Teorema de Borsuk-Ulam para formas espaciais esféricas

Marjory Del Vecchio dos Santos

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

Teorema de Borsuk-Ulam para formas espaciais esféricas

Marjory Del Vecchio dos Santos

Orientador: **Prof. Dr. Mauro Flávio Spreafico**
Coorientador: **Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Agosto de 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237t

Santos, Marjory Del Vecchio dos
Teorema de Borsuk-Ulam para formas espaciais esféricas / Marjory Del Vecchio dos Santos; orientador Mauro Flávio Spreafico; co-orientador Edivaldo Lopes dos Santos. -- São Carlos, 2014.
55 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Espaços de forma esférica. 2. Teorema de Borsuk-Ulam. 3. Classes de Chern. 4. Grupos periódicos finitos. 5. Cohomologia de grupos. I. Spreafico, Mauro Flávio, orient. II. Santos, Edivaldo Lopes dos, co-orient. III. Título.

"Once you eliminate the impossible,
whatever remains, no matter how improbable,
must be the truth."

Sir Arthur Conan Doyle

Aos meus pais,
Natal e Inez,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, que sem Ele, nada seria e nem existiria.

Ao Prof. Dr. Mauro Flávio Spreafico pela orientação.

Ao Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos, sem ele não teria concluído esse trabalho, pela disponibilidade em sempre ajudar, pelos conhecimentos transmitidos, pela amizade e pelos conselhos tão valiosos.

À Profª. Drª. Denise de Mattos pelo carinho e incentivo.

Ao Prof. Dr. Ozíride Manzoli Neto pelas instruções e apoio.

Aos meus pais, que sempre me incentivaram e me apoiaram nos meus estudos, e pelos sacrifícios que fizeram para que eu estudasse e tivesse uma boa formação.

A minha tia Vera pelas orações.

Ao meu irmão Tiago e minha cunhada Marcela pela amizade, apoio e carinho.

As minhas amigas Ana Paula, Amanda, Lígia e Taciana, agradeço pela amizade e por sempre estarem presentes tanto nos momentos alegres quanto nos momentos difíceis.

Aos meus companheiros de pós-graduação: Matheus, Amanda, Juliana, Northon e demais.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade!

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo sobre o Teorema de Borsuk-Ulam para forma espacial esférica homotópica.

Em nosso trabalho consideramos X uma n-forma espacial esférica homotópica a qual admite uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$, com $p > 2$ primo e $f : X \to \mathbb{R}^k$ uma função contínua e, mostramos que sob determinada relação entre os números n e k, o conjunto $A(f)$ dos pontos de coincidência de f é não vazio.

Palavras-chave: Borsuk-Ulam, subgrupos de índice primo, formas espaciais esféricas, classes de Chern, cohomologia de grupos finitos, cohomologia periódica, G-coincidências, sequência espectral, fibrações. de aplicações.

Abstract

The main objective of this work is to present a study about the Borsuk-Ulam Theorem for homotopic spherical space.

In our work we consider X be a n-dimensional homotopic spherical space form which admits a free action of $\mathbb{Z}_p$, with $p > 2$ prime and $f : X \to \mathbb{R}^k$ be a continuous map and we show that, under certain relations between the numbers n and k, the set $A(f)$ is not empty.

Keywords: Borsuk-Ulam, subgroups of prime index, spherical space form, Chern class, cohomology of finite groups, periodic cohomology, G-coincidence of maps, spectral sequence, fibration.

Sumário

Introdução **i**

1 Preliminares **1**

1.1 Forma espacial esférica 1
1.2 Espaços de Recobrimento 2
1.3 CW-complexos 5
1.4 Resoluções Projetivas 6
1.5 Coinvariantes e Invariantes 7
1.6 A (Co)homologia de um Grupo G 8
1.7 Produto Cup 11
1.8 Fibrados 12
1.9 G-Fibrados principais 13
1.10 Espaços Classificantes 14
1.11 Fibrações 16
1.12 Sequência Espectral 16
1.13 Produto semi-direto 19

2 Cohomologia de Grupos Finitos **21**

2.1 Grupos atuando livremente em esferas 21
2.2 Grupos com Cohomologia Periódica 23
2.3 Anel de Cohomologia de Grupos Periódicos 24

3 Grupos Peródicos Finitos e $\mathbb{Z}_p$-ações Livres sobre Formas Espaciais Esféricas **27**

3.1 $\mathbb{Z}_p$-ações Livres sobre Formas Espaciais Esféricas 27
3.2 Subgrupos de Índice Primo 30

4 Classes de Chern **33**
4.1 As Classes de Chern 33

5 O Teorema de Borsuk-Ulam para formas espaciais esféricas **39**
5.1 Teorema Principal 39

A Aspectos geométricos do Teorema de Borsuk-Ulam **43**
A.1 O teorema de Borsuk-Ulam para $\mathbb{Z}_p$-ações livres 43

Referências Bibliográficas **49**

Índice Remissivo **55**

Introdução

O teorema clássico de Borsuk-Ulam [3], afirma que toda função contínua f da n-esfera S^n no n-espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, colapsa pelo menos um par de pontos antípodas, ou seja, existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(A(x))$, onde $A : S^n \to S^n$ denota a aplicação antipodal $A(x) = -x$, para todo $x \in S^n$. Esse teorema é uma útil ferramenta da topologia algébrica que tem sido extensamente usado em diferentes áreas. Uma das razões é que existem inúmeras versões e muitas demonstrações conhecidas de cada versão. As técnicas das demonstrações são completamente variadas: os métodos geométricos e elementares, as técnicas algébricas, combinatoriais, a topologia algébrica e muitas outras ferramentas têm sido usadas para prová-lo. O resultado foi primeiramente conjecturado por S. Ulam e provado por Karol Borsuk, em 1933. Desde então, têm sido publicadas diferentes demonstrações, generalizações e aplicações deste famoso teorema (ver, por exemplo, [16]).

Dentre as generalizações bem conhecidas, destacamos pela sua importância, o trabalho de Conner e Floyd [5]. A famosa versão do Teorema de Borsuk-Ulam provada por eles na década de 60, substitui o n-espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ por uma k-dimensional variedade diferenciável M^k, para $n \geq k$, com a hipótese adicional que a induzida da f no nível

n se anula na $\mathbb{Z}_2$-cohomologia. Em [2], Biasi, De Mattos e Dos Santos estenderam o resultado de Conner e Floyd substituindo a k- variedade diferenciável por uma k-variedade generalizada, provando o seguinte

Teorema [2, Teorema 1.1]. *Sejam $f : S^n \to M^k$ uma função contínua da n-esfera S^n em uma variedade generalizada M^k e $A(f) = \{x \in X; f(x) = f(-x)\}$.*

i) se $n > k$, então $\dim A(f) \geq n - k$;

ii) se $n = k$ e $f^* : H^n(M^n, \mathbb{Z}_2) \to H^n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ for nula, então $A(f) \neq \emptyset$.

Existem muitas formulações do Teorema de Borsuk-Ulam. Consideremos a seguinte formulação geral do teorema de Borsuk-Ulam:

Sejam X,Y espaços topológicos, G um grupo finito agindo livremente sobre X e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto de G-coincidência de f se a função f leva a órbita Gx em um único ponto. O conjunto de todos os pontos de G-coincidência de f é denotado por $A(f)$.

Na formulação geral acima de G-coincidência quando o domínio X é um espaço satisfazendo determinadas condições e contradomínio Y é um CW- complexo, o problema foi abordado em vários artigos, a saber, [7, 8, 9, 10], [13, 14] e [21].

No caso em que o domínio é a n-esfera ou uma esfera de homologia e o contradomínio Y é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$, o problema foi também abordado em vários artigos (ver por exemplo [21]).

Recentemente, D. L. Gonçalves, O. Manzoli Neto e M. Spreafico em [11], provaram o Teorema de Borsuk-Ulam para espaços de forma esférica que admitem ações livres do grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_2$. Mais especificamente, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema [11, Teorema 1.4]. *Seja $X = X(2n-1)$ um espaço de forma esférica $(2n-1)$-dimensional, e τ uma involução livre em X, com $n > 2$. Então o Teorema de Borsuk-Ulam é válido para a tripla $(X(2n-1), \tau; R^{2n-1})$ se, e somente se, $\pi_1(X)$ não possui elementos de ordem 2.*

O objetivo do nosso trabalho foi obter uma versão do teorema de Borsuk-Ulam considerando o domínio X no problema geral acima como sendo as n-formas espaciais esféricas homotópicas e G o grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$, com $p > 2$ primo.

A seguir, apresentamos o principal resultado deste trabalho.

Teorema (5.1.1). *Dada uma forma espacial esférica homotópica (2n-1)-dimensional X com uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$, $p > 2$ primo, e uma aplicação contínua $f : X \to \mathbb{R}^m$ com $2n - 1 \geq m(p-1)$, então o conjunto de coincidências $A(f) \neq \emptyset$. Mais ainda,*

$$\dim A(f) \geq \dim X - m(p-1).$$

No desenvolvimento da tese usamos conceitos de topologia e álgebra, tais como classes de Chern, sequências espectrais, cohomologia de grupos, grupos periódicos finitos, grupos atuando em esferas, espaços de forma esférica, entre outros.

A seguir relatamos sucintamente o objeto de estudo de cada capítulo.

No capítulo 1 encontram-se definições e propriedades básicas relativas ao desenvolvimento do projeto tais como espaço de forma esférica, cohomologia de grupos, fibrações, sequências spectrais, etc. A intenção deste capítulo é facilitar a leitura e entendimento dos capítulos seguintes.

No capítulo 2 encontram-se definições e resultados sobre

cohomologia de grupos finitos, especificamente sobre cohomologia de grupos periódicos finitos, os quais são geradores de espaços de forma esférica. O conhecimento do anel de cohomologia módulo p de tais grupos foi de fundamental importância para o desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo 3 nós apresentamos uma caracterização das formas espaciais esféricas que admitem $\mathbb{Z}_p$-ações livres (ver Teorema 3.1.1). A existência de tais $\mathbb{Z}_p$-espaços livres está diretamente relacionada com os subgrupos de índice primo dos grupos periódicos finitos. Na seção 3.2, asseguramos a existência de tais subgrupos, e desta forma, a existência de espaços de forma esférica que admitem uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$.

No capítulo 4 encontra-se um estudo sobre classes de Chern no que diz respeito a sua relação com o conjunto de coincidências $A(f)$.

No capítulo 5, usando as ferramentas desenvolvidas nos capítulos anteriores, demonstramos nosso resultado principal, um teorema do tipo Borsuk-Ulam no caso em que o domínio é uma forma espacial esférica homotópica. Demostramos que o conjunto de coincidências é não vazio e também damos uma estimativa para sua dimensão.

No apêndice A apresentamos alguns aspectos geométricos do Teorema de Borsuk-Ulam para o caso de ações livres do grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$, apresentando uma versão equivalente deste resultado em termos de aplicações $\mathbb{Z}_p$-equivariantes.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados que serão de bastante utilidade para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. O objetivo desse capítulo é facilitar a leitura e entendimento dos próximos capítulos e sendo assim, será omitida a maioria das demonstrações dos resultados apresentados. Suas principais referências são [1], [19], [20], [22]

1.1 Forma espacial esférica

Definição 1.1.1 *Uma n-forma espacial esférica é uma variedade Riemanniana conexa completa de curvatura constante positiva, ou seja, é exatamente o quociente S^n/Γ da esfera pela ação de um subgrupo $\Gamma \subset O(n+1, \mathbb{R})$ de isometrias livres de ponto fixo. Uma classificação completa das formas espaciais esféricas foi feita por J. Wolf em [22].*

Desde que S^n/Γ é conexa, $H_0(S^n/\Gamma; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Como S^n e $p : S^n \to S^n/\Gamma$ é um recobrimento, então S^n/Γ é compacta e $H_n(S^n/\Gamma; \mathbb{Z})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ ou

$\mathbb{Z}_2$, dependendo se é orientável ou não, respectivamente. Se n é par, então as únicas formas espaciais esféricas (a menos de isometria) são a esfera e o espaço projetivo. Se n é impar, então S^n/Γ é orientável pois as representações do grupo Γ em $O(n+1,\mathbb{R})$ originam-se de representações complexas e portanto se reduzem a $SO(n+1)$. Também o grupo das transformações deck é Γ. Usando a sequência exata de homotopia de p segue que $\pi_1(S^n/\Gamma) \simeq \Gamma$ e $\pi_k(S^n/\Gamma) \simeq \pi_k(S^n)$, para $k > 1$.

