Continuidade de atratores globais: o uso de
corretores para a obtenção de melhores taxas de
convergência

Cesar Augusto Esteves das Neves Cardoso

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Cesar Augusto Esteves das Neves Cardoso

Continuidade de atratores globais: o uso de corretores para a obtenção de melhores taxas de convergência

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva

USP – São Carlos
Junho de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C634c   Cardoso, Cesar Augusto Esteves das Neves
Continuidade de atratores globais: o uso de
corretores para a obtenção de melhores taxas
de convergência / Cesar Augusto Esteves das
Neves Cardoso; orientador Alexandre Nolasco
de Carvalho; coorientador Ricardo Parreira da Silva.
- São Carlos - SP, 2017.

173 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Taxa de convergência. 2. atratores.
3. corretores. 4. continuidade. 5. shadowing.
6. estabilidade geométrica. I. Carvalho, Alexandre
Nolasco de, orient. II. Silva, Ricardo Parreira da,
coorient. III. Título.

Cesar Augusto Esteves das Neves Cardoso

**Continuity of global attractors: the use of correctors to obtain
better convergence rates**

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Doctorate Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

Co-advisor: Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva

USP – São Carlos
June 2017

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Universo, por toda a sorte, pela saúde, família, amigos e por todo o trabalho bem feito que os humanos fizeram e que permitiram que eu vivesse esta realidade neste século.

Aos meus pais, Ananias e Clarice, por tudo o que eles fizeram por mim, por todo o apoio e carinho.

À professora Simone Mazzini, pela amizade e orientação na graduação, e por me levar até o ICMC - USP.

À Danielle, meu amor, minha esposa, quem sempre acreditou em mim e que é o meu grande apoio e alegria.

À minha filha Isabella, que me fez renascer e é um espetáculo vivo!

Aos meus sogros, Maria Luiza e Nelson Banzoli, por todo o apoio e atenção que me dedicarão, muito obrigado!

Ao meu cunhado Marcelo pelas caronas nos momentos decisivos dos meus últimos anos!

Aos funcionários da USP de São Carlos. Aos funcionários e professores do ICMC/USP, que tem uma dedicação incrível. Na minha experiência de vários anos do ICMC, eu sempre fui muito bem atendido.

Ao professor Alexandre Nolasco, meu orientador, pela orientação, amizade, disposição e por acreditar em mim por tantos anos, muito obrigado!

Ao meu coorientador, professor Ricardo Parreira da Silva, pelo interesse em me coorientar, pelas dicas e conversas, obrigado!

Aos professores José António Langa Rosado e Tomás Caraballo, por toda a dedicação que tiveram por mim para me proporcionar um excelente estágio na Espanha, muchas gracias!

Ao professor Rafael Obaya pela incrível atenção que dedicou à mim durante minha curta estância na Universidad de Valladolid, muchas gracias!

À CAPES¹, pelo apoio financeiro na realização do estágio no exterior e à FAPESP², pelo suporte financeiro, que foi fundamental para a realização deste projeto.

Aos amigos que fizeram parte da minha caminhada pela pós graduação: Matheus Cheque Bortolan, Leonardo Pires, Alexandre Nascimento, Henrique Barbosa, Paulo Mendes, Alex

---

¹ CAPES Processo - 7232-14-4

² FAPESP Processo 2012/00033-3

Pereira, Victor Simões Barbosa, Gabriel Ponce, Giuliano Angelo Zugliani, Éder Ritis Aragão Costa, Jaqueline Godoy Mesquita, Anandsing Dwarkasing, Solange Rezende, Bento Augusto, Ivone Penque Matsuno, Juliano Yugoshi e uma lista muito extensa de pessoas que fizeram minha vida mais feliz e meu caminhar mais suave em muitos momentos!

Aos professores Alexandre Nolasco de Carvalho, Sergio Muniz Oliva Filho, Everaldo de Melo Bonotto, Ma To Fu e Juliana Fernandes da Silva Pimentel, por terem sido membros da minha banca de defesa, e pelas sugestões de melhorias que eles derão ao trabalho.

De modo geral, agradeço à todas as pessoas que trabalharam e trabalham para o ICMC e a USP funcionarem tão bem. Para mim, será inesquecível!

*“As soluções sempre aparecem quando saímos do pensamento e ficamos em silêncio,
absolutamente presentes, ainda que seja só por um instante.”*
(Eckhart Tolle)

RESUMO

C.A. CARDOSO. **Continuidade de atratores globais: o uso de corretores para a obtenção de melhores taxas de convergência**. 2017. 173 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Neste trabalho estudamos a continuidade da dinâmica assintótica relativamente a perturbações e, em particular, exploramos a obtenção de melhorias para as taxas de convergência de atratores globais através da introdução de fatores de correção, inspirados pelos resultados da teoria de homogeneização e nos trabalhos de (BABIN; VISHIK, 1992) e (CARVALHO; CHOLEWA, 2011), e através da introdução de mecanismos que melhoram a transferência da taxa de convergência de semigrupos para a taxa de convergência de atratores, inspirados pelos trabalhos (SANTAMARÍA, 2013) e (BABIN; VISHIK, 1992; CARVALHO; CHOLEWA, 2011).

A proposta inicial está centrada na obtenção de melhores taxas de convergência de atratores globais através da obtenção de equitração e da melhoria da taxa de convergência dos semigrupos. Para isto, buscamos melhorar a taxa de convergência do resolvente dos operadores setoriais envolvidos, por meio de uma perturbação singular do resolvente limite que ainda gere uma família de operadores setoriais com resolventes que aproximam o resolvente do problema limite e aproximam melhor os resolventes das perturbações iniciais. Feito isto, obtemos uma melhora imediata de convergência dos semigrupos lineares, depois dos não lineares (através da fórmula da variação das constantes).

Motivados pelos resultados de (SANTAMARÍA, 2013), que oferecem uma menor perda na transferência das taxas de convergência dos semigrupos para as taxas de convergência dos atratores, buscamos melhor compreender a propriedade *Lipschitz Shadowing*, que é responsável direta pela obtenção da taxa de convergência dos atratores diretamente da taxa de convergência dos semigrupos. Isto nos levou a descobrir que podemos obter as propriedade Lipschitz Shadowing e estabilidade estrutural para perturbações Lipschitz de semigrupos Morse-Smale.

Palavras-chave: Taxa de convergência, atratores, corretores, continuidade, shadowing, estabilidade geométrica.

ABSTRACT

C.A. CARDOSO. **Continuity of global attractors: the use of correctors to obtain better convergence rates**. 2017. 173 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Here we compare the continuity of the asymptotic dynamics with respect to perturbations and, in particular, we explored to obtain improvement of rates of convergence of the global attractor through the introduction of correction factors, inspired by the results of homogenization theory and work of (BABIN; VISHIK, 1992) and (CARVALHO; CHOLEWA, 2011), and the introduction of mechanisms that improve the transference of the convergence rate of semigroups to the convergence rate of attractors, inspired by the work of (SANTAMARÍA, 2013) and (BABIN; VISHIK, 1992; CARVALHO; CHOLEWA, 2011).

The initial proposal is focused on achieving best rates of convergence of the global attractors by obtaining equi-attraction and improving the convergence rate of semigroups. For this, we seek to improve the rate of convergence of the resolvents of sectorial operators, through a singular perturbation of the resolvent associated with the limit problem and generate a new family of sectorial operators whose resolvents both approximate the resolvent of the limit problem as they were closer to the resolvents the initial perturbation. Having done this, we obtain an immediate improvement of convergence of linear semigroups, after the non-linear (using the variation of constant's formula).

Motivated by the results of (SANTAMARÍA, 2013), which offer an improvement in obtaining convergence rates, we seek to study property better *Lipschitz Shadowing*, which is basically responsible for obtaining the distance of the attractors directly from the convergence rate of the semigroups. This has led us to discover that we can both preserve the Lipschitz Shadowing property under Lipschitz perturbations of Morse-Smale semigroups, and The geometric stability of the attractors.

Keywords: Rates of convergence, attractors, correctors, continuity, shadowing, geometrical stability.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$ — Números naturais

$\mathbb{R}$ — Números reais

$\mathbb{R}^+$ — Números reais maiores ou iguais a zero

$\mathbb{C}$ — Números complexos

$\mathbb{K}$ — Corpo de números reais ou complexos

$\operatorname{Re}(z)$ — Parte real de $z \in \mathbb{C}$

$\operatorname{Im}(z)$ — Parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$

X — Espaço métrico

2^Y — Conjunto das partes do conjunto Y

$\mathcal{F}(X)$ — Conjunto das funções de X em X

$\mathcal{C}(X, Y)$ — Espaço das funções contínuas de X em Y

$\mathcal{C}(X)$ — Espaço das funções contínuas de X em X

$\mathcal{C}^r(X, Y)$ — Espaço das funções de $\mathcal{C}(X, Y)$ com derivadas de Fréchet contínuas até a ordem r

$\mathcal{C}^r(X)$ — Espaço das funções de $\mathcal{C}(X)$ com derivadas de Fréchet contínuas até a ordem r

$\mathcal{C}^{1+}(A, B)$ — Conjunto das funções em $\mathcal{C}^1(A, B)$ cujas derivadas são uniformemente contínuas

$\mathcal{L}(X, Y)$ — Espaço das transformações lineares limitadas de X em Y

$\mathcal{L}(X)$ — Espaço das transformações lineares limitadas de X em X

$\mathcal{K}(X)$ — Espaço das transformações lineares compactas de X em X

$\mathcal{P}(X)$ — Conjunto dos operadores de tipo positivo

X_A^α — Espaço de potência fracionária associado a A

X^* — Notação do conjunto $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$

$\Sigma_{a, \phi}$ — Conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ tais que $|\arg(\lambda - a)| < \phi$

$\|\cdot\|_X$ — Norma do espaço de Banach X , também denotada $\|\cdot\|$

$\|T\|_{L^\infty(B)}$ — Supremo de $\|Tx\|$ para $x \in B$

$\operatorname{Lip}_B(T)$ — Supremo de $\frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|}$ para $x, y \in B, x \neq y$

$\|T\|_{\text{Lip}(B)}$ — Máximo entre $\|T\|_{L^\infty(B)}$ e $\text{Lip}_B(T)$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — Produto interno

$\frac{d^n}{d\lambda^n}$ — Derivada de ordem n com respeito a λ

$f(x) = o(g(x))$ quando $x \rightarrow x_0$ — $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} = 0$

$f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow x_0$ — $\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} < \infty$

$M_I(f)$ — Média da função f no conjunto I

$\subset\subset$ — Inclusão compacta

$\hookrightarrow$ — Inclusão contínua, ou imersão

$:=$ — Igualdade por definição

$\rightharpoonup$ — Convergência fraca

$\pitchfork$ — $\mathfrak{L}$ -transversalidade

$B_r^X(y)$ — Bola aberta em X , de raio r e centrada em $y \in X$

$\mathcal{O}_\varepsilon(B)$ — ε -vizinhança de B

$D(A)$ — Domínio de A

$R(A)$ — Imagem de A

$N(A)$ — Núcleo de A

$\sigma(A)$ — Espectro de A

$\sigma_p(A)$ — Conjunto dos autovalores de A

$\rho(A)$ — Conjunto resolvente de A

$W(A)$ — Imagem numérica de A

A^* — Operador adjunto de A

$e^{A(\cdot)}$ — Semigrupo linear com gerador A

$T(\cdot)$ — Semigrupo

$\gamma^+(B)$ — Órbita positiva de B

$\gamma_{[t,t']}^+(B)$ — Órbita parcial de B entre t e t'

$\gamma_t^+(B)$ — Órbita de $T(t)B$

$\omega(B)$ — Conjunto omega limite de B

$\alpha_\phi(x)$ — Conjunto alfa limite de x relativo a solução global ϕ

$\text{dist}(x, A)$ — Distância do ponto x ao conjunto A

$\text{dist}_H(A, B)$ — Semi-distância de Hausdorff de A para B

$\text{Dist}_H(A, B)$ — Distância de Hausdorff entre A e B

$W^u(x^*) := W_T^u(x^*)$ — Variedade instável de x^*

$W^s(x^*) := W_T^s(x^*)$ — Variedade estável de x^*

$W_{\text{loc}}^u(x^*) := W^u(x^*, V) := W_T^u(x^*, V)$ — variedade instável local de x^*

$W_{\text{loc}}^s(x^*) := W^s(x^*, V) := W_T^s(x^*, V)$ — variedade estável local de x^*

$\mathcal{A}$ — Atrator global

$\mathcal{E}$ — Conjunto de equilíbrios

MS — Morse-Smale

LMS — Lipschiz Morse-Smale

$DT(p)$ — Derivada de T no ponto p

$T_z W$ — Espaço tangente de W em z

SUMÁRIO

Introdução	19
1 TAXA DE CONVERGÊNCIA DE ATRADORES	23
1.1 Atratores para semigrupos	23
1.2 Semicontinuidade superior e inferior de atratores	25
1.3 Taxa de convergência de atratores globais	26
1.4 Equitração exponencial	28
1.4.1 <i>Equitração exponencial de variedades instáveis locais</i>	31
2 CORRETORES E POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS	35
2.1 Taxa de convergência dos resolventes	38
2.1.1 <i>Taxa de convergência dos resolventes com corretor</i>	41
2.2 Convergência dos autovalores e autofunções	44
2.3 Taxa de convergência dos semigrupos Lineares	47
2.3.1 <i>Taxa de convergência dos semigrupos lineares com corretor</i>	48
2.4 Taxa de convergência dos semigrupos não lineares	50
2.4.1 <i>Taxa do semigrupos não lineares com corretor</i>	51
2.5 Limitação uniforme dos resolventes da linearização	53
2.6 Taxa de convergência dos equilíbrios e da linearização	55
2.7 Atração uniforme das variedades instáveis locais e taxa de convergência	59
2.8 Prova do Teorema 2.0.3	62
2.9 Comentários sobre as melhorias obtidas na taxa	63
3 PERTURBAÇÕES LIPSCHIZ DE SEMIGRUPOS MORSE-SMALE	71
3.1 Shadowing em sistemas dinâmicos	72
3.1.1 <i>Semigrupos Morse-Smale e Shadowing</i>	75
3.2 Semigrupos Lipschitz Morse-Smale	77
3.3 Variedades invariantes como gráfico	81
3.4 Diferenciabilidade de variedades invariantes	82
3.5 Continuidade de equilíbrios $\mathcal{L}$ -hiperbólicos	87
3.6 $\mathcal{L}$ -hiperbolicidade uniforme	89
3.7 Perturbação de variedades invariantes	97
3.8 $\mathcal{L}$ -transversalidade de variedades Lipschitz	102

3.8.1	<i>Gráfico de função Lipschitz sob perturbação Lipschitz</i>	103
3.9	Estabilidade de semigrupos LMS e do diagrama de fase de seu atrator	108
3.9.1	<i>Exemplo</i>	114
APÊNDICE A ANÁLISE ESPECTRAL E SEMIGRUPOS		119
A.1	Análise espectral de operadores lineares	119
A.2	Semigrupos de operadores lineares	122
A.3	Operadores de tipo positivo	125
APÊNDICE B PROVAS		127
B.1	Prova do Teorema 1.4.13	127
B.2	Prova da Proposição 1.4.15	135
B.3	Prova do Teorema 2.7.2	138
B.4	Provas da seção 2.9	142
B.5	Perturbação Lipschitz de MS e Lipschitz Shadowing	151
B.6	Prova do Teorema 3.3.1	163
B.7	Diferenciabilidade de operadores de Nemytskii	168
REFERÊNCIAS		171

INTRODUÇÃO

A teoria de sistemas dinâmicos é uma poderosa ferramenta para a compreensão de muitos fenômenos reais importantes numa grande variedade de áreas de pesquisa. De fato, o estudo de compactos invariantes que atraem a dinâmica de um sistema provou ser uma área de investigação frutífera, fornecendo informações essenciais para um número crescente de modelos de fenômenos da física, biologia, economia, engenharia, entre outros. Em particular, a análise das propriedades qualitativas de semigrupos em espaços de fase gerais (espaços de Banach de dimensão infinita ou espaços métricos) tem recebido muita atenção ao longo das últimas quatro décadas (ver, por exemplo, (BABIN; VISHIK, 1992), (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), (HALE, 1988) ou (ROBINSON, 2001)).

A taxa de convergência de atratores

O estudo da continuidade da dinâmica assintótica sob perturbação é de vital importância para a modelagem matemática. Na modelagem são utilizadas medições, observações, leis empíricas, fatores menos relevantes são desprezados ou aproximados, etc. Em todos estes processos, erros são cometidos e o modelo obtido é uma aproximação do modelo ideal. Desta forma, o resultado do estudo desses modelos só terá qualquer significado se for robusto em relação a uma ampla classe de perturbações no modelo.

Um dos elementos de um sistema dinâmico cuja robustez tem sido estudada é a noção de atrator global. Um atrator global é um conjunto compacto e invariante do espaço de fase que atrai conjuntos limitados quando o tempo vai para infinito e, por ter estas características, determina o comportamento assintótico do sistema. Ao estudar a robustez de um atrator, uma das noções mais estudadas é a noção de continuidade de atratores como subconjuntos do espaço de fase, que diz respeito a proximidade dos atratores de um sistema limite e de um sistema perturbado (uma pequena perturbação do sistema limite), veja (ARRIETA; BEZERRA; CARVALHO, 2013; BEZERRA, 2009; CARVALHO; CHOLEWA; DŁOTKO, 2014).

Uma das abordagens utilizadas para estimar a distância entre atratores consiste nas seguintes etapas: 1) obter uma estimativa da taxa de convergência dos semigrupos; 2) obter e estimar a 'equitração', isto é, atração uniforme relativamente ao parâmetro de perturbação (ver (ARRIETA; BEZERRA; CARVALHO, 2013; BEZERRA, 2009; CARVALHO; CHOLEWA; DŁOTKO, 2014; CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013)).

Optamos por estudar semigrupos associados a equações de evolução cuja parte linear

é setorial. Isto se deu porque há uma ampla classe fenômenos cujos modelos são dados por equações diferenciais com a parte linear setorial e porque nestes casos os semigrupos lineares são dados pela transformada inversa de Laplace (fórmula integral de Cauchy) do resolvente com convergência na topologia uniforme de operadores (vide (PAZY, 1983)). Consequentemente, melhores estimativas da taxa de convergência dos resolventes fornecem melhores estimativas da taxa de convergência dos semigrupos lineares e, usando a Fórmula da Variação das Constantes, dos semigrupos não lineares. Neste ponto introduzimos a ideia de corretores, inspirada na ideia de corretor da teoria de homogeneização de EDPs (ver (CIORANESCU; DONATO, 1999; PEREIRA; SILVA, 2012)), com a finalidade de obtermos melhores taxas de convergência dos resolventes.

A noção de corretores

A noção de corretores que usamos vem da ideia de expansão assintótica. Um dos exemplos mais usados de expansão assintótica é a expansão em série de potências. Quando uma função $f = f(z)$ pode ser escrita como uma série do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, em geral, a aproximação de $f(z)$ por $a_0 + a_1 z$ é muito melhor do que a aproximação de $f(z)$ por a_0 . Assim, podemos dizer que o termo $a_1 z$ corrige a distância entre $f(z)$ e a_0 para z próximo a zero.

Com esta ideia em mente, no estudo da proximidade entre os operadores resolvente de A_0 e A_ε , exploramos a possibilidade que uma *perturbação simples* de A_0 ($A_0 + \varepsilon A_1$, por exemplo) melhorasse a aproximação entre os resolventes de A_ε e $A_0 + \varepsilon A_1$. A seguir, explicamos o porque de buscar intruduzir corretores no resolvente.

Os resultados obtidos em (BABIN; VISHIK, 1992; CARVALHO; CHOLEWA, 2011) asseguram que uma vez estabelecida a propriedade de equitração (veja (1.2)) podemos obter a taxa de aproximação dos atratores por meio da taxa de aproximação (veja (1.3)) dos semigrupos (provaremos a versão deste resultado dada em (CARVALHO; CHOLEWA, 2011) no Teorema 1.3.1). Uma das principais motivações para o estudo de semigrupos é o estudo de equações de evolução do tipo $u_t + A_\varepsilon u = f(u)$ com A_ε sendo um operador setorial. Neste caso, sob certas condições no termo não linear f , o semigrupo gerado pela equação de evolução é dado por

$$T_\varepsilon(t)u = e^{-A_\varepsilon t}u + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)}f(T(s)u)ds$$

e portanto faz sentido investigarmos a introdução de corretores para a *parte linear* $e^{-A_\varepsilon t}$ do semigrupo $T_\varepsilon(\cdot)$. Por outro lado, se a parte linear das equações é uniformemente setorial, então a taxa dos semigrupos lineares pode ser facilmente estimada pela taxa de aproximação dos resolventes num único ponto, por exemplo, $\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Suponha que $A_\alpha^{-1} := f(\alpha)$ com $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ infinitamente Frechet diferenciável. Assim, temos que a série de Taylor em torno de um ponto fornece formas de se pensar em

introduzir corretores. Se olharmos a noção de corretores em homogeneização, ela é um tipo de *expansão em série* em que, quanto mais termos da expansão tomamos, menor é a estimativa do erro que se comete com esta aproximação. A pergunta que podemos nos fazer é: quando que uma expansão de f em torno de um ponto α_0 continua sendo um *resolvente* de operador setorial? O Capítulo 2 detalha um exemplo abstrato para o qual a expansão de Taylor de uma função f como acima gera uma nova família de resolventes e, a partir daí, definimos o corretor de primeira ordem para semigrupos. Na Seção 2.9, apresentamos uma motivação mais detalhada para a introdução dos corretores.

Obtenção de melhores taxas de convergência dos semigrupos

Com a introdução da noção de corretor citada acima obtemos grande melhoria na taxa de convergência dos resolventes (ver Corolário 2.1.4, Corolário 2.1.12 e Corolário 2.9.9) que se transferem para os semigrupos não lineares (ver Teoremas 2.3.2, 2.3.8 e 2.9.16). Nesta fase, usamos fortemente que os operadores lineares envolvidos são uniformemente setoriais e uniformemente positivos (ver Corolário 2.9.13) e para isto estudamos a imagem numérica da parte linear dos operadores.

Estudando a imagem numérica do exemplo de corretores em potências fracionárias (ver Capítulo 2) notamos uma relação bem simples entre autovalores e imagem numérica, que simplifica bastante a verificação da propriedade de ser setorial (ver Lema 2.1.6 e Teorema A.1.16).

Taxa de atração de atratores e semigrupos Morse-Smale

Uma das formas mais conhecidas de se obter estimativas da taxa de convergência de atratores globais, citada anteriormente, consiste em obtermos equitração dos atratores globais e taxa de convergência dos semigrupos (ver Teorema 1.3.1). Porém, quando os semigrupos são Morse-Smale (MS), é suficiente obtermos estimativas da taxa de convergência dos semigrupos. Neste caso, a distância entre os atratores é diretamente proporcional à distância entre os semigrupos (ver Corolário 3.1.15), melhorando significativamente a transferência da taxa de convergência dos semigrupos para a taxa de convergência dos atratores com relação ao método do Teorema 1.3.1 (ver item *b*) deste teorema). Esta condição especial se deve, basicamente, ao fato de que os semigrupos MS tem a propriedade *Lipschitz Shadowing* (ver (SANTAMARÍA, 2013)). Neste trabalho, provamos que semigrupos MS em dimensão finita, sob pequenas perturbações Lipschitz, continuam com a propriedade Lipschitz Shadowing de forma uniforme e obtemos estimativas da taxa de convergência dos atratores diretamente da taxa dos semigrupos como em (SANTAMARÍA, 2013) (ver Proposição 3.1.14 e Corolário 3.1.15). Mais detalhes estão no Capítulo 3.

Com o resultado acima, podemos nos perguntar: quais outras propriedades dos semigrupos

pos MS são estáveis por perturbações Lipschitz? Estudando os semigrupos MS, notamos que poderíamos ampliar esta classe, mantendo as propriedades geométricas e de estabilidade que os semigrupos MS possuem para perturbações de classe C^1 , mesmo sob perturbações Lipschitz. Esta generalização passou por escrever as noções de hiperbolicidade e transversalidade usando apenas noções de variedades Lipschitz. Provamos que esta noção de transversalidade é estável por perturbações Lipschitz, que foi um passo chave na prova da estabilidade geométrica (ou do diagrama de fase) para perturbações Lipschitz (ver Corolário 3.9.6 e Teorema 3.9.7).

TAXA DE CONVERGÊNCIA DE ATRADORES

Uma das abordagens utilizadas para estimar a distância entre atratores, como vimos na introdução, consiste nas seguintes etapas: 1) obter uma estimativa da taxa de convergência dos semigrupos; 2) obter e estimar a 'equiatração', isto é, atração uniforme relativamente ao parâmetro de perturbação.

O principal objetivo deste capítulo é provar o Teorema 1.3.1, que é baseado na abordagem acima, e que diz respeito à estimativa da distância de Hausdorff entre atratores $\mathcal{A}_\eta$ e $\tilde{\mathcal{A}}_\eta$ quando η tende a um parâmetro η_0 . Afim de obtermos a hipótese de equiatração do Teorema 1.3.1 (ver (1.2)), provamos o Teorema 1.4.13. Na Seção 1.4.1 recordamos uma forma particular de obtermos a atração exponencial uniforme das variedades instáveis, que é a hipótese c) do Teorema 1.4.13.

A seguir recordamos as noções de atrator global, continuidade de atratores, atração exponencial e outras associadas aos teoremas citados anteriormente. Elas podem ser encontrados em (BABIN; VISHIK, 1992; HALE, 1988; CARVALHO; CHOLEWA; DŁOTKO, 2014).

1.1 Atratores para semigrupos

Seja $X := (X, d)$ um espaço de métrico. Denotamos por $\mathcal{F}(X)$ o conjunto de todas as aplicações de X nele mesmo. Denotamos por $\mathcal{C}(X)$ o subconjunto de $\mathcal{F}(X)$ das aplicações contínuas com respeito a métrica d . Dizemos que $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ é um semigrupo se

$$S(0) = I_X \text{ e } S(t+s) = S(t)S(s) \text{ para cada } t, s \geq 0.$$

Denotaremos por $S(\cdot)$ o semigrupo $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{F}(X)$.

Para um dado semigrupo $S(\cdot)$, um ponto $x \in X$ e um subconjunto $B \subset X$, definimos:

- Para cada $t \in \mathbb{R}$, a imagem de B sob $S(t)$,

$$S(t)B := \{S(t)x : x \in B\};$$

- A órbita positiva de B ,

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} S(t)B;$$

- A órbita parcial entre dois números de $\mathbb{R}^+$, $t < t'$,

$$\gamma_{[t,t']}^+(B) := \bigcup_{t \leq s \leq t'} S(s)B;$$

- A órbita positiva de $S(t)B$,

$$\gamma_t^+(B) := \bigcup_{s \in \mathbb{R}^+} S(s+t)B = \bigcup_{s \geq t} S(s)B.$$

- A função $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto S(t)x \in X$ é a solução por x do semigrupo $S(\cdot)$.

Definição 1.1.1. Uma *solução global* de um semigrupo $S(\cdot)$ por $x \in X$ é uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $s \in \mathbb{R}$, $S(t)(\phi(s)) = \phi(t+s)$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Uma solução global constante é chamada uma solução estacionária e o seu valor um ponto de equilíbrio. Como $S(t)$ não é necessariamente injetiva, se existe uma solução global ela não precisa ser única. Quando existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por $x \in X$, podemos definir a órbita global de x relativa à solução global ϕ por $\gamma_\phi(x) := \{\phi(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ escrevemos $(\gamma_\phi)_t^-(x) = \{\phi(s) : s \leq t\}$.

O conjunto ω -limite de um subconjunto B de X é definido como segue

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\gamma_t^+(B)},$$

e, se existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x , definimos o conjunto α -limite de x relativo a ϕ por

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^-} \overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)}.$$

Proposição 1.1.2. Se $B \subset X$, $\omega(B)$ é fechado e

$$\begin{aligned} \omega(B) &= \{y \in X : \text{existem sequências } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ e } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } B \\ &\text{tais que } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e } y = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(t_n)x_n\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver (CARVALHO, 2012). □

Se $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global do semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ por $x \in X$, então $\alpha_\phi(x)$ é fechado e

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X : \text{existe uma sequência } \{t_n\} \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ tal que } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e } \phi(-t_n) \rightarrow v\}.$$

A seguir definiremos as noções de atração, absorção e invariância sob a ação do semi-grupo $S(\cdot)$. Para este fim, relembremos a definição de *semi-distância de Hausdorff* entre dois subconjuntos A e B de X

$$\text{dist}_H(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Denotamos por $\text{dist}(x, B)$ a distância de um ponto $x \in X$ ao conjunto $B \subset X$. Denotamos por

$$\text{Dist}_H(A, B) := \text{dist}_H(A, B) + \text{dist}_H(B, A)$$

a distância de Hausdorff entre os conjuntos A e B . Dizemos que $A \subset X$ é invariante por $S(\cdot)$ se $S(t)A = A$ para todo $t \geq 0$. Dizemos que A atrai B sob a ação de $S(\cdot)$ se $\text{dist}_H(S(t)B, A) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Dizemos que $\mathcal{A} \subset X$ é o atrator global de $S(\cdot)$ se $\mathcal{A}$ é compacto, invariante e atrai cada limitado de X sob a ação de $S(\cdot)$.

Se $\mathcal{A}$ é um atrator global, então temos a seguinte caracterização:

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \text{existe uma solução global limitada por } x\}. \quad (1.1)$$

Proposição 1.1.3. Dado um semigrupo $S(\cdot)$, se $\gamma_t^+(B)$ é pré-compacto, então $\omega(B)$ é compacto, não vazio, invariante e atrai B sob a ação de $S(\cdot)$.

Demonstração. Ver (CARVALHO, 2012). □

Definição 1.1.4. Dizemos que um semigrupo $S(\cdot)$ é ponto dissipativo se existe um limitado $B \subset X$ que atrai pontos de X sob a ação de $S(\cdot)$. Dizemos que $S(\cdot)$ é eventualmente compacto se dado B limitado, existe $t_B > 0$ tal que $S(t_B)B$ é pré-compacto.

Teorema 1.1.5. O semigrupo $S(\cdot)$ tem atrator global se, e somente se ele é ponto dissipativo e eventualmente compacto.

Demonstração. Ver (CARVALHO, 2012). □

1.2 Semicontinuidade superior e inferior de atratores

Nesta seção relembremos as definições e lemas que usamos sobre continuidade dos atratores relativamente a perturbações no semigrupo.

Definição 1.2.1. Sejam X, Λ espaços métrico e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X .

1. Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 se

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0.$$

2. Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 se

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0.$$

3. Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é contínua em λ_0 se

$$\text{Dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0.$$

Para provarmos as semicontinuidades superior e inferior empregaremos o seguinte resultado

Lema 1.2.2. Seja Λ um espaço métrico e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X .

1. Se qualquer sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, tem uma subsequência convergente com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 .
2. Se $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto e para qualquer $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ existe uma sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, que converge para x , então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 .

Demonstração. Ver (CARVALHO, 2012). □

Definição 1.2.3. Diremos que a família de semigrupos $\{S_\eta(t) : t \in \mathbb{R}^+\}_{\eta \in [0,1]}$, é contínua em $\eta = 0$ se $S_\eta(t)x \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} S_0(t)x$ uniformemente para (t, x) em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^+ \times X$ quando $\eta \rightarrow 0$.

A classe das soluções globais que tendem a um equilíbrio y^* quando t tende a $-\infty$ formam um conjunto invariante que chamamos de *variedade instável* $W^u(y^*)$ de y^* ; isto é,

$$W^u(y^*) = \{y \in X : \text{existe solução global } \phi_y : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ tal que, } \phi_y(0) = y \text{ e } \phi_y(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} y^*\}.$$

Quando trabalharmos com variedades de semigrupos diferentes, denotaremos $W_S^u(x^*)$ ou alguma outra notação que será estabelecida no contexto.

Dada uma vizinhança V de y^* , o conjunto dos pontos y de V tais que existe solução global $\phi_y : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que, $\phi_y(0) = y$, $\phi_y(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} y^*$ e $\phi_y(t) \in V$ para todo $t \in \mathbb{R}^-$ é chamado uma *variedade instável local* de y^* e é denotado por $W_{\text{loc}}^u(y^*)$. Quando houver a necessidade de evidenciarmos a vizinhança ou o semigrupo, usaremos $W^u(x^*, V)$ ou $W_T^u(x^*, V)$.

A órbita γ_ϕ de uma solução global não constante $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ que tende a um ponto de equilíbrio y^* quando t tende a $\pm\infty$ é chamada uma órbita homoclínica em y^* .

1.3 Taxa de convergência de atratores globais

O teorema a seguir será nosso ponto de referência para introduzirmos a noção de corretores para semigrupos e obtermos melhores taxas de convergência de atratores. Ele é uma simples generalização de um teorema clássico, sobre taxa de convergência de atratores globais, que podemos encontrar em (CARVALHO, 2016).

Teorema 1.3.1 (Taxa de convergência de atratores). Sejam $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in [0,1]}$ e $\{\tilde{S}_\eta(\cdot)\}_{\eta \in [0,1]}$ famílias de semigrupos. Suponha que $S_\eta(\cdot)$ e $\tilde{S}_\eta(\cdot)$ tenham atratores globais $\mathcal{A}_\eta, \tilde{\mathcal{A}}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$ respectivamente e seja $B := \bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} (\mathcal{A}_\eta \cup \tilde{\mathcal{A}}_\eta)$ para certo $\eta_0 > 0$ fixado.

Suponha que existam funções $\gamma, E_\eta : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\eta \in [0, 1]$, tais que

$$\sup_{\eta \in [0, \eta_0]} \text{dist}_H(S_\eta(t)B, \mathcal{A}_\eta), \sup_{\eta \in [0, \eta_0]} \text{dist}_H(\tilde{S}_\eta(t)B, \tilde{\mathcal{A}}_\eta) \leq \gamma(t) \quad \text{e} \quad (1.2)$$

$$\sup_{x \in B} \text{dist}(S_\eta(t)x, \tilde{S}_\eta(t)x) \leq E_\eta(t) \quad \text{para todo } t \geq t_0. \quad (1.3)$$

Então,

$$\text{Dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \tilde{\mathcal{A}}_\eta) \leq \inf_{t \geq t_0} 2 \{E_\eta(t) + \gamma(t)\}. \quad (1.4)$$

Além disso, segue de (1.4) que:

- a) se $\gamma(t_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para alguma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[t_0, \infty)$ e $E_\eta(t) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ para cada $t \geq t_0$, então $\text{Dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \tilde{\mathcal{A}}_\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$; e
- b) se existem constantes $c \geq 1, \mu, L > 0$ e uma função contínua $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ com $\rho(0) = 0$ tais que $\gamma(t) = ce^{-\mu t}$ e $E_\eta(t) = \rho(\eta)e^{Lt}$ para todo $t \geq t_0$, então existem constantes $\bar{c}, \eta_0 > 0$ tais que

$$\text{Dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \tilde{\mathcal{A}}_\eta) \leq \bar{c}\rho(\eta)^{\frac{\mu}{\mu+L}}, \quad \forall 0 \leq \eta \leq \eta_0.$$

Demonstração. Começamos com a prova de (1.4). Note que

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \tilde{\mathcal{A}}_\eta) \leq \text{dist}_H(S_\eta(t)\mathcal{A}_\eta, \tilde{S}_\eta(t)\mathcal{A}_\eta) + \text{dist}_H(\tilde{S}_\eta(t)\mathcal{A}_\eta, \tilde{\mathcal{A}}_\eta), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.5)$$

Por outro lado, dados $\varepsilon > 0$ e $\eta \in [0, 1]$, existe $x_\varepsilon \in \mathcal{A}_\eta$ tal que

$$\text{dist}_H(S_\eta(t)\mathcal{A}_\eta, \tilde{S}_\eta(t)\mathcal{A}_\eta) \leq \varepsilon + \text{dist}(S_\eta(t)x_\varepsilon, \tilde{S}_\eta(t)\mathcal{A}_\eta) \leq \varepsilon + \text{dist}(S_\eta(t)x_\varepsilon, \tilde{S}_\eta(t)x_\varepsilon),$$

e portanto, segue de (1.3) que

$$\text{dist}_H(S_\eta(t)\mathcal{A}_\eta, \tilde{S}_\eta(t)\mathcal{A}_\eta) \leq \sup_{x \in \mathcal{A}_\eta} \text{dist}(S_\eta(t)x, \tilde{S}_\eta(t)x) \leq E_\eta(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Com isto, usando (1.5) e (1.2), obtemos

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \tilde{\mathcal{A}}_\eta) \leq E_\eta(t) + \gamma(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

De maneira análoga, obtemos

$$\text{dist}_H(\tilde{\mathcal{A}}_\eta, \mathcal{A}_\eta) \leq E_\eta(t) + \gamma(t), \quad \forall t \geq t_0,$$

e isto prova (1.4).

O item a) segue imediatamente de (1.4). A seguir provamos o item b). Usando (1.4), tomamos $\gamma^{-1}(\varepsilon) = \ln\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, de maneira que (1.4) torna-se

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \tilde{\mathcal{A}}_\eta) + \text{dist}_H(\tilde{\mathcal{A}}_\eta, \mathcal{A}_\eta) \leq 2 \inf_{\varepsilon \in (0, ce^{-\mu t_0}]} \left[\rho(\eta) \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{L/\mu} + \varepsilon \right].$$

A função do lado direito da expressão acima, quando definida em $\mathbb{R}^+$, atinge seu mínimo para $\varepsilon_\eta := c^{\frac{L}{L+\mu}} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu+L}} \rho(\eta)^{\frac{\mu}{\mu+L}}$. Como $\rho(\eta) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$, segue que existe $\eta_0 > 0$ tal que $\varepsilon_\eta \in (0, ce^{-\mu t_0}]$ para todo $\eta \in [0, \eta_0]$. Assim,

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \tilde{\mathcal{A}}_\eta) + \text{dist}_H(\tilde{\mathcal{A}}_\eta, \mathcal{A}_\eta) \leq 2c^{\frac{L}{L+\mu}} \left(\left(\frac{L}{\mu}\right)^{-\frac{L}{\mu+L}} + \left(\frac{L}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu+L}} \right) \rho(\eta)^{\frac{\mu}{\mu+L}}$$

e isto conclui a demonstração. $\square$

1.4 Equitração exponencial

Nesta seção recordamos uma forma de obter a *equitração uniforme* representada por (1.2). A principal referência desta seção é (CARVALHO; CHOLEWA; DŁOTKO, 2014). Aqui, avaliamos o comportamento assintótico com relação ao parâmetro $\alpha \in [0, 1]$ quando este tende a zero, mas poderia ser α tendendo a α_0 num espaço métrico qualquer.

Definição 1.4.1. Dizemos que o semigrupo $S(\cdot)$ é eventualmente contínuo com respeito ao tempo se existe $T \geq 0$ tal que para cada $x \in X$, $[T, \infty) \ni t \rightarrow S(t)x \in X$ é uma aplicação contínua. Neste caso dizemos que $S(\cdot)$ é contínuo a partir do tempo T .

Seja $I := [0, 1]$. Dizemos que a família de semigrupos $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ é uniformemente eventualmente contínua com respeito ao tempo se existe $T \geq 0$ tal que $S_\eta(\cdot)$ é contínuo a partir do tempo T para cada $\eta \in I$.

Dizemos que a família $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ é eventualmente convergente em $\eta = 0$ se existe $T \geq 0$ tal que

$$\text{se } \eta_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow x_0 \text{ e } [T, \infty) \ni s_n \rightarrow s_0, \text{ então } S_{\eta_n}(s_n)x_n \rightarrow S_0(s_0)x_0.$$

Se $T = 0$, dizemos que $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ é convergente em $\eta = 0$ (ou contínua em $\eta = 0$).

Definição 1.4.2. Dizemos que a família $\{B_\eta\}_{\eta \in I}$ de subconjuntos de X é uniformemente limitada em uma vizinhança de $\eta = 0$ se existe $\eta_0 > 0$ tal que $\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta$ é limitada em X .

Definição 1.4.3. Dizemos que uma família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in I}$, $\mathcal{A}_\eta \subset X$ para cada $\eta \in I$, é eventualmente uniformemente exponencialmente atratora sobre $B \supset \bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} \mathcal{A}_\eta$ se existem $\eta_0 \in (0, 1]$, $t_0 \geq 0$, $c, \rho > 0$ tais que

$$\text{dist}_H(S_\eta(t)B, \mathcal{A}_\eta) \leq ce^{-\rho t}, \quad (1.6)$$

para todo $t \geq t_0$ e $\eta \in [0, \eta_0]$.

Definição 1.4.4. A família $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ de semigrupos é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ se qualquer sequência limitada da forma $\{S_{\eta_n}(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em X , tem subsequência convergente.

Para cada $B \subset X$, denotamos $\gamma_\eta^+(B) = \bigcup_{t \geq 0} S_\eta(t)B$ a órbita positiva de B por $S_\eta(\cdot)$.

Definição 1.4.5. Seja $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ uma família de semigrupos em X , e suponha que, para cada $\eta \in I$, $S_\eta(\cdot)$ tem atrator global $\mathcal{A}_\eta$. Dizemos que a família $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ é eventualmente exponencialmente Lipschitz contínua com relação a $\{B_\eta\}_{\eta \in I}$ se $\mathcal{A}_\eta \subset B_\eta$ para cada $\eta \in I$ e se existem constantes $c, L, \eta_0 > 0$ e $\tau \geq 0$ tais que

$$\|S_\eta(t)x - S_\eta(t)y\| \leq ce^{Lt}\|x - y\|, \quad (1.7)$$

para todo $\eta \in [0, \eta_0]$, $x, y \in \gamma_\eta^+(S_\eta(\tau) \bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta)$ e $t \geq 0$.

Definição 1.4.6. Dizemos que a família $\{B_\eta\}_{\eta \in I}$ de subconjuntos de X é assintoticamente compacta em $\eta = 0$ se cada sequência da forma $\{a_{\eta_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $a_{\eta_n} \in B_{\eta_n}$ e $\eta_n \rightarrow 0$ tem subsequência convergente.

Denotamos a bola centrada em $x \in X$ e de raio $\varepsilon > 0$ por $\mathcal{O}_\varepsilon(x)$, e

$$\mathcal{O}_\varepsilon(B) := \bigcup_{b \in B} \mathcal{O}_\varepsilon(b)$$

é a ε -vizinhança de B . Denotamos por $\mathcal{GS}_\eta$ o conjunto de todas as soluções globais de $S_\eta(\cdot)$, isto é, aplicações $\phi_\eta : \mathbb{R} \rightarrow X$ tais que $S_\eta(t)\phi_\eta(s) = \phi_\eta(t+s)$ para todo $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$.

Definição 1.4.7. Dizemos que $\Xi^* = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ é uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados se existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i^*) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j^*) = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq p$, e Ξ_i^* é o subconjunto invariante maximal de $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i^*) := \{z \in X : \text{dist}_H(z, \Xi_i^*) < \delta\}$.

