Polinômio de Bernstein-Sato de uma hipersuperfície com singularidade isolada

Andréa Gomes Guimarães

Orientador: *Prof. Dr. Daniel Levcovitz*
Co-orientador: *Prof. Dr. Abramo Hefez*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Área: Matemática.

DEDALUS - Acervo - ICMSC
30300033700

"VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA"

Data da Defesa: 15/04/2005

Visto do Orientador:

USP – São Carlos
Novembro/2002

Resumo

Neste trabalho estudamos algumas raízes do polinômio de Bernstein b_f associado a um germe $f(X) \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ com ponto crítico isolado na origem. Sabe-se que, para cada raiz de b_f, existe um número espectral tal que a soma desses dois números é um inteiro. Em geral, não se sabe exibir explicitamente esses números inteiros, embora existam cotas para eles. M. Saito [Sai93] exibe um subconjunto do conjunto das raízes de b_f, tal que para esses elementos a soma vale -1. Hertling e Stahlke [HS99] conseguiram aumentar esse subconjunto de raízes, supondo $f(X)$ em duas variáveis, com ponto crítico isolado e monodromia finita (hipóteses essas bem restritivas). Conseguimos estender esse último resultado, sem restrições sobre o número de variáveis de $f(X)$ e apenas com a hipótese de ponto crítico isolado. Além disso, no caso de germes $f(X_1, X_2)$ irredutíveis e com um único par de Puiseux, mostramos como descrever um subconjunto maior de raízes de b_f, quando f pertence a uma dada classe de equidiferenciabilidade.

Abstract

In this work we study some roots of the Bernstein polynomial b_f associated to a germ $f(X)$ in the maximal ideal of $\mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ with an isolated critical point at the origin. It is known that for each root of b_f there exists a spectral number such that the sum of these two numbers is an integer. In general, one doesn't know how to compute explicitly these integers, although there are bounds on them. M. Saito, in [Sai93], exhibits a subset of the set of roots of b_f, such that for these elements the sum is -1. Hertling and Stahlke, in [HS99], succeeded to increase this subset of roots, assuming $f(X)$ in two variables, with isolated critical point and finite monodromy (such hypotheses are very restrictive). We succeeded to extend this last result without any restriction on the number of variables of $f(X)$ and only with the assumption of isolated critical point. Moreover, in the case of irreducible germs $f(X_1, X_2)$ with only one Puiseux pair, we show how to describe a larger subset of roots of b_f, when f belongs to a given equidifferentiability class.

Sumário

Introdução 1

1 Conexão de Gauss-Manin 5

1.1 Monodromia de uma Equação Diferencial 6

1.2 Conexões Meromorfas 8

1.3 $\mathcal{V}$-filtração 11

1.4 Conexão de Gauss-Manin e Polinômio de Bernstein 16

1.5 Filtração de Newton e a V-filtração sobre H'' 22

2 Reticulados de Brieskorn e Operadores Diferenciais 25

2.1 Notações 25

2.2 Z, Z' e Polinômio de Bernstein 27

3 Polinômio de Bernstein e Números Espectrais 37

4 Polinômio de Bernstein de Ramos de Gênero 1 46

4.1 Base Standard para ideais de $\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_n\}$ 47

4.2 Lacunas Especiais 49

4.3 Polinômio de Bernstein e Lacunas Especiais 53

Referências Bibliográficas 67

Índice Remissivo 68

Capítulo 1

Conexão de Gauss-Manin

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados que julgamos necessários à compreensão deste trabalho, envolvendo as noções de monodromia, conexão de Gauss-Manin, reticulados de Brierskorn e polinômio de Bernstein associados a uma singularidade isolada de hipersuperfície complexa. Como existe uma vasta literatura sobre esse assunto, limitamo-nos apenas a enunciar a maioria dos resultados, indicando as referências onde podem ser encontradas as demonstrações.

Na primeira seção, introduzimos o conceito de monodromia de uma equação diferencial. Na segunda seção introduzimos de forma geral os conceitos de conexão meromorfa, monodromia de uma conexão meromorfa e reticulados. Na terceira seção, filtramos o espaço vetorial associado a uma conexão meromorfa utilizando os autovalores da monodromia. Na quarta seção, introduzimos os conceitos de reticulados de Brieskorn, conexão e sistema de Gauss-Manin e polinômio de Bernstein associados a uma singularidade isolada de hipersuperfície complexa. Na quinta seção, encerrando esse capítulo, relacionamos a filtração de Newton com a filtração dada na terceira seção sobre um reticulado de Brieskorn.

1.1 Monodromia de uma Equação Diferencial

Denotamos por $\mathcal{K}$ o corpo das séries de Laurent convergentes $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ e por $\mathcal{K}^m$ o espaço dos vetores colunas com coeficientes em $\mathcal{K}$. Sejam $A := A(t) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m, \mathcal{K})$ e $x \in \mathcal{K}^m$. Identificamos a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}(x) + Ax = 0,$$

com sua matriz de definição A. Observe que A é uma matriz de funções holomorfas sobre um disco $\mathcal{U}'$ perfurado na origem.

Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ o recobrimento universal de $\mathbb{C}^*$, dado por $p(t') = e^{2\pi i t'} = t$. Como

$$\frac{d}{dt'}(x(e^{2\pi i t'})) = 2\pi i e^{2\pi i t'} \frac{d}{dt}(x(t)) = -2\pi i e^{2\pi i t'} A(t)(x(t)) = -2\pi i e^{2\pi i t'} A(e^{2\pi i t'})(x(e^{2\pi i t'})),$$

então na variável $t' \in p^{-1}(\mathcal{U}')$, a equação A se escreve na forma

$$\frac{d}{dt'}(x(e^{2\pi i t'})) + \tilde{A}(x(e^{2\pi i t'})) = 0,$$

onde $\tilde{A} = 2\pi i e^{2\pi i t'} A(e^{2\pi i t'})$.

Como $p^{-1}(\mathcal{U}')$ é simplesmente conexo, segue, da teoria de equações diferenciais, que existe uma ***matriz fundamental*** $\tilde{F} := \tilde{F}(t')$ da equação $\tilde{A}$; isto é, $\tilde{F}$ possui como colunas vetores $\tilde{x}_1(t'), \ldots, \tilde{x}_m(t')$ que formam um conjunto de soluções linearmente independentes para $\tilde{A}$. Desta forma, $F(t) = \tilde{F}(\frac{\log t}{2\pi i})$ é uma matriz com vetores colunas $x_1(t), \ldots, x_m(t)$, relacionados com os vetores $\tilde{x}_1(t'), \ldots, \tilde{x}_m(t')$ da forma

$$x_j(e^{2\pi i t'}) = \tilde{x}_j(t'), \quad \text{com} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Conseqüentemente, toda determinação de $F(t)$ é uma matriz fundamental para o sistema A. Portanto, $F''(t) = \tilde{F}(\frac{\log t}{2\pi i} + 1)$ também é matriz fundamental para A.

Assim, existe uma matriz $M_{A,F} \in GL(m, \mathbb{C})$ tal que

$$F'(t) = F(t)M_{A,F}.$$

A matriz $M_{A,F}$ é chamada de ***monodromia*** da equação A com respeito à matriz fundamental F.

Seja $\widetilde{G}$ outra matriz fundamental para $\widetilde{A}$. Então $\widetilde{G}(t') = \widetilde{F}(t')N$, com $N \in GL(m, \mathbb{C})$. Assim, tomando $G(t) = \widetilde{G}(\frac{\log t}{2\pi i})$ e $G'(t) = \widetilde{G}(\frac{\log t}{2\pi i} + 1)$, temos que

$$G'(t) = F'(t)N = F(t)M_{A,F}N = G(t)N^{-1}M_{A,F}N$$

e, portanto, $M_{A,G} = N^{-1}M_{A,F}N$ é a monodromia de A com respeito à matriz fundamental G. Dessa forma, podemos definir a monodromia M_A de A como a classe de conjugação $[M_{A,F}]$, para alguma matriz fundamental F de A.

Observação 1.1 ([CL55], Teorema 1.1, pag. 109) Se F é uma matriz fundamental para equação A, então existe uma única matriz $S = S(t)$ de funções analíticas em $\mathcal{U}'$ tal que $F = St^R = Se^{R\log t}$, para alguma matriz $R \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$. Além disso,

$$M_{A,F} = e^{2\pi\sqrt{-1}R}.$$

Definição 1.2 *Duas equações diferenciais meromorfas A e A' são ditas* ***equivalentes****, escrevendo, neste caso, $A \sim A'$, se existir uma matriz $U \in GL(m, \mathcal{K})$ com*

$$A' = A^U := U^{-1}\left(\frac{d}{dt}(U) + AU\right).$$

Observação 1.3 *Se F é uma matriz fundamental de uma equação diferencial meromorfa A, então $U^{-1}F$ é uma matriz fundamental de A^U, para $U \in GL(m, \mathcal{K})$, pois*

$$
\begin{aligned}
0 &= U^{-1}\left(\frac{d}{dt}(F) + AF\right) \\
&= U^{-1}\left(\frac{d}{dt}(UU^{-1}F) + AF\right) \\
&= U^{-1}\left(U\frac{d}{dt}(U^{-1}F) + \frac{d}{dt}(U)(U^{-1}F) + AF\right) \\
&= \frac{d}{dt}(U^{-1}F) + U^{-1}\left(\frac{d}{dt}(U) + AU\right)U^{-1}F \\
&= \frac{d}{dt}(U^{-1}F) + A'U^{-1}F.
\end{aligned}
$$

Assim, se A e A' são equações equivalentes e F é uma matriz fundamental de A, então $U^{-1}F$ é uma matriz fundamental de A', para alguma matriz $U \in GL(m, \mathcal{K})$. Logo, da Observação 1.1, temos que $U^{-1}F = U^{-1}St^R$ e, conseqüentemente, $M_{A',U^{-1}F} = e^{2\pi\sqrt{-1}R} = M_{A,F}$. Dessa forma, temos a proposição a seguir.

Proposição 1.4 *Equações diferenciais meromorfas equivalentes têm a mesma monodromia.*

1.2 Conexões Meromorfas

Uma ***conexão meromorfa*** ∇ sobre um $\mathcal{K}$-espaço vetorial de dimensão finita V, é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\nabla : V \longrightarrow V$$

que satisfaz à regra de Leibniz: isto é, para todo $\alpha \in \mathcal{K}$ e $v \in V$,

$$\nabla(\alpha v) = \frac{d}{dt}(\alpha)v + \alpha\nabla(v).$$

Por exemplo, se $A := A(t) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m, \mathcal{K})$, é fácil verificar que a aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}^m & \longrightarrow & \mathcal{K}^m \\
x & \longmapsto & \frac{d}{dt}(x) + Ax
\end{array}
\tag{1.1}
$$

é uma conexão meromorfa.

Observe que, se ∇ é uma conexão meromorfa sobre V, temos, para todo $v \in V$,

$$\nabla(tv) = \frac{d}{dt}(t)v + t\nabla(v) = v + t\nabla(v);$$

isto é,

$$\nabla t = 1 + t\nabla. \tag{1.2}$$

Notações 1.5

1. *Denotamos por* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ *uma* $\mathcal{K}$*-base de* V *e o isomorfismo a ela associado por*

$$\begin{array}{rccc} \eta: & V & \to & \mathcal{K}^m. \\ & \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i & \mapsto & (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^t \end{array}$$

   Note que $\eta(e_1), \ldots, \eta(e_m)$ *é a base canônica de* $\mathcal{K}^m$*;*

2. *Dada uma* $\mathcal{K}$*-base* $\mathbf{e}$ *de* V*, denotamos por* $\nabla_{\mathbf{e}}$ *a matriz cujas entradas são:*

$$(\nabla_{\mathbf{e}})_{ij} = a_{ij} \in \mathcal{K},$$

   onde $\nabla(e_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} e_k$.

Dadas duas conexões meromorfas ∇ sobre V e ∇' sobre V', um elemento $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(V, V')$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\nabla"'] & V' \arrow[d, "\nabla'"] \\ V \arrow[r, "\phi"'] & V' \end{tikzcd}$$

comuta, é chamado de ***morfismo de conexões meromorfas***. Quando $\phi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{K}}(V, V')$, temos um ***isomorfismo de conexões meromorfas***.

É fácil verificar que

$$\eta\Big(\nabla(v)\Big) = \Big(\frac{d}{dt} + \nabla_{\mathbf{e}}\Big)\Big(\eta(v)\Big), \tag{1.3}$$

e, portanto, a aplicação

$$\eta : V \longrightarrow \mathcal{K}^m$$

é um isomorfismo de conexões meromorfas, com V munido da conexão ∇ e $\mathcal{K}^m$ munido da conexão $\frac{d}{dt} + \nabla_{\mathbf{e}}$. Dessa forma, toda conexão meromorfa é essencialmente uma conexão do tipo (1.1).

Se $\mathbf{e}' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ é outra $\mathcal{K}$-base de V, é fácil verificar que as equações diferenciais $\nabla_{\mathbf{e}}$ e $\nabla_{\mathbf{e}'}$ são equivalentes segundo a Definição 1.2 e, portanto, pela Proposição 1.4, possuem a mesma monodromia. Assim, faz sentido a definição a seguir.

Definição 1.6 *A* ***monodromia*** *de uma conexão meromorfa ∇ sobre V é definida por*

$$M_{\nabla} := M_{\nabla_{\mathbf{e}}},$$

onde $\mathbf{e}$ *é uma $\mathcal{K}$-base de V e $M_{\nabla_{\mathbf{e}}}$ é a monodromia da equação diferencial meromorfa $\nabla_{\mathbf{e}}$.*

Seja V um $\mathcal{K}$-espaço vetorial de dimensão m. Um $\mathbb{C}\{t\}$-submódulo livre $L \subset V$ que gera V sobre $\mathcal{K}$ é chamado de ***reticulado*** de V. Denotamos por $\mathrm{Ret}(V)$ o conjunto dos reticulados de V.

Observações 1.7

1. *Segue-se, da definição acima, que um reticulado L é um $\mathbb{C}\{t\}$-módulo livre de posto m;*

2. *Dados dois reticulados L e L', existe um inteiro k tal que $t^k L \subset L'$.*

Seja ∇ uma conexão meromorfa sobre V. Um reticulado L de V é dito ∇t***-saturado*** ou, simplesmente, ***saturado***, se $\nabla t(L) \subset L$. A ***saturação*** $\bar{L}$ de L é o menor reticulado saturado de V que contém L, quando existir.

Dizemos que uma conexão meromorfa ∇ sobre V é ***regular***, se V admite um reticulado saturado ou, equivalentemente, se existe uma base $\mathbf{e}$ tal que $\nabla_{\mathbf{e}}$ tem um pólo simples em $t = 0$. Essa base $\mathbf{e}$ gera um reticulado saturado.

A demonstração da próxima proposição é simples e pode ser encontrada em Scherk [Sch77], Teorema 4, por exemplo.

Proposição 1.8 *Se ∇ é uma conexão meromorfa regular sobre V e $L \in \mathrm{Ret}(V)$, então existe uma saturação $\tilde{L}$ de L, dada por*

$$\tilde{L} := L + \nabla t L + (\nabla t)^2 L + \cdots + (\nabla t)^k L,$$

para algum $k \in \mathbb{N}$.

Dados uma conexão meromorfa ∇ sobre o $\mathcal{K}$-espaço vetorial V de dimensão m e L um reticulado saturado de V, segue que L/tL é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão m e ∇t induz um endomorfismo linear $\overline{\nabla t} : L/tL \to L/tL$.

Teorema 1.9 *Seja ∇ uma conexão meromorfa regular. Se L é um reticulado saturado de V tal que o endomorfismo linear $\overline{\nabla t}$ sobre L/tL não possui autovalores diferindo por números inteiros não nulos, então:*

(i) ([Was65], Teoremas 5.1 e 5.3) L admite uma base $\mathbf{e}$ na qual o operador diferencial isomorfo à conexão ∇ é da forma $\frac{d}{dt} + \nabla_{\mathbf{e}}$, com $\nabla_{\mathbf{e}} t$ matriz constante;

(ii) ([CL55], pag. 119) A monodromia de ∇ é dada por $M_\nabla = [e^{2\pi\sqrt{-1}\nabla_{\mathbf{e}} t}]$, com $\nabla_{\mathbf{e}}$ como em (i).

1.3 $\mathcal{V}$-filtração

Sejam ∇ uma conexão meromorfa regular sobre V e L um reticulado saturado de V. O próximo lema permite-nos concluir que, se o endomorfismo $\overline{\nabla t}$ sobre L/tL possui autovalor $\beta + k$, para $k \in \mathbb{Z}$, então é possível obter, a partir de L, um outro reticulado saturado L' tal que o endomorfismo $\overline{\nabla t}$ sobre L'/tL' possui os mesmos autovalores do endomorfismo $\overline{\nabla t}$ sobre L/tL, com exceção de $\beta+k$ que será substituído por β. Mas antes, precisamos ressaltar a seguinte igualdade que segue facilmente da relação de comutação (1.2):

$$t^k(-\nabla t + \alpha)^l = (-\nabla t + (\alpha + k))^l t^k, \tag{1.4}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $l \in \mathbb{N}$.

Lema 1.10 *Sejam L um reticulado saturado de V e α um autovalor do endomofismo $\overline{\nabla t}$ sobre L/tL. Então existe outro reticulado saturado L' de V tal que $\alpha+1$ (analogamente $\alpha-1$) é autovalor de $\overline{\nabla t}$ sobre L'/tL'.*

Demonstração:

Sejam L um reticulado saturado e α um autovalor do endomorfismo $\overline{\nabla t}$ sobre L/tL. Considere um autoespaço $\overline{E}$ em $\overline{L}=L/tL$ correspondente a α. Se r é a multiplicidade de α como raiz do polinômio característico, então existe uma decomposição parcial de Jordan

$$\overline{L}=\operatorname{Ker}(\overline{\nabla t}-\alpha)^r\oplus\operatorname{Im}(\overline{\nabla t}-\alpha)^r=\overline{E}\oplus\overline{F}.$$

Seja $L=E\oplus F$ uma decomposição de L que coincide mod(tL) com $\overline{L}$. Então o reticulado

$$L'=E'\oplus F,\quad \text{onde}\quad E'=tE,$$

também é saturado.