Definição 1.1.2 *Seja Σ^m um CW-complexo m-dimensional com o mesmo tipo de homotopia da m-esfera. Dada uma ação celular livre γ de um grupo finito G em Σ^m, denotamos por $\Sigma^m/\gamma(G)$ o espaço de órbitas correspondente, chamado espaço de forma esférica homotópica ou forma espacial esférica homotópica m-dimensional.*

1.2 Espaços de Recobrimento

Para definirmos espaços de recobrimento assumimos que os espaços topológicos utilizados são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos (e portanto, conexos). Os resultados desta seção podem ser encontrados em [19].

Definição 1.2.1 *Sejam X e Y dois G-espaços e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se $f(gx) = gf(x)$ para todo $x \in X$ e todo $g \in G$, então f é chamada de* ***aplicação equivariante****.*

Definição 1.2.2 *Seja X um espaço topológico. Um* **espaço de recobrimento** *de X é um par $(\widetilde{X}, p)$, com $\widetilde{X}$ um espaço de recobrimento e $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação contínua tal que:*
(1) p é sobrejetora.
(2) Todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U aberta, conexa por caminhos de modo que a restrição de p a cada componente conexa $\widetilde{U}$ de $p^{-1}(U)$ é um homeomorfismo.

Observação 1.2.1 *Denominamos a aplicação p e a vizinhança U respectivamente de* **projeção de recobrimento** *e* **vizinhança elementar**. *Ainda, o conjunto $p^{-1}(x)$ é denominado* **fibra** *no ponto $x \in X$.*

Exemplo 1.2.1 *Seja $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(t) = (sent, cost), t \in \mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, p)$ é um recobrimento de S^1. Além disso, todo subintervalo aberto de S^1 pode ser visto como uma vizinhança elementar.*

Observação 1.2.2 *Sejam $(\widetilde{X}, p)$ e $(\widetilde{Y}, q)$ recobrimentos de X e Y respectivamente. Então $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, p \times q)$ é recobrimento de $X \times Y$, sendo a aplicação $p \times q$ definida como $(p \times q)(x, y) = (p(x), q(y))$. Agora, se U e V são vizinhanças elementares de $x \in X$ e $y \in Y$ então $U \times V$ é uma vizinhança elementar de $(x, y) \in X \times Y$.*

Proposição 1.2.1 *Sejam $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento de X, $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ e $x_0 = p(\widetilde{x_0})$. Então o homomorfismo induzido $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ é um monomorfismo.* ■

Definição 1.2.3 *Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento de X. Um homeomorfismo $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ é dito* **transformação de recobrimento (ou Deck transformação)** *se $p \circ \varphi = p$. Ainda, o conjunto de todas as transformações de recobrimento (denotado por $A(\widetilde{X}, p)$) é um grupo em relação à composição.*

Proposição 1.2.2 *O grupo $A(\widetilde{X}, p)$ atua livremente sobre $\widetilde{X}$, isto é, $g.\widetilde{x} = \widetilde{x}$ se, e somente se, $g = 1$.* ■

Definição 1.2.4 *Um recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de X é dito* **recobrimento universal** *de X se $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, isto é, se $\widetilde{X}$ é conexo por caminhos e $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = 0$, para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$.*

Definição 1.2.5 *Um recobrimento* $(\widetilde{X}, p)$ *é dito* **recobrimento regular** *se* $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ *é um subgrupo normal de* $\pi_1(X, x)$*. Ainda, esta condição independe da escolha do ponto base* $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$*.*

Exemplo 1.2.2 *Todo recobrimento universal é regular.*

Definição 1.2.6 *Se* $(\widetilde{X}, p)$ *é um espaço de recobrimento de* X*, o número cardinal comum dos conjuntos* $p^{-1}(x)$*,* $x \in X$*, é chamado de* **número de folhas do recobrimento**. *Nós dizemos que o recobrimento é de n-folhas se* $\#p^{-1}(x) = n$ *e de infinitas folhas se* $\#p^{-1}(x) = \infty$*.*

Proposição 1.2.3 *Seja* $(\widetilde{X}, p)$ *um recobrimento regular de* X*. Então* $A(\widetilde{X}, p)$ *é isomorfo ao grupo quociente* $\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$*, para todo* $x \in X$ *e todo* $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$*.* ■

Demonstração. [19].

Proposição 1.2.4 *Seja* $(\widetilde{X}, p)$ *um recobrimento regular de* X*. O grupo* $A(\widetilde{X}, p)$ *atua transitivamente sobre* $p^{-1}(x)$ *se, e somente se,* $(\widetilde{X}, p)$ *é um recobrimento regular de* X*.*

Definição 1.2.7 *Um grupo* G *de homeomorfismos de* X *é dito* **propriamente descontínuo** *se todo ponto* $x \in X$ *possui uma vizinhança* V *tal que, para todo* $g \in G$*,* $g \neq 1$*, tem-se* $g.V \cap V = \emptyset$*.*

Proposição 1.2.5 *Seja Y um espaço conexo e localmente conexo por caminhos. Seja G um grupo de homeomorfismos de Y propriamente descontínua. Considere* $p : Y \to Y/G$ *a projeção natural de Y no espaço quociente Y/G. Então (Y,p) é um recobrimento regular de Y/G e G=A(Y,p).*

Proposição 1.2.6 *Seja* $(\tilde{X}, p)$ *um recobrimento universal de X. Então* $A(\tilde{X}, p) \simeq \pi_1(X)$ *e a ordem de* $\pi_1(X)$ *é igual ao número de folhas do recobrimento* $(\tilde{X}, p)$*.*

Observação 1.2.3 $A(\tilde{X}, p) = \{\phi : \tilde{X} \to \tilde{X} \mid \phi \;\; é \;\; automorfismo\}$

1.3 CW-complexos

Definição 1.3.1 *Dado um espaço X de Hausdorff, dizemos que X admite uma estrutura de* **CW-complexo** *se possui uma coleção de subconjuntos fechados σ_j^q (onde q representa dimensão ($q = 0, 1, 2, \ldots$) e j varia sobre um conjunto de índices J_q), e uma família de subespaços fechados $X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^q \subset \ldots$ com $X^q = \bigcup_{\substack{p \leq q \\ j \in J_p}} \sigma_j^p$ (por definição $X^{-1} = \emptyset$), e fronteira dada por $f_j^q = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*
(i) $\sigma_i^p - f_i^p$ intercepta $\sigma_j^q - f_j^q$ somente quando $p = q$ e $i = j$.
(ii) $X = \bigcup_q X^q$.
(iii) Para cada σ_j^q, existe uma aplicação característica $\phi_j^q : D^q \to \sigma_j^q$ (onde D^q é o disco de dimensão q) que leva S^{q-1} (esfera de dimensão $q-1$) sobre f_j^q, e aplica $D^q - S^{q-1}$ homeomorficamente sobre $\sigma_j^q - f_j^q$ (S^{-1} é o conjunto vazio).
(iv) f_j^q intercepta um número finito de conjuntos $(\sigma_i^q - f_i^q)$, $i \in J_q$.
(v) Um subconjunto Y de X é fechado se $Y \cap \sigma_j^q$ é fechado em σ_j^q, $\forall q$ e $\forall j \in J_q$, onde σ_j^q possui a topologia quociente de D^q (via ϕ_j^q).

Notação: Em um CW-complexo X, e^q denotará a célula aberta de dimensão q :

$$e^q = \sigma^q - f^q.$$

Exemplo 1.3.1 *Seja $X = \mathbb{R}$. Podemos dar a $\mathbb{R}$ uma estrutura natural de CW-complexo, onde as 0-células e 1-células são dadas , respectivamente, por $e_n^0 = \{n\}$ e $e_n^1 = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Exemplo 1.3.2 *Seja $X = S^n$ (n-esfera). Uma estrutura de CW-complexo sobre S^n pode ser dada por uma 0-célula e uma n-célula, ou seja, $S^n = e^0 \cup e^n$.*

Definição 1.3.2 *Um* **G-complexo** *é um CW-complexo X munido de uma ação de G em X que permuta as células, isto é, se S representa o conjunto das células de X, então $gS = S$, para todo g em G. Se a ação de G em X permuta livremente as células, dizemos que X é um* **G-complexo livre**.

Observação 1.3.1 *É importante notar que, pelo fato da ação de G em X induzir um homomorfismo dado por*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow Homeo(X) \\ g &\mapsto \varphi_g : X \rightarrow X \end{aligned}$$

tal que $\varphi_g(x) = g \cdot x$, temos que, se σ é uma célula de X, então $g \cdot \sigma$ também é uma célula de X cuja dimensão é a mesma de σ (ou seja, φ_g preserva dimensão).

Teorema 1.3.1 *Se X é um G-complexo livre contrátil, então o complexo de cadeia celular aumentado de X:*

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.
Demonstração. *[4]* ■

1.4 Resoluções Projetivas

Definição 1.4.1 *Considere R um anel com unidade e M um R-módulo à esquerda. Uma resolução de M sobre R, ou uma R-resolução de M, é uma sequência exata de R-módulos*

$$C : \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots ,$$

a qual satisfaz as seguintes condições:
(R1) $C_{-1} = M$
(R2) $C_n = 0, \forall n < -1$

Equivalentemente, podemos escrever esta definição da seguinte forma: uma resolução de M sobre R, ou uma R-resolução de M, é uma sequência exata de R-módulos

$$C : \ldots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

Definição 1.4.2 *A aplicação $\epsilon : C_0 \to M$ é chamada* **aplicação aumentação.** *Se cada C_i é um R-módulo livre, dizemos que a* **resolução** *é* **livre.** *Se cada C_i é um R-módulo projetivo, dizemos que a* **resolução** *é* **projetiva.**

Notação: $\epsilon : C \twoheadrightarrow M$ denotará uma resolução de M.

Proposição 1.4.1 *[4, I.8.2] São equivalentes as seguintes condições para um R-módulo P:*
(i) P é projetivo.
(ii) Toda seqüência exata $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ cinde.
(iii) P é somando direto de um módulo livre.

Proposição 1.4.2 *Dado um R-módulo M sempre existe uma R-resolução livre de M.*

Demonstração. [19] ■

1.5 Coinvariantes e Invariantes

Sejam G um grupo e M um RG-módulo (à esquerda).

Definição 1.5.1 *O* **grupo dos coinvariantes** *de M, o qual denotamos por M_G, é dado por $M_G = M/A$, onde A é o subgrupo aditivo dado por $A =< g \cdot m - m;\ g \in G$ e $m \in M >$.*

Observação 1.5.1 *O nome coinvariantes vem do fato de M_G ser o maior quociente de M no qual G atua trivialmente.*

Proposição 1.5.1 *[4, II.2.1.] $M_G \simeq R \otimes_{RG} M$, onde R é visto como um RG-módulo (à direita) com G-ação trivial.*

Definição 1.5.2 *Seja M um RG-módulo (à esquerda). O* **grupo dos invariantes** *de M, denotado por M^G, é dado por:*

$$M^G = \{m \in M;\ g \cdot m = m,\ \forall g \in G\}.$$

Proposição 1.5.2 *$Hom_{RG}(R, M) \simeq M^G$, onde R é um RG-módulo com G-ação trivial.*

Demonstração. Definindo $\psi : Hom_{RG}(R, M) \to M^G$ por $\psi(f) := f(1)$, temos que ψ é um isomorfismo. ■

Observação 1.5.2 *Todo RG-módulo (à esquerda) M pode ser considerado como um RG-módulo (à direita), definindo a seguinte G-ação em M:*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & M \times G & \to & M \\ & (m, g) & \mapsto & m * g = g^{-1} \cdot m, \quad \forall g \in G, \forall m \in M. \end{array}$$

1.6 A (Co)homologia de um Grupo G

Seja R um anel comutativo com unidade e considere o anel grupo RG.

Antes de definirmos (co)homologia, vamos considerar alguns resultados importantes sobre $\otimes_{RG}$ e Hom_{RG}.

Definição 1.6.1 *Sejam M e N RG-módulos. Então, M e N são naturalmente R-módulos. A* **G-ação diagonal** *, definida em $M \otimes_R N$, é dada por:*

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n$$

Proposição 1.6.1 *Sejam M e N RG-módulos (à esquerda). Temos*

$$M \otimes_{RG} N = (M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A},$$

onde $A =< g \cdot m \otimes g \cdot n - m \otimes n; \forall m \otimes n \in M \otimes_R N, \forall g \in G >$.

Demonstração. Ver [19] ■

Corolário 1.6.1 *$M \otimes_{RG} N \simeq N \otimes_{RG} M$.*

Demonstração. $M \otimes_{RG} N \simeq (M \otimes_R N)_G \simeq (N \otimes_R M)_G = N \otimes_{RG} M$. ■

Sejam M e N RG-módulos (à esquerda), e consideremos $Hom_R(M,N)$.

