x \geq 0$ onde g é um germe da forma

$$g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x \quad \text{tal que} \quad r(0,0) = 0. \quad (3.28)$$

Demonstração: Pela Proposição 3.9 existem germes p e q tais que:

$$\Psi(x, y, \alpha, \tau) = p(x^2 + y^2, \alpha, \tau)(x, y) + q(x^2 + y^2, \alpha, \tau)(-y, x)$$

e $\Psi(x, y, \alpha, \tau) = 0$ é equivalente a:

$$\begin{cases} (a) x^2 + y^2 = 0 \quad , \quad \text{i.e.} \quad , \quad x = y = 0 \quad \text{ou} \\ (b) p(x^2 + y^2, \alpha, \tau) = q(x^2 + y^2, \alpha, \tau) = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

A solução de (3.29.a) corresponde à solução estacionária $u = 0$ e as soluções de (3.29.b) correspondem às soluções 2π periódicas do sistema (3.3), e são não constantes se $x^2 + y^2 \neq 0$.

Sem perda de generalidade podemos assumir que $y = 0$ e $x \geq 0$, já que qualquer outro vetor pode ser colocado nesta forma por uma

conveniente rotação.

Logo temos as equações:

$$\begin{cases} \text{(a)} & x = 0 \\ \text{(b)} & p(x^2, \alpha, \tau) = q(x^2, \alpha, \tau) = 0 \end{cases}$$

Mas pela Proposição 3.9, $\frac{\partial q}{\partial \tau}(0,0,0) \neq 0$, então podemos resolver $q(x^2, \alpha, \tau) = 0$ próximo a origem por uma função $\tau = \tau^*(x^2, \alpha)$.

Definimos:

$$r(z, \alpha) = p(z, \alpha, \tau^*(z, \alpha)) \quad \text{e} \quad g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x. \quad (3.30)$$

Assim a equação $\Psi(x, y, \alpha, \tau) = 0$ tem solução com $x^2 + y^2 > 0$ apenas se $\tau = \tau^*(x^2 + y^2, \alpha)$ e todas as suas soluções podem ser obtidas pela solução de $g(x, \alpha) = 0$ com $x \geq 0$ por uma apropriada rotação. ■

3.4 TEOREMA DE HOPF

Relacionaremos nesta secção o ramo de auto valores do operador $A(\alpha) = D_u F(0, \alpha)$ com a forma normal da função de bifurcação determinada na secção anterior e então concluiremos o Teorema de Hopf.

Lema 3.11 Suponhamos (H_1) satisfeita. Então existe um ramo $\sigma(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ de auto valores simples de $A(\alpha) = D_u F(0, \alpha)$, dependendo diferenciavelmente de α , com α em uma vizinhança da origem, tal que $\sigma(0) = 0$ e $\omega(0) = 1$.

Demonstração : Seja $p(\mu, \alpha) = \det(A(\alpha) - \mu I)$.

Devido a (H_1) , temos:

$$p(\pm i, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \text{que} \quad \frac{\partial p}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0.$$

Logo pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança da origem na qual está definido um ramo $\sigma(\alpha) \pm iw(\alpha)$, dependendo diferencialmente de α , tal que:

$$\sigma(0) = 0, \quad w(0) = 1 \quad \text{e} \quad p(\sigma(\alpha) \pm iw(\alpha), \alpha) = 0.$$

Portanto $\sigma(\alpha) \pm iw(\alpha)$ é o ramo de auto valores procurado ■

Proposição 3.12 Seja $\sigma(\alpha) \pm iw(\alpha)$ os auto valores simples de $A(\alpha) = D_u F(0, \alpha)$ dados no Lema 3.11. Então,

$$-\|v_1^*\|^2 \frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{A}_\lambda^T(0)c)$$

onde $A_\lambda(\alpha) = D_\lambda(A(\alpha))$.

Demonstração: Temos de (3.30) que $r(z, \alpha) = p(z, \alpha, \tau^*(z, \alpha))$.

Derivando e utilizando a Proposição 3.9 obtemos que:

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial p}{\partial \lambda}(0, 0, 0) \quad (3.31)$$

De (3.23) segue que:

$$\Psi_1(x, 0, \alpha, \tau) = p(x^2, \alpha, \tau)x \quad (3.32)$$

Diferenciando (3.32) na origem temos,

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \lambda \partial x}(0, 0, 0, 0) = \frac{\partial p}{\partial \lambda}(0, 0, 0) \quad (3.33)$$

Mas de (3.27) e da Proposição 2.8.(e),

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \lambda \partial x} (0,0,0,0) = \frac{1}{\|v_1^*\|^2} \langle v_1^*, D_\lambda D_u \Phi(0,0,0) v_1 \rangle$$

Utilizando a notação $A(\alpha) = D_u F(0,\alpha)$ e $A_\lambda(0) = D_\lambda A(0)$ temos:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \lambda \partial x} (0,0,0) = \frac{1}{\|v_1^*\|^2} \langle v_1^*, -A_\lambda(0) v_1 \rangle \quad (3.34)$$

Porém,

$$(a) \ v_1(s) = \text{Re}(e^{1s} c) = \frac{1}{2} (e^{1s} c + e^{-1s} \bar{c}) \quad (3.35)$$

$$(b) \ v_1^*(s) = \text{Re}(e^{1s} d) = \frac{1}{2} (e^{1s} d + e^{-1s} \bar{d})$$

Utilizando (3.31), (3.33), (3.34) e (3.35):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \lambda} (0,0) &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \lambda \partial x} (0,0,0,0) = \frac{-1}{\|v_1^*\|^2} \left\langle \frac{e^{1s} d}{2} + \frac{e^{-1s} \bar{d}}{2}, A_\lambda(0) \left(\frac{e^{1s} c}{2} + \frac{e^{-1s} \bar{c}}{2} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{-1}{\|v_1^*\|^2} \left\{ \frac{1}{4} \langle e^{1s} d, A_\lambda(0) e^{1s} c \rangle + \frac{1}{4} \langle e^{-1s} \bar{d}, A_\lambda(0) e^{1s} c \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \langle e^{1s} d, A_\lambda(0) e^{-1s} \bar{c} \rangle + \frac{1}{4} \langle e^{-1s} \bar{d}, A_\lambda(0) e^{-1s} \bar{c} \rangle \right\} \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} \langle e^{-1s} \bar{d}, A_\lambda(0) e^{1s} c \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\overline{A_\lambda(0) e^{1s} c} \right)^T e^{-1s} \bar{d} \, ds = \\ &= \frac{\bar{c}^T A_\lambda(0)^T \bar{d}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-21s} \, ds = 0 \\ \langle e^{1s} d, A_\lambda(0) e^{-1s} \bar{c} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\overline{A_\lambda(0) e^{-1s} \bar{c}} \right)^T e^{1s} d \, ds = \end{aligned}$$

$$= \frac{c^T A_\lambda^T(0)d}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2is} ds = 0$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \lambda}(0,0) &= \frac{-1}{\|v_1^*\|^2} \left\{ \frac{1}{4} (\langle e^{is}d, A_\lambda(0)e^{is}c \rangle + \langle e^{-is}\bar{d}, A_\lambda(0)e^{-is}\bar{c} \rangle) \right\} = \\ &= \frac{-1}{\|v_1^*\|^2} \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[(A_\lambda(0)e^{-is}\bar{c})^T e^{is}d + (A_\lambda(0)e^{is}c)^T e^{-is}\bar{d} \right] ds \right\} = \\ &= \frac{-1}{\|v_1^*\|^2} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{c}^T A_\lambda^T(0)d + c^T A_\lambda^T(0)\bar{d}) ds \right\} = \\ &= \frac{-1}{\|v_1^*\|^2} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{Re}((A_\lambda(0)c)^T \bar{d}) ds \right\} = \\ &= \frac{-1}{\|v_1^*\|^2} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{d}^T A_\lambda(0)c) \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por outro lado, seja $\rho(\alpha) = \sigma(\alpha) + i\omega(\alpha)$ os auto valores associados aos auto vetores $c(\alpha)$ de $A(\alpha)$ tal que:

$$c(0) = c \quad \text{e} \quad A(\alpha).c(\alpha) = \rho(\alpha).c(\alpha) \quad (3.37)$$

multiplicando por $\bar{d}^T$ temos:

$$\bar{d}^T A(\alpha)c(\alpha) = \bar{d}^T \rho(\alpha)c(\alpha)$$

diferenciando em relação a λ , e calculando em $\alpha = 0$ temos:

$$\bar{d}^T A_\lambda(0)c(0) + \bar{d}^T A(0)\frac{\partial c}{\partial \lambda}(0) = \bar{d}^T \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}(0)c(0) + \bar{d}^T \rho(0)\frac{\partial c}{\partial \lambda}(0)$$

Por outro lado:

$$\bar{d}^T A(0)\frac{\partial c}{\partial \lambda}(0) = (A(0)^T \bar{d})^T \frac{\partial c}{\partial \lambda}(0) = (i\bar{d})^T \frac{\partial c}{\partial \lambda}(0) = i\bar{d}^T \frac{\partial c}{\partial \lambda}(0) = \bar{d}^T \rho(0)\frac{\partial c}{\partial \lambda}(0)$$

onde a segunda igualdade é válida devido à (3.15) e a quarta devido

a (3.13) e (3.37).

Assim, retornando a (3.38),

$$\bar{d}^T A_\lambda(0)c = \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}(0) \bar{d}^T c$$

Por (3.17.b) $\bar{d}^T c = 2$, então,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \lambda}(0) = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) + i \frac{\partial \omega}{\partial \lambda}(0) = \frac{\bar{d}^T A_\lambda(0)c}{2}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{d}^T A_\lambda(0)c)$$

Logo:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{d}^T A_\lambda(0)c) = - \frac{\partial r}{\partial \lambda}(0,0) \|v_1^*\|^2 \quad \blacksquare$$

Estamos agora em condições para demonstrar o seguinte:

Teorema 3.13 (Teorema de Hopf)

Seja $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^∞ .

Consideremos a equação:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \alpha) \quad (3.38)$$

onde $\alpha = (\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$.

Suponhamos que:

- (i) $F(0, \alpha) = 0$
- (ii) $D_x F(0,0)$ tenha auto valores simples $\pm i$
- (iii) $D_x F(0,0)$ não possui outros auto valores no eixo imaginário.
- (iv) Se σ e ω são funções diferenciáveis em λ , onde $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ são os

auto valores simples de $D_x F(0,0)$ tais que $\sigma(0) = 0$ e $\omega(0) = 1$, então:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) \neq 0 \quad (3.39)$$

Então relativamente as soluções periódicas, de período próximo a 2π , $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação.

Demonstração: Dos resultados anteriores as soluções periódicas de (3.39), de período próximo a 2π , podem ser obtidos através da resolução de uma equação do tipo $g(x, \alpha) = 0$ com $x \geq 0$, onde

$$g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x$$

e as soluções não triviais serão obtidas resolvendo:

$$r(x^2, \alpha) = 0 \quad x > 0. \quad (3.40)$$

Mas pela Proposição 3.12, (3.39) implica que $\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0,0) \neq 0$ então pelo Teorema da Função Implícita existe uma função de classe C^∞ , λ^* , definida em uma vizinhança da origem tal que $r(x^2, \lambda^*(x^2, \alpha'), \alpha') = 0$ numa vizinhança da origem.