Se $g\in E\subset L$ então

$$(\nabla t-\alpha)^r g=th,\quad \text{com}\quad h\in L.$$

Como $tg\in E'=tE$, então da igualdade (1.4), temos que

$$(\nabla t-(\alpha-1))^r(tg)=t(\nabla t-\alpha)^r g=t^2h.$$

Isto significa que $tg\in\operatorname{Ker}(\nabla t-(\alpha+1))^r \bmod (t^2L)$, isto é, mod$(tE')$. Logo, $tE=E'$ é um subespaço em L'/tL' correspondente ao autovalor $\alpha+1$. Assim, os autovalores de $\overline{\nabla t}$ sobre L'/tL' são os mesmos autovalores sobre L/tL exceto o autovalor α que torna-se $\alpha+1$ para L'/tL'.

Analogamente, se tomarmos $E'=(1/t)E$, então $\alpha-1$ será autovalor do endomorfismo $\overline{\nabla t}$ sobre L'/tL'. □

Esse lema, juntamente com a Proposição 1.8 e o Teorema 1.9, permitem-nos concluir que se ∇ é uma conexão meromorfa regular sobre V, então existe uma $\mathcal{K}$-base $\mathbf{e}$ de V tal que

a conexão ∇ é isomorfa à conexão $\frac{d}{dt} + \nabla_{\mathbf{e}}$ de $\mathcal{K}^m$, onde $\nabla_{\mathbf{e}} t$ é uma matriz constante com autovalores não diferindo por inteiros não nulos.

Podemos ainda supor, sem perda de generalidade, que

$$\mathbf{e} : \mathbf{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{e}_r,$$

com $\mathbf{e_i} := \{e_{i1}, \ldots, e_{iq_i}\}$ e $\sum_{i=1}^{r} q_i = m$, e que $\nabla_{\mathbf{e}} t$ consiste de blocos de Jordan da forma $\alpha_i E_i + N_i$, para $i = 1, \ldots, r$, onde $E_i \eta(e_{il}) = \eta(e_{il})$, $l = 1, \ldots, q_i$, $E_i e(\mathbf{e_k}) = 0$, para $i \neq k$, e N_i é o operador nilpotente que satisfaz as igualdades

$$N_i \eta(e_{i2}) = \eta(e_{i2}), \ldots, N_i \eta(e_{iq_i-1}) = \eta(e_{iq_i}), \quad N_i \eta(e_{iq_i}) = 0,$$

com $N_i \eta(\mathbf{e_k}) = 0$, para $i \neq k$. Dessa forma, M_∇ possui blocos de Jordan com autovalores $e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, r$.

Para $i = 1, \ldots, r$, definimos

$$B_i := \mathbb{C}e_{i1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_{iq_i}.$$

Observe que, para todo $j = 1, \ldots, q_i$, temos que N_i é nilpotente sobre $\eta(\mathbf{e_i})$ e $\frac{d}{dt} t(\eta(e_{ij})) = \eta(e_{ij})$. Então existe $l \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $j = 1, \ldots, q_i$,

$$0 = N_i^l \eta(e_{ij}) = \left(\frac{d}{dt} t - \nabla_{\mathbf{e}} t + (\alpha_i + 1) E_i \right)^l \eta(e_{ij}).$$

Logo, da igualdade (1.3), temos que

$$(-\nabla t + \alpha_i + 1)^l (e_{ij}) = 0, \ j = 1, \ldots, q_i;$$

isto é, $-\nabla t + \alpha_i + 1$ é nilpotente sobre B_i.

Assim, decorre da igualdade (1.4), que o operador $-\nabla t + (\alpha_i + 1 + k)$ é nilpotente sobre o espaço

$$B_i^k := t^k B_i = \bigoplus_{j=1}^{q} \mathbb{C} t^k e_{ij}.$$

É fácil ver que $V = \widehat{\oplus}_{k,i} B_i^k$, onde $\widehat{\oplus}$ representa somas infinitas de parcelas, com um número finito de parcelas com expoente negativo, e a soma das parcelas com expoentes positivos é convergente.

Agora, seja

$$C_\alpha = \{v \in V;\ \exists\, l,\ (-\nabla t + \alpha + 1)^l v = 0\}$$

o autoespaço generalizado do operador $-t\nabla = 1 - \nabla t$ correspondente ao autovalor $-\alpha$.

Observe que $B_i^k \subset C_{\alpha_i + k}$ e, se existir outro $j \neq i$, com $\alpha_j = \alpha_i$, então também temos $B_j^k \subset C_{\alpha_i + k}$. Assim, vale que

$$\bigoplus_{\substack{j \in \{1,\dots,r\} \\ \alpha_j = \alpha_i}} B_j^k \subset C_{\alpha_i + k}. \tag{1.5}$$

Segue-se, imediatamente, do fato dos autovalores distintos de $\nabla_e t$ não diferirem por inteiros não nulos, que $C_{\alpha_i + k} \cap C_{\alpha_j + l} = \{0\}$, para $k, l \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_i \neq \alpha_j$. Além disso, pode-se, sem dificuldade, verificar que $C_{\alpha_i + k} \cap C_{\alpha_i + l} = \{0\}$, para quaisquer $k, l \in \mathbb{Z}$ distintos. Logo, quando α percorre todos os números $\alpha_i - k$, com $i = 1, \dots, r$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$V = \widehat{\oplus}_\alpha C_\alpha, \tag{1.6}$$

já que

$$\widehat{\oplus}_{k,i} C_{\alpha_i + k} \subset V = \widehat{\oplus}_{k,i} B_i^k \subset \widehat{\oplus}_{k,i} C_{\alpha_i + k},$$

onde a segunda inclusão decorre de (1.5). Dessa forma, podemos concluir que

$$\bigoplus_{\substack{j \in \{1,\dots,r\} \\ \alpha_j = \alpha_i}} B_j^k = C_{\alpha_i + k}$$

e, portanto, $-\nabla t + (\alpha_i + 1 + k)$ é nilpotente sobre $C_{\alpha_i + k}$.

Usando a igualdade (1.4), para $k = 1$, é fácil concluir que a aplicação multiplicação por t

$$t : C_\alpha \to C_{\alpha+1} \tag{1.7}$$

é uma bijeção para todo α.

Como vimos acima, sobre C_α, temos que $\nabla = (1/t)(\alpha + N)$, com $N = \nabla t - (\alpha + 1)$ operador nilpotente. Então, é imediato verificar que a aplicação

$$\nabla : C_\alpha \to C_{\alpha-1}, \tag{1.8}$$

é bijetora, para todo $\alpha \neq 0$.

Assumimos, doravante, que os números α acima são reais. Portanto, fazem sentido as próximas definições.

Se $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha \in V$, com $\omega_\alpha \in C_\alpha$, definimos a ***ordem*** do elemento ω como o número racional

$$\alpha(\omega) := \min\{\alpha \in \mathbb{Q};\, \omega_\alpha \neq 0\},$$

e denominamos $\omega_{\alpha(\omega)}$ de ***parte principal*** de ω.

Chamamos de ***$\mathcal{V}$-filtração*** as seguintes filtrações decrescentes associadas à graduação $V = \widehat{\bigoplus}_\alpha C_\alpha$:

$$\mathcal{V}^\alpha V := \{v \in V;\, \alpha(v) \geq \alpha\} = \widehat{\bigoplus}_{\beta \geq \alpha} C_\beta$$

e

$$\mathcal{V}^{>\alpha} V := \{v \in V;\, \alpha(v) > \alpha\} = \widehat{\bigoplus}_{\beta > \alpha} C_\beta.$$

Denotamos por

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^\alpha V := \mathcal{V}^\alpha V / \mathcal{V}^{>\alpha} V \simeq C_\alpha$$

a parte de grau α em relação à $\mathcal{V}$-filtração.

Observações 1.11

1. *Segue-se, de* (1.7), *que as filtrações acima podem ser escritas da forma:*

$$\mathcal{V}^\alpha V = \bigoplus_{\alpha \leq \beta < \alpha+1} \mathbb{C}\{t\} C_\beta,$$

$$\mathcal{V}^{>\alpha} V = \bigoplus_{\alpha < \beta \leq \alpha+1} \mathbb{C}\{t\} C_\beta.$$

Além disso é, fácil verificar que estes são reticulados de V;

2. *Segue-se, de (1.7) e (1.8), que $\nabla t\,(\mathcal{V}^{\alpha}V) \subset \mathcal{V}^{\alpha}V$.*

3. *Como $Gr^{\alpha}_{\mathcal{V}}V \simeq C_{\alpha}$, então $(-\nabla t - \alpha + 1)$ é nilpotente sobre $Gr^{\alpha}_{\mathcal{V}}V$.*

Sejam $N \subset M$ subespaços de V. A $\mathcal{V}$-filtração de V induz, por interseção, uma $\mathcal{V}$-filtração sobre o subespaço M, e a $\mathcal{V}$-filtração do quociente M/N é dada por:

$$\mathcal{V}^{\alpha}\,(M/N) = (\mathcal{V}^{\alpha}V \cap M + N)\,/N = (\mathcal{V}^{\alpha}M + N)\,/N, \tag{1.9}$$

$$\mathcal{V}^{>\alpha}\,(M/N) = (\mathcal{V}^{>\alpha}V \cap M + N)\,/N = (\mathcal{V}^{>\alpha}M + N)\,/N \tag{1.10}$$

Podemos deduzir do Teorema do isomorfismo de Noether os isomorfismos

$$\mathrm{Gr}^{\alpha}_{\mathcal{V}}M = \frac{\mathcal{V}^{\alpha}M}{\mathcal{V}^{>\alpha}M} \simeq \frac{\mathcal{V}^{\alpha}M + \mathcal{V}^{>\alpha}V}{\mathcal{V}^{>\alpha}V},$$

$$\mathrm{Gr}^{\alpha}_{\mathcal{V}}\,(M/N) \simeq \frac{\mathrm{Gr}^{\alpha}_{\mathcal{V}}M}{\mathrm{Gr}^{\alpha}_{\mathcal{V}}N}. \tag{1.11}$$

1.4 Conexão de Gauss-Manin e Polinômio de Bernstein

Sejam $\mathcal{O}$ o anel $\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_n\}$ das séries de potências convergentes em alguma vizinhança da origem de $\mathbb{C}^n$ e $f \in \mathcal{O}$, com $f(0) = 0$ e com ponto crítico isolado na origem. Denotamos por $J(f)$ o ***ideal jacobiano*** $\langle f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}\rangle$, cuja codimensão $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/J(f)$ é o ***número de Milnor***.

Seja $\Omega^m = \Omega^m_{\mathbb{C}^n,0}$ o $\mathcal{O}$-módulo dos germes das m-formas diferenciais holomorfas na origem de $\mathbb{C}^n$.

Considere o complexo

$$(\Omega, d) : 0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow \Omega^p \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow \Omega^n \xrightarrow{d} 0$$

onde a diferencial é definida, por linearidade, através da fórmula:

$$d(gdX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_p}) = \sum_{j=1}^{n} g_{X_j} dX_j \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_p},$$

onde $g_{X_j} = \dfrac{\partial g}{\partial X_j}$.

Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} H'' &:= \Omega^n / df \wedge d\Omega^{n-2}, \\ H' &:= df \wedge \Omega^{n-1} / df \wedge d\Omega^{n-2} \subset H'', \\ H &:= H'' \bigotimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathcal{K}, \end{aligned}$$

onde H'' tem uma estrutura de $\mathbb{C}\{t\}$-módulo definida por

$$t[\omega] = [f\omega], \text{ para todo } [\omega] \in H''. \tag{1.12}$$

E. Brieskorn [Bri70], Satz 1, prova a seguinte proposição:

Proposição 1.12 *H é um $\mathcal{K}$- espaço vetorial de dimensão μ e H', $H'' \in \mathrm{Ret}(H)$.*

Os reticulados H' e H'' são conhecidos como ***reticulados de Brieskorn*** e o $\mathcal{K}$-espaço vetorial H como ***sistema de Gauss-Manin***.

Denotamos o quociente H''/H' por Ω_f. Uma verificação direta permite mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \ \mathcal{O}/J(f) &\to \Omega_f = \frac{\Omega^n}{df \wedge \Omega^{n-1}} \\ [g] &\mapsto [gdX] \end{aligned} \tag{1.13}$$

é um isomorfismo de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais, onde $dX = dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_n$.

Segue-se de Malgrange [Mal74a], página 416, que a aplicação

$$\begin{aligned} \nabla_f : \quad H' &\to H'' \\ [df \wedge \omega] &\mapsto [d\omega] \end{aligned} \tag{1.14}$$

é $\mathbb{C}$-linear bijetora e satisfaz à regra de Leibniz. Além disso, é fácil verificar que a aplicação

$$\partial_t : \quad H \quad \longrightarrow \quad H, \tag{1.15}$$

dada por

$$\partial_t \left([\omega] \otimes \frac{1}{t^l} \right) = \nabla_f(t^k[\omega]) \otimes \frac{1}{t^{l+k}} - [\omega] \otimes \frac{l+k}{t^{l+1}}, \tag{1.16}$$

onde k é um número inteiro tal que $t^k[\omega] \in H'$, é uma conexão meromorfa que estende ∇_f de forma única e independentemente da escolha de k. Esta conexão é conhecida como ***conexão de Gauss-Manin*** de f. Denotamos a monodromia associada a ∂_t por M_f.

E. Brieskorn, em [Bri70], Satz 2, prova que a conexão de Gauss-Manin de um germe de função analítica, com ponto crítico isolado na origem, é regular.

Como ∂_t é uma conexão meromorfa regular, segue-se da Proposição 1.8, que os saturados de H'' e H' em relação a $\partial_t t$, são dados, respectivamente, por

$$\widetilde{H''} = \sum_{k \geq 0} (\partial_t t)^k H'',$$

$$\widetilde{H'} = \sum_{k \geq 0} (\partial_t t)^k H'.$$

Malgrange [Mal75], página 113, prova que

$$t\widetilde{H''} = \widetilde{H'}. \tag{1.17}$$

Pelo ***Teorema da Monodromia*** ([Bri70], Satz 4), os autovalores de M_f são raízes da unidade e, portanto, são da forma $e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}$, com $\alpha \in \mathbb{Q}$. Desta forma, H possui uma $\mathcal{V}$-filtração dada em função de números racionais α_i, $i = 1, \ldots, \mu$, não necessariamente distintos, que não diferem por inteiros não nulos e que são raízes do polinômio característico do endomorfismo $\overline{\partial_t t}$ sobre o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathcal{L}/t\mathcal{L}$ de dimensão μ, para algum reticulado saturado $\mathcal{L}$ de H. Logo, quando α percorre todos os números $\alpha_i + k$, com $i = 1, \ldots, \mu$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$H = \widehat{\bigoplus}_\alpha C_\alpha.$$

É importante observar que, como $\widetilde{H''}$ é saturado, então

$$\mathcal{V}^{\alpha}\widetilde{H''} = \widetilde{H''} \cap \widehat{\bigoplus}_{\beta \geq \alpha} C_{\beta},$$

$$\mathcal{V}^{>\alpha}\widetilde{H''} = \widetilde{H''} \cap \widehat{\bigoplus}_{\beta > \alpha} C_{\beta}$$

são $\partial_t t$ invariantes e $\widetilde{H''} \cap C_{\alpha}$ é o autoespaço para o operador $-t\partial_t$ sobre $\widetilde{H''}$, correspondente ao autovalor $-\alpha$. Assim, as igualdades acima podem ser escritas da forma

$$\mathcal{V}^{\alpha}\widetilde{H''} = \widehat{\bigoplus}_{\beta \geq \alpha} \widetilde{H''} \cap C_{\beta}; \tag{1.18}$$

$$\mathcal{V}^{>\alpha}\widetilde{H''} = \widehat{\bigoplus}_{\beta > \alpha} \widetilde{H''} \cap C_{\beta} \tag{1.19}$$

e, conseqüentemente,

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\alpha}\widetilde{H''} = \widetilde{H''} \cap C_{\alpha}. \tag{1.20}$$

Para $\gamma \in \mathbb{Q}$, definimos

$$\mathrm{d}(\gamma) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma}\Omega_f.$$

Se $\mathrm{d}(\gamma) > 0$, o número racional γ é chamado de ***número espectral*** de f de multiplicidade $\mathrm{d}(\gamma)$.

Como do isomorfismo (1.13) tem-se que $\dim_{\mathbb{C}}\Omega_f = \mu$, então existem μ números espectrais $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu}$, não necessariamente distintos, contados com suas multiplicidades. Varchenko [Var82], Teorema 2, prova que os números espectrais são invariantes em uma deformação a μ-constante de f.

Propriedades 1.13

1. ([SS85], (7.3))) $-1 < \gamma_i < n - 1$;

2. ([SS85], (7.3))) $d(\gamma_i) = d(n - 2 - \gamma_i)$;

3. ([Kul98], (8.1), Capítulo II) $\{e^{-2\pi\sqrt{-1}\gamma_i}\,;\, i = 1, \ldots, \mu\}$ *é o conjunto das raízes do polinômio característico da monodromia.*

Chamamos de ***expoentes*** os números racionais $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$ tais que

$$-(\beta_1 + 1), \ldots, -(\beta_\mu + 1)$$

são os autovalores do endomorfismo $-\overline{\partial_t t}$ sobre $\widetilde{H''}/t\widetilde{H''}$.

Se o endomorfismo $-\overline{\partial_t t}$ sobre $\widetilde{H''}/t\widetilde{H''}$ possuir autovalores diferindo por inteiros não nulos, segue, do Lema 1.10, que existe um reticulado saturado $\mathcal{L}'$ tal que endomorfismo $-\overline{\partial_t t}$ sobre $\mathcal{L}'/t\mathcal{L}'$ não possui autovalores diferindo por inteiros não nulos e, pelo Teorema 1.9, (ii), temos que

$$\{e^{-2\pi\sqrt{-1}\lambda}\,;\ \lambda \text{ autovalor de } -\overline{\partial_t t} : \mathcal{L}'/t\mathcal{L}' \to \mathcal{L}'/t\mathcal{L}'\}$$

é o conjunto das raízes do polinômio característico da monodromia. Mas, os números λ's foram obtidos dos números expoentes adicionados de números inteiros. Por isso, também temos que $\{e^{-2\pi\sqrt{-1}\beta_i}\,;\ i = 1, \ldots, \mu\}$ é o conjunto das raízes do polinômio característico da monodromia. Então, decorre da terceira propriedade dos números espectrais, que para todo β_i, $i = 1, \ldots, \mu$, existem $k_i \in \mathbb{Z}$ e um número espectral γ_i tais que $\gamma_i - \beta_i = k_i$.