Seja $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ que contém uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi^* = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$. Definimos

Definição 1.4.8. Seja δ como na Definição 1.4.7 e fixe $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$. Para $\Xi \in \Xi^*$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, uma ε -cadeia de Ξ a Ξ é uma sequência $\{\Xi_{\ell_i}, \dots, \Xi_{\ell_k}\} \subset \Xi^*$, uma sequência $t_1, \sigma_1, \dots, t_k, \sigma_k$, com $t_i > \sigma_i$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq p$, e uma sequência de vetores u_i , $1 \leq i \leq k$, tais que $u_i \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\ell_i})$, $S(\sigma_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\bigcup_{i=1}^k \Xi_{\ell_i})$ e $S(t_i)u_i \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\ell_{i+1}})$, $1 \leq i \leq k$, com $\Xi = \Xi_{\ell_{k+1}} = \Xi_{\ell_1}$. Diremos que $\Xi \in \Xi^*$ é recorrente por cadeias se existe um $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$ e ε -cadeias de Ξ a Ξ para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Definição 1.4.9. Seja $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é um semigrupo gradient-like (ou dinamicamente gradiente) relativamente a uma família disjunta de invariantes isolados $\Xi^* = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ se,

(G1) Para cada solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$ existem $1 \leq i, j \leq p$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(\xi(t), \Xi_i^*) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(\xi(t), \Xi_j^*) = 0.$$

(G2) Nenhum elemento de $\Xi^* = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ é recorrente por cadeias.

Definição 1.4.10. Seja $S(\cdot)$ um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\Xi^* = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_n^*\}$. Diremos um conjunto instável local de $\Xi \in \Xi^*$ é exponencialmente atrator se existirem constantes positivas C_0, ρ_0 e δ_0 tais que

$$\text{dist}_H(S(t)u_0, W_{\text{loc}}^u(\Xi)) \leq C_0 e^{-\rho_0 t}, \quad (1.8)$$

sempre que $u_0 \in \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi)$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $\{S(s)u_0 : 0 \leq s \leq t\} \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi)$.

Definição 1.4.11. Seja $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo com uma coleção finita de invariantes isolados $\Xi^* = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_k^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Uma *estrutura homoclínica* em $\mathcal{A}$ é um conjunto $\{\Xi_{\ell_1}^*, \dots, \Xi_{\ell_k}^*\} \subset \Xi^*$ e um conjunto de soluções globais $\{\xi^{(i)} : \mathbb{R} \rightarrow X, 1 \leq i \leq k\}$ em $\mathcal{A}$ tal que, fazendo $\Xi_{\ell_{k+1}}^* := \Xi_{\ell_1}^*$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi^{(i)}(t), \Xi_{\ell_i}^*) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\xi^{(i)}(t), \Xi_{\ell_{i+1}}^*), \quad 1 \leq i \leq k.$$

O lema a seguir nos permite dar outra definição de semigrupos gradient-like.

Lema 1.4.12. Seja $\{S(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo que possui uma coleção finita de invariantes isolados $\Xi^* = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_k^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ satisfaz (G1), então (G2) é satisfeita se, e somente se, $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas.

Demonstração. Ver () □

O teorema a seguir, é uma generalização do Teorema 2.13 de (CARVALHO; CHOLEWA; DŁOTKO, 2014).

Teorema 1.4.13. Seja $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ uma família de semigrupos em X que é uniformemente eventualmente contínua com respeito ao tempo, coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ e eventualmente convergente em $\eta = 0$. Suponha que

- a) $S_\eta(\cdot)$ tem atrator global $\mathcal{A}_\eta \subset B_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$, $\{B_\eta\}_{\eta \in I}$ é assintoticamente compacta em $\eta = 0$ e $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ é eventualmente exponencialmente Lipschitz contínua com relação a $B := \bigcup_{\eta \in [0, \eta_1]} B_\eta$ para algum $\eta_1 > 0$;
- b) existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}_\eta$ tem k conjuntos invariantes isolados $\Xi_\eta^* = \{\Xi_{\eta,1}^*, \dots, \Xi_{\eta,k}^*\}$ para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\sup_{1 \leq i \leq k} \text{Dist}_H(\Xi_{\eta,i}^*, \Xi_{0,i}^*) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$;

- c) os conjuntos $\Xi_{\eta,i}^*$ tem variedades instáveis locais exponencialmente atratoras satisfazendo a Definição 1.4.10 com constantes C_0, ρ_0 e δ_0 independentes de η ; e
- d) o conjunto $\mathcal{Y}_0 := \bigcup_{i=1}^k \Xi_{0,i}^*$ atrai pontos sob a ação de $S_0(\cdot)$. Além disso, $S_0(\cdot)$ não possui estrutura homoclínica.

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que a família de atratores $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in [0, \eta_0]}$ é eventualmente uniformemente exponencialmente atratora sobre B .

A prova é análoga à do Teorema 2.13 de (CARVALHO; CHOLEWA; DŁOTKO, 2014). Para deixar o texto completo, colocamos os detalhes na Seção B.1.

1.4.1 Equitração exponencial de variedades instáveis locais

Seja $\mathcal{Z}$ um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{e^{At} : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Considere o seguinte problema de Cauchy

$$\dot{z} = Az + h(z), \quad z(0) = z_0 \in \mathcal{Z}. \quad (1.9)$$

Condição $\mathcal{H}$. Assuma que o conjunto $\sigma^+ = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ é compacto. Seja γ uma curva suave simples em $\rho(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ orientada no sentido antiorário. Defina

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\sigma^+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda \quad (1.10)$$

e defina $\mathcal{Z}^+ = \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$, $\mathcal{Z}^- = (I - \mathcal{Q})(\mathcal{Z})$, $A^\pm = A|_{\mathcal{Z}^\pm}$. Então, temos $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^+ \oplus \mathcal{Z}^-$, A^- gera um semigrupo fortemente contínuo sobre $\mathcal{Z}^-$ e $A^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}^+)$. Suponha que, para certo $M \geq 1, \omega > 0$,

$$\begin{aligned} \|e^{A^+ t}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z}^+)} &\leq M e^{\omega t}, \quad t \leq 0 \\ \|e^{A^- t}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z}^-)} &\leq M e^{-\omega t}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Sejam $D > 0, L > 0$ e denote por $\mathcal{LB}(D, L)$ o espaço métrico completo consistindo de todas as funções limitadas e globalmente Lipschitz contínuas $\Sigma : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathcal{Z}^-$ satisfazendo

$$\sup_{z^+ \in \mathcal{Z}^+} \|\Sigma(z^+)\|_{\mathcal{Z}^-} \leq D, \quad \text{e} \quad \|\Sigma(z^+) - \Sigma(\tilde{z}^+)\|_{\mathcal{Z}^-} \leq L \|z^+ - \tilde{z}^+\|, \quad z^+, \tilde{z}^+ \in \mathcal{Z}^+, \quad (1.12)$$

onde a distância entre $\Sigma, \tilde{\Sigma} \in \mathcal{LB}(D, L)$ é definida como

$$\|\Sigma - \tilde{\Sigma}\| := \sup_{z^+ \in \mathcal{Z}^+} \|\Sigma(z^+) - \tilde{\Sigma}(z^+)\|_{\mathcal{Z}^-}.$$

Lema 1.4.14 (Lema de Gronwall). Seja $\phi \in L^1((0, T), \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\phi(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s) \phi(s) ds, \quad \text{quase sempre em } (0, T),$$

com $a, b \in L^\infty(0, T)$. Então,

$$\phi(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s) b(s) e^{\int_s^t b(\mu) d\mu} ds.$$

Demonstração. Ver (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013). $\square$

Proposição 1.4.15. Seja $h : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ uma função continuamente diferenciável que leva limitados de $\mathcal{Z}$ em limitados de $\mathcal{Z}$ e satisfaz $h(0) = 0$, $h'(0) = 0 \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Suponha que a condição $\mathcal{H}$ valha, $0 < \nu < 1$ e escolha $\rho > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\rho M}{\omega} &\leq D, & \frac{\rho M}{\omega}(1+L) &\leq \nu < 1, \\ \frac{\rho M^2(1+L)}{\omega - \rho M(1+L)} &\leq L & \rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+L)(1+M)}{2\omega - \rho M(1+L)} &< \omega. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Defina $z^+ = \mathcal{Q}z$ e $z^- = z - z^+$, onde z é uma solução de (1.9) e considere as equações

$$\begin{aligned} \dot{z}^+ &= A^+ z^+ + H(z^+, z^-), \\ \dot{z}^- &= A^- z^- + G(z^+, z^-) \end{aligned} \quad (1.14)$$

com $H(z^+, z^-) = \mathcal{Q}h(z^+ + z^-)$ e $G(z^+, z^-) = (I - \mathcal{Q})h(z^+ + z^-)$. Seja h tal que H e G satisfazem

$$\begin{aligned} \|H(z^+, z^-)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \rho, \\ \|G(z^+, z^-)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \rho, \\ \|H(z^+, z^-) - H(\tilde{z}^+, \tilde{z}^-)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \rho(\|z^+ - \tilde{z}^+\|_{\mathcal{Z}} + \|z^- - \tilde{z}^-\|_{\mathcal{Z}}), \\ \|G(z^+, z^-) - G(\tilde{z}^+, \tilde{z}^-)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \rho(\|z^+ - \tilde{z}^+\|_{\mathcal{Z}} + \|z^- - \tilde{z}^-\|_{\mathcal{Z}}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

para todo $z^+ \in \mathcal{Z}^+$ e $z^- \in \mathcal{Z}^-$. Então, existe $\Sigma^* \in \mathcal{L}\mathcal{B}(D, L)$ tal que a variedade instável $W^u(0, 0)$ da solução de equilíbrio $(0, 0)$ de (1.14) é dada por

$$W^u(0, 0) = \{w \in Z^+ \times Z^- : w = (\mathcal{Q}w, \Sigma^*(\mathcal{Q}w))\}. \quad (1.16)$$

A prova da Proposição 1.4.15 se encontra em (BRUSCHI *et al.*, 2006). Para efeito de completude dos argumentos usados aqui, colocamos esta prova no Apêndice B.2.

Corolário 1.4.16. Nas hipóteses da Proposição 1.4.15, segue que existe uma vizinhança $\mathcal{O}_\delta(0)$ em X e uma função $\Sigma^* : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathcal{Z}^-$, tal que a variedade instável local $W_{\text{loc}}^u(0) := W^u(0, B_\delta(0))$ da solução de equilíbrio $x = 0$ de (1.9) satisfaz

$$W_{\text{loc}}^u(0) \subseteq \{w \in \mathcal{O}_\delta(0) : w = (\mathcal{Q}w, \Sigma^*(\mathcal{Q}w))\}.$$

Além disso, se valer a igualdade acima, então $W_{\text{loc}}^u(0)$ é exponencialmente atrator, isto é, existe γ tal que

$$\text{dist}_H(S(t)u_0, W_{\text{loc}}^u(0)) \leq Me^{-\gamma t}, \quad (1.17)$$

sempre que $u_0 \in \mathcal{O}_\delta(0)$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $\{S(s)u_0 : 0 \leq s \leq t\} \subset \mathcal{O}_\delta(0)$. Aqui, $S(t)u_0 := u(t)$ e a solução de (1.9) com dado inicial u_0 .

Observação 1.4.17. A prova da atração exponencial dada por (1.17) é a prova da desigualdade (B.23). A constante δ é pequena o suficiente para que (1.15) seja satisfeita em $\mathcal{O}_\delta(0)$. Segue da prova deste resultado que $\gamma = \gamma(\rho, M, L, \omega)$ e portanto, segue que as constantes da atração exponencial $W_{\text{loc}}^u(0)$ dependem de ρ, M, L, ω , e portanto obtemos a hipótese de equitração exponencial das variedades instáveis locais.

Observação 1.4.18. Se um semigrupo $T(\cdot)$ é gradient-like, então para cada equilíbrio u^* de $T(\cdot)$, existe uma vizinhança V tal que

$$W^u(u^*, V) = \tilde{W}^u(u^*) \cap V. \quad (1.18)$$

Suponha que exista uma aplicação $\tilde{T} : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ tal que

$$\tilde{T}(t)|_V = T(t)|_V, \forall t \geq 0.$$

Defina para $\tilde{T}$ as noções de solução global, variedade instável $\tilde{W}^u(u^*)$ e variedade instável local $\tilde{W}^u(u^*, V)$ como as definições que são dadas no caso de semigrupos. Então,

$$W^u(u^*, W) = \tilde{W}^u(u^*, W),$$

para toda vizinhança W de u^* em V .

Afirmamos que existe uma vizinhança W de u^* em V tal que

$$\tilde{W}^u(u^*, W) = \tilde{W}^u(u^*) \cap W.$$

De fato, se $\tilde{W}^u(u^*, W) \neq \tilde{W}^u(u^*) \cap W$ para qualquer vizinhança W de u^* em V , como $\tilde{T}(t)|_V = T(t)|_V$, teríamos u^* tendo estrutura homoclínica com relação a $T(\cdot)$, o que seria uma contradição.

Em particular, se $\tilde{W}^u(u^*)$ é dada um gráfico, por exemplo,

$$\tilde{W}^u(u^*) = \{u^* + \mathcal{Q}x + \Sigma(\mathcal{Q}x) : x \in X\},$$

então

$$W^u(u^*, W) = \tilde{W}^u(u^*, W) = \tilde{W}^u(u^*) \cap W = \{u^* + \mathcal{Q}x + \Sigma(\mathcal{Q}x) \in W : x \in X\}. \quad (1.19)$$

Nas aplicações que faremos desta observação, teremos $\mathcal{Q}$ projeção, Σ limitada e globalmente Lipschitz e portanto, para $r > 0$ e $c := \|\mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(X)}$, teríamos

$$W^u(u^*, B_r(u^*)) = \{u^* + \mathcal{Q}x + \Sigma(\mathcal{Q}x) \in B_r(u^*) : x \in B_{cr}(u^*)\}.$$

CORRETORES E POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS

Neste capítulo estudamos de forma abstrata o comportamento assintótico dos atratores da seguinte família de problemas semilineares

$$\frac{du}{dt} + A^\alpha u = f(u), \quad t > 0,$$

em um espaço de Hilbert X , com $0 \leq \alpha \leq 1$, quando o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é positivo, auto adjunto com resolvente compacto e $-\log(A)$ é o gerador do semigrupo $\{A^{-t} : t \geq 0\}$. Denotaremos X^α o espaço de potência fracionária associado ao operador A . A principal referência para as técnicas utilizadas aqui é (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013).

Seja $f : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ uma função limitada, Fréchet diferenciável com derivada contínua e limitada. Seja $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$. Consideremos as seguintes famílias de problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A_{\alpha,i}u = f(u), \quad t > 0, \quad i = 0, 1, \\ u(0) = u_0 \in X^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $A_{\alpha,0} := A^\alpha$ e $\{A_{\alpha,1}\}_{\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]}$ é a família que representará o *corretor de primeira ordem* da convergência de $A^{-\alpha}$ para A^{-1} quando $\alpha \rightarrow 1^-$. Definiremos, na Seção 2.1.1, $A_{\alpha,1} := C_\alpha$.

Segue dos resultados das Seção 2.1 e dos resultados de (HENRY, 1981) (Lema 3.3.2 e Corolário 3.3.5) que os problemas (2.1) estão bem colocado em $X^{\frac{1}{2}}$ para $i = 0, 1$; isto é, para cada $u_0 \in X^{\frac{1}{2}}$ e $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, existe uma única solução correspondente

$$u_{\alpha,i}(\cdot, u_0) \in C([0, \infty), X^{\frac{1}{2}}), \quad \text{com } u_{\alpha,i}(t, u_0) \in D(A_{\alpha,i}), \quad \forall t > 0,$$

tal que $u_{\alpha,i}(\cdot, u_0)$ satisfaz (2.1) e

$$u_{\alpha,i}(t, u_0) = e^{-A_{\alpha,i}t} u_0 + \int_0^t e^{-A_{\alpha,i}(t-s)} f(u_{\alpha,i}(s, u_0)) ds, \quad t \geq 0.$$

Além disso, do Teorema 3.4.4 de (HENRY, 1981), segue que $u_{\alpha,i}(t, \cdot) \in C^1(X^{\frac{1}{2}})$, $\forall t \geq 0$.

Assim, definimos o semigrupo $T_{\alpha,i}(\cdot)$ em $\mathcal{X} := X^{\frac{1}{2}}$ associado à (2.1) por $T_{\alpha,i}(t)u_0 = u_{\alpha,i}(t, u_0)$ para $t \geq 0$.

Definição 2.0.1. Para $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, as soluções de equilíbrio de (2.1) são soluções constantes com relação ao tempo, isto é, são soluções da equação

$$A_{\alpha,i}u - f(u) = 0. \quad (2.2)$$

Denotamos por $\mathcal{E}_{\alpha,i}$ o conjunto de soluções de (2.2), $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Definição 2.0.2. Dizemos que um equilíbrio $u_{\alpha,i}^*$ de (2.1) é hiperbólico se $\sigma(A_{\alpha,i} - f'(u_{\alpha,i}^*))$ é disjunto do eixo imaginário.

O teorema a seguir resume nossos principais resultados neste capítulo.

Teorema 2.0.3. Sejam $\{T_{\alpha,i}(\cdot)\}_{\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]}$, $i = 0, 1$, as famílias de semigrupos contínuos associados à (2.1). Então:

- (i) existe $\alpha_0 < 1$ tal que cada semigrupo $T_{\alpha,i}(\cdot)$ tem um atrator global $\mathcal{A}_{\alpha,i}$. Além disso, $\bigcup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq 1} \mathcal{A}_{\alpha,i}$ é um pré-compacto de X^β para cada $\beta \in [0, 1]$;
- (ii) $\{T_{\alpha,i}(\cdot)\}_{\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]}$ é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\alpha = 1$ para cada $i = 0, 1$. Denotando $B_\alpha := \mathcal{A}_{\alpha,0} \cup \mathcal{A}_{\alpha,1}$, temos que $\{B_\alpha\}_{\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]}$ é assintoticamente compacta em $\alpha = 1$;
- (iii) dado $\theta \in (0, 1)$, existem $M, L > 0, \gamma, \alpha_0 \in (0, 1)$ tais que

$$\sup_{u \in B_r^\mathcal{X}(0)} \|T_{\alpha,0}(t)u - T_{1,1}(t)u\|_\mathcal{X} \leq M(1 - \alpha)^{\theta/2} t^{-\gamma} e^{Lt}, \text{ e}$$

$$\sup_{u \in B_r^\mathcal{X}(0)} \|T_{\alpha,0}(t)u - T_{\alpha,1}(t)u\|_\mathcal{X} \leq M(1 - \alpha)^\theta t^{-\gamma} e^{Lt},$$

para todo $t > 0$ e $\alpha \in [\alpha_0, 1]$;

- (iv) se $\mathcal{E}_{1,1} = \{u_1^{*,1}, \dots, u_1^{*,m}\}$ só tem pontos hiperbólicos, então, para α próximo de 1, temos $\mathcal{E}_{\alpha,i} = \{u_{\alpha,i}^{*,1}, \dots, u_{\alpha,i}^{*,m}\}$ com todos os equilíbrios hiperbólicos, tais que

$$\sup_{j=1, \dots, m} \|u_{\alpha,i}^{*,j} - u_1^{*,j}\|_\mathcal{X} = O(1 - \alpha)^{1 - \frac{1}{2\alpha}}, i = 0, 1, \text{ e} \quad (2.3)$$

$$\sup_{j=1, \dots, m} \|u_{\alpha,0}^{*,j} - u_{\alpha,1}^{*,j}\|_\mathcal{X} = O(1 - \alpha)^{2 - \frac{1}{\alpha}} \quad (2.4)$$

quando $\alpha \rightarrow 1^-$;

(v) dados $D > 0$ e $L > 0$, existem projeções ortogonais $\mathcal{Q}_{\alpha,i}^j : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_{\alpha,i}^{+,j} = \mathcal{Q}_{\alpha,i}^j(\mathcal{Z})$, $\mathcal{Z}_{\alpha,i}^{-,j} = (I - \mathcal{Q}_{\alpha,i}^j)(\mathcal{Z})$ e aplicações Lipschitz $\Sigma_{\alpha,i}^{*,j} : \mathcal{Z}_{\alpha,i}^{+,j} \rightarrow \mathcal{Z}_{\alpha,i}^{-,j}$ satisfazendo

$$\sup_{v \in \mathcal{Z}} \|\Sigma_{\alpha,i}^{*,j}(\mathcal{Q}_{\alpha,i}^+(v))\|_{\mathcal{Z}} \leq D, \quad \|\Sigma_{\alpha,i}^{*,j}(v) - \Sigma_{\alpha,i}^{*,j}(\tilde{v})\|_{\mathcal{Z}} \leq L\|v - \tilde{v}\|_{\mathcal{Z}}, \quad (2.5)$$

e existe $\rho > 0$ tal que, se

$$W_{\rho}^u(u_{\alpha,i}^{*,j}) := W_{T_{\alpha,i}}^u(u_{\alpha,i}^{*,j}, B_{\rho}^{\mathcal{Z}}(u_1^{*,j})),$$

então

$$W_{\rho}^u(u_{\alpha,i}^{*,j}) \subset \{u_{\alpha,i}^{*,j} + \mathcal{Q}_{\alpha,i}^j x + \Sigma_{\alpha,i}^{*,j}(\mathcal{Q}_{\alpha,i}^j x) : x \in \mathcal{Z}, \|x\|_{\mathcal{Z}} < \rho\} =: W_{\alpha,i}^j$$

e, para cada $\theta \in (0, 1)$,

$$\sup_{j=1, \dots, m} \text{Dist}_H(W_{\alpha,0}^j, W_{\alpha,1}^j) = O((1 - \alpha)^{\theta}), \text{ e}$$

$$\sup_{j=1, \dots, m} \text{Dist}_H(W_{\alpha,0}^j, W_{1,1}^j) = O((1 - \alpha)^{\theta/2})$$

quando $\alpha \rightarrow 1^-$;

(vi) existe $\delta > 0$ tal que para cada $j = 1, \dots, m$ e $w \in \mathcal{Z}$ com $\|w - u_{\alpha,i}^{*,j}\|_{\mathcal{Z}} < \delta$, temos

$$\text{dist}(T_{\alpha,i}(t)(w), W_{\rho}^u(u_{\alpha,i}^{*,j})) \leq M e^{-\rho_1(t-t_0)} \text{dist}(T_{\alpha,i}(t_0)(w), W_{\rho}^u(u_{\alpha,i}^{*,j}))$$

enquanto $\|T_{\alpha,i}(t)(w) - u_{\alpha,i}^{*,j}\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$, com $M \geq 1$ e $\rho_1 > 0$ independentes de α .

Adicionalmente, suponha que o conjunto $\mathcal{Y}_1 := \bigcup_{j=1}^m u_1^{*,j}$ atrai pontos sob a ação de $T_{1,1}(\cdot)$ e que $T_{1,1}(\cdot)$ não tenha estrutura homoclínica. Então:

(vii) dado $\theta \in (0, 1)$, existem $v, L > 0$ tais que,

$$\text{Dist}_H(\mathcal{A}_{\alpha,i}, \mathcal{A}_{1,1}) = O((1 - \alpha)^{\frac{\theta}{2}(\frac{v}{L+v})}), i = 0, 1, \text{ e}$$

$$\text{Dist}_H(\mathcal{A}_{\alpha,0}, \mathcal{A}_{\alpha,1}) = O((1 - \alpha)^{\theta(\frac{v}{L+v})})$$

quando $\alpha \rightarrow 1^-$.

Este capítulo todo será dedicado à prova do teorema acima. A seguir descrevemos as seções deste capítulo.

Na Seção 2.1 estudamos a taxa de convergência de $A^{-\alpha}$ para A^{-1} e introduzimos a definição de corretor de primeira ordem (Definição 2.1.9), que é uma família de operadores uniformemente setoriais $\{C_{\alpha}\}$, e estimamos $\|C_{\alpha}^{-1} - A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}$. Mostramos que existe $\omega > 0$

tal que para cada ângulo $\varphi \in (\pi/2, \pi]$, as taxas acima se transferem para $\|(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} + \|(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + C_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}$ uniformemente em $\lambda \in \Sigma_{-\omega, \varphi}$.

Na Seção 2.2, estudamos a taxa de aproximação das projeções espectrais associadas aos autovalores dos operadores A^α e C_α , bem como o comportamento assintótico de autovalores e autoespaços generalizados associados a estes operadores quando $\alpha \rightarrow 1^-$ (Proposição 2.2.2).

Na Seção 2.3, usando os resultados da Seção 2.1, estimamos a distância entre semigrupos lineares $e^{-A^\alpha(\cdot)}$, $e^{-A(\cdot)}$ e $e^{-C_\alpha(\cdot)}$. Na Seção 2.4, com uso da fórmula da variação das constantes, transferimos estas taxas para os semigrupos não lineares correspondentes, associados à (2.1).

Na Seção 2.5, obtemos limitação uniforme dos resolventes que correspondem a linearização de (2.1) em torno de um equilíbrio.

Na Seção 2.6, obtemos a taxa de convergência dos equilíbrios associados à (2.1), bem como a taxa dos resolventes da linearização de (2.1) em torno de equilíbrios.

Na Seção 2.7, obtemos a equitração exponencial das variedades instáveis locais associados aos equilíbrios de (2.1), com o auxílio da linearização de (2.1).

Na Seção 2.8, com base nos resultados das seções anteriores, provamos o Teorema 2.0.3, que é o principal objetivo deste capítulo.

Na Seção 2.9, apresentamos uma motivação extendida da busca por introduzir a noção de corretores em sistemas dinâmicos.

2.1 Taxa de convergência dos resolventes

O lema a seguir é um resultado chave para a nosso conceito de corretores neste contexto.

Lema 2.1.1. Dados $\alpha_0 \in (0, 1)$ e $n \in \mathbb{N}$, existe $c > 0$ tal que para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$, vale

$$\|A^{-\alpha} - (\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (\log(A))^j (1-\alpha)^j) A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1-\alpha)^{n+1}. \quad (2.6)$$

Demonstração. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(X)$, $f(\alpha) = A^{-\alpha}$. Seja $x^* \in \mathcal{L}(X)^*$ com $\|x^*\|_{\mathcal{L}(X)^*} = 1$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\alpha) = \text{Re}(x^*(f(\alpha)))$. Então, existe $t_0 \in (\alpha, 1)$ tal que

$$\left| g(\alpha) - \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(1)}{j!} (1-\alpha)^j \right| = \left| \frac{g^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!} (1-\alpha)^{n+1} \right|.$$

Por outro lado, para cada $t > 0$,

$$g^{(n+1)}(t) = \text{Re}(x^*((-\log(A))^{n+1} A^{-t})) = \text{Re}(x^*(((-\log(A) A^{-\frac{t}{n+1}}))^{n+1})).$$

Como existe $c > 0$ tal que $\|\log(A)f(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ct^{-1}$ para todo $t \in (0, 1]$, obtemos

$$|g^{(n+1)}(t_0)| \leq \left[M \left(\frac{t_0}{n+1} \right)^{-1} \right]^{n+1} \leq M^{n+1} (n+1)^{n+1} \alpha_0^{-(n+1)},$$

e portanto

$$\left| g(\alpha) - \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(1)}{j!} (1-\alpha)^j \right| \leq \left[\frac{M^{n+1}(n+1)^n}{n!} \alpha_0^{-(n+1)} \right] (1-\alpha)^{n+1}.$$

Provando a mesma estimativa acima para $h(\alpha) := \text{Im}(x^*(f(\alpha)))$, que é análoga, o resultado segue do Teorema de Hahn Banach. $\square$

Como consequência do lema acima temos o seguinte resultado sobre taxa.

Corolário 2.1.2. A família de operadores $\{A^{-\alpha}\}_{\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]}$ está em $\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})$ e é uniformemente limitada. Além disso, existe $c > 0$ tal que para todo $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$\|A^{-\alpha} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq c(1-\alpha)^{1-\frac{1}{2\alpha}}. \quad (2.7)$$

Demonstração. Note que $\|A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} = \|A^{-(\alpha-\frac{1}{2})}\|_{\mathcal{L}(X)}$ com $\alpha - \frac{1}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$. Como $\{A^{-t} : t \geq 0\}$ é um semigrupo linear, a limitação uniforme de $\|A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}$, para $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, segue do Teorema A.2.3.

Seja $g_\alpha := A^{-\alpha} - A^{-1}$, $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$. Então, existe $c > 0$ tal que

$$\|A^\alpha g_\alpha x\| = \|I - A^{-(1-\alpha)} x\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in X, \alpha \in [\frac{1}{2}, 1].$$

Por outro lado, do Lema 2.1.1, segue que existe $c > 0$ tal que

$$\|g_\alpha x\| \leq c(1-\alpha)\|x\|, \quad \forall x \in X, \alpha \in [\frac{1}{2}, 1].$$

Por interpolação (Teorema A.3.9), segue que existe $c > 0$

$$\|A^{\frac{1}{2}} g_\alpha x\| \leq c \|A^\alpha g_\alpha x\|^{\frac{1}{2\alpha}} \|g_\alpha x\|^{1-\frac{1}{2\alpha}}, \quad \forall x \in X, \alpha \in [\frac{1}{2}, 1],$$

e isto implica (2.7). $\square$

O lema a seguir nos fala da setorialidade uniforme da família $\{A^\alpha\}_{\alpha \in [0, 1]}$.

Lema 2.1.3. Para cada $\phi \in (0, \pi)$ existem $\omega > 0$ e $c \geq 1$ tais que

$$\|(\lambda + A^\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{|\lambda + \omega|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\phi, -\omega}, \forall \alpha \in [0, 1],$$

onde $\Sigma_{-\omega, \phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\omega\} : |\arg(\lambda + \omega)| < \phi\}$.

Demonstração. Como $A^{-(\cdot)}$ é um semigrupo linear, segue que $1 \leq \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\|A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)}\} := c < \infty$. Assim, fixado $\delta \in (0, 1)$ e denotando $\delta_0 := \delta/c$, temos que $B_{\delta_0}^{\mathbb{C}}(0) \subset \rho(-A^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}(\lambda A^{-\alpha} + I)^{-1}$$

e portanto, dado $\omega \in (0, \delta_0)$, existe $c > 0$ tal que

$$\|(\lambda + \omega)(\lambda + A^\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c, \quad \forall \lambda \in B_{\delta_0}^{\mathbb{C}}(0), \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (2.8)$$

Por outro lado, como $W(A^\alpha) \subset [0, \infty)$ e $0 \in \rho(A^\alpha)$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$, segue do Teorema A.1.16 que $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \times \{0\} \subset \rho(A^\alpha)$ e portanto, para cada $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, existe $c \geq 1$ tal que

$$\|\lambda(\lambda + A^\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{0, \varphi}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Em particular,

$$\|(\lambda + \omega)(\lambda + A^\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{0, \varphi} \setminus B_{\delta_0}^{\mathbb{C}}(0), \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

Em particular, fixado $\omega \in (0, \delta_0)$ e $\phi \in (\pi/2, \pi)$, segue que existe $\varphi \in \phi \in (\pi/2, \pi)$ tal que

$$\Sigma_{-\omega, \phi} \setminus B_{\delta_0}^{\mathbb{C}}(0) \subset \Sigma_{0, \varphi} \setminus B_{\delta_0}^{\mathbb{C}}(0),$$

consequentemente, combinando isto com (2.8) e (2.9), obtemos o resultado. $\square$

Com isto obtemos o seguinte corolário sobre taxa para os resolventes.

Corolário 2.1.4. Para cada $\phi \in (0, \pi)$ e $\alpha_0 \in (0, 1)$, existem $M \geq 1$ e $\omega > 0$ tais que para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$,

$$\|(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(1 - \alpha), \quad \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega, \phi}.$$

Em particular, existe $M_1 \geq 1$ tal que

$$\|(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq M_1(1 - \alpha)^{1 - \frac{1}{2\alpha}}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega, \phi},$$

para todo $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Demonstração. É consequência imediata da identidade

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + A)^{-1} = A^\alpha(\lambda + A^\alpha)^{-1}[A^{-\alpha} - A^{-1}]A(\lambda + A)^{-1},$$

dos Lemas 2.1.1, 2.1.3 e do Corolário 2.1.2. $\square$

2.1.1 Taxa de convergência dos resolventes com corretor

Seja $C_\alpha^{-1} := [A^{-1} + (1 - \alpha) \log(A)A^{-1}] \in \mathcal{L}(X)$. Como consequência do Lema 2.1.1, temos o seguinte resultado sobre taxa.

Corolário 2.1.5. As famílias de operadores $\{A^{-\alpha}\}_{\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]}$ e $\{C_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]}$ são uniformemente limitados em $\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})$ e

$$\|A^{-\alpha} - C_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq c(1 - \alpha)^{2 - \frac{1}{\alpha}}, \quad \forall \alpha \in [\frac{1}{2}, 1]. \quad (2.10)$$

Demonstração. Fazendo $B := -\log(A)$, temos que $A^{-(1-\alpha)} = e^{B(1-\alpha)}$. Assim, segue do Teorema A.2.10 que existe $c > 0$ tal que

$$\|(1 - \alpha) \log(A) A^{-(1-\alpha)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

e portanto $\|A^\alpha(A^{-\alpha} - C_\alpha^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uniformemente limitada para $\alpha \in [0, 1]$. Por outro lado, dado $\alpha_0 \in (0, 1)$, existe $c > 0$ tal que

$$\|A^{-\alpha} - C_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(1 - \alpha)^2, \quad \forall \alpha \in [\alpha_0, 1],$$

e o resultado segue por interpolação. $\square$

Então, podemos fazer a seguinte pergunta: será que C_α^{-1} é o resolvente de alguma família de semigrupos? Os próximos dois lemas respondem esta pergunta.

Lema 2.1.6. Seja $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ um operador auto adjunto com resolvente compacto. Se existe $v \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma_p(B) \subset [v, \infty)$, então a imagem numérica $W(B)$ de B é tal que $W(B) \subset [v, \infty)$ e B é setorial.

Demonstração. Note que $\sigma_p(B) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots\}$ só tem autovalores isolados (Lema A.1.6). Como B é auto adjunto, segue do Lema A.1.13 que existem projeções ortogonais $P_n \in \mathcal{L}(X)$ tais que para cada $x \in D(B)$,

$$Bx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x$$

com $x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x$. Suponha que $v = 0$. Então, para $x \in D(B)$,

$$\langle Bx, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|P_n x\|^2 \geq \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2 \geq 0$$

e portanto $W(B) \subset [0, \infty)$. O caso geral segue de que $\sigma(\lambda + B) = \lambda + \sigma(B)$. $\square$

Lema 2.1.7. Seja $B_\alpha := I + (1 - \alpha) \log(A) : D(\log(A)) \subset X \rightarrow X$. Então, $-\log(A)$ é auto adjunto, tem resolvente compacto e existe $\alpha_0 < 1$ tal que $W(B_\alpha) \subset [0, \infty)$ para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Demonstração. Por hipótese, A é auto adjunto com resolvente compacto. Além disso, $[\omega, \infty) \subset \rho(-\log(A))$, o que implica que $\sigma_p(I + (1 - \alpha)\log(A)) \subset (1 - \omega(1 - \alpha), \infty)$ e portanto, para $\omega(1 - \alpha) < 1$ o resultado segue do Lema 2.1.6. $\square$

Com os lemas acima, provamos que cada C_α^{-1} é o resolvente de um operador fechado.

Lema 2.1.8. Seja $C_\alpha : D(C_\alpha) \subset X \rightarrow X$, $C_\alpha := (B_\alpha A^{-1})^{-1}$. Então, C_α é fechado e $D(A) \subset D(C_\alpha)$. Além disso, existe $\alpha_0 < 1$ tal que $W(C_\alpha) \subset [0, \infty)$ para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$, e a família $\{C_\alpha\}_{\alpha \in [\alpha_0, 1]}$ é uniformemente setorial.

Demonstração. C_α é fechado pois é o inverso de um operador limitado.

Afirmção 1: $D(A) \subset D(C_\alpha)$.

Como $-\log(A)$ é o gerador de $\{A^{-t} : t \geq 0\}$, segue que $A^{-1}X \subset D(\log(A))$ e portanto $D(A) \subset D(\log(A))$. Além disso, para todo $x \in D(\log(A))$ e $\beta > 0$,

$$\log(A)A^{-\beta}x = A^{-\beta}\log(A)x.$$

Logo,

$$B_\alpha A^{-\beta}x = A^{-\beta}B_\alpha x.$$

Seja $y \in D(A)$. Então, $y = A^{-1}x$ para algum $x \in X$. Como B_α é bijetor (para $1 - \alpha$ pequeno), existe $z \in D(\log(A))$ tal que $x = B_\alpha z$ e portanto $y = A^{-1}B_\alpha z = B_\alpha A^{-1}z \in B_\alpha(D(A))$, isto é, $D(A) \subset B_\alpha(D(A)) = B_\alpha A^{-1}X := D(C_\alpha)$.

Afirmção 2: $W(C_\alpha) \subset [0, \infty)$.

De fato, se $x \in D(\log(A))$, então

$$\langle C_\alpha^{-1}x, x \rangle = \langle B_\alpha A^{-1}x, x \rangle = \langle B_\alpha A^{-\frac{1}{2}}x, A^{-\frac{1}{2}}x \rangle \geq 0,$$

e como $0 \in \rho(C_\alpha)$ (portanto $\rho(C_\alpha)$ contém uma vizinhança do zero), segue que a família C_α é uniformemente setorial para $1 - \alpha$ pequeno tal que $\omega(1 - \alpha) < 1$. $\square$

Definição 2.1.9. Definimos o *corretor de primeira ordem* da convergência de $A^{-\alpha}$ para A^{-1} quando $\alpha \rightarrow 1^-$ como sendo a família $\{C_\alpha\}_{\alpha \in [\alpha_0, 1]}$ de operadores uniformemente setoriais obtida usando a aproximação de Taylor de primeira ordem de $f(\alpha) = A^{-\alpha}$ em torno de $\alpha = 1$.

Lema 2.1.10. Seja $\alpha_0 < 1$ do Lema 2.1.8. Então, para cada $\phi \in (0, \pi)$, existem $\omega > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|(\lambda + A^\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}, \|(\lambda + C_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda + \omega|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega, \phi},$$

para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Demonstração. É análoga à prova do Lema 2.1.3. $\square$

Observação 2.1.11. Apresentamos aqui outra prova da setorialidade uniforme dos A^α e dos C_α . De fato, existe $\alpha_0 < 1$ tal que $W(A^\alpha), W(C_\alpha) \subset [0, \infty)$ para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$, e portanto $\sigma_p(A^\alpha), \sigma_p(C_\alpha) \subset [0, \infty)$. Por outro lado, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^{\mathbb{C}}(0) \subset \rho(A^\alpha) \cap \rho(C_\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ (pois $\{A^\alpha, C_\alpha\}_{\alpha \in [0, 1]}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{L}(X)$). Logo, $\sigma_p(A^\alpha), \sigma_p(C_\alpha) \subset [\delta, \infty)$ e portanto, do Lema 2.1.6, obtemos $W(A^\alpha), W(C_\alpha) \subset [\delta, \infty)$ para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ e a setorialidade uniforme segue analogamente ao Corolário A.1.17.

Agora estamos prontos para estimar a taxa de aproximação entre os resolventes de A^α e do corretor C_α .

Corolário 2.1.12. Para cada $\phi \in (0, \pi)$ existem $M \geq 1$, $\omega > 0$ e $\alpha_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$ tais que para cada $\alpha \in [\alpha_0, 1]$

$$\|(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + C_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(1 - \alpha)^2, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega, \phi},$$

e

$$\|(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + C_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq M(1 - \alpha)^{2 - \frac{1}{\alpha}}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega, \phi},$$

para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Demonstração. É consequência imediata da identidade

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + C_\alpha)^{-1} = A^\alpha(\lambda + A^\alpha)^{-1}[A^{-\alpha} - C_\alpha^{-1}]C_\alpha(\lambda + C_\alpha)^{-1},$$

e dos resultados do Lema 2.1.1, Lema 2.1.10 e do Corolário 2.1.5. $\square$

Denotemos $A_{\alpha,0} := A^\alpha$ e $A_{\alpha,1} := C_\alpha$ para $\alpha \in (0, 1)$ e $A_{1,0} = A_{1,1} = A$.

Lema 2.1.13. Se K é um compacto de $\rho(A)$, então existe $\alpha_K \in [0, 1)$ tal que $K \subset \rho(A_{\alpha,i})$ para todo $\alpha \in [\alpha_K, 1]$, $i = 0, 1$, e

$$\sup_{\alpha \in [\alpha_K, 1]} \sup_{\lambda \in K} \|(\lambda - A_{\alpha,i})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty. \quad (2.11)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in K} \|(\lambda - A_{\alpha,i})^{-1} - (\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &= O(\|A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}) \text{ e} \\ \sup_{\lambda \in K} \|(\lambda - A_{\alpha,0})^{-1} - (\lambda - A_{\alpha,1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &= O(\|A_{\alpha,0}^{-1} - A_{\alpha,1}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Demonstração. Provemos que existe $\hat{\alpha}_K \in [0, 1)$ tal que $K \subset \rho(A^\alpha)$ para todo $\alpha \in [\hat{\alpha}_K, 1]$. Se não, existiria uma sequência $\alpha_n \rightarrow 1$, $\lambda_n \in K$ (que podemos supor convergente para certo $\lambda \in K$) $u_{\alpha_n} \in X$, $\|u_{\alpha_n}\|_X = 1$ tal que $\lambda_n A^{-\alpha_n} u_{\alpha_n} = u_{\alpha_n}$. Do Corolário 2.1.2, segue que $\{u_{\alpha_n}\}$ é limitada em $X^{\frac{1}{2}}$ e como $X^{\frac{1}{2}}$ está compactamente imerso em X , podemos supor que $\{u_{\alpha_n}\}$ converge para algum $u \in X$ com $\|u\|_X = 1$. Do Corolário 2.1.2, obtemos $Au = \lambda u$, que contradiz o fato de $\sigma(A) \cap K = \emptyset$.

Mostremos que existe $\hat{\alpha}_K \in [\alpha_K, 1)$ tal que (2.11) vale. É suficiente provar que existe um $\alpha_K \in [\hat{\alpha}_K, 1)$ tal que

$$\{\|(I - \lambda A^\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} : \alpha \in [\alpha_K, 1] \text{ e } \lambda \in K\} \text{ é limitada.}$$

Se não, deveria existir uma sequência $\{\lambda_n\}$ em K (que novamente podemos supor que converge para algum $\tilde{\lambda} \in K$) e uma sequência $\{\alpha_n\}$ em $[0, 1]$ com $\alpha_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$ e tal que

$$\|(I - \lambda_n A^{\alpha_n})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Mas isto implica a existência de uma sequência $\{u_n\}$ em X tal que $\|u_n\|_X = 1$ e

$$\|(I - \lambda_n A^{\alpha_n})u_n\|_X \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $\{\lambda_n A^{-\alpha} u_n\}$ é limitada em $X^{\frac{1}{2}}$ (Corolário 2.1.2), ela tem uma subsequência que converge para algum $u_0 \in X$. Então, devemos ter $(I - \tilde{\lambda} A^{-1} u_0) = 0$, que contradiz o fato de $\sigma(A) \cap K = \emptyset$.

De forma totalmente análoga, segue que existe $\hat{\alpha}_K \in [0, 1)$ tal que $K \subset \rho(C_\alpha)$ para todo $\alpha \in [\alpha_K, 1]$.

A prova de (2.12) segue como na prova dos Corolário 2.1.4 e 2.1.12, usando (2.11) e o fato de K ser compacto. $\square$

2.2 Convergência dos autovalores e autofunções

Os resultados desta seção são inspirados em (VAINIKKO, 1976) e (CARVALHO, 2016).

Seja γ uma curva suave simples em $\rho(A)$, orientada no sentido anti horário em torno de $\mu_1 \in \sigma(A)$ tal que $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \mu_1)^{-1} d\lambda = 1$ e com γ envolvendo apenas o autovalor μ_1 de $\sigma(A)$.

Segue do Lema 2.1.13 que existe um α_γ tal que o traço de γ está em $\rho(A_{\alpha,i})$ para $\alpha_\gamma \leq \alpha \leq 1$ e $i = 0, 1$.