Então $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação. ■

O teorema anterior ainda não é conclusivo no que se diz respeito a variação do número de soluções em relação ao parâmetro de bifurcação λ .

A fim de fazermos tal análise, suponhamos estar nas condições do teorema (3.13) e consideremos novamente a função λ^* , dada na demonstração do mesmo, tal que:

$$r(x^2, \lambda^*(x^2, \alpha'), \alpha') = 0 \quad e \quad \lambda^*(0, 0) = 0$$

Temos que:

$$\lambda = \lambda^*(x^2, \alpha') = \lambda^*(0, \alpha') + \frac{\partial \lambda^*}{\partial z}(0, \alpha') x^2 + O(|x|^4)$$

É de nosso interesse supormos que $\frac{\partial \lambda^*}{\partial z}(0, \alpha') \neq 0$ nas vizinhanças da origem. Para tal introduziremos a hipótese adicional de que $\frac{\partial r}{\partial z}(0, 0) \neq 0$, e como:

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial z}(0, 0) = - \frac{\frac{\partial r}{\partial z}(0, 0)}{\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0)}$$

a condição requerida estará satisfeita.

Nestas condições a existência de soluções periódicas não triviais de (3.39) dependerá do sinal de $\lambda^* - \lambda^*(0, \alpha')$.

Efetuem os assim a seguinte mudança de variável:

$$(\lambda, \alpha') \longrightarrow (\delta, \alpha') = (\lambda - \lambda^*(0, \alpha'), \alpha').$$

Obteremos assim a seguinte:

Conclusão 3.14 A equação:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \alpha)$$

sob as hipóteses do Teorema 3.14 e a hipótese de que $\frac{\partial r}{\partial z}(0, 0) \neq 0$ admitirá para cada $\alpha = (\lambda, \alpha')$ suficientemente próximo da origem uma única órbita periódica de período próximo a 2π , quando:

$$\delta \cdot \frac{\partial r}{\partial z}(0, 0) \cdot \frac{\partial r}{\partial \lambda}(0, 0) < 0$$

e nenhuma órbita periódica, não constante, caso contrário. Claramente a função nula é solução da equação para todo $\alpha \in \mathbb{R}^{k+1}$.

Como as conclusões anteriores dependem de $\frac{\partial r}{\partial z}(0,0)$, apresentaremos a seguir o seu valor em função de F .

Proposição 3.15 Assumidas as hipóteses (i), (ii) e (iii) do Teorema (3.13) temos:

$$\frac{\partial r}{\partial z}(0,0) = \frac{-1}{4\|v_1^*\|^2} \operatorname{Re} \left\{ \bar{d}^T [D_u^2 F(0,0)(c, b_0) + D_u^2 F(0,0)(\bar{c}, b_1) + \frac{1}{4} D_u^3 F(0,0)(c, c, \bar{c})] \right\}$$

onde $b_0, b_1 \in \mathbb{C}^n$ e são definidos por:

$$(i) \quad A b_0 = \frac{-1}{2} D_u^2 F(0,0)(c, \bar{c})$$

$$(ii) \quad (A + 2iI) b_1 = \frac{-1}{4} D_u^2 F(0,0)(c, c)$$

Demonstração: De (3.30) temos:

$$r(z, \alpha) = p(z, \alpha, \tau(z, \alpha))$$

Diferenciando na origem e usando a Proposição 3.10.(c) obtemos:

$$\frac{\partial r}{\partial z}(0,0) = \frac{\partial p}{\partial z}(0,0,0) \quad (3.41)$$

Por outro lado, de (3.23) temos:

$$\Psi_1(x, 0, \alpha, \tau) = p(x^2, \alpha, \tau)x.$$

Diferenciando em relação a x na origem:

$$\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^3} (0,0,0,0) = 6 \frac{\partial p}{\partial z} (0,0,0)$$

Logo de (3.41):

$$\frac{\partial r}{\partial z} (0,0) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^3} (0,0,0,0) \quad (3.42)$$

Por outro lado da Proposição 2.8.(h),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^3} (0,0,0,0) &= \frac{1}{\|v_1^*\|^2} \langle v_1^*, D_u^3 \Phi(0,0,0)(v_1, v_1, v_1) \rangle + \\ &+ 3D_u^2 \Phi(0,0,0)(v_1, -K(I-Q)D_u^2 \Phi(0,0,0)(v_1, v_1)) \rangle \end{aligned}$$

Calculemos primeiramente

$$\langle v_1^*, D_u^3 \Phi(0,0,0)(v_1, v_1, v_1) \rangle \quad (3.43)$$

Substituindo,

$$v_1^*(s) = \text{Re}(e^{is}d) = \frac{1}{2} (e^{is}d + e^{-is}\bar{d}) \quad (3.44)$$

$$v_1(s) = \text{Re}(e^{is}c) = \frac{1}{2} (e^{is}c + e^{-is}\bar{c}) \quad (3.45)$$

em (3.43) e expandindo utilizando a trilinearidade de $D_u^3 \Phi(0,0,0)$, e o fato de que:

$$\langle e^{ims}v, e^{ins}w \rangle = 0 \quad \text{se } m \neq n \quad \text{com } v, w \in \mathbb{C}^n \quad (3.46)$$

obteremos que:

$$\langle v_1^*, D_u^3 \Phi(0,0,0)(v_1, v_1, v_1) \rangle = \frac{3}{16} \left[\langle e^{is}d, e^{is}D_u^3 \Phi(0,0,0)(c, c, \bar{c}) \rangle + \right.$$

$$+ \langle e^{-1s} \bar{d}, e^{-1s} D_u^3 \Phi(0,0,0)(\bar{c}, \bar{c}, c) \rangle \quad (3.47)$$

$$\langle e^{1s} d, e^{1s} D_u^3 \Phi(0,0,0)(c, c, \bar{c}) \rangle = \left[\overline{D_u^3 \Phi(0,0,0)(c, c, \bar{c})} \right]^T d \quad (3.48)$$

$$\langle e^{-1s} \bar{d}, e^{-1s} D_u^3 \Phi(0,0,0)(\bar{c}, \bar{c}, c) \rangle = \left[\overline{D_u^3 \Phi(0,0,0)(\bar{c}, \bar{c}, c)} \right]^T \bar{d} \quad (3.49)$$

Substituindo (3.48) e (3.49) em (3.47) temos:

$$\langle v_1^*, D_u^3 \Phi(0,0,0)(v_1, v_1, v_1) \rangle = \frac{3}{8} \operatorname{Re} \left[\bar{d}^T D_u^3 \Phi(0,0,0)(c, c, \bar{c}) \right]$$

$$\text{Mas } \Phi(u, \alpha, \tau) = (1+\tau) \frac{du}{ds} - F(u, \alpha), \text{ então,} \quad (3.50)$$

$$D_u^3 \Phi(0,0,0) = -D_u^3 F(0,0) \quad (3.51)$$

Logo,

$$\langle v_1^*, D_u^3 \Phi(0,0,0)(v_1, v_1, v_1) \rangle = -\frac{3}{8} \operatorname{Re} \left[\bar{d}^T D_u^3 F(0,0)(c, c, \bar{c}) \right] \quad (3.52)$$

Avaliemos agora

$$\langle v_1, 3D_u^2 \Phi(0,0,0)(v_1, W_{11}) \rangle \quad (3.53)$$

$$\text{onde } W_{11} = -K(I-Q)D_u^2 \Phi(0,0,0)(v_1, v_1).$$

Inicialmente determinemos W_{11} .

Aplicando $L = \frac{d}{ds} - A$ e utilizando (2.6) temos:

$$\frac{d}{ds} W_{11} - A W_{11} = -(I-Q)D_u^2 \Phi(0,0,0)(v_1, v_1) \quad (3.54)$$

Logo, de (3.50) temos que W_{11} é resolução da equação diferencial:

$$\frac{d}{ds} W_{11} - A W_{11} = (I-Q)D_u^2 F(0,0)(v_1, v_1) \quad (3.55)$$

Utilizando (3.46) mostramos que:

$$\langle v_j^*, D_u^2 F(0,0)(v_1, v_1) \rangle = 0 \quad j = 1, 2$$

e então $D_u^2 F(0,0)(v_1, v_1)$ pertence a $R(L)$ o que implica que $(I-Q)$ age como identidade em $D_u^2 F(0,0)(v_1, v_1)$.

Mas substituindo (3.44) e (3.45),

$$\begin{aligned} D_u^2 F(0,0)(v_1, v_1) &= D_u^2 F(0,0) \left[\frac{1}{2} (e^{1s} c + e^{-1s} \bar{c}), \frac{1}{2} (e^{1s} c + e^{-1s} \bar{c}) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ e^{21s} D_u^2 F(0,0)(c, c) + 2 D_u^2 F(0,0)(c, \bar{c}) + e^{-21s} D_u^2 F(0,0)(\bar{c}, \bar{c}) \right\} \end{aligned}$$

Logo (3.55) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} W_{11} - A W_{11} &= \frac{1}{4} \left\{ e^{21s} D_u^2 F(0,0)(c, c) + 2 D_u^2 F(0,0)(c, \bar{c}) + \right. \\ &\quad \left. e^{-21s} D_u^2 F(0,0)(\bar{c}, \bar{c}) \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Consideremos as equações:

- (a) $\frac{d}{ds} W_{11} - A W_{11} = \frac{1}{2} D_u^2 F(0,0)(c, \bar{c})$
- (b) $\frac{d}{ds} W_{11} - A W_{11} = \frac{1}{4} e^{21s} D_u^2 F(0,0)(c, c)$
- (c) $\frac{d}{ds} W_{11} - A W_{11} = \frac{1}{4} e^{-21s} D_u^2 F(0,0)(\bar{c}, \bar{c})$

A hipótese (ii) e (iii) nos garante a existência de $b_0 \in \mathbb{R}^n$ e $b_1 \in \mathbb{C}^n$, tais que:

$$A b_0 = \frac{-1}{2} D_u^2 F(0,0)(c, \bar{c}), \quad (3.58)$$

$$(A - 2i)b_1 = \frac{-1}{4} D_u^2 F(0,0)(c, c) \quad (3.57)$$

Assim b_0 , $e^{2is}b_1$ e $e^{-2is}\bar{b}_1$ são respectivamente soluções de (a) (b) e (c).

Pela linearidade temos que

$$b_0 + e^{2is}b_1 + \bar{e}^{2is}\bar{b}_1 \quad (3.59)$$

é uma solução de (3.55).

Utilizando (3.46) temos que (3.59) é ortogonal a v_1^* e v_2^* dados em (3.16).