Segundo Malgrange [Mal75], Teorema 5.4, pode-se definir o polinômio de Bernstein de f como $b(s) = (s+1)\tilde{b}(s)$, onde $\tilde{b}(s)$ é o polinômio minimal da ação de $-\overline{\partial_t t}$ sobre $\widetilde{H''}/t\widetilde{H''}$, também conhecido como ***polinômio de Bernstein reduzido*** de f. Então, para todo expoente β, temos que $-(\beta+1)$ é raiz do polinômio de Bernstein de f.

Propriedades 1.14

1. ([Sai89], (4.1.3)) *As raízes* $-(\beta+1)$ *do polinômio de Bernstein reduzido estão em* $\mathbb{Q} \cap (-n, 0)$;

2. ([Sai89], (4.1.3)) $min\{\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu\} = min\{\beta_1, \ldots, \beta_\mu\}$;

3. ([Ste76]) *Após uma permutação dos índices dos* γ_i, *se necessário, temos que* $\gamma_i - \beta_i \in \mathbb{N}$ *e* $\gamma_i - \beta_i \leq n-1$, *para todo* $i = 1, \ldots, \mu$.

Apesar de todos esses resultados sobre as raízes do polinômio de Bernstein, é ainda difícil calcular explicitamente as mesmas. Essa questão tem sido abordada por vários autores:

T. Yano [Yan78] exibe b_f em alguns exemplos; Kato em [Kat81a] e [Kat81b] exibe b_f para uma deformação a μ-constante de $X^a + X^b$, quando $(a, b) = (5, 7)$ e $(4, 9)$; P. Cassou-Noguès utiliza o cálculo de "polos de integrais" para calcular em [CN86] as raízes de b_f quando f é da forma

$$f = \sum c_{\alpha} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2},$$

e para calcular em [CN87] as raízes de b_f para as deformações a μ-constante de $f = X_1^a + X_2^b$, com a e b primos entre si (na prática esses métodos são bastante complexos); Briançon *et al.* [BGMM89] exibe um algoritmo para calcular explicitamente (embora não trivialmente) b_f, para um germe f com $f(0) = 0$, com ponto crítico isolado na origem e não degenerado em relação ao poliedro de Newton. Os softwares Risa/Asir[1] e Singular[2] permitem calcular as raízes do polinômio de Bernstein de uma singularidade isolada f, quando esta é polinomial e possui número de Milnor baixo.

O caso mais simples onde podemos calcular manualmente b_f é quando f é quase-homogênea; isto é, f é da forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{d} X_i f_{X_i}.$$

Neste caso, $\partial_t t H'' \subset H''$ e, conseqüentemente,

$$\frac{\widetilde{H''}}{t\widetilde{H''}} = \frac{H''}{tH''} \simeq \frac{\mathcal{O}}{J(f)}.$$

Assim, basta conhecer uma $\mathbb{C}$-base para $\frac{\mathcal{O}}{J(f)}$, que o cálculo é manual. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.15 *Considere o polinômio quase-homogêneo* $f = X_1^3 + X_2^4 = \frac{4}{12}(3X_1^3) + \frac{3}{12}(4X_2^4)$. *Tomando*

$$[X_1X_2^2],\ [X_2^2],\ [X_1X_2],\ [X_2],\ [X_1],\ [1]$$

[1] http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir
[2] http://www.singular.uni-kl.de

como uma $\mathbb{C}$*-base para* $\dfrac{\mathcal{O}}{J(f)}$, *temos:*

$$\begin{aligned}
-\partial_t t[dX] &= -\partial_t[f dX] = -\partial_t\left[(3X_1^2dX_1 + 4X_2^3dX_2)\wedge\left(\tfrac{1}{3}X_1dX_2 - \tfrac{1}{4}X_2dX_1\right)\right] \\
&= -\left[\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)dX\right] = -\tfrac{7}{12}[dX]; \\
-\partial_t t[X_1dX] &= -\partial_t[f X_1dX] = -\partial_t\left[(3X_1^2dX_1 + 4X_2^3dX_2)\wedge\left(\tfrac{1}{3}X_1^2dX_2 - \tfrac{1}{4}X_1X_2dX_1\right)\right] \\
&= -\left[\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}\right)X_1dX\right] = -\tfrac{11}{12}[X_1dX]; \\
-\partial_t t[X_2dX] &= -\partial_t\left[(3X_1^2dX_1 + 4X_2^3dX_2)\wedge\left(\tfrac{1}{3}X_1X_2dX_2 - \tfrac{1}{4}X_2^2dX_1\right)\right] = -\tfrac{5}{6}[X_2dX]; \\
-\partial_t t[X_1X_2dX] &= -\partial_t\left[(3X_1^2dX_1 + 4X_2^3dX_2)\wedge\left(\tfrac{1}{3}X_1^2X_2dX_2 - \tfrac{1}{4}X_1X_2^2dX_1\right)\right] \\
&= -\tfrac{7}{6}[X_1X_2dX]; \\
-\partial_t t[X_2^2dX] &= -\partial_t\left[(3X_1^2dX_1 + 4X_2^3dX_2)\wedge\left(\tfrac{1}{3}X_1X_2^2dX_2 - \tfrac{1}{4}X_2^3dX_1\right)\right] = -\tfrac{13}{12}[X_2^2dX]; \\
-\partial_t t[X_1X_2^2dX] &= -\partial_t\left[(3X_1^2dX_1 + 4X_2^3dX_2)\wedge\left(\tfrac{1}{3}X_1^2X_2^2dX_2 - \tfrac{1}{4}X_1X_2^3dX_1\right)\right] \\
&= -\tfrac{17}{12}[X_1X_2^2dX];
\end{aligned}$$

Logo a matriz do endomorfismo $\overline{-\partial_t t} : \widetilde{H''}/t\widetilde{H''} \to \widetilde{H''}/t\widetilde{H''}$ *na* $\mathbb{C}$*-base de* $\widetilde{H''}/t\widetilde{H''}$

$$[X_1X_2^2dX],\ [X_2^2dX],\ [X_1X_2dX],\ [X_2dX],\ [X_1dX],\ [dX]$$

é uma matriz diagonal, com a diagonal principal formada pelos números

$$-17/12,\quad 13/12,\ -7/6,\quad 5/6,\quad 11/12,\ -5/6,\ -7/12$$

e portanto $b_f = (s-1)(s+\frac{17}{12})(s+\frac{13}{12})(s+\frac{7}{6})(s+\frac{5}{6})(s+\frac{11}{12})(s+\frac{7}{12})$

1.5 Filtração de Newton e a V-filtração sobre H''

Seja $f \in \mathcal{O} = \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_n\}$ um germe de função analítica. Escrevendo

$$f = \sum_{A\in\mathbb{N}^n} f_A X^A,$$

onde $A = (a_1, a_2, \cdots a_n)$ e $X^A = X_1^{a_1}\cdots X_n^{a_n}$, definimos o ***suporte*** de f como sendo o conjunto

$$\sup(f) = \{A \in \mathbb{N}^n \quad | \quad f_A \neq 0\}.$$

O ***Poliedro de Newton*** de f é o conjunto $N(f)$, união das faces compactas do envelope convexo de $\sup(f) - \mathbb{N}^n$ em $(\mathbb{R}^-)^n$.

Suponhamos f cômoda, isto é, $N(f)$ possui um ponto em cada eixo coordenado. Dizemos que f é ***não degenerada*** em relação ao poliedro de Newton se, para toda face F de $N(f)$ (de qualquer dimensão), $f_F = \sum_{A \in F} f_A X^A$ satisfaz à condição:
se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é solução do sistema

$$X_1 \frac{\partial f_{1F}}{\partial X_1} = \cdots = X_n \frac{\partial f_{1F}}{\partial X_n} = 0,$$

então $x_i = 0$, para algum $i = 1, \ldots n$.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das faces de $N(f)$ de dimensão $n-1$.

Definição 1.16

1. *Para $F \in \mathcal{F}$, seja B_F o único vetor de $(\mathbb{Q}^+)^n$ tal que $\langle A, B_F \rangle = 1$, para todo $A \in F$;*

2. *Dado $g = \sum g_A X^A \in \mathcal{O}$, o peso de g em relação à $F \in \mathcal{F}$ é*

$$\rho_F(g) = inf\{\langle A, B_F \rangle : \ g_A \neq 0\} \in \mathbb{Q}^+ \cup \{+\infty\},$$

e o peso de g em relação ao poliedro $N(f)$ é

$$\rho(g) = inf\{\rho_F(g); \ F \in \mathcal{F}\}.$$

Dessa definição, podemos concluir que os conjuntos

$$\mathcal{O}_{\geq p} = \{g \in \mathcal{O}; \ \rho(g) \geq p\},$$

$$\mathcal{O}_{>p} = \{g \in \mathcal{O}; \ \rho(g) > p\},$$

onde $p \in \mathbb{Q}^+$, formam filtrações decrescentes de $\mathcal{O}$. Essas filtrações são chamadas de

filtrações de Newton, cujo graduado associado é dado por

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{O}) = \oplus \mathrm{Gr}^p(\mathcal{O}) := \oplus \frac{\mathcal{O}_{\geq p}}{\mathcal{O}_{>p}}.$$

Definimos a ***ordem de Newton*** de g como o número racional $\rho(g)$ e denominamos a imagem de g em $\mathrm{Gr}^{\rho(g)}(\mathcal{O})$ de parte principal de g.

Varchenko e Khovanskii [VK85] provaram que quando f é não degenerada segundo o poliedro de Newton, a $\mathcal{V}$-filtração sobre H'' é obtida da filtração de Newton da seguinte forma: a ordem de $[hdX] \in H''$ é igual a ordem segundo a filtração de Newton da série $X_1X_2\cdots X_nh$ menos 1.

Exemplo 1.17

$$f = X_1^4 + X_2^5.$$

É fácil verificar que f é não degenerada segundo o polígono de Newton, que possui uma única face compacta F, e $B_F = (1/4, 1/5)$. Além disso, $[(f_{X_1} + X_2 f_{X_2})dX] \neq 0$ em H''. Dessa forma, a ordem de $[(f_{X_1} + X_2 f_{X_2})dX]$ vale

$$\rho((X_1X_2)(f_{X_1} + X_2 f_{X_2})) = \rho(4X_1^4X_2 + 5X_1X_2^6) = 1/5.$$

Capítulo 2

Reticulados de Brieskorn e Operadores Diferenciais

Neste capítulo, usamos uma construção devida a Briançon *et al.* [BGMM89], com a finalidade de exibir explicitamente um isomorfismo entre um reticulado saturado de Brieskorn e um certo quociente de módulos sobre um anel de operadores diferenciais que é uma peça chave na demonstração do nosso resultado principal (Teorema 3.4). A existência desse isomorfismo, sem sua descrição explícita é apenas citada por Briançon *et al.* [BGMM89].

2.1 Notações

Durante todo este capítulo, tomaremos $f \in \mathcal{O}$, com $f(0) = 0$ e com ponto crítico isolado na origem.

Considere s e T duas indeterminadas e $\mathcal{O}[f^{-1}, s]T$ o módulo livre sobre $\mathcal{O}[f^{-1}, s]$ de base T. Denotando por $\mathcal{D}_{X,t}$ o anel dos operadores diferenciais de $\mathbb{C}\{X_1, ..., X_n, t\}$, B. Malgrange [Mal75] mune $\mathcal{O}[f^{-1}, s]T$ de uma estrutura de $\mathcal{D}_{X,t}$-módulo, definindo para $g(s) \in \mathcal{O}[f^{-1}, s]$:

$$\partial_{X_i} g(s)T := \partial_{X_i}(g(s)T) := \frac{\partial g(s)}{\partial X_i} T + sg(s)f^{-1}f_{X_i}T \tag{2.1}$$

$$tg(s)f^s := g(s+1)fT \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}g(s)f^s := -sg(s-1)f^{-1}T. \tag{2.3}$$

A partir de agora, substituiremos T por f^s e f^kT por f^{s+k}, com $k \in \mathbb{Z}$.

É fácil ver, pela igualdade (2.2), que

$$t^{-1}g(s)f^s = g(s-1)f^{s-1}$$

e, portanto, a multiplicação por t é uma bijeção sobre $\mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$. Assim,

$$-t^{-1}(s-1)g(s)f^s = \frac{d}{dt}g(s)f^s;$$

isto é, a multiplicação por $s+1$ coincide com a ação de $-t\dfrac{d}{dt}$, e, conseqüentemente, a multiplicação por s coincide com a ação de $-\dfrac{d}{dt}t$, já que $\dfrac{d}{dt}t = t\dfrac{d}{dt} + 1$.

Denotemos por

$$\xi_0 := \xi_0(s) := f^s,$$

$$\xi_i := \xi_i(s) - s(s-1)\cdots(s-i+1)f^{s-i}, \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

Segue-se, facilmente de (2.2) e (2.3) a igualdade:

$$\xi_i = (-1)^i\left(\frac{d}{dt}\right)^i f^s.$$

Agora, denotemos por:

1. E um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathcal{O}$ de dimensão μ, isomorfo, por projeção, a $\dfrac{\mathcal{O}}{J(f)}$. Dessa forma, todo elemento $g \in \mathcal{O}$ se escreve de modo único na forma:

$$g = e + h,$$

onde $e \in E$ e $h \in J(f)$;

2. $\mathcal{D}_X$ o anel dos operadores diferenciais sobre $\mathcal{O}$. Salvo menção contrária, os elementos de $\mathcal{D}_X$ serão tomados com coeficientes à direta; isto é, se $P \in \mathcal{D}_X$ então

$$P = \sum_{\alpha} \partial_X^{\alpha} g_{\alpha},$$

onde $g_{\alpha} \in \mathcal{O}$ e, para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, temos $\partial_X^{\alpha} = \partial_{X_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{X_n}^{\alpha_n}$;

3. D o subanel de $\mathcal{D}_X$ formado pelos operadores a coeficientes constantes;

4. D' o ideal de D sem unidade;

5. DE o subespaço vetorial de $\mathcal{D}_X$ gerado pelos elementos da forma $\partial_X^{\alpha} e$, com $e \in E$;

6. $\mathcal{D}_{X,t} f^s$ a imagem de f^s pela ação de $\mathcal{D}_{X,t}$ em $\mathcal{O}[f^{-1}, s] f^s$;

7. $\mathcal{D}_X[s] \subset \mathcal{D}_{X,t}$ anel dos polinômios em $s = -t\frac{d}{dt}$ a coeficientes em $\mathcal{D}_X$.

Briançon *et al.* [BGMM89], Proposição A.1.4, provam que

$$\mathcal{D}_{X,t} f^s = \mathcal{D}_X J(f) f^s \oplus (\bigoplus_{i \geq 0} DE\xi_i),$$

onde $\mathcal{D}_X J(f)$ representa o ideal à esquerda de $\mathcal{D}_X$ gerado por $J(f)$.

2.2 Z, Z' e Polinômio de Bernstein

Denotemos por $\mathcal{I}$ o $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $J(f)$ gerado pelos elementos

$$g_{X_l} f_{X_k} - g_{X_k} f_{X_l},$$

onde $g \in \mathcal{O}$ e $l, k = 1, \ldots, n$.

Observações 2.1

1. *Segue de Yano* [Yan78], *Teorema 2.19, que o conjunto dos anuladores* $\mathrm{An}(f)$ *de* f^s *em*

$\mathcal{D}_X$ é o ideal à esquerda de $\mathcal{D}_X$ gerado por

$$\partial_{X_i} f_{X_j} - \partial_{X_j} f_{X_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n;$$

2. *Com um simples cálculo podemos concluir que o ideal dos anuladores* $\mathrm{An}(\xi_i)$ *de* ξ_i *em* $\mathcal{D}_X$ *coincide com* $\mathrm{An}(f^s)$.

3. *Temos que*

$$DE\xi_i = D'E\xi_i \oplus E\xi_i,$$

pois se $\left(\sum_{\alpha \geq 1} \partial_X^\alpha e_\alpha + e\right) \xi_i = 0$, *segue dos itens (1) e (2) desta observação que*

$$\sum_{\alpha \geq 1} \partial_X^\alpha e_\alpha - e = \sum_{i,j} P_{ij}(\partial_{X_i} f_{X_j} - \partial_{X_j} f_{X_i}),$$

com $P_{ij} \in \mathcal{D}_X$. *Escrevendo o somatório do lado direito da igualdade acima da forma* $\sum_\alpha \partial_X^\alpha g_\alpha$, *podemos concluir que* $e \in J(f)$ *e* $\sum_\alpha \partial_X^\alpha e_\alpha \in \mathcal{D}_X J(f)$. *Logo* $\sum_\alpha \partial_X^\alpha e_\alpha = 0$ *e* $e = 0$, *uma vez que* $E \cap J(f) = \{0\}$;

4. *Se* $\sum_{|\alpha| \geq 1} \partial_X^\alpha h_\alpha f^s + h f^s = 0$, *com* $h_\alpha, h \in J(f)$, *então* $h \in \mathcal{I}$.

De fato, segue do item (1) acima que existem $g_{\gamma ik}$, $g'_{\gamma ik} \in \mathcal{O}$ *tais que*

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \geq 1} \partial_X^\alpha h_\alpha + h &= \textstyle\sum_{l,k=1}^{n} \left(\sum_{|\gamma ik| > 1} \partial_X^{\gamma ik} g_{\gamma ik} \left(\partial_{X_l} f_{X_k} - \partial_{X_k} f_{X_l}\right) + g'_{\gamma ik} \left(\partial_{X_i} f_{X_k} - \partial_{X_k} f_{X_l}\right) \right) \\ &= \sum_{|\gamma| > 1} \partial_X^\gamma g_\gamma - \left(g'_{\gamma ik}\right)_{X_l} f_{X_k} + \left(g'_{\gamma ik}\right)_{X_k} f_{X_l} \end{aligned}$$

Então, pela unicidade da escrita dos elementos de $\mathcal{D}_X$, *temos que*

$$h = -\left(g'_{\gamma ik}\right)_{X_l} f_{X_k} + \left(g'_{\gamma ik}\right)_{X_k} f_{X_l} \in \mathcal{I}.$$

Considere a aplicação $\mathbb{C}$-linear sobrejetora

$$c : \mathcal{D}_X f^s = \mathcal{D}_X J(f) f^s \oplus \left(\bigoplus_{i \geq 0} DE\xi_i\right) \longrightarrow \frac{J(f) f^s}{\mathcal{I} f^s} \oplus \bigoplus_{i \geq 0} E\xi_i,$$

definida por:

$$c\left(\left(\sum_{|\alpha|\geq 1}\partial_X^\alpha g_\alpha - h\right)f^s\right) = \overline{hf^s} \in \frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s}, \text{ onde } g_\alpha,\, h \in J(f);$$

$$c\left(\left(\sum_{|\alpha|\geq 1}\partial_X^\alpha e_\alpha + e\right)\xi_i\right) = e\xi_i \in E\xi_i, \text{ onde } e_\alpha,\, e \in E.$$

Segue das Observações 2.1.3 e 2.1.4 que c está bem definida.