Definimos a projeção espectral

$$\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_1) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - A_{\alpha,i})^{-1} d\lambda \quad (2.13)$$

e, para $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \mu)^{-1} d\lambda = 1$, definimos o auto espaço generalizado associado a μ , $W(\mu, A_{\alpha,i}) := \mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_1)(X)$, $\alpha_\gamma \leq \alpha \leq 1$. Note que $\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu)$ é compacto, é uma projeção ortogonal (pois é auto adjunta) e $\dim W(\mu, A_{\alpha,i}) = \text{rank}(\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_1)) < \infty$.

Proposição 2.2.1. A família de operadores $\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_1) \in \mathcal{L}(X)$ converge uniformemente para $\mathcal{Q}_{1,1}(\mu_1) \in \mathcal{L}(X)$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$. Além disso, existe $\alpha_0 \in (0, 1)$ tal que para $\alpha_0 < \alpha \leq 1$ e

$i = 0, 1$, temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_1) - \mathcal{Q}_{1,1}(\mu_1)\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} &= O(\|A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}), \\ \|\mathcal{Q}_{\alpha,0}(\mu_1) - \mathcal{Q}_{\alpha,1}(\mu_1)\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} &= O(\|A_{\alpha,0}^{-1} - A_{\alpha,1}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}), \\ \|A_{\alpha,i}\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_1) - A\mathcal{Q}_{1,1}(\mu_1)\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} &= O(\|A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}), \\ \|A_{\alpha,0}\mathcal{Q}_{\alpha,0}(\mu_1) - A_{\alpha,1}\mathcal{Q}_{\alpha,1}(\mu_1)\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} &= O(\|A_{\alpha,i}^{-1} - A_{\alpha,1}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}).\end{aligned}$$

Demonstração. Note que

$$\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_1) - \mathcal{Q}_{1,1}(\mu_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} [(\lambda - A_{\alpha,i})^{-1} - (\lambda - A)^{-1}] d\lambda,$$

e portanto, notando que $A_{\alpha,i}(\lambda - A_{\alpha,i})^{-1} = \lambda(\lambda - A_{\alpha,i})^{-1} - I$, o resultado segue do Lema 2.1.13. $\square$

Para cada $\delta > 0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ defina $S_{\delta}(\lambda_0) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$.

Proposição 2.2.2. Temos:

- (i) se $\mu \in \sigma(A)$, então existem sequências $\alpha_n \rightarrow 1^-$ e $\{\mu_n\}$, com $\mu_n \in \sigma(A_{\alpha_n,i})$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\mu_n \rightarrow \mu$ quando $n \rightarrow \infty$;
- (ii) se $\alpha_n \rightarrow 1^-$ e $\mu_n \rightarrow \mu$ quando $n \rightarrow \infty$, com $\mu_n \in \sigma(A_{\alpha_n,i})$, $n \in \mathbb{N}$, então $\mu \in \sigma(A)$;
- (iii) existe um $\alpha_0 \in [0, 1)$ tal que $\dim W(\mu, A_{\alpha,i}) = \dim W(\mu, A)$ para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$;
- (iv) se $u \in W(\mu, A)$, então existe uma subsequência $\{u^{\alpha}\}$, $u^{\alpha} \in W(\mu, A_{\alpha,i})$ tais que $u^{\alpha} \rightarrow u$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$; e
- (v) se $\alpha_n \rightarrow 1^-$ e $u_n \in W(\mu, A_{\alpha_n,i})$, $n \in \mathbb{N}$ com $\|u_n\|_X = 1$, então $\{u_n\}$ tem uma subsequência convergente, e qualquer ponto limite de $\{u_n\}$ pertence a $W(\mu, A)$.

Demonstração. Faremos a prova do caso $i = 0$. A prova do caso $i = 1$ é a mesma trocando a notação e os resultados anteriores que fornecem as estimativas que usamos.

(i) Sejam $\lambda_0 \in \sigma(A)$ e $\delta > 0$ tais que $\overline{B}_{\delta}(\lambda_0) \cap \sigma(A) = \{\lambda_0\}$, com o fecho tomado em $\mathbb{C}$. Do Corolário 2.1.4, existe $\alpha_0 \in [0, 1)$ tal que

$$\{\|(\lambda - A^{\alpha})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} : \alpha \in [\alpha_0, 1] \text{ e } \lambda \in S_{\delta}(\lambda_0)\}$$

é limitado.

Se existe $\delta > 0$ e uma sequência $\alpha_n \rightarrow 1$ tal que $\overline{B}_{\delta}(\lambda_0) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A^{\alpha_n})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é analítica para cada $n \in \mathbb{N}$, do Lema 2.1.13, e do Teorema do Módulo Máximo segue que

$$\|(I - \lambda_0 A^{-\alpha_n})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sup_{|\lambda - \lambda_0| = \delta \text{ e } n \in \mathbb{N}} \|(I - \lambda_0 A^{-\alpha_n})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Assim, se $u^\alpha \rightarrow u$ em X , então

$$\|(\lambda_0 A^{-1} - I)u\|_X = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \|(\lambda_0 A^{-\alpha} - I)u^\alpha\|_X \geq c\|u\|_X,$$

para algum $c > 0$, e consequentemente $\lambda_0 \in \rho(A)$. Isto contradiz a escolha de λ_0 e prova que para cada $\delta > 0$, $\overline{B}_\delta(\lambda_0)$ contém algum elemento de $\sigma(A^\alpha)$ para todo α suficientemente próximo de 1.

(ii) Se $\alpha_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ com $\lambda_n \in \sigma(A^{\alpha_n})$, e $(I - \lambda_n A^{-\alpha_n})u_n = 0$ com $\|u_n\|_X = 1$, então

$$\|(I - \lambda A^{-\alpha_n})u_n\|_X = \|(I - \lambda_n A^{-\alpha_n})u_n - (\lambda - \lambda_n)A^{-\alpha_n}u_n\|_X \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Como $\|u_n\|_X = 1$, tomando subsequências temos que $\lambda A^{-\alpha_n}u_n \rightarrow u$ e $u_n \rightarrow u$ com $\|u\|_X = 1$. Assim, $u - \lambda A^{-1}u = 0$, $u \neq 0$ e $\lambda \in \sigma(A)$.

(iii) Como $(\lambda - A^\alpha)^{-1} \rightarrow (\lambda - A)^{-1}$ uniformemente para $\lambda \in S_\delta(\lambda_0)$ (ver (2.12) no Lema 2.1.13), segue que $\mathcal{Q}_{\alpha,0}(\lambda_0) \rightarrow \mathcal{Q}_{1,1}(\lambda_0)$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$.

Se $v_1, \dots, v_k$ é uma base para $W(\lambda_0, A) = \mathcal{Q}_{1,1}(\lambda_0)X$, então, é fácil ver que, para α suficientemente próximo de 1,

$$\{\mathcal{Q}_{\alpha,0}(\lambda_0)v_1, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha,0}(\lambda_0)v_k\}$$

é linearmente independente em $\mathcal{Q}_{\alpha,0}(\lambda_0)X$. Assim, $\dim(\mathcal{Q}_{\alpha,0}(\lambda_0)(X)) \geq \dim(\mathcal{Q}_{1,1}(\lambda_0)(X))$.

Provamos a igualdade por contradição. Suponha que para alguma sequência $\alpha_n \rightarrow 1$,

$$\dim(\mathcal{Q}_{\alpha_n,0}(\lambda_0)(X)) > \dim(\mathcal{Q}_{1,1}(\lambda_0)(X)).$$

Do Lema IV.2.3 em Kato ((KATO, 1995)), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $u_n \in W(\lambda_0, A^{\alpha_n})$ com $\|u_n\|_X = 1$ tal que $\text{dist}_H(u_n, W(\lambda_0, A)) = 1$. Usando a Proposição 2.2.1, podemos assumir que $\mathcal{Q}_{\alpha_n,0}(\lambda_0)u_n = u_n \rightarrow \mathcal{Q}_{\alpha_n,0}(\lambda_0)u_n$. Então, temos uma contradição pois

$$1 \leq \|u_n - \mathcal{Q}_{1,1}(\lambda_0)u\|_X = \|\mathcal{Q}_{\alpha_n,0}(\lambda_0)u_n - \mathcal{Q}_{1,1}(\lambda_0)u\|_X \rightarrow 0.$$

(iv) Segue tomando $u^\alpha = \mathcal{Q}_{\alpha,0}(\lambda_0)u$.

(v) Segue da Proposição 2.2.1. □

Observação 2.2.3. Se μ é um autovalor isolado de A , então podemos definir $\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu)$ como em (2.13), e segue da Proposição 2.2.2 que existe um autovalor $\mu_{\alpha,i}$ de $A_{\alpha,i}$ tal que $\mu_{\alpha,i} \rightarrow \mu$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$, e assim $\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu) = \mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_\alpha)$.

Segue dos resultados de convergência da Proposição 2.2.1 que

$$\|\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_\alpha)\mathcal{Q}_{1,1}(\mu) - \mathcal{Q}_{1,1}(\mu)\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} = O(\|A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}) \quad (2.14)$$

e que a restrição $f_\alpha := \mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_\alpha)|_{R(\mathcal{Q}_{1,1}(\mu))} : R(\mathcal{Q}_{1,1}(\mu)) \rightarrow R(\mathcal{Q}_{\alpha,i}(\mu_\alpha))$ é um isomorfismo. De fato, usando (2.14), é simples verificar que para α próximo de 1, f_α é injetora e, como a dimensão dos espaços é finita e igual para α próximo de 1, o resultado segue.

2.3 Taxa de convergência dos semigrupos Lineares

Lema 2.3.1. Seja Γ a fronteira do setor $\Sigma_{-\omega, \phi}$ com $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ orientada no sentido em que a parte imaginária de λ é crescente quando λ percorre Γ . Então, existe $M = M(\phi) > 0$ tal que

$$\int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} d|\lambda| = Mt^{-1} e^{-\omega t}.$$

Demonstração. Note que

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{-\omega + re^{-i\phi} : 0 \leq r < \infty\} \cup \{-\omega + re^{i\phi} : 0 \leq r < \infty\}.$$

Por outro lado, para $\lambda \in \Gamma_1$, temos $e^{\operatorname{Re} \lambda t} = e^{(-\omega + r \cos(\phi))t}$ e portanto

$$\int_{\Gamma_1} e^{\operatorname{Re} \lambda t} d|\lambda| = \int_0^\infty e^{(-\omega + r \cos(\phi))t} |e^{-i\phi}| dr = e^{-\omega t} \int_0^\infty e^{(r \cos(\phi))t}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $(-r \cos(\phi))t = \xi$, obtemos

$$\int_{\Gamma_1} e^{\operatorname{Re} \lambda t} d|\lambda| = Mt^{-1} e^{-\omega t},$$

com $M = -\frac{1}{\cos(\phi)} > 0$. Analogamente se calcula a integral sobre Γ_2 e o resultado segue. $\square$

Teorema 2.3.2. Existem $c, \omega > 0$ e $\alpha_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$ tais que para todo $\alpha_0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\|e^{-A^\alpha t} - e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq g_0(t) e^{-\omega t}, \quad \forall t > 0,$$

onde $g_0(t) := c \min\{(1 - \alpha)^{1 - \frac{1}{2\alpha}} t^{-1}, \max\{t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2\alpha}}\}\}$.

Demonstração. Como $\{A^\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ é uniformemente setorial (Corolário 2.1.4), temos

$$e^{-A^\alpha t} - e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} [(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + A)^{-1}] d\lambda,$$

com Γ como no Lema 2.3.1. Logo, segue do Corolário 2.1.4 que existem $M \geq 1$, $\omega > 0$ e $\alpha_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$ tais que para cada $\alpha \in [\alpha_0, 1]$,

$$\|e^{-A^\alpha t} - e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} M (1 - \alpha)^{1 - \frac{1}{2\alpha}} d\lambda \leq c (1 - \alpha)^{1 - \frac{1}{2\alpha}} t^{-1} e^{-\omega t}. \quad (2.15)$$

Por outro lado, segue do Teorema A.3.11 que

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{-A^\alpha t}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(A^\alpha)^{\frac{1}{2\alpha}} e^{-A^\alpha t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_{\frac{1}{2\alpha}} t^{-\frac{1}{2\alpha}} e^{-\omega t}$$

e

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{-At}\| \leq M_{\frac{1}{2\alpha}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\omega t}.$$

e portanto

$$\|e^{-A^\alpha t} - e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq c \max\{t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2\alpha}}\} e^{-\omega t}. \quad (2.16)$$

Usando (2.15) e (2.16), concluímos a prova. $\square$

2.3.1 Taxa de convergência dos semigrupos lineares com corretor

O lema a seguir é um resultado básico de integração em espaços de Banach, que usa basicamente as propriedades de operadores fechados, que estaremos usando nesta seção.

Lema 2.3.3. Seja $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado, $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva retificável, $f(\lambda) \in D(B)$ para todo $\lambda \in \Gamma$. Se existem $\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda$ e $\int_{\Gamma} Bf(\lambda) d\lambda$, então $\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda \in D(B)$ e

$$B\left(\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda\right) = \int_{\Gamma} Bf(\lambda) d\lambda.$$

Teorema 2.3.4. A restrição $\{e^{-C_{\alpha}t} : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X^{\frac{1}{2}} : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}})$ está bem definida, tem uma extensão analítica num setor complexo e $e^{-C_{\alpha}t}X \subset X^{\beta}$ para cada $t > 0$ e $\beta \in [0, 1)$.

Demonstração. Segue do Teorema A.3.11 que $R(e^{-C_{\alpha}t}) \subset D(C_{\alpha})$ para todo $t > 0$. Por outro lado, $D(C_{\alpha}) = R(C_{\alpha}^{-1}) \subset X^{\beta}$ para todo $\beta \in [0, 1)$. Assim, $R(e^{-C_{\alpha}t}) \subset X^{\frac{1}{2}}$ e portanto a restrição $e^{-C_{\alpha}t} : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X^{\frac{1}{2}}$ está bem definida.

Note que, para $x \in X^{\frac{1}{2}}$,

$$e^{-C_{\alpha}t}x = \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} e^{\lambda t} (\lambda + C_{\alpha})^{-1} x d\lambda, \text{ e}$$

$$e^{-C_{\alpha}t}A^{\frac{1}{2}}x = \int_{\Gamma} A^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi i} e^{\lambda t} (\lambda + C_{\alpha})^{-1} x \right) d\lambda,$$

e portanto, fazendo $B := A^{\frac{1}{2}}$ e $f(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} e^{\lambda t} (\lambda + C_{\alpha})^{-1} x$, segue do Lema 2.3.3 que $e^{-C_{\alpha}t}x \in D(A^{\frac{1}{2}})$ e $A^{\frac{1}{2}}e^{-C_{\alpha}t}x = e^{-C_{\alpha}t}A^{\frac{1}{2}}x$ e portanto, a restrição de $e^{-C_{\alpha}t}x$ à $X^{\frac{1}{2}}$ é um semigrupo fortemente contínuo. Por outro lado, segue do Teorema A.2.10 que

$$e^{-C_{\alpha}t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + C_{\alpha})^{-1} d\lambda,$$

define uma função analítica de um setor $\Sigma_{0, \phi - \pi/2} \subset \mathbb{C}$ sobre $\mathcal{L}(X)$. Mas para cada $t \in \Sigma_{0, \phi - \pi/2}$ e $x \in X^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\|(e^{-C_{\alpha}(t+h)} - e^{-C_{\alpha}t} + C_{\alpha}e^{-C_{\alpha}t})x\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq \|e^{-C_{\alpha}(t+h)} - e^{-C_{\alpha}t} + C_{\alpha}e^{-C_{\alpha}t}\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_{X^{\frac{1}{2}}},$$

isto é,

$$\|e^{-C_{\alpha}(t+h)} - e^{-C_{\alpha}t} + C_{\alpha}e^{-C_{\alpha}t}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}})} \leq \|e^{-C_{\alpha}(t+h)} - e^{-C_{\alpha}t} + C_{\alpha}e^{-C_{\alpha}t}\|_{\mathcal{L}(X)} = o(h),$$

e portanto $e^{-C_{\alpha}(\cdot)} : \Sigma_{0, \phi - \pi/2} \rightarrow \mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}})$ é analítica. $\square$

Observação 2.3.5. Outra forma de provar o resultado acima é definir a parte de C_{α} em $X^{\frac{1}{2}}$ por

$$D(\bar{C}_{\alpha}) := \{x \in D(C_{\alpha}) : C_{\alpha}x \in X^{\frac{1}{2}}\},$$

e $\bar{C}_{\alpha}x := C_{\alpha}x$ para cada $x \in D(\bar{C}_{\alpha})$. Note que $D(\bar{C}_{\alpha})$ é denso em $X^{\frac{1}{2}}$ pois $D(C_{\alpha})$ é denso em X e C_{α}^{-1} comuta com $A^{-\frac{1}{2}}$. Além disso, $\bar{C}_{\alpha}^{-1} = C_{\alpha}^{-1}|_{X^{\frac{1}{2}}} \in \mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}})$, o que implica que $\bar{C}_{\alpha}$ é fechado.

Como C_α é setorial e $(\lambda + C_\alpha)^{-1}A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}(\lambda + C_\alpha)^{-1}$ em $X^{\frac{1}{2}}$, segue facilmente que $\bar{C}_\alpha$ é setorial e, do Teorema A.2.10, obtemos $e^{-\bar{C}_\alpha(\cdot)} : \Sigma_{0,\phi-\pi/2} \rightarrow X^{\frac{1}{2}}$ analítica e, para $x \in X^{\frac{1}{2}}$ e $t \in \Sigma_{0,\phi-\pi/2}$,

$$e^{-\bar{C}_\alpha t}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + \bar{C}_\alpha)^{-1} x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + C_\alpha)^{-1} x d\lambda = e^{-C_\alpha t}x,$$

e portanto, $e^{-\bar{C}_\alpha t} = e^{-C_\alpha t}|_{X^{\frac{1}{2}}}$.

Observação 2.3.6. Temos $D(A) \subset D(C_\alpha) \subset D(A^\beta)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $\beta \in [0, 1]$. Além disso, existe $c > 0$ independente de α tal que $\|C_\alpha x\| = \|AB_\alpha^{-1}A^{-1}Ax\| \leq c\|Ax\|$. Em outras palavras, se $X^\beta = (D(A^\beta), \|A^\beta(\cdot)\|)$ e $X_\alpha^\beta = (D(C_\alpha^\beta), \|C_\alpha^\beta(\cdot)\|)$, então para $\beta = 0, 1$ temos $X^\beta \hookrightarrow X_\alpha^\beta$ uniformemente para $\alpha \in [0, 1]$, isto é, existe $c > 0$ tal que

$$\|C_\alpha^\beta x\| \leq c\|A^\beta x\|, \quad \forall x \in X^\beta. \quad (2.17)$$

Consequentemente, por interpolação complexa (ver (AMANN, 1995) e Observação B.4.4), obtemos (2.17) para $\beta \in [0, 1]$.

O lema a seguir é um resultado técnico que foi usado para obtermos uma taxa de convergência dos semigrupos lineares em $X^{\frac{1}{2}}$.

Lema 2.3.7. Sejam $0 \leq \gamma < \eta < 1$. Então, existem $c > 0$ e $\alpha_0 < 1$ tais que para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$,

$$\|A^\gamma C_\alpha^{-\eta} x\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. Seja $\delta \in (0, 1)$ tal que $\delta\eta > \gamma$. Como $\{A^\delta C_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in [0,1]}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{L}(X)$, $\{C_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ é uniformemente setorial e

$$A^\delta[(\lambda + C_\alpha)^{-1} - C_\alpha^{-1}] = A^\delta[-\lambda(\lambda + C_\alpha)^{-1}C_\alpha^{-1}] = -A^\delta C_\alpha^{-1}\lambda(\lambda + C_\alpha)^{-1},$$

obtemos $\{A^\delta(\lambda + C_\alpha)^{-1}\}_{\alpha \in [0,1]}$ uniformemente limitado, independente de $\lambda \in \Sigma_{-\omega,\phi}$, e

$$\|A^\gamma(\lambda + C_\alpha)^{-1}x\| \leq c\|A^\delta(\lambda + C_\alpha)^{-1}x\|^{\frac{\gamma}{\delta}}\|(\lambda + C_\alpha)^{-1}x\|^{1-\frac{\gamma}{\delta}} \leq c|\lambda|^{-(1+\eta-\frac{\gamma}{\delta})}\|x\|.$$

Note que

$$C_\alpha^{-\eta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^{-\eta} (\lambda + C_\alpha)^{-1} d\lambda,$$

com Γ usada em (A.10). Por outro lado,

$$\|\lambda^{-\eta} A^\gamma (\lambda + C_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c|\lambda|^{-(1+\eta-\frac{\gamma}{\delta})}.$$

Como $1 + \eta - \frac{\gamma}{\delta} > 1$, segue que $A^\gamma C_\alpha^{-\eta}$ está bem definido e o resultado segue do Lema 2.3.3. $\square$

Teorema 2.3.8. Dado $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, existem $c, \omega > 0$ e $\alpha_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ tais que para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$,

$$\|e^{-A^\alpha t} - e^{-C_\alpha t}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq g_\alpha(t)e^{-\omega t}, \quad \forall t > 0,$$

onde $g_\alpha(t) := c \min\{(1 - \alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}}t^{-1}, \max\{t^{-\eta}, t^{-\frac{1}{2\alpha}}\}\}$.

Demonstração. Como $\{A^\alpha\}$ e $\{C_\alpha\}$ são famílias uniformemente setoriais (Corolário 2.1.12), obtemos

$$e^{-A^\alpha t} - e^{-C_\alpha t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} [(\lambda + A^\alpha)^{-1} - (\lambda + C_\alpha)^{-1}] d\lambda,$$

e portanto, segue do Corolário 2.1.12 que existem $M \geq 1$, $\omega > 0$ e $\alpha_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$ tais que para cada $\alpha \in [\alpha_0, 1]$,

$$\|e^{-A^\alpha t} - e^{-C_\alpha t}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} M(1 - \alpha)^{2 - \frac{1}{\alpha}} d\lambda \leq K(1 - \alpha)^{2 - \frac{1}{\alpha}} t^{-1} e^{-\omega t} \quad (2.18)$$

com a última desigualdade sendo uma aplicação do Lema 2.3.1. Por outro lado,

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{-A^\alpha t}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(A^\alpha)^{\frac{1}{2\alpha}} e^{-A^\alpha t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_{\frac{1}{2\alpha}} t^{-\frac{1}{2\alpha}} e^{-\omega t}.$$

Analogamente, com o auxílio do Lema 2.3.7,

$$\|A^{\frac{1}{2}} e^{-C_\alpha t}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|A^{\frac{1}{2}} C_\alpha^{-\eta} C_\alpha^\eta e^{-C_\alpha t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c t^{-\eta} e^{-\omega t}$$

e portanto

$$\|e^{-A^\alpha t} - e^{-C_\alpha t}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq c \max\{t^{-\eta}, t^{-\frac{1}{2\alpha}}\} e^{-\omega t} \quad (2.19)$$

logo o resultado segue. $\square$

2.4 Taxa de convergência dos semigrupos não lineares

O lema a seguir é um resultado técnico que usamos para obtermos a taxa de convergência dos semigrupos não lineares $T_{\alpha,0}(\cdot)$ para $T_{1,1}(\cdot)$, quando $\alpha \rightarrow 1^-$.

Lema 2.4.1. Nas condições do Teorema 2.3.2, existem $c > 0$ e $\alpha_0 \in (0, 1)$ tais que

$$\int_0^\infty g_0(t) e^{-\omega t} dt \leq c(1 - \alpha)^{1 - \frac{1}{2\alpha}} |\ln(1 - \alpha)|,$$

para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$. Além disso, dado $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, temos

$$(1 - \alpha)^{1 - \frac{1}{2\alpha}} |\ln(1 - \alpha)| = (1 - \alpha)^\beta o(1 - \alpha) \text{ quando } \alpha \rightarrow 1^-.$$

Demonstração. A prova deste Lema é totalmente análoga a prova do Lema 2.4.3. $\square$

Teorema 2.4.2. Dado $\nu \in (0, \frac{1}{2})$, existem $M, L > 0, \gamma, \alpha_0 \in [\alpha_0, 1)$ tais que

$$\sup_{u \in B_{\mathcal{L}}^{\frac{1}{2}}(0)} \|T_{\alpha,0}(t)u - T_{1,1}(t)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq M(1 - \alpha)^\nu t^{-\gamma} e^{Lt},$$

para todo $t > 0$ e $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Demonstração. A prova é a mesma do Teorema 2.4.5, com o uso do Lema 2.4.1. $\square$

2.4.1 Taxa do semigrupos não lineares com corretor

Lema 2.4.3. Nas condições do Teorema 2.3.8, existem $c > 0$ e $\alpha_0 \in (0, 1)$ tais que

$$\int_0^\infty g_\alpha(t) e^{-\omega t} dt \leq c(1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} |\ln(1-\alpha)|, \forall \alpha \in [\alpha_0, 1].$$

Além disso, dado $\beta \in (0, 1)$, temos

$$(1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} |\ln(1-\alpha)| = (1-\alpha)^\beta o(1-\alpha) \text{ quando } \alpha \rightarrow 1^-.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha α_0 tal que $\frac{1}{2\alpha} \leq \eta$ para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$. Então, para $t \in (0, 1]$, temos

$$g_\alpha(t) = c \min\{(1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} t^{-1}, t^{-\eta}\}.$$

Note que para $t \in (0, 1)$, temos

$$(1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} t^{-1} \leq t^{-\eta} \Leftrightarrow (1-\alpha)^{(2-\frac{1}{\alpha})(1-\eta)^{-1}} \leq t.$$

Assim, denotando $t_* = (1-\alpha)^{(2-\frac{1}{\alpha})(1-\eta)^{-1}}$, obtemos

$$\int_0^{t_*} g_\alpha(t) e^{-\omega t} dt \leq \int_0^{t_*} c t^{-\eta} e^{-\omega t} dt \leq c(1-\eta)^{-1} t_*^{(1-\eta)} \leq c(1-\eta)^{-1} (1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}}, \quad (2.20)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^1 g_\alpha(t) e^{-\omega t} dt &\leq c \int_{t_*}^1 (1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} t^{-1} e^{-\omega t} dt \leq c e^{-\omega t_*} (1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} (-\ln(t_*)) \\ &\leq c(1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} (2-\frac{1}{\alpha})(1-\eta)^{-1} (-\ln(1-\alpha)) \\ &\leq c(1-\eta)^{-1} (1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} |\ln(1-\alpha)|. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Se $t > 1$, então $g_\alpha(t) = c(1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} t^{-1}$ e portanto

$$\int_1^\infty g_\alpha(t) e^{-\omega t} dt = c(1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} \int_1^\infty e^{-\omega t} t^{-1} dt \leq c(1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} \omega^{-1} e^{-\omega}. \quad (2.22)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor α_0 tal que $1 \leq |\ln(1-\alpha)|$ para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$. Para completar a prova, basta usar as estimativas (2.20), (2.21) e (2.22) e usar o fato de que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\theta \ln(x) = 0$ para cada $\theta \in (0, 1)$. $\square$

Lema 2.4.4 ((CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), Lemma 6.25). Se $\phi \in L^1((0, \infty), \mathbb{R}^+)$ satisfaz

$$\phi(t) \leq at^{-\gamma} + b \int_0^t (t-s)^{-(1-\alpha)} \phi(s) ds, \text{ quase sempre em } (0, \infty),$$

para algum $\alpha \in (0, 1]$, $\gamma \in [0, 1)$, e $a, b \in [0, \infty)$. Então, para $K > (2b\Gamma(\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$, existe uma constante $M = M(b, \alpha, \gamma, K)$ tal que

$$\phi(t) \leq Mat^{-\gamma} e^{Kt}.$$

Teorema 2.4.5. Dado $v \in (0, 1)$, existem $M, L > 0, \gamma, \alpha_0 \in (0, 1)$ tais que

$$\sup_{u \in B_r^{X^{\frac{1}{2}}}(0)} \|T_{\alpha,0}(t)u - T_{\alpha,1}(t)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq M(1 - \alpha)^v t^{-\gamma} e^{Lt},$$

para todo $t > 0$ e $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Demonstração. Seja $u \in X^{\frac{1}{2}}$ com $\|u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq r$. Usando a fórmula da variação das constantes temos

$$T_{\alpha,0}(t)u = e^{-A^\alpha t}u + \int_0^t e^{-A^\alpha(t-s)}f(T_{\alpha,0}(s)u)ds,$$

e

$$T_{\alpha,1}(t)u = e^{-C_\alpha t}u + \int_0^t e^{-C_\alpha(t-s)}f(T_{\alpha,1}(s)u)ds,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|(T_{\alpha,0}(t) - T_{\alpha,1}(t))u\|_{X^{\frac{1}{2}}} &\leq \|(e^{-A^\alpha t} - e^{-C_\alpha t})u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \int_0^t \|e^{-A^\alpha(t-s)}f(T_{\alpha,0}(s)u) - e^{-C_\alpha(t-s)}f(T_{\alpha,1}(s)u)\|_{X^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Segue do Teorema 2.3.8 que

$$\|(e^{-A^\alpha t} - e^{-C_\alpha t})u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq g_\alpha(t)e^{-\omega t}.$$

Por outro lado, como $f : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é globalmente Lipschits e uniformemente limitada, usando a estimativa dos semigrupos lineares, obtemos

$$\begin{aligned} I_\alpha(s, t) &:= \|e^{-A^\alpha(t-s)}f(T_{\alpha,0}(s)u) - e^{-C_\alpha(t-s)}f(T_{\alpha,1}(s)u)\|_{X^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \|(e^{-A^\alpha(t-s)} - e^{-C_\alpha(t-s)})f(T_{\alpha,0}(s)u)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|e^{-C_\alpha(t-s)}(f(T_{\alpha,0}(s)u) - f(T_{\alpha,1}(s)u))\|_{X^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq g_\alpha(t-s)\|f(T_{\alpha,0}(s)u)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + M(t-s)^{-\eta}e^{-\omega(t-s)}\|T_{\alpha,0}(s)u - T_{\alpha,1}(s)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq g_\alpha(t-s) + M(t-s)^{-\eta}e^{-\omega(t-s)}\|T_{\alpha,0}(s)u - T_{\alpha,1}(s)u\|_{X^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

e portanto

$$\int_0^t I_\alpha(s, t) ds \leq \int_0^t g_\alpha(t-s) ds + M \int_0^t (t-s)^{-\eta} e^{-\omega(t-s)} \|T_{\alpha,0}(s)u - T_{\alpha,1}(s)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} ds.$$

Segue do Lema 2.4.3 que

$$\int_0^t I_\alpha(s, t) ds \leq c(1 - \alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} |\ln(1 - \alpha)| + M \int_0^t (t-s)^{-\eta} e^{-\omega(t-s)} \|T_{\alpha,0}(s)u - T_{\alpha,1}(s)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} ds.$$

Seja $\phi_\alpha(t) := \|T_{\alpha,0}(s)u - T_{\alpha,1}(s)u\|_{X^{\frac{1}{2}}}$. Então,

$$\phi_\alpha(t) \leq c[g_\alpha(t)e^{-\omega t} + (1 - \alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}} |\ln(1 - \alpha)|] + M \int_0^t (t-s)^{-\eta} e^{-\omega(t-s)} \phi_\alpha(s) ds.$$

Afirmamos que dado $\delta > 0$, existe $c \geq 1$ tal que $g_\alpha(t) \leq ct^{-\eta}e^{\delta t}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. De fato, $t^{-\eta} \leq t^\eta e^{\delta t}$ e, como $g(t) := e^{-\delta t}t^{\eta-\frac{1}{2\alpha}}$ é limitado em $\mathbb{R}^+$, uniformemente para $\alpha \in [0, 1]$, isto prova a afirmação. Além disso, dado $\theta \in (0, 1)$ e denotando $\gamma_1 := \theta + \eta(1 - \theta)$, temos

$$g_\alpha(t) \leq (c(1 - \alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}}t^{-1})^\theta (ct^{-\eta}e^{\delta t})^{1-\theta} \leq c(1 - \alpha)^{(2-\frac{1}{\alpha})\theta} t^{-\gamma_1} e^{\delta(1-\theta)t}$$

e portanto, fazendo $\omega_1 := \omega - \delta(1 - \theta)$, obtemos

$$\phi_\alpha(t) \leq c(1 - \alpha)^{(2-\frac{1}{\alpha})\theta} [t^{-\gamma_1} e^{-\omega_1 t} + o(1 - \alpha)] + M \int_0^t (t - s)^{-\eta} e^{-\omega(t-s)} \phi_\alpha(s) ds.$$

Analogamente ao que foi feito para estimar $g_\alpha(t)$, prova-se que dado $\delta_1 > 0$, existe $c > 0$ tal que $t^{-\gamma_1} e^{-\omega_1 t} + o(1 - \alpha) \leq ct^{-\gamma_1} e^{\delta_1 t}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in [0, 1]$. Logo

$$\phi_\alpha(t) \leq c(1 - \alpha)^{(2-\frac{1}{\alpha})\theta} t^{-\gamma_1} e^{\delta_1 t} + M \int_0^t (t - s)^{-\eta} e^{-\omega(t-s)} \phi_\alpha(s) ds.$$

Denotando $\varphi_\alpha(t) := \phi_\alpha(t)e^{-\delta_1 t}$ obtemos

$$\varphi_\alpha(t) \leq ct^{-\gamma_1} (1 - \alpha)^{(2-\frac{1}{\alpha})\theta} + M \int_0^t (t - s)^{-\eta} \varphi_\alpha(s) ds.$$

Usando a desigualdade de Gronwall generalizada (Lema 2.4.4), segue que existem $M, K > 0$ tais que

$$\varphi_\alpha(t) \leq M(1 - \alpha)^{(2-\frac{1}{\alpha})\theta} t^{-\gamma_1} e^{Kt}, \quad \forall t > 0,$$

e portanto

$$\sup_{u \in B_r^{X^{\frac{1}{2}}}(0)} \|T_{\alpha,0}(t)u - T_{\alpha,1}(t)u\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq M(1 - \alpha)^{(2-\frac{1}{\alpha})\theta} t^{-\gamma_1} e^{(K+\delta_1)t},$$

para todo $t > 0$ e α próximo de 1. □

2.5 Limitação uniforme dos resolventes da linearização

Nesta seção obtemos a taxa de convergência dos resolventes dos operadores que correspondem a linearização de (2.1) em torno de um equilíbrio. No próximo teorema vamos obter a convergência dos equilíbrios de (2.1) quando $\alpha \rightarrow 1^-$. Para isto, vamos usar o seguinte lema.

Lema 2.5.1. Se $f : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é Fréchet continuamente diferenciável, então: dado $\varepsilon > 0$ e $u_* \in X^{\frac{1}{2}}$, existe $\delta > 0$ tal que se $u, v \in X^{\frac{1}{2}}$, $\|u - u_*\|_{X^{\frac{1}{2}}} < \delta$ e $\|v - u_*\|_{X^{\frac{1}{2}}} < \delta$, então

$$\|f(u) - f(v) - f'(u_*)(u - v)\|_X \leq \varepsilon \|u - v\|_{X^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.25)$$

Demonstração. Sejam $u_* \in X^{\frac{1}{2}}$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \operatorname{Re}(x^*(f(tu + (1-t)v) - f'(u_*)(tu + (1-t)v))),$$

com $u, v \in X^{\frac{1}{2}}$ e $x^* \in X^*$ satisfazendo $\|x^*\|_{X^*} = 1$. Então, para algum $\bar{t} \in (0, 1)$ temos $g(1) - g(0) = g'(\bar{t})$ e portanto

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(x^*(f(u) - f(v) - f'(u_*)(u - v)))| &= |g(1) - g(0)| = |g'(\bar{t})| \\ &= |\operatorname{Re}(x^*((f'(\bar{t}u + (1 - \bar{t})v) - f'(u_*))(u - v)))| \\ &\leq \|f'(\bar{t}u + (1 - \bar{t})v) - f'(u_*)\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}}, X)} \|u - v\|_{X^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Analogamente estimamos $\operatorname{Im}(x^*(f(u) - f(v) - f'(u_*)(u - v)))$ e o resultado segue do fato de f ser continuamente Fréchet diferenciável e do Teorema de Hahn Banach. $\square$

Lema 2.5.2. Suponha $f : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ continuamente Fréchet diferenciável. Se $u^\alpha \rightarrow u^1$ em $X^{\frac{1}{2}}$ e $0 \notin \sigma(A - f'(u^1))$, então $f'(u^\alpha) \circ A_{\alpha,i}^{-1} \rightarrow f'(u^1) \circ A^{-1}$ na norma de $\mathcal{L}(X)$.

Demonstração. Suponha que a afirmação seja falsa para $i = 0$. Então, existem $\alpha_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, $\delta > 0$, e $\{v_{\alpha_n}\}$ em X com $\|v_{\alpha_n}\|_X = 1$ tais que

$$\|f'(u^{\alpha_n}) \circ A^{-\alpha_n} v_{\alpha_n} - f'(u^1) \circ A^{-1} v_{\alpha_n}\| \geq \delta$$

e (usando o Corolário 2.1.2)

$$\|A^{-\alpha_n} v_{\alpha_n} - A^{-1} v_{\alpha_n}\|_{X^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Isto contradiz o fato de f ser Fréchet continuamente diferenciável e a prova está completa para o caso $i = 0$. O caso $i = 1$ segue analogamente. $\square$

Lema 2.5.3. Suponha que $u^\alpha \rightarrow u^1$ em $X^{\frac{1}{2}}$ e que $0 \notin \sigma(A - f'(u^1))$. Então, existe um $\alpha_0 \in [0, 1]$ tal que, para qualquer $0 \leq \theta \leq 1$, a sequência de operadores

$$\{(A_{\alpha,i})^\theta (A_{\alpha,i} - f'(u^\alpha))^{-1} : \alpha_0 \leq \alpha \leq 1\}$$

está bem definida, é uniformemente limitada em $\mathcal{L}(X)$ e $(A_{\alpha,i})^\theta (A_{\alpha,i} - f'(u^\alpha))^{-1}$ converge para $A^\theta (A - f'(u^1))^{-1}$ na norma de $\mathcal{L}(X)$.

Demonstração. Note que $(A_{\alpha,i})^j (A_{\alpha,i} - f'(u^\alpha))^{-1} = (A_{\alpha,i})^{j-1} (I - f'(u^\alpha) A_{\alpha,i}^{-1})^{-1}$. Usando que $f'(u^\alpha) \in \mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}}, X)$ e que, para $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, $A_{\alpha,i}^{-1}$ leva limitados de X em pré-compactos de $X^{\frac{1}{2}}$, segue que $f'(u^\alpha) A_{\alpha,i}^{-1}$ é compacto. Assim, a existência de $(I - f'(u^\alpha) A_{\alpha,i}^{-1})^{-1} : X \rightarrow X$ equivale a injetividade de $I - f'(u^\alpha) A_{\alpha,i}^{-1}$ (Alternativa de Fredholm).

Afirmamos que existe $\alpha_0 < 1$ tal que $I - f'(u^\alpha) A_{\alpha,i}^{-1}$ é injetiva para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$. Se não fosse verdade, existiriam sequências $\alpha_n \rightarrow 1^-$, $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, tais que $x_n = f'(u^{\alpha_n}) A_{\alpha_n,i}^{-1} x_n$. Sem perda de generalidade, $A_{\alpha_n,i}^{-1} x_n \rightarrow w$ em $X^{\frac{1}{2}}$ e portanto $x_n = f'(u^{\alpha_n}) A_{\alpha_n,i}^{-1} x_n \rightarrow z$ em X . Consequentemente,

$$f'(u^1) A^{-1} z = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(u^{\alpha_n}) A_{\alpha_n,i}^{-1} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$$

com $\|z\| = 1$, que é uma contradição com o fato de que $0 \notin \sigma(A - f'(u^1))$. Isto prova a afirmação.

Procedendo como na prova do Lema 2.1.13, é fácil provar que $(I - f'(u^\alpha)A_{\alpha,i}^{-1})^{-1}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{L}(X)$. Agora, aplicando os Corolários 2.1.2 e 2.1.5, obtemos a limitação uniforme desses operadores para $j = 0$. Agora usando o teorema de interpolação para potências fracionárias (Teorema A.3.9), obtemos completamos a prova. $\square$

2.6 Taxa de convergência dos equilíbrios e da linearização

Começamos provando a semicontinuidade superior da família de equilíbrios.

Proposição 2.6.1. As famílias $\{\mathcal{E}_{\alpha,i}\}_{\alpha \in [0,1]}$, $i = 0, 1$ são semicontínuas superiormente em $\alpha = 1$.

Demonstração. Provemos o caso $i = 0$. Note que para cada $\beta \in [0, 1]$, temos

$$\sup_{\beta \leq \alpha \leq 1} \|A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X, X^\beta)} < \infty.$$

Por outro lado, se u_α^* é um equilíbrio de (2.1), então $u_\alpha^* = A^{-\alpha}f(u_\alpha^*)$. Como $f : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é limitada e portanto $\{f(u_\alpha^*)\}$ é limitada em X , obtemos que $A^{-\alpha}f(u_\alpha^*)$ é limitada em X^β para cada $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Como X^β está compactamente imerso em $X^{\frac{1}{2}}$, segue que para cada $\alpha_n \rightarrow 1^-$, existe $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tal que $\|u_{\alpha_{n_k}}^* - v\|_{X^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ para certo $v \in X^{\frac{1}{2}}$ e portanto $v = A^{-1}f(v)$ e, aplicando o Lema 1.2.2, obtemos o caso $i = 0$. A prova do caso $i = 1$ segue os mesmos argumentos. $\square$

Proposição 2.6.2. Se todos os equilíbrios de (2.1) são isolados, então existe somente um número finito deles. Todo equilíbrio hiperbólico de (2.1) é isolado.

Demonstração. Como $\mathcal{E}_{\alpha,i}$ é compacto, resta apenas provar que os equilíbrios hiperbólicos são isolados. Note que $u^* \in \mathcal{E}_{\alpha,i}$ é uma solução de (2.2) se e somente se u^* é solução de

$$\Psi(u) := (A_{\alpha,i} - f'(u^*))^{-1}(f(u) - f'(u^*)u).$$

Como na prova do Lema 2.5.3, existe $\alpha_0 < 1$ tal que para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$, $A_{\alpha,i} - f'(u^*)$ tem inversa em $\mathcal{L}(X)$.

Se mostrarmos que, para algum $\delta > 0$, $\Psi : \bar{B}_\delta(u^*) \rightarrow \bar{B}_\delta(u^*)$ é uma contração, com $\bar{B}_\delta(u^*) := \{u \in X^{\frac{1}{2}} : \|u - u^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}$, então u^* é o único elemento em $\bar{B}_\delta(u^*) \cap \mathcal{E}_{\alpha,i}$ e, portanto, isolado. De fato, seja $\delta > 0$ e $u, v \in \bar{B}_\delta(u^*)$. Então, usando o Lema 2.5.1, segue que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $u, v \in \bar{B}_\delta(u^*)$,

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq C\epsilon \|u - v\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{X^{\frac{1}{2}}}.$$

Por outro lado, note que se $v \in \bar{B}_\delta(u^*)$, então

$$\|\Psi(v) - u^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} = \|\Psi(v) - \Psi(u^*)\| \leq \frac{1}{2} \|v - u^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} < \delta$$

e portanto $\Psi(\bar{B}_\delta(u^*)) \subset \bar{B}_\delta(u^*)$, isto é, Ψ tem um único ponto fixo em $\bar{B}_\delta(u^*)$. $\square$

O lema a seguir nos auxilia a estimarmos a distância entre os equilíbrios dos problemas que estamos estudando.