A ação de G em M e N induz uma ação de G em $Hom_R(M,N)$, dada por

$$\begin{array}{ccc} G \times Hom_R(M,N) & \to & Hom_R(M,N) \\ (g,f) & \mapsto & g \cdot f \end{array}$$

tal que $g \cdot f(x) = gf(g^{-1} \cdot x)$; $g \in G, f \in Hom_R(M,N)$ e $x \in M$.

Observação 1.6.1 *O uso de g^{-1} para definir a ação é necessário devido à contravariância de Hom na primeira variável. Compensamos esta contravariância, convertendo M a um RG-módulo à direita, considerando $m*g = g^{-1} \cdot m$.*

Deste modo, a ação fica:

$$g \cdot f(m) = gf(g^{-1} \cdot m) = gf(m * g).$$

Assim, $Hom_R(M,N)$ será um RG-módulo (à esquerda).

Proposição 1.6.2 $Hom_{RG}(M,N) = Hom_R(M,N)^G$.

Demonstração. Ver [19] ■

Veremos, agora, a definição de (co)homologia de um grupo G, considerando o caso $R = \mathbb{Z}$.

Definição 1.6.2 *Sejam*

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e M um $\mathbb{Z}G$-módulo (à esquerda).

Podemos formar os **complexos de cadeia** *e* **cocadeia**, *respectivamente:*

$$F \otimes_{ZG} M : \cdots \longrightarrow F_n \otimes_{ZG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{ZG} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \otimes_{ZG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_1} F_0 \otimes_{ZG} M \longrightarrow 0$$

$$Hom_{ZG}(F,M): 0 \longrightarrow Hom_{ZG}(F_0,M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{ZG}(F_1,M) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \longrightarrow Hom_{ZG}(F_n,M) \longrightarrow \cdots$$

O **operador bordo** *é dado por* $\overline{\partial}_n := \partial_n \otimes id$ *e, o* **operador cobordo**, *por*

$$\begin{array}{rccc} \delta^n: & Hom_{ZG}(F_n,M) & \to & Hom_{ZG}(F_{n+1},M) \\ & f & \mapsto & \delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1} \end{array}$$

(a) O n-ésimo **grupo de homologia** *de G com coeficientes em M é definido por*

$$H_n(G,M) := H_n(F \otimes_{ZG} M).$$

(b) O n-ésimo **grupo de cohomologia** *de G com coeficientes em M é definido por*

$$H^n(G,M) := H^n(Hom_{ZG}(F,M)).$$

Observação 1.6.2 *Tomando $M = \mathbb{Z}$, com G-ação trivial, temos*

$$H_*(G,\mathbb{Z}) = H_*(F \otimes_{ZG} \mathbb{Z}) \overset{\text{prop.1.6.1}}{=} H_*((F \otimes_Z \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F_G).$$

Proposição 1.6.3 *Dado um $\mathbb{Z}G$-módulo M, temos os isomorfismos:*

$$H_0(G,M) \simeq M_G.$$
$$H^0(G,M) \simeq M^G.$$

Demonstração. *ver [4]* ■

Proposição 1.6.4 ***(Interpretação topológica da (co)homologia de um grupo)*** *Sejam G um grupo, Y um $K(G,1)$-complexo e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então*

$$H_*(G,M) \simeq H_*(Y,\mathcal{M})$$

$$H^*(G, M) \simeq H^*(Y, \mathcal{M}),$$

onde $\mathcal{M}$ é um sistema de coeficientes locais em Y associado ao $\mathbb{Z}G$-módulo M. Em particular se a G-ação em M é trivial então $\mathcal{M} = M$.

Demonstração. ver [19] ■

Exemplo 1.6.1 *Temos que S^1 é um K(ℤ,1)-complexo. Logo*

$$H_i(\mathbb{Z}) \simeq H_i(S^1) \simeq H^i(S^1) \simeq H^i(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \ se \ i = 0, 1; \\ 0, \ se \ i \neq 0, 1. \end{cases}$$

Exemplo 1.6.2 *Temos que T^2 é um K(ℤ ⊕ ℤ,1)-complexo. Logo*

$$H_i(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \simeq H_i(T^2) \simeq H^i(T^2) \simeq H^i(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \ se \ i = 0, 2; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \ se \ i = 1 \ ; \\ 0, \ se \ i \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

1.7 Produto Cup

Sejam M e N dois $\mathbb{Z}G$-módulos. Se $F \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Então $F \otimes F \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}(G \times G)$(ver [4]).

Sejam $f \in Hom_G(F, M)$ e $g \in Hom_G(F, N)$. Definimos $f \times g \in Hom_{G \times G}(F \otimes F, M \otimes N)$ por $(f \times g)(x \otimes y) = (-1)^{pq} f(x) \otimes g(y)$ com $x \in F_p$ e $y \in F_q$.

Sejam G um grupo e $d : G \longrightarrow G \times G$ definida por $d(g) = (g, g)$ (aplicação diagonal)

Definição 1.7.1 *A composta*

$$H^p(G, M) \otimes H^q(G, N) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(G \times G, M \otimes N) \xrightarrow{d^*} H^{p+q}(G, M \otimes N)$$

é chamado de ***produto cup*** *e é denotado por* $\cup$.

Assim dados $u \in H^p(G, M)$ *e* $v \in H^q(G, N)$ *temos* $u \cup v := d^*(u \times v)$

1.8 Fibrados

Definição 1.8.1 *Um fibrado é uma quádrupla* $\xi = (E, p, B, F)$*, onde* E*,* B *e* F *são espaços topológicos e* $p : E \to B$ *é uma aplicação contínua e sobrejetora que satisfaz a condição de trivialidade local descrita abaixo.*

Existe uma cobertura de B *por abertos* U_α*, denominados vizinhanças coordenadas, e associado a cada aberto na cobertura temos um homeomorfismo* $\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$*, o qual chamamos uma aplicação coordenada, tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & U_\alpha \times F \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & U_\alpha \end{tikzcd}$$

ou seja, $\pi_\alpha \circ \phi_\alpha = p$*, onde* π_α *é a projeção sobre* U_α*. Assim, localmente o espaço* E *se parece com um espaço produto. O espaço* E *é chamado espaço total,* B *é chamado espaço base e* F *a fibra. A comutatividade do diagrama anterior significa que* ϕ_α *leva cada fibra* $p^{-1}(b)$ *homeomorficamente sobre a cópia* $\{b\} \times F$ *de* F*, assim a denominação do espaço* F *como fibra se justifica.*

Definição 1.8.2 *A aplicação* p *é chamada aplicação fibrada ou projeção. O conjunto de todos os pares* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ *de vizinhanças coordenadas e suas aplicações coordenadas associadas é chamado uma trivialização local do fibrado. Geralmente letras gregas como* $\xi, \eta, \omega, \cdots$ *são usadas para denotar fibrados. Também é comum denotar um fibrado* $\xi = (E, p, B, F)$ *simplesmente por* $p : E \to B$*.*

Exemplo 1.8.1 *O fibrado produto* $\pi : B \times F \to B$*, onde* π *denota a projeção sobre* B*.*

Exemplo 1.8.2 *Considere um fibrado $\xi = (E, p, B, F)$ e um subconjunto $A \subset B$, então $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ é um fibrado, chamado fibrado restrição de E sobre A, o qual denotamos por $\xi|_A$.*

Exemplo 1.8.3 *Considere dois fibrados $\xi_i = (E_i, p_i, B_i, F_i)$, $i = 1, 2$, então $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ é um fibrado com fibra $F_1 \times F_2$, o qual denotamos por $\xi_1 \times \xi_2$.*

Exemplo 1.8.4 *Considere dois fibrados $\xi_i = (E_i, p_i, B, F_i)$, $i = 1, 2$, com mesmo espaço base B. A restrição do fibrado $\xi_1 \times \xi_2$ sobre a diagonal $\{(b, b) \in B \times B\}$, a qual é homeomorfa a B, é um fibrado chamado soma direta, o qual denotamos por*

$$\xi_1 \oplus \xi_2 = (E_1 \oplus E_2, p_1 \oplus p_2, B, F_1 \oplus F_2).$$

A soma direta de fibrados é também denominada a soma de Whitney.

Exemplo 1.8.5 *Sejam $\xi = (E, p, B, F)$ um fibrado e $f : B^* \to B$ uma aplicação contínua. O fibrado induzido de ξ por f, o qual denotamos por $f^*(\xi)$, tem como espaço base B^* e seu espaço total é definido como sendo o sub-espaço*

$$f^*(E) = \{(b^*, x) \in B^* \times E | f(b^*) = p(x)\}.$$

A aplicação fibrada é dada pela projeção $p^* : f^*(E) \to B^*$, $p^*(b^*, x) = b^*$. O fibrado induzido de ξ por f, $f^*(\xi) = (f^*(E), p^*, B^*, F)$ também é chamado o pullback de ξ por f.

Definição 1.8.3 *Um fibrado $\xi = (E, p, B, F)$ é chamado trivial se ξ é B-isomorfo ao fibrado produto $\pi : B \times F \to B$.*

1.9 G-Fibrados principais

Definição 1.9.1 *Um G-espaço é um espaço de Hausdorff X junto com uma G-ação de um grupo topológico G sobre X.*

Se X é um G-espaço, então o subespaço $Gx = [x] = \{gx \in X | g \in G\}$ é chamado a órbita do ponto x pela ação de G. Denotaremos por X/G o conjunto de todas as órbitas Gx pela ação de G sobre X.

Definição 1.9.2 *Seja $\pi_X : X \to X/G$ a projeção canônica definida por $x \mapsto Gx$. O espaço quociente X/G, munido da topologia quociente induzida por π_X, é chamado o espaço de órbitas de X pela ação de G. Além disso, o G-espaço X determina um fibrado $\xi_X = (X, \pi_X, X/G)$.*

Definição 1.9.3 *Um fibrado $\xi = (X, p, B)$, sobre um espaço base B, é chamado um G-fibrado se ξ é isomorfo a ξ_X, para alguma estrutura de G-espaço sobre X, por um isomorfismo $(id_X, f) : (X, \pi_X, X/G) \to (X, p, B)$, onde $id_X : X \to X$ é a aplicação identidade e $f : X/G \to B$ é um homeomorfismo.*

Definição 1.9.4 *Um G-espaço X é chamado um G-espaço principal se X é um G-espaço livre com uma função transferência $t : X^* \to G$ contínua.*

Um G-fibrado $\xi = (X, p, B)$, sobre um espaço base B, é chamado um G-fibrado principal se o seu espaço total X é um G-espaço principal.

Observação 1.9.1 *Se $\xi = (X, p, B)$ é um G-fibrado principal, sobre um espaço base B, então ξ é um fibrado cuja fibra é o grupo G e usamos a notação $\xi = (X, p, B, G)$. Em particular, se X for um G-espaço principal, $\xi_X = (X, \pi_X, X/G, G)$ é um G-fibrado principal.*

Definição 1.9.5 *Uma função contínua $h : X \to Y$ entre G-espaços X e Y é chamada uma aplicação G-equivariante, ou um G-morfismo, se $h(gx) = gh(x)$, para todo $x \in X$ e para todo $g \in G$. Uma aplicação G-equivariante $h : X \to Y$ induz, por passagem ao quociente, uma função contínua entre os espaços de órbitas*

$$\begin{aligned} \bar{h} : X/G, &\to Y/G \\ Gx = [x] &\mapsto Gh(x) = [h(x)] \end{aligned}$$

chamada aplicação induzida por h, onde Gx e $Gh(x)$ denotam as órbitas dos pontos x e $h(x)$, respectivamente, pela ação de G.

1.10 Espaços Classificantes

Definição 1.10.1 *Dado qualquer grupo topológico G, existe um espaço BG, chamado espaço classificante do grupo G, e um G-fibrado principal $p_G : EG \to$*

BG, chamado o G-fibrado principal universal e denotado por $\omega_G = (EG, p_G, BG)$, onde EG é um espaço contrátil, tal que para qualquer espaço paracompacto Hausdorff B existe uma bijeção entre o conjunto [B,BG] das classes de homotopia de aplicações de B em BG e as classes de isomorfismos de G-fibrados principais sobre B.

Essa bijeção é definida associando-se a cada classe de homotopia em [B,BG], a qual é representada por uma função contínua $f : B \to BG$, o fibrado pullback $f^*(\omega_G)$.