Lema 2.2 $\ker c = \sum \partial_{X_i}\left(\mathcal{D}_X J(f)f^s \oplus (\bigoplus_{i>0} DE\xi_i)\right)$.

Demonstração:

É imediato verificar que $\sum \partial_{X_i}\left(\mathcal{D}_X J(f)f^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DE\xi_i)\right) \subset \ker c$. Reciprocamente, se

$$P = \Big(\sum_{|\alpha|\geq 1}\partial_X^\alpha g_\alpha + h\Big)f^s \oplus \sum_i \Big(\sum_{|\gamma_i|\geq 1}\partial_X^{\gamma_i} e_{\gamma_i} + e_i\Big)\xi_i \in \ker c,$$

então $hf^s \in \mathcal{I}f^s$ e $\sum_i e_i\xi_i = 0$. Logo, $e_i\xi_i = 0$ e da Observação 2.1.2 temos que os $e_i = 0$. Além disso, segue da definição de $\mathcal{I}f^s$, que

$$hf^s = \sum_{l,k=1}^{n}\left((g_{lk})_{X_l}f_{X_k} - (g_{lk})_{X_k}f_{X_l}\right)f^s = \sum_{l,k=1}^{n}\left(\partial_{X_l}g_{lk}f_{X_k} - \partial_{X_k}g_{lk}f_{X_l}\right)f^s$$

e, conseqüentemente

$$\ker c \subset \sum \partial_{X_i}\left(\mathcal{D}_X J(f)f^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DE\xi_i)\right).$$

□

Lema 2.3

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\mathcal{D}_X[s]f^s = \left\{\left(Q_0(s)f + \sum_{i=1}^{n} Q_i(s)f_{X_i}\right)f^s;\ Q_i(s) \in \mathcal{D}_X[s]\right\}.$$

Demonstração:

Seja $Q(s)f^s = (Q_0(s)f + \sum_{i=1}^n Q_i(s)f_{X_i})\, f^s \in \mathcal{D}_X[s]f^s$. Como $\frac{d}{dt}\partial_X = \partial_X \frac{d}{dt}$, então segue de (2.3) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q(s)f^s &= -sQ_0(s-1)f^s - \textstyle\sum_{i=1}^n Q_i(s-1)sf_{X_i}f^{s-1} \\ &= -sQ_0(s-1)f^s - \textstyle\sum_{i=1}^n Q_i(s-1)\partial_{X_i}f^s \in \mathcal{D}_X[s]f^s, \end{aligned}$$

provando assim que

$$\left\{ \left(Q_0(s)f - \sum_{i=1}^n Q_i(s)f_{X_i} \right) f^s \,;\, Q_i(s) \in \mathcal{D}_X[s],\ i = 1, \ldots, n \right\} \subset \left(\frac{d}{dt} \right)^{-1} \mathcal{D}_X[s]f^s.$$

Agora, seja $u \in \mathcal{D}_{X,t}f^s$ tal que $\dfrac{d}{dt}u \in \mathcal{D}_X[s]f^s$. Então, existe um operador $Q(s) \in \mathcal{D}_X[s]$ tal que $\dfrac{d}{dt}u = Q(s)f^s$; isto é, $(s-1)u = -t\dfrac{d}{dt}u = -Q(s-1)f^{s+1} = Q'(s)f^{s+1}$. Fazendo $s = -1$, temos $Q'(-1)(1) = 0$ e, por isso, devemos ter

$$Q'(s) = (s+1)R + \sum_{i=1}^n Q_i\partial_{X_i},$$

com $R \in \mathcal{D}_X[s]$ e $Q_i \in \mathcal{D}_X$, para $i = 1, \ldots, n$. Assim,

$$(s+1)u = \left((s+1)R + \sum_{i=1}^n Q_i\partial_{X_i} \right) f^{s+1} = (s+1)\left(Rf + \sum_{i=1}^n Q_i f_{X_i} \right) f^s;$$

isto é,

$$u \in \left\{ \left(Q_0(s)f + \sum_{i=1}^n Q_i(s)f_{X_i} \right) f^s \,;\, Q_i(s) \in \mathcal{D}_X[s],\ i = 1, \ldots, n \right\},$$

provando a outra inclusão.

□

Dessa forma, temos que $\mathcal{D}_X J(f)f^s \subset \left(\dfrac{d}{dt} \right)^{-1} \mathcal{D}_X[s]f^s \subset \mathcal{D}_X[s]f^s$. Logo, fazem sentido as definições dos seguintes conjuntos:

$$\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z' = c(\mathcal{D}_X[s]f^s),$$

$$\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z = c\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}_X[s]f^s\right),$$

com $Z \subset Z' \subset \bigoplus_{i>0} E\xi_i$.

Um simples cálculo nos permite caracterizar os elementos de $\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z$ como segue:

$$\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z = \{c(v);\ v \in \mathcal{D}_X[s]f^s \text{ e } (s+1)v \in \mathcal{D}_X[s]f^{s+1}\}. \tag{2.4}$$

Briançon *et al.* [BGMM89], Proposição A.3.2, provam que Z e Z' são $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita, com $Z \subset Z' \subset \bigoplus_{i\geq 0}^{l} E\xi_i$, para algum $l \in \mathbb{N}$, e que Z'/Z é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão μ.

Como o isomorfismo exibido na Proposição 2.7 adiante é crucial para este trabalho, demonstrá-lo-emos, já que é apenas citado por Briançon *et al.* [BGMM89], Observação A.2.5. Para isso, necessitamos da linguagem utilizada por Malgrange [Mal75] descrita a seguir.

Dado um operador $P \in \mathcal{D}_X$, o **operador adjunto** P^* de P é definido pelas seguintes propriedades:

1. se $g \in \mathcal{O}$, $g^* = g$;
2. $\partial_{X_i}^* = -\partial_{X_i}$;
3. $(PQ)^* = Q^*P^*$, para $P, Q \in \mathcal{D}_X$.

Notação 2.4

1. *Escrevemos um elemento $\omega(s) \in \Omega^n[s]$ da forma:*

$$\omega(s) = g_0 dX + sg_1 dX + \cdots + s^r g_r dX,$$

com $g_i dX \in \Omega^n$.

2. *Dados*

$$P(s) = P_0 + P_1 s + \cdots + P_l s^l \in \mathcal{D}_X[s], \quad \textit{com} \quad P_i \in \mathcal{D}_X,$$

$$\omega(s) = g_0 dX + s g_1 dX + \cdots + s^r g_r dX \in \Omega^n[s],$$

definimos:

$$\omega(s)P(s) := \sum_{\substack{i=0,\ldots,l \\ j=0,\ldots,r}} s^{i-j} P_i^*(g_j) dX.$$

Proposição 2.5 (Malgrange [Mal75], Proposição 5.3) *Seja $\Im$ o ideal dos anuladores de f^s em $\mathcal{D}_X[s]$. Então, o homomorfismo sobrejetor*

$$\begin{array}{rccc} \lambda_1 : & \Omega^n[s] & \longrightarrow & \widetilde{H''}, \\ & g_0 dX + s g_1 dX + \cdots + s^r g_r dX & \longmapsto & [g_0 dX - \partial_t t[g_1 dX] + \cdots + (-\partial_t t)^r [g_r dX]] \end{array}$$

induz um $\mathbb{C}$-isomorfismo de $\dfrac{\Omega^n[s]}{\Omega^n[s]\Im}$ em $\widetilde{H''}$, onde

$$\Omega^n[s]\Im = \{\omega(s)P(s);\ \ \omega(s) \in \Omega^n[s] \ \ e \ \ P(s) \in \Im\}.$$

Proposição 2.6 *A aplicação*

$$\lambda_2 : \frac{\mathcal{D}_X[s]f^s}{\sum \partial_{X_i} \mathcal{D}_X[s]f^s} \longrightarrow \frac{\Omega^n[s]}{\Omega^n[s]\Im},$$

definida por

$$\lambda_2\left(\overline{(P_0 + P_1 s + \cdots + P_r s^r)f^s}\right) = \overline{dX(P_0 + P_1 s + \cdots + P_r s^r)},$$

é um $\mathbb{C}$-isomorfismo.

Demonstração:

Observe que se $P(s)f^s = Q(s)f^s$, então $P(s) - Q(s) \in \Im$. Dessa forma, faz sentido definirmos o $\mathbb{C}$-homomorfismo sobrejetor

$$\Pi : \mathcal{D}_X[s]f^s \longrightarrow \frac{\Omega^n[s]}{\Omega^n[s]\Im},$$

por

$$\Pi((P_0 + P_1 s + \cdots + P_r s^r)f^s) = \overline{dX}(\overline{P_0 + P_1 s + \cdots + P_r s^r}).$$

É fácil verificar que $\sum \partial_{X_i}\mathcal{D}_X[s]f^s \subset \ker \Pi$. Além disso, se $P(s)f^s \in \ker \Pi$, então existem $g_0 + sg_1 + \cdots + s^l g_l \subset \mathcal{O}[s]$ e $Q(s) = Q_0 + Q_1 s + \cdots + Q_k s^k \in \Im$ tais que

$$dXP(s) - g(s)dXQ(s) = dXg(s)Q(s) = dX\sum_{i,j} g_i Q_j s^{i+j}.$$

Logo

$$\left((P_0^* + sP_1^* + \cdots + s^r P_r^*) - \sum_{i,j} s^{i+j}(g_i Q_j)^*\right)(1)dX = 0,$$

e, portanto,

$$P(s) - g(s)Q(s) = \sum \partial_{X_i} R(s),$$

com $R(s) \in D_X[s]$. Desta forma

$$P(s)f^s = \sum \partial_{X_i} R(s) f^s,$$

uma vez que $g(s)Q(s)f^s = 0$. Assim, $\ker \Pi = \sum \partial_{X_i}\mathcal{D}_X[s]f^s$ e, desta forma, temos o isomorfismo λ_2 induzido por Π

□

Das Proposições 2.5 e 2.6, temos a proposição a seguir.

Proposição 2.7 *A aplicação*

$$\varphi : \frac{\mathcal{D}_X[s]f^s}{\sum \partial_{X_i}\mathcal{D}_X[s]f^s} \longrightarrow \widetilde{H}^n \tag{2.5}$$

definida por

$$\varphi\left(\overline{(P_0 + P_1 s + \cdots + P_r s^r)f^s}\right) = [P_0^*(1)dX] - \partial_t[P_1^*(1)dX] + \ldots + (-\partial_t t)^r[P_r^*(1)dX],$$

é um isomorfismo de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais.

Considere o homomorfismo sobrejetor

$$\begin{aligned} c' : \ \mathcal{D}_X[s]f^s &\longrightarrow \frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z' \\ v &\longmapsto c(v) \end{aligned}$$

Como $\ker c = \sum \partial_{X_i}\big(\mathcal{D}_X J(f)f^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DE\xi_i)\big)$, então é fácil verificar que

$$\ker c' = \Big(\sum \partial_{X_i}\big(\mathcal{D}_X J(f)f^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DE\xi_i)\big)\Big) \cap \mathcal{D}_X[s]f^s = \sum \partial_{X_i}\mathcal{D}_X[s]f^s.$$

Logo, temos o $\mathbb{C}$-isomorfismo

$$\begin{aligned} \theta : \frac{\mathcal{D}_X[s]f^s}{\sum \partial_{X_i}\mathcal{D}_X[s]f^s} &\longrightarrow \frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z' = c(\mathcal{D}_X[s]f^s) \\ [g] &\longmapsto c(g). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Conseqüentemente, da Proposição 2.7, também temos o $\mathbb{C}$-isomorfismo

$$\varphi \circ \theta^{-1} : \frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z' \cong \widetilde{H''}. \tag{2.7}$$

Observação 2.8 $\{gdX : g \in \mathcal{I}\} = df \wedge d\Omega^{n-2}$.

De fato,

$$(f_{X_1}dX_1 - \ldots + f_{X_n}dX_n) \wedge d\Big(\sum_{\substack{l,k=1\\ l<k}}^{n} g_{lk}dX_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dX_l} \wedge \ldots \wedge \widehat{dX_k} \wedge \ldots \wedge dX_n\Big) =$$

$$\begin{aligned} (f_{X_1}dX_1 + \ldots + f_{X_n}dX_n) \wedge \Big(\sum_{\substack{l,k=1\\ l<k}}^{n} (-1)^{l+1}(g_{lk})_{X_l}dX_1 \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \widehat{dX_k} \wedge \ldots \wedge dX_n + \\ (-1)^k (g_{lk})_{X_k}dX_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dX_l} \wedge \ldots \wedge dX_n\Big) = \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{l,k=1\\ l<k}}^{n} \Big((-1)^{l+1}(-1)^{k+1}(g_{lk})_{X_l}f_{X_k} + (-1)^k(-1)^{l+1}(g_{lk})_{X_k}f_{X_l}\Big)\, dX =$$

$$\sum_{\substack{l,k=1\\ l<k}}^{n} (-1)^{l+k}\big((g_{lk})_{X_l}f_{X_l} - (g_{lk})_{X_k}f_{X_l}\big)\, dX.$$

Da Observação acima, das definições de H' e $J(f)f^s$, é fácil concluir a igualdade:

$$\varphi \circ \theta^{-1}\left(\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s}\right) = H' \tag{2.8}$$

Observe que, para

$$\left(P_0 f + P_1 f s + \cdots + P_r f s^r + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{l} Q_{ij} f_{X_i} s^j\right) f^s \in \left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}_X[s] f^s \subset \mathcal{D}_X[s] f^s,$$

com P_i, $Q_{ij} \in \mathcal{D}_X$, temos

$$\varphi\left(\overline{\left(P_0 f + P_1 f s + \cdots + P_r f s^r + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{l} Q_{ij} f_{X_i} s^j\right) f^s}\right) =$$

$$[f P_0^*(1) dX] + \cdots + (-\partial_t t)^r [f P_r^*(1) dX] + \sum_{j=0}^{l} (-\partial_t t)^j \left[\sum_{i=1}^{n} f_{X_i} Q_{ij}^*(1) dX\right] =$$

$$t[P_0^*(1) dX] + \cdots + t(-\partial_t t - 1)^r [P_r^*(1) dX] +$$

$$\sum_{j=0}^{l} (-\partial_t t)^j \left[\sum_{i=1}^{n} df \wedge (-1)^{i-1} Q_{ij}^*(1) dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_n\right] \in t\widetilde{H''} + \widetilde{H'} = \widetilde{H'},$$

já que $t\widetilde{H''} = \widetilde{H'}$ (veja (1.17)). Logo $\varphi\left(\overline{\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}_X[s] f^s}\right) \subset \widetilde{H'}$. Como o somatório da última linha acima cobre $\widetilde{H'}$, então

$$\varphi\left(\overline{\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}_X[s] f^s}\right) = \widetilde{H'},$$

e, portanto, vale o isomorfismo de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais

$$\frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}_X[s] f^s}{\sum \partial_{X_i} \left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}_X[s] f^s} \cong t\widetilde{H''} \tag{2.9}$$

induzido por φ. De forma análoga à (2.7), obtemos o isomorfismo

$$\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \otimes Z = \varphi\left(\overline{\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}_X[s] f^s}\right) \cong \frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}_X[s] f^s}{\sum \partial_{X_i} \left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \mathcal{D}_X[s] f^s} \cong t\widetilde{H''}, \tag{2.10}$$

induzido por $\varphi \circ \theta^{-1}$.

Dos isomorfismos (2.7) e (2.10), temos o seguinte isomorfismo de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais:

$$\frac{Z'}{Z} \cong \frac{\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z'}{\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z} \cong \frac{\widetilde{H''}}{t\widetilde{H''}} = \frac{\widetilde{H''}}{\widetilde{H'}}.$$

Briançon *et al.* [BGMM89], A.2.3, mostram que podemos obter uma ação de s sobre Z'/Z definindo $\overline{s(\overline{c(v)})} := \overline{c(sv)}$, com $v \in \mathcal{D}_X[s]f^s$. Com isso, podemos concluir que $\tilde{b}(s)$ é o polinômio minimal da ação de s sobre $\frac{Z'}{Z}$, uma vez que $\tilde{b}(s)$ também é o polinômio minimal da ação de $-\overline{\partial_t t}$ sobre $\frac{\widetilde{H''}}{t\widetilde{H''}}$.

Capítulo 3

Polinômio de Bernstein e Números Espectrais

Neste capítulo, aplicamos a teoria desenvolvida nos Capítulos 1 e 2, com a finalidade de exibir algumas raízes do polinômio de Bernstein de uma hipersuperfície complexa com singularidade isolada f em função de alguns de seus números espectrais (Teorema 3.4). Veremos que essas raízes são comuns aos polinômios de Bernstein associados aos elementos de uma deformação a μ-constante de f.

Também verificamos que o Teorema 3.4 generaliza os Teoremas 5.1 e B.4.1.2.1.b provados, respectivamente, por Hertling e Stahlke [HS99] e Briançon *et al.* [BGMM89]. Além disso, o conjunto exibido no Teorema 3.4 contém o conjunto exibido por Saito [Sai93] no Teorema 0.7.

Com as mesmas notações do capítulo anterior, considere o $\mathbb{C}$-isomorfismo

$$\tau = \theta \circ \varphi^{-1} : \widetilde{H}'' \xrightarrow{\sim} \frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z', \tag{3.1}$$

onde φ e θ são os $\mathbb{C}$-isomorfismos dados em (2.5) e (2.6).