Lema 2.6.3. Existe $\alpha_0 < 1$ tal que os operadores $A_{\alpha,i} + V$ satisfazem a identidade

$$(A_{\alpha,i} + V)^{-1} - (A + V)^{-1} = [I - (A_{\alpha,i} + V)^{-1}V](A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1})[I - V(A + V)^{-1}], \quad (2.26)$$

para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Demonstração. Analogamente a prova do Lema 2.5.3, existe $\alpha_0 < 1$ tal que os operadores $A_{\alpha,i} + V$ tem inverso em $\mathcal{L}(X)$. Seja $\alpha \in [\alpha_0, 1]$. Note que $I - (A_{\alpha,i} + V)^{-1}V = (A_{\alpha,i} + V)^{-1}A_{\alpha,i}$ e $I - V(A + V)^{-1} = A(A + V)^{-1}$. Denotando por $B_{\alpha,i}$ o lado direito da identidade que queremos verificar, temos

$$\begin{aligned} B_{\alpha,i} &= [I - (A_{\alpha,i} + V)^{-1}V](A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1})[I - V(A + V)^{-1}] \\ &= (A_{\alpha,i} + V)^{-1}A_{\alpha,i}(A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1})A(A + V)^{-1} \\ &= [(A_{\alpha,i} + V)^{-1} - (A_{\alpha,i} + V)^{-1}A_{\alpha,i}A^{-1}]A(A + V)^{-1} \\ &= (A_{\alpha,i} + V)^{-1}A(A + V)^{-1} - (A_{\alpha,i} + V)^{-1}A_{\alpha,i}(A + V)^{-1} \\ &= (A_{\alpha,i} + V)^{-1}[I - V(A + V)^{-1}] - [I - (A_{\alpha,i} + V)^{-1}V](A + V)^{-1} \\ &= (A_{\alpha,i} + V)^{-1} - (A_{\alpha,i} + V)^{-1}V(A + V)^{-1} - [(A + V)^{-1} - (A_{\alpha,i} + V)^{-1}V(A + V)^{-1}] \\ &= (A_{\alpha,i} + V)^{-1} - (A + V)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Agora provaremos a convergência dos equilíbrios quando $\alpha \rightarrow 1^-$ e com taxa.

Teorema 2.6.4. Seja u_0^* um equilíbrio hiperpólico de (2.1) para $\alpha = 1$, e portanto $0 \notin \sigma(A - f'(u_0^*))$. Então, existem $\bar{\alpha} < 1$ e $\delta > 0$ tais que, para cada $\alpha \in [\bar{\alpha}, 1]$, (2.1) tem um único equilíbrio $u_{\alpha,i}^*$ em

$$\bar{B}_\delta(u_0^*) := \{u \in X^{\frac{1}{2}} : \|u - u_0^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}$$

Além disso, $\|u_{\alpha,i}^* - u_0^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} = O((1 - \alpha)^{1 - \frac{1}{2\bar{\alpha}}})$ e $\|u_{\alpha,0}^* - u_{\alpha,1}^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} = O((1 - \alpha)^{2 - \frac{1}{\bar{\alpha}}})$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$.

Demonstração. Começamos com a existência e estimativa de $u_{\alpha,0}^*$. Note que a hiperbolicidade de u_1^* implica que $\sigma(A^\alpha - f'(u_1^*))$ é disjunto do eixo imaginário para α próximo de 1. Usando o Lema 2.5.3 com $\theta = \frac{1}{2}$ segue que existem $M > 0$ e $\alpha_0 < 1$ tais que

$$\|(A^\alpha - f'(u_1^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq M \text{ para todo } \alpha \in [\alpha_0, 1].$$

Note que u_α é solução de (2.2) se e somente se u_α é ponto fixo da seguinte aplicação

$$w \rightarrow \Psi_\alpha(w) := (A^\alpha - f'(u_1^*))^{-1}(f(w) - f'(u_1^*)w).$$

Segue do Lema 2.5.3 que existem $c > 0$ e $\alpha_0 < 1$ tais que

$$\|A^\alpha[(A^\alpha - f'(u_1^*))^{-1} - (A - f'(u_1^*))^{-1}]\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c$$

para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$. Por interpolação (Teorema A.3.9), segue que existem $c > 0$ e $\alpha_0 < 1$ tais que

$$\|A^{\frac{1}{2}}[(A^\alpha - f'(u_1^*))^{-1} - (A - f'(u_1^*))^{-1}]\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c\|(A^\alpha - f'(u_1^*))^{-1} - (A - f'(u_1^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^{1-\frac{1}{2\alpha}},$$

e portanto, segue do Lema 2.5.3 que

$$\Psi_\alpha(u_1^*) \rightarrow \Psi_1(u_1^*), \text{ em } X^{\frac{1}{2}}. \quad (2.27)$$

Afirmamos que existem $\bar{\alpha} < 1$ e $\delta > 0$ tais que para $\alpha \in [\bar{\alpha}, 1]$, $\Psi_\alpha : \bar{B}_\delta(u_1^*) \rightarrow \bar{B}_\delta(u_1^*)$ está bem definida e é uma contração. Aqui,

$$\bar{B}_\delta(u_1^*) := \{u \in X^{\frac{1}{2}} : \|u - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}.$$

A prova de que $\|\Psi_\alpha(u) - \Psi_\alpha(v)\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{X^{\frac{1}{2}}}$ para $u, v \in \bar{B}_\delta(u_1^*)$ para $\delta > 0$ pequeno (e independente de α) segue os mesmos argumentos da prova da Proposição 2.6.2. Para ver que $\Psi_\alpha(\bar{B}_\delta(u_1^*)) \subset \bar{B}_\delta(u_1^*)$, note que se $\Psi_1(u_1^*) = u_1^*$ e, se $v \in \bar{B}_\delta(u_1^*)$, então

$$\|\Psi_\alpha(v) - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2}\|v - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|\Psi_\alpha(u_1^*) - \Psi_1(u_1^*)\|_{X^{\frac{1}{2}}}$$

Usando (2.27), segue que existe $\bar{\alpha} < 1$ tal que

$$\|\Psi_\alpha(u_1^*) - \Psi_1(u_1^*)\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2},$$

para $\alpha \in [\bar{\alpha}, 1]$ e portanto, obtemos $\Psi_\alpha(\bar{B}_\delta(u_1^*)) \subset \bar{B}_\delta(u_1^*)$. Isto prova a afirmação acima. Em particular, pela liberdade de $\delta > 0$ acima, provamos que $\|u_{\alpha,0}^* - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$.

Agora vamos estimar $\|u_{\alpha,0}^* - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}}$. Note que $u_{\alpha,0}^* = \Psi_\alpha(u_{\alpha,0}^*)$ e $u_1^* = \Psi_1(u_1^*)$. Se denotarmos $V = -f'(u_1^*)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha,0}^* - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} &\leq \|[(A^\alpha + V)^{-1} - (A + V)^{-1}](f(u_{\alpha,0}^*) + Vu_{\alpha,0}^*)\|_{X^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \|(A + V)^{-1}[f(u_{\alpha,0}^*) - f(u_1^*) + V(u_{\alpha,0}^* - u_1^*)]\|_{X^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \|(A^\alpha + V)^{-1} - (A + V)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \|f(u_{\alpha,0}^*) + Vu_{\alpha,0}^*\|_X \\ &\quad + \|(A + V)^{-1}[f(u_{\alpha,0}^*) - f(u_1^*) + V(u_{\alpha,0}^* - u_1^*)]\|_{X^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Usando (2.26) para $V = -f'(u_1^*)$, obtemos

$$\|(A^\alpha + V)^{-1} - (A + V)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} = O(\|A^{-\alpha} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}) = O((1 - \alpha)^{1-\frac{1}{2\alpha}}) \quad (2.29)$$

quando $\alpha \rightarrow 1^-$. Como $(A + V)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})$ e $f : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é de classe C^1 , segue do Lema 2.5.1 que

$$\begin{aligned} \|(A + V)^{-1}[f(u_{\alpha,0}^*) - f(u_1^*) + V(u_{\alpha,0}^* - u_1^*)]\|_{X^{\frac{1}{2}}} &\leq c\|f(u_{\alpha,0}^*) - f(u_1^*) + V(u_{\alpha,0}^* - u_1^*)\|_X \\ &\leq o(\|u_{\alpha,0}^* - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}})\|u_{\alpha,0}^* - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Como $\|u_\alpha^* - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$, segue que dado $c \in (0, 1)$, existe $\alpha_0 < 1$ tal que

$$\|(A + V)^{-1}[f(u_{\alpha,0}^*) - f(u_1^*) + V(u_{\alpha,0}^* - u_1^*)]\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq c \|u_{\alpha,0}^* - u_1^*\|_{X^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.30)$$

O resultado agora segue voltando à (2.28) e usando (2.29) e (2.30).

A estimativa restante segue analogamente, trocando Ψ_1 por

$$w \rightarrow \Psi_{\alpha,1}(w) := (C_\alpha - f'(u_1^*))^{-1}(f(w) - f'(u_1^*)w).$$

e seguindo os passos acima. □

Observação 2.6.5. Suponha que todos os elementos de $\mathcal{E}_{1,1} = \{u_1^*, \dots, u_m^*\}$ são hiperbólicos. Segue da Proposição 2.6.1 e do Teorema 2.6.4 que existe $\alpha_0 \in (0, 1)$ tal que $\mathcal{E}_{\alpha,i} = \{u_{\alpha,i}^{*,1}, \dots, u_{\alpha,i}^{*,m}\}$ e só contém equilíbrios hiperbólicos, para cada $\alpha_0 \leq \alpha \leq 1$. Além disso,

$$\|u_{\alpha,i}^{*,j} - u_1^{*,j}\|_{X^{\frac{1}{2}}} = O(1 - \alpha)^{1 - \frac{1}{2\alpha}} \quad (2.31)$$

e

$$\|u_{\alpha,0}^{*,j} - u_{\alpha,1}^{*,j}\|_{X^{\frac{1}{2}}} = O(1 - \alpha)^{2 - \frac{1}{\alpha}} \quad (2.32)$$

quando $\alpha \rightarrow 1^-$.

A seguir, daremos condições para a convergência dos resolventes da linearização dos problemas (2.1) em torno dos seus respectivos equilíbrios. Escrevemos $V_{\alpha,i} := -f'(u_{\alpha,i}^*) : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ com $u_{\alpha,i}^* \in \mathcal{E}_{\alpha,i}$, e definimos $\bar{A}_{\alpha,i} = A_{\alpha,i} + V_{\alpha,i}$ para $\alpha_0 \leq \alpha \leq 1$. Como $f : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ tem derivada contínua, segue da convergência dos equilíbrios (Teorema 2.6.4) que $V_{\alpha,i}$ converge para V_1 na norma de $\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}}, X)$.

A seguir suporemos certas condições, sobre os potenciais $V_{\alpha,i}$, afim de obtermos para $\bar{A}_{\alpha,i}$ as mesmas taxas que obtivemos para os $A_{\alpha,i}$. Suponha a seguinte hipótese:

$$\begin{aligned} \text{Existe } \alpha_0 < 1 \text{ tal que } \|V_{\alpha,i} - V_{1,1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}}, X)} &= O(\|A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}), \text{ e} \\ \|V_{\alpha,0} - V_{\alpha,1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}}, X)} &= O(\|A_{\alpha,0}^{-1} - A_{\alpha,1}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}) \text{ quando } \alpha \rightarrow 1^-. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Eventualmente, poderemos denotar $V_{1,1}$ por V_1 ou V . Agora podemos demonstrar o seguinte lema.

Lema 2.6.6. Suponha (2.33). Então,

$$\|V_{\alpha,i} A_{\alpha,i}^{-1} - V A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(\|A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}),$$

e

$$\|V_{\alpha,0} A_{\alpha,0}^{-1} - V_{\alpha,1} A_{\alpha,1}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(\|A_{\alpha,0}^{-1} - A_{\alpha,1}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}),$$

quando $\alpha \rightarrow 1^-$.

Demonstração. Segue facilmente da decomposição

$$V_{\alpha,i}A_{\alpha,i}^{-1} - V_{\beta,j}A_{\beta,j}^{-1} = V_{\alpha,i}(A_{\alpha,i}^{-1} - A_{\beta,j}^{-1}) + (V_{\alpha,i} - V_{\beta,j})A_{\beta,j}^{-1},$$

usando a hipótese dada por (2.33) e aplicando o Teorema 2.6.4. $\square$

Com o Lema 2.6.6 e o Lema 2.5.3, estamos prontos para provar a seguinte proposição.

Proposição 2.6.7. Existe $\alpha_0 < 1$ tal que, para todo $\alpha, \beta \in [\alpha_0, 1]$,

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\alpha,i}^{-1} - \bar{A}_{\beta,j}^{-1} &= (A_{\alpha,i}^{-1} - A_{\beta,j}^{-1})(I + V_{\beta,j}A_{\beta,j}^{-1})^{-1} \\ &\quad - A_{\alpha,i}^{-1}(I + V_{\beta,j}A_{\beta,j}^{-1})^{-1}(V_{\alpha,i}A_{\alpha,i}^{-1} - V_{\beta,j}A_{\beta,j}^{-1})(I + V_{\alpha,i}A_{\alpha,i}^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\|\bar{A}_{\alpha,i}^{-1} - \bar{A}_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} = O(\|A_{\alpha,i}^{-1} - A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}),$$

e

$$\|\bar{A}_{\alpha,0}^{-1} - \bar{A}_{\alpha,1}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} = O(\|A_{\alpha,0}^{-1} - A_{\alpha,1}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})}),$$

quando $\alpha \rightarrow 1^-$.

2.7 Atração uniforme das variedades instáveis locais e taxa de convergência

Para cada $\alpha \in [\alpha_0, 1]$, seja $u_{\alpha,i}^*$ um equilíbrio de (2.1). Suponha que $u_{1,1}^* := u^*$ é hiperbólico. A fim de estudarmos uma vizinhança de um ponto de equilíbrio $u_{\alpha,i}^*$, escrevemos (2.1) como

$$w_t^{\alpha,i} + \bar{A}_{\alpha,i}w^{\alpha,i} = f(w^{\alpha,i} + u_{\alpha,i}^*) - f(u_{\alpha,i}^*) - f'(u_{\alpha,i}^*)w^{\alpha,i}, \quad (2.34)$$

com $w^{\alpha,i} = u^{\alpha,i} - u_{\alpha,i}^*$ e $\bar{A}_{\alpha,i} = A_{\alpha,i} - f'(u_{\alpha,i}^*) = A_{\alpha,i} + V_{\alpha,i}$.

O lema a seguir fala da decomposição espectral dos $\bar{A}_{\alpha,i}$ para α próximo de 1.

Lema 2.7.1. Dado $\phi \in (0, \pi)$, existem $\omega > 0$, $c \geq 1$, $\alpha_0 < 1$ e $r > 0$ tais que $\Sigma_{-\omega, \phi} \setminus B_r^{\mathbb{C}}(0) \subset \rho(-\bar{A}_{\alpha,i})$ e

$$\|(\lambda + \bar{A}_{\alpha,i})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{|\lambda + \omega|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega, \phi} \setminus B_r^{\mathbb{C}}(0), \quad \forall \alpha \in [\alpha_0, 1].$$

Além disso, existem $s > 0$ e $\alpha_1 < 0$ tais que $|\operatorname{Re} z| \geq s$ para cada $z \in \sigma(\bar{A}_{\alpha,i})$ e $\alpha \in [\alpha_1, 1]$.

Demonstração. Seja $\alpha_0 < 1$ tal que $\Sigma_{-\omega, \phi} \subset \rho(-A_{\alpha,i})$ para cada $\alpha \in [\alpha_0, 1]$. Como a família $\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha \in [\alpha_0, 1]}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}}, X)$ e

$$\lambda + \bar{A}_{\alpha,i} = [I + V_{\alpha,i}A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}(\lambda + A_{\alpha,1})^{-1}](\lambda + A_{\alpha,i}),$$

segue que dado $\phi \in (\pi/2, \pi)$, existem $r, \omega > 0$ tais que $\Sigma_{-\omega, \phi} \setminus B_r^{\mathbb{C}}(0) \subset \rho(-\bar{A}_{\alpha, i})$, e

$$\|(\lambda + \bar{A}_{\alpha, i})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{|\lambda + \omega|}, \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega, \phi} \setminus B_r^{\mathbb{C}}(0).$$

Em particular, $\{z \in \sigma(\bar{A}_{\alpha, i}) : |\operatorname{Re} z| \leq r\} \subset B_r^{\mathbb{C}}(0)$ e, como $\sigma(\bar{A}_{\alpha, i})$ é fechado e disjunto do eixo imaginário, segue para cada (α, i) , existe $s_0 > 0$ tal que $|\operatorname{Re} z| \geq s_0$ para todo $z \in \sigma(\bar{A}_{\alpha, i})$.

Afirmamos que existe $s > 0$ e $\alpha_0 < 1$ tais que $|\operatorname{Re} z| \geq s$ para todo $z \in \sigma(\bar{A}_{\alpha, i})$, $\forall \alpha \in [\alpha_0, 1]$. Caso contrário, existiriam $\alpha_n \rightarrow 1^-$, $\lambda_n \in \sigma(\bar{A}_{\alpha_n, i}) \cap B_r^{\mathbb{C}}(0)$ tais que $\lambda_n \rightarrow i\lambda$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Por outro lado, como $\bar{A}_{\alpha_n, i}$ tem resolvente compacto, segue que existe $x_n \in D(A_{\alpha_n, i})$ com $\|x_n\|_{X^{\frac{1}{2}}} = 1$ e $\lambda_n x_n = \bar{A}_{\alpha_n, i} x_n$. Logo,

$$\lambda_n A_{\alpha_n, i}^{-1} x_n = A_{\alpha_n, i}^{-1} V_{\alpha_n, i} x_n + x_n,$$

Por outro lado, dado $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$, temos que $\{\|A_{\alpha_n, i}^{\beta} A_{\alpha_n, i}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada se $\alpha_n \geq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, obtemos, a menos de subsequência, que existe $x \in X^{\frac{1}{2}}$ tal que $x_n \rightarrow x$ em $X^{\frac{1}{2}}$. Logo, $i\lambda A^{-1}x = A^{-1}Vx + x$, com $\|x\|_{X^{\frac{1}{2}}} = 1$, contradizendo a hiperbolicidade de u^* . $\square$

Seja $\bar{\gamma}$ uma curva suave, simples em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, orientada no sentido anti-horário, e tal que a componente conexa limitada de $\mathbb{C} \setminus \{\bar{\gamma}\}$ (aqui $\{\bar{\gamma}\}$ denota o traço de $\bar{\gamma}$) contém $\{z \in \sigma(\bar{A}_{1, i}) : \operatorname{Re} z > 0\}$. Como na parte (ii) da Proposição 2.2.2, existe $\bar{\alpha} < 1$ tal que $\{\bar{\gamma}\} \subset \rho(\bar{A}_{\alpha, i})$ para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$. Além disso, usando o Lema 2.7.1, podemos supor que α_0 é tal que a componente conexa limitada de $\mathbb{C} \setminus \{\bar{\gamma}\}$ contém $\{z \in \sigma(\bar{A}_{\alpha, i}) : \operatorname{Re} z > 0\}$ para cada $\alpha \in [\alpha_0, 1]$. Defina $\bar{\mathcal{Q}}_{\alpha, i}^+$ por

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\alpha, i}^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}} (\lambda - \bar{A}_{\alpha, i})^{-1}$$

para $\alpha_0 \leq \alpha \leq 1$. Usando teoremas de decomposição espectral em (CARVALHO, 2016) (Capítulo 7), segue que existem $\omega > 0$ e $M_1 \geq 1$ tais que

$$\begin{aligned} \|e^{-\bar{A}_{\alpha, i} t} \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha, i}^+\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq M_1 e^{\omega t}, t \leq 0 \text{ e} \\ \|e^{-\bar{A}_{\alpha, i} t} (I - \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha, i}^+)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq M_1 e^{-\omega t}, t > 0. \end{aligned}$$

Em particular, por interpolação, e usando o Teorema 2.4.4 e Corolário 2.4.3 de (CARVALHO, 2001) (que fornece condições suficientes para obtermos equivalência dos espaços de potências fracionárias segue que dado $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ (ver também Lema 2.3.7), existem $\omega > 0$, $\alpha_0 < 0$ e $M_1, M_2 \geq 1$ tais que, para todo $\alpha \in [\alpha_0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|e^{-\bar{A}_{\alpha, i} t} \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha, i}^+\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq M_1 e^{\omega t}, t \leq 0 \text{ e} \\ \|e^{-\bar{A}_{\alpha, i} t} (I - \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha, i}^+)\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} &\leq M_2 t^{-\eta} e^{-\omega t}, t > 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Seja $M := \max\{M_1, M_2\}$. Denote por $\mathcal{X} = X^{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{X}_{\alpha, i}^+ = \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha, i}^+(\mathcal{X})$ e $\mathcal{X}_{\alpha, i}^- = (I - \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha, i}^+)(\mathcal{X})$. Usando a decomposição $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\alpha, i}^+ \oplus \mathcal{X}_{\alpha, i}^-$, a solução $w^{\alpha, i}$ de (2.34) pode ser decomposta

como $w^{\alpha,i} = v^{\alpha,i} + z^{\alpha,i}$, com $v^{\alpha,i} = \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,i}^+ w^{\alpha,i}$ e $z^{\alpha,i} = (I - \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,i}^+) w^{\alpha,i}$. Definimos os operadores $B_{\alpha,i} = \bar{A}_{\alpha,i} \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,i}^+$ e $\tilde{A}_{\alpha,i} = \bar{A}_{\alpha,i}|_{\mathcal{Z}_{\alpha,i}^- \cap D(A_{\alpha,i})}$. Vamos supor, a partir de agora, que $M_1 = 1$.

Continuando, podemos reescrever (2.34) como

$$\begin{cases} v_t^{\alpha,i} + B_{\alpha,i} v^{\alpha,i} = H_{\alpha,i}(v^{\alpha,i}, z^{\alpha,i}), \\ z_t^{\alpha,i} + \tilde{A}_{\alpha,i} z^{\alpha,i} = G_{\alpha,i}(v^{\alpha,i}, z^{\alpha,i}), \end{cases} \quad (2.36)$$

com

$$\begin{aligned} H_{\alpha,i}(v^{\alpha,i}, z^{\alpha,i}) &:= \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,i}^+[f(v^{\alpha,i} + z^{\alpha,i} + u_{\alpha,i}^*) - f(u_{\alpha,i}^*) - f'(u_{\alpha,i}^*)(v^{\alpha,i} + z^{\alpha,i})] \\ G_{\alpha,i}(v^{\alpha,i}, z^{\alpha,i}) &:= (I - \bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,i}^+)[f(v^{\alpha,i} + z^{\alpha,i} + u_{\alpha,i}^*) - f(u_{\alpha,i}^*) - f'(u_{\alpha,i}^*)(v^{\alpha,i} + z^{\alpha,i})] \end{aligned}$$

As funções $H_{\alpha,i}$ e $G_{\alpha,i}$ são continuamente diferenciáveis com

$$H_{\alpha,i}(0, 0) = 0 = G_{\alpha,i}(0, 0) \in X$$

e

$$H'_{\alpha,i}(0, 0) = 0 = G'_{\alpha,i}(0, 0) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}, X).$$

Assim, dado $\rho > 0$, existem $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_\rho \in [\alpha_\gamma, 1)$ e $\delta = \delta_\rho > 0$ tais que se $v, \bar{v} \in \mathcal{Z}_{\alpha,i}^+$ e $z, \bar{z} \in \mathcal{Z}_{\alpha,i}^-$ com $\|v\|_{\mathcal{Z}} + \|z\|_{\mathcal{Z}} < \delta$, $\|\bar{v}\|_{\mathcal{Z}} + \|\bar{z}\|_{\mathcal{Z}} < \delta$ e $\alpha \in [\bar{\alpha}, 1]$, então,

$$\begin{aligned} \|H_{\alpha,i}(v, z)\|_X &\leq \rho, \\ \|G_{\alpha,i}(v, z)\|_X &\leq \rho, \\ \|H_{\alpha,i}(v, z) - H_{\alpha,i}(\bar{v}, \bar{z})\|_X &\leq \rho(\|v - \bar{v}\|_{\mathcal{Z}} + \|z - \bar{z}\|_{\mathcal{Z}}), \\ \|G_{\alpha,i}(v, z) - G_{\alpha,i}(\bar{v}, \bar{z})\|_X &\leq \rho(\|v - \bar{v}\|_{\mathcal{Z}} + \|z - \bar{z}\|_{\mathcal{Z}}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Teorema 2.7.2. Suponha $M_1 = 1$ em (2.35). Então, dados $D > 0$ e $L > 0$, existe $\rho_0 = \rho_0(M, \omega, D, L) > 0$ tal que, se $H_{\alpha,i}$ e $G_{\alpha,i}$ satisfazem (2.37), com $0 < \rho \leq \rho_0$ e para todo $(v, z) \in \mathcal{Z}_{\alpha,i}^+ \times \mathcal{Z}_{\alpha,i}^-$, então existem $\Sigma_{\alpha,i}^* : \mathcal{Z}_{\alpha,i}^+ \rightarrow \mathcal{Z}_{\alpha,i}^-$ tais que a variedade instável de $u_{\alpha,i}^*$ é dada como gráfico da aplicação $\Sigma_{\alpha,i}^*$, isto é,

$$W^u(u_{\alpha,i}^*) = \{(v, z) \in \mathcal{Z} : z = \Sigma_{\alpha,i}^*(v), v \in \mathcal{Z}_{\alpha,i}^+\}. \quad (2.38)$$

As aplicações $\Sigma_{\alpha,i}^*$ satisfazem

$$\sup_{v \in \mathcal{Z}} \|\Sigma_{\alpha,i}^*(\bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,i}^+(v))\|_{\mathcal{Z}} \leq D, \quad \|\Sigma_{\alpha,i}^*(v) - \Sigma_{\alpha,i}^*(\bar{v})\|_{\mathcal{Z}} \leq L\|v - \bar{v}\|_{\mathcal{Z}}, \quad (2.39)$$

e dados $\theta \in (0, 1)$ e $r > 0$, temos

$$\|\Sigma_{\alpha,0}^* - \Sigma_{\alpha,1}^*\| := \sup_{v \in \mathcal{Z}, \|v\|_{\mathcal{Z}} \leq r} \|\Sigma_{\alpha,0}^*(\bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,0}^+(v)) - \Sigma_{\alpha,1}^*(\bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,1}^+(v))\|_{\mathcal{Z}} = O((1 - \alpha)^\theta), \quad (2.40)$$

e

$$\|\Sigma_{\alpha,0}^* - \Sigma_{1,0}^*\| := \sup_{v \in \mathcal{Z}, \|v\|_{\mathcal{Z}} \leq r} \|\Sigma_{\alpha,0}^*(\bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,0}^+(v)) - \Sigma_{1,0}^*(\bar{\mathcal{Q}}_{\alpha,1}^+(v))\|_{\mathcal{Z}} = O((1 - \alpha)^{\frac{\theta}{2}}) \quad (2.41)$$

quando $\alpha \rightarrow 1^-$. Além disso, dado $0 < \gamma < \omega$, existe $0 < \rho_1 \leq \rho_0$, $C > 0$ e $\alpha_0 < 1$ tal que, para cada solução $[t_0, \infty) \ni t \mapsto (v^{\alpha,i}, z^{\alpha,i})$ de (2.36),

$$\|z^{\alpha,i}(t) - \Sigma_{\alpha,i}^*(v^{\alpha,i}(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq Ce^{-\gamma(t-t_0)} \|z^{\alpha,i}(t_0) - \Sigma_{\alpha,i}^*(v^{\alpha,i}(t_0))\|_{\mathcal{Z}} \quad (2.42)$$

para todo $t \geq t_0$ e $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Demonstração. A prova deste teorema segue os mesmos procedimentos encontradas em (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013) (chapter 14) e (BEZERRA, 2009). Para efeito de completude, colocamos os detalhes aqui.

A prova da existência das aplicações $\Sigma_{\alpha,i}^*$, e que estas satisfazem (2.38), (2.39) e (2.42) segue os mesmos passos da Proposição 1.4.15. A prova de (2.40) e (2.41) está no Apêndice B.3. $\square$

2.8 Prova do Teorema 2.0.3

O item (iii) segue imediatamente dos Teoremas 2.4.2 e 2.4.5. O item (iv) é a Observação 2.6.5. Os itens (v) e (vi) seguem do Teorema 2.7.2. A seguir, provamos os item (i) e (ii).

$\{T_{\alpha,i}(\cdot)\}_{\alpha \in [0,1]}$ é contínua em $\alpha = 1$ devido ao item (iii) e à continuidade de $T_{1,1}(\cdot)$. Provaremos a compacidade assintótica coletiva de $\{T_{\alpha,1}(\cdot)\}_{\alpha \in [0,1]}$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$, pois para $\{T_{\alpha,0}(\cdot)\}_{\alpha \in [0,1]}$ segue os mesmos argumentos, de forma mais simples. De fato, se $0 \leq \beta < \gamma < \eta < 1$, então segue do Lema 2.3.7 que

$$\begin{aligned} \|A^\gamma T_{\alpha,1}(t)u_0\| &\leq \|A^\gamma e^{-C_\alpha t}u_0\| + \int_0^t \|A^\gamma e^{-C_\alpha(t-s)}f(T_{\alpha,1}(s)u_0)\|ds \\ &\leq c\|C^\eta e^{-C_\alpha t}u_0\| + c \int_0^t \|C^\eta e^{-C_\alpha(t-s)}f(T_{\alpha,1}(s)u_0)\|ds \\ &\leq cMt^{-\eta}e^{-\omega t}\|u_0\| + \int_0^t cM(t-s)^{-\eta}e^{-\omega(t-s)} \sup_{x \in X^{\frac{1}{2}}} \|f(x)\|ds. \\ &\leq cMt^{-\eta}e^{-\omega t}\|u_0\| + K \end{aligned} \quad (2.43)$$

para $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ e alguma constante $K > 0$.

Assim, dado um limitado B de X^β e $t_0 > 0$, existe uma bola limitada B_0 em X^γ tal que

$$\bigcup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq 1} \left(\bigcup_{t \geq t_0} T_{\alpha,1}(t)B \right) \subset B_0.$$

Como B_0 é pré-compacto em X^β (Proposição A.3.5), segue que o omega limite com respeito a $T_{\alpha,1}(\cdot)$, $\omega_\alpha(B)$ é não vazio, compacto e invariante e atrai B sob a ação de $T_{\alpha,1}(\cdot)$ (Proposição 1.1.3).

Por outro lado, se Y é um limitado invariante de $T_{\alpha,1}(\cdot)$, então segue de (2.43) que

$$Y \subset B_K^{X^\gamma}(0)$$

e portanto, tomando J o fecho de $B_K^{X^\gamma}(0)$ em X^β , segue que $T_{\alpha,1}(\cdot)$ tem um compacto que atrai limitados. Logo, $T_{\alpha,1}(\cdot)$ tem atrator global $\mathcal{A}_{\alpha,1} \subset J \subset X^\beta$ (Teorema 1.1.5) e, em particular,

$$\bigcup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq 1} \mathcal{A}_{\alpha,1} \subset J \text{ e portanto } \bigcup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq 1} \mathcal{A}_{\alpha,1} \text{ é pré-compacto de } X^\beta \text{ para cada } \beta \in [0, 1).$$

A prova de que $\{T_{\alpha,1}(\cdot)\}_{\alpha \in [\alpha_0, 1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\alpha = 1$ segue facilmente de (2.43). Assim, concluímos a prova dos itens (i) e (ii).

Agora provaremos a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &\text{existem } c, L > 0 \text{ e } \alpha_0 < 1 \text{ tais que} \\ &\|T_{\alpha,i}(t)x - T_{\alpha,i}(t)y\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq ce^{Lt}\|x - y\|_{X^{\frac{1}{2}}}, \forall x, y \in X^{\frac{1}{2}}, \forall \alpha \in [\alpha_0, 1]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Faremos o caso $i = 1$, pois o caso $i = 0$ é análogo. Usando o Lema 2.3.7, o Teorema A.3.9 e que $f : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é globalmente Lipschitz, obtemos

$$\|T_{\alpha,i}(t)x - T_{\alpha,i}(t)y\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq ce^{-\omega t}\|x - y\|_{X^{\frac{1}{2}}} + c \int_0^t e^{-\omega(t-s)}(t-s)^{-\eta} \|T_{\alpha,i}(s)x - T_{\alpha,i}(s)y\|_{X^{\frac{1}{2}}} ds,$$

e portanto, fazendo $\phi_\alpha(t) := \|T_{\alpha,i}(t)x - T_{\alpha,i}(t)y\|_{X^{\frac{1}{2}}} e^{-\omega t}$, obtemos

$$\phi_\alpha(t) \leq c\|x - y\|_{X^{\frac{1}{2}}} + c \int_0^t (t-s)^{-\eta} \phi_\alpha(s) ds,$$

e, então, a prova de (2.44) se completa usando a desigualdade de Gronwall generalizada (Lema 2.4.4).

Resta agora provarmos o item (vii). De fato, ajustando a notação, os itens anteriores, juntamente com a propriedade dada por (2.44), contém as hipóteses do Teorema 1.4.13 para $S_\alpha(\cdot) := T_{\alpha,0}(\cdot)$ e $\tilde{S}_\alpha(\cdot) := T_{\alpha,1}(\cdot)$ com $B_\alpha := \mathcal{A}_{\alpha,0} \cup \mathcal{A}_{\alpha,1}$. Assim, se $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A}_{\alpha,0}$ e $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha := \mathcal{A}_{\alpha,1}$, então existe $\alpha_0 < 1$ tal que as família de atratores $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in [\alpha_0, 1]}$ e $\{\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\}_{\alpha \in [\alpha_0, 1]}$ são eventualmente exponencialmente atratoras sobre $B := \bigcup_{\alpha \in [\alpha_0, 1]} B_\alpha$. Em outras palavras, existem $\alpha < 1$, $t_0 \geq 0$, $c, \mu > 0$ tais que

$$\sup_{\alpha \in [\alpha_0, 1]} \text{dist}_H(T_{\alpha,i}(t)B, \mathcal{A}_{\alpha,i}) \leq ce^{-\mu t}, \forall t \geq t_0. \quad (2.45)$$

Por outro lado, segue do item (iii) que dados $\theta \in (0, 1)$ e $t_0 > 0$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B} \text{dist}(T_{\alpha,0}(t)x, T_{1,1}(t)x) &\leq M(1-\alpha)^{\theta/2} e^{Lt}, \forall t \geq t_0 \text{ e} \\ \sup_{x \in B} \text{dist}(T_{\alpha,0}(t)x, T_{\alpha,1}(t)x) &\leq M(1-\alpha)^\theta e^{Lt}, \forall t \geq t_0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Assim, aplicando o Teorema 1.3.1, completamos a prova do item (vii) e deste teorema.

2.9 Comentários sobre as melhorias obtidas na taxa

A seguir, apresentamos alguns comentários sobre certos fenômenos que nos motivaram a buscar uma teoria de corretores para sistemas dinâmicos. As provas dos resultados desta seção estão no Apêndice B.4.

Seja $\Omega = (d_1, d_2)$ um intervalo em $\mathbb{R}$, $\partial\Omega = \{d_1, d_2\}$ e $a \in H^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} a \text{ tem período } l_1, \\ 0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta < \infty. \end{cases} \quad (2.47)$$

Seja $f \in L^2(\Omega)$ e considere a seguinte família de problemas elíticos:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u^\varepsilon := -(a_\varepsilon u_x^\varepsilon)_x + u^\varepsilon = f & \text{em } \Omega, \\ u_x^\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.48)$$

onde α e β são constantes e a_ε em (2.48) é definida por

$$a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (2.49)$$

Denotaremos a *média de* $g \in L^1(I)$ em $I := [a, b]$ por

$$M_I(g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx.$$

Com a notação acima, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.9.1. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e a_ε definida anteriormente. Seja $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ solução fraca do problema (2.48). Então,

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ em } H^1(\Omega)$$

onde u_0 é a solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases} A_0 u_0 := -a_0 u_0'' + u_0 = f & \text{em } \Omega, \\ (u_0)' = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\text{com } a_0 = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

Demonstração. Veja B.4. □

Observação 2.9.2. Usando o Teorema 2.9.1, concluímos que uma condição necessária para que $u^{\varepsilon_n} \rightarrow u_0$ ($\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$) em $H^1(\Omega)$ é

$$\frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)} u_0' = M_{(0,l_1)}(a) u_0',$$

e portanto, não podemos assumir convergência forte em $H^1(\Omega)$ em geral. Além disso, como $u_0' = 0$ implica que $f = 0$, obtemos que $f \neq 0$ e $\frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)} \neq M_{(0,l_1)}(a)$ implicam que não existe $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tal que u^{ε_n} tenha subsequência convergente em $H^1(\Omega)$.

A seguir definimos os operadores lineares que estudaremos nesta seção. Suponha $\frac{1}{a} \in H^1(\Omega)$. Denotamos

$$D(A_\varepsilon) := D(A_0) := \{u \in H^2(\Omega) : u'|_{\partial\Omega} = 0\},$$

e $A_\varepsilon u := -(a_\varepsilon(u)')' + u$ para todo $u \in D(A_\varepsilon)$ e $\varepsilon > 0$. Definimos $A_0 u = -a_0 u'' + u$. Então, segue da Observação B.4.1 que cada A_ε é linear, fechado, densamente definido, auto adjunto, têm resolvente compacto, $0 \in \rho(A_\varepsilon)$ e, como

$$\langle A_\varepsilon u, u \rangle \geq \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \geq 0,$$

segue que $W(-A_\varepsilon) \subset (-\infty, -1]$. Do Teorema A.1.16, obtemos que $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \geq 0}$ é uniformemente setorial. Especificamente, dados $\omega \in (0, 1)$ e $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, existe $C > 0$ independente de ε tal que

$$\|(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda + \omega|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega, \phi}.$$

Em particular, segue do Teorema A.2.10 que existe $K = K(C, \omega, \phi) > 0$ tal que

$$\|e^{-A_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{-\omega t}, \quad \forall t, \varepsilon \geq 0. \quad (2.51)$$

Observação 2.9.3. Note que A_ε^{-1} não pode convergir para A_0^{-1} em $\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}})$ pois

$$\|A_\varepsilon^{-1} f - A_0^{-1} f\|_{X^{\frac{1}{2}}} = \|u^\varepsilon - u_0\|_{X^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Em particular, os semigrupos lineares $e^{A_\varepsilon(\cdot)}|_{X^{\frac{1}{2}}} : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X^{\frac{1}{2}}$ não são contínuos em $\varepsilon = 0$ (ver Teorema A.2.4, item (5)).

Seja $0 \leq \varepsilon \leq 1$ e $f \in X \setminus \{0\}$ fixada. Então, para cada $\varepsilon \in [0, 1]$, a solução $u^\varepsilon(\cdot, u_0^\varepsilon)$ de

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + A_\varepsilon u^\varepsilon = f, & t > 0 \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \in X^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (2.52)$$

define um semigrupo $T_\varepsilon(\cdot)$ dado por $T_\varepsilon(t)u_0^\varepsilon := u^\varepsilon(t, u_0^\varepsilon)$, $t \geq 0$. Como na prova do Teorema 2.0.3, é fácil ver que $T_\varepsilon(\cdot)$ tem atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$ (basta estimar $T_\varepsilon(t)u$ em $X_{A_\varepsilon}^\alpha$ com $\alpha > \frac{1}{2}$ e usar que $X_{A_\varepsilon}^\alpha$ está compactamente imerso em $X_{A_\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$).

Observação 2.9.4. Note que $u^\varepsilon := A_\varepsilon^{-1} f$ é um equilíbrio de $T_\varepsilon(\cdot)$ e $\mathcal{A}_\varepsilon = \{u^\varepsilon\}$. Logo, $\{\mathcal{A}_\varepsilon\}_{0 \leq \varepsilon \leq 1}$ não é semicontínua superiormente, nem inferiormente em $\varepsilon = 0$. Consequentemente $\{\mathcal{A}_\varepsilon\}_{0 \leq \varepsilon \leq 1}$ não pode ser assintoticamente compacta em $\varepsilon = 0$.

Suponha que $\{T_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon \in [0, 1]}$ seja coletivamente assintoticamente compacta em $\varepsilon = 0$. Então, teríamos para $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (a menos de subsequência)

$$u^{\varepsilon_n} = T_{\varepsilon_n}(n)u^{\varepsilon_n} \rightarrow u_0 \text{ em } H^1,$$

que contradiz a Observação 2.9.2.

Por outro lado, $\{\mathcal{A}_\varepsilon\}_{0 \leq \varepsilon \leq 1}$ é uniformemente limitada em $X^{\frac{1}{2}}$ e atrai exponencialmente, de forma uniforme em limitados pois

$$T_\varepsilon(t)u - u^\varepsilon = e^{-A_\varepsilon t}(u^\varepsilon - u).$$

Em particular, se $B := \bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \mathcal{A}_\varepsilon$, então não podemos ter

$$\sup_{x \in B} \text{dist}(T_\varepsilon(t)x, T_0x) \leq E_\varepsilon(t) \quad \text{para todo } t \geq t_0, \quad (2.53)$$

com $E_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ para cada $t \geq t_0$. De fato, se tivéssemos (2.53), então poderíamos aplicar o Teorema 1.3.1 e obter continuidade dos atratores.

A seguir apresentamos de forma bem simples a ideia de corretores (ver (JIKOV; KOZLOV; NIK, 1994)) bem como a forma que buscamos recriá-la no caso de sistemas dinâmicos.

Seja χ a solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases} -(a(y)\chi')' = -a'(y) & \text{em } (0, l_1), \\ \chi|_{l_1} - \text{periódica e } M_{(0, l_1)}(\chi) = 0, \end{cases} \quad (2.54)$$

isto é,

$$\int_0^{l_1} a\chi'\phi' dx = \int_0^{l_1} a\phi' dx, \quad \forall \phi \in H^1(0, l_1), \phi|_{l_1} - \text{periódica}. \quad (2.55)$$

Então, χ é dada por

$$\chi(t) = t - a_0 \int_0^t \frac{1}{a(s)} ds + b_0, \quad t \in [0, l_1], \quad (2.56)$$

com

$$b_0 = \frac{a_0}{l_1} \int_0^{l_1} \left(\int_0^t \frac{1}{a(s)} ds \right) dt - \frac{l_1}{2}.$$

Em particular, temos $a_0 = a(1 - \chi')$ e portanto χ é solução de (2.55) e

$$a_0 = \frac{1}{M_{(0, l_1)}(\frac{1}{a})} = M_{(0, l_1)}(a - a\chi'). \quad (2.57)$$

Definição 2.9.5. Definimos o corretor de primeira ordem por

$$\kappa_\varepsilon(x) := -\varepsilon \chi_\varepsilon(x) u_0'(x),$$

onde $\chi_\varepsilon(x) := \chi(\frac{x}{\varepsilon})$.

Seja $u_1^\varepsilon(x) := u_0(x) - \varepsilon \chi_\varepsilon(x) u_0'(x)$. Com a notação acima, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.9.6. Existe uma constante $c > 0$ independente de ε e u_0 tal que

$$\|u^\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq c\varepsilon \|f\|_X.$$

para toda $f \in X$.

Demonstração. Veja B.4. □

Seja $B_\varepsilon : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ o operador definido por $B_\varepsilon u = -\chi_\varepsilon u'$. Então, obtemos uma correção na convergência de A_ε^{-1} para A_0^{-1} de forma análoga ao Teorema 2.9.6. Isto está resumido no resultado a seguir.