Logo (3.59) pertence ao $R(L)$ e então,

$$W_{11} = b_0 + e^{2is}b_1 + \bar{e}^{2is}\bar{b}_1 \quad (3.60)$$

Assim, utilizando (3.59), (3.44), (3.45) e (3.46),

$$\begin{aligned} \langle v_1^*, 3D_u^2\Phi(0,0,0)(v_1, W_{11}) \rangle &= \\ &= \left\langle \frac{1}{2}(e^{is}d + e^{-is}\bar{d}), 3D_u^2\Phi(0,0,0)\left(\frac{1}{2}(e^{is}c + \bar{e}^{is}\bar{c}), b_0 + e^{2is}b_1 + \bar{e}^{2is}\bar{b}_1\right) \right\rangle = \\ &= \frac{3}{4} \left[\langle e^{is}d, e^{is}D_u^2\Phi(0,0,0)(c, b_0) \rangle + \langle e^{-is}\bar{d}, e^{-is}D_u^2\Phi(0,0,0)(c, \bar{b}_1) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle e^{is}d, e^{is}D_u^2\Phi(0,0,0)(\bar{c}, b_1) \rangle + \langle e^{-is}\bar{d}, e^{-is}D_u^2\Phi(0,0,0)(\bar{c}, \bar{b}_0) \rangle \right] = \\ &= \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ \bar{d}^T D_u^2\Phi(0,0,0)(c, b_0) + \bar{d}^T D_u^2\Phi(0,0,0)(\bar{c}, b_1) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\bar{d}^T D_u^2F(0,0,0)(c, b_0) - \bar{d}^T D_u^2F(0,0,0)(\bar{c}, b_1) \right\} \quad (3.61) \end{aligned}$$

Assim retornando a (3.42) e utilizando (3.52) e (3.61) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial z}(0,0) &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^3}(0,0,0,0) = \frac{1}{6 \|v_1^*\|^2} \left[\frac{-3}{8} \operatorname{Re} \left\{ \bar{d}^T D_u^3 F(0,0)(c,c,\bar{c}) \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ \bar{d}^T D_u^2 F(0,0)(c,b_0) + \bar{d}^T D_u^2 F(0,0)(\bar{c},b_1) \right\} \right] = \\
&= \frac{-1}{4 \|v_1^*\|^2} \operatorname{Re} \left\{ \bar{d}^T \left[D_u^2 F(0,0)(c,b_0) + D_u^2 F(0,0)(\bar{c},b_1) + \frac{1}{4} D_u^3 F(0,0)(c,c,\bar{c}) \right] \right\}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Observação 3.16 Quando F é tal que $F(-x,\lambda) = -F(x,\lambda)$ temos que $D_x^2 F(0,0) = 0$ e então teremos que $\frac{\partial r}{\partial z}(0,0) = \frac{-1}{16 \|v_1^*\|^2} \operatorname{Re} \left\{ \bar{d}^T D_x^3 F(0,0)(c,c,\bar{c}) \right\}$.

3.6 EXEMPLO

Consideremos o sistema:

$$\frac{dx}{dt} = F(x,\lambda) \quad (3.62)$$

onde,

$$\begin{aligned}
F: \mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x,\lambda) &\longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} x - |x|^2 x = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} x - \langle x,x \rangle x
\end{aligned}$$

Temos:

(i) $F(0,\lambda) = 0$

(ii) $A(\lambda) = D_x F(0,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, o que implica $\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) = 1 \neq 0$.

(iii) $A(0) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cujos os auto valores são $\pm i$, simples.

Logo o sistema (3.48) satisfaz as hipóteses do Teorema de Hopf.

Determinemos agora $\frac{\partial r}{\partial z}(0,0)$.

Porém pela Observação 3.16,

$$\frac{\partial r}{\partial z}(0,0) = \frac{-1}{16\|v_1^*\|^2} \operatorname{Re} \left(\bar{d}^T D_x^3 F(0,0)(c,c,\bar{c}) \right) \quad (3.63)$$

Seja $f(x) = |x|^2 x = \langle x, x \rangle x$.

$$D_x f(x)u = 2\langle u, x \rangle x + \langle x, x \rangle u.$$

$$D_x^2 f(x)(u,v) = 2\langle u, v \rangle x + 2\langle u, x \rangle v + 2\langle v, x \rangle u.$$

$$D_x^3 f(x)(u,v,w) = 2\langle u, v \rangle w + 2\langle u, w \rangle v + 2\langle v, w \rangle u.$$

Então,

$$D_x^3 F(0,0)(u,v,w) = -D_x^3 f(0)(u,v,w) = -2(\langle u, v \rangle w + \langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u).$$

Sejam $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}$,

$$D_x^3 F(0,0)(u,v,w) = -2 \begin{pmatrix} 3u_1 v_1 w_1 + u_1 v_2 w_2 + u_2 v_1 w_2 + u_2 v_2 w_1 \\ 3u_2 v_2 w_2 + u_2 v_1 w_2 + u_1 v_2 w_1 + u_1 v_1 w_2 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Consideremos os vetores:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = d$$

Temos as seguintes condições satisfeitas:

$$Ac = ic, \quad A^T d = -id, \quad \bar{c}^T c = 2, \quad \bar{d}^T c = 2 \quad \text{e} \quad d^T c = 0.$$

Utilizando (3.64)

$$D_{\mathbf{x}}^3 F(0,0)(c,c,\bar{c}) = \begin{pmatrix} -8 \\ 8i \end{pmatrix}$$

e então,

$$\bar{d}^T D_{\mathbf{x}}^3 F(0,0)(c,c,\bar{c}) = (1 \ i) \begin{pmatrix} -8 \\ 8i \end{pmatrix} = -16$$

Assim de (3.63) temos que $\frac{\partial r}{\partial \bar{z}}(0,0) = \frac{1}{\|v_1^*\|^2}$ e da Proposição

$$(3.13), \frac{\partial r}{\partial \lambda}(0,0) = \frac{-1}{\|v_1^*\|^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0,0). \text{ Logo } \frac{\partial r}{\partial \lambda}(0,0) = \frac{-1}{\|v_1^*\|^2}.$$

Portanto da Conclusão (3.14) temos que a equação (3.62) admite uma única órbita periódica, de período próximo a 2π , não constante se $\lambda > 0$ e nenhuma não constante caso contrário. Observamos ainda que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ a equação (3.62) admite a solução trivial $x = 0$.

CAPÍTULO IV

BIFURCAÇÃO DE HOPF EQUIVARIANTE

Determinaremos neste capítulo condições suficientes para que ocorra a Bifurcação de Hopf em uma família de equações diferenciais com simetria. As simetrias serão interpretadas através da ação de certos grupos. Analisaremos também como a simetria pode ser transferida para as soluções das equações. A técnica que empregaremos para esse fim é a Redução Liapunov-Schmidt Equivariante.

Finalizaremos o capítulo apresentando um exemplo aplicado a duas equações de Van der Pol acopladas, onde utilizaremos as simetrias dadas pelo grupo diedral D_4 .

4.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Seja

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \lambda) &\longrightarrow F(x, \lambda) \end{aligned}$$

uma função de classe C^∞ onde $F(0, \lambda) = 0$.

Estamos interessados em analisar as soluções periódicas de:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda) \quad (4.1)$$

com a hipótese adicional de que:

(H₁) Existe um grupo de Lie compacto Γ agindo em $\mathbb{R}^n$ e F é Γ -equivariante, i.e.,

$$F(\gamma.x, \lambda) = \gamma.F(x, \lambda) \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (4.2)$$

Mais especificamente analisaremos como a simetria dada por (H₁) é transferida para as soluções de (4.1).

4.2 CONDIÇÃO SOBRE OS AUTO VALORES

Na Bifurcação de Hopf, apresentada no capítulo 3, supusemos que $A = D_x F(0, 0)$ possuía auto valores simples $\pm i$ e nenhum outro da forma ki com $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq \pm 1$.

Quando F é Γ -equivariante, isto nem sempre é possível, como é o caso em que Γ age de forma absolutamente irredutível sobre $\mathbb{R}^n$.

Ao impormos a condição de que A possua auto valores puramente imaginários obtemos algumas restrições, como as mostradas na proposição seguinte, as quais nos motivará uma hipótese mais adequada para o problema equivariante.

Proposição 4.1 Seja Γ um grupo de Lie agindo no $\mathbb{R}^n$ e $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear Γ -equivariante com auto valores puramente imaginários.. Se $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ é uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ em sub-espacos Γ -irredutíveis, então ou:

- (a) Dois dos subespaços são Γ -isomorfos e absolutamente irredutíveis, ou
- (b) Algum dos V_i não é Γ -absolutamente irredutível.

Demonstração: Suponhamos que nem (a) e nem (b) ocorram, então todos os V_i são Γ -absolutamente irredutíveis e não isomorfos. Pelo Corolário 1.21 a decomposição acima é a decomposição isotípica e pelo Teorema 1.28, $L(V_i) \subseteq V_i$, $i = 1, \dots, k$. Como os V_i são Γ -absolutamente irredutíveis existem $a_i \in \mathbb{R}$ tais que $L|_{V_i} = a_i Id_{V_i}$. Logo os auto valores de L serão os $a_i \in \mathbb{R}$ o que contraria a hipótese. ■

A proposição anterior nos motiva a definição:

Definição 4.2 Seja Γ um grupo de Lie agindo em V .

Dizemos que ação de Γ em V é Γ -simples ou que V é Γ -simples se:

- (a) $V = V_1 \oplus V_2$ onde V_1 é Γ -isomorfo a V_2 e V_1 é Γ -absolutamente

irredutível ou

(b) V é Γ -irredutível mas não é Γ -absolutamente irredutível.

Observação 4.3 Podemos reenunciar a Proposição 4.1 afirmando que nas hipóteses dadas existe um subespaço Γ -simples contido no $\mathbb{R}^n$.

Observação 4.4 A propriedade Γ -simples é preservada por Γ -isomorfismo.

Exemplos 4.5

(a) $\mathbb{R}^4$ é $O(2)$ -simples sob a ação diagonal de $O(2)$ dada por:

$$\begin{aligned} O(2) \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (\theta, (x, y)) &\longrightarrow (R(\theta).x, R(\theta).y) \\ (k, (x, y)) &\longrightarrow (k.x, k.y) \end{aligned}$$

pois $\mathbb{R}^4 = (\mathbb{R}^2 \times \{(0,0)\}) \oplus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}^2)$ e $O(2)$ age de forma absolutamente irredutível em cada subespaço da decomposição acima e as ações são $O(2)$ -isomorfas.

(b) $\mathbb{R}^2$ é $SO(2)$ -simples sob a ação usual do $SO(2)$:

$$\begin{aligned} SO(2) \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, x) &\longrightarrow R(\theta).x \end{aligned}$$

pois a ação acima é $SO(2)$ -irredutível mas não é $SO(2)$ -absolutamente irredutível conforme Exemplos 1.24.(a) e 1.15.(c).

(c) Seja D_4 o grupo de ordem oito das simetrias do quadrado gerado por ρ e ξ , tais que $\rho^2 = 1$; $\xi^4 = 1$; $\rho\xi\rho = \xi^{-1}$.

Consideremos a ação:

$$\begin{aligned} D^4 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\rho, (x, y, z, w)) &\longrightarrow (-x, -y, z, w) \\ (\xi, (x, y, z, w)) &\longrightarrow (-z, -w, x, y) \end{aligned}$$

Sejam $V_1 = \{(x, 0, z, 0); x, z \in \mathbb{R}\}$ e $V_2 = \{(0, y, 0, w); y, w \in \mathbb{R}\}$.

Assim $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

Mostremos que V_1 é D_4 -isomorfo a V_2 e que V_1 e V_2 são subespaços D_4 -absolutamente irredutíveis.