Teorema 1.10.1 *Para cada G-fibrado principal $\xi = (X, p, B, G)$ sobre um espaço paracompacto Hausdorff B, existe uma função contínua $c : B \to BG$ tal que ξ e o fibrado pullback $c^*(\omega_G)$ são G-fibrados principais B-isomorfos. A função contínua $c : B \to BG$ é chamada uma aplicação classificante para o G-fibrado principal ξ.*

Demonstração. Ver [19]

Teorema 1.10.2 *Os fibrados vetoriais constituem uma classe especial de fibrados cujas fibras são espaços vetoriais. Mais precisamente, um fibrado vetorial real n-dimensional é um fibrado $\xi = (E, p, B, R^n)$ tal que para cada $b \in B$, $p^{-1}(b)$ possui uma estrutura de R-espaço vetorial n-dimensional e para uma trivialização local qualquer (U_α, ϕ_α) de ξ, as restrições*

$$\phi_\alpha|_{p^{-1}}(b) : p^{-1}(b) \to \{b\} \times R^n$$

são isomorfismos de espaços vetoriais, para cada $b \in U_\alpha$.

Demonstração. Ver [19]

Na sequência, apresentamos um importante teorema para obtencão dos nossos resultados, cuja técnica da demostração envolve teoria de obstrução.

Teorema 1.10.3 *Dado um fibrado vetorial temos que a classe de Euler é zero se, e somente se, existe uma seção não nula.*

Demonstração. Ver [6]. ■

1.11 Fibrações

Definição 1.11.1 *Dizemos que uma função contínua $p : E \to B$, entre espaços topológicos E e B, tem a propriedade do levantamento de homotopia com relação a um espaço topológico X se, dado uma homotopia $g_t : X \to B$ e uma função contínua $\tilde{g}_0 : X \to E$ que é um levantamento de g_0, isto é, $p \circ \tilde{g}_0 = g_0$, então existe uma homotopia $\tilde{g}_t : X \to E$ que levanta g_t, isto é, $p \circ \tilde{g}_t = g_t$.*

Definição 1.11.2 *Uma fibração é uma função contínua $p : E \to B$ que tem a propriedade do levantamento de homotopia com relação a qualquer espaço topológico X.*

Observação 1.11.1 *Seja $p : E \to B$ a projeção de um fibrado e suponha que o espaço base B seja paracompacto. Então, $p : E \to B$ é uma fibração.*

Observação 1.11.2 *Todo fibrado cujo espaço base é uma variedade será uma fibração. Assim, quando trabalhamos com fibrados sobre variedades é comum o uso do termo fibração no lugar de fibrado.*

1.12 Sequência Espectral

Definição 1.12.1 *Um módulo diferencial bigraduado sobre um anel R, é uma coleção de R-módulos $\{E_{p,q}\}$ (ou $\{E^{p,q}\}$), para todo par de inteiros p e q, junto com uma aplicação R-linear $d : E^{*,*} \to E^{*,*}$, o diferencial, de bigrau $(r, -r+1)$ (ou $d : E_{*,*} \to E_{*,*}$, de bigrau $(-r, r-1)$), para algum inteiro r, satisfazendo $d \circ d = 0$.*

As definições e propriedades apresentadas a seguir, também podem ser obtidas no caso de uma sequência espectral homológica mas consideraremos sequências espectrais do tipo cohomológicas até o final desta seção.

Definição 1.12.2 *O módulo de cohomologia $H(E)$ é o módulo bigraduado*

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{Ker(d : E^{p,q} \to E^{p+r,q-r+1})}{Im(d : E^{p-r,q+r-1} \to E^{p,q})}$$

Definição 1.12.3 *Uma sequência espectral do tipo cohomológico é uma coleção de R-módulos diferenciais bigraduados* $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ *para* $r = 1, 2, \cdots$ *onde os diferenciais têm bigrau* $(r, -r+1)$ *e* $E_{r+1}^{p,q}$ *é isomorfo a* $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$.

Observação 1.12.1 *Embora a sequência espectral esteja indexada para* $r = 1, 2, \cdots$, *essa indexação pode começar em qualquer inteiro.*

Para definir o termo limite de uma sequência espectral cohomológica, para todo $k \geq r$, denotemos por

$$Z_r^{p,q} = Ker(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1})$$

$$B_r^{p,q} = Im(d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q})$$

A condição $d_r \circ d_r = 0$, implica que $B_r \subset Z_r \subset E_r$, e assim $E_{r+1} \cong Z_r/B_r$.

Sejam

$$Z(E_{r+1})^{p,q} = Ker(d_{r+1} : E_{r+1}^{p,q} \to E_{r+1}^{p+r+1,q-r})$$

$$B(E_{r+1})^{p,q} = Im(d_{r+1} : E_{r+1}^{p-r-1,q+r} \to E_{r+1}^{p,q})$$

existem submódulos bigraduados Z_{r+1} e B_{r+1} de Z_r, contendo B_r, tais que $Z(E_{r+1})^{p,q} \cong Z_{r+1}^{p,q}/Z_r^{p,q}$ e $B(E_{r+1})^{p,q} \cong B_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$ para todo p, q. Assim, $B_{r+1} \subset Z_{r+1}$ e temos que

$$B_r \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r$$

Além disso, $E_{r+2} \cong Z(E_{r+1})/B(E_{r+1}) \cong Z_{r+1}/B_{r+1}$. Continuando esse processo por indução, obtemos uma sequência de submódulos, para todo $n \geq r$,

$$B_r \subset B_{r+1} \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots \subset Z_n \subset \cdots \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r$$

com a propriedade que $E_{n+1} \cong Z_n/B_n$.

Definição 1.12.4 *Definimos os módulos bigraduados*

$$Z_\infty = \bigcap_n Z_n \quad e \quad B_\infty = \bigcup_n B_n$$

O módulo bigraduado $E_\infty = Z_\infty / B_\infty$ é chamado o limite da sequência espectral E.

Definição 1.12.5 *Uma sequência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ colapsa no N-ésimo termo se o diferencial $d_r = 0$, para todo $r \geq N$.*

Observação 1.12.2 *Uma consequência imediata do fato de uma sequência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ colapsar no N-ésimo termo,é que $E_N^{*,*} \cong E_{N+1}^{*,*} \cong \cdots \cong E_\infty^{*,*}$.*

Definição 1.12.6 *Uma filtração decrescente F sobre um R-módulo A, é uma família de submódulos $\{F^p(A)\}$, com $p \in \mathbb{Z}$, tal que*

$$\cdots \subset F^{p+1}(A) \subset F^p(A) \subset F^{p-1}(A) \subset \cdots \subset A$$

Definição 1.12.7 *Dada uma filtração decrescente F sobre um R-módulo A, o módulo graduado associado $E_0^*(A)$ é dado por*

$$E_0^p(A) = F^p(A)/F^{p+1}(A).$$

Definição 1.12.8 *Se H^* é um R-módulo graduado e se F é uma filtração sobre H^*,então $F^p(H^n) = F^p(H^*) \cap H^n \subset F^{p-1}(H^*) \cap H^n = F^{p-1}(H^n)$ e o módulo bigraduado associado $E_0^{*,*}$ é dado por*

$$E_0^{p,q}(H^*, F) = F^p(H^{p+q}) = F^{p+1}(H^{p+q}).$$

Definição 1.12.9 *Uma sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ converge para um R-módulo graduado H^*, se existe uma filtração F sobre H^* tal que*

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F),$$

onde $E_\infty^{*,*}$ é o termo limite da sequência espectral.

Definição 1.12.10 *Uma sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ é uma sequência espectral do primeiro quadrante, se existe r tal que $E_r^{p,q} = 0$, para $p < 0$ ou $q < 0$.*

Definição 1.12.11 *(A Sequência Espectral Cohomológica de Leray-Serre). Seja R um anel comutativo com unidade. Dada uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ onde B é conexo por caminhos, existe uma sequência espectral do primeiro quadrante $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, com*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathrm{H}^q(F; R)),$$

a cohomologia de B com coeficientes locais na cohomologia de F, a fibra de p, e convergindo para $H^*(E; R)$. Além disso, essa sequência é natural com relação a aplicações entre fibrações que preservem fibras.

1.13 Produto semi-direto

Considere H e Q dois grupos e $\theta : Q \to Aut(H)$ um homomorfismo de grupos.

Definição 1.13.1 *O produto **semi-direto** $H \rtimes_\theta Q$ é definido como o conjunto $\{(h, q) \mid h \in H, q \in Q\}$ com a operação de grupos $(h, q)(h', q') = (h\theta(q)(h'), qq')$.*

Observação 1.13.1 *O elemento inverso de (h, q) é $(\theta(q^{-1})(h^{-1}), q^{-1})$.*

Considere $G = H \rtimes Q$, existem monomorfismos canônicos $H \to G$ e $Q \to G$ definidos por

$$\begin{cases} h \to (h, 1_Q) & h \in H; \\ q \to (1_H, q) & q \in Q. \end{cases}$$

onde 1_H(resp. 1_Q) é o elemento identidade de H(resp. Q).

Estes monomorfismos são naturais logo podemos tratar H e Q como subgrupos de G por estas inclusões.

Teorema 1.13.1 *Seja $G = H \rtimes Q$, então:*

a) H é subgrupo normal de G

b) $HQ = G$

c) $H \cap Q = \{1_G\}$

Demonstração. Seja $p : G \to Q$ a projeção de finida por $p(h, q) = q$. Então p é um homomorfismo de kernel H, logo H é um subgrupo normal de G.

Todo $(h, q) \in G$ pode ser escrito como $(h, 1_Q)(1_H, q)$, portanto $HQ = G$.

Se $(h, q) \in H \cap Q \Longrightarrow \begin{cases} (h, q) \in H; \\ (h, q) \in Q. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (h, q) = (h, 1_Q); \\ (h, q) = (1_H, q). \end{cases} \Longrightarrow (h, q) = (1_H, 1_Q) = 1_G$

■

Capítulo

2

Cohomologia de Grupos Finitos

Neste capítulo apresentamos a cohomologia de um grupo finito e como tal cohomologia se relaciona diretamente com a cohomologia dos espaços de forma esférica. Mais especificamente, na seção 2.3 apresentamos o anel de cohomologia módulo p dos grupos períodicos finitos.

2.1 Grupos atuando livremente em esferas

Nesta seção apresentamos algumas propriedades interessantes da ação livre de um grupo finito em uma esfera.

Proposição 2.1.1 *Sejam X um CW-complexo compacto e G um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de X. Se a ação de G em X é livre, então G é finito.*

Demonstração. Seja X/G o espaço de órbitas de X. Temos que

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X/G \\ & x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

é recobrimento.

Agora, dado $\overline{x}_0 \in X/G$, temos

$$\begin{aligned} p^{-1}(\overline{x}_0) &= \{x \in X;\ p(x) = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ \overline{x} = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ x \in G(x_0)\} \\ &= G(x_0). \end{aligned}$$

Como a ação de G em X é livre, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ está em correspondência 1-1 com G. Além disso, a fibra $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é fechada e discreta e sendo X compacto segue que $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é um conjunto finito. Portanto G é finito. ■

Proposição 2.1.2 *O grupo $\mathbb{Z}_2$ é o único grupo não trivial que atua livremente em uma esfera de dimensão par S^{2k}.*

Demonstração. Sejam G um grupo atuando livremente em S^{2k} e $f, g \neq id$.

Como a ação é livre, temos que f não tem pontos fixos e ainda, como f é um homeomorfismo, temos $f \circ f^{-1} = id$. Portanto $\deg(f).\deg(f^{-1})$=1 e assim $\deg(f) = \pm 1$. Mais ainda, $\deg(f) = -1$, visto que se $\deg(f) = 1$, então o número de Lefschetz

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k tr(f_k) \\ &= \sum_{k=0}^{2k} (-1)^k tr(f_k) \\ &= (-1)^0 tr(f_0) + (-1)^{2k} tr(f_{2k}) \\ &= 1 \deg(f) + (-1)^{2k} \deg(f) \\ &= 1 + (-1)^{2k} \neq 0. \end{aligned}$$

pois $S^{2k-1} = e^0 \cup e^{2k-1}$, o que implica que f tem pontos fixos .

Agora, $\deg(f \circ f) = \deg(f).\deg(f) = \deg(f^2) = 1$ ou seja, $\Lambda(f^2) \neq 0$ e portanto f^2 tem ponto fixo.

Como a ação é livre segue que $f^2 = id$. Analogamente $g^2 = id$.

Assim, se $\deg(f \circ g) = 1$ então $\Lambda(f \circ g) \neq 0$ e assim $f \circ g = id$, contudo $f^2 = id = g^2$, concluímos então que $f = g^{-1} = f^{-1} = g$. Logo $f = g$ e assim $G \approx \mathbb{Z}_2$. ■

Observação 2.1.1 Segue da proposição anterior que se G é um grupo não trivial, $G \neq \mathbb{Z}_2$, atuando livremente em uma esfera S^m então m é ímpar.

Proposição 2.1.3 *Seja X um G-complexo livre homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar S^{2k-1}. Então a ação de G sobre $H_{2k-1}(X) \simeq \mathbb{Z}$ é trivial.*

Demonstração. Ver [19]. ■

Proposição 2.1.4 *Seja G um grupo finito agindo livremente sobre a esfera S^n de dimensão n. A fim de obter uma resolução para o grupo G é suficiente obter uma decomposição celular G-equivariante para S^n.*

Demonstração. Ver [18].