Corolário 2.9.7. Segue do Teorema 2.9.6 que

$$\|[A_\varepsilon^{-1} - (I + \varepsilon B_\varepsilon)A_0^{-1}]f\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq c\varepsilon \|f\|_X \quad (2.58)$$

para toda $f \in X$.

Demonstração. Veja B.4. □

Uma questão que podemos formular neste momento é: será que $(I + \varepsilon B_\varepsilon)A_0^{-1}$ é o resolvente de algum operador fechado e densamente definido? Para isto, é necessário que $(I + \varepsilon B_\varepsilon)A_0^{-1}(X)$ seja denso em X . Isto equivale a dizer que o conjunto das $f \in X$ tais que o problema

$$\begin{cases} u - \varepsilon \chi_\varepsilon u' = f & \text{em } \Omega, \\ u \in D(A_0), \end{cases} \quad (2.59)$$

tem solução é um conjunto denso em X . Uma forma de facilitar esta busca é usar o fato de que $D(A_0)$ é denso em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ e portanto, se o conjunto das $f \in X$ tais que

$$\begin{cases} u - \varepsilon \chi_\varepsilon u' = f & \text{em } \Omega, \\ u \in H^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.60)$$

tem solução é um conjunto denso em X , então o mesmo ocorre com (2.59).

Note que $M_{(0,1)}(\chi) = 0$ implica que χ_ε muda de sinal muitas vezes em Ω para ε pequeno, dificultando o estudo de soluções de (2.59).

A proposição a seguir fornece um meio de introduzirmos uma família de resolventes de operadores lineares que corrige a convergência de A_0^{-1} para A_ε^{-1} de forma semelhante a Definição 2.9.5.

Proposição 2.9.8. Existe uma constante c independente de $\varepsilon \in (0, 1]$ tal que $C_\varepsilon := I + \varepsilon B_\varepsilon + c\alpha_\varepsilon A_0^{\frac{1}{2}} : D(A_0) \rightarrow L^2(\Omega)$ tem imagem densa. Aqui, basta que $\alpha_\varepsilon \geq \varepsilon$ para todo $0 < \varepsilon \leq 1$.

Demonstração. Veja B.4. □

Em particular, obtemos a seguinte proposta de corretor, que melhora a taxa entre A_0^{-1} e A_ε^{-1} .

Corolário 2.9.9. Para cada $\varepsilon \in (0, 1]$, o operador $C_\varepsilon A_0^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é resolvente de um operador de D_ε , que por sua vez tem resolvente compacto e satisfaz

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - D_\varepsilon^{-1})f\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq c\varepsilon \|f\|_X \quad (2.61)$$

para toda $f \in X$.

Demonstração. Veja B.4. □

A seguir, apresentamos alguns dos nossos resultados e observações sobre o espectro de D_ε afim de verificar se são geradores de semigrupos analíticos.

Lema 2.9.10. A parte real de $W(D_\varepsilon)$ é positiva independente de ε . Em particular, a parte real de $\sigma_p(D_\varepsilon)$ é não negativa.

Demonstração. Veja B.4. □

Lema 2.9.11. Existe $c > 0$ independente de ε tal que

$$\|A_0^{\frac{1}{4}}(\varepsilon B_\varepsilon)f\| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|A_0^{\frac{3}{4}}f\|, \quad \forall f \in D(A_0). \quad (2.62)$$

Demonstração. Veja B.4. □

Proposição 2.9.12. Se $\alpha_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ para todo $0 < \varepsilon \leq 1$, então a família $\{D_\varepsilon\}$ é uniformemente setorial. Mais especificamente, existe $\psi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $c > 0$ tal que

$$\|(\lambda + D_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \Sigma_{0,\psi}$$

para todo $0 < \varepsilon \leq 1$.

Demonstração. Veja B.4. □

Além disso:

Corolário 2.9.13. Existem $k, \omega > 0$ e $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tais que

$$\|(\lambda + D_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{k}{|\lambda + \omega|} \quad \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega,\phi}$$

Demonstração. Veja B.4. □

O lema a seguir é um resultado técnico que usamos para dar uma boa estimativa da taxa de aproximação dos semigrupos lineares gerados por $-A_\varepsilon$ e $-D_\varepsilon$.

Lema 2.9.14. Existem constantes $k_1, k_2, k_3, \varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\|D_\varepsilon^\alpha f\| \leq k_1 \|D_\varepsilon f\| \leq k_2 \|A_0^{\frac{1}{2}} f\| \leq k_3 \|D_\varepsilon f\|, \quad \forall f \in H^1(\Omega), 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \alpha \in [0, 1].$$

Demonstração. Veja B.4. □

Com este lema, podemos dar uma boa estimativa da taxa de aproximação dos semigrupos lineares gerados por $-A_\varepsilon$ e $-D_\varepsilon$.

Teorema 2.9.15. Seja $X_\varepsilon^\alpha := (D(D_\varepsilon^\alpha), \|D_\varepsilon^\alpha(\cdot)\|)$ com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $\alpha \in [0, 1]$. Então, existe $c > 0$ tal que

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-D_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^\alpha)} \leq c \min\{\varepsilon t^{-1}, \max\{t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\alpha}\}\} e^{-\omega t}.$$

Demonstração. Veja B.4. □

Agora vamos seguir com as observações sobre a distância entre os semigrupos não lineares. Considere as seguintes famílias de problemas semilineares:

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + A_\varepsilon u^\varepsilon = f(u^\varepsilon), t > 0 \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \in X, \end{cases} \quad (2.63)$$

e

$$\begin{cases} \tilde{u}_t^\varepsilon + D_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon = f(\tilde{u}^\varepsilon), t > 0 \\ \tilde{u}^\varepsilon(0) = \tilde{u}_0^\varepsilon \in X. \end{cases} \quad (2.64)$$

Suponha que $f : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ seja globalmente Lipschitz e uniformemente limitada e que a limitação e a constante de Lipschitz sejam uniformemente limitadas em $\varepsilon \in (0, 1]$. Então, segue de (HENRY, 1981) (Corolário 3.3.5) que os problemas acima estão bem colocados em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e $X^{\frac{1}{2}}$ respectivamente.

Sejam $T_\varepsilon(\cdot)$ e $\tilde{T}_\varepsilon(\cdot)$ respectivamente os semigrupos gerados por estes problemas de valor inicial. Então, temos:

Teorema 2.9.16. Nas condições do Teorema 2.9.15, dado $\theta, \alpha \in (0, 1)$, existem constantes $c, L > 0$ tais que para todo $t > 0$,

$$\|(T_\varepsilon(t) - \tilde{T}_\varepsilon(t))u\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq c \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}(1+\theta)} e^{Lt} \|u\|_X.$$

Demonstração. Veja B.4. □

Observação 2.9.17. A dificuldade técnica que encontramos para estender o teorema acima para $\alpha = 1$ é o fato de a função $g(t) := c \min\{\varepsilon t^{-1}, \max\{t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\alpha}\}\}$ não é integrável em $(0, 1)$ quando $\alpha = 1$.

Concluimos que o corretor de primeira ordem da Definição 2.9.5 forneceu uma motivação para buscarmos uma família de resolventes que fosse ao mesmo tempo uma perturbação simples de A_0^{-1} , e cuja taxa de aproximação com relação à A_ε^{-1} fosse melhor do que a taxa entre A_0^{-1} e A_ε^{-1} . Definimos uma proposta de corretor através do Corolário 2.9.9 e obtemos melhoria da taxa dos resolventes, que chegou até a taxa dos semigrupos não lineares (Teorema 2.9.16).

Neste trabalho, não conseguimos transferir esta melhora de taxa para os atratores, uma vez que nos baseamos em métodos que exigem compacidade assintótica coletiva dos semigrupos não lineares (ver Teorema 1.4.13), algo que não temos nas famílias de semigrupos desta seção. Esta situação também serviu de motivação para um estudo da propriedade de *Shadowing*, que fornece uma forma de obtermos melhorias da taxa de convergência dos atratores diretamente da taxa de convergência dos semigrupos. Os resultados da nossa investigação nesta direção estão no Capítulo 3.

PERTURBAÇÕES LIPSCHIZ DE SEMIGRUPOS MORSE-SMALE

O Capítulo 2 apresenta uma forma de melhorarmos a obtenção da taxa de convergência de atratores globais, baseada na abordagem do Teorema 1.3.1, através da introdução de um fator de correção que melhora a taxa de convergência dos semigrupos, porém não reduz a perda que temos na transferência da taxa de convergência dos semigrupos para a taxa de convergência dos atratores (ver Teorema 1.3.1, item *b*) e notar que a taxa $\rho(\eta)$, dos semigrupos, é transferida como $\rho(\eta)^{\mu/(\mu+L)}$, para os atratores). Outra forma de aumentar a eficiência da transferência da taxa de convergência dos semigrupos para a taxa de convergência dos atratores é trabalhando com semigrupos que possuem a propriedade de Shadowing. Uma classe particular de semigrupos que tem esta propriedade é a dos semigrupos Morse-Smale. Neste trabalho, provamos que perturbações Lipschitz de semigrupos Morse-Smale, em dimensão finita, também possuem a propriedade de *Lipschitz Shadowing*, de forma uniforme. Os detalhes estão na Seção 3.1.

A seguir apresentamos um breve resumo das seções seguintes, cuja finalidade destas é definir a classe dos semigrupos Lipschitz Morse-Smale (LMS) e teoremas de estabilidade estrutural geométrica.

Na Seção 3.2 definimos as noções de $\mathfrak{L}$ -hiperbolicidade e $\mathfrak{L}$ -transversalidade que usamos para definir a classe dos semigrupos LMS, e que desempenham papéis fundamentais para a estabilidade estrutural geométrica. Nesta seção também enunciamos o principal resultado de estabilidade estrutural geométrica envolvendo os semigrupos LMS (ver Teorema 3.2.12).

Na Seção 3.3, apresentamos um resultado de D. Henry (ver (HENRY,)) sobre representação de variedades instáveis e estáveis como gráfico de funções Lipschitz, para semigrupos discretos que não são necessariamente diferenciáveis (ver Teorema 3.3.1).

Na Seção 3.4, apresentamos alguns resultados de (HENRY,) sobre a suavidade das variedades, obtidas como gráfico, da Seção 3.3. Estes resultados nos auxiliaram a provar a

convergência Lipschitz das variedades instáveis e estáveis locais, que foi um passo importante para a prova do Teorema 3.2.12 (ver prova do Teorema 3.7.4).

Na Seção 3.5, mostramos que uma pequena perturbação Lipschitz de uma aplicação em torno de um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico também possui um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico. Além disso, mostramos como a convergência Lipschitz de semigrupos afeta a continuidade das famílias de equilíbrios.

Na Seção 3.6, provamos que dado um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico com parâmetros γ, a, b, δ (ver Definição 3.2.2), existe $\delta_0 = \delta_0(\gamma, a, b, \delta) > 0$ tal que a única solução global que permanece em $B_{\delta_0}^X(x^*)$ é a solução constante $\phi(n) = x^*$, para $n \in \mathbb{Z}$. Com este resultado, podemos fornecer uma nova prova do Teorema de Estabilidade de Semigrupos Gradiente-Like (ver Teoremas 3.6.6 e 3.6.7).

Na Seção 3.7, provamos que sob certas condições de suavidade sobre o semigrupo limite, que a convergência Lipschitz dos semigrupos implica a convergência Lipschitz das variedades locais. Aqui, usamos novamente ideias inspiradas em (HENRY,) e, especificamente, ideias do λ -Lema de (HENRY,).

Na Seção 3.8, provamos uma série de resultados técnicos para verificarmos que a noção de $\mathcal{L}$ -transversalidade é estável por perturbações Lipschitz. Na Subseção 3.8.1, provamos resultados técnicos sobre curvas Lipschitz, afim de provarmos a estabilidade das interseções das variedades instáveis e estáveis sob perturbações Lipschitz; isto é, a estabilidade geométrica.

Na Seção 3.9, conectamos os resultados das seções anteriores para provarmos o Teorema de Estabilidade Estrutural Geométrica (Teorema 3.9.7 e Corolário 3.9.6).

Na Seção 3.9.1, construímos em detalhes um exemplo para o qual temos a estabilidade geométrica através do Teorema 3.9.7, porém, a abordagem clássica não se aplica, pois os semigrupos não são diferenciáveis (ver Proposição 3.9.8).

3.1 Shadowing em sistemas dinâmicos

Ao longo desta seção, $X := (X, \|\cdot\|)$ denotará um espaço de Banach geral. Denotaremos $\mathbb{Z}^- := \{m \in \mathbb{Z} : m \leq 0\}$ e $\mathbb{Z}^+ := \{m \in \mathbb{Z} : m \geq 0\}$.

Definição 3.1.1. Seja $T \in \mathcal{C}(X)$. Diremos que uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset X$ é uma trajetória global (ou solução global) de T se $x_{n+1} = Tx_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Diremos que uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \subset X$ é uma trajetória negativa (ou solução negativa) de T se $Tx_{n-1} = x_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}^-$. Diremos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} \subset X$ é uma trajetória positiva (ou solução positiva) de T se $Tx_n = x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.

A definição a seguir é uma versão generalizada da noção de (δ, N) -pseudo- trajetória que se encontra em (SANTAMARÍA, 2013) e (PILYUGIN, 1999).

Definição 3.1.2. Sejam $\delta \geq 0$ e $N \in \mathbb{Z}^+$. Diremos que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset X$ é uma (δ, N) -pseudo-trajetória (pseudo-solução) global de T se

$$\|y_{n+N} - T^N(y_n)\| \leq \delta, \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Diremos que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \subset X$ é uma (δ, N) -pseudo-trajetória (pseudo-solução) negativa de T se

$$\|y_{n+N} - T^N(y_n)\| \leq \delta, \text{ para } n, n+N \in \mathbb{Z}^-.$$

Para simplificar, quando $N = 1$, denotaremos δ -pseudo-trajetória (global/negativa) no lugar de $(\delta, 1)$ -pseudo-trajetória (global/negativa).

Se $K \subset X$, denotamos por $Tr(T, K, \delta)$ o conjunto de todas as δ -pseudo-trajetórias globais de T contidas em K . Analogamente denotamos $Tr^+(T, K, \delta)$ (respectivamente $Tr^-(T, K, \delta)$) o conjunto de todas as δ -pseudo-trajetórias positivas (respectivamente negativas) em K . Note que uma 0-pseudo-trajetória é uma trajetória e vale a seguinte inclusão:

$$Tr(T, K, 0) \subset Tr(T, K, \delta).$$

Considere $l^\infty(X)$ o espaço de Banach dado pelas seqüências $x_- = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \subset X$ com $\sup_{n \in \mathbb{Z}^-} \|x_n\| < \infty$. Se $x_- \in l^\infty(X)$, denotamos $\|x_-\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}^-} \|x_n\|$.

Definição 3.1.3. Uma seqüência negativa $x_- = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \in l^\infty(X)$ ε -Shadows (ε -sombreia) uma seqüência negativa $y_- = \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \subset X$ se

$$\|x_- - y_-\|_{l^\infty(X)} \leq \varepsilon.$$

Neste caso, diremos que y_- é ε -shadowed (ε -sombreada) por x_- .

Para cada seqüência $y_- = \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \subset X$ e $\varepsilon > 0$, denotamos

$$\bar{B}_\varepsilon(y_-) := \{x_- \in l^\infty(X) : \|x_- - y_-\|_{l^\infty(X)} \leq \varepsilon\}.$$

Definição 3.1.4. A aplicação $T \in \mathcal{C}(X)$ tem a propriedade de Shadowing sobre $K \subset X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cada δ -pseudo-trajetória negativa de T em K é ε -shadowed por uma trajetória negativa de T em X ; isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$Tr^-(T, K, \delta) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(Tr^-(T, X, 0))$$

onde $\mathcal{O}_\varepsilon(Tr^-(T, X, 0)) := \bigcup_{x_- \in Tr^-(T, X, 0)} \bar{B}_\varepsilon(x_-)$.

Definição 3.1.5. A aplicação $T \in \mathcal{C}(X)$ tem a propriedade de Lipschitz Shadowing em $K \subset X$ se existem constantes $L, \delta_0 > 0$ tais que cada δ -pseudo-trajetória de T em K , $0 \leq \delta \leq \delta_0$, é $(L\delta)$ -shadowed por uma trajetória negativa de T em X ; isto é,

$$Tr^-(T, K, \delta) \subset \mathcal{O}_{L\delta}(Tr^-(T, X, 0)).$$

Neste caso diremos que T tem Lipschitz Shadowing em K com parâmetros L, δ_0 .

Se $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{U} \subset X$, denotamos

$$\|T_1 - T_2\|_{L^\infty(\mathcal{U}, X)} := \sup_{x \in \mathcal{U}} \|T_1(x) - T_2(x)\|.$$

Sejam $A, B \subset X$ e $x \in X$. Denotaremos $\text{dist}(x, A) := \sup_{a \in A} \|x - a\|$, $\text{dist}_H(A, B) := \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B)$, e $\text{Dist}_H(A, B) := \text{dist}_H(A, B) + \text{dist}_H(B, A)$.

Diremos que $T \in \mathcal{C}(X)$ tem atrator global $\mathcal{A} \subset X$ se $\mathcal{A}$ é compacto, $T\mathcal{A} = \mathcal{A}$ e se, para cada B limitado de X , tivermos $\text{dist}_H(T^n(B), \mathcal{A}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

A proposição a seguir mostra como a propriedade de Lipschitz Shadowing simplifica a obtenção da estimativa da distância entre atratores globais através da distância entre os semigrupos. A prova deste resultado encontra-se em (SANTAMARÍA, 2013).

Proposição 3.1.6. Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(X)$ aplicações com atratores globais $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ respectivamente. Suponha que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{U}$, que T_1, T_2 tem Lipschitz Shadowing em $\mathcal{U}$ com parâmetros L, δ_0 e $\|T_1 - T_2\|_{L^\infty(\mathcal{U}, X)} < \delta_0$. Então, temos

$$\text{Dist}_H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \leq 2L\|T_1 - T_2\|_{L^\infty(\mathcal{U}, X)}.$$

Demonstração. Como T_1 tem a propriedade Lipschitz Shadowing sobre $\mathcal{U}$ com parâmetros L, δ_0 , então cada δ -pseudo-trajetória de T_1 , $\delta \in (0, \delta_0)$, é $(L\delta)$ -shadowed por uma trajetória negativa de T_1 ; isto é,

$$Tr^-(T_1, \mathcal{U}, \delta) \subset \mathcal{O}_{L\delta}(Tr^-(T_1, X, 0)).$$

Considere $r \in \mathcal{A}_2$ e seja

$$\mathbf{r}_- = \{r_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \subset \mathcal{A}_2$$

uma trajetória negativa de T_2 com $r_0 = r$, e portanto

$$\mathbf{r}_- \in Tr^-(T_2, \mathcal{A}_2, 0).$$

Note que $\|T_1 r_{n-1} - r_n\| = \|(T_1 - T_2)r_{n-1}\| \leq \|T_1 - T_2\|_{\text{Lip}(\mathcal{U}, X)} \|r_{n-1}\|$ para cada $n \in \mathbb{Z}^-$. Logo, $\mathbf{r}_- \in Tr^-(T_1, \mathcal{U}, \delta)$, com $\delta = \|T_1 - T_2\|_{L^\infty(\mathcal{U}, X)}$. Assim, segue da propriedade de Lipschitz Shadowing que, se $\delta \in [0, \delta_0)$, então existe $\mathbf{s}_- = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \in Tr^-(T_1, X, 0)$, tal que

$$\|r_n - s_n\| \leq L\delta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^-.$$

Como

$$\|s_n\| \leq \|r_n\| + L\delta,$$

concluimos que $\mathbf{s}_-$ é limitada e portanto $\mathbf{s}_- \subset \mathcal{A}_1$. Com isto,

$$\text{dist}(r, \mathcal{A}_1) \leq L\delta = L\|T_1 - T_2\|_{L^\infty(\mathcal{U}, X)},$$

Como $r \in \mathcal{A}_2$ foi escolhido de forma arbitrária, temos que

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) \leq L\|T_1 - T_2\|_{L^\infty(\mathcal{U}, X)}. \quad (3.1)$$

Analogamente, $\text{dist}_H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \leq L\|T_1 - T_2\|_{L^\infty(\mathcal{U}, X)}$ e o resultado segue. $\square$

3.1.1 Semigrupos Morse-Smale e Shadowing

Definição 3.1.7. Seja $T \in \mathcal{C}^1(X)$, p um ponto fixo de T e $DT(p)$ a derivada de Fréchet de T em p . Dizemos que p é hiperbólico se $\sigma(DT(p)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \emptyset$.

Seja p um ponto fixo hiperbólico de $T \in \mathcal{C}^1(X)$. Veremos no início da Seção 3.2, a seguir, que existem subespaços lineares $\mathbf{S}(p) := X_s$ e $\mathbf{U}(p) := X_u$ de X tais que $\mathbf{S}(p) \oplus \mathbf{U}(p) = X$. Além disso, temos a seguinte invariância

$$DT(p)\mathbf{S}(p) \subset \mathbf{S}(p) \text{ e } DT(p)\mathbf{U}(p) \subset \mathbf{U}(p),$$

e existem constantes $C > 0$ e $\lambda_0 \in (0, 1)$ tais que

$$\begin{aligned} \|D(T^n)(p)x\| &\leq C\lambda_0^n \|x\|, \quad \forall x \in \mathbf{S}(p), \forall n \geq 0, \\ \|D(T^n)(p)x\| &\geq C\lambda_0^{-n} \|x\|, \quad \forall x \in \mathbf{U}(p), \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Chamaremos C, λ_0 de constantes de hiperbolicidade de p , e os subespaços lineares $\mathbf{S}(p)$ e $\mathbf{U}(p)$ de estrutura hiperbólica sobre p .

Observação 3.1.8. Se p é um ponto fixo de $T \in \mathcal{C}^1(X)$, então $D(T^n)(p) = (DT(p))^n$.

Definição 3.1.9. Duas variedades diferenciáveis U, V são transversais se para cada $z \in U \cap V$, temos $T_z U + T_z V = X$; com $T_z U, T_z V$ sendo os espaços tangentes das variedades U, V respectivamente no ponto z .

Definição 3.1.10. Seja $T \in \mathcal{C}^1(X)$ com atrator global $\mathcal{A}$. O conjunto não errante de T é o conjunto de todos os $z \in \mathcal{A}$ tais que, dado uma vizinhança V de z em $\mathcal{A}$ e $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, existe $n > n_0$ tal que $T^n(V) \cap V \neq \emptyset$.

A definição de semigrupos Morse-Smale pode ser encontrada em (HALE, 1988). Ao longo desta seção nos restringiremos a classe dos semigrupos Morse-Smale que são gradient-like; isto é, são aplicações Morse-Smale como em (HALE, 1988) sem pontos periódicos. Para simplificar, continuaremos a nos referir a estes semigrupos como semigrupos Morse-Smale. Apresentamos a seguir a definição de semigrupo Morse-Smale com a qual iremos trabalhar.

Definição 3.1.11. Uma aplicação $T \in \mathcal{C}^1(X)$ é Morse-Smale (gradient-like) se possui atrator global $\mathcal{A} \subset X$ e se satisfaz as seguintes propriedades:

1. T é injetora em $\mathcal{A}$ e existe uma vizinhança $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ tal que para cada $q \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, $DT(q)$ é injetora em $\mathcal{A}$;
2. o conjunto não errante de T é finito e só contém pontos fixos de T ;
3. todos os pontos fixos de T são hiperbólicos com variedades instáveis de dimensão finita;

4. se p, q são pontos fixos de T e $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$, então $W^s(p)$ e $W^u(q)$ são transversais.

As observações a seguir são resultados gerais simples que utilizaremos na Seção B.5, para provar a Proposição 3.1.14 e o Corolário 3.1.15.

Observação 3.1.12. Sejam $T \in \mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{A} \subset X$ o seu atrator global. Dado um aberto $B \subset X$ contendo $\mathcal{A}$, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ em X , positivamente invariante por T (isto é, $T\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$) tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{U} \subset B$. Se não fosse verdade, existiria uma sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\perp}^{n_k}(\mathcal{A})) \not\subset B$, e portanto, existiria uma sequência $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ com $\text{dist}(x_k, \mathcal{A}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, tais que $T^{m_k}(x_k) \notin B$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Note que, se existisse uma $\{m_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ limitada, existiria $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que, a menos de subsequência, $m_{k_j} = m$ para todo $j \geq j_0$. Por outro lado, a menos de subsequência, $x_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \in \mathcal{A}$ para algum $x \in \mathcal{A}$. Logo, teríamos

$$X \setminus B \ni T^m x_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T^m x \in \mathcal{A},$$

que contradiz o fato de B ser um aberto que contém $\mathcal{A}$.

Por outro lado, se (a menos de subsequência) $m_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, como $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em X , segue que $\text{dist}(T^{m_k}(x_k), \mathcal{A}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Em particular, a menos de subsequência, temos $X \setminus B \ni T^{m_k}(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in \mathcal{A}$, que novamente contradiz o fato de B ser um aberto que contém $\mathcal{A}$.

Observação 3.1.13. Seja $T \in C^1(\mathbb{R}^m)$ e B um compacto de $\mathbb{R}^m$. Suponha que $T, DT(x)$ sejam injetoras em B , para cada $x \in B$. Afirmamos que, dado um aberto V de $\mathbb{R}^m$ contendo B , existe um aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^m$ tal que $B \subset \mathcal{U} \subset V$ com $T, DT(x)$ injetoras sobre $\mathcal{U}$, para cada $x \in \mathcal{U}$. Defina a função

$$\mathbb{R}^m \ni x \mapsto f(x) := \det(DT(x)) \in \mathbb{R},$$

onde $\det(DT(x))$ é o determinante da matriz que representa $DT(x)$, com relação à base canônica de $\mathbb{R}^m$. Como $DT : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ é contínua, segue que f é contínua e, neste caso, não muda de sinal no compacto B , caso contrário, teríamos $\det(DT(x)) = 0$ para algum $x \in B$, o que implicaria que $DT(x)$ não poderia ser um isomorfismo. Logo, f não muda de sinal numa vizinhança W de B , que pode ser escolhida tal que $W \subset V$. Se não existisse um aberto $\mathcal{U}$ com $B \subset \mathcal{U} \subset W$ e tal que T fosse injetora em $\mathcal{U}$, então teríamos sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em W tais que $T(x_n) = T(y_n)$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in B$ e $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in B$. Como T é injetora em B , segue que $x = y$. Isto contradiz o fato de que, em cada ponto $x \in B$, existe uma vizinhança V_x tal que $T : V_x \rightarrow T(V_x)$ é um difeomorfismo (pois $DT(x)$ é isomorfismo; ver (LIMA, 1981)). Isto conclui a afirmação.

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Denotamos

$$\|f\|_{\text{Lip}(\mathcal{U})} := \max\{\|f\|_{L^\infty(\mathcal{U})}, \text{Lip}_{\mathcal{U}}(f)\}$$

com

$$\|f\|_{L^\infty(\mathcal{U})} := \sup_{x \in \mathcal{U}} \|f(x)\|,$$

e

$$\text{Lip}_{\mathcal{U}}(f) := \sup_{x, y \in \mathcal{U}, x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}.$$

Denotamos

$$\text{Lip}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) := \{f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \text{Lip}_{\mathcal{U}}(f) < \infty\}.$$

Os resultados a seguir estendem alguns resultados de (SANTAMARÍA, 2013) (ver Proposition 1.1.18 e Proposition 1.1.20).

Proposição 3.1.14. Seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Morse-Smale (gradient-like) com atrator global $\mathcal{A}$. Então, existem uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ em X , uma vizinhança $\mathcal{O}$ de T em $\text{Lip}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ e constantes $L, d_0 > 0$ tais que cada $S \in \mathcal{O}$ tem a propriedade Lipschitz Shadowing sobre $\mathcal{U}$ com parâmetros L, d_0 .

A prova deste resultado é análoga a prova do Lemma 1.1.17 em (SANTAMARÍA, 2013). Para efeito de completude, inserimos a prova do nosso resultado na Seção B.5.

Corolário 3.1.15. Seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Morse-Smale (gradient-like) com atrator global $\mathcal{A}_T$. Então, existem uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R}^m$, uma vizinhança $\mathcal{O}$ de T em $\text{Lip}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ e uma constante $L > 0$ tais que

$$\text{Dist}_H(\mathcal{A}_S, \mathcal{A}_T) \leq L \|T - S\|_{L^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)},$$

para todo $S \in \text{Lip}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ que tenha atrator global $\mathcal{A}_S$.

Demonstração. Segue da Proposição 3.1.14 e da Proposição 3.1.6. □

Observação 3.1.16. Por questões técnicas, e de tempo deste projeto, provamos a estabilidade do Shadowing para perturbações Lipschitz de semigrupos Morse-Smale apenas em dimensão finita (o que já é uma extensão dos resultados de (SANTAMARÍA, 2013)). A questão técnica que permaneceu até o momento é, basicamente, a extensão do Lema B.5.6 (ver Seção B.5) para dimensão infinita. A nossa ambição futura é generalizar estes resultados sobre Shadowing para dimensão infinita. Uma inspiração para buscarmos esta extensão está nos trabalhos (HENRY, 1994a) e (HENRY, 1994b).

3.2 Semigrupos Lipschitz Morse-Smale

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, $\mathcal{L}(X)$ o conjunto dos operadores lineares limitados de X em si mesmo e $L \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\sigma(L) \cap \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\} = \emptyset$. Se $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, temos as projeções espectrais

$$\pi_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - L)^{-1} d\lambda \quad \text{e} \quad \pi_u = I - \pi_s,$$

que fornecem uma decomposição de X e L como $X = X_u \oplus X_s$, $L = L_u \oplus L_s$, respectivamente, onde $X_j = \pi_j X$ e $L_j = L|_{X_j} : X_j \rightarrow X_j$, para $j = u, s$. Então,

$$\sigma(L_s) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < b\} \text{ e } \sigma(L_u) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > a\}, \text{ para algum } 0 < b < 1 < a, \quad (3.2)$$

e podemos escolher normas em X_u e X_s (que denotaremos também por $\|\cdot\|$) tal que $\|L_s\| \leq b$ e $\|L_u^{-1}\| \leq a^{-1}$, com estas normas equivalentes a norma induzida de X . De fato, se

$$\sigma(L_s) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < b\},$$

então $r_\sigma(L_s) := \sup_{\lambda \in \sigma(L_s)} |\lambda| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|L_s^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} < b$ (ver (CARVALHO, 2016)). Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|L_s^{n+1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq b^{n+1}$. Defina $|\cdot|_s$ por

$$|x|_s = b^n \|x\| + b^{n-1} \|L_s x\| + \cdots + \|L_s^n x\|.$$

Então, $|\cdot|_s$ é uma norma equivalente a $\|\cdot\|$ e $|L_s x|_s := \sup_{|x|_s=1} |L_s x|_s \leq b$. Analogamente, existe $|\cdot|_u$ equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $|L_u^{-1} x|_u \leq a^{-1}$.

Portanto, em X usaremos a norma equivalente (ainda, denotada por $\|\cdot\|$) dada por

$$\|\xi + \eta\| = \max\{|\xi|_u, |\eta|_s\}.$$

com $\xi \in X_u$ e $\eta \in X_s$.

Definição 3.2.1. Seja $L \in \mathcal{L}(X)$. Dizemos que uma aplicação Lipschitz contínua $N : U \subset X \rightarrow X$ tem constante de Lipschitz pequena com respeito a L se existem $\gamma, a, b > 0$ tais que $b + 2\gamma < 1 < a - 2\gamma$,

$$\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < b\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > a\},$$

e

$$\|N(x) - N(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in U.$$

Definição 3.2.2. Um ponto fixo $x^* \in X$ para $T \in \mathcal{C}(X)$ é dito ser $\mathcal{L}$ -hiperbólico se a aplicação $S : X \rightarrow X$ dada por

$$S(x) = T(x + x^*) - T(x^*) = T(x + x^*) - x^*, \quad (3.3)$$

tem uma decomposição $S = L + N$ em alguma bola $B_\delta^X(0)$, com L, N satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $L \in \mathcal{L}(X)$ e $\text{Lip}_{B_\delta^X(0)}(N) =: \gamma < \infty$;
- (ii) Existem $a, b > 0$ tais que $b + 2\gamma < 1 < a - 2\gamma$ e

$$\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < b\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > a\}; \text{ e}$$

- (iii) $\gamma \|(I - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$.

Diremos que x^* é um ponto $\mathfrak{L}$ -hiperbólico com parâmetros γ, a, b, δ . Eventualmente, diremos que T tem a decomposição $S = L + N$ com parâmetros γ, a, b, δ .

Definição 3.2.3. Sejam $M, N \subset X$ dois conjuntos. Diremos que um ponto $x_0 \in M \cap N$ é um ponto de interseção $\mathfrak{L}$ -transversal se existem:

- (i) subespacos fechados $Z_1, Z_2 \subset X$, tais que $Z_1 \oplus Z_2 = X$;
- (ii) um número real $r > 0$ e funções Lipschitz contínuas

$$\theta : B_r^{Z_1}(0) \rightarrow Z_2 \text{ e } \sigma : B_r^{Z_2}(0) \rightarrow Z_1,$$

tais que $\text{Lip}(\theta), \text{Lip}(\sigma) < 1$, $\theta(0) = \sigma(0) = 0$,

$$\{x_0 + \xi + \theta(\xi) : \xi \in B_r^{Z_1}(0)\} \subseteq M \text{ e } \{x_0 + \sigma(\eta) + \eta : \eta \in B_r^{Z_2}(0)\} \subseteq N.$$

Diremos que M e N são $\mathfrak{L}$ -transversais se existe um ponto de $M \cap N$ que é ponto de interseção $\mathfrak{L}$ -transversal.

A seguir, definimos a noção de semigrupo discreto gradient-like, de forma análoga a definição dada na Seção 1.4.

Definição 3.2.4. Diremos que $T \in C(X)$ é gradient-like se tem atrator global $\mathcal{A} \subset X$ e se existe uma família disjunta de invariantes isolados $\Xi^* = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ tais que,

(G1) Para cada solução global $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$ existem $1 \leq i, j \leq p$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(\xi(n), \Xi_i^*) = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}_H(\xi(n), \Xi_j^*) = 0.$$

(G2) Nenhum elemento de $\Xi^* = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ é recorrente por cadeias.

O resultado a seguir conecta a noção de $\mathfrak{L}$ -hiperbolicidade com a noção de Shadowing. Em palavras, ele diz que $\mathfrak{L}$ -hiperbolicidade implica Lipschitz Shadowing em uma pequena vizinhança do equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico.

Proposição 3.2.5. Se x^* é um equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico de T com parâmetros γ, a, b, δ , então, para γ suficientemente pequeno, existe uma vizinhança V de x^* que tem a propriedade Lipschitz Shadowing.

Demonstração. A prova encontra-se em B.5. □

Definição 3.2.6. Diremos que uma função $f : A \rightarrow B$ é bi-Lipschitz se existe $f^{-1} : B \rightarrow A$ e se f e f^{-1} são funções Lipschitz.

Definição 3.2.7. Seja $T \in \mathcal{C}(X)$ com atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que T é Lipschitz Morse-Smale (LMS) se:

- (i) T é gradient-like com respeito ao conjunto de equilíbrios $\mathcal{E} = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ que são todos $\mathfrak{L}$ -hiperbólicos e existe $\rho > 0$ tal que $T|_{\mathcal{O}_\rho(\mathcal{E})} : \mathcal{O}_\rho(\mathcal{E}) \rightarrow T(\mathcal{O}_\rho(\mathcal{E}))$ é bi-Lipschitz;
- (ii) se $W^u(x_i^*) \cap W^s(x_j^*) \neq \emptyset$, então, para cada $\rho > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $T^n W^{u,\rho}(x_i^*)$ and $W^{s,\rho}(x_j^*)$ tem intersecção $\mathfrak{L}$ -transversal;
- (iii) se $W^u(x_i^*) \cap W^s(x_j^*) \neq \emptyset$ e $W^u(x_j^*) \cap W^s(x_k^*) \neq \emptyset$, então $W^u(x_i^*) \cap W^s(x_k^*) \neq \emptyset$.

Observação 3.2.8. A definição de semigrupo Morse-Smale clássica satisfaz a definição acima. A condição (iii) é consequência do λ -lema que pode ser encontrado em (HENRY,) (para dimensão infinita) ou em (PALIS, 1977) para dimensão finita. Neste momento, estamos estudando formas de generalizar o λ -lema de (HENRY,), afim de podermos obter o item (iii).

Definição 3.2.9. Sejam $S, T \in \mathcal{C}(X)$, ambos tendo atrator global. Dizemos que S, T tem atratores geometricamente equivalente se:

- (i) S e T são gradient-like com relação as famílias de invariantes isolados $\mathcal{E}_S = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ e $\mathcal{E}_T = \{y_1^*, \dots, y_n^*\}$ respectivamente;
- (ii) Para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a menos de reordenamento de $\mathcal{E}_T$, temos

$$[W^u(x_i^*) \cap W^s(x_j^*) \neq \emptyset] \iff [W^u(y_i^*) \cap W^s(y_j^*) \neq \emptyset]. \quad (3.4)$$

A seguir, recordamos as noções de continuidade e compacidade assintótica para famílias de semigrupos discretos.

Definição 3.2.10. Seja $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]} \subset \mathcal{C}(X)$. Diremos que a família de semigrupos $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta \in [0,1]}$ é contínua em $\eta = 0$ se $T_\eta^n x \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} T_0^n x$ uniformemente para (n, x) em subconjuntos compactos de $\mathbb{N} \times X$.

Definição 3.2.11. Seja $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]} \subset \mathcal{C}(X)$. Diremos que a família de semigrupos $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta \in [0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ se, dadas uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, uma sequência limitada $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X e uma sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ com $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ e $\{T_{\eta_k}^{n_k} u_k : k \in \mathbb{N}\}$ limitada, então $\{T_{\eta_k}^{n_k} u_k : k \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacta.

A seguir enunciamos o principal resultado de estabilidade dos semigrupos LMS que provamos.

Teorema 3.2.12. Seja $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta \in [0,1]}$ é uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Se

- a) $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$, $\cup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado e existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|T_\eta - T_0\|_{\text{Lip}(\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{E}_0))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$; e
- b) $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo LMS e existe $\delta > 0$ tal que $T_0|_{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0)} \in C^{1+}(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0), X)$.

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{x_{1,\eta}^*, \dots, x_{p,\eta}^*\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$ e $x_{i,\eta}^* \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x_{i,0}^*$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. Além disso, $\eta_0 > 0$ pode ser escolhido tal que, para cada $\eta \in [0, \eta_0]$, o semigrupo $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é LMS com atrator $\mathcal{A}_\eta$ geometricamente equivalente à $\mathcal{A}_0$. Em outras palavras,

$$[W_0^u(x_{i,0}^*) \cap W_0^s(x_{j,0}^*) \neq \emptyset] \iff [W_\eta^u(x_{i,\eta}^*) \cap W_\eta^s(x_{j,\eta}^*) \neq \emptyset]. \quad (3.5)$$

A prova deste teorema encontra-se no final da Seção 3.9 (ver Teorema 3.9.7).

3.3 Variedades invariantes como gráfico

A seguir, apresentamos aqui um resultado de D. Henry (ver (HENRY,)), que se aplica ao nosso caso de ponto fixo $\mathfrak{L}$ -hiperbólico.

Teorema 3.3.1. Sejam X um espaço de Banach, $L : X \rightarrow X$ um operador linear limitado. Suponha que existam $0 < b < \rho < a$ tais que

$$\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < b\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > a\}.$$

Seja $\gamma > 0$ tal que $b + 2\gamma < \rho < a - 2\gamma$. Então, existe uma decomposição $X = X_u \oplus X_s$ e uma norma equivalente em X tal que, se $N : X \rightarrow X$ satisfaz $\text{Lip} N \leq \gamma$, então existem variedades Lipschitz W_ρ^s, W_ρ^u em X tais que para $S = L + N$, temos:

- (i) W_ρ^u é um gráfico sobre X_u , W_ρ^s é um gráfico sobre X_s ;
- (ii) $SW_\rho^u = W_\rho^u$, $SW_\rho^s = W_\rho^s \cap S(X)$ e a restrição $S|_{W_\rho^u}$ é um homeomorfismo;
- (iii) $W_\rho^s \cap W_\rho^u = \{0\}$;
- (iv) $\text{Lip}(S|_{W_\rho^s}) < \rho$ e $\text{Lip}(S|_{W_\rho^u}^{-1}) < \rho^{-1}$;
- (v)

$$W_\rho^s = \{x \in X : \|S^n x\| = o(\rho^n), \text{ quando } n \rightarrow \infty\},$$

$$W_\rho^u = \{x \in X : \text{existe } \{x_j\}_{j \leq 0} \text{ com } x_0 = x,$$

$$x_{j+1} = S(x_j), \text{ e } \sup_{j \leq 0} \rho^{-j} \|x_j\| < \infty\}.$$

Para ρ^* suficientemente próximo de ρ , $W_{\rho^*}^s = W_\rho^s$ e $W_{\rho^*}^u = W_\rho^u$;

(vi) existe uma aplicação contínua $P : X \rightarrow W_\rho^u$ com

$$\|Px - x\| \leq C \text{dist}(x, W_\rho^u),$$

para alguma constante $C = C(\gamma, a, b) > 0$, $S \circ P = P \circ S$. Seja $\xi \in W_\rho^u$. Então, $Px = \xi$ se, e somente se $\|S^n x - S^n \xi\| = o(\rho^n)$ quando $n \rightarrow \infty$. Também $\text{dist}(S^n x, W_\rho^u) \leq d\beta^n \text{dist}(x, W_\rho^u)$ para todo $n \geq 0$, $x \in X$ e constantes $\beta = \beta(\gamma, a, b) < \rho$ e $d = d(\gamma, a, b) > 0$.

Se L é um isomorfismo, então, para γ suficientemente pequeno, S é um homeomorfismo e $SW_\rho^s = W_\rho^s$.

Demonstração. A prova deste teorema pode ser encontrada em (HENRY,). Como utilizaremos, recursivamente, vários dos argumentos desta prova, faremos a demonstração completa deste teorema no Apêndice B.6. $\square$

Agora podemos estabelecer os resultados sobre a existência local de variedades Lipschitz em torno de um ponto de equilíbrio. Para este fim, note que, se $N : \overline{B_r^X(0)} \rightarrow X$ é uma função Lipschitz definida na bola fechada de raio $r > 0$ centrada em 0 tal que $N(0) = 0$ e $\text{Lip } N \leq \gamma$ em $B_r^X(0)$, então a função $\tilde{N} : X \rightarrow X$ definida por

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} N(x), & \text{se } \|x\| \leq r, \text{ e} \\ N\left(\frac{r}{\|x\|}x\right), & \text{se } \|x\| > r, \end{cases} \quad (3.6)$$

é globalmente Lipschitz e segue da prova do Lema 3.8.5 (na subseção 3.8.1) que $\text{Lip}(\tilde{N}) \leq 2\text{Lip}_{B_r^X(0)}(N)$ e consequentemente $\sup_{x \in X} \|\tilde{N}(x)\| \leq \gamma r$. Note que, se X é um espaço de Hilbert, segue da Observação 3.8.6 (na subseção 3.8.1) que $\text{Lip}(\tilde{N}) \leq \text{Lip}_{B_r^X(0)}(N)$. Assim, se $T = L + N$ em $B_r^X(0)$ com $\sigma(L) \cap \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = r\} = \emptyset$, então, para γ suficientemente pequeno, podemos aplicar o Teorema 3.3.1 para a aplicação $\tilde{T} := L + \tilde{N} : X \rightarrow X$ e obter conclusões sobre as variedades estável e instável de 0 com relação à $\tilde{T}$.