Sejam:

$$\{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1, 0)\} \quad \text{base de } V_1$$

e

$$\{f_1 = (0, 1, 0, 0), f_2 = (0, 0, 0, 1)\} \quad \text{base de } V_2.$$

Relativamente as bases anteriores, ρ e ξ são dadas por:

$$[\rho] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\xi] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ um operador D_4 -equivariante de $\mathcal{L}(V_1, V_1)$ ou de $\mathcal{L}(V_2, V_2)$.

$$\rho A = A\rho \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -a & -b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ -c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \xi A = A\xi &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases} \end{aligned}$$

e então $A = aId$.

Logo V_1 e V_2 são D_4 absolutamente irredutíveis e

$$\begin{array}{ccc} \rho: V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ e_1 & \longrightarrow & f_1 \\ e_2 & \longrightarrow & f_2 \end{array}$$

é um D_4 -isomorfismo pois,

$$\rho \varphi(e_1) = \rho.f_1 = -f_1 = \varphi(\rho e_1), \quad \rho \varphi(e_2) = \rho f_2 = f_2 = \varphi(\rho e_2)$$

$$\xi \varphi(e_1) = \xi.f_1 = -f_2 = \varphi(\xi e_1), \quad \xi \varphi(e_2) = \xi f_2 = -f_1 = \varphi(\xi e_2)$$

Concluimos então que $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ onde V_1 é D_4 -isomorfo a V_2 e V_1 e V_2 são subespaços D_4 -absolutamente irredutíveis.

Portanto $\mathbb{R}^4$ é D_4 -simples (do tipo (b)).

Golubitsky [5] mostra que genericamente o auto espaço real associado a auto valores puramente imaginários é um subespaço Γ -simples.

Trabalharemos neste capítulo com as seguintes hipóteses mais gerais:

$(H_2) : \mathbb{R}^n$ é um espaço Γ -simples.

$$(H_3) : A = D_x F(0,0) = J = \begin{bmatrix} 0 & -Id_m \\ Id_m & 0 \end{bmatrix}$$

onde Id_m é o operador identidade de ordem $m = \frac{n}{2}$.

A última hipótese foi motivada pelo fato de que Golubitsky [5] mostra que se (H_1) e (H_2) estiverem satisfeitas e se $A = D_x F(0,0)$ possuir auto valores $\pm i$, A é semelhante a J .

Quando (H_3) está satisfeita temos que J é Γ -equivariante, desde que F o seja.

Mostraremos agora que as hipóteses anteriores fornecem-nos dados favoráveis em relação aos auto valores de $A(\lambda) = D_x F(0,\lambda)$.

Lema 4.6 Seja Γ um grupo de Lie agindo em V onde $V = V_1 \oplus V_2$, V_1 é Γ -isomorfo a V_2 e V_1 é Γ -absolutamente irredutível.

O operador $L: V \longrightarrow V$ é Γ -equivariante se e somente se, a menos de Γ -isomorfismo,

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} aId_{v_1} & bId_{v_1} \\ cId_{v_1} & dId_{v_1} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Como $V = V_1 \oplus V_2$ qualquer que seja $v \in V$ existem $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ tais que $v = v_1 + v_2$ onde $\gamma(v_1) \in V_1$ e $\gamma(v_2) \in V_2 \quad \forall \gamma \in \Gamma$, pois V_1 e V_2 são subespaços Γ -invariantes.

Suponhamos que L é Γ -invariante e

$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{array}{ccc} A : V_1 & \longrightarrow & V_1 \\ C : V_1 & \longrightarrow & V_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B : V_2 & \longrightarrow & V_1 \\ D : V_2 & \longrightarrow & V_2 \end{array}$$

Temos para qualquer $\gamma \in \Gamma$ que:

$$\begin{aligned} \gamma.L(v) = L(\gamma.v) &\Leftrightarrow \gamma.L(v_1) + \gamma.L(v_2) - L\gamma(v_1) - L\gamma(v_2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma.A(v_1) + \gamma.C(v_1) + \gamma.B(v_2) + \gamma.D(v_2) - A\gamma(v_1) - C\gamma(v_1) - B\gamma(v_2) - \\ &- D\gamma(v_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma.Av_1 + \gamma.Bv_2 - A\gamma.v_1 - B\gamma.v_2 = 0 \\ \gamma.Cv_1 + \gamma.Dv_2 - C\gamma.v_1 - D\gamma.v_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Em particular para $v_2 = 0$ temos:

$$\gamma.Av_1 = A\gamma.v_1 \quad e \quad \gamma.Cv_1 = C\gamma.v_1 \quad \forall v_1 \in V_1$$

e para $v_1 = 0$ temos:

$$\gamma.Bv_2 = B\gamma.v_2 \quad e \quad \gamma.Dv_2 = D\gamma.v_2 \quad \forall v_2 \in V_2$$

Como A e D são Γ -invariantes e V_1 e V_2 são Γ -absolutamente irredutíveis, existem $a, d \in \mathbb{R}$ tais que:

$$A = aId_{v_1} \quad D = dId_{v_2}$$

Seja $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ o Γ -isomorfismo entre V_1 e V_2 . Assim as aplicações,

$$B\varphi : V_1 \longrightarrow V_1 \quad e \quad \varphi^{-1}C : V_1 \longrightarrow V_1$$

são Γ -equivariantes. Logo, devido a Γ -irredutibilidade de V_1 , existem $b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$B\varphi = bId_{v_1} \quad \varphi^{-1}C = cId_{v_1}$$

Portanto,

$$L = \begin{bmatrix} aId_{v_1} & bId_{v_1}\varphi^{-1} \\ \varphi cId_{v_1} & dId_{v_1}\varphi^{-1} \end{bmatrix}$$

que, a menos de Γ -isomorfismos, podemos identificar com:

$$\begin{bmatrix} aId_{v_1} & bId_{v_1} \\ cId_{v_1} & dId_{v_1} \end{bmatrix}$$

Reciprocamente suponhamos que L é Γ -isomorfo a (4.3) como $V = V_1 \oplus V_2$, V_1 é Γ -isomorfo a V_2 e V_1 e V_2 são Γ -invariantes podemos considerar que Γ age diagonalmente em $V = V_1 \oplus V_2$, e então concluímos que é Γ -equivariante. ■

Proposição 4.7 Assumidos (H_1) , (H_2) e (H_3) , os auto valores de $A(\lambda) = D_x F(0, \lambda)$ serão um par de complexos conjugados $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ cada um com multiplicidade $n/2$, onde σ e ω são de classe C^∞ em relação a λ .

Demonstração : Devido a (H_2) , temos primeiramente dois casos a considerar:

(a) Suponhamos que $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ onde V_1 e V_2 são Γ -isomorfos e absolutamente irredutíveis.

Como F é Γ -equivariante $A(\lambda)$ é também Γ -equivariante, logo pelo Lema 4.6 podemos assumir que:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda)Id_m & b(\lambda)Id_m \\ c(\lambda)Id_m & d(\lambda)Id_m \end{pmatrix} \quad m = n/2$$

onde a , b , c e d são funções da reta na reta.

O polinômio característico de $A(\lambda)$ é:

$$p(\mu, \lambda) = \det(D_x F(0, \lambda) - \mu Id) = [(a(\lambda) - \mu)(d(\lambda) - \mu) - b(\lambda)c(\lambda)]^m \quad (4.4)$$

Assim os auto valores de $A(\lambda)$ são as raízes de:

$$q(\mu, \lambda) = [(a(\lambda) - \mu)(d(\lambda) - \mu) - b(\lambda)c(\lambda)] = 0$$

Devido a (H_3) , $A(0) = J$ cujos auto valores são $\pm i$ de multiplicidade m , então $\pm i$ são raízes simples de q , logo,

$$q(\pm i, 0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial q}{\partial \sigma}(\pm i, 0) \neq 0$$

então pelo Teorema da Função Implícita existe um ramo $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$, C^∞ em relação a λ , tal que:

$$q(\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda), \lambda) = 0$$

para λ numa vizinhança do zero.

Portanto de (4.4), $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ serão auto valores de $D_x F(0, \lambda)$ de multiplicidade m tal que $\sigma(0) = 0$ e $\omega(0) = 1$.

(b) Suponhamos que a ação de Γ em $\mathbb{R}^n$ é irredutível mas não absolutamente irredutível.

Consideremos o conjunto:

$$E_\Gamma = \{A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; A.\gamma = \gamma.A, \forall \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

que contém $D_x F(0, \lambda) = A(\lambda)$.

Podemos considerar $\mathbb{R}^n$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{E}_\Gamma$ pois $\mathbb{E}_\Gamma$ é uma álgebra de divisão, conforme a Proposição 1.30. Seja k a dimensão deste espaço. Então existirá um isomorfismo real:

$$\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{E}_\Gamma^k$$

Assim se A é um operador em $\mathbb{R}^n$ a menos de isomorfismo podemos identificá-lo com o operador:

$$\begin{aligned} A' : \quad \mathbb{E}_\Gamma^k &\longrightarrow \mathbb{E}_\Gamma^k \\ (x_1, x_2, \dots, x_k) &\longrightarrow (Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_k) \end{aligned}$$

Concluimos então que os auto valores de A são os auto valores de A atuando sobre $\mathbb{E}_\Gamma$ repetidos k vezes.

Portanto em particular para analisarmos os auto valores de $A(\lambda)$ estudaremos a atuação do mesmo sobre $\mathbb{E}_\Gamma$.

Do Corolário 1.32 e 1.33 ou $\mathbb{E}_\Gamma$ é isomorfo aos números complexos $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{E}_\Gamma$ é isomorfo a álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$.

Analisemos separadamente cada um dos casos.

(1º caso) Suponhamos que $\mathbb{E}_\Gamma$ é isomorfo a $\mathbb{C}$ e então $k = n/2$.

Desde que $A(\lambda)$ é de classe C^∞ em relação a λ , existem funções reais $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que a menos de isomorfismo de algebra $A(\lambda) = a(\lambda) + ib(\lambda)$. Assim para qualquer $x + iy \in \mathbb{C}$ temos:

$$(a(\lambda) + ib(\lambda))(x + iy) = (a(\lambda)x - b(\lambda)y) + i(b(\lambda)x + a(\lambda)y).$$

Podemos então identificar $a(\lambda) + ib(\lambda)$ com o operador dado pela matriz:

$$\begin{bmatrix} a(\lambda) & -b(\lambda) \\ b(\lambda) & a(\lambda) \end{bmatrix}$$

cujos auto valores são simples e iguais a $a(\lambda) \pm ib(\lambda)$.

Logo concluímos que os auto valores de $A(\lambda)$ atuando sobre $\mathbb{R}^n$ será um ramo $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ de multiplicidade $k = n/2$.

(2º caso) Suponhamos que E_Γ é isomorfo a $\mathbb{H}$ e então $k = n/4$.

Logo existem funções reais $a, b, c, d: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , tal que $A(\lambda) = a(\lambda) + b(\lambda)i + c(\lambda)j + d(\lambda)k$.