Como consequência obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.1.1 *Seja G um grupo finito agindo livremente sobre a esfera S^n de dimensão n. Então $H^l(S^n/G; \mathbb{Z}_p) = H^l(G; \mathbb{Z}_p)$ para $l \leq n$.*

2.2 Grupos com Cohomologia Periódica

Nesta seção apresentamos um estudo sobre a cohomologia de grupos periódicos finitos que será de fundamental importância para os próximos capítulos. Particularmente, a teoria de ação de grupos finitos em esferas está intimamente relacionada com a

Teorema 2.2.1 *Seja X um G-complexo livre homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar S^{2k-1}. Considere o complexo de cadeia celular aumentado de X, $C_*(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$. Então, a sequência*

$$\cdots \to C_{2k-1}(X) \to \cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{n \circ \varepsilon} C_{2k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \to C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

onde $n : \mathbb{Z} = H_{2k-1}(X) \to C_{2k-1}(X)$ *é a inclusão, é uma resolução livre de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}G$ *que é periódica de período* $2k$.

Demonstração. Ver [19]. ■

Exemplo 2.2.1 *Se* $G =< t >\simeq \mathbb{Z}_n$ *é um grupo cíclico finito de ordem n, então:*

$$H_i(G;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } i = 0; \\ \mathbb{Z}_n, \text{ se } \ i \text{ é ímpar;} \\ 0, \text{ se } i \text{ é par.} \end{cases} \qquad e \quad H^i(G;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } i = 0; \\ \mathbb{Z}_n, \text{ se } \ i \text{ é par;} \\ 0, \text{ se } \ i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Definição 2.2.1 Um grupo finito G tem **cohomologia periódica**, ou seja, G é dito periódico de período k se $H^i(G, M) \cong H^{i+k}(G, M)$ para todo $i \geq 1$.

Proposição 2.2.1 [1, Lema 6.2, cap. IV] *Se* G *é um grupo finito que atua livremente em um CW-complexo* X *homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar* S^{2k-1}*, então* G *tem cohomologia periódica de período* $2k$.

2.3 Anel de Cohomologia de Grupos Periódicos

Nesta seção usamos [1] como principal referência.

Teorema 2.3.1 *Seja* $H \subset G$ *um subgrupo normal e considere a sobrejeção induzida*

$$B_p : B_G \to B_{G/H}.$$

Existe uma sequência espectral convergindo para $H^*(G; A)$ *para coeficientes sem torção* A *com* $E_2^{i,j}$*-termo* $H^i(G/H; H^i_j(H; A))$*. Esta sequência é a sequência espectral de Serre chamada também de sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre.*

Demonstração. Ver [1]

Definição 2.3.1 *Dados $N \triangleleft G$ e $\pi : G \to G/N$. Dizemos que $N \overset{\triangleleft}{\to} G \overset{\pi}{\to} G/N$ é uma extensão central.*

Lema 2.3.1 *Considere uma extensão central $\mathbb{Z}_p \overset{\triangleleft}{\to} E \overset{\pi}{\to} G$ e a fibração dos espaços classificantes*

$$B_{\mathbb{Z}_p} \overset{j}{\to} B_E \overset{B_\pi}{\to} B_G. \qquad (\star)$$

Então existe um n finito tal que $E_n = E\infty$ na sequência espectral da fibração $\star$.

Demonstração. A aplicação de Frobenius associada a inclusão $\mathbb{Z} \hookrightarrow E$ dá origem a um homomorfismo $\varphi : E \to \mathbb{Z}_p \wr S_{|G|}$ (produto wreath, para mais detalhes ver [1])e assim $\varphi^*(b \otimes \cdots \otimes b)$ $(|G| - vezes)$ é não nula e se restringe a $b^{|G|}$ em $H^*(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ pois $\mathbb{Z}_p$ é central em E. Logo a classe $b^{|G|}$ em $E_2^{0,2|G|}$ é um ciclo infinito na sequência espectral. Assim $E_2 = \mathbb{Z}_p[b^{|G|}] \otimes (E_2^{*,0} \otimes \cdots \otimes E_2^{*,2|G|-1})$ e por indução temos que $E_{2|G|} = E_\infty$ ■

A sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre para $\star$ tem E_2-termo $H^*(G; \mathbb{Z}_p) \otimes H^*(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ e, existe uma aplicação da sequência espectral de Serre da fibração

$$B_{\mathbb{Z}_p} \overset{j}{\to} E(B_E) \overset{B_\pi}{\to} (B_G)$$

com E_2-termo $H^*(K(\mathbb{Z}_p, 2); \mathbb{Z}_p) \otimes H^*(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ para a sequência espectral da extensão devido a naturalidade da sequência espectral de Serre e da comutatividade do diagrama de fibrações

$$\begin{tikzcd}
B_{\mathbb{Z}_p} \arrow[r, "="] \arrow[d, "j"'] & B_{\mathbb{Z}_p} \arrow[d, "j"] \\
B_E \arrow[r, "E(k)"] \arrow[d, "B_\pi"'] & E(B_{\mathbb{Z}_p}) \arrow[d] \\
B_G \arrow[r, "k"] & B(B_{\mathbb{Z}_p})
\end{tikzcd}$$

Em particular a aplicação é a identidade em $H^*(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ e é a aplicação

$$k^* : H^*(K(\mathbb{Z}_p, 2); \mathbb{Z}_p) \to H^*(G; \mathbb{Z}_p).$$

Essa aplicação também comuta com os diferenciais, assim como os produtos cup devido à naturalidade e consequentemente os diferenciais na sequência espectral de $K(\mathbb{Z}_p, 2)$ implicam em diferenciais na sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre da extensão central.

Na sequência espectral de $K(\mathbb{Z}_p, 2)$ os diferenciais são dados por $d_2(e_1) = \iota_2$ então $d_3(b) = \beta(\iota_2)$. Depois disso os diferenciais são dados por $d_{2p^i+1}(b^{p^i}) = P^{p^{i-1}}.P^{p^{i-2}} \cdots P^1\beta(\iota_2)$, onde β é o Bockstein e P é um polinômio. Quando $p = 2$ estes são todos os diferenciais.

Se p é ímpar então existem também os seguintes diferenciais $d_{2p-1}(b^{p-1}\beta(\iota_2)) = \beta P^1\beta(\iota_2)$ e mais geralmente $d_{2p^i(p-1)+1}(b^{p^i(p-1)}d_{2p^i+1}b^{p^i}) = \beta d_{p^{i+1}+1}(b^{p^{i+1}})$.

Teorema 2.3.2 [1, Corolário 6.8 cap IV] *Se G é um grupo periódico então $H^*(G; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[b^i] \otimes E(e_{2i-1})$ para i ímpar , onde i divide (p -1).*

Observação 2.3.1 No teorema anterior $\mathbb{Z}_p[b^i]$ é uma álgebra polinomial com gerador $2i$-dimensional e $E(e_{2i-1})$ é uma álgebra exterior com gerador 1-dimensional.

Capítulo

3

Grupos Peródicos Finitos e $\mathbb{Z}_p$-ações Livres sobre Formas Espaciais Esféricas

Neste capítulo nós apresentamos uma caracterização das formas espaciais esféricas que admitem $\mathbb{Z}_p$-ações livres (ver Teorema 3.1.1). A existência de tais $\mathbb{Z}_p$-espaços livres está diretamente relacionada com os subgrupos de índice primo dos grupos periódicos finitos. Na seção 3.2, nosso objetivo foi assegurar a existência de tais subgrupos, e desta forma, garantir a existência de espaços de forma esférica que admitem uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$.

3.1 $\mathbb{Z}_p$-ações Livres sobre Formas Espaciais Esféricas

Proposição 3.1.1 *Seja Σ^m um CW-complexo m-dimensional com o mesmo tipo de homotopia da m-esfera. Dada uma ação celular livre γ de um grupo finito G em Σ^m, seja $\Sigma^m/\gamma(G)$ a forma espacial esferica homotópica m-dimensional, então $\pi_1(\Sigma^m/\gamma(G)) \simeq G$.*

Demonstração. Temos que $\pi : \Sigma^m \to \Sigma^m/\gamma(G)$ é um recobrimento universal. Da Proposição 1.2.5 temos $G = A(\Sigma^m, \pi)$ e assim pela Proposição 1.2.6 temos $\pi_1(\Sigma^m/\gamma(G)) \simeq A(\Sigma^m, \pi)$.

Portanto $\pi_1(\Sigma^m/\gamma(G)) \simeq G$. ■

Considere a tabela 3.1 de todos os grupos periódicos finitos, onde:

Tipo	Definição	Condição
I	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi \mathbb{Z}_b$	$(a,b) = 1$
II	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^t})$	$(a,b) = (ab,2) = 1$
III	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_b \times T_i)$	$(a,b) = (ab,6) = 1$
IV	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_b \times O_i^*)$	$(a,b) = (ab,6) = 1$
V	$(\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi \mathbb{Z}_b) \times SL_2(\mathbb{F}_r)$	$(a,b) = (ab, r(r^2-1)) = 1$
VI	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_b \times TL_2(\mathbb{F}_q))$	$(a,b) = (ab, q(q^2-1)) = 1$

Tabela 3.1: Grupos Periódicos Finitos

• $\phi : G \to Aut(H)$ e $H \rtimes_\phi G$ é o conjunto $H \times G$ com o produto definido por $(h,g)(h',g') = (h\phi(g)(h'), gg')$.

• $t \geq 3, \quad i \geq 1$ e r e q são números primos tais que $r \geq 3, \quad q \geq 5$.

• os grupos $Q_{2^t} = \langle x, y : x^{2^{t-1}} = y^2, \quad yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ são os quaterniônicos generalizados e os grupos T_i e O_i^* são o tetraedral binário e o octaedral binário generalizados.

Teorema 3.1.1 *Se uma forma espacial esférica homotópica $\Sigma^m/\eta(H)$ admite uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$, então H é um subgrupo de índice p de algum grupo G da tabela 3.1. Reciprocamente, se H é um subgrupo normal de índice p de algum grupo G da tabela 3.1, então existe uma forma espacial esférica homotópica com grupo fundamental H e ação livre de $\mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Suponha uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ em $\Sigma^m/\eta(H) = X$. Então temos o recobrimento $q : X \to X/\mathbb{Z}_p$ à p-folhas. Assim $[\pi_1(X/\mathbb{Z}_p) : q_*(\pi_1(X))] = p$. Por

outro lado, segue da Proposição 3.1.1 que

$$\pi_1(X) = \pi_1(\Sigma^m/\eta(H)) \simeq H.$$

Como $q_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X/\mathbb{Z}_p)$ é injetor, então $im(q_*) = q_*(\pi_1(X)) \simeq \pi_1(X) \simeq H$. Logo, $[\pi_1(X/\mathbb{Z}_p) : H] = p$.

Agora, considerando $G = \pi_1(X/\mathbb{Z}_p)$, basta mostrar então, que G é um dos grupos da tabela 3.1.

Considere $\Pi : \Sigma^m \to \Sigma^m/\eta(H) = X$, e a seguinte composição

$$\Sigma^m \xrightarrow{\Pi} \Sigma^m/\eta(H) = X \xrightarrow{q} X/\mathbb{Z}_p.$$

Assim temos o seguinte recobrimento $q \circ \Pi : \Sigma^m \to X/\mathbb{Z}_p$ com fibra G (ver [15, Corolário 2, pag. 169] e [15, Proposição 11, pag. 171]). Isto significa que $(\Sigma^m/\eta(H))/\mathbb{Z}_p = \Sigma^m/\gamma(G)$ para algum γ. Portanto, G deve ser um dos grupos da tabela 3.1.

Reciprocamente, suponha $H \lhd G$ subgrupo normal de índice p, para algum H e G na tabela 3.1.

Como G é um grupo da tabela 3.1, existe uma ação livre γ de G sobre Σ^m e portanto $q : \Sigma^m \to \Sigma^m/\gamma(G)$ é um G-fibrado principal.