Observações 3.1

1. *Temos a seguinte igualdade*

$$\partial_t^{-1}[dX] = \left[\frac{1}{n}\left(X_1 f_{X_1} + X_2 f_{X_2} + \cdots + X_n f_{X_n}\right) dX\right].$$

De fato, tomando

$$\eta = X_1 dX_2 \wedge \cdots \wedge dX_n - X_2 dX_1 \wedge dX_3 \wedge dX_4 \wedge \cdots \wedge dX_n + \cdots + (-1)^{n-1} X_n dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_{n-1},$$

temos que $dX = \frac{1}{n} d\eta$ *e, por (1.14), vale a igualdade*

$$\partial_t^{-1}[dX] = \frac{1}{n}\partial_t^{-1}[d\eta] = \left[\frac{1}{n} df \wedge \eta\right] = \left[\frac{1}{n}\left(X_1 f_{X_1} + X_2 f_{X_2} + \cdots + X_n f_{X_n}\right) dX\right].$$

2. *Se* $[v] \in \mathcal{V}^\alpha H$, *então* $[hv] \in \mathcal{V}^\alpha H$, $\forall h \in \mathcal{O}$ *(veja Saito* [Sai93], *página 54).*

3. *Como* $\widetilde{b}(s)$ *é o polinômio minimal da ação de* $-\overline{\partial_t t}$ *sobre* $\widetilde{H}''/t\widetilde{H}''$ *então segue se, da definição de* C_γ *e da igualdade (1.20), que se* $\eta(\beta)$ *é o grau de nilpotência da ação de* $(-\overline{\partial_t t} + \beta + 1)$ *sobre* $\dfrac{Gr_V^\beta \widetilde{H}''}{Gr_V^\beta t\widetilde{H}''}$ *temos que*

$$\widetilde{b}(s) = \Pi(s + \beta + 1)^{\eta(\beta)}.$$

Proposição 3.2 *Se*

$$h' = f \quad (m_1 X_1 f_{X_1} + \cdots + m_n X_n f_{X_n}), \quad com \quad m_i \in \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

então vale a inclusão

$$\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z \subset \frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} + \{c(Q(s)h'f^s);\ Q(s) \in \mathcal{D}_X[s]\}.$$

Demonstração:

Pela caracterização (2.4) de $\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z$, temos que se $c(v) \in \frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}f^s} \oplus Z$, com $v \in \mathcal{D}_X[s]f^s$, então existe $P = R_0 + R_1 s + \cdots + R_l s^l \in \mathcal{D}_X[s]$, com $R_j \in \mathcal{D}_X$, tal que

$$(s+1)v = Pf^{s+1}. \tag{3.3}$$

Se substituirmos s por -1 na igualdade acima, temos que

$$0 = R_0(1) - R_1(1) + \cdots + (-1)^l R_l(1).$$

Logo, tomando P com coeficientes à esquerda, vale a igualdade

$$R_0 - R_1 + \cdots + (-1)^l R_l = \sum_{\alpha \geq 1} g_\alpha \partial_X^\alpha.$$

Por isso, se

$$S = s + 1 - (m_1 X_1 \partial_{X_1} + m_2 X_2 \partial_{X_2} + \cdots + m_n X_n \partial_{X_n}), \quad \text{com} \quad m_i \in \mathbb{C},$$

obtemos $P = P_0 + P_1 S$, com $P_1 \in \mathcal{D}_X[s]$ e

$$P_0 = \sum_{\alpha} h_\alpha \partial_X^\alpha \partial_{X_1}.$$

Portanto, de (3.3), temos que

$$\begin{aligned}(s+1)v &= P_0 f^{s+1} + P_1 S f^{s+1} = P_0 f^{s+1} + \\ &\quad P_1\left((s+1)f^{s+1} - (s+1)\left(m_1 X_1 f_{X_1} + \cdots + m_n X_n f_{X_n}\right) f^s\right) \\ &= P_0 f^{s+1} + (s+1) P_1\left(f - \left(m_1 X_1 f_{X_1} + \cdots + m_n X_n f_{X_n}\right)\right) f^s.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Mas, segue de (2.1) que

$$P_0 f^{s+1} = \sum_{\alpha_i} h_{\alpha_i} \partial_X^{\alpha_i} \partial_{X_i} f^{s+1} = (s+1) \sum_{\alpha_i} h_{\alpha_i} \partial_X^{\alpha_i} f_{X_i} f^s = (s+1) \sum_{\alpha_i} \left(\partial_X^{\alpha_i} h'_{\alpha_i} + g'_{\alpha_i}\right) f_{X_i} f^s.$$

Logo, de (3.3), temos que

$$v = \sum_{\alpha_i} \left(\partial_X^{\alpha_i} h'_{\alpha_i} + g'_{\alpha_i}\right) f_{X_i} f^s + P_1\left(f - \left(m_1 X_1 f_{X_1} + \cdots + m_n X_n f_{X_n}\right)\right) f^s.$$

Dessa forma, temos que

$$c(v) = c\Big(\sum_{\alpha_i} \left(\partial_X^{\alpha_i} h'_{\alpha_i} + g'_{\alpha_i}\right) f_{X_i} f^s\Big) + c\left(P_1\left(f - \left(m_1 X_1 f_{X_1} + \cdots + m_n X_n f_{X_n}\right)\right) f^s\right) \in$$

$$\frac{J(f) f^s}{\mathcal{I} f^s} + \{c(Q(s) h' f^s) : \ Q(s) \in \mathcal{D}_X[s]\},$$

provando a inclusão desejada.

□

Proposição 3.3 *Se γ_1 é o menor número espectral, então*

$$\widetilde{H}' \subset H' + \mathcal{V}^{\gamma_1+1} \widetilde{H}''.$$

Demonstração:

Como $H'' \subset \mathcal{V}^{\gamma_1} H''$ (Veja [Kul98], Capítulo III , Lema 3.2.7), então $[dX] \in \mathcal{V}^{\gamma_1} H''$. Logo, fazendo $m_1 = \cdots m_n = 1/n$ em (3.2), segue da Observação 3.1.1, de (1.7) e (1.8), que

$$(t - \partial_t^{-1})[dX] = [h' dX] \in \mathcal{V}^{\gamma_1+1} H'' \subset \mathcal{V}^{\gamma_1+1} \widetilde{H}''. \tag{3.5}$$

Além disso, da Observação 3.1.2, de (1.7) e (1.8), temos que

$$(-\partial_t t)^i[qh'dX] \in \mathcal{V}^{\gamma_1+1}\widetilde{H''}, \ \ \forall q \in \mathcal{O}, \ \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Assim, se $Q(s) = \sum \partial_{X_i} P_i(s) + \sum_{j=0}^{k} q_j s^j$, com $q_j \in \mathcal{O}$, temos que

$$\begin{aligned}
\tau^{-1}\left(c(Q(s)h'f^s)\right) &= \varphi\left(\theta^{-1}(c(Q(s)h'f^s))\right) \\
&= \varphi\left(\left[\left(\sum_{j=0}^{k} q_j s^j\right) h'f^s\right]\right) \\
&= [q_0 h'dX] - \partial_t t[q_1 h'dX] + \cdots + (-\partial_t t)^k [q_k h'dX] \in \mathcal{V}^{\gamma_1+1}\widetilde{H''},
\end{aligned}$$

com τ como em (3.1).

Logo, decorre do isomorfismo 2.10, da Proposição 3.2 e de (2.8) que

$$\begin{aligned}
\widetilde{H'} &= \tau^{-1}\left(\frac{J(f)f^s}{If^s} \oplus Z\right) \subset \\
&\quad \tau^{-1}\left(\frac{J(f)f^s}{If^s}\right) + \tau^{-1}\left(\{c(Q(s)h'f^s);\ Q(s) \in \mathcal{D}_X[s]\}\right) \subset \\
&\quad H' + \mathcal{V}^{\gamma_1+1}\widetilde{H''}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.4 *Seja $f \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ com ponto crítico isolado na origem e $f(0) = 0$. Para todo número espectral $\gamma < \gamma_1 + 1$, o número $-(\gamma+1)$ é raiz do polinômio de Bernstein de f.*

Demonstração:

Segue-se da Proposição 3.3 que, para todo número racional $\gamma < \gamma_1 + 1$, temos que

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma}\left(\frac{\widetilde{H''}}{\widetilde{H'}}\right) \simeq \mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma}\left(\frac{\widetilde{H''}/H'}{\widetilde{H'}/H'}\right) \simeq \mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma}\left(\frac{\widetilde{H''}}{H'}\right). \tag{3.6}$$

Mas, se γ é número espectral, temos

$$0 \neq \mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma}\left(\frac{H''}{H'}\right) \subset \mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma}\left(\frac{\widetilde{H''}}{H'}\right).$$

Este fato juntamente com (3.6), implica em

$$\mathrm{Gr}_{\nu}^{\gamma}\left(\frac{\widetilde{H''}}{\widetilde{H'}}\right) \neq 0,$$

para todo número espectral $\gamma < \gamma_1 + 1$. Logo, da Observação 3.1.3, temos que $-(\gamma+1)$ é raiz de b_f, para todo número espectral $\gamma < \gamma_1 + 1$.

□

Usando outros métodos, Saito [Sai93] (Teorema 0.7) provou que, se f é um germe complexo com ponto crítico isolado e $f(0) = 0$, então $-(\gamma+1)$ é raiz do polinômio de Bernstein de f, para todo número espectral $\gamma \leq 0$. O exemplo a seguir mostra que o conjunto exibido no Teorema 3.4 estende esse conjunto exibido por Saito.

Exemplo 3.5 *Considere o germe com singularidade isolada*

$$f = X_1^6 + X_2^5 + X_1^4X_2^3 + X_1^4X_2^2 + X_1^3X_2^3.$$

Então, com auxílio do software Singular, pode-se determinar facilmente os números a seguir.

Números espectrais:

$$-\frac{19}{30}, -\frac{7}{15}, -\frac{13}{30}, -\frac{3}{10}, -\frac{4}{15}, -\frac{7}{30}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{15}, -\frac{1}{30}, \frac{1}{30}, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{2}{15}, \frac{7}{30}, \frac{4}{15}, \frac{3}{10}, \frac{13}{30}, \frac{7}{15}, \frac{19}{30}.$$

Raízes do polinômio de Bernstein da forma $-(\gamma+1)$, para $\gamma < \gamma_1 + 1 = \frac{11}{30}$ número espectral (Teorema 3.4):

$$-\frac{11}{30}, -\frac{8}{15}, -\frac{17}{30}, -\frac{7}{10}, -\frac{11}{15}, -\frac{23}{30}, -\frac{13}{15}, -\frac{9}{10}, -\frac{14}{15}, -\frac{29}{30}, -\frac{31}{30}, -\frac{16}{15}, -\frac{11}{10}, -\frac{17}{15}, -\frac{37}{30}, -\frac{19}{15}, -\frac{13}{10}.$$

Raízes do polinômio de Bernstein da forma $-(\gamma+1)$, para $\gamma \leq 0$ número espectral ([Sai93], Teorema 0.7):

$$-\frac{11}{30}, -\frac{8}{15}, -\frac{17}{30}, -\frac{7}{10}, -\frac{11}{15}, -\frac{23}{30}, -\frac{13}{15}, -\frac{9}{10}, -\frac{14}{15}, -\frac{29}{30}.$$

Ressaltamos que Hertling e Stahlke [HS99] (Teorema 5.1) e Briançon *et al.* [BGMM89] (Proposição B.4.1.2.1.b) provaram o mesmo resultado do Teorema 3.4, sendo que os dois primeiros autores, sob a hipótese de $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ com singularidade isolada e monodromia finita, e os últimos autores, sob a hipótese de $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ ser não degenerada segundo poliedro de Newton.

Varchenko [Var82] prova no Teorema 2, que qualquer elemento da família a μ-constante de um germe $f \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ com ponto crítico isolado na origem e com $f(0) = 0$, possui os mesmos números espectrais. Assim, temos o seguinte corolário do Teorema 3.4:

Corolário 3.6 *Os números* $-(\gamma + 1)$, *para todo número espectral* $\gamma < \gamma_1 + 1$, *formam um conjunto de raízes comuns aos polinômios de Bernstein de qualquer elemento da família a* μ*-constante de um germe com ponto crítico isolado na origem* $f \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$, *com* $f(0) = 0$.

O exemplo a seguir mostra que, em geral, este corolário é o melhor resultado possível. Se dispusermos de informações adicionais sobre o germe f ou sobre sua deformação, este resultado, eventualmente, poderá ser melhorado. No próximo capítulo, veremos algumas situações em que isso ocorre.

Exemplo 3.7 *Considere as singularidades isoladas*

$$f = X_1^4 X_2 + X_1 X_2^6 \quad e \quad f_\lambda = X_1^4 X_2 + X_1 X_2^6 + \lambda X_1^3 X_2^3,$$

onde f_λ *é uma deformação a* μ*-constante de* f *com* $\mu = 24$. *Com o auxílio do software Singular, temos:*

Números espectrais de f ***e*** f_1 ***menores que*** $\gamma_1 + 1 = \frac{8}{23}$***:***

$$-\frac{15}{23}, -\frac{12}{23}, -\frac{10}{23}, -\frac{9}{23}, -\frac{7}{23}, -\frac{6}{23}, -\frac{5}{23}, -\frac{4}{23}, -\frac{3}{23}, -\frac{2}{23}, -\frac{1}{23}, 0, \frac{1}{23}, \frac{2}{23}, \frac{3}{23}, \frac{4}{23}, \frac{5}{23}, \frac{6}{23}, \frac{7}{23};$$

---

raízes comuns aos polinômios de Bernstein de f e f_1:

$$-\frac{8}{23}, -\frac{11}{23}, -\frac{13}{23}, -\frac{14}{23}, -\frac{16}{23}, -\frac{17}{23}, -\frac{18}{23}, -\frac{19}{23}, -\frac{20}{23}, -\frac{21}{23}, -\frac{22}{23}, -1, -\frac{24}{23}, -\frac{25}{23}, -\frac{26}{23}, -\frac{27}{23}, -\frac{28}{23}, -\frac{29}{23}, -\frac{30}{23}.$$

Demais raízes do polinômio de Bernstein de f_1:

$$-\frac{9}{23}, -\frac{10}{23}, -\frac{12}{23}, -\frac{15}{23}.$$

Demais raízes do polinômio de Bernstein de f:

$$-\frac{32}{23}, -\frac{33}{23}, -\frac{35}{23}, -\frac{38}{23}.$$

Com isso, as únicas raízes comuns aos polinômios de Bernstein de f e f_λ são as raízes do tipo $-(\gamma+1)$, com $\gamma \leq \gamma_1 + 1 = 8/23$ número espectral.

Observando mais detalhadamente a demonstração do Teorema 3.4, podemos obter o próximo resultado.

Teorema 3.8 *Seja $f \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ com singularidade isolada na origem e $f(0) = 0$. Se*

$$\widetilde{H'} \subset H' + \mathcal{V}^{\gamma'} \widetilde{H''},$$

então, para todo número espectral $\gamma < \gamma'$, o número $-(\gamma+1)$ é raiz do polinômio de Bernstein de f

Este resultado depende essencialmente do tipo analítico de f, e não somente do seu tipo topológico. O problema é que, em geral, é muito difícil verificar a hipótese sobre $\widetilde{H'}$. Contudo, isso é possível em agumas circunstâncias. Por exemplo, quando f é não degenerado segundo o poliedro de Newton vimos, na Seção 1.5, que a $\mathcal{V}$-filtração coincide com a filtração de Newton e, portanto, podemos tomar γ no Teorema 3.8 como a ordem de Newton de $[h'dX]$ para algum h' como em (3.2). Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.9 *Considere o germe* $f = X_1^5 + X_2^7 + X_1^3 X_2^5$ *não degenerado segundo o polígono de Newton.*

Os números espectrais são:

$$-\frac{23}{35}, -\frac{18}{35}, -\frac{16}{35}, -\frac{13}{35}, -\frac{11}{35}, -\frac{9}{35}, -\frac{8}{35}, -\frac{6}{35}, -\frac{4}{35}, -\frac{3}{35}, -\frac{2}{35}, -\frac{1}{35},$$

$$\frac{1}{35}, \frac{2}{35}, \frac{3}{35}, \frac{4}{35}, \frac{6}{35}, \frac{8}{35}, \frac{9}{35}, \frac{11}{35}, \frac{13}{35}, \frac{16}{35}, \frac{18}{35}, \frac{23}{35}.$$

Tomando

$$h' = f - \frac{1}{5} X_1 f_{X_1} - \frac{1}{7} X_2 f_{X_2} = -\frac{11}{35} X_1^3 X_2^5,$$

temos que a ordem de Newton de $[h'dX]$ *é* $\rho([h'dX]) = \frac{23}{35}$. *Então, com uma demonstração análoga à demonstração da Proposicão 3.3, temos que*

$$\widetilde{H'} \subset H' + \mathcal{V}^{23/35} \widetilde{H''}.$$

Logo, do Teorema 3.8 temos como raízes do polinômio de Bernstein os números da forma $-(\gamma + 1)$, *para* $\gamma < \frac{23}{33}$. *A saber:*

$$-\frac{12}{35}, -\frac{17}{35}, -\frac{19}{35}, -\frac{22}{35}, -\frac{24}{35}, -\frac{26}{35}, -\frac{27}{35}, -\frac{29}{35}, -\frac{31}{35}, -\frac{32}{35}, -\frac{33}{35}, -\frac{34}{35},$$

$$-\frac{36}{35}, -\frac{37}{35}, -\frac{38}{35}, -\frac{39}{35}, -\frac{41}{35}, -\frac{43}{35}, -\frac{44}{35}, -\frac{46}{35}, -\frac{48}{35}, -\frac{51}{35}, -\frac{53}{35}.$$

Segundo o Teorema 3.4 temos como raízes de b_f *os números da forma* $-(\gamma + 1)$, *para* $\gamma < \gamma_1 + 1 = \frac{12}{35}$. *A saber:*

$$-\frac{12}{35}, -\frac{17}{35}, -\frac{19}{35}, -\frac{22}{35}, -\frac{24}{35}, -\frac{26}{35}, -\frac{27}{35}, -\frac{29}{35}, -\frac{31}{35}, -\frac{32}{35}, -\frac{33}{35}, -\frac{34}{35},$$

$$-\frac{36}{35}, -\frac{37}{35}, -\frac{38}{35}, -\frac{39}{35}, -\frac{41}{35}, -\frac{43}{35}, -\frac{44}{35}, -\frac{46}{35}.$$

Observe que, para obter o resultado do Teorema 3.4, deveríamos tomar, como na Proposição 3.3,

$$[h'dX] = \left[(f - \frac{1}{2}(X_1 f_{X_1} + X_2 f_{X_2}) dX \right] = \left[-\frac{3}{2} X_1^5 - \frac{5}{2} X_2^7 - 3 X_1^3 X_2^5) dX \right],$$

cuja a ordem de Newton é $\frac{12}{35} = \gamma_1 + 1$. *Dessa forma teríamos*

$$\widetilde{H'} \subset H' + \mathcal{V}^{12/35}\widetilde{H''}$$

e, portanto os números da última lista acima como raízes de b_f.