Qualquer que seja $x + yi + zj + wk \in \mathbb{H}$ temos:

$$(a(\lambda) + b(\lambda)i + c(\lambda)j + d(\lambda)k).(x + yi + zj + wk) = (a(\lambda)x - b(\lambda)y - c(\lambda)z - d(\lambda)w) + b(\lambda)x + a(\lambda)y - d(\lambda)z + c(\lambda)w)i + (c(\lambda)x + d(\lambda)y + a(\lambda)z - b(\lambda)w)j + (d(\lambda)x - c(\lambda)y + b(\lambda)z + a(\lambda)w)k.$$

Logo podemos identificar $A(\lambda)$ por um isomorfismo de álgebra com o operador de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ dado pela matriz:

$$\begin{bmatrix} a(\lambda) & -b(\lambda) & -c(\lambda) & -d(\lambda) \\ b(\lambda) & a(\lambda) & -d(\lambda) & c(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) & a(\lambda) & -b(\lambda) \\ d(\lambda) & -c(\lambda) & b(\lambda) & a(\lambda) \end{bmatrix}$$

que possui autovalores são $a(\lambda) \pm i(b(\lambda)^2 + c(\lambda)^2 + d(\lambda)^2)^{1/2}$ de multiplicidade 2. Novamente concluímos que $A(\lambda)$ atuando sobre $\mathbb{R}^n$ possui um ramo $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ cada qual com multiplicidade $k.2 = n/2$ de classe C^∞ em relação a λ . ■

4.3 APLICAÇÃO DA REDUÇÃO DE LIAPUNOV-SCHIMIDT EQUIVARIANTE

O procedimento para a aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt na análise das soluções de (4.1), será análogo ao feito na secção (3.1). Assim utilizaremos as mesmas notações.

Suponhamos satisfeitas as hipóteses (H_1) e (H_3)

Consideremos novamente os espaços de Banach $C_{2\pi}$ e $C_{2\pi}^1$, com as normas e produto interno definidos em (3.5) e (3.6).

Consideremos a mudança de variável:

$$u(t) = x \left[\frac{t}{1+\tau} \right] \quad (4.5)$$

e definimos:

$$\begin{aligned} \Phi : C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow C_{2\pi} \\ (u, \gamma, \tau) &\longrightarrow (1+\tau) \frac{du}{dt} - F(u, \lambda) \end{aligned}$$

e sua linearização:

$$\begin{aligned} L : D_u \Phi(0,0,0) : C_{2\pi}^1 &\longrightarrow C_{2\pi} \\ u &\longrightarrow \frac{du}{dt} - Ju \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $J = D_x F(0,0)$ é a dada em (H_3)

Consideremos a seguinte ação:

$$\begin{aligned} (\Gamma \times S^1) \times C_{2\pi}^1 &\longrightarrow C_{2\pi}^1 \\ ((\gamma, \theta), x(.)) &\longrightarrow \gamma.x(. + \theta) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como F é Γ -equivariante e autônoma temos que Φ é $(\Gamma \times S^1)$ -equivariante sob a ação (4.7).

A fim de utilizarmos os resultados apresentados pela Redução de Liapunov-Schmidt Equivariante vamos supor que as projeções:

$$P : C_{2\pi} \longrightarrow \ker(L) \quad Q : C_{2\pi}^1 \longrightarrow \ker(L^*)$$

são $(\Gamma \times S^1)$ -equivariantes. A existência destas é garantida pelo Teorema (2.11).

Obteremos então a função de Bifurcação dada por:

$$\begin{aligned} \Psi : \ker(L) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \ker(L^*) \\ (v, \lambda, \tau) &\longrightarrow Q\Phi(v + w^*(v, \lambda, \tau), \lambda, \tau) \end{aligned}$$

Analisaremos a seguir como a ação (4.7) no $\ker(L)$ pode ser interpretada através de uma ação em $\mathbb{R}^n$. Posteriormente determinaremos uma base para as funções $(\Gamma \times S^1)$ -equivariantes.

Lema 4.8 O $\ker(L)$ pode ser naturalmente identificado com $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Uma função $x(t)$ está no $\ker(L)$ se e somente se $x(t)$ é 2π periódica e satisfaz a equação $\frac{dx}{dt} = J \cdot x$.

A solução geral da equação diferencial acima é dada por $x(t) = e^{Jt}v$, com $v \in \mathbb{R}^n$.

Como:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} \cos t \, I_m & -\sin t \, I_m \\ \sin t \, I_m & \cos t \, I_m \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

Concluimos que $x(\cdot) = e^{Jt}v$ é 2π periódica para qualquer que seja $v \in \mathbb{R}^n$.

Logo a aplicação:

$$\begin{array}{ccc} \ker(L) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (e^{Jt}v) & \longrightarrow & v \end{array} \quad (4.9)$$

fornece-nos o isomorfismo procurado.

Lema 4.9 A ação de $\Gamma \times S^1$ no $\mathbb{R}^n$ é dada por:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\gamma, \theta) & \longrightarrow & (\gamma, \theta).x = \gamma.e^{\theta J}.v \end{array}$$

Demonstração: Utilizando a identificação (4.9) temos para cada $v \in \mathbb{R}^n$, associado à solução $x(t) = e^{Jt}v$, o seguinte comportamento em relação as ações de S^1 e Γ .

$$\theta.v \equiv \theta.x(t) = x(t+\theta) \equiv e^{(t+\theta)J}v = e^{tJ}(e^{\theta J}v) \equiv e^{\theta J}v$$

$$\gamma.v \equiv \gamma.x(t) = \gamma.e^{tJ}v = e^{tJ}(\gamma.v) \equiv \gamma.v$$

$$\text{Logo } (\gamma, \theta).v = \gamma.e^{\theta J}v. \quad \blacksquare$$

Observação 4.10 Como a ação de Γ e S^1 comutam, um operador L é $\Gamma \times S^1$ -equivariante se e somente se L é Γ -equivariante e S^1 -equivariante.

Proposição 4.11 Suponhamos (H_2) satisfeita, i.e., que $\mathbb{R}^n$ é Γ -simples. Então a menos de isomorfismo as matrizes I e J formam uma base para o espaço vetorial de todas as aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, que são $\Gamma \times S^1$ -equivariantes.

Demonstração: Temos a princípio dois casos a considerar:

(1^o caso) Suponhamos que $\mathbb{R}^n$ é Γ -isomorfo a $V_1 \oplus V_2$, onde V_1 é Γ -isomorfo a V_2 e V_1, V_2 são subespaços Γ -absolutamente irredutíveis.

Seja $L : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$ um operador linear $\Gamma \times S^1$ -equivariante.

Pelo Lema 4.6 existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que, a menos de Γ -isomorfismo, podemos considerar:

$$L = \begin{bmatrix} aId_m & bId_m \\ cId_m & dId_m \end{bmatrix}$$

onde Id_m é a matriz identidade de ordem m .

Mas L é também S^1 equivariante, i.e., $\Theta.L = L.\Theta$, o que pelo Lema 4.9 é equivalente a $e^{\Theta J}.L = L.e^{\Theta J}$, onde $e^{\Theta J}$ é dado por (4.8).

Segue-se então que:

$$L = \begin{bmatrix} aId_m & bId_m \\ -bId_m & aId_m \end{bmatrix}$$

Logo $L = aI - bJ$ com $a, b, \in \mathbb{R}$.

Portanto I e J formam a base das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ os quais são $\Gamma \times S^1$ equivariantes.

(2^o caso) Suponhamos agora que $\mathbb{R}^n$ é Γ -irredutível mas não absolutamente irredutível.

Pelo Corolário 1.32 e 1.33 temos que:

$$E_\Gamma = \{ L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \gamma.L = L.\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma \}$$

é isomorfo aos complexos $\mathbb{C}$ ou aos quatérnios $\mathbb{H}$, assim temos dois casos a

considerar.

(a) Suponhamos que E_Γ é isomorfo aos $\mathbb{C}$.

A aplicação linear dada por:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{C} & \longrightarrow & [I, J] \\ 1 & \longrightarrow & I \\ i & \longrightarrow & J \end{array} \quad (4.10)$$

é um isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e $[I, J]$ o subespaço das aplicações lineares geradas por I e J .

Logo a menos de isomorfismo I e J formam uma base para E_Γ .

Como I e J são também S^1 -equivariantes, I, J formam uma base para o conjunto das aplicações lineares $\Gamma \times S^1$ -equivariantes.

(b) Suponhamos que E_Γ é isomorfo à álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$. Desde que toda aplicação $\Gamma \times S^1$ -equivariante é Γ -equivariante se L é uma aplicação $\Gamma \times S^1$ -equivariante existem a, b, c e d tais que a menos de um isomorfismo de álgebra podemos considerar $L = a + bi + cj + dk$.

Desde que as ações de S^1 e Γ comutam podemos considerar $S^1 \subseteq E_\Gamma$ através da identificação:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : S^1 & \longrightarrow & [\cos\theta + i\sin\theta] \subseteq \mathbb{H} \\ e^{\theta J} & \longrightarrow & \cos\theta + i\sin\theta \end{array}$$

Assim a ação de $\theta \in S^1$ em $\mathbb{H}$ será dada pela multiplicação por $\cos\theta + i\sin\theta$ e então:

$$\theta L = L\theta \Leftrightarrow e^{\theta J} L = L e^{\theta J} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)(a + bi + cj + dk) = (a + bi + cj + dk)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow c = d = 0$$

onde Σ é um subgrupo de isotropia de $\Gamma \times S^1$, i.e., soluções Σ -invariantes.

Dos resultados obtidos na secção (2.3) basta analisarmos as soluções de:

$$\tilde{\Psi}(v, \lambda, \tau) = 0 \quad \text{onde } \tilde{\Psi} = \Psi|_{\text{Fix}(\Sigma)}$$

Por outro lado sabemos do Lema 4.8 que o $\ker(L)$ pode ser identificado com o $\mathbb{R}^n$, assim admitiremos no restante do trabalho Σ como um subgrupo de isotropia da ação em $\mathbb{R}^n$ dada no Lema 4.9, a saber $(\gamma, \theta).v = \gamma.e^{\Theta J}.v$, que corresponde a ação (4.7) no $\ker(L)$.

No caso da Bifurcação de Hopf apresentada no capítulo 3, analisamos a função de bifurcação definida no espaço bidimensional $\ker(L)$. Na tentativa de obtermos resultados análogos, analisaremos neste capítulo a função de bifurcação restrita aos $\text{Fix}(\Sigma)$ que satisfazem a hipótese:

$$(H_4) : \dim(\text{Fix}(\Sigma)) = 2.$$

Assim, obtemos sob as hipóteses anteriores que:

Proposição 4.14 A ação de S^1 no $\text{Fix}(\Sigma)$ é dada pela ação usual do S^1 , i.e., se (α, β) são as coordenadas de um elemento $v \in \text{Fix}(\Sigma)$ então:

$$\theta.v = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Demonstração : Pelo Lema 4.9 a ação de $\theta \in S^1$ em $v \in \mathbb{R}^n$ é dada por $\theta.v = e^{\Theta J}.v$, onde:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e então} \quad e^{\Theta J} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \, I_m & -\sin \Theta \, I_m \\ \sin \Theta \, I_m & \cos \Theta \, I_m \end{bmatrix} \quad m = n/2$$

Seja $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ o vetor cuja i -ésima coordenada é um e as demais iguais a zero.

Consideremos $V_i = [e_i, e_{i+m-1}]$ $i = 1, 2, \dots, m$, os subespaços gerados por e_i e e_{i+m-1} .