Assim a restrição γ_H de γ em H define uma ação livre de H sobre Σ^m e $\pi_1(\Sigma^m/\gamma_H(H)) \simeq H$. Logo, de [17, Lema 1.2.11] existe uma $\mathbb{Z}_p \simeq G/H$- ação livre sobre $\Sigma^m/\gamma_H(H)$. ■

Proposição 3.1.2 *Sejam G e H dois grupos da tabela 3.1 de período pn e assuma que H é um subgrupo de G de índice p. Então o homomorfismo induzido B_i^{pn} : $H^{pn}(BG, \mathbb{Z}) \to H^{pn}(BH, \mathbb{Z})$ é sobrejetor.*

Demonstração. A inclusão $i : H \hookrightarrow G$ induz um homomorfismo $(i)^{pn}$: $H^{pn}(G, \mathbb{Z}) \to H^{pn}(H, \mathbb{Z})$. Temos o homomorfismo transfer $tr_H^G : H^{pn}(H, \mathbb{Z}) \to H^{pn}(G, \mathbb{Z})$ e a composição $tr_H^G \circ i^{pn}$ é uma multiplicação por p.

$$\begin{tikzcd}
tr_H^G \circ i^{pn} : \mathbb{Z}_{|G|} \arrow[rr, "\times p"] \arrow[dr, "i^{pn}"'] & & \mathbb{Z}_{|G|} \\
& \mathbb{Z}_{|H|} \arrow[ur, "tr_H^G"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $H^{pn}(G,\mathbb{Z})$ e $H^{pn}(H,\mathbb{Z})$ são grupos cíclicos de ordem $|G|$ e $|H|$ respectivamente e $|G| = p|H|$, temos $Im(tr_H^G \circ i^{pn}) = \mathbb{Z}_{|G|}$. Logo $(i)^{pn}$ é sobrejetora. ■

3.2 Subgrupos de Índice Primo

Nesta seção vamos calcular alguns subgrupos de índice p primo de grupos periódicos finitos.

Tipo I

Considere o grupo $\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi \mathbb{Z}_b$ do Tipo I da Tabela 3.1. No nosso caso devemos encontrar subgrupos normais de índice primo p deste grupo.

Seja b um número da forma $b = p.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n}$ com p_i primo, $(a,b) = 1$, $p_i \neq p_j$ e $p \neq p_j$ $\forall i,j$.

Logo $\mathbb{Z}_b$ pode ser escrito da forma $\mathbb{Z}_b = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}}$ (Teorema Chinês do Resto para anéis).

Assim $\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi \mathbb{Z}_b = \mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}})$, com ordem $ab = a.p.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n}$.

Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}}) &\to \mathbb{Z}_p \\ (a_1, (p', p_1, p_2, \cdots, p_n)) &\longrightarrow p' \end{aligned}$$

onde $a_1 \in \mathbb{Z}_a$, $p' \in \mathbb{Z}_p$ e $p_i \in \mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}$.

Temos que f é um homomorfismo de kernel $\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\{1_{\mathbb{Z}_p}\} \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}})$ que é isomorfo a $\mathbb{Z}_a \rtimes_\psi (\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}})$, onde $\psi = \phi \circ i$ com $i : \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}}$ definida por $(p_1, p_2, \cdots, p_n) \longrightarrow (1_{\mathbb{Z}_p}, p_1, p_2, \cdots, p_n)$.

Tipo	Subgrupo	Condição
I	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\psi \mathbb{Z}_{b_p}$	$(a,b)=1;\ \ (p,b_p)=1$
II	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\psi (\mathbb{Z}_{b_p} \times Q_{2^t})$	$(a,b)=(ab,2)=1;\ \ (p,b_p)=1$
III	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\psi (\mathbb{Z}_{b_p} \times T_i)$	$(a,b)=(ab,6)=1;\ \ (p,b_p)=1$
IV	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\psi (\mathbb{Z}_{b_p} \times O_i^*)$	$(a,b)=(ab,6)=1;\ \ (p,b_p)=1$
V	$(\mathbb{Z}_a \rtimes_\psi \mathbb{Z}_{b_p}) \times SL_2(\mathbb{F}_r)$	$(a,b)=(ab,r(r^2-1))=1;\ \ (p,b_p)=1$
VI	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\psi (\mathbb{Z}_{b_p} \times TL_2(\mathbb{F}_q))$	$(a,b)=(ab,q(q^2-1))=1;\ \ (p,b_p)=1$

Tabela 3.2: Grupos de Índice Primo

Portanto $\mathbb{Z}_a \rtimes_\psi (\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}})$ tem ordem $a.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n}$, logo é um subgrupo normal de $\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}})$ de índice p.

Tipo II

Seja $\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^t})$ um grupo do Tipo II da Tabela 3.1.

Considerando $b = p.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n}$, pelo mesmo raciocínio do Tipo I temos que $\mathbb{Z}_a \rtimes_\psi (\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}} \times Q_{2^t})$ tem ordem $2^t.a.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n}$, logo é um subgrupo normal de $\mathbb{Z}_a \rtimes_\phi (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}} \times Q_{2^t})$ de índice p.

Observação 3.2.1 *Concluimos que o método acima pode ser aplicado para todos os tipos da tabela 3.1. Temos então a tabela 3.2 de subgrupos normais onde* $b_p = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n}$ *ou seja* $b = p.b_p$, *então* $\mathbb{Z}_{b_p} = \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}}$.

Observação 3.2.2 *Assim, dado um espaço de forma esférica* $X = \Sigma^{2n-1}/\gamma(H)$, *onde* H *é subgrupo da tabela 3.2, segue da Proposição 3.1.1 que* $\pi_1(\Sigma^{2n-1}/\gamma(H)) \simeq H$ *e portanto* $\pi_1(X)$ *não tem elementos de ordem* p.

Capítulo

4

Classes de Chern

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre as classes de Chern e sua relação com o conjunto de coincidências $A(f)$. Para maiores informações sobre classes de Chern ver [12]

4.1 As Classes de Chern

Definição 4.1.1 *Dado um fibrado vetorial complexo V sobre um espaço topológico X, a classe de Chern de V é uma sequência de elementos da cohomologia de X satisfazendo os seguintes axiomas:*

1. $c_0(V) = 1 \ \forall V$.

2. Se $f : Y \to X$ é contínua e f^*V é o pullback do fibrado vetorial então $c_k(f^*V) = f^*(c_k(V))$,

onde $c_k(V)$ é a k-ésima classe de Chern de V, que é um elemento de $H^{2k}(X, \mathbb{Z})$.

3. Se $W \to X$ é outro fibrado vetorial complexo sobre X, então a classe de Chern da soma de Whitney $V \oplus W$ é dada por

$$c(V \oplus W) = c(V) \cup c(W) \qquad (classe \quad total)$$

ou seja

$$c_k(V \oplus W) = \sum_{i=0}^{k} c_i(V) \cup c_{k-i}(W)$$

Observação 4.1.1 *Pela definição das classes de Chern temos que*

1. $c_1(V \oplus W) = c_1(V) + c_1(W)$.

2. $c_{p-1}(V \oplus W) = \sum_{i=0}^{p-1} c_{p-1-i}(V) \cup c_i(W)$.

3. $c_i(V \otimes W) = c_i(V) + c_i(W)$.

Agora, considere a seguinte formulação geral do Teorema de Borsuk - Ulam :

Definição 4.1.2 *Sejam X, Y dois espaços topológicos , G um grupo finito agindo livremente em X e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto de G - coincidência de f se a aplicação f leva cada órbita Gx em um único ponto . O conjunto de todos os pontos de G - coincidência de f é denotado de $A(f)$. Dizemos que o Teorema de Borsuk-Ulam é válido para a terna (X, G, Y) se $A(f) \neq \emptyset$, para toda função contínua $f : X \to Y$.*

A técnica apresentada na sequência mostra que a validade do Teorema de Borsuk-Ulam para a terna $(M, G, \mathbb{R}^m)$, onde M é uma variedade topológica, é equivalente a analisar zeros de seções contínuas em fibrados vetoriais especiais.

Definição 4.1.3 *Seja G um grupo e seja R um anel comutativo com unidade. Então $I_R(G)$ denota o ideal aumentação do grupo anel $R[G]$, isto é, o núcleo do homomorfismo aumentação $I_R(G) = kernel(arg)$.*

$$arg : R[G] \to R$$

$$a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n \to a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Lema 4.1.1 *Sejam M uma variedade topológica e G um grupo finito agindo livremente em M. Dada uma aplicação $f : M \to \mathbb{R}^m$, definimos o conjunto de coincidências*

$$A(f) = \{x \in X \mid f(x) = f(gx) \forall g \in G\}$$

Então toda seção contínua do fibrado vetorial $\xi_M : M \times_G I_{\mathbb{R}^m}(G) \to M/G$ possui um zero se, e somente se, $A(f) \neq \emptyset$

Demonstração. Temos que toda aplicação contínua $f : M \to \mathbb{R}^m$ dá origem a uma seção $\hat{s}(f) : M/G \to M \times_G \mathbb{R}^m[G]$ do fibrado vetorial $\hat{\xi} : M \times_G \mathbb{R}^m[G] \to M/G$ definida pela fórmula

$$\hat{s}(f)(xG) = (x, \sum_{g \in G} f(xg^{-1})g)G$$

Observe que $\hat{\xi} = \xi_M \oplus \varepsilon^m_{\mathbb{R}}$ onde $\varepsilon^m_{\mathbb{R}}$ é um fibrado vetorial real m-dimensional trivial. Assim a projeção $\pi : M \times_G \mathbb{R}^m[G] \to M \times_G I_{\mathbb{R}^m}(G)$ está bem definida.

Agora defina uma seção contínua $s(f) : M/G \to M \times_G I_{\mathbb{R}^m}(G)$ de ξ_M pela fórmula $s(f) = \pi \circ \hat{s}(f)$. Portanto $s(f)(xG) = 0$ se, e somente se, f leva toda a órbita de $x \in M$ em um único ponto.

Reciprocamente, dada uma seção contínua s de ξ_M, ela define uma aplicação G-equivariante $\bar{s} : M \to M \times \mathbb{R}^m[G]$ que, pela sua equivariância deve ser da forma

$$\bar{s}(x) = (x, \sum_{g \in G} f(xg^{-1})g)$$

para $f : M \to \mathbb{R}^m$, e o lema segue. ■

Em virtude do importante Teorema 1.10.3, vamos analisar a classe de Euler e, consequentemente, a classe de Chern de determinados fibrados vetoriais.

Considere o fibrado vetorial complexo $\eta : E\mathbb{Z}_p \times_{\mathbb{Z}_p} I_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_p) \to B\mathbb{Z}_p$. Vamos calcular a classe de Euler (mod p) de η, a qual coincide com a sua classe de Chern $c_{p-1}(\eta)$.

Temos que

$$H^*(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = \Lambda_{\mathbb{Z}_p}(y) \otimes \mathbb{Z}_p[x]$$

onde $\Lambda_{\mathbb{Z}_p}(y)$ é uma álgebra exterior com gerador 1-dimensional e $\mathbb{Z}_p[x]$ é uma álgebra polinomial com gerador 2-dimensional.

Lema 4.1.2 $e(\eta) = (-1)x^{p-1}$

Demonstração. A ação de $\mathbb{Z}_p$ em $\mathbb{C}$ pela rotação de $\frac{2\pi}{p}$ induz em $\mathbb{C}$ um $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_p]$-módulo que vamos denotar por L.

Seja $i : B\mathbb{Z}_p \to B\mathbb{Z}_p$ a identidade. Considere λ o fibrado vetorial complexo 1-dimensional obtido do seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd} E(\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & S^\infty \times_{\mathbb{Z}_p} L \arrow[d] \\ B\mathbb{Z}_p \arrow[r, "i"] & B\mathbb{Z}_p \end{tikzcd}$$

Temos que $c_1(\lambda) = x$.

Considere η' o fibrado vetorial obtido do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} E(\eta') \arrow[r] \arrow[d, "\eta'"'] & S^\infty \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}[\mathbb{Z}_p] \arrow[d] \\ B\mathbb{Z}_p \arrow[r, "i"] & B\mathbb{Z}_p \end{tikzcd}$$

Segue do isomorfismo $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_p] \cong L \oplus L^2 \oplus \cdots \oplus L^p$, onde $L^j = L \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{Z}_p]} L \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{Z}_p]} \cdots \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{Z}_p]} L$ (j-vezes), que $\eta' \cong \lambda \oplus \lambda^2 \oplus \cdots \oplus \lambda^p$, onde $\lambda^j = \lambda \otimes_{\mathbb{C}} \lambda \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} \lambda$ (j-vezes).

Observe que λ^p é um fibrado complexo 1-dimensional trivial.

Temos que $\eta \oplus \varepsilon^1_{\mathbb{C}} = \eta'$ onde $\varepsilon^1_{\mathbb{C}}$ é um fibrado vetorial complexo 1-dimensional trivial.

Logo temos

$$\eta \oplus \varepsilon^1_{\mathbb{C}} \cong \lambda \oplus \cdots \oplus \lambda^p \cong \lambda \oplus (\lambda \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \oplus \cdots \oplus (\lambda \otimes \cdots \otimes \lambda)$$

Pela Observação 4.1.1 temos que $c_k(\lambda^j) = 0$, $\forall k \geq 2$ e $c_1(\lambda^j) = jc_1(\lambda)$.