Assim, segue da Observação 1.4.18 que, se o semigrupo $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é gradient-like, então as variedades estável e instável local de T com relação à 0 são dadas por um gráfico.

3.4 Diferenciabilidade de variedades invariantes

Nesta seção provamos que as variedades invariantes obtidas na Seção 3.3 são suaves quando $T : X \rightarrow X$ é suave. Para tal, faremos uso do seguinte lema (veja (HENRY,)).

Lema 3.4.1. Sejam X, Y espaços de Banach, $Q \subset X$ um aberto e $f : Q \rightarrow Y$ localmente Lipschitz. Então,

1. f é continuamente diferenciável em Q se e somente se, para cada $x_0 \in Q$,

$$\|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)\| = o(\|h\|), \quad (3.7)$$

quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$.

2. f é localmente C^{1+} se e somente se para cada $x_0 \in Q$, (3.7) vale uniformemente para algum $B_{\delta_0}^X(x_0)$; isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in B_{\delta_0}^X(x_0)$ e $\|x - y\|, \|h\| < \delta$ implica que

$$\|f(x+h) - f(x) - f(y+h) + f(y)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Demonstração. Escrevemos em detalhes a prova de (1). A prova de (2) pode ser obtida de (1) com pequenas adaptações.

Sejam $f \in C^1(Q)$, $x_0 \in Q$, $\varepsilon > 0$ dados, $B := \overline{B_{2\delta}^X(x_0)} \subset Q$ com $\sup_{z \in B} \|f'(z) - f'(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Então, para $x, h \in B_{\delta}^X(x_0)$, temos

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)\| &= \left\| \int_0^1 [f'(x+th) - f'(x_0+th)] dt h \right\| \\ &\leq \int_0^1 [\|f'(x+th) - f'(x_0)\| + \|f'(x_0+th) - f'(x_0)\|] dt \|h\| \\ &\leq 2 \left(\sup_{z \in B} \|f'(z) - f'(x_0)\| \right) \|h\| \leq \varepsilon \|h\|, \end{aligned}$$

e, então, obtemos (3.7).

Para a recíproca, podemos assumir sem perda de generalidade que Q é uma bola e que f é Lipschitziana. Se a derivada existe em cada ponto de Q , de (3.7) obtemos que

$$\left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} \right\| = o(\|h\|),$$

quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$. Consequentemente $\|(f'(x) - f'(x_0))h\| = o(\|h\|)$, quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$; isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x - x_0\| < \delta$ e $\|h\| < \delta$, então

$$\frac{\|(f'(x) - f'(x_0))h\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{2},$$

e portanto $\|f'(x) - f'(x_0)\| < \varepsilon$ vale sempre que $\|x - x_0\| < \delta$; isto é, f' é contínua.

Mostremos que se (3.7) vale, então a derivada existe em todos os pontos de Q .

Caso 1: $X = Y = \mathbb{R}$.

Com f é Lipschitz, f é absolutamente contínua e, consequentemente, diferenciável em quase todo o ponto. Nós vamos mostrar que ela é diferenciável em todos os pontos de Q .

Dado $x_0 \in Q$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| + |h| < \delta$, então

$$|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)| \leq \varepsilon |h|.$$

Em particular, se $|y - x_0| + |h| < \delta$, então

$$|f(x+h) - f(x) - f(y+h) + f(y)| \leq 2\varepsilon |h|.$$

Assim, se existem $f'(x_h), f'(y_h)$ e $x_h, y_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x_0$, então $|f'(x_h) - f'(y_h)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Para cada h , escolhamos $x_h^* \in (x_0 - h, x_0 + h)$ tal que $f'(x_h^*)$ existe. Seja $l := \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_h^*)$. Então, dado $h \neq 0$ tal que $|f'(x_h^*) - l| < \varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} - l \right| &\leq \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} - f'(x_h^*) \right| + |f'(x_h^*) - l| \\ &\leq \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0) - f(x_h^* + t) + f(x_h^*)}{t} \right| + \varepsilon \\ &\quad + \left| \frac{f(x_h^* + t) - f(x_h^*)}{t} - f'(x_h^*) \right| \\ &\leq 2\varepsilon + \left| \frac{f(x_h^* + t) - f(x_h^*)}{t} - f'(x_h^*) \right| \end{aligned}$$

e, se $\alpha := \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$ e $\beta := \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$, a desigualdade acima mostra que $\alpha, \beta \in [f'(x^*) - 2\varepsilon, f'(x^*) + 2\varepsilon]$; isto é,

$$0 \leq \alpha - \beta \leq 4\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isto mostra que $\alpha = \beta$. Consequentemente $f'(x_0)$ existe.

Caso 2: $X = \mathbb{R}$.

Seja $\eta \in Y^*$. Então, $\mathbb{R} \ni x \mapsto \langle f(x), \eta \rangle \in \mathbb{R}$ é C^1 , pois

$$\begin{aligned} &|\langle f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0), \eta \rangle| \\ &\leq \|\eta\|_{Y^*} \|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)\| = o(|h|), \end{aligned}$$

quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$ e a afirmação segue do **Caso 1**. Temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} \langle f(x), \eta \rangle \right| &= \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(x+h) - f(x), \eta \rangle}{h} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\langle f(x+h) - f(x), \eta \rangle|}{|h|} \\ &\leq \|\eta\| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{|h|} \leq \|\eta\| \text{Lip} f, \end{aligned}$$

e portanto $D(x) : \eta \mapsto \frac{d}{dx} \langle f(x), \eta \rangle$ pertence a Y^{**} .

Afirmamos que $x \mapsto D(x) \in Y^{**}$ é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x - x_0\| < \delta$ e $\|h\| < \delta$, então

$$|\langle f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0), \eta \rangle| \leq \varepsilon \|\eta\| \|h\|,$$

e, portanto,

$$\left| \frac{d}{dx} \langle f(x), \eta \rangle - \frac{d}{dx} \langle f(x_0), \eta \rangle \right| \leq \varepsilon \|\eta\|,$$

isto é, $|\langle D(x) - D(x_0), \eta \rangle| \leq \varepsilon \|\eta\|$ e portanto D é contínua.

Para $x_0 \in Q$ $\eta \in Y^*$ com $\|\eta\| \leq 1$ e h pequeno

$$\left\langle \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - D(x_0), \eta \right\rangle = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \langle D(x) - D(x_0), \eta \rangle dx \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow 0$, uniformemente para $\|\eta\| \leq 1$, pois $\langle D(x), \eta \rangle = \frac{d}{dx} \langle f(x), \eta \rangle$ temos

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \langle D(x), \eta \rangle dx = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{d}{dx} \langle f(x), \eta \rangle dx = \langle f(x_0+h) - f(x_0), \eta \rangle.$$

Seja $\tau : Y \hookrightarrow Y^{**}$ a inclusão canônica; isto é,

$$\tau(y) = \hat{y}, \text{ onde } \hat{y} : Y^* \rightarrow \mathbb{R}, \hat{y}(\eta) = \eta(y), \forall \eta \in Y^*.$$

Temos que

$$\tau \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) \rightarrow D(x_0), \text{ quando } h \rightarrow 0,$$

pois

$$\left\langle \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \eta \right\rangle \rightarrow \langle D(x_0), \eta \rangle, \text{ uniformemente para } \|\eta\| \leq 1.$$

Mas τ é uma isometria, consequentemente $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ tem um limite em Y quando $h \rightarrow 0$.

Caso 3: Caso Geral.

Do Caso 2, $t \mapsto f(x+th) : \mathbb{R} \rightarrow Y$, ($x \in Q, h \in X$) é C^1 para t suficientemente pequeno tal que $x+th \in Q$, consequentemente a derivada de Gâteaux

$$df(x;h) := \frac{d}{dt} f(x+th)|_{t=0},$$

existe, para cada $x \in Q, h \in X$. Da condição (3.7) segue que, para cada $h \in X$ fixo,

$$\|f(x+th) - f(x) - f(x_0+th) + f(x_0)\| = o(|t|), \quad (3.8)$$

para t pequeno e x próximo de x_0 . Como

$$\frac{f(x_0+t(h+k)) - f(x_0)}{t} = \frac{f((x_0+th)+tk) - f(x_0+th)}{t} + \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t},$$

e

$$\frac{f(x_0+t(sh)) - f(x_0)}{t} = s \frac{f(x_0+(ts)h) - f(x_0)}{ts},$$

segue de (3.8) que $df(x_0, \cdot)$ é linear. Por outro lado, de (3.8), segue que

$$\sup_{\|h\| \leq 1} \|df(x;h) - df(x_0;h)\| \rightarrow 0, \text{ quando } x \rightarrow x_0 \in Q,$$

e portanto $Q \ni x \mapsto df(x; \cdot) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua. Por outro lado, se $g(t) := f(x+th)$, então $g'(t) = df(x+th;h)$ e, supondo h pequeno tal que $x+th \in Q$ para cada $t \in [0, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(x_0+h) - f(x_0) - df(x_0;h)\| &= \left\| \int_0^1 [df(x_0+th, h) - df(x_0, h)] dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \| [df(x_0+th, \cdot) - df(x_0, \cdot)] \|_{\mathcal{L}(X)} dt \|h\|. \end{aligned}$$

Como $Q \ni x \mapsto df(x; \cdot) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua, acabamos de provar que f é Fréchet diferenciável em x_0 e a prova está completa. $\square$

Teorema 3.4.2 (Variedades Invariantes C^1). Suponha que $X, L, \rho, N, T = L + N$ satisfazem as condições do Teorema 3.3.1, consequentemente, $N : X \rightarrow X$ é continuamente diferenciável com derivadas limitadas, ao menos em uma vizinhança de $U_{(\rho)}$ (ou $S_{(\rho)}$). Então, $U_{(\rho)}$ (ou $S_{(\rho)}$) é C^1 . Além disso, se N é localmente C^{1+} , então $U_{(\rho)}$ (ou $S_{(\rho)}$) é localmente C^{1+} .

Demonstração. Provemos o resultado para $U_{(\rho)}$. Do Teorema 3.3.1 temos que $U_{(\rho)} = \{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_u\}$, com $\theta : X_u \rightarrow X_s$, $\theta(0) = 0$, $\text{Lip}\theta \leq 1$ é dado por

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_u \xi + N_u(\xi + \theta(\xi)), \\ \theta(\hat{\xi}) = L_s \theta(\xi) + N_s(\xi + \theta(\xi)). \end{cases}$$

Como θ é Lipschitz, do Lema 3.4.1, é suficiente provar que $\lambda_{\xi_0}(\theta) = 0$ para todo $\xi_0 \in X_u$, onde

$$\lambda_{\xi_0}(\theta) = \limsup_{(\xi, h) \rightarrow (\xi_0, 0)} \frac{1}{\|h\|} \|\theta(\xi + h) - \theta(\xi) - \theta(\xi_0 + h) + \theta(\xi_0)\|. \quad (3.9)$$

Já sabemos que $\lambda_{\xi_0}(\theta) \leq 2\text{Lip}\theta \leq 2$. Denote $\gamma = \text{Lip}(N)$. Usando o Lema 3.4.1 para N_u , temos que

$$\begin{aligned} \widehat{\xi + h} - \hat{\xi} &= L_u h + N_u(\xi + h + \theta(\xi + h)) - N_u(\xi + \theta(\xi)) \\ &= (L_u + \frac{\partial N_u}{\partial x_u}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))h + \frac{\partial N_u}{\partial x_s}(\xi_0 + \theta(\xi_0))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) \\ &\quad + N_u(\xi + h + \theta(\xi + h)) - N_u(\xi + \theta(\xi)) - \frac{\partial N_u}{\partial x_u}(\xi_0 + \theta(\xi_0))h - \frac{\partial N_u}{\partial x_s}(\xi_0 + \theta(\xi_0))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) \\ &= (L_u + \frac{\partial N_u}{\partial x_u}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))h + \frac{\partial N_u}{\partial x_s}(\xi_0 + \theta(\xi_0))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) + o(\|h\|), \end{aligned}$$

quando $(\xi, h) \rightarrow (\xi_0, 0)$ em $X_u \times X_s$. Também

$$\begin{aligned} \theta(\widehat{\xi + h}) - \theta(\hat{\xi}) &= L_s \theta(\xi + h) - L_s \theta(\xi) + N_s(\xi + h + \theta(\xi + h)) - N_s(\xi + \theta(\xi)) \\ &= (L_s + \frac{\partial N_s}{\partial x_s}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) + \frac{\partial N_s}{\partial x_u}(\xi_0 + \theta(\xi_0))h \\ &\quad + N_s(\xi + h + \theta(\xi + h)) - N_s(\xi + \theta(\xi)) - \frac{\partial N_s}{\partial x_u}(\xi_0 + \theta(\xi_0))h - \frac{\partial N_s}{\partial x_s}(\xi_0 + \theta(\xi_0))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) \\ &= (L_s + \frac{\partial N_s}{\partial x_s}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) + \frac{\partial N_s}{\partial x_u}(\xi_0 + \theta(\xi_0))h + o(\|h\|). \end{aligned}$$

quando $(\xi, h) \rightarrow (\xi_0, 0)$ em $X_u \times X_s$. Consequentemente

$$\begin{aligned} &\|\theta(\widehat{\xi + h}) - \theta(\hat{\xi}) - \theta(\widehat{\xi_0 + h}) + \theta(\hat{\xi}_0)\| \\ &= \|(L_s + \frac{\partial N_s}{\partial x_s}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi) - \theta(\xi_0 + h) + \theta(\xi_0))\| + o(\|h\|) \\ &\leq (b + \gamma)\lambda_{\xi_0}(\theta)\|h\| + o(\|h\|) = [(b + \gamma)\lambda_{\xi_0}(\theta) + o(1)]\|h\|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se $k = \widehat{\xi_0 + h} - \hat{\xi}_0$, temos que $\|k\| \geq (a - 2\gamma)\|h\|$ e

$$\begin{aligned} \|\widehat{\xi + h} - (\hat{\xi} + k)\| &= \|\widehat{\xi + h} - \hat{\xi} - \widehat{\xi_0 + h} + \hat{\xi}_0\| \\ &= \left\| \frac{\partial N_u}{\partial x_s}(\xi_0 + \theta(\xi_0)) \left(\theta(\xi + h) - \theta(\xi) - \theta(\xi_0 + h) + \theta(\xi_0) \right) + o(\|h\|) \right\| \\ &\leq \left(\gamma \lambda_{\xi_0}(\theta) + o(1) \right) \|h\|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como $\theta(\hat{\xi}_0 + k) = \theta(\widehat{\xi_0 + h})$, segue de (3.10) e (3.11) que

$$\begin{aligned} \|k\|^{-1} \|\theta(\hat{\xi} + k) - \theta(\hat{\xi}) - \theta(\hat{\xi}_0 + k) + \theta(\hat{\xi}_0)\| &= \\ &= \|k\|^{-1} \|\theta(\widehat{\xi + h}) - \theta(\hat{\xi}) - \theta(\widehat{\xi_0 + h}) + \theta(\hat{\xi}_0) - \theta(\widehat{\xi + h}) + \theta(\hat{\xi} + k)\| \\ &\leq \|k\|^{-1} [\|\theta(\widehat{\xi + h}) - \theta(\hat{\xi}) - \theta(\widehat{\xi_0 + h}) + \theta(\hat{\xi}_0)\| + \|\theta(\widehat{\xi + h}) - \theta(\hat{\xi} + k)\|] \\ &\leq \|k\|^{-1} \{[(b + \gamma)\lambda_{\xi_0}(\theta) + o(1)]\|h\| + \|\widehat{\xi + h} - (\hat{\xi} + k)\|\} \\ &\leq \|k\|^{-1} [(b + 2\gamma)\lambda_{\xi_0}(\theta) + o(1)]\|h\| \\ &\leq \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma} \lambda_{\xi_0}(\theta) + o(1), \end{aligned}$$

quando $(\xi, h) \rightarrow (\xi_0, 0)$. Por outro lado, $(\xi, h) \rightarrow (\xi_0, 0)$ se e somente se $(\hat{\xi}, k) \rightarrow (\hat{\xi}_0, 0)$, pois

$$\begin{aligned} \hat{\xi} - \hat{\xi}_0 &= L_u(\xi - \xi_0) + N_u(\xi + \theta(\xi)) - N_u(\xi_0 + \theta(\xi_0)) \text{ e} \\ k &= \widehat{\xi_0 + h} - \hat{\xi}_0 = L_u h + N_u(\xi_0 + h + \theta(\xi_0 + h)) - N_u(\xi_0 + \theta(\xi_0)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda_{\hat{\xi}_0}(\theta) \leq \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma} \lambda_{\xi_0}(\theta), \text{ para todo } \xi_0 \in X_u.$$

Se $\lambda^* = \sup_{\xi_0 \in X_u} \lambda_{\xi_0}(\theta)$ então, $0 \leq \lambda^* \leq 2$ e

$$\lambda^* = \sup_{\hat{\xi}_0 \in X_u} \lambda_{\hat{\xi}_0}(\theta) = \sup_{\xi_0 \in X_u} \lambda_{\xi_0}(\theta) \leq \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma} \sup_{\xi_0 \in X_u} \lambda_{\xi_0}(\theta) = \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma} \lambda^*,$$

e como $\frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma} < 1$, temos que $\lambda^* = 0$ e $U_{(\rho)}$ é C^1 . Analogamente se pode provar que $S_{(\rho)}$ é C^1 .

A prova do caso C^{1+} é a mesma com o cuidado de que quando usamos $o(\|h\|)$ para N , é localmente uniforme (ver Lema 3.4.1, item 2)). $\square$

3.5 Continuidade de equilíbrios $\mathcal{L}$ -hiperbólicos

Nesta seção, estudamos a estabilidade de pontos fixos $\mathcal{L}$ -hiperbólicos sob perturbações Lipschitz, isto é, dado uma aplicação $T : X \rightarrow X$ com um equilíbrio x^* que é $\mathcal{L}$ -hiperbólico, então existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que se $\tilde{T} : X \rightarrow X$ satisfaz $\|T - \tilde{T}\|_{\text{Lip}(B_\delta^X(x^*))} < \varepsilon$, então $\tilde{T}|_{B_\delta^X(x^*)}$ também possui um único equilíbrio e que é $\mathcal{L}$ -hiperbólico.

A seguir, fixaremos algumas notações que utilizaremos.

Definição 3.5.1. Sejam $B \subset Y \subset X$ e $T : Y \rightarrow X$ uma aplicação. Denotamos

$$\|T\|_{\text{Lip}(B)} := \max\{\|T\|_{L^\infty(B)}, \text{Lip}_B(T)\}$$

com

$$\|T\|_{L^\infty(B)} := \sup_{x \in B} \|T(x)\|_X,$$

e

$$\text{Lip}_B(T) := \sup_{x, y \in B; x \neq y} \frac{\|T(x) - T(y)\|_X}{\|x - y\|_X}.$$

Denotamos $\|T\|_\infty := \|T\|_{L^\infty(Y)}$, $\text{Lip}(T) := \text{Lip}_Y(T)$ e $\|T\|_{\text{Lip}} := \|T\|_{\text{Lip}(Y)}$.

Teorema 3.5.2. Seja $S : X \rightarrow X$ uma aplicação com $S(0) = 0$, $S(x) = Lx + N(x)$ para $x \in B_\delta^X(0)$, $L \in \mathcal{L}(X)$ e $\gamma := \text{Lip}_{B_\delta^X(0)}(N)$ com $\gamma\|(I - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $0 < \delta' < \delta$ tais que

$$(\varepsilon + \gamma\delta')\|(I - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \delta' \text{ e } (\varepsilon + \gamma)\|(I - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

Se $S_1 : X \rightarrow X$ é uma aplicação que satisfaz $\|S - S_1\|_{\text{Lip}(B_\delta^X(0))} \leq \varepsilon$, então $S_1|_{\overline{B_{\delta'}^X(0)}}$ tem um único ponto fixo. Em particular, 0 é um equilíbrio isolado de S .

Além disso, se 0 é um ponto fixo $\mathcal{L}$ -hiperbólico de S com parâmetros γ, a, b, δ e

$$b + 2(\gamma + \varepsilon) < 1 < a - 2(\gamma + \varepsilon),$$

então x_1^* é um ponto fixo $\mathcal{L}$ -hiperbólico de S_1 com parâmetros $\gamma + \varepsilon, a, b, \delta - \delta'$.

Demonstração. Seja $\phi : \overline{B_{\delta'}^X(0)} \rightarrow X$, $\phi(x) := (I - L)^{-1}[(S_1 - S)x + N(x)]$. Note que

$$S_1(x) = x \Leftrightarrow \phi(x) = x.$$

Por outro lado, como $N(0) = 0$, temos

$$\|\phi(x)\| = \|(I - L)^{-1}[(S_1 - S)x + (Nx - N0)]\| \leq (\varepsilon + \gamma\delta')\|(I - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \delta'$$

e

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|(I - L)^{-1}[(S_1 - S)(x - y) + (N(x) - N(y))]\| \leq (\varepsilon + \gamma)\|(I - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|x - y\|$$

para todo $x, y \in B_{\delta'}^X(0)$. Assim, $\phi : \overline{B_{\delta'}^X(0)} \rightarrow \overline{B_{\delta'}^X(0)}$ é uma contração e, então, ela tem um único ponto fixo x_1^* . Em particular, se $S_1 = S$, então mostramos que 0 é um equilíbrio isolado de S .

Além disso, se supusermos que 0 é um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico de S e

$$b + 2(\gamma + \varepsilon) < 1 < a - 2(\gamma + \varepsilon),$$

então, segue que x_1^* é um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico de S_1 com parâmetros $\gamma + \varepsilon, a, b, \delta - \delta'$. De fato, $B_{\delta - \delta'}^X(x_1^*) \subset B_\delta^X(0)$ e então, podemos escrever

$$S_1^*(x) := S_1(x + x_1^*) - x_1^* = Lx + N_1(x),$$

com

$$N_1(x) = N(x + x_1^*) + (S_1 - S)(x + x_1^*) + Lx_1^* - x_1^*.$$

□

Corolário 3.5.3. Sejam $T_\eta : X \rightarrow X$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de aplicações, tais que $\|T_\eta - T_0\|_{\text{Lip}(B_\delta^X(x_0^*))} \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$. Suponha que x_0^* é um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico de T_0 . Seja $\mathcal{E}_\eta$ o conjunto dos equilíbrios de T_η . Então, existe $\eta_0 > 0$ e uma sequência $\{x_\eta^*\}_{0 \leq \eta \leq \eta_0}$ de equilíbrios $\mathcal{L}$ -hiperbólicos com $\{x_\eta^*\} = \mathcal{E}_\eta \cap B_\delta^X(x_0^*)$ para cada $0 \leq \eta \leq \eta_0$ tal que $x_\eta^* \rightarrow x_0^*$ quando $\eta \rightarrow 0$. Em particular, se $\mathcal{E}_0$ só tem equilíbrios $\mathcal{L}$ -hiperbólicos, se $\{\mathcal{E}_\eta\}_{\eta \in [0, 1]}$ é assintoticamente compacta em $\eta = 0$ e se existe $\delta > 0$ tal que $\|T_\eta - T_0\|_{\text{Lip}(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0))} \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$, então existe $\eta_1 > 0$ tal que $\mathcal{E}_\eta$ é finito com o mesmo número de elementos de $\mathcal{E}_0$ para todo $0 \leq \eta \leq \eta_1$, e $\{\mathcal{E}_\eta\}_{0 \leq \eta \leq 1}$ é contínua em $\eta = 0$.

Demonstração. Note que se mudarmos ε por $\varepsilon_\eta := \|T_\eta - T_0\|_{\text{Lip}(B_\delta^X(x_0^*))}$ no Teorema 3.5.2, como $\varepsilon_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, podemos escolher $\delta_\eta \rightarrow 0$ tal que, para $0 \leq \eta \leq \eta_0$,

$$(\varepsilon_\eta + \gamma\delta_\eta)\|(I - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \delta_\eta, \quad (\varepsilon_\eta + \gamma)\|(I - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1,$$

e

$$b + 2(\gamma + \varepsilon_\eta) < 1 < a - 2(\gamma + \varepsilon_\eta),$$

e obtemos a primeira parte através do Teorema 3.5.2.

Para a segunda parte, note que do Teorema 3.5.2, obtemos que o número de elementos $\text{car}(\mathcal{E}_\eta)$ de $\mathcal{E}_\eta$ é maior ou igual ao número de elementos $\text{car}(\mathcal{E}_0)$ de $\mathcal{E}_0$. Além disso, para δ suficientemente pequeno, temos que $\text{car}(\mathcal{E}_\eta \cap B_\delta^X(x^*)) = 1$ para cada $x^* \in \mathcal{E}_0$. Se existisse $\eta_k \rightarrow 0$ com $\text{car}(\mathcal{E}_{\eta_k}) > \text{car}(\mathcal{E}_0)$, teríamos uma sequência $x_{\eta_k}^* \in (X \setminus \mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0)) \cap \mathcal{E}_{\eta_k}$. Por outro lado, segue da compacidade assintótica de $\{\mathcal{E}_\eta\}_{\eta \in [0, 1]}$ que (a menos de subsequência) $x_{\eta_k}^* \rightarrow x^*$ para algum $x^* \in X$. Como $\|T_\eta - T_0\|_{\text{Lip}(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0))} \rightarrow 0$, segue que $x^* \in \mathcal{E}_0$, que é uma contradição. □

3.6 $\mathcal{L}$ -hiperbolicidade uniforme

O propósito desta seção é provar o seguinte teorema.

Teorema 3.6.1. Seja $T : X \rightarrow X$ uma aplicação e x^* um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico de T , com parâmetros γ, a, b, δ . Seja $S(x) := T(x + x^*) - x^* = Lx + N(x)$, para $x \in B_\delta^X(0)$, com L, N como na Definição 3.2.2. Então, existe $\delta_0 = \delta_0(\gamma, a, b) \in (0, \delta)$ tal que a única solução global $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ com imagem em $B_{\delta_0}^X(x^*)$ é a solução constante $\xi(m) = x^*$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

A seguir provamos os lemas que utilizamos para provar o Teorema 3.6.1.

Lema 3.6.2. Seja $S : X \rightarrow X$ uma aplicação, 0 sendo equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico de S , com parâmetros γ, a, b, δ e a decomposição $S(x) = Lx + N(x)$ para $x \in B_\delta^X(0)$, como na Definição 3.2.2. Seja $X = X_u \oplus X_s$ como no início da seção 3.2. Suponha que $W^u(0, B_\delta^X(0)) = B_\delta^{X_u}(0)$ e $W^s(0, B_\delta^X(0)) = B_\delta^{X_s}(0)$. Então, a única solução global $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ com imagem em $B_\delta^X(0)$ é a solução constante $\xi(m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Se $x \in X$, denote por x_u e x_s as coordenadas de x em X_u e X_s respectivamente. Note que $a - \gamma > 1$, $b + \gamma < 1$ e, da prova do Teorema 3.3.1, temos que $N_u(\eta) = N_s(\xi) = 0$ para todo $\xi \in X_u, \eta \in X_s$ com $\|\xi\|, \|\eta\| < \delta$. Então,

$$\begin{aligned} \|(Sx)_u\| &= \|L_u x_u + N_u(x_u + x_s) - N_u(x_s)\| \geq (a - \gamma)\|x_u\|; \\ \|(Sx)_s\| &= \|L_s x_s + N_s(x_u + x_s) - N_s(x_u)\| \leq (b + \gamma)\|x_s\|, \end{aligned}$$

Seja $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ uma solução global de S em $B_\delta^X(0)$. Se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(\xi(m))_u \neq 0$, como $\|(S^n \xi(m))_u\| \geq (a - \gamma)^n \|(\xi(m))_u\|$, nós deveríamos ter uma contradição quando $n \rightarrow \infty$. Assim, $(\xi(m))_u = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, note que

$$\|(\xi(m))_s\| = \|(\xi(\{m - n\} + n))_s\| \leq (b + \gamma)^n \|(\xi(m - n))_s\| \leq \delta(b + \gamma)^n$$

e portanto $(\xi(m))_s = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ e o resultado segue. $\square$

Lema 3.6.3. Seja 0 um equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico da aplicação $T : X \rightarrow X$, com parâmetros γ, a, b, ∞ e $T = L + N$ com L, N como na Definição 3.2.2. Sejam X_u, X_s associados a L como no início da seção 3.2. Então, dado $\delta > 0$, temos:

1. $W^u(0) = X_u$ implica que $W^u(0, B_\delta^X(0)) = X_u \cap B_\delta^X(0)$; e
2. $W^s(0) = X_s$ implica que $W^s(0, B_\delta^X(0)) = X_s \cap B_\delta^X(0)$.

Demonstração. Apresentamos apenas a prova de 1). A prova de 2) é análoga. Como $W^u(0) = X_u$, segue da definição de $W^u(0, B_\delta^X(0))$ que $W^u(0, B_\delta^X(0)) \subset X_u \cap B_\delta^X(0)$. Seja $x \in X_u \cap B_\delta^X(0)$. Como $W^u(0) = X_u$, segue que existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \subset X_u$ solução negativa de T tal que $x_0 = x$ e $x_n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$. Da prova do Lema 3.6.2, segue que $\|x_j\| \leq (a - \gamma)^j \|x_0\|$ para cada $j \in \mathbb{Z}^-$ e, como $a - \gamma > 1$, segue que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \subset B_\delta^X(0)$ e portanto $x \in W^u(0, B_\delta^X(0))$ e o resultado segue. $\square$

O lema a seguir usa técnicas que são encontradas na prova do λ -Lema de (HENRY,) e na prova do Teorema 3.3.1, que está no Apêndice B.6.

Lema 3.6.4. Seja $T : X \rightarrow X$ uma aplicação com 0 equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico e a decomposição $T = L + N$ com parâmetros γ, a, b, δ . Seja $X = X_u \oplus X_s$ como no início da seção 3.2. Então, existe $\gamma_1 = \gamma_1(a, b), \delta_1 = \delta_1(a, b, \delta) > 0$ tais que $\gamma \leq \gamma_1$ implica que existe uma mudança de variáveis $g : X \rightarrow X$ bi-Lipschitz tal que $\hat{T} := g^{-1} \circ T \circ g$ tem variedades locais satisfazendo as seguintes propriedades:

$$W_{\hat{T}}^u(0, B_{\delta_1}^X(0)) = X_u \cap B_{\delta_1}^X(0) \quad \text{e} \quad W_{\hat{T}}^s(0, B_{\delta_1}^X(0)) = X_s \cap B_{\delta_1}^X(0).$$

Além disso, δ_1 pode ser escolhido arbitrariamente próximo de δ , desde que γ seja suficientemente pequeno. Também temos que, se $\delta = \infty$, então $\delta_1 = \infty$.

Demonstração. Passo 1. Suponha que $\delta = \infty$. Defina $\tilde{T} := h^{-1} \circ T \circ h : X_u \times X_s \rightarrow X_u \times X_s$ com $h : X_u \times X_s \rightarrow X$ por $h(\xi, \eta) = \xi + \sigma(\eta) + \eta$. Então, h^{-1} está bem definida pois

$$\begin{aligned} \|h(\xi, \eta) - h(\lambda, \mu)\| &\geq \|(\xi + \eta) - (\lambda + \mu)\| - \text{Lip}(\sigma)\|\eta - \mu\| \\ &\geq (1 - \text{Lip}(\sigma))\|(\xi + \eta) - (\lambda + \mu)\|, \end{aligned}$$

e $\text{Lip}(\sigma) < 1$. Mostremos que

$$\tilde{T}(x) = (L_u \xi + \tilde{N}_u(x), L_s \eta + \tilde{N}_s(x))$$

com $x = \xi + \eta$ e

$$\begin{cases} \tilde{N}_u(\xi, \eta) = N_u(\xi + \sigma(\eta) + \eta) - N_u(\sigma(\eta) + \eta) + \sigma(\tilde{\eta}) - \sigma(\hat{\eta}); \\ \tilde{N}_s(\xi, \eta) = N_s(\xi + \sigma(\eta) + \eta), \end{cases}$$

tais que $\tilde{N}_u(\eta) = 0$ para $\eta \in X_s$.

Sabemos que existem funções Lipschitz $\theta : X_u \rightarrow X_s$ e $\sigma : X_s \rightarrow X_u$, tais que

$$\begin{aligned} W^u &= \{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_u\} \text{ e } W^s \\ &= \{\sigma(\eta) + \eta : \eta \in X_s\}, \end{aligned}$$

pela Proposição 3.3.1. Então, se $T(h(\xi + \eta)) = h(\hat{\xi} + \hat{\eta})$ temos que (para $T = L + N$)

$$\begin{aligned} T(\xi + \sigma(\eta) + \eta) &= L_u \xi + L_u \sigma(\eta) + L_s \eta + N_u(\xi + \sigma(\eta) + \eta) + N_s(\xi + \sigma(\eta) + \eta) \\ &= \hat{\xi} + \sigma(\hat{\eta}) + \hat{\eta}, \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_u \xi + L_u \sigma(\eta) + N_u(\xi + \sigma(\eta) + \eta) - \sigma(\hat{\eta}), \\ \hat{\eta} = L_s \eta + N_s(\xi + \sigma(\eta) + \eta). \end{cases}$$

Temos agora para $\sigma : X_s \rightarrow X_u$ que

$$\begin{cases} \sigma(\tilde{\eta}) = L_u \sigma(\eta) + N_u(\sigma(\eta) + \eta), \\ \tilde{\eta} = L_s \eta + N_s(\sigma(\eta) + \eta), \end{cases}$$

e conseqüentemente podemos reescrever a equação anterior como

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_u \xi + N_u(\xi + \sigma(\eta) + \eta) - N_u(\sigma(\eta) + \eta) + \sigma(\tilde{\eta}) - \sigma(\hat{\eta}), \\ \hat{\eta} = L_s \eta + N_s(\xi + \sigma(\eta) + \eta). \end{cases}$$

Logo, definindo

$$\begin{aligned}\tilde{N}_u(\xi, \eta) &= N_u(\xi + \sigma(\eta) + \eta) - N_u(\sigma(\eta) + \eta) + \sigma(\tilde{\eta}) - \sigma(\hat{\eta}), \text{ e} \\ \tilde{N}_s(\xi, \eta) &= N_s(\xi + \sigma(\eta) + \eta),\end{aligned}$$

obtemos o resultado.

Mostremos que $\text{Lip}(\tilde{N}_u), \text{Lip}(\tilde{N}_s) \leq f(\gamma)$ com $f(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0$.

$$\begin{aligned}\|\tilde{N}_u(\xi, \eta) - \tilde{N}_u(\lambda, \mu)\| &\leq \|N_u(\xi + \sigma(\eta) + \eta) - N_u(\lambda + \sigma(\mu) + \mu)\| \\ &\quad + \|N_u(\sigma(\eta) + \eta) - N_u(\sigma(\mu) + \mu)\| + \|\sigma(\tilde{\eta}) - \sigma(\tilde{\mu})\| \\ &\quad + \|\sigma(\hat{\eta}) - \sigma(\hat{\mu})\|.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Mas

$$\begin{aligned}\|N_u(\xi + \sigma(\eta) + \eta) - N_u(\lambda + \sigma(\mu) + \mu)\| &\leq \gamma[\|(\xi + \eta) - (\lambda + \mu)\| + \text{Lip}(\sigma)\|\eta - \mu\|] \\ &\leq \gamma(1 + \text{Lip}(\sigma))\|(\xi, \eta) - (\lambda, \mu)\|.\end{aligned}$$

Em particular,

$$\|N_u(\sigma(\eta) + \eta) - N_u(\sigma(\mu) + \mu)\| \leq \gamma(1 + \text{Lip}(\sigma))\|(\xi, \eta) - (\lambda, \mu)\|.$$

continuando,

$$\begin{aligned}\|\sigma(\tilde{\eta}) - \sigma(\tilde{\mu})\| &\leq \text{Lip}(\sigma)\|\tilde{\eta} - \tilde{\mu}\| \\ &= \text{Lip}(\sigma)\|(L_s\eta + N_s(\sigma(\eta) + \eta)) - (L_s\mu + N_s(\sigma(\mu) + \mu))\| \\ &\leq \text{Lip}(\sigma)[b\|\eta - \mu\| + \gamma(1 + \text{Lip}(\sigma))\|\eta - \mu\|] \\ &\leq (b + 2\gamma)\text{Lip}(\sigma)\|(\xi, \eta) - (\lambda, \mu)\|,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\sigma(\hat{\eta}) - \sigma(\hat{\mu})\| &\leq \text{Lip}(\sigma)\|\hat{\eta} - \hat{\mu}\| \\ &= \|(L_s\eta + N_s(\xi + \sigma(\eta) + \eta)) - (L_s\mu + N_s(\lambda + \sigma(\mu) + \mu))\| \\ &\leq \text{Lip}(\sigma)[b\|\eta - \mu\| + \gamma(\|(\xi + \eta) - (\lambda + \mu)\| + \text{Lip}(\sigma)\|\eta - \mu\|)] \\ &\leq (b + 2\gamma)\text{Lip}(\sigma)\|(\xi + \eta) - (\lambda + \mu)\|,\end{aligned}$$

e portanto

$$\text{Lip}(\tilde{N}_u) \leq 2[\gamma(1 + \text{Lip}(\sigma)) + (b + 2\gamma)\text{Lip}(\sigma)].$$

Como $\text{Lip}(\sigma) \leq \frac{\gamma}{a - b - 3\gamma}$ (ver prova de (B.65)), temos

$$\text{Lip}(\tilde{N}_u) \leq \frac{2a\gamma}{a - b - 3\gamma} := f(\gamma).$$

Analogamente,

$$\text{Lip}(\tilde{N}_s) \leq \gamma(1 + \text{Lip}(\sigma)) \leq f(\gamma).$$

Como $f(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0$, segue que existe $\gamma_0 = \gamma_0(L, a, b)$ tal que

$$\|(I - L)^{-1}\|f(\gamma) < 1 \text{ e } b + 2f(\gamma) < 1 < a - 2f(\gamma), \forall \gamma \in (0, \gamma_0]. \quad (3.13)$$

Como $(I - L)^{-1}x = (I - L_u)^{-1}x_u + (I - L_s)^{-1}x_s$, temos que $\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-b} + \frac{a}{a-1}$. Assim, $\gamma_0 = \gamma_0(a, b)$ e então, 0 é um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico de $\tilde{T}$ com parâmetros $f(\gamma), a, b, \infty$.

Passo 2. Seja γ_0 como em (3.13) e $\gamma \in (0, \gamma_0]$. Seja $\tilde{\theta} : X_u \rightarrow X_s$ tal que

$$W_T''(0) = \{\xi + \tilde{\theta}(\xi) : \xi \in X_u\},$$

e, da prova do Teorema 3.3.1, obtemos $\text{Lip}(\tilde{\theta}) \leq \frac{f(\gamma)}{a-b-3f(\gamma)} := f_*(\gamma) < 1$. Seja $k : X \rightarrow X_u \times X_s$ definida por $k(\xi + \eta) = (\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta)$. Defina $g := h \circ k$.

Afirmção. Existe $\gamma^* = \gamma^*(a, b) > 0$ tal que se $\gamma < \gamma^*$, então g é bi-Lipschitz.

Note que $g(\xi + \eta) = \xi + \eta + \sigma(\tilde{\theta}(\xi) + \eta) + \tilde{\theta}(\xi)$, e então,

$$\begin{aligned} \|g(\xi + \eta) - g(\lambda + \mu)\| &\geq \|(\xi + \eta) - (\lambda + \mu)\| - \text{Lip}(\sigma)[\text{Lip}(\tilde{\theta})\|\xi - \lambda\| + \|\eta - \mu\|] \\ &\quad - \text{Lip}(\tilde{\theta})\|\xi - \lambda\| \\ &\geq [1 - 2\text{Lip}(\tilde{\theta})(1 + \text{Lip}(\sigma))]\|(\xi + \eta) - (\lambda + \mu)\|. \end{aligned}$$

Assim, se $\gamma^* > 0$ é tal que $2f_*(\gamma)(\frac{a-b-2\gamma}{a-b-3\gamma}) < 1$ para todo $\gamma \in (0, \gamma^*)$, então g é bi-Lipschitz e $\text{Lip}(g^{-1}) \leq \frac{1}{1 - 2f_*(\gamma)(\frac{a-b-2\gamma}{a-b-3\gamma})}$.

Assim, $\|g^{-1}(x)\| \leq \delta_2\|x\|$ com $\delta_2 := \frac{1}{1 - 2f_*(\gamma)(\frac{a-b-2\gamma}{a-b-3\gamma})}$ e isto prova a afirmação acima.

Defina $\hat{T} := k^{-1} \circ \tilde{T} \circ k = g^{-1} \circ T \circ g$. Mostremos que $\hat{T} = L + \hat{N}$ com $\text{Lip}(\hat{N}) \leq f_1(\gamma)$ e $f_1(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0$.

Seja $x = \xi + \eta, \hat{x} = \hat{\xi} + \hat{\eta}$ com $\xi, \hat{\xi} \in X_u$ e $\eta, \hat{\eta} \in X_s$. Então,

$$\hat{T}x = \hat{x} \Leftrightarrow \tilde{T}k(x) = k(\hat{x}) \Leftrightarrow \tilde{T}(\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta) = (\hat{\xi}, \tilde{\theta}(\hat{\xi}) + \hat{\eta})$$

Assim,

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_u\xi + \tilde{N}_u(\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta); \\ \tilde{\theta}(\hat{\xi}) + \hat{\eta} = L_s(\tilde{\theta}(\xi) + \eta) + \tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta). \end{cases}$$

por outro lado, $\tilde{\theta}$ satisfaz

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = L_u\xi + \tilde{N}_u(\xi, \tilde{\theta}(\xi)); \\ \tilde{\theta}(\tilde{\xi}) = L_s\tilde{\theta}(\xi) + \tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi)). \end{cases}$$

e então,

$$\hat{\eta} = L_s\eta + \tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta) - \tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi)) + \tilde{\theta}(\tilde{\xi}) - \tilde{\theta}(\hat{\xi}).$$

isto é, $\hat{T} = L + \hat{N}$ com $\hat{N} := \hat{N}_u + \hat{N}_s$, $\hat{N}_u(x) = \tilde{N}_u(\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta)$ e

$$\hat{N}_s(x) = \tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta) - \tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi)) + \tilde{\theta}(\xi) - \tilde{\theta}(\hat{\xi}).$$

Note que $\hat{N}_u(\eta) = \tilde{N}_u(0, \eta) = 0$ para $\eta \in X_s$. Além disso, $\hat{N}_s(\xi) = 0$ para $\xi \in X_u$ porque no caso $\eta = 0$ e então, $\hat{\xi} = \xi$.