Claramente $\mathbb{R}^n$ é soma direta dos subespaços V_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

A matriz da ação de $e^{\Theta J}$ em cada V_i é

$$[e^{\Theta J}]_{v_i} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix}$$

Assim a ação de $\Theta \in S^1$ em cada V_i é S^1 -isomorfo à ação:

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\Theta, v) & \longrightarrow & R(\Theta).v \end{array} \quad (4.11)$$

Logo a ação de S^1 em V_i é S^1 -irredutível.

Segue-se então que $\mathbb{R}^n$ admite apenas uma componente isotópica W_1 , o que implica que $\text{Fix}(\Sigma)$ é S^1 -irredutível, pois caso contrário, como $\text{Fix}(\Sigma)$ é bidimensional, existiria um subespaço S^1 -irredutível unidimensional e consequentemente outra componente isotópica diferente de W_1 .

Portanto do Lema 1.17 a ação de S^1 em $\text{Fix}(\Sigma)$ é isomorfo a ação (4.11). ■

4.5 FORMA NORMAL DA FUNÇÃO DE BIFURCAÇÃO

Determinaremos nesta secção uma forma normal para a Função de Bifurcação.

Lema 4.15 Suponhamos (H_2) e (H_3) satisfeita. Então estão satisfeitas as seguintes afirmações.

(a) $\ker(L) = \ker(L^*)$ e a projeção $Q : C_{2\pi} \longrightarrow \ker(L)$ é uma projeção ortogonal em relação ao produto interno dado em (3.6).

(b) Se A é uma matriz real $n \times n$ e $v \in \ker(L)$,

$$QAv = A_1 v \quad \text{onde} \quad A_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-tJ} A e^{tJ} dt.$$

Demonstração:

(a) Pela alternativa de Fredholm sabemos que $C_{2\pi} = (R(L) \oplus \ker(L^*))$.

Por outro lado,

$$L^* = -\frac{d}{ds} - J^T = -\frac{d}{ds} + J = -L$$

Portanto $\ker(L) = \ker(L^*)$ e se $v \in \ker(L)$ e $u \in C_{2\pi}^1$ então

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^* v \rangle = \langle u, -Lv \rangle = 0.$$

Logo $R(L)$ é ortogonal ao $\ker(L)$ o que implica que Q é uma projeção ortogonal.

(b) Seja $v \in \ker(L)$.

Mostremos inicialmente que:

$$\langle A_1 v, x \rangle = \langle Av, x \rangle \quad \forall x \in \ker(L)$$

$$\begin{aligned} \langle A_1 v, x \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s)^T A_1 v(s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s)^T \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-tJ} A e^{tJ} dt \right) v(s) ds = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s)^T e^{-tJ} A e^{tJ} v(s) dt ds = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{tJ} x(s))^T A (e^{tJ} v(s)) dt ds \end{aligned}$$

Observando que a última igualdade é verdadeira pois $(e^{-tJ})^T = e^{tJ}$.

Sabemos que se $z(s) \in \ker(L)$, $z(s) = e^{sJ} z_0$ e $z(s+t) = e^{(s+t)J} = e^{tJ} (e^{sJ} z_0) = e^{tJ} z(s)$ e então:

$$\langle A_1 v, x \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} x(s+t)^T A v(s+t) dt ds .$$

Seja $(s+t) = \tau$. Então:

$$\langle A_1 v, x \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_s^{s+2\pi} x(\tau)^T A v(\tau) d\tau ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} x(\tau)^T A v(\tau) d\tau \right) ds = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau)^T A v(\tau) d\tau = \langle Av, x \rangle
\end{aligned}$$

Portanto, como Q é uma projeção ortogonal sobre o $\ker(L)$, para qualquer $x \in \ker(L)$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle x, A_1 v \rangle &= \langle x, A v \rangle \Leftrightarrow \langle x, A_1 v \rangle = \langle Q x, A v \rangle \Leftrightarrow \langle x, A_1 v \rangle = \langle x, QAv \rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle x, A_1 v - QAv \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Por um cálculo natural temos que $e^{\Theta J} A_1 = A_1 e^{\Theta J}$ e então $JA_1 = A_1 J$.

Logo $A_1 v \in \ker(L)$ para todo $v \in \ker(L)$, e como $QAv \in \ker(L)$ concluímos que $A_1 v = QAv$. ■

Proposição 4.16 Suponhamos (H_1) , (H_2) , (H_3) e (H_4) satisfeitas.

Se $\tilde{\Psi}$ é a restrição da Função de Bifurcação Ψ ao subespaço $\text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R}^2$, então existe uma base do $\text{Fix}(\Sigma)$ tal que:

$$\tilde{\Psi}(x, y, \lambda, \tau) = p(x^2 + y^2, \lambda, \tau)(x, y) + q(x^2 + y^2, \lambda, \tau)(-y, x)$$

onde p, q são germes em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo as seguintes condições:

- (a) $p(0, 0, 0) = 0$ $q(0, 0, 0) = 0$
- (b) $\frac{\partial p}{\partial \tau}(0, 0, 0) = 0$ $\frac{\partial q}{\partial \tau}(0, 0, 0) = 1 \neq 0$
- (c) $\frac{\partial p}{\partial \lambda}(0, 0, 0) = -\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0)$.

e onde $\sigma(\lambda)$ é a parte real dos auto valores de $A(\lambda) = D_x F(0, \lambda)$.

Demonstração: Como Ψ é S^1 -equivariante, em particular $\tilde{\Psi} = \Psi|_{\text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R}^2}$ é S^1 -equivariante. Seja $v \neq 0$ um vetor unitário de $\text{Fix}(\Sigma)$. Fixemos então a base ortonormal $\{v, Jv\}$ de $\text{Fix}(\Sigma)$. Considerando uma identificação natural do $\text{Fix}(\Sigma)$ com o $\mathbb{R}^2$ do tipo (3.21) e devido a Proposição 4.14 estamos nas hipóteses da Proposição 3.8. Logo existem germes p, q em $\mathbb{R}^3$ tais que:

$$\tilde{\Psi}(x, y, \lambda, \tau) = p(x^2 + y^2, \lambda, \tau)(x, y) + q(x^2 + y^2, \lambda, \tau)(-y, x)$$

onde x, y são as coordenadas do vetor do $\text{Fix}(\Sigma)$ relativamente a base dada. Assim se $v = (x, y)$,

$$\tilde{\Psi}(v, \lambda, \tau) = p(\|v\|^2, \lambda, \tau)v + q(\|v\|^2, \lambda, \tau)Jv \quad (4.12)$$

onde $\|v\|^2 = x^2 + y^2$.

Sabemos de (2.10) que $D_v \Psi(0, 0, 0) = 0$, então:

$$p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = 0$$

o que prova (a).

Por outro lado

$$\Psi(v, \lambda, \tau) = \Psi(0, \lambda, \tau) + D_v \Psi(0, \lambda, \tau)v + O(\|v\|^2) \quad \text{e} \quad \Psi(0, \lambda, \tau) = 0.$$

Como Ψ é $\Gamma \times S^1$ equivariante temos que $D_v \Psi(0, \lambda, \tau)$ é também S^1 -equivariante. Logo pela Proposição 4.11, existem $a(\lambda, \tau), b(\lambda, \tau) \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\Psi(v, \lambda, \tau) = a(\lambda, \tau)v + b(\lambda, \tau)Jv + O(\|v\|^2) \quad (4.13)$$

Afirmamos que $a(\lambda, \tau) = p(0, \lambda, \tau)$ e $b(\lambda, \tau) = q(0, \lambda, \tau)$.

De fato:

$$\begin{aligned} p(\|v\|^2, \lambda, \tau) &= p(0, \lambda, \tau) + D_v p(0, \lambda, \tau) \|v\|^2 + \mathcal{O}(\|v\|^4) \\ q(\|v\|^2, \lambda, \tau) &= q(0, \lambda, \tau) + D_v q(0, \lambda, \tau) \|v\|^2 + \mathcal{O}(\|v\|^4) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) em (4.12) temos:

$$\tilde{\Psi}(v, \lambda, \tau) = p(0, \lambda, \tau)v + q(0, \lambda, \tau)Jv + \mathcal{O}(\|v\|^2)$$

Então utilizando (4.13),

$$a(\lambda, \tau) = p(0, \lambda, \tau) \quad \text{e} \quad b(\lambda, \tau) = q(0, \lambda, \tau) \quad (4.15)$$

Determinemos explicitamente $a(\lambda, \tau)$ e $b(\lambda, \tau)$

Sabemos que :

$$\Psi(v, \lambda, \tau) = Q\Phi(v + w^*(v, \lambda, \tau), \lambda, \tau) \quad \forall v \in \ker(L) \quad (4.16)$$

Desenvolvendo $\Phi(v + w^*(v, \lambda, \tau), \lambda, \tau)$ temos que:

$$\Phi(v + w^*(v, \lambda, \tau), \lambda, \tau) = \Phi(v, \lambda, \tau) + D_u \Phi(v, \lambda, \tau) w^*(v, \lambda, \tau) + \mathcal{O}(\|w^*(v, \lambda, \tau)\|^2)$$

e

$$w^*(v, \lambda, \tau) = w^*(0, \lambda, \tau) + D_v w^*(0, \lambda, \tau)v + \mathcal{O}(\|v\|^2)$$

Porém,

$$w^*(0, \lambda, \tau) = D_v w^*(0, \lambda, \tau) = 0$$

Logo $w^*(v, \lambda, \tau) = \mathcal{O}(\|v\|)^2$

Assim $D_u \Phi(v, \lambda, \tau)(w^*(v, \lambda, \tau)) = \mathcal{O}(\|v\|^2)$.

Segue-se então que:

$$\Phi(v + w^*(v, \lambda, \tau), \lambda, \tau) = \Phi(v, \lambda, \tau) + \mathcal{O}(\|v\|^2)$$

Por outro lado:

$$\Phi(v, \lambda, \tau) = \Phi(0, \lambda, \tau) + D_u \Phi(0, \lambda, \tau) v + O(\|v\|^2)$$

$$= D_u \Phi(0, \lambda, \tau) v + O(\|v\|^2)$$

$$\text{e } D_u \Phi(0, \lambda, \tau) v = (1 + \tau) \frac{dv}{dt} - A(\lambda) v = (1 + \tau) Jv - A(\lambda) v$$

A segunda igualdade sendo verdadeira porque $v \in \ker(L)$ e então

$$\frac{dv}{dt} = Jv$$

Logo

$$\Phi(v, \lambda, \tau) = (1 + \tau) Jv - A(\lambda) v + O(\|v\|^2)$$

Portanto de (4.16)

$$\begin{aligned} \Psi(v, \lambda, \tau) &= Q([(1 + \tau) J - A(\lambda)] v + O(\|v\|^2)) \\ &= (1 + \tau) QJv - QA(\lambda)v + O(\|v\|^2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Porém,

$$L(Jv) = J \frac{dv}{dt} - J^2 v = J \left(\frac{dv}{dt} - Jv \right) = J0 = 0$$

$$\text{e então } Jv \in \ker(L) \text{ e } QJv = Jv. \quad (4.18)$$

Assim de (4.17), (4.18) e do Lema 4.15.(b),

$$\Psi(v, \lambda, \tau) = (1 + \tau) Jv - A_1(\lambda) v + O(\|v\|^2) \quad (4.19)$$

onde

$$A_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-tJ} A(\lambda) e^{tJ} dt$$

Um cálculo natural mostra que $A_1(\lambda)$ comuta com $e^{\Theta J}$ e como $A(\lambda)$ é Γ -equivariante temos também que $A_1(\lambda)$ é Γ -equivariante, logo $A_1(\lambda)$ é $\Gamma \times S^1$ -equivariante. Pelo Lema 4.11 existem $a_1, b_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞

tais que $A_1(\lambda) = a_1(\lambda)I + b_1(\lambda)J$.

$$\begin{aligned}\text{Então } \Psi(v, \lambda, \tau) &= (1+\tau)Jv - (a_1(\lambda) + b_1(\lambda)J)v + O(\|v\|^2) \\ &= -a_1(\lambda)Idv + ((1+\tau) - b_1(\lambda))Jv + O(\|v\|^2)\end{aligned}$$

Retornando a (4.13) concluímos que:

$$a(\lambda, \tau) = -a_1(\lambda) \quad b(\lambda, \tau) = (1+\tau) - b_1(\lambda) \quad (4.20)$$

Portanto,

$$\frac{\partial a}{\partial \tau}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial b}{\partial \tau}(0,0) = 1$$

Utilizando (4.15) temos finalmente que,

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(0,0,0) = 0 \quad \frac{\partial q}{\partial \lambda}(0,0,0) = 1$$

o que prova (b).