Considere agora $\mu^j = \lambda^j \oplus \lambda^{j+1} \oplus \cdots \oplus \lambda^p$.

Assim,

$$\begin{aligned} c_r(\mu^j) &= c_r(\lambda^j \oplus \mu^{j+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} c_{r-i}(\lambda^j) \cup c_i(\mu^{j+1}) \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + c_1(\lambda^j) \cup c_{r-1}(\mu^{j+1}) + c_0(\lambda^j) \cup c_r(\mu^{j+1}) \\ &= c_1(\lambda^j) \cup c_{r-1}(\mu^{j+1}) + c_r(\mu^{j+1}) \end{aligned}$$

Em particular, $c_{p-k}(\mu^j) = c_1(\lambda^j) \cup c_{p-k-1}(\mu^{j+1}) + c_{p-k}(\mu^{j+1})$ e observe que $c_{p-k}(\mu^j) = 0$, $\forall j \geq k$.

De fato, primeiramente temos que $c_{p-k}(\mu^p) = c_{p-k}(\lambda^p) = 0$ pois $p - k > 1$.

Temos ainda $c_{p-k-(p-j)}(\mu^{j+(p-j)}) = c_{j-k}(\mu^p) = \begin{cases} 0(mod\ p) & j-k=1; \\ c_{j-k}(\lambda^p) = 0 & j-k \geq 2. \end{cases}$

Logo

$$\begin{aligned} c_{p-1}(\mu^1) &= c_1(\lambda^1) \cup c_{p-2}(\mu^2) + c_{p-1}(\mu^2) \\ &= c_1(\lambda^1) \cup (c_1(\lambda^2) \cup c_{p-3}(\mu^3) + c_{p-2}(\mu^3)) \\ &= c_1(\lambda^1) \cup (c_1(\lambda^2) \cup (c_1(\lambda^3) \cup c_{p-4}(\mu^4) + c_{p-3}(\mu^4))) \\ &. \\ &. \\ &= c_1(\lambda^1) \cup c_1(\lambda^2) \cup c_1(\lambda^3) \cup \cdots \cup c_1(\lambda^{p-2}) \cup c_1(\lambda^{p-1}). \end{aligned}$$

Agora como $c_1(\lambda) = x$ então $c_{p-1}(\mu^1) = x.2x.3x \cdots (p-2)x.(p-1)x = (p-1)!\ x^{p-1}$.

O teorema de Wilson afirma que $(p-1)! = -1$ (mod p). Assim a classe de

Euler (mod p) do fibrado η é $e(\eta) = c_{p-1}(\eta) = c_{p-1}(\eta \oplus \varepsilon^1_{\mathbb{C}}) = c_{p-1}(\mu^1) = (-1)x^{p-1}$.

■

Observação 4.1.2 *Pela propriedade da universalidade existe o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} M \times_{\mathbb{Z}_p} I_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, "\xi_M"'] & E\mathbb{Z}_p \times_{\mathbb{Z}_p} I_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "\xi"] \\ M/\mathbb{Z}_p \arrow[r, "\varphi"] & B\mathbb{Z}_p \end{tikzcd}$$

Temos que $\eta : E\mathbb{Z}_p \times_{\mathbb{Z}_p} I_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_p) \to B\mathbb{Z}_p$, *logo do isomorfismo* $I_{\mathbb{C}^m} \cong I_{\mathbb{C}} \oplus I_{\mathbb{C}} \oplus \cdots \oplus I_{\mathbb{C}} \cong mI_{\mathbb{C}}$, *segue que* $\mathbb{C}\xi \cong \eta \oplus \eta \oplus \cdots \oplus \eta \cong m\eta$ *onde* $\mathbb{C}\xi$ *é a complexificação de fibrado* ξ.

Assim $e(\xi)^2 = e(\mathbb{C}\xi) = c_1(\mathbb{C}\xi) = c_1(\eta)^m = e(\eta)^m$. *Pelo Lema 4.1.2* $e(\eta) = (-1)x^{p-1}$ *logo* $e(\mathbb{C}\xi) = (-1)^m x^{m(p-1)}$. *Portanto*

$$e(\xi) = ax^{\frac{m(p-1)}{2}}$$

onde $a^2 \equiv (-1)^m$ *(mod p).*

Observação 4.1.3 $e(\xi_M) = \varphi^*(e(\xi))$.

Capítulo

5

O Teorema de Borsuk-Ulam para formas espaciais esféricas

Neste capítulo apresentamos a demonstração do resultado principal derivado deste trabalho.

5.1 Teorema Principal

Teorema 5.1.1 *Dada uma forma espacial esférica homotópica (2n-1)-dimensional X com uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$, $p > 2$ primo, e uma aplicação contínua $f : X \to \mathbb{R}^m$ com $2n-1 \geq m(p-1)$, então conjunto de coincidências $A(f)$ é não vazio. Mais ainda,* $\dim A(f) \geq \dim X - m(p-1)$.

Demonstração. Considere X um espaço de forma esférica homotópica, ou seja X é da forma $X = \Sigma^{2n-1}/\eta(H)$ onde H é um grupo periódico finito. Como X admite uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$, então pelo Teorema 3.1.1 H é um subgrupo de índice p de um grupo finito e periódico G. Além disso $X/\mathbb{Z}_p \simeq (\Sigma^{2n-1}/\eta(H))/\mathbb{Z}_p \simeq \Sigma^{2n-1}/\gamma(G)$.

Assim pelo Corolário 2.1.1 temos $H^l(X/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p) \simeq H^l(\Sigma^{2n-1}/\gamma(G);\mathbb{Z}_p) \overset{\psi}{\simeq} H^l(G;\mathbb{Z}_p)$ para $l \leq 2n-1$.

Logo da Observação 4.1.3

$$e(\xi_X) \in H^{m(p-1)}(X/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p) \simeq H^{m(p-1)}(\Sigma^{2n-1}/\gamma(G);\mathbb{Z}_p)$$

Pelo Teorema 2.3.2 dado $b^i \in H^{2i}(G;\mathbb{Z}_p)$ com $p-1 = i.s$ então $(b^i)^{\frac{m.s}{2}} \in H^{ims}(G;\mathbb{Z}_p) \overset{\psi}{\simeq} H^{m(p-1)}(\Sigma^{2n-1}/\gamma(G);\mathbb{Z}_p) \simeq H^{m(p-1)}(X/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p)$ e $\psi((b^i)^{\frac{m.s}{2}}) = e(\xi_X)$.

Se $2n-1 \geq m(p-1)$ então $(b^i)^{\frac{m.s}{2}} \neq 0$ o que implica $e(\xi_X) \neq 0$. Assim do Teorema 1.10.3 toda seção contínua de ξ_X possui um zero e, consequentemente pelo Lema 4.1.1 $A(f) \neq \emptyset$.

Agora vamos mostrar que $\dim A(f) \geq \dim X - m(p-1)$.

Como $A(f)$ é fechado e G-invariante, o conjunto $X \setminus A(f)$ também é G-invariante e assim podemos considerar a sequência exata do par

$$\cdots \longrightarrow H^n(X/\mathbb{Z}_p,(X\setminus A(f))/\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\alpha} H^n(X/\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\beta} H^n(X\setminus A(f),\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \cdots$$

Considere $f' : X\setminus A(f) \to \mathbb{R}^m$ e $(\xi_X)' : X\setminus A(f) \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{R}^m(\mathbb{Z}_p) \to (X\setminus A(f))/\mathbb{Z}_p$.

Como $A(f') = \emptyset$, pelo Lema 4.1.1 temos que $(\xi_X)'$ possui uma seção não nula sobre $X \setminus A(f)$.

Assim $\beta(e_p(\xi_X)) = e_p((\xi_X)') = 0$. Segue da exatidão da sequência que existe um elemento não trivial

$$\mu \in H^{m(p-1)}(X/\mathbb{Z}_p,(X\setminus A(f))/\mathbb{Z}_p)$$

tal que $\alpha(\mu) = e_p(\xi_X)$.

Como estamos trabalhando com coeficientes no corpo $\mathbb{Z}_p$, existe um elemento não trivial correspondente

$$\tilde{\mu} \in H_{m(p-1)}(X/\mathbb{Z}_p,(X\setminus A(f))/\mathbb{Z}_p).$$

Pela dualidade de Alexander, temos $H^{\dim X - m(p-1)}(A(f)/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p) \neq 0$ e assim

$\dim_{\mathbb{Z}_p} A(f)/\mathbb{Z}_p \geq \dim X - m(p-1)$.

Como $\mathbb{Z}_p$ é um grupo finito segue que $\dim A(f) \geq \dim A(f)/\mathbb{Z}_p \geq \dim X - m(p-1)$. ■

Observação 5.1.1 *Note que, se o período de G é k então $k-1 \geq m.i.s.$*

Apêndice

A

Aspectos geométricos do Teorema de Borsuk-Ulam

Neste capítulo apresentamos alguns aspectos geométricos do Teorema de Borsuk-Ulam para o caso de ações livres do grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$.

A.1 O teorema de Borsuk-Ulam para $\mathbb{Z}_p$-ações livres

O teorema clássico de Borsuk-Ulam possui as seguintes versões equivalentes bem conhecidas:

1. *Para toda função contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existe um ponto $x \in S^n$ com $f(x) = f(-x)$.*

2. *Não existe aplicação equivariante $f : S^n \to S^{n-1}$ com relação a aplicação antípoda.*

Definição A.1.1 *Dizemos que a tripla $(X, \tau; Y)$ satisfaz o Teorema de Borsuk-Ulam para ações livres de $\mathbb{Z}_p$ se dada qualquer aplicação contínua $f : X \to Y$ o*

conjunto de coincidências $A(f) = \{x \in X \mid f(x) = f(\tau^j(x))\ j = 1, \cdots, p-1\}$ *é não vazio.*

No caso particular em que $p = 2$, temos as seguintes versões equivalentes do Teorema de Borsuk-Ulam:

Proposição A.1.1 *Seja* (X, τ) *um espaço com uma ação livre de* $\mathbb{Z}_2$*. Então são equivalentes:*

1. *O Teorema de Borsuk-Ulam para* $\mathbb{Z}_2$*-ações livres é valido para a tripla* $(X, \tau; \mathbb{R}^n)$*;*

2. *Não existe aplicação* $\mathbb{Z}_2$*-equivariante* $f : X \to S^{n-1}$*.*

Demonstração. (1$\Rightarrow$ 2). Se existe aplicação equivariante $f : X \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, então $f(\tau(x)) = -f(x) \neq f(x)$, para todo $x \in X$ e, portanto, o Teorema de Borsuk-Ulam não é válido para a tripla $(X, \tau; \mathbb{R}^n)$.

(2$\Rightarrow$ 1). Se o Teorema de Borsuk-Ulam não for válido para a tripla $(X, \tau; \mathbb{R}^n)$, então está bem definida a aplicação equivariante $F : X \to S^{n-1}$, dada por

$$F(x) = \frac{f(x) - f(\tau(x))}{\|f(x) - f(\tau(x))\|}.$$

■

O objetivo nesta seção é mostrar uma condição equivalente ao Teorema de Borsuk-Ulam para a tripla $(X, \tau; \mathbb{R}^n)$, onde τ determina uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ sobre X, a qual estende a Proposição A.1.1. Observamos que uma tentativa direta de estender a demonstração da Proposição A.1.1 para o caso de $\mathbb{Z}_p$-ações livres, $p > 2$ primo, não é possível pois os argumentos utilizados na prova dependem do fato de p ser igual a 2. A seguir, apresentamos uma técnica a qual permite a obtenção do resultado pretendido para o caso de $\mathbb{Z}_p$-ações livres, $p > 2$ primo.

Considere $(\mathbb{R}^n)^p_\Delta = \prod_{i=1}^{p} (\mathbb{R}^n)^i - \Delta$, onde

$$\Delta = \{(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} (\mathbb{R}^n)^i; x_1 = x_2 = \cdots = x_p\}$$

é a diagonal usual em $\prod_{i=1}^{p}(\mathbb{R}^n)^i$. Então, $(\mathbb{R}^n)^p_\Delta$ admite uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$, gerada por um homeomorfismo periódico $\sigma : (\mathbb{R}^n)^p_\Delta \to (\mathbb{R}^n)^p_\Delta$ de período p dado por

$$\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_p) = (x_2, x_3, \cdots, x_p, x_1).$$

Lema A.1.1 *Existe uma equivalência de homotopia $\mathbb{Z}_p$-equivariante*

$$g : ((\mathbb{R}^n)^p_\Delta, \sigma) \to (S^{n(p-1)-1}, \gamma),$$

onde γ é a ação padrão de $\mathbb{Z}_p$ sobre $S^{n(p-1)-1}$.