Agora calcularemos $\text{Lip}(\hat{N}_u)$ e $\text{Lip}(\hat{N}_s)$. Se $x = \xi + \eta, y = \lambda + \mu$, então

$$\begin{aligned} \|\hat{N}_u(x) - \hat{N}_u(y)\| &= \|\tilde{N}_u(\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta) - \tilde{N}_u(\lambda, \tilde{\theta}(\mu) + \mu)\| \\ &\leq f(\gamma)(\|(\xi, \eta) - (\lambda, \mu)\| + \text{Lip}(\tilde{\theta})\|\eta - \mu\|) \\ &\leq f(\gamma)(1 + \text{Lip}(\tilde{\theta}))\|(\xi, \eta) - (\lambda, \mu)\| = f(\gamma)(1 + \text{Lip}(\tilde{\theta}))\|x - y\|. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\hat{N}_s(x) - \hat{N}_s(y)\| &\leq \|\tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta) - \tilde{N}_s(\lambda, \tilde{\theta}(\lambda) + \mu)\| + \|\tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi)) - \tilde{N}_s(\lambda, \tilde{\theta}(\lambda))\| \\ &\quad + \|\tilde{\theta}(\hat{\xi}) - \tilde{\theta}(\hat{\lambda})\| + \|\tilde{\theta}(\hat{\xi}) - \tilde{\theta}(\hat{\lambda})\|. \end{aligned}$$

Note que analogamente a $\hat{N}_u$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta) - \tilde{N}_s(\lambda, \tilde{\theta}(\lambda) + \mu)\| + \|\tilde{N}_s(\xi, \tilde{\theta}(\xi)) - \tilde{N}_s(\lambda, \tilde{\theta}(\lambda))\| \\ \leq 2f(\gamma)(1 + \text{Lip}(\tilde{\theta}))\|x - y\| \end{aligned}$$

continuando,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(\hat{\xi}) - \tilde{\theta}(\hat{\lambda})\| &\leq [b\text{Lip}(\tilde{\theta}) + f(\gamma)(1 + \text{Lip}(\tilde{\theta}))]\|\xi - \lambda\| \\ &\leq [b\text{Lip}(\tilde{\theta}) + f(\gamma)(1 + \text{Lip}(\tilde{\theta}))]\|x - y\|. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(\hat{\xi}) - \tilde{\theta}(\hat{\lambda})\| &\leq \text{Lip}(\tilde{\theta})\|\hat{\xi} - \hat{\lambda}\| \\ &\leq \text{Lip}(\tilde{\theta})[a^{-1}\|\xi - \lambda\| + f(\gamma)(\|(\xi, \eta) - (\lambda, \mu)\| + \text{Lip}(\tilde{\theta})\|\xi - \lambda\|)] \\ &\leq \text{Lip}(\tilde{\theta})[a^{-1} + f(\gamma)(1 + \text{Lip}(\tilde{\theta}))]\|x - y\|. \end{aligned}$$

e, usando que $\text{Lip}(\tilde{\theta}) \leq f_*(\gamma)$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\hat{N}_s) &\leq 3f(\gamma)(1 + \text{Lip}(\tilde{\theta})) + b\text{Lip}(\tilde{\theta}) + \text{Lip}(\tilde{\theta})[a^{-1} + f(\gamma)(1 + \text{Lip}(\tilde{\theta}))] \\ &\leq f(\gamma)(1 + f_*(\gamma))(3 + f_*(\gamma)) + f_*(\gamma)(b + a^{-1}) := f_1(\gamma). \end{aligned}$$

com $f_1(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0$. Então, $\hat{T} = L + \hat{N}$ com $\text{Lip}(\hat{N}) \leq f_1(\gamma)$. Em particular, existe $\gamma_1 = \gamma_1(a, b) \in (0, \min\{\gamma_0, \gamma^*\}]$ tal que para cada $\gamma \in (0, \gamma_1]$, temos

$$\|(I - L)^{-1}\|f_1(\gamma) < 1 \text{ e } b + 2f_1(\gamma) < 1 < a - 2f_1(\gamma)$$

e então, 0 é um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico para $\hat{T}$ com parametros $f_1(\gamma), a, b, \infty$. Além disso, $W_{\hat{T}}^u(0) = X_u$ e $W_{\hat{T}}^s(0) = X_s$ e então, completamos o caso $\delta = \infty$.

Passo 3: Seja $T : X \rightarrow X$ uma aplicação, 0 um equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico de T com parâmetros γ, a, b, δ $T(x) = Lx + N(x)$ para $x \in B_\delta^X(0)$, como na Definição 3.2.2. Defina $T_1 = L + N_1$ com

$$N_1(x) = \begin{cases} N(x), & \|x\| \leq \delta; \\ N(\frac{\delta}{\|x\|}x), & \|x\| \geq \delta. \end{cases} \quad (3.14)$$

e, sem perda de generalidade, 0 é ponto de equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico com a decomposição $T_1 = L + N_1$ e parâmetros γ, a, b, ∞ (Note que se $\gamma = \text{Lip}_{B_\delta^X(0)}(N)$, então $\text{Lip}(N_1) \leq 2\gamma$. Isto segue da prova do Lema 3.8.5).

De forma análoga ao Passo 1, defina $h : X_u \times X_s \rightarrow X$ por $h(\xi, \eta) = \xi + \sigma(\eta) + \eta$. Analogamente ao Passo 2, defina $k : X \rightarrow X_u \times X_s$ por $k(\xi + \eta) = (\xi, \tilde{\theta}(\xi) + \eta)$, $g := h \circ k$ e $\hat{T}_1 := g^{-1} \circ T_1 \circ g$. Assuma $0 < \gamma \leq \gamma_1$ com γ_1 obtido acima. Então, $W_{\hat{T}_1}^u(0) = X_u$ e $W_{\hat{T}_1}^s(0) = X_s$ e, do Lema 3.6.3, para cada $r > 0$, temos que $W^u(0, B_r^X(0)) = X_u \cap B_r^X(0)$ e $W^s(0, B_r^X(0)) = X_s \cap B_r^X(0)$.

Defina $\hat{T} := g^{-1} \circ T \circ g$. Então, é suficiente mostrarmos que existe $\delta_1 = \delta_1(a, b, \delta) > 0$ tal que $W_{\hat{T}}^u(0, B_{\delta_1}^X(0)) = W_{\hat{T}_1}^u(0, B_{\delta_1}^X(0))$ e $W_{\hat{T}}^s(0, B_{\delta_1}^X(0)) = W_{\hat{T}_1}^s(0, B_{\delta_1}^X(0))$.

Note que

$$\|g(\xi + \eta)\| = \|\xi + \sigma(\tilde{\theta}(\xi) + \eta) + \tilde{\theta}(\xi) + \eta\| \leq (1 + \text{Lip}(\tilde{\theta}))(1 + \text{Lip}(\sigma))\|\xi + \eta\|.$$

Logo, escolhendo

$$\delta_1 := \left[\left(1 + \frac{f(\gamma_1)}{a - b - 3f(\gamma_1)}\right) \left(1 + \frac{\gamma_1}{a - b - 3\gamma_1}\right) \right]^{-1} \delta$$

com $f(\gamma_1) = \frac{2a\gamma_1}{a - b - 3\gamma_1}$, obtemos $g(B_{\delta_1}^X(0)) \subset B_\delta^X(0)$. Como $T_1|_{B_\delta^X(0)} = T|_{B_\delta^X(0)}$, segue que $\hat{T}_1|_{B_{\delta_1}^X(0)} = \hat{T}|_{B_{\delta_1}^X(0)}$ e o resultado segue. $\square$

Agora estamos prontos para provarmos o principal resultado desta seção.

Prova do Teorema 3.6.1. Sem perda de generalidade, suponha $x^* = 0$. Então, as hipóteses do Lema 3.6.4 estão satisfeitas. Provaremos, a seguir, que existe $\delta_2 = \delta_2(\gamma, a, b)$ tal que se $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow B_\rho^X(0)$ solução global de T e $\rho\delta_2 < \delta_1$, então $\lambda := g^{-1} \circ \phi : \mathbb{Z} \rightarrow B_{\delta_1}^X(0)$ é solução global de $\hat{T}$. Aqui, δ_1 e $g : X \rightarrow X$ são dadas pelo Lema 3.6.4.

Seja $0 < \rho < \frac{\delta_1}{\delta_2}$ com δ_1, δ_2 dados na prova do Lema 3.6.4. Então, $\|g^{-1}(x)\| \leq \delta_2\|x\|$ para todo $x \in X$ e portanto $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow B_\rho^X(0)$ solução global de T implica que $\lambda := g^{-1} \circ \phi : \mathbb{Z} \rightarrow B_{\delta_1}^X(0)$ é solução global de $\hat{T}$. Em particular, dado $c \in (0, 1)$, podemos tomar $\rho := c \frac{\delta_1}{\delta_2} = \rho(a, b, \gamma)$.

Assim, segue do Lema 3.6.2 que $\phi(m) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$ é a única solução global de T em $B_\rho^X(0)$. $\square$

Corolário 3.6.5. Seja $T \in \mathcal{C}(X)$ com equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico x^* com parametros γ, a, b, δ . Então, existe $\delta_0 = \delta_0(\gamma, a, b) \in (0, \delta)$ tal que se $0 < \delta_1 < \delta_0$ e $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ é uma solução global que satisfaz $\xi(m) \in B_{\delta_1}^X(x^*)$ para todo $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, então $\xi(m) \rightarrow x^*$ quando $m \rightarrow \infty$. Analogamente, se $\xi(m) \in B_{\delta_1}^X(x^*)$ para todo $m \in \mathbb{Z}, m \leq 0$, então $\xi(m) \rightarrow x^*$ quando $m \rightarrow -\infty$.

Demonstração. Note que $\xi(m) \rightarrow \omega(\xi(0))$ quando $m \rightarrow \infty$ e $\xi(m) \rightarrow \alpha(\xi(0))$. Seja $\delta_0 > 0$ dado pelo Teorema 3.6.1. Como $\omega(\xi(0)), \alpha(\xi(0)) \subset \overline{B_{\delta_1}^X(x^*)} \subset B_{\delta_0}^X(x^*)$ e ambos $\omega(\xi(0)), \alpha(\xi(0))$ tem somente soluções globais, se $\xi(m) \in B_{\delta_1}^X(x^*)$ para todo $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, então $\omega(\xi(0)) = \{x^*\}$. Os outros casos são análogos. $\square$

A seguir provamos uma implicação do Teorema 3.6.1 com relação a verificação da estabilidade da estrutura gradiente.

Uma das formas de se verificar a estabilidade de semigrupos gradient-like é através do seguinte teorema (ver (CARVALHO, 2012)).

Teorema 3.6.6. Seja $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Se

- a) $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado;
- b) $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_p^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$, e $\text{dist}(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, $1 \leq i \leq p$. Além disso, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que a única solução global de $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ contida em $B_\delta(y_i^{*,\eta})$ é $y_i^{*,\eta}$, $1 \leq i \leq p$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$;
- c) $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo gradient-like,

então existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \in [0, \eta_0]$, o semigrupo $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é gradient-like.

Usando o Teorema 3.6.1, obtemos uma nova forma de verificar a estabilidade dos semigrupos gradient-like.

Teorema 3.6.7. Seja $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Se

- a) $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado;
- b) $B_0 := \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{E}_0)$ para algum $\varepsilon > 0$ tal que $\|T_\eta - T_0\|_{\text{Lip}(B_0)} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$; e
- c) $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo gradient-like e $\mathcal{E}_0$ só tem equilíbrios $\mathfrak{L}$ -hiperbólicos,

então, existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \in [0, \eta_0]$, o semigrupo $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é gradient-like.

Demonstração. É suficiente provarmos as seguintes afirmações:

1. existem $\eta_0 > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um número finito de equilíbrios $\mathcal{E}_\eta = \{x_{1,\eta}^*, \dots, x_{p,\eta}^*\}$, para todo $\eta \in [0, \eta_0]$;
2. $\text{dist}(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, $1 \leq i \leq p$; e
3. existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que a única solução global de $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ contida em $B_\delta(y_i^{*,\eta})$ é $y_i^{*,\eta}$, $1 \leq i \leq p$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$.

Afirmamos que $\{\mathcal{E}_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ é assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Seja $x_{\eta_k} \in \mathcal{E}_{\eta_k}$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Então, $\{x_{\eta_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{0 \leq \eta \leq 1} \mathcal{A}_\eta$, portanto limitada e, como $T_{\eta_k}(k)x_{\eta_k} = x_{\eta_k}$, segue da compacidade assintótica coletiva de $\{T_\eta(\cdot)\}_{\eta \in [0,1]}$ em $\eta = 0$ que $\{x_{\eta_k}\}$ tem subsequência convergente, e isto prova a afirmação.

Como $\{\mathcal{E}_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ é assintoticamente compacta em $\eta = 0$, temos que a prova de (1) e (2) segue do Corolário 3.5.3. Para verificar o item (3), basta notar que a hipótese *b*) implica que existe $\eta_0, a, b, \gamma, \delta > 0$ tal que para todo $0 \leq \eta \leq \eta_0$, T_η só tem equilíbrios $\mathcal{L}$ -hiperbólicos com parâmetros γ, a, b, δ independentes de η e portanto a conclusão segue do Teorema 3.6.1. $\square$

3.7 Perturbação de variedades invariantes

O objetivo desta seção é provar um teorema de convergência Lipschitz de variedades instáveis à partir da convergência Lipschitz dos semigrupos. Antes, vamos fazer algumas observações:

Observação 3.7.1. 1. Para provarmos a convergência das variedades locais (estável e instável), podemos supor que a vizinhança V da definição de ponto fixo $\mathcal{L}$ -hiperbólico é X . De fato, pela prova do Lema 3.8.5 podemos fazer um truncamento dos semigrupos na bola de raio $\delta > 0$ tal que o ponto de equilíbrio do limite seja $\mathcal{L}$ -hiperbólico e estender radialmente (vide (3.6)). Assim, a convergência das variedades dos semigrupos truncados corresponde à convergência das variedades locais dos semigrupos iniciais.

2. A convergência Lipschitz das variedades estáveis e instáveis é invariante por mudança de variável Lipschitz. De fato, se $h \in \mathcal{C}(X)$ é bi-Lipschitz e $S_\eta := h \circ T_\eta \circ h^{-1}$, então $W_{S_\eta}^u(x_\eta^*) = h W_{T_\eta}^u(x_\eta^*)$. Note que $S_0(x) := T(x + x_0^*) - x_0^* = h \circ T \circ h^{-1}$ com $h(x) = x - x_0^*$.
3. Existe uma mudança de variáveis bi-Lipschitz que 'lineariza' a variedade instável e estável locais. Mais especificamente, podemos supor $W_{S_0}^u(0) = X_u$ e $W_{S_0}^s(0) = X_s$. Vide Lema 3.6.4. Com isto, basta mostrarmos que $\|\theta_\eta\|_{\text{Lip}} \rightarrow 0$ onde

$$W_{T_\eta}^u(x_\eta^*) = \{x_\eta^* + \xi + \theta_\eta(\xi) : \xi \in X_u\}$$

visto que já temos $x_\eta^* \rightarrow x_0^*$.

Lema 3.7.2. Seja $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que $\|T_\eta - T_0\|_\infty \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Suponha que 0 é equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico de $T_0 = L + N_0$ como na Definição 3.2.2 e tal que $W^u(T_0, 0) = X_u$. Suponha que exista $\eta_0 > 0$ tal que para cada $0 \leq \eta \leq \eta_0$, T_η tem um equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico x_η^* com parâmetros γ, a, b, ∞ independentes de $\eta \in [0, \eta_0]$ e $x_\eta^* \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Então, $W_{T_\eta}^u(x_\eta^*) \rightarrow W_{T_0}^u(0)$ uniformemente. Especificamente, existem aplicações Lipschitz $\theta_\eta : X_u \rightarrow X_s$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, tais que

$$W_{T_\eta}^u(x_\eta^*) = \{x_\eta^* + \xi + \theta_\eta(\xi) : \xi \in X_u\}$$

com $\|\theta_\eta\|_\infty \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Analogamente, se $W_{T_\eta}^s(x_\eta^*) = X_s$, então existem aplicações Lipschitz $\sigma_\eta : X_s \rightarrow X_u$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, tais que

$$W_{T_\eta}^s(x_\eta^*) = \{x_\eta^* + \sigma_\eta(\mu) + \mu : \mu \in X_s\}$$

com $\|\theta_\eta\|_\infty \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$.

Demonstração. Vamos determinar θ_η e mostrar que $\|\theta_\eta\|_\infty \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$.

Defina $S_\eta(x) := T_\eta(x + x_\eta^*) - x_\eta^* := L + N_\eta$. Então, $S_\eta(x) = Lx + N_\eta(x)$ e portanto, temos por hipótese $\eta_0, \gamma > 0$ tais que $\text{Lip}(N_\eta) \leq \gamma$ para todo $0 \leq \eta \leq \eta_0$ e com cada S_η nas condições do Teorema 3.3.1.

Seguindo os passos do Teorema 3.3.1, segue que $W_{S_\eta}^u(0) = \{\xi + \theta_\eta(\xi) : \xi \in X_u\}$ com

$$\begin{cases} h_\eta(\xi) := L_u \xi + N_{\eta,u}(\xi + \theta_\eta(\xi)), \\ \theta_\eta(h_\eta(\xi)) = L_s \theta(\xi) + N_{\eta,s}(\xi + \theta_\eta(\xi)). \end{cases} \quad (3.15)$$

Aqui, $N_{\eta,u} = \Pi_u N_\eta$ e $N_{\eta,s} = \Pi_s N_\eta$. Como $W_{T_\eta}^u(x_\eta) = x_\eta + W_{S_\eta}^u(0)$ e $W_{T_0}^u(0) = X_u$, temos que mostrar apenas $\|\theta_\eta\|_\infty \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$.

Afirmção 1: Se $r > 0$, então $h_\eta(\overline{B_r^{X_u}(0)}) \supset \overline{B_\alpha^{X_u}(0)} \supset \overline{B_r^{X_u}(0)}$ com $\alpha = \frac{a}{1+2\gamma}r$.

Seja $\lambda \in X_u$ com $\|\lambda\| \leq \alpha$. Defina $\phi_\eta : X_u \rightarrow X_u$ por $\phi_\eta(\xi) = L_u^{-1}\lambda - L_u^{-1}N_{\eta,u}(\xi + \theta_\eta(\xi))$. Provaremos que ϕ_η é uma contração em $\overline{B_\alpha^{X_u}(0)}$ e portanto tem um único ponto fixo em $\overline{B_\alpha^{X_u}(0)}$.

De fato, se $\|\xi\| \leq \alpha$, então

$$\|\phi_\eta(\xi)\| \leq a^{-1}\|\lambda\| + 2a^{-1}\gamma\|\xi\| \leq \frac{1+2\gamma}{a}\alpha \leq r < \alpha$$

pois $1 < a - 2\gamma$. Além disso,

$$\|\phi_\eta(x) - \phi_\eta(y)\| \leq \frac{2\gamma}{a}\|x - y\|$$

e daí segue a afirmação.

Como $N_{0,s}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in X_u$, segue que

$$\begin{aligned} \|\theta_\eta(h_\eta(\xi))\| &\leq b\|\theta_\eta(\xi)\| + \|N_{\eta,s}(\xi + \theta_\eta(\xi)) - N_{0,s}(\xi + \theta_\eta(\xi))\| \\ &\quad + \|N_{0,s}(\xi + \theta_\eta(\xi)) - N_{0,s}(\xi)\| \\ &\leq b\|\theta_\eta\|_{L^\infty(B_r^{X_u}(0))} + \|N_{\eta,s} - N_{0,s}\|_\infty + \gamma\|\theta_\eta\|_{L^\infty(B_r^{X_u}(0))}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $h_\eta(\overline{B_r^{X_u}(0)}) \supset \overline{B_r^{X_u}(0)}$ e portanto

$$\|\theta_\eta\|_{L^\infty(B_r^{X_u}(0))} \leq (1 - b - \gamma)^{-1} \|N_{\eta,s} - N_{0,s}\|_\infty.$$

Como $r > 0$ é arbitrário, o resultado segue. A prova de que $\|\sigma_\eta\|_\infty \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ é análoga. $\square$

Teorema 3.7.3. Seja $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que $\|T_\eta - T_0\|_{\text{Lip}} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Seja 0 equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico de $T_0 = L + N_0$ com parâmetros γ, a, b, ∞ e suponha que $W_{T_0}^u(0) = X_u$. Seja $X_\varepsilon := X_u \times B_\varepsilon^{X_s}(0)$ e suponha que $f(\varepsilon) := \text{Lip}_{X_\varepsilon}(N_{0,s}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $0 \leq \eta \leq \eta_0$, T_η tem um equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico x_η^* com $x_\eta^* \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ e $W_{T_\eta}^u(x_\eta^*) \rightarrow W_{T_0}^u(0)$ de forma Lipschitz. Especificamente, existem aplicações Lipschitz $\theta_\eta : X_u \rightarrow X_s$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, tais que

$$W_{T_\eta}^u(x_\eta^*) = \{x_\eta^* + \xi + \theta_\eta(\xi) : \xi \in X_u\}$$

com $\|\theta_\eta\|_{\text{Lip}} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Analogamente, se $W_{T_\eta}^s(x_\eta^*) = X_s$, $g(\varepsilon) := \text{Lip}_{Y_\varepsilon}(N_{0,u}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ com $\Sigma_\varepsilon := B_\varepsilon^{X_u}(0) \times X_s$, então existem aplicações Lipschitz $\sigma_\eta : X_s \rightarrow X_u$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, tais que

$$W_{T_\eta}^s(x_\eta^*) = \{x_\eta^* + \sigma_\eta(\mu) + \mu : \mu \in X_s\}$$

com $\|\sigma_\eta\|_{\text{Lip}} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$.

Demonstração. Defina $S_\eta(x) := T_\eta(x + x_\eta^*) - x_\eta^*$. Então, $S_\eta(x) = Lx + N_\eta(x)$ com

$$N_\eta(x) = (T_\eta - T_0)(x + x_\eta^*) + Lx_\eta^* + N_0(x + x_\eta^*) - x_\eta^*$$

e portanto segue do Teorema 3.5.2 que existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $0 \leq \eta \leq \eta_0$, T_η tem um equilíbrio $\mathfrak{L}$ -hiperbólico x_η^* com parâmetros γ, a, b, ∞ independentes de η e $x_\eta^* \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Assim, segue do Lema 3.7.2 que $\|\theta_\eta\|_\infty \rightarrow 0$. Provemos que $\text{Lip}(\theta_\eta) \rightarrow 0$. Usando (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} \|h_\eta(\xi) - h_\eta(\lambda)\| &\geq a\|\xi - \lambda\| - \|N_{\eta,u}(\xi + \theta_\eta(\xi)) - N_{\eta,u}(\lambda + \theta_\eta(\lambda))\| \\ &\geq a\|\xi - \lambda\| - \gamma(1 + \text{Lip}(\theta_\eta))\|\xi - \lambda\| \geq (a - 2\gamma)\|\xi - \lambda\| \end{aligned}$$

Por outro lado, se $B \subset X$, então

$$\text{Lip}_B(N_{\eta,s}) \leq \text{Lip}_B(N_{\eta,s} - N_{0,s}) + \text{Lip}_B(N_{0,s}).$$

Assim, tomando $B = X_{\|\theta_\eta\|_\infty}$ e notando que $\text{Lip}_B(N_{\eta,s}) \leq f(\|\theta_\eta\|_\infty) + \text{Lip}(N_{\eta,s} - N_{0,s}) := a_\eta$, segue de (3.15) que

$$\begin{aligned} \|\theta_\eta(h_\eta(\xi)) - \theta_\eta(h_\eta(\lambda))\| &\leq \|L_s(\theta_\eta(\xi) - \theta_\eta(\lambda)) + N_{\eta,s}(\xi + \theta_\eta(\xi)) - N_{\eta,s}(\lambda + \theta_\eta(\lambda))\| \\ &\leq b \text{Lip}(\theta_\eta)\|\xi - \lambda\| + a_\eta(1 + \text{Lip}(\theta_\eta))\|\xi - \lambda\| \\ &\leq [(b + a_\eta)\text{Lip}(\theta) + a_\eta]\|\xi - \lambda\| \\ &\leq \frac{(b + a_\eta)\text{Lip}(\theta_\eta) + a_\eta}{a - 2\gamma} \|h_\eta(\xi) - h_\eta(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\text{Lip}(\theta_\eta) \leq \frac{a_\eta}{a - 2\gamma - b - a_\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

$\square$

De agora em diante, para simplificarmos a notação, denotaremos

$$W_{\eta}^{\sigma, \rho}(x_{i, \eta}^*) := W_{T_{\eta}}^{\sigma}(x_{i, \eta}^*, B_{\rho}^X(x_{i, \eta}^*)), \quad \sigma \in \{u, s\}.$$

Temos como corolário da prova do Teorema 3.7.3 o seguinte resultado.

Teorema 3.7.4. Para cada $0 \leq \eta \leq 1$, seja $T_{\eta} : X \rightarrow X$ uma função e $\mathcal{E}_{\eta} = \{x_{1, \eta}^*, \dots, x_{p, \eta}^*\}$ o seu conjunto de equilíbrios. Suponha que exista $\delta > 0$ tal que $\|T_{\eta} - T_0\|_{\text{Lip}(\mathcal{O}_{\delta}(\mathcal{E}_0))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, $T_0 : \mathcal{O}_{\delta}(\mathcal{E}_0) \rightarrow T_0(\mathcal{O}_{\delta}(\mathcal{E}_0))$ é bi-Lipschitz, $\mathcal{E}_0$ só tem pontos fixos $\mathfrak{L}$ -hiperbólicos e $T_0|_{\mathcal{O}_{\delta}(\mathcal{E}_0)} \in C^{1+}(\mathcal{O}_{\delta}(\mathcal{E}_0), X)$. Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que T_{η} só tem equilíbrios $\mathfrak{L}$ -hiperbólicos para cada $0 \leq \eta \leq \eta_0$, $x_{i, \eta}^* \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x_{i, 0}^*$ para cada $1 \leq i \leq p$. Além disso, existe $\rho \in (0, \delta)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq p$, existem aplicações bi-Lipschitz sobre suas imagens, $\varphi_{\eta} : U_0 \rightarrow X$ e $\psi_{\eta} : V_0 \rightarrow X$, tais que

$$T_{\eta}^n W_{\eta}^{u, \rho}(x_{i, \eta}^*) = \varphi_{\eta}(U_0), \quad W_{\eta}^{s, \rho}(x_{i, \eta}^*) = \psi_{\eta}(V_0),$$

com U_0, V_0 abertos de subespaços fechado de X e, além disso,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} [\|\varphi_{\eta} - \varphi_0\|_{\text{Lip}(U_0)} + \|\psi_{\eta} - \psi_0\|_{\text{Lip}(V_0)}] = 0.$$

Demonstração. Como $\|T_{\eta} - T_0\|_{\text{Lip}(\mathcal{O}_{\delta})} \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$, segue que podemos supor $\eta_0, \delta > 0$ tais que $T_{\eta} : \mathcal{O}_{\delta} \rightarrow T_{\eta}(\mathcal{O}_{\delta})$ é bi-Lipschitz para cada $0 \leq \eta \leq \eta_0$. Assim, basta verificar o caso $n = 0$. De fato, se

$$W_{\eta}^{u, \rho}(x_{i, \eta}^*) = \varphi_{\eta}(U_0) \quad \text{e} \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \|\varphi_{\eta} - \varphi_0\|_{\text{Lip}(U_0)} = 0,$$

e, como $\|T_{\eta} - T_0\|_{\text{Lip}(\mathcal{O}_{\delta}(\mathcal{E}_0))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, segue que

$$T_{\eta}^n W_{\eta}^{u, \rho}(x_{i, \eta}^*) = (T_{\eta}^n \circ \varphi_{\eta})(U_0) \quad \text{e} \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \|T_{\eta}^n \circ \varphi_{\eta} - T_0^n \circ \varphi_0\|_{\text{Lip}(U_0)} = 0.$$

Sem perda de generalidade, $x_0^* = 0 \in \mathcal{E}_0$ e $T_0|_{B_{\delta}^X(0)} \in C^{1+}$. Defina

$$\tilde{T}_{\eta}(x) = \begin{cases} T_{\eta}(x), & \|x\| \leq \delta, \\ T_{\eta}(\frac{\delta}{\|x\|}x), & \|x\| \geq \delta. \end{cases} \quad (3.16)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $\delta > 0$ pequeno tal que 0 seja ponto fixo $\mathfrak{L}$ -hiperbólico de $\tilde{T}_0$ com parâmetros γ, a, b, ∞ .

Defina $k : X \rightarrow X$ por $k(\xi + \eta) = \xi + \theta(\xi) + \eta$ com $\xi \in X_u$ e $\eta \in X_s$. Aqui, $\theta : X_u \rightarrow X_s$ é tal que $\theta(0) = 0, \text{Lip}(\theta) < 1$ e

$$W_{\tilde{T}_0}^u(0) = \{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_u\}.$$

Então, como na prova do Lema 3.6.4, $W_{S_0}^u(0) = X_u$. Assim, escrevendo $S_0 = L + N_0$, obtemos $N_{0, s}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in X_u$. Segue do Teorema 3.4.2 que $\theta|_{B_{\delta}^X(0)} \in C^{1+}$. Como $k^{-1}(x) = x - \theta(\Pi_u(x))$, segue que

$$k|_{B_{\delta}^X(0)}, (k^{-1})|_{B_{\delta}^X(0)} \in C^{1+}.$$

Por outro lado, se $\|x\| \leq \delta$, então $\|T_0(x)\| \leq (a^{-1} + b + \gamma)\|x\|$. Assim, se $\|x\| < r_1$ com $r_1 := \min\{\delta, [2(a^{-1} + b + \gamma)]^{-1}\delta\}$, então $\|T_0(h(x))\| < \delta$ e consequentemente $S_0|_{B_{r_1}^X(0)} \in C^{1+}$. Seja $0 < r_2 < r_1$. Como $N_{0,s}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in B_\delta^X(0)$ e $N_{0,s}|_{B_{r_1}^X(0)} \in C^{1+}$, segue que

$$\sup_{\xi \in X_u, \|\xi\| \leq r_2} \|N'_{0,s}(\xi + \eta)\| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \quad (3.17)$$

Seja $Z_\varepsilon := B_{r_2}^{X_u}(0) \times B_\varepsilon^{X_s}(0)$. Então, $\tilde{f}(\varepsilon) := \text{Lip}_{Z_\varepsilon}(N_{0,s}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Defina

$$\tilde{S}_\eta(x) = \begin{cases} S_\eta(x), & \|x\| \leq r_2, \\ S_\eta(\frac{r_2}{\|x\|}x), & \|x\| \geq r_2, \end{cases}$$

Então, $\tilde{S}_0 = L + \tilde{N}_0$ e, se $X_\varepsilon := X_u \times B_\varepsilon^{X_s}(0)$, então

$$f(\varepsilon) := \text{Lip}_{X_\varepsilon}(\tilde{N}_{0,s}) \leq 2\tilde{f}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

e o resultado segue do Teorema 3.7.3. Se $T_0|_{B_\delta^X(0)} \in C^1$ e $\text{Dim} X_u < \infty$ a prova é totalmente análoga pois conseguimos obter novamente (3.17). Para provar a convergência lipschitz de $W_\eta^{s,p}(x_\eta^*)$, basta repetir os passos acima trocando k por $h : X \rightarrow X$ dada por $h(\xi + \mu) = \xi + \sigma(\mu) + \mu$ com $\xi \in X_u$ e $\mu \in X_s$ e usar $Z_\varepsilon := B_\varepsilon^{X_u}(0) \times B_{r_2}^{X_s}(0)$. Aqui, $\sigma : X_s \rightarrow X_u$ é tal que $\sigma(0) = 0$, $\text{Lip}(\sigma) < 1$ e

$$W_{\tilde{T}_0}^s(0) = \{\sigma(\mu) + \mu : \mu \in X_s\}.$$

□

Corolário 3.7.5. Sejam $T_\eta : X \rightarrow X$ com $\mathcal{E}_\eta = \{x_{1,\eta}^*, \dots, x_{p,\eta}^*\}$ o seu conjunto de equilíbrios para cada $\eta \in [0, 1]$. Seja $\delta > 0$ tal que $\|T_\eta - T_0\|_{L^\infty(\mathcal{O}_\delta^X(\mathcal{E}_0))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Suponha que todos $x_{i,\eta}^*$ são $\mathfrak{L}$ -hiperbólicos para a extensão radial $\tilde{T}_\eta$, definida por (3.16), com parâmetros γ, a, b, ∞ e que cada $x_{i,0}^*$ é $\mathfrak{L}$ -hiperbólico com relação à $\tilde{T}_0$ com parâmetros γ_1, a, b, ∞ com $\gamma_1 = \gamma_1(a, b)$ dado pelo Lema 3.6.4. Suponha que $x_{i,\eta}^* \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x_{i,0}^*$ para cada $1 \leq i \leq p$. Suponha que $T_0|_{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0)} \in C^{1+}(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0), X)$, que $\mathcal{E}_0$ só tem pontos $\mathfrak{L}$ -hiperbólicos e que exista $\eta_0 > 0$ tal que $T_\eta : \mathcal{O}_\rho(\mathcal{E}_0) \rightarrow T_\eta(\mathcal{O}_\rho(\mathcal{E}_0))$ é bi-Lipschitz para cada $0 \leq \eta \leq \eta_0$. Então, existe $\rho \in (0, \delta)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq p$, existem aplicações bi-Lipschitz sobre suas imagens, $\varphi_\eta : U_0 \rightarrow X$ e $\psi_\eta : V_0 \rightarrow X$, tais que

$$T_\eta^n W_\eta^{\mu,\rho}(x_{i,\eta}^*) = \varphi_\eta(U_0), \quad W_\eta^{s,\rho}(x_{i,\eta}^*) = \psi_\eta(V_0),$$

com U_0, V_0 abertos de subespaços fechados de X e φ_η, ψ_η bi-Lipschitz para cada $\eta \in [0, \eta_0]$ e,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} [\|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{L^\infty(U_0)} + \|\psi_\eta - \psi_0\|_{L^\infty(V_0)}] = 0.$$

Demonstração. Como na prova do Teorema 3.7.4, basta provarmos o caso $n = 0$. Supondo $x_0^* = 0$, tomando a mudança de variáveis g , com relação a $\tilde{T}_0$, dada pelo Lema 3.6.4 e definindo $S_\eta := g^{-1} \circ \tilde{T}_\eta \circ g$, obtemos as hipóteses do Lema 3.7.2 e a tese deste corolário segue para S_η com $\rho = \infty$, o que se transfere automaticamente para $\tilde{T}_\eta$ com $\rho = \infty$. Escolhendo $\rho \in (0, \delta)$, obtemos o resultado para T_η pois $\tilde{T}_\eta|_{B_\delta^X(0)} = T_\eta|_{B_\delta^X(0)}$. □

3.8 $\mathfrak{L}$ –transversalidade de variedades Lipschitz

A seguir, provamos alguns lemas que dão condições suficientes para obtermos a permanência da interseção de conjuntos $\mathfrak{L}$ -transversais sob pequenas perturbações Lipschitz. Os resultados provados aqui serão usados na Seção 3.9 para provarmos a estabilidade das interseções $\mathfrak{L}$ -transversais entre variedades estáveis e instáveis. O principal objetivo desta seção é demonstrar a Proposição 3.8.10, que em palavras diz quando uma perturbação Lipschitz de uma função, cuja imagem é um gráfico, é uma nova função cuja imagem também é um gráfico sobre os mesmos eixos do gráfico inicial. Esta proposição é um resultado que serve de base para completar a Seção 3.9.

Lema 3.8.1. Seja X um espaço de Banach e sejam X_u, X_s subespaços de X tais que X_s é fechado e $X_u \oplus X_s = X$. Sejam $\theta, \tilde{\theta} : X_u \rightarrow X_s$, $\sigma, \tilde{\sigma} : X_s \rightarrow X_u$ com $\theta(0) = \sigma(0) = 0$, $\text{Lip}(\sigma), \text{Lip}(\theta) < 1$. Sejam $z, \tilde{z} \in X$ e considere os seguintes conjuntos:

$$M := \{z + y + \theta(y) : y \in X_u, \|y\| \leq r\}, \quad N := \{z + \sigma(x) + x : x \in X_s, \|x\| \leq r\},$$

$$\tilde{M} := \{\tilde{z} + y + \tilde{\theta}(y) : y \in X_u, \|y\| \leq r\}, \quad \tilde{N} := \{\tilde{z} + \tilde{\sigma}(x) + x : x \in X_s, \|x\| \leq r\}.$$

Então, por definição M, N tem interseção $\mathfrak{L}$ -transversal em z . Suponha uma das seguintes hipóteses:

- a) $\dim X_u < \infty$, existe $c \in (0, 1)$ tal que $\text{Lip}(\sigma), \text{Lip}(\theta) \leq c$ e

$$\|\tilde{\sigma}(y) - \sigma(y)\|, \|\tilde{\theta}(x) - \theta(x)\| \leq (1 - c)r, \quad \forall x \in \overline{B_r^{X_u}(0)}, y \in \overline{B_r^{X_s}(0)}.$$

- b) Existe uma constante $c \in (0, 1)$ tal que $\text{Lip}(\sigma), \text{Lip}(\theta), \text{Lip}(\tilde{\sigma}), \text{Lip}(\tilde{\theta}) \leq c$ e

$$\|\tilde{\sigma}(y) - \sigma(y)\|, \|\tilde{\theta}(x) - \theta(x)\| \leq (1 - c)r, \quad \forall x \in \overline{B_r^{X_u}(0)}, y \in \overline{B_r^{X_s}(0)}.$$

Se vale o item a), então $\tilde{M} \cap \tilde{N} \neq \emptyset$. Se vale item b), então $\tilde{M} \pitchfork \tilde{N}$.

Demonstração. Note que $\tilde{z} + y + \tilde{\theta}(y) = \tilde{z} + \tilde{\sigma}(x) + x$ equivale a $\tilde{\sigma}(\tilde{\theta}(y)) = y$ (supondo $\|\tilde{\theta}(y)\| \leq r$). Defina $g : \overline{B_r^{X_u}(0)} \rightarrow \overline{B_r^{X_u}(0)}$ por, $g(x) = \tilde{\sigma}(\tilde{\theta}(x))$. Mostremos que g está bem definida. De fato, para todo $x \in \overline{B_r^{X_u}(0)}$,

$$\|\tilde{\theta}(x)\| \leq \|\tilde{\theta}(x) - \theta(x)\| + \|\theta(x) - \theta(0)\| \leq \|\tilde{\theta}(x) - \theta(x)\| + cr \leq r.$$

Analogamente,

$$\|\tilde{\sigma}(\tilde{\theta}(x))\| \leq \|\tilde{\sigma}(\tilde{\theta}(x)) - \sigma(\tilde{\theta}(x))\| + \|\sigma(\tilde{\theta}(x)) - \sigma(0)\| \leq \|\tilde{\sigma}(\tilde{\theta}(x)) - \sigma(\tilde{\theta}(x))\| + cr \leq r$$

para todo $x \in \overline{B_r^{X_u}(0)}$.

Suponha o item a), então $\dim X_u < \infty$ e portanto $\overline{B_r^{X_u}(0)}$ é compacta. Logo g tem um ponto fixo e portanto $\tilde{M}$ e $\tilde{N}$ tem interseção.

Suponha o item b), então g é uma contração pois

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \text{Lip}(\tilde{\sigma})\text{Lip}(\tilde{\theta})\|x - y\| \leq c^2\|x - y\|.$$

Isto mostra que g tem um único ponto fixo e portanto $\tilde{M}$ e $\tilde{N}$ tem interseção. Como $\text{Lip}(\tilde{\sigma}), \text{Lip}(\tilde{\theta}) < 1$, segue que a interseção é $\mathfrak{L}$ -transversal. $\square$

Observação 3.8.2. O teorema, com poucos ajustes da hipótese, continua válido se

$$\max\{\text{Lip}(\sigma), \text{Lip}(\theta)\} = \max\{\text{Lip}(\tilde{\sigma}), \text{Lip}(\tilde{\theta})\} = 1$$

com

$$\min\{\text{Lip}(\sigma), \text{Lip}(\theta)\} = \min\{\text{Lip}(\tilde{\sigma}), \text{Lip}(\tilde{\theta})\} < 1.$$

Porém, se $\text{Lip}(\sigma) = \text{Lip}(\theta) = 1$ então não vale a estabilidade.

Lema 3.8.3. Seja X um espaço de Banach e sejam X_u, X_s subespaços de X tais que X_s é fechado e $X_u \oplus X_s = X$. Sejam $\theta : X_u \rightarrow X_s$, $\psi_u : X_u \rightarrow X_u$, $\psi_s : X_s \rightarrow X_s$, $\sigma, \tilde{\sigma} : X_s \rightarrow X_u$ com $\theta(0) = \sigma(0) = 0$, $\text{Lip}(\sigma), \text{Lip}(\theta) \leq c < 1$ e $\|\tilde{\sigma}\|_\infty \leq cr$. Sejam $z, \tilde{z} \in X$ e considere os seguintes conjuntos:

$$M := \{z + y + \theta(y) : y \in X_u, \|y\| \leq r\}, \quad N := \{z + \sigma(x) + x : x \in X_s, \|x\| \leq r\},$$

$$\tilde{M} := \{\tilde{z} + \psi_u(y) + \psi_s(y) : y \in X_u, \|y\| \leq r\}, \quad \tilde{N} := \{\tilde{z} + \tilde{\sigma}(x) + x : x \in X_s, \|x\| \leq r\}.$$

Então, por definição M, N tem interseção $\mathfrak{L}$ -transversal em z . Suponha que $\dim X_u < \infty$, $\|\psi_s\|_\infty \leq r$ e

$$\|\psi_u(y) - y\| \leq (1 - c)r \quad \forall y \in \overline{B_r^{X_u}(0)}.$$

Então, $\tilde{M} \cap \tilde{N} \neq \emptyset$.

Demonstração. Note que $\tilde{z} + \psi_u(y) + \psi_s(y) = \tilde{z} + \tilde{\sigma}(x) + x$ equivale a $\psi_u(y) = \tilde{\sigma}(\psi_s(y))$ (como $\|\psi_s(y)\| \leq r$, a equação anterior faz sentido). Defina $g : \overline{B_r^{X_u}(0)} \rightarrow \overline{B_r^{X_u}(0)}$ por, $g(y) = \tilde{\sigma}(\psi_s(y)) + y - \psi_u(y)$. Mostremos que g está bem definida. De fato, para todo $x \in \overline{B_r^{X_u}(0)}$,

$$\|g(y)\| \leq \|\tilde{\sigma}(\psi_s(y))\| + \|y - \psi_u(y)\| \leq cr + (1 - c)r = r$$

para todo $y \in \overline{B_r^{X_u}(0)}$.

Como $\dim X_u < \infty$, segue que $\overline{B_r^{X_u}(0)}$ é compacta. Logo g tem um ponto fixo e portanto $\tilde{M}$ e $\tilde{N}$ tem interseção. $\square$

3.8.1 Gráfico de função Lipschitz sob perturbação Lipschitz

Os lemas a seguir ajudam a responder a seguinte pergunta: quais condições de proximidade Lipschitz são suficientes para que uma função com imagem próxima a um gráfico de função Lipschitz seja também um gráfico sobre os mesmos eixos? Esta questão será importante

para provarmos a estabilidade de certos tipos de conexões entre variedades estáveis e instáveis (que poderemos chamar de "conexões transversais").

A resposta à questão acima é intuitiva, e o objetivo desta subseção é formalizar estes resultados intuitivos.

Lema 3.8.4. Se $\varphi : X \rightarrow X$ e $\text{Lip}(\varphi - I_X) \leq \varepsilon < 1$, então $\varphi : X \rightarrow X$ é bi-Lipschitz.

Demonstração. Note que

$$\|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)\| \geq \|\xi - \eta\| - \|(\varphi(\xi) - \varphi(\eta)) - (\xi - \eta)\| \geq (1 - \varepsilon)\|\xi - \eta\|.$$

e portanto φ é injetora. Além disso, se φ tem inversa, temos $\text{Lip}(\varphi^{-1}) \leq (1 - \varepsilon)^{-1}$.