Capítulo 4

Polinômio de Bernstein de Ramos de Gênero 1

Neste capítulo, especificamente na Seção 3, estudamos algumas raízes dos polinômios de Bernstein de germes de curvas analíticas irredutíveis planas pertencentes a uma mesma classe de equisingularidade, determinada por um semigrupo de valores gerado por dois elementos (ramos de gênero 1). Na verdade, além das raízes determinadas no Teorema 3.4, exibimos mais raízes comuns aos polinômios de Bernstein dos germes de curvas pertencentes a uma mesma classe de equivalência mais fina do que a equisingularidade, chamada de equidiferenciabilidade, relacionada com o conjunto de valores das diferenciais de Kähler sobre os germes das curvas. Essas raízes são determinadas em função das ordens das diferenciais não exatas da curva na referida classe.

Nas duas primeiras seções discorreremos, sucintamente, sobre base standard e lacunas especiais. Essas noções são imprescindíveis na compreensão da terceira seção. Para mais detalhes veja Hefez e Hernandes [HH01] e Hernandes [Her01].

4.1 Base Standard para ideais de $\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_n\}$

Para $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, usamos a notação $X^m = X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n}$. Portanto, todo elemento $f \in \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_n\} = \mathcal{O}$ pode ser representado da forma

$$f = \sum_{m \in I} a_m X^m,$$

com $I \subset \mathbb{N}^n$.

Se $f \neq 0$ é dado como na igualdade acima, definimos o conjunto de monômios de f como

$$\mathrm{T}(f) = \{X^m;\ m \in I,\ a_m \neq 0\}$$

e a ***potência líder*** de f por

$$\mathrm{lp}(f) = \min \mathrm{T}(f),$$

onde o mínimo é tomado com respeito a uma ordem monomial dada. Além disso, se $\mathrm{lp}(f) = X^m$, o ***termo líder*** de f é o monômio

$$\mathrm{lt}(f) = a_m X^m.$$

Seja $\mathcal{I}$ um ideal de $\mathcal{O}$. Fixada uma ordem monomial $\prec$ para $\mathcal{O}$, dizemos que um subconjunto finito $G \subset \mathcal{I}$ é uma ***base standard*** para $\mathcal{I}$, se todo $m \in \mathcal{I}^*$ satisfaz

$$\mathrm{lp}(m) = \mathrm{lp}(ag),$$

com $a \in \mathcal{O}$ e $g \in G$.

Uma base standard G de um ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}$ é chamada de ***base standard mínima***, se para todo $h \in G$ tivermos $\mathrm{lp}(h) \neq \mathrm{lp}(X^m g)$, para todo $g \in G \setminus \{h\}$ e todo $m \in \mathbb{N}^n$.

Dados $h, f \in \mathcal{O}$ e $G = \{g_1, \cdots, g_r\} \subset \mathcal{O}$, dizemos que h ***se reduz à*** f ***módulo*** G ,

escrevendo $h \xrightarrow{G} f$, se

$$f = h - \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{m_i \in J_i} b_{m_i} X^{m_i} \right) g_i,$$

com $b_{m_i} \in \mathbb{C}$ e $J_i \subset \mathbb{N}^n$, de forma que $\mathrm{lp}(h) \prec \mathrm{lp}(f)$ quando $f \neq 0$. Quando não for mais possível a redução de f módulo G, chamamos f de ***redução final*** de h e escrevemos $h \xrightarrow{G_+} f$.

Definição 4.1 *Um S-**processo** de um par de elementos não nulos $g, h \in \mathcal{O}$ é uma expressão da forma*

$$S(g,h) = Pg + Qh,$$

onde $P, Q \in \mathcal{O}$, tal que $S(g,h) = 0$, ou

$$min\{lp(Pg), lp(Qh)\} \prec lp(S(g,h)).$$

Sejam f, g elementos não nulos de $\mathcal{O}$ tais que $\mathrm{lt}(f) = aX^m$ e $\mathrm{lt}(g) = bX^r$. Um ***S-processo mínimo*** de f, g é definido como sendo

$$S_{\min}(f,g) = b\frac{\mathrm{MMC}(X^m, X^r)}{X^m} f - a\frac{\mathrm{MMC}(X^m, X^r)}{X^r} g.$$

A proposição a seguir nos fornece uma caracterização de base standard para ideais. A demonstração pode ser encontrada em Hefez e Hernandes [HH01], Teorema 3 Capítulo 2.

Proposição 4.2 (Gröbner-Hironaka-Buchberger) *Dado $G = \{g_1, \cdots, g_s\} \subset \mathcal{O}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

2.1. *G é uma base standard para algum ideal.*

2.2. *Toda redução final módulo G de qualquer elemento de $\langle G \rangle$ é zero.*

2.3. *Todo S-processo de um par de elementos em G tem uma redução final nula módulo G.*

O próximo teorema fornece um algoritmo para o cálculo da base standard para um ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$.

Teorema 4.3 *Sejam $B \subset \mathcal{O}$ finito e $\mathcal{I}$ um ideal de $\mathcal{O}$ gerado por B. Então $\mathcal{I}$ tem uma base standard G dada pelo seguinte algoritmo:*

DADO: B;
DEFINA: $G_0 := \emptyset$;
$G_1 := B$;
$i := 1$;
ENQUANTO $G_i \neq G_{i-1}$ FAÇA
$S := \{s;\ s$ é um S-processo mínimo de elementos de $G_i\}$;
$R := \{f;\ s \xrightarrow{G_i} f$ e $f \neq 0\}$;
$G_{i+1} := G_i \cup R$;
$i := i + 1$;
SAÍDA: $G = G_i$.

Demonstração: Veja Hefez e Hernandes [HH01], Teorema 4, Capítulo 2.

□

4.2 Lacunas Especiais

Sejam $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ um germe de curva analítica irredutível e $O = \mathbb{C}\{X_1, X_2\}/ < f >$ seu anel local. Denotamos por x_i, para $i = 1, 2$, a classe residual de X_i módulo o ideal $< f >$; isto é, $x_i = X_i + < f >$. Dessa forma, temos $O = \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$.

Pelo Teorema de Newton-Puiseux (veja Hefez [Hef03]), existe um monomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \phi: & O & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\}. \\ & x_1 & \rightarrowtail & p_1(t) = t^{v_0} \\ & x_2 & \rightarrowtail & p_2(t) = \sum_{i > v_1} b_i t^i \end{array} \tag{4.1}$$

tal que $f(t^{v_0}, \sum_{i>v_1} b_i t^i) = 0$. A aplicação ϕ será chamada de ***parametrização*** de f.

Por uma mudança de coordenadas e de parâmetros, podemos supor que $v_0 < v_1$, v_0 não divide v_1 e $b_{v_1} = 1$. O inteiro v_0 é chamado de ***multiplicidade*** de f.

Denotamos por v a valorização de $\mathbb{C}\{t\}$ e por $\Gamma_f = v(\phi(O))$ o semigrupo associado a essa valorização que é conhecido como ***semigrupo de valores*** associado a f. Sabe-se que Γ_f

possui um ***condutor***; isto é, Γ_f contém um número natural c tal que $m \in \Gamma_f$, para todo $m \geq c$. sabe-se também que Γ_f possui um sistema mínimo de geradores, cuja cardinalidade menos 1 é denominada de ***gênero da curva*** f.

Salvo menção em contrário, ao longo deste capítulo, f será uma curva de gênero 1. Assim, considerando a parametrização de f como em (4.1), prova-se que $\mathrm{MDC}(v_0, v_1) = 1$ e $\Gamma_f = \langle v_0, v_1 \rangle$, com condutor $c = \mu = (v_0 - 1)(v_1 - 1)$ (veja Hefez [Hef03], Capítulo 6), onde μ é o número de Milnor definido na seção **1.4**. Nesse caso, Zariski [Zar73] prova que, a menos de mudanças de coordenadas analíticas, f pode ser representada por um germe da forma

$$f(X_1, X_2) = X_1^{v_1} + X_2^{v_0} + \sum_{\substack{0<\alpha<v_1-2 \\ 0<\beta<v_0-2 \\ \alpha v_0 - \beta v_1 > v_0 v_1}} u_{\alpha\beta} X_1^{\alpha} X_2^{\beta}. \tag{4.2}$$

Definição 4.4 *Dizemos que dois germes de curvas analíticas irredutíveis são* ***equisingulares*** *se eles possuem o mesmo semigrupo de valores.*

Definimos o **O-*módulo de diferenciais*** da curva f, como

$$OdO = \frac{O^2}{\langle e_1 f_{X_1} + e_2 f_{X_2} \rangle},$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de O^n.

Denotamos por dx_1 e dx_2, respectivamente, as imagens de e_1 e e_2 em OdO. Contudo, os elementos dx_1 e dx_2 não são geradores livres de OdO como O-módulo, uma vez que temos a relação:

$$f_{X_1} dx_1 + f_{X_2} dx_2 = 0.$$

Em geral, OdO possui submódulo de torção não trivial (veja, por exemplo, Hefez e Hernandes [HH01], Seção 7.1, Obeservação 2).

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & OdO & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\}, \\ & g_1 dx_1 + g_2 dx_2 & \longmapsto & \phi(g_1) x_1' + \phi(g_2) x_2' \end{array} \tag{4.3}$$

com $g_i \in O$, φ o monomorfismo definido em (4.1) e $x_i' = p_i'(t) = \dfrac{dp_i(t)}{dt}$, para $i = 1, 2$.

Se identificarmos O com $\varphi(O)$, então a aplicação acima é um homomorfismo de O-módulos. Além disso, $\mathrm{Ker}(\zeta) = \mathcal{T}$, com $\mathcal{T}$ submódulo de torção de OdO. Logo, temos

$$\frac{OdO}{\mathcal{T}} \cong \mathrm{Im}\,(\zeta).$$

Assim, dado $\omega \in OdO \setminus \mathcal{T}$, definimos a ***ordem*** de ω como $v(\omega) = v(\zeta(\omega))$, onde v é a valorização discreta de $\mathbb{C}\{t\}$.

Definição 4.5 *Dizemos que uma diferencial $\omega \in OdO$ é* ***exata****, se existe $g \in O$ tal que $\omega = dg$. Caso contrário, dizemos que ω é uma* ***diferencial não exata*** *(DNE).*

Se $\omega \in OdO \setminus \mathcal{T}$ é uma diferencial exata então $v(\omega) + 1 \in \Gamma_f$. Logo, se $v(\omega) + 1 \notin \Gamma_f$, isto é, $v(\omega) + 1$ é uma ***lacuna*** de Γ_f, certamente ω é uma DNE. Além disso, se $v(\omega) \geq \mu - 1$, então ω é uma diferencial exata (veja, por exemplo, Hefez e Hernandes [HH01], página 95).

Definimos

$$\Lambda = \{v(\omega) + 1;\ \ \omega \in OdO \setminus \mathcal{T}\}.$$

Então $\Gamma_f \subseteq \Lambda$ e, portanto, para todo inteiro $l \geq \mu$, temos que $l \in \Lambda$.

Diferentemente de Γ_f, o conjunto Λ pode variar de acordo com os parâmetros da deformação (4.2). Sendo assim, podemos ter $\Lambda = \Gamma_f$ e, nesse caso, prova-se que a parametrização de f pode ser dada por (veja apêndice de Zariski [Zar73])

$$\begin{cases} X &= t^{v_0} \\ Y &= t^{v_1}. \end{cases}$$

Os elementos de $\Lambda \setminus \Gamma_f$, quando $\Lambda \neq \Gamma_f$ são chamados de ***lacunas especiais*** de f.

Dizemos que dois germes de curvas analíticas irredutíveis equisingulares são ***equidiferenciáveis*** se possuem o mesmo Λ. Assim, se $\Lambda \setminus \Gamma_f \neq \emptyset$, a menor lacuna especial menos v_0 é um invariante em relação à equidiferenciabilidade, chamado de ***invariante de Zariski***.

Agora, vamos apenas descrever como determinar as lacunas especiais de um germe de

curva analítica plana irredutível usando sua equação cartesiana. Para mais detalhes veja Hernandes [Her01].

Definição 4.6 *Sejam* $\wp = (\wp_1, \wp_2) \in \mathbb{N}^2$ *e* $\leq_{lex}$ *a ordem lexicográfica. Dizemos que* $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \leq_\wp X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2}$ *se, e somente se, uma das possibilidades abaixo ocorre:*

1. $\wp_1\alpha_1 + \wp_2\alpha_2 < \wp_1\beta_1 + \wp_2\beta_2$;
2. $\wp_1\alpha_1 + \wp_2\alpha_2 = \wp_1\beta_1 + \wp_2\beta_2$ *e* $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \leq_{lex} X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2}$.

Chamamos $\wp$ *de peso e* $\leq_\wp$ *de ordem pesada com respeito ao peso* $\wp$ *e a ordem lexicográfica.*

Podemos encontrar as lacunas especiais $\Lambda \setminus \Gamma_f$ computando uma base standard mínima B para o ideal $\mathcal{I} = \langle f, f_{X_1}, f_{X_2} \rangle \subset \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ com respeito à ordem monomial pesada dada pelo peso $\wp = (v_0, v_1)$ e pela ordem lexicográfica. Para isso, extraímos de B os elementos f_k, $k \geq 1$, tais que $\mathrm{lp}(f_k) = X_1^{m_{k1}} X_2^{m_{k2}}$, com $0 < m_{k2} < v_0 - 1$ e $v_1 - 1 - \left[\frac{m_{k2}v_1}{v_0}\right] \leq m_{k1} < v_1 - 1$, onde $\left[\frac{m_{k2}v_1}{v_0}\right]$ é a parte inteira da fração. Assim, pode-se provar que

$$\begin{aligned} l_k &= m_{k2}v_1 + m_{k1}v_0 + 1 - \mu \\ &= m_{k2}v_1 + m_{k1}v_0 - (v_0 - 1)(v_1 - 1) + 1 \\ &= (m_{k2} + 1)v_1 - (v_1 - 1 - m_{k1})v_0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

é lacuna especial, onde $m_{k2}v_1 + m_{k1}v_0 = \deg_\wp(f_k)$. Os demais elementos de $\Lambda \setminus \Gamma_f$ são os elementos do conjunto

$$\{l_k + iv_0 + jv_1;\ \ i, j \in \mathbb{N} \text{ e } l_k + iv_0 + jv_1 \notin \Gamma_f\}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.7 *Seja*

$$f(X_1, X_2) = X_2^4 - 2X_1^5X_2^2 - 4X_1^7X_2 - X_1^9,$$

cujo semigrupo de valores é $\Gamma =< 4, 9 >$. *Fixemos em* $\mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ *a ordem pesada com respeito ao peso* $\wp = (4, 9)$ *e à ordem lexicográfica.*

Usando o algoritmo dado no Teorema 4.3, obtemos como base standard mínima para $\mathcal{I} = \langle f, f_{X_1}, f_{X_2} \rangle$ *o conjunto* $B = \{f_{X_2}, f_{X_1}, f_1, f_2\}$, *onde*

$$f_1(X_1, X_2) = f - \frac{1}{4} X_2 f_{X_2} - \frac{1}{9} X_1 f_{X_1} = \frac{1}{9} X_1^7 X_2 + \frac{1}{9} X_1^5 X_2^2$$

$$f_2(X_1, X_2) = -\frac{1}{81} X_2 f_{X_1} - X_1 f_1 = \frac{19}{9} X_1^6 X_2^2 + \frac{10}{81} X_1^4 X_2^3.$$

Assim, $l_1 = 14$, $l_2 = 19$ *e a outra lacuna especial é* $l_1 + 9 = l_2 + 4 = 23$. *Observe que* $l_1 + 4 = 18$ *e* $l_2 + 9 = 28$ *não são lacunas especiais, pois* $l_1 + 4,\ l_2 + 9 \in \Gamma_f$.

4.3 Polinômio de Bernstein e Lacunas Especiais

Nesta seção, aplicamos a teoria desenvolvida nas duas últimas seções e nos capítulos anteriores de modo a obter uma relação entre as lacunas especiais e algumas raízes do polinômio de Bernstein de uma curva de gênero 1 .

É fácil verificar que as curvas de gênero 1 são não degeneradas segundo o polígono de Newton. Logo, convém lembrar que a $\mathcal{V}$-filtração sobre H'' é obtida da filtração de Newton (veja Seção 1.5).

Para a classe de equisingularidade com semigrupo de valores $\langle v_0, v_1 \rangle$, sabe-se que

$$\widetilde{E} = \left\{ \gamma = \frac{m_1}{v_0} + \frac{m_2}{v_1} - 1; \quad 1 \leq m_1 \leq v_0 - 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq m_2 \leq v_1 - 1 \right\} \tag{4.5}$$

é o conjunto dos números espectrais (veja Saito [Sai00]), com menor elemento $\gamma_1 = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_0} - 1$.

A observação e o lema a seguir são fundamentais para a solução do problema proposto nesta seção.

Observação 4.8

1. *Para* $i = 1, \ldots, \mu$, *considere* γ_i *e* β_i, *respectivamente, os números espectrais e os números expoentes. Como neste capítulo* $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ *então, segue da Propriedade 1.14.3 que, por uma permutação dos* γ_i *e dos* β_i, *valem as desigualdades* $0 \leq \gamma_i - \beta_i \leq 1$,

com $\gamma_i - \beta_i \in \mathbb{N}$, *para* $i = 1, \ldots, \mu$. *Logo, para* $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$, *devemos ter* $\gamma_i - \beta_i = 0$ *ou* 1, *isto é,* $\beta_i = \gamma_i$ *ou* $\beta_i = \gamma_i - 1$, *para todo* $i = 1, \ldots, \mu$. *Assim, as raízes do polinômio de Bernstein de* $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ *são os números racionais* $-(\beta_i + 1) = -(\gamma_i + 1)$ *ou* $-(\beta_i + 1) = -\gamma_i$.