Demonstração. Vamos interpretar $(\mathbb{R}^n)^p$ como espaço das matrizes (x_{ij}) $i = 1, \cdots, n$ e $j = 1, \cdots, p$ com n linhas e p colunas. Assim σ é a permutação cíclica das colunas.

Os elementos de $(\mathbb{R}^n)^p_\Delta$ são todas as matrizes dessa forma exceto aquelas que tem todas as colunas iguais.

Vamos considerar D o subespaço $n(p-1)$-dimensional que é perpendicular a diagonal e seja $g_1 : (\mathbb{R}^n)^p \to D$ a projeção ortogonal de $(\mathbb{R}^n)^p$ em D. Em coordenadas D é o subespaço consistindo de todas as matrizes $n \times p$ tal que as somas dos elementos de cada linha é zero, ou seja $\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = 0 \ \forall i$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & x_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & x_{np} \end{bmatrix}.$$

De fato, se $X \in D$ e $Y \in \Delta$, então $X.Y^t = 0$.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & x_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{d1} & x_{d2} & . & . & x_{np} \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_1 & . & . & y_1 \\ y_2 & y_2 & . & . & y_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ y_n & y_n & . & . & y_n \end{bmatrix}$$

Como $X.Y^t = 0$ então

$$\begin{cases} y_1(x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1p}) = 0 \\ y_2(x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2p}) = 0 \\ . \\ . \\ y_d(x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{np}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1p} = 0 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2p} = 0 \\ . \\ . \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{np} = 0 \end{cases}$$

Assim g_1 leva a matriz $X = (x_{ij})$ na matriz $g_1(X) = (x_{ij} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{ik})_{ij}$. Ou seja a média das colunas é retirada de cada coluna.

$$g_1(X) = \begin{bmatrix} x_{11} & & x_{12} & & . & . & x_{1p} & \\ x_{21} & & x_{22} & & . & . & x_{2p} & \\ . & -M & . & -M & . & . & . & -M \\ . & & . & & . & . & . & \\ x_{n1} & & x_{n2} & & . & . & x_{np} & \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } M = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1p} \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2p} \\ . \\ . \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{np} \end{bmatrix}$$

Temos que $g_1(X)$ é a matriz nula se, e somente se, cada coluna de X é igual a média das colunas M, ou seja todas as colunas são iguais. Logo $g_1 : (\mathbb{R}^n)^p_\Delta \to D - \{0\}$ é sobrejetora.

Seja $g : (\mathbb{R}^n)^p_\Delta \to S(D)$, $g(X) = \frac{g_1(X)}{||g_1(X)||}$ onde $(S(D), \tau)$ é a esfera unitária em D e $\tau = \sigma|_{S(D)}$ é a restrição de σ a $S(D)$, a qual pode ser identificada equivariantemente com $(S^{n(p-1)-1}, \gamma)$ e, neste caso a inversa homotópica de g é a aplicação inclusão $i : S^{n(p-1)-1} = S(D) \to (\mathbb{R}^n)^p_\Delta$, a qual é claramente equivariante.

Para que g seja $\mathbb{Z}_p$-equivariante mostremos que $g \circ \sigma = \tau \circ g$. Temos

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & x_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & x_{np} \end{bmatrix}, \quad \sigma(X) = \begin{bmatrix} x_{12} & x_{13} & . & . & x_{1p} & x_{11} \\ x_{22} & x_{23} & . & . & x_{2p} & x_{21} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{n2} & x_{n3} & . & . & x_{np} & x_{n1} \end{bmatrix}$$

$$g_1(\sigma(X)) = \begin{bmatrix} x_{12} & & x_{13} & & . & . & x_{1p} & & x_{11} & \\ x_{22} & & x_{23} & & . & . & x_{2p} & & x_{21} & \\ . & -M & . & -M & . & . & . & -M & . & -M \\ . & & . & & . & . & . & & . & \\ x_{n2} & & x_{n3} & & . & . & x_{np} & & x_{n1} & \end{bmatrix}$$

Logo $\sigma(g_1(X)) = g_1(\sigma(X))$ e $||g_1(X)|| = ||g_1(\sigma(X))|| = ||\sigma(g_1(X))||$ e segue que

$$\begin{aligned} g(\sigma(X)) &= \frac{g_1(\sigma(X))}{||g_1(\sigma(X))||} \\ &= \frac{\sigma(g_1(X))}{||g_1(X)||} \\ &= \sigma|_{S(D)}(\frac{g_1(X)}{||g_1(X)||}) \\ &= \sigma|_{S(D)}(g(X)). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n)^p_\Delta \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "g"'] & (\mathbb{R}^n)^p_\Delta \arrow[d, "g"'] \\
S^{n(p-1)-1} \arrow[r, "\tau"] & S^{n(p-1)-1}
\end{tikzcd}$$

■

Agora, vamos mostrar uma condição equivalente ao Teorema de Borsuk-Ulam para ações livres de $\mathbb{Z}_p$, a qual estende a Proposição A.1.1.

Proposição A.1.2 *Seja (X, τ) um espaço com uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$. Então são equivalentes:*

1. *O Teorema de Borsuk-Ulam para $\mathbb{Z}_p$-ações livres é valido para a tripla $(X, \tau; \mathbb{R}^n)$;*

2. *Não existe aplicação $\mathbb{Z}_p$-equivariante $F : (X, \tau) \to (S^{n(p-1)-1}, \gamma)$, onde γ é a ação padrão de $\mathbb{Z}_p$ sobre $S^{n(p-1)-1}$.*

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$. Considere a inclusão $i : (S^{n(p-1)-1}, \gamma) \to ((\mathbb{R}^n)^p_\Delta, \sigma)$, a qual pelo Lema A.1.1 é a inversa homotópica equivariante da aplicação g. Suponha que exista uma aplicação $\mathbb{Z}_p$-equivariante

$$F : (X, \tau) \to (S^{n(p-1)-1}, \gamma) \subset ((\mathbb{R}^n)^p_\Delta, \sigma)$$

e sejam $f_i : X \to \mathbb{R}^n$ dadas por $f_i = p_i \circ F$, onde p_i é a projeção na i-ésima coordenada $i = 1, \ldots, p$.

Temos

$$F(\tau^j x) = \sigma^j F(x), \forall x \in X, \ \forall j = 1, \ldots, p-1$$

e

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x) \ldots, f_p(x))$$

Assim

$$\begin{aligned} F(\tau^j x) &= (f_1(\tau^j x), \ldots, f_p(\tau^j x)) \\ \sigma^j F(x) &= (f_{j+1}(x), \ldots, f_{j-1}(x)) \end{aligned}$$

Logo, $f_1(\tau^j x) = f_{j+1}(x)$, $\forall x \in X$, $\forall j = 1, \ldots, p-1$ e como $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in (\mathbb{R}^n)^p_\Delta$ concluímos que o Teorema de Borsuk-Ulam para $\mathbb{Z}_p$-ações livres não é valido para a tripla $(X, \tau; \mathbb{R}^n)$, pois $f_i : X \to \mathbb{R}^n$ não possui $x \in X$ tal que $f(x) = f(\tau^j(x)), \forall j = 1, \ldots, p-1$ caso contrario $(f_1(x), f_2(x) \ldots, f_p(x)) \in \Delta$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Suponha que o Teorema de Borsuk-Ulam para $\mathbb{Z}_p$-ações livres não é válido para a tripla $(X, \tau; \mathbb{R}^n)$. Então existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$, para a qual não existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(\tau^j(x)), \forall j = 1, \ldots, p-1$.

Assim, podemos definir a aplicação $G : X \to (\mathbb{R}^n)^p_\Delta$ dada por

$$G(x) = (f(x), f(\tau x), \ldots, f(\tau^{p-1} x)).$$

Temos que $G \circ \tau = \sigma \circ G$, logo G é $\mathbb{Z}_p$-equivariante. Usando a aplicação equivariante g dada pelo Lema A.1.1 temos que a composição

$$F = g \circ G : (X, \tau) \to (S^{n(p-1)-1}, \gamma)$$

é uma aplicação equivariante. ■

Referências Bibliográficas

[1] ADEM, A.; MILGRAM, R.J. **Cohomology of finite groups**. Springer-Verlag, 1994.

[2] BIASI, C.; MATTOS, D.; SANTOS E.L. A Borsuk-Ulam Theorem for maps from a sphere to a generalized manifold. **Geom. Dedicata** v. 107, p. 101-110, 2004.

[3] BORSUK, K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, **Fund. Math.** v. 20, p. 177-190, 1933.

[4] BROWN, K. S. **Cohomology of Groups**. New York: Springer-Verlag, 1982.

[5] CONNER, P.; FLOYD, E. **Differentiable periodic maps**, Springer Verlag, Berlin, 1964.

[6] DAVIS, J. F.; KIRK, P. **Lecture Notes in Algebraic Topology**. v. 35, Graduate studies in mathematics, 2001.

[7] GONÇALVES D.L.; JAWOROWSKI J.; PERGHER P.L.Q. Measuring the size of the coincidence set, **Topology Appl.** v. 125, p. 465-470, 2002.

[8] GONÇALVES D.L.; JAWOROWSKI J.; PERGHER P.L.Q. G-coincidences for maps of homotopy spheres into CW-complexes, **Proc. Amer. Math.** Soc. v. 130, n. 10, p. 3111-3115, 2002.

[9] GONÇALVES D.L.; JAWOROWSKI J.; PERGHER P.L.Q.; VOLOVIKOV A.Y. Coincidences for maps of spaces with finite group actions. **Topology Appl.** v145, n 1-3, p.61-68, 2004.

[10] GONÇALVES D.L.; PERGHER P.L.Q. $\mathbb{Z}_p$-coincidence for maps of spheres into CW-complexes, **Kobe J. Math**. v.15, p.191 - 195, 1998.

[11] GONÇALVES D.L.; MANZOLI NETO O.; SPREAFICO M. The Borsuk-Ulam Theorem for homotopy spherical space forms. **Journal of Fixed Point Theory and Applications** v.9, p. 285-294, 2011.

[12] GROTHENDIECK A. La Théorie des Classes de Chern, **Bull.Soc.math. France** v.86, p.137-154, 1958.

[13] IZYDOREK M. On the Borsuk-Ulam Theorem for Free $\mathbb{Z}_p$-Action, **Bulletin of the Polish Academy of Sciences Math.** v.38, 1990. 15-21.

[14] JAWOROWSKI J. Periodic coincidence for maps of spheres, **Kobe J. Math.** v.17, p.21-26, 2000.

[15] LIMA, E.L. **Grupos Fundamentais e Espaço de Recobrimento**. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, Impa, 2006.

[16] MAUTOUSEK J. **Using the Borsuk-Ulam Theorem - Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry**. Springer ,2003.

[17] PICCININI R.; SPREAFICO M. Conjugacy Classes of Gauge Groups. **Queens Papers in Pure and Applied Math.** v.111, 1998.

[18] SWAN, R. G. Periodic resolutions for finite groups. **Annal of Mathematics** v.72, p. 267-291, 1960.

[19] SANTOS M. D. V.; ANDRADE M. G. C. **Cohomologia De Grupos Finitos e G-Coincidências De Aplicações**, 2010, Dissertação de Mestrado, IBLICE-UNESP.

[20] TURYGIN, Y.A. **Borsuk-Ulam Property of Finite Group Actions on Manifolds and Applications**. 2007, Tese de Doutorado, University of Florida.

[21] VOLOVIKOV A.Y. Coincidence points of mappings of $\mathbb{Z}_p^n$-spaces. **Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.** v.69, no. 5, p.53-106, 2005.

[22] WOLF, J. A. **Spaces of constant curvature**. MacGraw-Hill, Inc., 1967.

Índice Remissivo

$\mathbb{Z}G$-módulos, 10, 11

ação transitiva, 4
anel de cohomologia, 26
aplicação aumentação, 7
aplicação diagonal, 11
aplicação equivariante, 2

classes de Chern, 34, 36, 37
cohomologia periódica, 24
coinvariantes, 7
CW-complexo, 4, 5, 21, 24

espaço de forma esférica, 1, 39, 40
espaços de recobrimento, 2–4

fibra, 3, 22
forma espacial esférica, 1

grupo índice primo, 30

ideal aumentação, 34
invariantes, 7

K(G,1)-complexo, 10

número de folhas do recobrimento, 4
número de Lefschetz, 22

operador bordo, 10
operador cobordo, 10

produto cup, 11
propriamente descontínuo, 4

recobrimento regular, 3, 4, 22
recobrimento universal, 3, 4
resolução livre, 6, 7
resoluções projetivas, 6

sequência espectral, 24

Teorema de Borsuk-Ulam, 39

vizinhança elementar, 3