Mostremos agora (c).

Seja $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ os auto valores de $A(\lambda)$ de multiplicidade $n/2$ cuja existência é garantida pela Proposição 4.7.

Assim, se denotarmos por $tr(A)$ o traço de A temos que:

$$tr(A(\lambda)) = n\sigma(\lambda) \quad e$$

$$tr(A(\lambda)) = tr(A_1(\lambda)) = tr(a_1(\lambda)Id + b_1(\lambda)J) = na_1(\lambda)$$

Logo de (4.20), (4.21), (4.22) e (4.15) temos que:

$$\sigma(\lambda) = a_1(\lambda) = -a(\lambda, \tau) = -p(0, \lambda, \tau).$$

Portanto,

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda}(0,0,0) = -\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) \quad \blacksquare$$

4.6 TEOREMA DE HOPF EQUIVARIANTE

Utilizando os itens (a) e (b) da proposição anterior e seguindo o raciocínio utilizado na Teorema 3.10, obteremos que as soluções da equação de bifurcação estarão em correspondência biunívoca com as soluções de uma equação do tipo:

$$g(x, \lambda) = r(x^2, \lambda)x \quad \text{onde} \quad r(x^2, \lambda) = p(x^2, \lambda, \tau^*(x^2, \lambda))$$

Porém da condição (c) da Proposição 4.16 teremos que:

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0,0) = - \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0).$$

Logo com o mesmo raciocínio do Teorema 3.13 concluímos o seguinte:

Teorema 4.17 (Teorema de Hopf Equivariante)

Seja $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^∞ e Γ um grupo de Lie compacto agindo em $\mathbb{R}^n$ através da ação:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\gamma, x) & \longrightarrow & \gamma \cdot x \end{array}$$

Consideremos a equação:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda) \tag{4.23}$$

Suponhamos que:

$$H_1 - F(0, \lambda) = 0$$

$H_2 - F$ é Γ -equivariante.

$H_3 - \mathbb{R}^n$ é Γ -simples.

$$H_4 - D_x F(0, 0) = J = \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \quad \text{onde } m = n/2.$$

$H_5 -$ Se $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ são os auto valores de $A(\lambda) = D_x F(0, \lambda)$ de multiplicidade $\frac{n}{2}$, então:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) \neq 0$$

$H_6 -$ Seja $\Sigma \subset \Gamma \times S^1$ um subgrupo de isotropia da ação:

$$\begin{aligned} (\Gamma \times S^1) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((\gamma, \theta), x) &\longrightarrow \gamma \cdot e^{i\theta J} x \end{aligned}$$

tal que $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 2$.

Então $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação de (4.23) relativamente às soluções periódicas, de período próximo a 2π e com simetria Σ .

Teorema 4.18 No teorema anterior a conclusão continua válida ao substituírmos J por uma matriz A semelhante a J .

Demonstração: Seja C matriz $n \times n$ tal que $A = CJC^{-1}$ consideremos a mudança de variável $X = CY$ assim

$$\dot{x} = F(x, \lambda) \iff C\dot{y} = F(Cy, \lambda) \iff \dot{y} = C^{-1}F(Cy, \lambda)$$

Estudaremos então o sistema:

$$\dot{y} = G(y, \lambda) \quad \text{onde} \quad G(y, \lambda) = C^{-1}F(Cy, \lambda) \quad (4.24)$$

As seguintes condições são satisfeitas por G .

(a) $G(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

(b) $D_y G(0, \lambda) = C^{-1} D_x F(0, \lambda) C$ então $D_y G(0, \lambda) = J.$

(c) Os auto valores de $D_y G(0, \lambda)$ serão também os auto valores $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ de $F(0, \lambda)$, com $\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) \neq 0.$

Consideremos a seguinte ação de Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\gamma, x) &\longrightarrow \gamma^* x = (C^{-1} \gamma C) \end{aligned} \quad (4.25)$$

(d) Afirmamos que G é Γ -equivariante sob (4.25).

De fato:

$$\begin{aligned} G(\gamma^* y, \lambda) &= \gamma^* G(y, \lambda) \Leftrightarrow G(C^{-1} \gamma C y, \lambda) = C^{-1} \gamma C G(y, \lambda) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C^{-1} F(C(C^{-1} \gamma C) y, \lambda) = C^{-1} \gamma C (C^{-1} F(C y, \lambda)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C^{-1} F(\gamma C y, \lambda) = C^{-1} \gamma F(C y, \lambda) \Leftrightarrow F(\gamma x, \lambda) = \gamma F(x, \lambda) \end{aligned}$$

e F é Γ -equivariante por hipótese.

(e) $\mathbb{R}^n$ é Γ -simples sob (4.25), pois a ação (4.25) e a ação

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\gamma, x) &\longrightarrow \gamma \cdot x \end{aligned}$$

são Γ -isomorfas, com o Γ -isomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow C^{-1} \cdot x \end{aligned}$$

(f) Seja v tal que $\Sigma = \{ (\gamma, \theta) \in \Gamma_x S^1 / (\gamma, \theta).v = v \} = \Sigma_v$ então Σ é o subgrupo de isotropia $\Sigma_C^{-1} v$ de $C^{-1}v$ sob a ação

$$\begin{aligned} (\Gamma_x S^1)_x \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\gamma, \theta, v) &\longrightarrow \gamma * e^{\Theta_J} v = (C^{-1} \gamma . C) e^{\Theta_J} v . \end{aligned} \quad (4.26)$$

pois,

$$\begin{aligned} (\gamma, \theta) \in \Sigma &\Leftrightarrow \gamma . e^{\Theta_A} . v = v \Leftrightarrow \gamma e^{\Theta_C J C^{-1}} v = v \Leftrightarrow \gamma C e^{\Theta_J} C^{-1} v = v \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (C^{-1} \gamma C) e^{\Theta_J} (C^{-1} v) = (C^{-1} v) \Leftrightarrow (\gamma, \theta) \in \Sigma_C^{-1} v \end{aligned}$$

Assim Σ é um subgrupo de isotropia de dimensão 2 sob a ação (4.26).

Portanto (4.24) satisfaz todas as hipóteses do Teorema 4.17 considerando-se a ação (4.26) e o subgrupo de isotropia $\Sigma_C^{-1} v$, o que nos leva a concluir que $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação das soluções de (4.24), com período próximo a 2π , e com simetria $\Sigma_C^{-1} v$, o que é equivalente as soluções de (4.23) com período próximo a 2π e com simetria Σ .

Observação 4.19 De modo análogo ao efetuado no capítulo 3, é também possível, sob algumas hipóteses adicionais, verificar condições suficientes para a existência de soluções periódicas não constantes. Tal tipo de análise será efetuado no Exemplo 4.22.

Observação 4.20 Neste capítulo, diferenciando-se do capítulo anterior,

analisamos a equação diferencial a um parâmetro. Entendemos neste caso, que outros parâmetros que possam aparecer no tratamento deste tipo de problema, estejam incluídos na própria função F , como acontecerá no exemplo a seguir.

4.7 EXEMPLO

Consideremos o sistema de *Van der Pol*.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + (\lambda - x^2 - \alpha z^2) \dot{x} \\ \dot{z} = -z + (\lambda - z^2 - \alpha x^2) \dot{z} \end{cases} \quad (4.27)$$

Seja $\dot{x} = y$ e $\dot{z} = w$, então (4.27) será equivalente ao sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + (\lambda - x^2 - \alpha z^2)y \\ w \\ -z + (\lambda - z^2 - \alpha x^2)w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 y - \alpha z^2 y \\ 0 \\ -z^2 w - \alpha x^2 w \end{pmatrix}$$

e então ao sistema

$$u' = F(u, \lambda, \alpha) \quad (4.28)$$

onde $F: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$(x, y, z, w, \lambda, \alpha) \longrightarrow (y, -x + (\lambda - x^2 - \alpha z^2)y, w, -z + (\lambda - z^2 - \alpha x^2)w)$$

e $u = (x, y, z, w)$

Temos que

$$A(\lambda) = D_x F(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

e então $A = A(0)$ é semelhante a J .

Os auto valores de $A(\lambda)$ são as raízes do polinômio característico:

$$\det \begin{pmatrix} -\mu & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - \mu \end{pmatrix} = (\mu^2 - \mu\lambda + 1)^2$$

Logo os auto valores são da forma $\mu(\lambda) = \frac{\lambda \pm (\lambda^2 - 4)^{1/2}}{2}$ de multiplicidade 2.

Desde que estamos analisando para λ próximo de zero, $(\lambda^2 - 4)^{1/2}$ é puramente imaginário. Assim se os auto valores de multiplicidade 2 de $A(\lambda)$ são $\sigma(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ temos que

$$\sigma(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \quad \text{e} \quad \omega(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - 4)^{1/2}}{2}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}(0) = \frac{1}{2} \neq 0 \quad (4.29)$$

satisfazendo a hipótese (H_5) do Teorema (4.17).

Consideremos a ação de D_4 em $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} D_4 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\rho, (x, y, z, w)) &\longrightarrow (-x, -y, z, w) \\ (\xi, (x, y, z, w)) &\longrightarrow (-z, -w, x, y) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Vimos no Exemplo 4.5.(c) que $\mathbb{R}^4$ é D_4 -simples sob esta ação, satisfazendo (H_3) do Teorema (4.17).