2. *Pode-se provar que se* $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ *é irredutível, então* $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}_{\nu}^{\beta} \widetilde{H}'' = 1$, *para* β *número expoente (veja Saito* [Sai89]*).*

Lema 4.9 *Seja* f *um germe de curva analítica irredutível em* $\mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ *como em (4.2) e com* $\Lambda \neq \Gamma_f$; *isto é,* f *não é equivalente a* $X_1^{v_1} + X_2^{v_0}$. *Em relação a ordem pesada dada pelo peso* $\wp = (v_0, v_1)$ *e à ordem lexicográfica, os elementos da base standard mínima do ideal* $\mathcal{I} = \langle f, f_{X_1}, f_{X_2} \rangle$ *que determinam as lacunas especiais, são elementos da forma*

$$f_1 = f - \frac{1}{v_1} X_1 f_{X_1} - \frac{1}{v_0} X_2 f_{X_2},$$

$$f_k = Q_{k1}(X_1, X_2) f_{X_1} + Q_{k2}(X_1, X_2) f_{X_2} + Q_{k3}(X_1, X_2) f_1,$$

com $deg_{\wp}(f_k) > deg_{\wp}(f_1)$ *e* $k \geq 2$.

Demonstração:

Podemos supor f dada por na forma:

$$f(X_1, X_2) = X_1^{v_1} + X_2^{v_0} + \sum_{\substack{0 < \alpha \leq v_1 - 2 \\ 0 < \beta \leq v_0 - 2 \\ \alpha v_0 + \beta v_1 > v_0 v_1}} u_{\alpha\beta} X_1^{\alpha} X_2^{\beta}.$$

Usando a ordem monomial pesada em relação ao peso $\wp = (v_0, v_1)$ e à ordem lexicográfica, vamos aplicar o algoritmo dado no Teorema 4.3 para provar o lema.

Comecemos com $G_1 = \{f, f_{X_1}, f_{X_2}\}$. Observe que $\mathrm{lt}(f) = X_2^{v_0}$, $\mathrm{lt}(f_{X_1}) = v_1 X_1^{v_1 - 1}$ e

$\mathrm{lt}(f_{X_2}) = v_0 X_2^{v_0-1}$. Então, temos os seguintes S-processos mínimos de G_1:

$$\begin{aligned} S_{\min}(f, f_{X_1}) &= v_1 X_1^{v_1-1} f - X_2^{v_0} f_{X_1} \\ &= v_1 X_1^{2v_1-1} + \sum_{\alpha,\beta} \left(u_{\alpha\beta} v_1 X_1^{v_1+\alpha-1} X_2^{\beta} - u_{\alpha\beta} \alpha X_1^{\alpha-1} X_2^{v_0+\beta} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\min}(f_{X_1}, f_{X_2}) &= v_0 X_2^{v_0-1} f_{X_1} - v_1 X_1^{v_1-1} f_{X_2} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \left(u_{\alpha\beta} v_0 \alpha X_1^{\alpha-1} X_2^{\beta+v_0-1} - u_{\alpha\beta} \beta v_1 X_1^{\alpha+v_1-1} X_2^{\beta-1} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\min}(f, f_{X_2}) &= f - \frac{X_2}{v_0} f_{X_2} \\ &= X_1^{v_1} + \sum_{\alpha,\beta} \left(u_{\alpha\beta} X_1^{\alpha} X_2^{\beta} - \frac{u_{\alpha\beta}\beta}{v_0} X_1^{\alpha} X_2^{\beta} \right). \end{aligned}$$

Com um cálculo simples, podemos concluir que $\deg_{\varphi}(S_{\min}(f, f_{X_1})) = \mu + 1 > \mu$ e, portanto, para o cálculo das lacunas especiais, podemos descartar os elementos da base standard derivados desse S-processo mínimo. De forma análoga, também podemos descartar os elementos da base standard derivados do S-processo mínimo $S_{\min}(f_{X_1}, f_{X_2})$.

Como $\deg_{\varphi}(S_{\min}(f, f_{X_2})) = \mu + 1 < \mu$, então não podemos descartar esse S-processo cuja redução final é

$$f_1 = f - \frac{1}{v_1} X_1 f_{X_1} - \frac{1}{v_0} X_2 f_{X_2} = \sum_{\alpha,\beta} u_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{\beta}{v_0} - \frac{\alpha}{v_1} \right) X_1^{\alpha} X_2^{\beta}, \tag{4.6}$$

uma vez que $0 < \alpha \leq v_1 - 2$, $0 < \beta \leq v_0 - 2$ e, portanto, não pode ser reduzido módulo G_1.

Segue-se do algoritmo dado pelo Teorema 4.3, que f_1 é um elemento da base standard de $\mathcal{I}$. Além disso, como $\alpha v_0 + \beta v_1 > v_0 v_1$, então $\alpha > \frac{v_0 v_1}{v_0} - \frac{\beta v_1}{v_0}$ e, portanto $\alpha \geq v_1 - 1 - \left[\frac{\beta v_1}{v_0}\right]$. Logo, de (4.4), f_1 contribui para o cálculo das lacunas especiais, uma vez que também temos $0 < \beta < v_0 - 1$ e $\alpha < v_1 - 1$. Continuando o algoritmo, se necessário, tomamos $G_2 = \{f, f_{X_1}, f_{X_2}, f_1\}$ e, pelo passo anterior, temos que os S-processos que devem ser analisados para obtenção das lacunas especiais devem ser da forma $S(g, f_1)$, com $g \in G_2 \setminus \{f_1\}$. Mais precisamente, Hernandes [Her01], Proposições 2.3 e 3.3, prova que necessitamos analisar apenas os S-processos $S(g, f_1)$, com $g \in G_2 \setminus \{f, f_1\}$. Além disso, só precisamos usar f_{X_1} e f_{X_2} nas reduções, uma vez que a potência líder de f é igual à potência líder de $X_2 f_{X_2}$. Dessa

forma, neste passo do algoritmo, os elementos da base standard mínima de $\mathcal{I}$ que contribuem para o cálculo das lacunas especiais são elementos da forma

$$f_k = Q_{k1}(X_1, X_2)f_{X_1} + Q_{k2}(X_1, X_2)f_{X_2} + Q_{k3}(X_1, X_2)f_1 \tag{4.7}$$

tais que, se $\deg_\rho(f_k) = m_{k1}v_0 + m_{k2}v_1$, então $0 < m_{k2} < v_0 - 1$ e $v_1 - 1 - \left\lceil \frac{m_{k2}v_1}{v_0} \right\rceil \leq m_{k1} < v_1 - 1$. Além disso, segue das definições de S-processo e redução que $\deg_\rho(f_k) > \deg_\rho(f_1)$.

No próximo passo, tomamos $G_3 = \{f, f_{X_1}, f_{X_2}, f_1, f_2, \ldots, f_{j_2}\}$ e, com o mesmo argumento do passo anterior, devemos considerar os S-processos da forma $S(g, f_j)$, com $g \in G_3 \setminus \{f, f_j\}$, cujas reduções podem ser feitas módulo $G_3 \setminus \{f\}$. Novamente, obtemos elementos da base standard mínima de $\mathcal{I}$ que contribuem para o cálculo das lacunas especiais da forma (4.7). Continuando o algoritmo com esses mesmos argumentos, conseguimos provar o resultado desejado.

□

Teorema 4.10 Seja f uma curva de gênero 1 com semigrupo de valores $\langle v_0, v_1 \rangle$ tal que f não é equivalente a $X_1^{v_1} + X_2^{v_0}$. Se l é uma lacuna especial para f, então $\dfrac{l}{v_0 v_1} \in \widetilde{E}$, $\dfrac{l}{v_0 v_1} > \gamma_1 + 1$ e $\dfrac{-l}{v_0 v_1}$ é raiz do polinômio de Bernstein de f.

Demonstração:

Sejam f_1 e f_k como no Lema 4.9. Segue de (4.6) que existem α, β tais que $\deg_\rho(f_1) = \alpha v_0 + \beta v_1$. Então do Lema 4.9, $\alpha v_0 + \beta v_1 + v_1 + v_0 - v_1 v_0$ é uma lacuna especial, e se $\deg_\rho(f_k) = m_{k1}v_0 + m_{k2}v_1$ então $m_{k1}v_0 + m_{k2}v_1 + v_1 + v_0 - v_1 v_0$ também é uma lacuna especial, desde que $0 < m_{k2} < v_0 - 1$ e $v_1 - 1 - \left\lceil \frac{m_{k2}v_1}{v_0} \right\rceil \leq m_{k1} < v_1 - 1$. Mais ainda, segue da Seção 2 deste capítulo, que as lacunas especiais são os números

$$\begin{aligned} l_{1ij} &= l_1 + iv_0 + jv_1 = \deg_\rho\left(X_1^i X_2^j f_1\right) - \mu + 1 \\ &= (\alpha + i)v_0 + (\beta + j)v_1 - \mu + 1 < \mu, \\ l_{kij} &= l_k + iv_0 + jv_1 = \deg_\rho\left(X_1^i X_2^j f_k\right) - \mu + 1 \\ &= (m_{k1} + i)v_0 + (m_{k2} + j)v_1 - \mu + 1 < \mu, \end{aligned} \tag{4.8}$$

tais que $l_{1ij}, l_{kij} \notin \Gamma_f$, para $i, j \in \mathbb{N}$.

Mas, observe que

$$\begin{aligned}(s+1-\frac{1}{v_1}X_1\partial_{X_1}-\frac{1}{v_0}X_2\partial_{X_2})f^{s+1} &= (s+1)f^{s+1}-(s+1)(\frac{1}{v_1}X_1\partial_{X_1}(f)+\frac{1}{v_0}X_2\partial_{X_2}(f))f^s \\ &= (s+1)(f-\frac{1}{v_1}X_1f_{X_1}-\frac{1}{v_0}X_2f_{X_2})f^s \\ &= (s+1)f_1f^s.\end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$X_1^iX_2^j(s+1-\frac{1}{v_1}X_1\partial_{X_1}-\frac{1}{v_0}X_2\partial_{X_2})f^{s+1} = (s+1)X_1^iX_2^jf_1f^s;$$

$$X_1^iX_2^j\left(Q_{k1}(X_1,X_2)\partial_{X_1}+Q_{k2}(X_1,X_2)\partial_{X_2}+Q_{k3}(X_1,X_2)(s+1-\frac{1}{v_1}X_1\partial_{X_1}-\frac{1}{v_0}X_2\partial_{X_2})\right)f^{s+1}$$

$$=(s+1)X_1^iX_2^jf_kf^s.$$

Dessa forma, segue da definição de $\frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}} \oplus Z$ que

$$c(X_1^iX_2^jf_1f^s),\ c(X_1^iX_2^jf_kf^s) \in \frac{J(f)f^s}{\mathcal{I}} \oplus Z,$$

com $i, j \in \mathbb{N}$. Logo, pelo isomorfismo $\varphi \circ \theta^{-1}$ dado em (2.8), temos que

$$[X_1^iX_2^jf_1dX],\ [X_1^iX_2^jf_kdX] \in H' \subset \widetilde{H'}.$$

Observe que as potências líderes de $X_1^iX_2^jf_1$ e $X_1^iX_2^jf_k$ são, respectivamente,

$$a_1X_1^{\alpha+i}X_2^{\beta+j} \text{ e } a_kX_1^{m_{k1}+i}X_2^{m_{k2}+j},$$

com $0 \leq \alpha+i,\ m_{k1}+i \leq v_1-2$ e $\beta+j,\ m_{k2}+j \leq v_0-2$, já que $X_1^iX_2^jf_1$ e $X_1^iX_2^jf_k$ contribuem para o cálculo das lacunas especiais. Isto significa que $a_1X_1^{\alpha+i}X_2^{\beta+j},\ a_kX_1^{m_{k1}+i}X_2^{m_{k2}+j} \in E \simeq$

$\mathcal{O}/J(f)$, uma vez que no caso de curvas de gênero 1, é sabido que

$$E = \langle X_1^{m_1} X_2^{m_2};\ 0 \leq m_1 \leq v_1 - 2,\ 0 \leq m_2 \leq v_0 - 2 \rangle .$$

Assim, temos que

$$0 \neq \overline{[X_1^i X_2^j f_1 dX]} = \overline{[a_1 X_1^{\alpha+i} X_2^{\beta+j} dX]} \in \frac{\mathcal{V}^{\gamma_{1ij}} \widetilde{H'}}{\mathcal{V}^{>\gamma_{1ij}} \widetilde{H'}},$$

$$0 \neq \overline{[X_1^i X_2^j f_k dX]} = \overline{[a_k X_1^{m_{k1}+i} X_2^{m_{k2}+j} dX]} \in \frac{\mathcal{V}^{\gamma_{kij}} \widetilde{H'}}{\mathcal{V}^{>\gamma_{kij}} \widetilde{H'}},$$

onde

$$\begin{aligned}
\gamma_{1ij} &= \rho([X_1^i X_2^j f_1 dX]) = \rho([a_1 X_1^{\alpha+i} X_2^{\beta+j} dX]) = \frac{\alpha+i+1}{v_1} + \frac{\beta+j+1}{v_0} - 1 = \frac{l_{1ij}}{v_0 v_1}, \\
\gamma_{kij} &= \rho([X_1^i X_2^j f_k dX]) = \rho([a_k X_1^{m_{k1}+i} X_2^{m_{k2}+j} dX]) = \frac{m_{k1}+i+1}{v_1} + \frac{m_{k2}+j+1}{v_0} - 1 = \frac{l_{kij}}{v_0 v_1},
\end{aligned}$$

com ρ dada na Seção 1.5 e l_{1ij}, l_{kij} as lacunas especiais obtidas, respectivamente, de $X_1^i X_2^j f_1$ e $X_1^i X_2^j f_k$.

Dessa forma, podemos concluir que $\mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma} \widetilde{H'} \neq \{0\}$, para $\gamma = \gamma_{1ij}, \gamma_{kij}$. Conseqüentemente, segue-se da Observação 4.8.2 que, para estes valores de γ, temos

$$\frac{\mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma} \widetilde{H''}}{\mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma} \widetilde{H'}} = \{0\};$$

isto é, o grau de nilpotência de $(s + \gamma + 1)$ sobre $\dfrac{\mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma} \widetilde{H''}}{\mathrm{Gr}_{\mathcal{V}}^{\gamma} \widetilde{H'}}$ é nulo e, portanto, $-(\gamma + 1)$ não é raiz do polinômio de Bernstein de f. Então, da Observação 4.8.1, temos $-\gamma$ como raiz do polinômio de Bernstein de f, para $\gamma = \gamma_{1ij}, \gamma_{kij}$.

Para concluirmos a demonstração da proposição, falta verificarmos que $\gamma \in \widetilde{E}$ e $\gamma > \gamma_1 + 1$, para $\gamma = \gamma_{1ij}, \gamma_{kij}$.

De fato, que $\gamma \in \widetilde{E}$, para $\gamma = \gamma_{1ij}, \gamma_{kij}$, segue imediatamente da descrição de $\widetilde{E}$ dada em

(4.5). Além disso, segue do fato de $\deg_\varphi(f_1) = \alpha v_0 + \beta v_1 > v_0 v_1$, que

$$l_{100} = \rho\lfloor f_1 dX \rfloor = \frac{\alpha+1}{v_1} + \frac{\beta+1}{v_0} - 1 = \frac{\alpha}{v_1} + \frac{\beta}{v_0} - 1 + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_0} > \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_0} = \gamma_1 + 1.$$

Assim, segue da definição de ρ e que

$$\gamma_{1ij} = \rho(\lfloor X_1^i X_2^j f_1 dX \rfloor) \geq \rho\lfloor f_1 dX \rfloor > \gamma_1 + 1.$$

Mais ainda, como $\deg_\varphi(f_k) = m_{k1} v_0 + m_{k2} v_1 > \deg_\varphi(f_1)$ (veja Lema 4.9), então temos que

$$\rho(\lfloor X_1^i X_2^j f_k dX \rfloor) \geq \rho(\lfloor f_k dX \rfloor) = \frac{m_{k1}+1}{v_1} + \frac{m_{k2}+1}{v_0} > \rho(\lfloor f_1 dX \rfloor) > \gamma_1 + 1,$$

prvando assim a proposição.

□

Esse teorema nos diz que para germes de curvas analíticas planas de gênero 1, pertencentes à classe de equidiferenciabilidade determinada pelas lacunas especiais $l_1 < \cdots < l_s$ e com semigrupo de valores $< v_0, v_1 >$, temos sempre como raízes do polinômio de Bernstein os números racionais $\frac{l_1}{v_0 v_1}, \cdots, \frac{-l_s}{v_0 v_1}$, com $\frac{l_1}{v_0 v_1}, \cdots, \frac{l_s}{v_0 v_1}$ números espectrais maiores que $\gamma_1 + 1$. Como no caso de curvas irredutíveis planas, os números espectrais não diferem por inteiros não nulos (veja Saito [Sai00]) então, para todo número espectral $\gamma < \gamma_1 + 1$ e para todo $i = 1, \ldots, s$, temos que $\gamma + 1 \neq \frac{l_i}{v_0 v_1}$. Logo, além das raízes determinadas no Teorema 3.4, conseguimos com o Teorema 4.10 mais raízes comuns aos polinômios de Bernstein de uma mesma classe de equidiferenciabilidade.

Agora vamos aplicar o Teorema 3.8 para obter ainda mais raízes comuns aos polinômios de Bernstein de uma mesma classe de equidiferenciabilidade.

Seja f_1 como no Lema 4.9. Então, fazendo $m_1 = 1/v_1$ e $m_0 = 1/v_0$ em (3.2), temos $f_1 = h'$. Assim, segue-se da demonstração do Teorema 4.10, que

$$\rho\lfloor h' dX \rfloor = \rho\lfloor f_1 dX \rfloor = \frac{l_{100}}{v_0 v_1} > \gamma_1 + 1$$

e, conseqüentemente, da demonstração da proposição 3.3, temos que

$$\widetilde{H'} \subset H' + \mathcal{V}^{l_{100}/v_0v_1}\widetilde{H''}.$$

Logo do Teorema 3.8, $(\gamma + 1)$ é raiz do polinômio de Bernstein de f, não somente para todo número espectral $\gamma < \gamma_1 + 1$, mas para todo número espectral $\gamma < \gamma' = \frac{l_{100}}{v_0v_1}$.

Finalmente, podemos concluir que os germes de curvas analíticas planas de gênero 1, pertencentes à classe de equidiferenciabilidade determinada pelas lacunas especiais $l_1 < \cdots < l_s$ e com semigrupo de valores $< v_0, v_1 >$, têm sempre como raízes do polinômio de Bernstein os números racionais distintos

$$\frac{-l_1}{v_0v_1}, \cdots, \frac{-l_s}{v_0v_1}, -(\gamma + 1),$$

para todo $\gamma < \dfrac{l_1}{v_0v_1}$ número espectral.

Observação 4.11 *Sejam $f = X_1^{v_1} + X_2^{v_0}$ um germe de curva analítica de gênero 1. Então $f_1 = f - 1/v_1X_1f_{X_1} - 1/v_0f_{X_2}X_2 = 0$ e, portanto, tomando $m_1 = m_2 = 0$ em (3.2), temos que $[h'dX] = [f_1dX] = 0$. Logo, da demonstração da Proposição 3.3,*

$$\widetilde{H'} \subset H' + \mathcal{V}^{\alpha}\widetilde{H''}$$

para todo número racional α. Assim, segue do Teorema 3.8, que as raízes do polinômio de Bernstein de f são da forma $-(\gamma + 1)$, para todo γ número espectral.

Por exemplo, para

$$f : X_1^3 + X_2^4,$$

temos:
números espectrais : $-\frac{5}{12}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{5}{12}$;
raízes do polinômio de Bernstein: $-\frac{7}{12}, -\frac{5}{6}, -\frac{11}{12}, -\frac{13}{12}, -\frac{7}{6}, -\frac{17}{12}$;

No exemplo a seguir, exibimos todos os possíveis conjuntos de raízes do polinômio de Bernstein para todas as classes de equidiferenciabilidade com semigrupo de valores $< 5, 7 >$.

Exemplo 4.12 *Os germes de curvas analíticas irredutíveis planas com semigrupo de valores* $< 5, 7 >$ *têm como forma cartesiana*

$$f : X_1^5 + X_2^7 + aX_1^3X_2^3 + bX_1^2X_2^5 + cX_1^3X_2^4 + dX_1^3X_2^5,$$

com a, b, c, $d \in \mathbb{C}$.

Os números espectrais para esses germes são os números racionais:
$\frac{-23}{35}, \frac{-18}{35}, \frac{-16}{35}, \frac{-13}{35}, \frac{-11}{35}, \frac{-9}{35}, \frac{-8}{35}, \frac{-6}{35}, \frac{-4}{35}, \frac{-3}{35}, \frac{-2}{35}, \frac{-1}{35}, \frac{1}{35}, \frac{2}{35}, \frac{3}{35}, \frac{4}{35}, \frac{6}{35}, \frac{8}{35}, \frac{9}{35}, \frac{11}{35}, \frac{13}{35}, \frac{16}{35}, \frac{18}{35}, \frac{23}{35}$.

Se $a \neq 0$, *usando o algoritmo dado pelo Teorema 4.3, temos que 13, 18, 23 são as lacunas especiais de* f. *Portanto, os polinômios de Bernstein para qualquer elemento dessa classe sempre têm como raízes os elementos do conjunto:*

$$\begin{aligned}
C \cup C_1 \cup C_2 &= \{-(\gamma+1);\ \gamma < \gamma_1 + 1 = \tfrac{12}{35} \text{ número espectral}\} \cup \\
&\quad \{-(\gamma+1);\ \tfrac{12}{35} \leq \gamma < \tfrac{13}{35} \text{ número espectral}\} \cup \{-\tfrac{13}{35}, -\tfrac{18}{35}, -\tfrac{23}{35}\} \\
&= C \cup \{-\tfrac{13}{35}, -\tfrac{18}{35}, -\tfrac{23}{35}\} \\
&= \{-\tfrac{12}{35}, -\tfrac{17}{35}, -\tfrac{19}{35}, -\tfrac{22}{35}, -\tfrac{24}{35}, -\tfrac{26}{35}, -\tfrac{27}{35}, -\tfrac{29}{35}, -\tfrac{31}{35}, -\tfrac{32}{35}, -\tfrac{33}{35}, \\
&\quad -\tfrac{34}{35}, -\tfrac{36}{35}, -\tfrac{37}{35}, -\tfrac{38}{35}, -\tfrac{39}{35}, -\tfrac{41}{35}, -\tfrac{43}{35}, -\tfrac{44}{35}, -\tfrac{46}{35}, -\tfrac{13}{35}, -\tfrac{18}{35}, -\tfrac{23}{35}\}.
\end{aligned}$$

Logo, da Observação (4.8.1), as demais possibilidades de raízes são: $-\dfrac{51}{35}$ *ou* $-\dfrac{16}{35}$.

Se $a = 0$ *e* $b \neq 0$, *então as lacunas especiais de* f *são 16 e 23. Logo, os polinômios de Bernstein para qualquer elemento dessa classe sempre têm como raízes os elementos do conjunto:*

$$\begin{aligned}
C \cup C_3 \cup C_4 &= \{-(\gamma+1);\ \gamma < \gamma_1 + 1 = \tfrac{12}{35} \text{ número espectral}\} \cup \\
&\quad \{-(\gamma+1);\ \tfrac{12}{35} \leq \gamma < \tfrac{16}{35} \text{ número espectral}\} \cup \{-\tfrac{16}{35}, -\tfrac{23}{35}\} \\
&= C \cup \{-\tfrac{48}{35}\} \cup \{-\tfrac{16}{35}, -\tfrac{23}{35}\} \\
&= \{\ \tfrac{12}{35}, -\tfrac{17}{35}, -\tfrac{19}{35}, -\tfrac{22}{35}, -\tfrac{24}{35}, -\tfrac{26}{35}, -\tfrac{27}{35}, -\tfrac{29}{35}, -\tfrac{31}{35}, -\tfrac{32}{35}, -\tfrac{33}{35}, \\
&\quad -\tfrac{34}{35}, -\tfrac{36}{35}, -\tfrac{37}{35}, -\tfrac{38}{35}, -\tfrac{39}{35}, -\tfrac{41}{35}, -\tfrac{43}{35}, -\tfrac{44}{35}, -\tfrac{46}{35}, -\tfrac{48}{35}, -\tfrac{16}{35}, -\tfrac{23}{35}\}.
\end{aligned}$$

As demais possibilidades são :$-\dfrac{18}{35}$ *ou* $-\dfrac{53}{35}$.

Se $a = b = 0$ *e* $c \neq 0$, *então as lacunas especiais de* f *são 18 e 23 e, portanto, temos*

um único polinômio de Bernstein nessa classe de equidiferenciabilidade cujas raízes são os elementos do conjunto:

$$\begin{aligned}
C \cup C_5 \cup C_6 &= \{-(\gamma+1);\ \gamma < \gamma_1 + 1 = \tfrac{12}{35} \text{ \textit{número espectral}}\} \cup \\
&\quad \{-(\gamma+1);\ \tfrac{12}{35} \leq \gamma < \tfrac{18}{35} \text{ \textit{número espectral}}\} \cup \{-\tfrac{18}{35}, -\tfrac{23}{35}\} \\
&= C \cup \{-\tfrac{48}{35}, -\tfrac{51}{35}\} \cup \{-\tfrac{18}{35}, -\tfrac{23}{35}\} \\
&= \{-\tfrac{12}{35}, -\tfrac{17}{35}, -\tfrac{19}{35}, -\tfrac{22}{35}, -\tfrac{24}{35}, -\tfrac{26}{35}, -\tfrac{27}{35}, -\tfrac{29}{35}, -\tfrac{31}{35}, -\tfrac{32}{35}, -\tfrac{33}{35}, \\
&\quad -\tfrac{34}{35}, -\tfrac{36}{35}, -\tfrac{37}{35}, -\tfrac{38}{35}, -\tfrac{39}{35}, -\tfrac{41}{35}, -\tfrac{43}{35}, -\tfrac{44}{35}, -\tfrac{46}{35}, -\tfrac{48}{35}, -\tfrac{51}{35}, -\tfrac{18}{35}, -\tfrac{23}{35}\}.
\end{aligned}$$

Se $a = b = c = 0$ e $d \neq 0$, então a única lacuna especial de f é 23 e, portanto, temos um único polinômio de Bernstein nessa classe de equidiferenciabilidade cujas raízes são os elementos do conjunto:

$$\begin{aligned}
C \cup C_7 \cup C_8 &= \{-(\gamma+1);\ \gamma < \gamma_1 + 1 = \tfrac{12}{35} \text{ \textit{número espectral}}\} \cup \\
&\quad \{-(\gamma+1);\ \tfrac{12}{35} \leq \gamma < \tfrac{23}{35} \text{ \textit{número espectral}}\} \cup \{-\tfrac{23}{35}\} \\
&= C \cup \{-\tfrac{48}{35}, -\tfrac{51}{35}, -\tfrac{53}{35}\} \cup \{-\tfrac{23}{35}\} \\
&= \{-\tfrac{12}{35}, -\tfrac{17}{35}, -\tfrac{19}{35}, -\tfrac{22}{35}, -\tfrac{24}{35}, -\tfrac{26}{35}, -\tfrac{27}{35}, -\tfrac{29}{35}, -\tfrac{31}{35}, -\tfrac{32}{35}, -\tfrac{33}{35}, \\
&\quad -\tfrac{34}{35}, -\tfrac{36}{35}, -\tfrac{37}{35}, -\tfrac{38}{35}, -\tfrac{39}{35}, -\tfrac{41}{35}, -\tfrac{43}{35}, -\tfrac{44}{35}, -\tfrac{46}{35}, -\tfrac{48}{35}, -\tfrac{51}{35}, -\tfrac{53}{35}, -\tfrac{23}{35}\}.
\end{aligned}$$

Se $a = b = c = d = 0$, então segue da Observação 4.11 que temos um único polinômio de Bernstein nessa classe de equidiferenciabilidade cujas raízes são os elementos do conjunto:

$$\begin{aligned}
C \cup C_9 &= \{-(\gamma+1);\ \gamma < \gamma_1 + 1 = \tfrac{12}{35} \text{ \textit{número espectral}}\} \cup \\
&\quad \{-(\gamma+1);\ \gamma \geq \gamma_1 + 1 = \tfrac{12}{35} \text{ \textit{número espectral}}\} \\
&= C \cup \{-\tfrac{48}{35}, -\tfrac{51}{35}, -\tfrac{53}{35}, -\tfrac{58}{35}\} \\
&= \{-\tfrac{12}{35}, -\tfrac{17}{35}, -\tfrac{19}{35}, -\tfrac{22}{35}, -\tfrac{24}{35}, -\tfrac{26}{35}, -\tfrac{27}{35}, -\tfrac{29}{35}, -\tfrac{31}{35}, -\tfrac{32}{35}, -\tfrac{33}{35}, -\tfrac{34}{35}, -\tfrac{36}{35}, \\
&= -\tfrac{37}{35}, -\tfrac{38}{35}, -\tfrac{39}{35}, -\tfrac{41}{35}, -\tfrac{43}{35}, -\tfrac{44}{35}, -\tfrac{46}{35}, -\tfrac{48}{35}, -\tfrac{51}{35}, -\tfrac{53}{35}, -\tfrac{58}{35}\}
\end{aligned}$$

Resumindo, temos a seguinte tabela:

Observe que, a análise feita no exemplo acima exibe todas as possibilidades de conjunto de

	$\Lambda \setminus \Gamma$	Raízes do Polinômio de Bernstein
$a \neq 0$	13, 18, 23	$C \cup C_1 \cup C_2 \cup \{-\frac{51}{35}\}$ ou $C \cup C_1 \cup C_2 \cup \{-\frac{16}{35}\}$
$a = 0$ e $b \neq 0$	16, 23	$C \cup C_3 \cup C_4 \cup \{-\frac{18}{35}\}$ ou $C \cup C_3 \cup C_4 \cup \{-\frac{53}{35}\}$
$a = b = 0$ e $c \neq 0$	18, 23	$C \cup C_5 \cup C_6$
$a = b = c = 0$ e $d \neq 0$	23	$C \cup C_7 \cup C_8$
$a = b = c = d = 0$	$\emptyset$	$C \cup C_9$

raízes do polinômio de Bernstein para as classes de equidiferenciabilidade, mas não é verdade que para cada conjunto exibido, tenha que haver um germe na deformação com as raízes do polinômio de Bernstein representadas por esse conjunto. Para comprovar isto, basta olhar um exemplo dado por Cassou-Noguès [CN87], o qual exibe todos os conjuntos de raízes dos polinômios de Bernstein que aparecem na classe de equisingularidade com semigrupo $< 6, 7 >$.

Referências Bibliográficas

[Ber72] I. N. Bernstein. The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. *Funct. Anal. Appl.*, 6:273–285, 1972.

[BGMM89] J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe, and M. Miniconi. Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein: Cas non dégénéré. *Ann. Inst. Fourrier, Grenoble*, 39,3:553–610, 1989.

[Bjo79] J. E. Bjork. *Rings of Differential Operators*. North-Holland Math. Library, 1979.

[Bri70] E. Brieskorn. Die monodromie der isolierten singularitäten von hyperflächen. *Manuscripta Math.*, 2:103–161, 1970.

[CL55] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.

[CN86] P. Cassou-Noguès. Racines de polinôme de Bernstein. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 36, 4:1–30, 1986.

[CN87] P. Cassou-Noguès. Etude du comportement du polinôme de Bernstein lors d'une déformation à μ constant de $x^a + y^b$ avec $(a, b) = 1$. *Compositio Mathematica*, 63:291–313, 1987.

[Hef03] A. Hefez. Irreducible plane curve singularities. *Real and Complex Singularities, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Vol 232:1–120, 2003.

[Her01] M. E. Hernandes. *Métodos computacionais na teoria de curvas algebróides irredutíveis*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

[HH01] A. Hefez and M. E. Hernandes. *Computational Methods in the Local Theory of Curves*. Pubicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[HS99] C. Hertling and C. Stahlke. Bernstein polynomial and tjurina number. *Geometriae Dedicata*, 75:137–176, 1999.

[Kas76] M. Kashiwara. B-function and holonomic system. *Inv. Math.*, 38:33–53, 1976.

[Kat81a] M. Kato. The b-function of μ-constant deformation of $x^7 + y^5$. *Bull. Coll. of Sc. Univ. of Ryukyu*, 32, 1981.

[Kat81b] M. Kato. The b-function of μ-constant deformation of $x^9 + y^4$. *Bull. Coll. of Sc. Univ. of Ryukyu*, 32, 1981.

[Kul98] V. S. Kulikov. *Mixed Hodge Structures and singularities*. Cambridge University Press, 1998.

[Mal74a] B. Malgrange. Intégrales asymptotiques et monodromie. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4(7):405–430, 1974.

[Mal74b] B. Malgrange. Sur les polinômes de I. N. Bernstein. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 29, 4:81–88, 1974.

[Mal75] M. Malgrange. Le polynome de Bernstein d 'une singularite isolee. *Lecture Notes in Math.*, 459:98–119, 1975.

[Mal83] B. Malgrange. Polinôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente. *Astérisque*, 101-102:243–267, 1983.

[Sai89] M. Saito. On the structure of Brieskon lattice. *Ann. Inst. Fourrier, Grenoble*, 39(1):27–72, 1989.

[Sai93] M. Saito. On b-function, spectrum and rational singularity. *Math. Ann.*, 295:51–74, 1993.

[Sai94] M. Saito. On microlocal b-function. *Bull. Soc. Math. France*, 122:163–184, 1994.

[Sai00] M. Saito. Exponents of an irreducible plane curve singularity. *RIMS Kyoto University*, 2000. preprint.

[Sai04] M. Saito. Multiplier ideals, b-function and spectrum., 2004. preprint - RIMS, Kyoto Univ.

[Sat75] M. Sato. Reduced b-functions. *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.*, 225, 1975.

[Sch77] J. Scherk. *Isolated Singular Points and the Gauss-Manin Conection.* PhD thesis, Exeter College, Oxford, 1977.

[SS85] J. Scherk and J. H. M. Steenbrink. On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fibre. *Math. Ann.*, 271:641–665, 1985.

[Ste76] J. H. M. Steenbrink. *Mixed Hodge Structure on vanishing cohomology.* Real and Complex Singularities, Oslo, 1976.

[Var80] A. N. Varchenko. Gauss-manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial. *Bull. Sc. Math.*, 104, 2nd series:205–223, 1980.

[Var82] A. N. Varchenko. The complex of a singularitydoes not change along the stratum μ-constante. *Funct. Anal. Appl.*, 16:1–9, 1982.

[VK85] A. N. Varchenko and A. G. Khovanskii. Asymptotics of integrals over vanishing cycles and the Newton polyhedron. *Soviet Math. Dokl.*, 32:122–127, 1985.

[Was65] W. Wasow. Asymptotic expansions for ordinary differential equations. *Prog. in Math*, 2, 1965.

[Yan78] T. Yano. On the theory of b-function. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 14:11–202, 1978.

[Zar73] O. Zariski. Le problème des modules pour les branches planes. Cours donné au centre de Mathematiques de l'Ecole Polytechnique, 1973.

Índice Remissivo

S-processo, 49

base standard, 48

condutor, 51
conexão, 8, 18
  de Gauss-Manin, 18
  meromorfa, 8
curva não degenerada, 23

diferencial exata, 52
diferencial não exata, 52

equivalência, 7
  de equações diferenciais meromorfas, 7
expoentes, 20

filtração, 15, 24
  $\mathcal{V}$-filtração, 15
  de Newton, 24

germes, 51
  equidiferenciáveis, 52
  equisingulares, 51
gênero de uma curva, 51

ideal jacobiano, 16
invariante de zariski, 52

lacuna, 52
lacunas especiais, 52

matriz fundamental, 6
monodromia, 7, 10
  de conexão meromorfa, 10
  de equação diferencial meromorfa, 7
morfismo de conexões meromorfas, 9
multiplicidade, 50
  de uma curva analítica irredutível, 50
módulo de dinferenciais de uma curva, 51

número de Milnor, 16
número espectral, 19

ordem, 15, 52
  de Newton, 24
  de um elemento , 15
  de uma diferencial, 52

parametrização, 50
poliedro de Newton, 23
polinômio de Bernstein reduzido, 20

redução final, 49
regular, 10
  conexão meromorfa, 10
reticulado, 10
  de Brieskorn, 17

saturação de um, 10
saturado, 10

semigrupo de valores, 50
sistema de Gauss-Manin, 17
suporte, 22

teorema da monodromia, 18