Temos também que F é D_4 -equivariante, já que,

$$\begin{aligned} F(\rho.(x, y, z, w)) &= F(-x, -y, z, w) = (-y, x - (\lambda - x^2 - \alpha z^2) y, w, -z + (\lambda - z^2 - \alpha x^2) w) = \\ &= \rho F(x, y, z, w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\xi.(x, y, z, w)) &= F(-z, -w, x, y) = (-w, z - (\lambda - z^2 - \alpha x^2) w, y, -x + (\lambda - x^2 - \alpha z^2) y) = \\ &= \xi F(x, y, z, w) \end{aligned}$$

Analisemos a ação:

$$\begin{aligned} (D^4 \times S^1) \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\gamma, \theta, v) &\longrightarrow \gamma \cdot e^{\Theta_A} v \end{aligned} \quad (4.31)$$

Onde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad e^{\Theta_A(\cdot)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Então,

$$(1,\theta)(x,y,z,w) = (\cos\theta x + \sin\theta y, -\sin\theta x + \cos\theta y, \cos\theta z + \sin\theta w, -\sin\theta z + \cos\theta w)$$

$$(\rho,\theta)(x,y,z,w) = (-\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x - \cos\theta y, \cos\theta z + \sin\theta w, -\sin\theta z + \cos\theta w)$$

$$(\xi,\theta)(x,y,z,w) = (-\cos\theta z - \sin\theta w, \sin\theta z - \cos\theta w, \cos\theta x + \sin\theta y, -\sin\theta x + \cos\theta y)$$

$$(\xi^2,\theta)(x,y,z,w) = (-\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x - \cos\theta y, -\cos\theta z - \sin\theta w, \sin\theta z - \cos\theta w)$$

$$(\xi^3,\theta)(x,y,z,w) = (\cos\theta z + \sin\theta w, -\sin\theta z + \cos\theta w, -\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x - \cos\theta y)$$

$$(\rho\xi,\theta)(x,y,z,w) = (\cos\theta z + \sin\theta w, -\sin\theta z + \cos\theta w, \cos\theta x + \sin\theta y, -\sin\theta x + \cos\theta y)$$

$$(\rho\xi^2,\theta)(x,y,z,w) = (\cos\theta x + \sin\theta y, -\sin\theta x + \cos\theta y, -\cos\theta z - \sin\theta w, \sin\theta z - \cos\theta w)$$

$$(\rho\xi^3,\theta)(x,y,z,w) = (-\cos\theta z - \sin\theta w, \sin\theta z - \cos\theta w, -\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x - \cos\theta y)$$

Calculemos agora o subgrupo de isotropia, $\sum_v$, de $v=(1,0,1,0)$.

$$(1,\theta)(1,0,1,0)=(1,0,1,0) \iff (\cos\theta, -\sin\theta, \cos\theta, -\sin\theta)=(1,0,1,0) \iff \theta = 0$$

$$(\rho,\theta)(1,0,1,0)=(1,0,1,0) \iff (-\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta, -\sin\theta)=(1,0,1,0) \iff 1 = -1$$

$$(\xi,\theta)(1,0,1,0)=(1,0,1,0) \iff (-\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta, -\sin\theta)=(1,0,1,0) \iff -1 = 1$$

$$(\xi^2,\theta)(1,0,1,0)=(1,0,1,0) \iff (-\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta, \sin\theta)=(1,0,1,0) \iff \xi = \pi$$

$$(\xi^3,\theta)(1,0,1,0)=(1,0,1,0) \iff (\cos\theta, -\sin\theta, -\cos\theta, \sin\theta)=(1,0,1,0) \iff 1 = -1$$

$$(\rho\xi,\theta)(1,0,1,0)=(1,0,1,0) \iff (\cos\theta, -\sin\theta, \cos\theta, -\sin\theta)=(1,0,1,0) \iff \theta = 0$$

$$(\rho\xi^2, \theta)(1,0,1,0)=(1,0,1,0) \Leftrightarrow (\cos\theta, -\sin\theta, -\cos\theta, \sin\theta)=(1,0,1,0) \Leftrightarrow 1 = -1$$

$$(\rho\xi^3, \theta)(1,0,1,0)=(1,0,1,0) \Leftrightarrow (\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta, \sin\theta)=(1,0,1,0) \Leftrightarrow \theta = \pi$$

$$\text{Logo } \Sigma_v = \{(1,0), (\xi^2, \Pi), (\rho\xi, 0), (\rho\xi^3, \Pi)\}$$

$$\text{Calculemos o } \text{Fix}(\Sigma_v) = \{(x,y,z,w) / \gamma(x,y,z,w)=(x,y,z,w) \forall \gamma \in \Sigma_v\}$$

$$(\xi^2, \Pi)(x,y,z,w)=(x,y,z,w) \Leftrightarrow (x,y,z,w) = (x,y,z,w)$$

$$(\rho\xi, 0)(x,y,z,w)=(x,y,z,w) \Leftrightarrow (z,w,x,y) = (x,y,z,w) \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=w \end{cases}$$

$$(\rho\xi^3, \Pi)(x,y,z,w)=(x,y,z,w) \Leftrightarrow (z,w,x,y) = (x,y,z,w) \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=w \end{cases}$$

Portanto,

$$\text{Fix}(\Sigma_v) = \{(x,y,x,y), x,y \in \mathbb{R}\} \text{ que é um subespaço bidimensional}$$

Assim a equação (4.28) com a ação (4.30) e (4.31) e o subgrupo de isotropia Σ_v satisfaz as hipóteses do Teorema 4.18, o que nos leva a concluir que $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação relativamente às soluções periódicas com simetria Σ_v .

Sabemos que a função nula é solução de (4.28) para todo $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Verifiquemos então a existência de soluções periódicas não constantes de (4.28).

Temos da demonstração do Teorema 4.17 que as soluções periódicas não constantes com simetria Σ estão em correspondência biunívoca com as soluções da equação do tipo :

$$r(x^2, \lambda, \alpha) = 0, \quad \alpha > 0. \quad (4.32)$$

Calculemos então $\frac{\partial r}{\partial z}(0,0,0)$, onde $z = x^2$, relativamente a este

problema.

As soluções:

$$v_1(t) = e^{At} \frac{1}{(2)^{1/2}} (1,0,1,0)^T \quad v_2(t) = e^{At} \frac{1}{(2)^{1/2}} (0,1,0,1)^T$$

determinam uma base do $\ker(L) \cap \text{Fix}(\Sigma_v)$.

Por outro lado o conjunto imagem da função de bifurcação está contida em $\ker(L^*) \cap \text{Fix}(\Sigma_v) = \ker(L) \cap \text{Fix}(\Sigma_v)$, onde consideraremos a base $v_1^*(t) = v_1(t)$ e $v_2^*(t) = v_2(t)$.

Observemos que as bases anteriores satisfazem as mesmas condições do $\ker(L)$ e $\ker(L^*)$ adotadas no capítulo 3, i.e., se

$$c = d = \frac{1}{(2)^{1/2}} (1,i,1,i)^T$$

Então,

$$v_1(t) = \text{Re}(e^{it}c) \quad v_2(t) = \text{Im}(e^{it}c)$$

$$v_1^*(t) = \text{Re}(e^{it}d) \quad v_2^*(t) = \text{Im}(e^{it}d)$$

e

$$Ac = ic, A^T d = -id, \bar{c}^T c = 2 \text{ e } d^T c = 0.$$

Logo a Proposição (3.15) nos fornece a expressão para o cálculo de $\frac{\partial r}{\partial z}(0,0,0)$.

No entanto, como $F(-u,\lambda,\alpha) = -F(u,\lambda,\alpha)$, temos pela Observação 3.16 que:

$$\frac{\partial r}{\partial z}(0,0,0) = \frac{-1}{16 \|v_1^*\|^2} \text{Re}(\bar{d}^T D_x^3 F(0,0,0)(c,c,\bar{c})).$$

Efetuando os cálculos de modo natural temos que:

$$\frac{\partial r}{\partial z}(0,0,0) = \frac{(2)^{1/2}}{16\|v_1^*\|^2} > 0.$$

De (4.29) temos que $\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0,0,0) = \frac{-1}{2} < 0$.

Logo utilizando o raciocínio empregado na Conclusão (3.15) temos que a equação (4.32) admitirá solução se:

$$(\lambda - \lambda^*(0,\lambda)) \cdot \frac{\partial r}{\partial z}(0,0,0) \cdot \frac{\partial r}{\partial \lambda}(0,0,0) < 0.$$

Observemos porém que $r(0,\lambda,\alpha)$ depende apenas dos termos lineares de F , logo neste problema $r(0,\lambda,\alpha)$ independe de α , logo $\lambda^*(0,\lambda) = 0$.

Portanto como $\frac{\partial r}{\partial z}(0,0,0) > 0$ e $\frac{\partial r}{\partial \lambda}(0,0,0) < 0$, concluimos que a equação (4.28) admitirá solução periódica não constante com simetria Σ_v se $\lambda > 0$ e nenhuma não constante caso contrário.

Mais especificamente para cada (λ,α) , suficientemente próximos da origem e $\lambda > 0$, (4.28) admite uma solução não constante $u(t) = v(t/(1+\tau))$ com período $2\pi/(1+\tau)$, com τ próximo de zero, tais que se:

$$v(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$$

então:

$$(i) (\xi^2, \Pi)v(t) = v(t) \Leftrightarrow \xi^2 \cdot v(t+\pi) = v(t), \text{ i.e.,}$$

$$(-x(t+\pi), -y(t+\pi), -z(t+\pi), -w(t+\pi)) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$$

$$(ii) (\rho \cdot \xi, 0)v(t) = v(t) \Leftrightarrow \rho \cdot \xi \cdot v(t) = v(t), \text{ i.e.,}$$

$$(z(t), w(t), x(t), y(t)) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$$

(iii) $(\rho.\xi^3, \Pi)v(t)=v(t) \Leftrightarrow \rho.\xi^3 v(t+\pi)=v(t)$, i.e.,

$$(-z(t+\pi), -w(t+\pi), -x(t+\pi), -y(t+\pi)) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$$

Portanto:

$$x(t) = z(t) = -x(t+\pi) \quad \text{e} \quad y(t) = w(t) = -y(t+\pi) \quad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bredon, G.E.; *Introduction to Compact Transformation*; Pure and Applied Mathematics, vol 46, Academic Press, Inc., New York and London, 1972.
- [2] Felzenszwalb, Bernardo - *Álgebras de Dimensão Finita*, 12^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, 1979.
- [3] Golubitsky, M.; Schaeffer, D.G.; *Hopf Bifurcation in the Presence of Symmetry*; Arch. Rational Mech. Anal. 87, Vol.2, 107 - 165, 1985.
- [4] _____ ; - *Singularities and Groups in Bifurcation Theory.*, Vol 1; Applied Mathematical Sciences, 51, Springer Verlag, 1985.
- [5] Golubitsky, M.; Stewart I.; Schaeffer, D.G.; *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* Vol.2; Applied Mathematical Sciences, 69, Springer Verlag, 1985.
- [6] Hale, J.K.; *Ordinary Differential Equations*; Pure and Applied Mathematics, Vol XXI, 1980.

- [7] Kirillov, A. A; *Elements of the Theory of Representations*;
Grundlehren 220, Springer Verlag, 1976.

- [8] Köthe, Gottfried; *Topological Vector Spaces 1*; Springer Verlag,
Berlin, 1969.

- [9] Marsden, J.E.; Mc Cracken, M.; *The Hopf Bifurcation and its
applications*; Applied Mathematical Sciences, 19; Springer
Verlag, New York, 1976.

- [10] Swift, James W. ; *Hopf Bifurcation with the symmetry of the square*;
Nonlinearity 1, 333-377, 1988.

- [11] Vanderbauwhede, A.; *Local bifurcation and symmetry*, Research Notes
in Mathematics 75, Pitman Advanced Publishing Program, Boston -
London - Melbourne, 1982.

- [12] _____ ; *Local bifurcation and symmetry*, habilitation
Thesis, Gent Instituut voor Theoretische Mechanica, 1980.