Provemos que φ é sobrejetora. Seja $\eta \in X$. Definimos $h : X \rightarrow X$ por $h(\xi) = \eta + (\xi - \varphi(\xi))$. Então,

$$\|h(\xi) - h(\eta)\| \leq \varepsilon\|\xi - \eta\|, \quad \forall \xi, \eta \in X.$$

Logo $h : X \rightarrow X$ é uma contração e portanto tem um único ponto fixo. Isto prova que φ é sobrejetora e o resultado segue. $\square$

Lema 3.8.5. Sejam $\varphi, i : B_r(0) \rightarrow X$ com $i := I_X|_{B_r^X(0)}$. Se $\text{Lip}_{B_r^X(0)}(\varphi - i) \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$, então $\varphi(B_r^X(0))$ é aberto e $\varphi : B_r^X(0) \rightarrow \varphi(B_r^X(0))$ é bi-Lipschitz. Além disso, se $0 \leq \varepsilon < r$, então $B_{r-\varepsilon}(0) \subset \varphi(B_r^X(0))$.

Demonstração. Como φ é Lipschitz, segue que sua extensão para o fecho de seu domínio pode ser definido de maneira única e contínua (pois sequência de Cauchy no domínio de φ é levada em sequência de Cauchy na imagem). Assim, sem perda de generalidade, podemos supor φ definida em $\overline{B_r^X(0)}$.

Seja $\tilde{\varphi} : X \rightarrow X$ dada por

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \varphi(\xi), & \text{se } \|\xi\| \leq r \\ \xi + [\varphi(\frac{r\xi}{\|\xi\|}) - \frac{r\xi}{\|\xi\|}], & \text{se } \|\xi\| > r. \end{cases}$$

Então, $\|\tilde{\varphi}(\xi) - \xi\| \leq \varepsilon$. Analisemos $\text{Lip}(\tilde{\varphi} - I_X)$.

1) Se $\|\xi\|, \|\eta\| \leq r$, então

$$\|(\tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{\varphi}(\eta)) - (\xi - \eta)\| = \|(\varphi(\xi) - \varphi(\eta)) - (\xi - \eta)\| \leq \varepsilon\|\xi - \eta\|.$$

2) Se $\|\xi\|, \|\eta\| > r$, então

$$\|(\tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{\varphi}(\eta)) - (\xi - \eta)\| = \|(\varphi(\frac{r\xi}{\|\xi\|}) - \varphi(\frac{r\eta}{\|\eta\|})) - (\frac{r\xi}{\|\xi\|} - \frac{r\eta}{\|\eta\|})\| \leq \varepsilon\|\frac{r\xi}{\|\xi\|} - \frac{r\eta}{\|\eta\|}\|.$$

Por outro lado, para $a, b \in X$ com $\|a\|, \|b\| > r$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| &\leq \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|a\|} + \frac{b}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \leq \frac{1}{\|a\|} \|a - b\| + \|b\| \left\| \frac{1}{\|a\|} - \frac{1}{\|b\|} \right\| \\ &\leq \frac{1}{\|a\|} \|a - b\| + \frac{1}{\|a\|} \| \|a\| - \|b\| \| \\ &\leq \frac{2}{r} \|a - b\|, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|(\tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{\varphi}(\eta)) - (\xi - \eta)\| \leq 2\varepsilon \|\xi - \eta\|.$$

3) Se $\|\xi\| \leq r$ e $\|\eta\| > r$. Seja $\omega = t\xi + (1-t)\eta$, $t \in [0, 1]$ tal que $\|\omega\| = r$. Então,

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{\varphi}(\eta)) - (\xi - \eta)\| &\leq \|(\tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{\varphi}(\omega)) - (\xi - \omega)\| + \|(\tilde{\varphi}(\omega) - \tilde{\varphi}(\eta)) - (\omega - \eta)\| \\ &\leq \varepsilon \|\xi - \omega\| + 2\varepsilon \|\omega - \eta\| \leq 2\varepsilon \|\xi - \eta\|, \end{aligned}$$

e portanto $\text{Lip}(\tilde{\varphi} - I_X) \leq 2\varepsilon$ e segue do Lema 3.8.4 que $\tilde{\varphi}$ é bi-Lipschitz. Logo $\varphi(B_r^X(0))$ é aberto. Como $\tilde{\varphi}$ é sobrejetora, dado $\eta \in B_{r-\varepsilon}^X(0)$, existe $\xi \in X$ tal que $\eta = \tilde{\varphi}(\xi)$ e, como $\|\tilde{\varphi}(\xi) - \xi\| \leq \varepsilon$, segue que $\|\xi\| < r$; isto é, $B_{r-\varepsilon}^X(0) \subset \tilde{\varphi}(B_r^X(0))$. Por outro lado, $\tilde{\varphi}|_{B_r^X(0)} = \varphi|_{B_r^X(0)}$ e portanto $B_{r-\varepsilon}^X(0) \subset \varphi(B_r^X(0))$. $\square$

Observação 3.8.6. No lema anterior, se X é um espaço de Hilbert, então podemos trocar a hipótese $\text{Lip}_{B_r^X(0)}(\varphi - i) \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$ por $\text{Lip}_{B_r^X(0)}(\varphi - i) \leq \varepsilon < 1$. Para isto, refazemos as contas do passo 2) da prova acima. Sem perda de generalidade, suponha $\|a\| \leq \|b\|$. Note que

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| = \frac{1}{\|a\|} \left\| a - \frac{\|a\|}{\|b\|} b \right\|.$$

Por outro lado,

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 - 2\text{Re}\langle a, b \rangle + \|b\|^2$$

e

$$\left\| a - \frac{\|a\|}{\|b\|} b \right\|^2 = \|a\|^2 - 2\text{Re}\langle a, \frac{\|a\|}{\|b\|} b \rangle + \|a\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| a - \frac{\|a\|}{\|b\|} b \right\|^2 \leq \|a - b\|^2 &\Leftrightarrow 2\text{Re}\langle a, b \rangle \left(1 - \frac{\|a\|}{\|b\|}\right) \leq \|b\|^2 - \|a\|^2 \\ &\Leftrightarrow 2\text{Re}\langle a, b \rangle \left(\frac{\|b\| - \|a\|}{\|b\|}\right) \leq (\|b\| - \|a\|)(\|b\| + \|a\|) \\ &\Leftrightarrow 2\text{Re}\langle a, b \rangle \leq \|b\|^2 + \|a\|\|b\|. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\|\|b\|$ e $\|b\| \geq \|a\|$, temos que $2\text{Re}\langle a, b \rangle \leq \|b\|^2 + \|a\|\|b\|$.

Com isto, obtemos

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| = \frac{1}{\|a\|} \left\| a - \frac{\|a\|}{\|b\|} b \right\| \leq \frac{1}{\|a\|} \|a - b\|.$$

Usando esta conclusão nos passos 2) e 3) da prova acima, provamos a observação.

Corolário 3.8.7. Sejam U aberto de X , $\varphi, i : U \rightarrow X$ com $i := I_X|_U$. Se $\|\varphi - i\|_{\text{Lip}(U)} \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$, então $\varphi(U)$ é aberto e $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é bi-Lipschitz e $\text{Lip}_{\varphi(U)}(\varphi^{-1}) \leq (1 - \varepsilon)^{-1}$.

Demonstração. Segue do lema anterior que, para cada $B_r(x) \subset U$, $\varphi : B_r(x) \rightarrow \varphi(B_r(x))$ é bi-Lipschitz com estimativa da constante de Lipschitz independente da bola. Disto segue que φ é aberta. Mostremos que φ é injetora. De fato, se existisse $x, y \in U$ com $x \neq y$ e $\varphi(x) = \varphi(y)$, então

$$\varepsilon \geq \left\| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\|x - y\|} - \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\| = \left\| \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\| = 1$$

que é uma contradição. Isto prova que φ é um homeomorfismo. Analogamente

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y - [x - y - (\varphi(x) - \varphi(y))]\| \geq (1 - \varepsilon)\|x - y\|$$

e portanto $\text{Lip}(\varphi^{-1}) \leq (1 - \varepsilon)^{-1}$. □

Observação 3.8.8. Se X_1, X_2 são subespaços fechados de X com $X_1 \oplus X_2 = X$, então $Q(x_1 + x_2) := x_1$ é uma aplicação limitada. De fato, se $f : X_1 \times X_2 \rightarrow X$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, então $f \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, X)$ é fechada (pois é contínua) e bijetora. Assim, segue do Teorema do Gráfico Fechado (ver (KATO, 1995)) que f tem inversa contínua e o resultado segue.

O lema abaixo mostra que se uma função é Lipschitz próxima de um gráfico, então esta função também é um gráfico e podemos estimar a constante de Lipschitz da função que dá origem a este gráfico.

Lema 3.8.9. Sejam X_1, X_2 subespaços fechados de X com $X_1 \oplus X_2 = X$, $z \in X$, $Q : X \rightarrow X$ definida por $Q(u + v) = u$ para todo $u \in X_1$ e $v \in X_2$. Sejam U aberto de X_1 e $\varphi, \psi : U \rightarrow X$, $\varphi(\xi) = z + \xi + \theta(\xi)$, $\forall \xi \in U$ com $\text{Lip}_U(\theta) < \infty$. Se $\|\varphi - \psi\|_{\text{Lip}(U)} < \frac{1}{2\|Q\|_{\mathcal{L}(X)}}$, então $V := Q(\psi(\cdot) - z)(U)$ é aberto de X_1 e $\tilde{\theta} : V \rightarrow X_2$ tais que

$$\text{Im}(\psi) := \{\psi(\xi) : \xi \in U\} = \{z + \eta + \tilde{\theta}(\eta) : \eta \in V\}$$

com

$$\text{Lip}_V(\tilde{\theta}) \leq \frac{\text{Lip}_U(\theta) + \|I - Q\|_{\mathcal{L}(X)} \text{Lip}_U(\varphi - \psi)}{1 - \|Q\|_{\mathcal{L}(X)} \text{Lip}_U(\varphi - \psi)}. \quad (3.18)$$

e

$$\|\tilde{\theta} - \theta\|_{L^\infty(U \cap V)} \leq (\|I - Q\|_{\mathcal{L}(X)} + \text{Lip}_U(\theta) \|Q\|_{\mathcal{L}(X)}) \|\varphi - \psi\|_{L^\infty(U)}. \quad (3.19)$$

Além disso, se $B_r^{X_1}(0) \subset U$ e $r_0 := r - \|Q\|_{\mathcal{L}(X)} \text{Lip}_U(\varphi - \psi) > 0$, então $B_{r_0}^{X_1}(0) \subset U \cap V$.

Demonstração. Faremos a prova do caso $z = 0$. Sejam $\psi_1 : U \rightarrow X_1$, $\psi_2 : U \rightarrow X_2$, $\psi_1 = Q\psi$ e $\psi_2 = (I - Q)\psi$. Então, $\|\varphi - \psi\|_{\text{Lip}(U)} < \frac{1}{2\|Q\|_{\mathcal{L}(X)}}$ implica $\|\psi_1 - I_U\|_{\text{Lip}(U)} < \frac{1}{2}$ e portanto segue do Corolário 3.8.7 que $\psi_1 : U \rightarrow \psi_1(U)$ é bi-Lipschitz com $V := \psi_1(U)$ aberto de X_1 e $\text{Lip}_V(\psi_1^{-1}) \leq (1 - \|Q\|_{\mathcal{L}(X)} \text{Lip}_U(\varphi - \psi))^{-1}$. Além disso, segue do Lema 3.8.5 que $B_r^{X_1}(0) \subset U$

e $r_0 := r - \|Q\|_{\mathcal{L}(X)} \text{Lip}_U(\varphi - \psi) > 0$ implicam $B_{r_0}^{X_1}(0) \subset \psi_1(U)$. Seja $\tilde{\theta} := \psi_2 \circ \psi_1^{-1} : V \rightarrow X_2$. Como

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\psi_2(\xi) - \psi_2(\eta)}{\|\xi - \eta\|} - \frac{\theta(\xi) - \theta(\eta)}{\|\xi - \eta\|} \right\| &= \left\| (I - Q) \left[\frac{\psi(\xi) - \psi(\eta)}{\|\xi - \eta\|} - \frac{\varphi(\xi) - \varphi(\eta)}{\|\xi - \eta\|} \right] \right\| \\ &\leq \|I - Q\|_{\mathcal{L}(X)} \text{Lip}_U(\varphi - \psi) \end{aligned}$$

segue que $\text{Lip}_U(\psi_2) \leq \text{Lip}_U(\theta) + \|I - Q\|_{\mathcal{L}(X)} \text{Lip}_U(\varphi - \psi)$. Consequentemente,

$$\text{Lip}(\tilde{\theta})_V \leq \text{Lip}_U(\psi_2) \text{Lip}_V(\psi_1^{-1}) \leq \frac{\text{Lip}_U(\theta) + \|I - Q\|_{\mathcal{L}(X)} \text{Lip}_U(\varphi - \psi)}{1 - \|Q\|_{\mathcal{L}(X)} \text{Lip}_U(\varphi - \psi)}$$

Seja $\eta \in U \cap V$ e $\xi = \psi_1^{-1}(\eta)$. Então,

$$\|\psi_1^{-1}(\eta) - \eta\| = \|\xi - \psi_1(\xi)\| \leq \|Q\|_{\mathcal{L}(X)} \|\varphi - \psi\|_{L^\infty(U)},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(\eta) - \theta(\eta)\| &\leq \|\psi_2(\psi_1^{-1}(\eta)) - \theta(\psi_1^{-1}(\eta))\| + \|\theta(\psi_1^{-1}(\eta)) - \theta(\eta)\| \\ &\leq (\|I - Q\|_{\mathcal{L}(X)} + \text{Lip}_U(\theta) \|Q\|_{\mathcal{L}(X)}) \|\varphi - \psi\|_{L^\infty(U)}. \end{aligned}$$

A prova do caso $z \neq 0$ é análoga. □

Proposição 3.8.10. Seja X um espaço de Banach, Y um subespaço vetorial fechado de X , U_0 um aberto Y e $\varphi_0 : U_0 \rightarrow X$ tal que $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \varphi_0(U_0)$ é bi-Lipschitz. Sejam X_1, X_2 subespaços vetoriais fechados de X com $X_1 \oplus X_2 = X$ e $\theta_0 : X_1 \rightarrow X_2$ satisfazendo $\text{Lip}(\theta_0) < 1$, $\theta_0(0) = 0$. Suponha que exista $\rho_0 > 0$ tal que

$$\varphi_0(U_0) \supset \{z_0 + \xi + \theta_0(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| < \rho_0\}.$$

Então, existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi_0, \theta_0) > 0$ tal que se a aplicação $\varphi_\eta : U_0 \rightarrow X$ satisfaz:

$$\|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{\text{Lip}(U_0)} < \varepsilon_0, \tag{3.20}$$

então, em palavras, $\varphi_\eta(U_0)$ contém um gráfico. Especificamente, existe uma aplicação Lipschitz $\theta_\eta : X_1 \rightarrow X_2$ e um raio $\rho_\eta > 0$ tais que

$$\varphi_\eta(U_0) \supset \{z_0 + \xi + \theta_\eta(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| < \rho_\eta\}.$$

Adicionalmente, sejam $\varphi_\eta : U_0 \rightarrow X$, $\eta \in [0, 1]$ aplicações tais que $\|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{\text{Lip}(U_0)} < \varepsilon_0$ para todo $\eta \in [0, 1]$. Então, dado $\rho_* \in (0, \rho_0)$, existe $\eta_0 > 0$ tal que θ_η está bem definida em $U_{\rho_*} := B_{\rho_*}^{X_1}(0)$ para todo $0 \leq \eta \leq \eta_0$ e temos as seguintes implicações:

$$\left[\text{Lip}_{U_0}(\varphi_\eta - \varphi_0) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0 \right] \implies \left[\limsup_{\eta \rightarrow 0} \text{Lip}_{U_{\rho_*}}(\theta_\eta) \leq \text{Lip}_{U_{\rho_0}}(\theta_0) \right],$$

e

$$\left[\|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{L^\infty(U_0)} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0 \right] \implies \left[\|\theta_\eta - \theta_0\|_{L^\infty(U_{\rho_*})} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0 \right].$$

Demonstração. Sejam $U = B_{\rho_0}^{X_1}(0)$ e $\psi_0, \psi_\eta : U \rightarrow X$, $\psi_0(\xi) = x_0 + \xi + \theta_0(\xi)$ e $\psi_\eta(\xi) = \varphi_\eta(\varphi_0^{-1}(\psi_0(\xi)))$ para cada $\xi \in U$. Note que $\psi_0(\xi) = \varphi_0(\varphi_0^{-1}(\psi_0(\xi)))$ para todo $\xi \in U$, $\psi_\eta(U) \subset \varphi_\eta(U_0)$ com

$$\text{Lip}_U(\psi_\eta - \psi_0) \leq \text{Lip}_{U_0}(\varphi_\eta - \varphi_0) \text{Lip}_U(\varphi_0^{-1} \circ \psi_0)$$

e

$$\|\psi_\eta - \psi_0\|_{L^\infty(U)} \leq \|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{L^\infty(U_0)}$$

isto é,

$$\|\psi_\eta - \psi_0\|_{\text{Lip}(U)} \leq k_0 \|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{\text{Lip}(U_0)}$$

com $k_0 := \max\{1, \text{Lip}_U(\varphi_0^{-1} \circ \psi_0)\}$. Seja $Q : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1$ a projeção canônica e defina $\varepsilon_0 := \frac{1}{k_0 \|Q\|_{\mathcal{L}(X)}} \min\{\frac{1}{2}, \rho_0\}$. Então, $\|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{\text{Lip}(U_0)} < \varepsilon_0$ implica que

$$\rho_\eta := \rho_0 - \|Q\|_{\mathcal{L}(X)} k_0 \text{Lip}_{U_0}(\varphi_\eta - \varphi_0) > 0,$$

$\|\psi_\eta - \psi_0\|_{\text{Lip}(U)} < \frac{1}{2\|Q\|_{\mathcal{L}(X)}}$, e o resultado segue do Lema 3.8.9 com $\varphi := \psi_0$ e $\psi := \psi_\eta$. As implicações do final do enunciado da proposição seguem de (3.18) e (3.19), respectivamente. $\square$

3.9 Estabilidade de semigrupos LMS e do diagrama de fase de seu atrator

O objetivo desta seção é provar o Teorema 3.9.7, que em palavras diz que, sob certas condições, um perturbação Lipschitz pequena de semigrupo LMS que seja C^{1+} numa vizinhança dos equilíbrios, continua sendo semigrupo LMS e possui atrator global geometricamente equivalente ao semigrupo não perturbado.

Como na seção 3.7, denotaremos

$$W_\eta^{\sigma, \rho}(x_{i,\eta}^*) := W_{T_\eta}^\sigma(x_{i,\eta}^*, B_\rho^X(x_{i,\eta}^*)), \quad \sigma \in \{u, s\}.$$

Teorema 3.9.1. Sejam $T_\eta : X \rightarrow X$ com $\mathcal{E}_\eta = \{x_{1,\eta}^*, \dots, x_{p,\eta}^*\}$ o seu conjunto de equilíbrios para cada $\eta \in [0, 1]$. Seja $\delta > 0$ tal que $\|T_\eta - T_0\|_{L^\infty(\mathcal{O}_\delta^X(\mathcal{E}_0))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Suponha que cada $x_{i,\eta}^*$ é $\mathcal{L}$ -hiperbólico, com parâmetros γ, a, b, ∞ para a extensão $\tilde{T}_\eta$, definida por

$$\tilde{T}_\eta(x) = \begin{cases} T_\eta(x), & \|x\| \leq \delta, \\ T_\eta\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right), & \|x\| \geq \delta, \end{cases}$$

e que cada $x_{i,0}^*$ é $\mathcal{L}$ -hiperbólico com relação à $\tilde{T}_0$ com parâmetros γ_1, a, b, ∞ com $\gamma_1 = \gamma_1(a, b)$ dado pelo Lema 3.6.4. Suponha que $x_{i,\eta}^* \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x_{i,0}^*$ para cada $1 \leq i \leq p$. Suponha que $T_0|_{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0)} \in C^{1+}(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0), X)$, que $\mathcal{E}_0$ só tem pontos $\mathcal{L}$ -hiperbólicos e que exista $\eta_0 > 0$ tal que $T_\eta : \mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0) \rightarrow T_\eta(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0))$ é bi-Lipschitz para cada $0 \leq \eta \leq \eta_0$.

Suponha também que existam $n \in \mathbb{N}$ e $\rho > 0$ tais que $T_0^n W_0^{u,\rho}(x_{i,0}^*) \cap W_0^{s,\rho}(x_{j,0}^*)$. Então, da Definição 3.2.3, existem $z_{i,j} \in T_0^n W_0^{u,\rho}(x_{i,0}^*) \cap W_0^{s,\rho}(x_{j,0}^*)$, X_1, X_2 subespaços vetoriais de X tais que $X_1 \oplus X_2 = X$, e aplicações $\theta_0 : X_1 \rightarrow X_2$, $\sigma_0 : X_2 \rightarrow X_1$ com $\theta_0(0) = \sigma_0(0) = 0$, $\text{Lip}(\theta_0), \text{Lip}(\sigma_0) < 1$, tais que

$$T_0^n W_0^{u,\rho}(x_{i,0}^*) \supset \{z_{i,j} + \xi + \theta_0(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| \leq \rho_0\},$$

e

$$W_0^{s,\rho}(x_{j,0}^*) \supset \{z_{i,j} + \sigma_0(\eta) + \eta : \eta \in X_2, \|\eta\| \leq \rho_0\}.$$

Suponha adicionalmente que $\text{Dim} X_1 < \infty$.

Nas condições acima, dado $r \in (0, \rho_0)$ e $c \in (\text{Lip}(\sigma_0), 1)$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\|\psi_\eta - \psi_0\|_{\text{Lip}(V_0)} < \varepsilon_0$ implica que existe $\sigma_\eta : X_2 \rightarrow X_1$, $\|\sigma_\eta\|_{L^\infty(B_r^{X_2}(0))} \leq cr$, tal que

$$W_\eta^{s,\rho}(x_{j,\eta}^*) \supset \{z_{i,j} + \sigma_\eta(x) + x : x \in \bar{V}_r\}.$$

Adicionalmente, defina $Q : X \rightarrow X$ por $Q(\xi + \eta) = \xi$ se $\xi \in X_1$ e $\eta \in X_2$. Suponha, adicionalmente, que existe $\eta_0 > 0$ tal que, para cada $0 \leq \eta \leq \eta_0$, vale $\|\psi_\eta - \psi_0\|_{\text{Lip}(V_0)} < \varepsilon_0$ e $\|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{L^\infty(U_0)} \leq \min\left\{\frac{(1-c)r}{\|I-Q\|_{\mathcal{L}(X)}}, \frac{(1-c)r}{\|Q\|_{\mathcal{L}(X)}}\right\}$. Então,

$$T_\eta^n W_\eta^{u,\rho}(x_{i,\eta}^*) \cap W_\eta^{s,\rho}(x_{j,\eta}^*) \neq \emptyset, \forall 0 \leq \eta \leq \eta_0. \quad (3.21)$$

Demonstração. Como temos satisfeitas as hipóteses do Corolário 3.7.5, segue que dado $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, \dots, p\}$, existem $\rho > 0, \eta_0$ tais que

$$T_\eta^n W_\eta^{u,\rho}(x_{i,\eta}^*) = \varphi_\eta(U_0), W_\eta^{s,\rho}(x_{j,\eta}^*) = \psi_\eta(V_0),$$

com U_0, V_0 abertos de subespaços fechado de X e φ_η, ψ_η bi-Lipschitz sobre suas imagens para cada $\eta \in [0, \eta_0]$ e

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} [\|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{L^\infty(U_0)} + \|\psi_\eta - \psi_0\|_{L^\infty(V_0)}] = 0.$$

Tendo em vista o Lema 3.8.3, basta mostrarmos que existem $\eta_0 > 0, 0 < r \leq \rho_0, 0 < c < 1$, $\phi_1^\eta : X_1 \rightarrow X_2, \phi_2^\eta : X_2 \rightarrow X_1$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi_\eta(U_0) &\supset M_\eta := \{z_{i,j} + \phi_1^\eta(y) + \phi_2^\eta(y) : y \in \bar{U}_r\}, \\ \psi_\eta(V_0) &\supset N_\eta := \{z_{i,j} + \sigma_\eta(x) + x : x \in \bar{V}_r\}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

com $\bar{U}_r := \overline{B_r^{X_1}(0)}, \bar{V}_r := \overline{B_r^{X_2}(0)}$, $\|\phi_1^\eta - I_{\bar{U}_r}\|_{L^\infty(\bar{U}_r)} \leq (1-c)r$, $\|\phi_2^\eta\|_{L^\infty(\bar{U}_r)} \leq r$ e $\|\sigma_\eta\|_{L^\infty(\bar{V}_r)} \leq cr$ para todo $0 \leq \eta \leq \eta_0$.

Segue da Proposição 3.8.10 que dado $r \in (0, \rho_0)$ e $c \in (\text{Lip}(\sigma_0), 1)$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\|\psi_\eta - \psi_0\|_{\text{Lip}(V_0)} < \varepsilon_0$ implica que existe $\sigma_\eta : X_2 \rightarrow X_1$, $\|\sigma_\eta - \sigma_0\|_{L^\infty(\bar{V}_r)} \leq (c - \text{Lip}(\sigma_0))r$, tal que

$$W_\eta^{s,\rho}(x_{j,\eta}^*) \supset \{z_{i,j} + \sigma_\eta(x) + x : x \in \bar{V}_r\},$$

e portanto $\|\sigma_\eta\|_{L^\infty(\overline{V}_r)} \leq cr$. Seja $g_0 : \overline{U}_{\rho_0} \rightarrow X$ dada por $g_0(\xi) := z_{i,j} + \xi + \theta_0(\xi)$ para cada $\xi \in \overline{U}_{\rho_0}$. Seja $g_\eta : \overline{U}_{\rho_0} \rightarrow X$ dada por $g_\eta(\xi) := \varphi_\eta(\varphi_0^{-1}(g_0(\xi)))$. Então, existem $\phi_1^\eta : X_1 \rightarrow X_2$, $\phi_2^\eta : X_2 \rightarrow X_1$ tais que $g_\eta(\xi) = z_{i,j} + \phi_1^\eta(\xi) + \phi_2^\eta(\xi)$. Seja $\eta_0 > 0$ tal que para todo $0 \leq \eta \leq \eta_0$,

$$\|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{L^\infty(U_0)} \leq \min\left\{\frac{(1-c)r}{\|I - Q\|_{\mathcal{L}(X)}}, \frac{(1-c)r}{\|Q\|_{\mathcal{L}(X)}}\right\}.$$

Então,

$$\|\phi_2^\eta\|_{L^\infty(\overline{U}_{\rho_0})} \leq r \text{ e } \|\phi_1^\eta - I_{\overline{U}_{\rho_0}}\|_{L^\infty(\overline{U}_{\rho_0})} \leq (1-c)r,$$

e o resultado segue. $\square$

Teorema 3.9.2. Para cada $0 \leq \eta \leq 1$, seja $T_\eta : X \rightarrow X$ uma função e $\mathcal{E}_\eta = \{x_{1,\eta}^*, \dots, x_{p,\eta}^*\}$ o seu conjunto de equilíbrios. Suponha que exista $\delta > 0$ tal que $\|T_\eta - T_0\|_{\text{Lip}(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, $T_0 : \mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0) \rightarrow T_0(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0))$ é bi-Lipschitz, $\mathcal{E}_0$ só tem pontos fixos $\mathfrak{L}$ -hiperbólicos e $T_0|_{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0)} \in C^{1+}(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0), X)$. Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$[T_0^n W_0^{u,p}(x_{i,0}^*) \cap W_0^{s,p}(x_{j,0}^*)] \implies [T_\eta^n W_\eta^{u,p}(x_{i,\eta}^*) \cap W_\eta^{s,p}(x_{j,\eta}^*)] \neq \emptyset, \forall 0 \leq \eta \leq \eta_0. \quad (3.23)$$

Demonstração. Suponha $T_0^n W_0^{u,p}(x_{i,0}^*) \cap W_0^{s,p}(x_{j,0}^*)$. Então, por definição, existem $z_{i,j} \in X$, subespaços X_1, X_2 fechados de X tais que $X_1 \oplus X_2 = X$ e aplicações $\theta_0 : X_1 \rightarrow X_2$, $\sigma_0 : X_2 \rightarrow X_1$, com $\theta_0(0) = \sigma_0(0) = 0$, $\text{Lip}(\theta_0), \text{Lip}(\sigma_0) < 1$, tais que

$$\begin{aligned} T_0^n W_0^{u,p}(x_{i,0}^*) &\supset \{z_{i,j} + \xi + \theta_0(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| \leq \rho_0\} \\ W_0^{s,p}(x_{j,0}^*) &\supset \{z_{i,j} + \sigma_0(x) + x : x \in X_2, \|\xi\| \leq \rho_0\}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema 3.7.4, podemos supor $\rho > 0$ tal que

$$T_\eta^n W_\eta^{u,p}(x_{i,\eta}^*) = \varphi_\eta(U_0), W_\eta^{s,p}(x_{j,\eta}^*) = \psi_\eta(V_0),$$

com U_0, V_0 abertos de subespaços fechado de X e φ_η, ψ_η bi-Lipschitz para cada $\eta \in [0, \eta_0]$ e,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} [\|\varphi_\eta - \varphi_0\|_{\text{Lip}(U_0)} + \|\psi_\eta - \psi_0\|_{\text{Lip}(V_0)}] = 0$$

Segue da Proposição 3.8.10 que dado $\rho_1 \in (0, \rho_0)$, existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $0 < \eta \leq \eta_0$ existem $\theta_\eta : X_1 \rightarrow X_2$, $\sigma_\eta : X_2 \rightarrow X_1$, $\theta_\eta(0) = 0$, $\text{Lip}(\theta_\eta), \text{Lip}(\sigma_\eta) < 1$, tais que

$$\begin{aligned} T_\eta^n W_\eta^{u,p}(x_{i,\eta}^*) &\supset \{z_{i,j} + \xi + \theta_\eta(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| \leq \rho_1\} \\ W_\eta^{s,p}(x_{j,\eta}^*) &\supset \{z_{i,j} + \sigma_\eta(x) + x : x \in X_2, \|\xi\| \leq \rho_1\} \end{aligned}$$

Denotemos $B_1 := B_{\rho_1}^{X_1}(0)$ e $B_2 := B_{\rho_1}^{X_2}(0)$. Então, dado $c \in \mathbb{R}$ com $\max\{\text{Lip}(\theta_0), \text{Lip}(\sigma_0)\} < c < 1$, segue da Proposição 3.8.10 que existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$\text{Lip}_{B_1}(\theta_\eta), \text{Lip}_{B_2}(\sigma_\eta) \leq c, \forall \eta \in [0, \eta_0]$$

e

$$\|\theta_\eta - \theta_0\|_{L^\infty(B_1)}, \|\sigma_\eta - \sigma_0\|_{L^\infty(B_2)} \leq (1-c)\rho_1.$$

A prova de (3.23) está completa usando o Lema 3.8.1. $\square$

A prova do lema a seguir pode ser encontrada em (CARVALHO, 2012).

Lema 3.9.3. Seja $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta \in [0,1]}$, é uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Seja η_k uma sequência em $[0, 1]$ tal que $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ com $s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, $\mathbb{J}_k := \{s \in \mathbb{Z} : s \geq -s_k\}$ e $\mathbb{J}_k^- = \{s \in \mathbb{J}_k : s \leq 0\}$. Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução $\xi_{\eta_k} : \mathbb{J}_k \rightarrow X$ de $\{T_{\eta_k}^n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B := \cup_{k \in \mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(\mathbb{J}_k^-)$ é limitado, existe uma subsequência (que novamente denotaremos por ξ_{η_k}) e uma solução global $\xi_0 : \mathbb{Z} \rightarrow X$ de $\{T_0^n : t \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k}(s) \rightarrow \xi_0(s)$$

para todo $s \in \mathbb{Z}$ e $\xi_0(s) \in \bar{B}$ para todo $s \leq 0$.

Observação 3.9.4. Seja $T \in \mathcal{C}(X)$ e $T(x^*) = x^*$. Dados $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma_{[0, n_0]}^+(B_\delta^X(x^*)) \subset B_\varepsilon^X(x^*)$. Caso contrário, teríamos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ com $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ e $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{0, \dots, n_0\}$ tais que $T^{n_k} x_k \notin B_\varepsilon^X(x^*)$ e, sem perda de generalidade, teríamos $n \in \{0, \dots, n_0\}$ tal que $T^n x_k \notin B_\varepsilon^X(x^*)$. Mas $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ e $T \in \mathcal{C}(X)$ implica $T^n(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T^n(x^*) = x^*$ que é uma contradição.

A prova do teorema a seguir faz uso de argumentos que podem ser encontrados em (CARVALHO, 2012), na prova da estabilidade dos semigrupos gradient-like.

Teorema 3.9.5 (Continuidade de conexões). Seja $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]} \subset \mathcal{C}(X)$. Suponha que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta \in [0,1]}$ é uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ tal que

- a) $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado;
- b) $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{x_{1,\eta}^*, \dots, x_{p,\eta}^*\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$ e $x_{i,\eta}^* \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x_{i,0}^*$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. Além disso, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que a única solução global de $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ contida em $B_\delta(x_{1,\eta}^*)$ é a solução constante $x_{1,\eta}^*$, $1 \leq i \leq p$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$; e
- c) $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo gradient-like, $\mathcal{E}_0$ só tem pontos $\mathfrak{L}$ -hiperbólicos e T_0 satisfaz o item (iii) da Definição 3.2.7, isto é, se $x_i^*, x_j^*, x_k^* \in \mathcal{E}_0$, então

$$[W^u(x_i^*) \cap W^s(x_j^*)] \neq \emptyset \text{ e } W^u(x_j^*) \cap W^s(x_k^*) \neq \emptyset \implies [W^u(x_i^*) \cap W^s(x_k^*)] \neq \emptyset.$$

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$[W_\eta^u(x_{i,\eta}^*) \cap W_\eta^s(x_{j,\eta}^*)] \neq \emptyset \implies [W_0^u(x_{i,0}^*) \cap W_0^s(x_{j,0}^*)] \neq \emptyset, \quad (3.24)$$

para todo $0 \leq \eta \leq \eta_0$.

Demonstração. A convergência dos equilíbrios segue como na prova do Teorema 3.6.6.

Suponha que (3.24) não seja verdade. Então, existe $\eta_k \rightarrow 0$ e $(i_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \{0, \dots, p\}$ tais que $W_{\eta_k}^u(x_{i_k, \eta_k}^*) \cap W_{\eta_k}^s(x_{j_k, \eta_k}^*) \neq \emptyset$ e $W_0^{u,p}(x_{i_k, 0}^*) \cap W_0^s(x_{j_k, 0}^*) = \emptyset$. Como $\{(i, j) : 1 \leq i, j \leq p\}$ é finito, podemos supor que $(i_k, j_k) = (i_0, j_0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Usando o Lema 3.9.3 vamos provar a seguinte propriedade:

Afirmção: Existem $x_{s_1, 0}^*, \dots, x_{s_m, 0}^*$ com $s_1 = i_0, s_m = j_0$ tais que

$$W_0^u(x_{s_n, 0}^*) \cap W_0^s(x_{s_{n+1}, 0}^*) \neq \emptyset$$

para cada $n \in \{1, \dots, m-1\}$.

Como $W_{\eta_k}^u(x_{i_k, \eta_k}^*) \cap W_{\eta_k}^s(x_{j_k, \eta_k}^*) \neq \emptyset$, segue que para cada T_{η_k} , existe uma solução global $\xi_{\eta_k} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ tal que

$$x_{i, \eta_k}^* \xleftarrow{-\infty \leftarrow m} \xi_{\eta_k}(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_{j, \eta_k}^*.$$

Seja $0 < \delta_1 < \delta_0$ com δ_0 dado pelo Corolário 3.6.5 e $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $\xi_{\eta_k}(m) \in B_{\delta_1}^X(x_{s_1, 0}^*)$ para todo $m \leq m_k$ e $\xi_{\eta_k}(1 + m_k) \notin B_{\delta_1}^X(x_{s_1, 0}^*)$. Denotamos $\lambda_k(m) := \xi_{\eta_k}(m - m_k)$. Então $\lambda_k(m) \in B_{\delta_1}^X(x_{s_1, 0}^*)$ para todo $m \leq 0$. Como $\cup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k(\mathbb{Z}) \subset \cup_{0 \leq \eta \leq 1} \mathcal{A}_\eta$ é limitado, segue do Lema 3.9.3 que existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e uma solução global $\lambda^{(1)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ de T_0 tal que $\lambda^{(1)}(m) = \lim_{k \in \mathbb{N}_1, k \rightarrow \infty} \lambda_k(m)$. Além disso, $x_{s_1, 0}^* \xleftarrow{-\infty \leftarrow m} \lambda^{(1)}(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_{s_2, 0}^*$. Se $s_2 = j_0$, então ok.

Caso contrário, como $\lambda^{(1)}(m) = \lim_{k \in \mathbb{N}_1, k \rightarrow \infty} \lambda_k(m)$, isto implica que existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ e $\{n_k^{(2)}\}_{k \in \mathbb{N}_2}$ tal que $\xi_{\eta_k}(n_k^{(2)}) \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_2, k \rightarrow \infty} x_{s_2, 0}^*$. Além disso, existe $\{m_k^{(2)}\}_{k \in \mathbb{N}_2}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}_2$,

$$\xi_{\eta_k}(m) \in B_{\delta_1}^X(x_{s_2, 0}^*) \forall m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n_k^{(2)} \leq m \leq m_k^{(2)} \text{ e } \xi_{\eta_k}(1 + m_k^{(2)}) \notin B_{\delta_1}^X(x_{s_2, 0}^*).$$

Como $m_k^{(2)} - n_k^{(2)} \xrightarrow{k \in \mathbb{N}_2, k \rightarrow \infty} \infty$ (ver Observação 3.9.4), segue que obtemos, analogamente para $\lambda^{(1)}$, uma solução global $\lambda^{(2)}$ de T_0 tal que

$$x_{s_2, 0}^* \xleftarrow{-\infty \leftarrow m} \lambda^{(2)}(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_{s_3, 0}^*$$

Como T_0 é gradient-like, temos que $s_3 = j_0$ ou $s_3 \in \{1, \dots, p\} \setminus \{s_1, s_2, j_0\}$ e então, em um número finito de passos, obtemos $s_m = j_0$, o que conclui a afirmação.

Agora temos $W_0^u(x_{i_0, 0}^*) \cap W_0^s(x_{j_0, 0}^*) \neq \emptyset$ pois T_0 satisfaz a condição (iii) da Definição 3.2.7, que é uma contradição porque no começo da prova, supusemos $W_0^{u,p}(x_{i_0, 0}^*) \cap W_0^s(x_{j_0, 0}^*) = \emptyset$. Então, (3.24) é válida. $\square$

Corolário 3.9.6 (Estabilidade do diagrama de fase). Sob as hipóteses do Teorema 3.9.5 e do Teorema 3.9.2, para todo $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $W_0^u(x_{i, 0}^*) \cap W_0^s(x_{j, 0}^*) \neq \emptyset$, se T_0 é LMS, então existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$[W_\eta^u(x_{i, \eta}^*) \cap W_\eta^s(x_{j, \eta}^*) \neq \emptyset] \iff [W_0^u(x_{i, 0}^*) \cap W_0^s(x_{j, 0}^*) \neq \emptyset]. \quad (3.25)$$

A seguir, recordamos o enunciado do Teorema 3.2.12 e completamos sua prova.

Teorema 3.9.7. Seja $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta \in [0,1]}$ é uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Se

- a) $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$, $\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado e existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|T_\eta - T_0\|_{\text{Lip}(\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{E}_0))} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$; e
- b) $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo LMS e existe $\delta > 0$ tal que $T_0|_{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0)} \in C^{1+}(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{E}_0), X)$.

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{x_{1,\eta}^*, \dots, x_{p,\eta}^*\}$, para todo $\eta \in [0, \eta_0]$ e $x_{i,\eta}^* \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x_{i,0}^*$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. Além disso, $\eta_0 > 0$ pode ser escolhido tal que, para cada $\eta \in [0, \eta_0]$, o semigrupo $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é LMS com atrator $\mathcal{A}_\eta$ geometricamente equivalente à $\mathcal{A}_0$. Em outras palavras,

$$[W_0^u(x_{i,0}^*) \cap W_0^s(x_{j,0}^*) \neq \emptyset] \iff [W_\eta^u(x_{i,\eta}^*) \cap W_\eta^s(x_{j,\eta}^*) \neq \emptyset]. \quad (3.26)$$

Demonstração. Primeiro vamos provar (3.26). A implicação ($\implies$) em (3.26) foi provada no Teorema 3.9.5. Como T_0 é LMS, segue que

$$[W_0^u(x_{i,0}^*) \cap W_0^s(x_{j,0}^*) \neq \emptyset] \implies [T_0^n W_0^{u,\rho}(x_{i,0}^*) \cap W_0^{s,\rho}(x_{j,0}^*) \neq \emptyset]$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\rho > 0$ e portanto, aplicando o Teorema 3.9.2, mostramos que vale ($\impliedby$) em (3.26).

Para provarmos a estabilidade dos semigrupos LMS, vamos provar que cada item da Definição 3.2.7 é estável; isto é, existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $\eta \in [0, \eta_0]$, T_η satisfaz o item escolhido. A estabilidade do item (i) segue do Teorema 3.6.7. A estabilidade do item (ii) segue imediatamente de (3.26) e do Teorema 3.9.2. Provamos a estabilidade do item (iii) da Definição 3.2.7 por redução ao absurdo. Suponha que exista $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\eta_k \rightarrow 0$ tal que

$$W_{\eta_k}^u(x_{i_k,\eta_k}^*) \cap W_{\eta_k}^s(x_{j_k,\eta_k}^*) \neq \emptyset \text{ e } W_{\eta_k}^u(x_{j_k,\eta_k}^*) \cap W_{\eta_k}^s(x_{l_k,\eta_k}^*) \neq \emptyset$$

mas $W_{\eta_k}^u(x_{i_k,\eta_k}^*) \cap W_{\eta_k}^s(x_{l_k,\eta_k}^*) = \emptyset$. Sem perda de generalidade, podemos supor $(i_k, j_k, l_k) = (i, j, l)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, como na prova do Teorema 3.9.5, teríamos

$$W_0^u(x_{i,0}^*) \cap W_0^s(x_{j,0}^*) \neq \emptyset \text{ e } W_0^u(x_{j,0}^*) \cap W_0^s(x_{l,0}^*) \neq \emptyset$$

e portanto $W_0^u(x_{i,0}^*) \cap W_0^s(x_{l,0}^*) \neq \emptyset$. Logo $T_0^n W_0^{u,\rho}(x_{i,0}^*) \cap W_0^{s,\rho}(x_{l,0}^*) \neq \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\rho > 0$, que contradiz o Teorema 3.9.2. $\square$

3.9.1 Exemplo

Considere a seguinte família de equações diferenciais parciais autônomas:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \lambda(u - u^3) + \eta \sin(u_x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, \pi], \end{cases} \quad (3.27)$$

onde $\eta \in [0, 1]$ e $\lambda > 0$. Seja $X = L^2(0, \pi)$ com norma $\|\cdot\|$, $-\Delta = A: D(A) \subset X \rightarrow X$ é o Laplaciano Dirichlet com $D(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi)$, e $X^\alpha := (D(A^\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ com $\|x\|_\alpha := \|A^\alpha x\|$ para $x \in D(A^\alpha)$, $\alpha \geq 0$. Então, podemos escrever o problema acima como uma equação de evolução abstrata, dada por

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) + F_\eta(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.28)$$

onde $f(u)(x) = \lambda u(x) - u^3(x)$ e $F_\eta(u)(x) = \eta \sin(u_x(x))$ para cada $x \in [0, \pi]$. Claramente, para cada η , a aplicação F_η define um operador limitado e globalmente Lipschitz de $X^{\frac{1}{2}}$ em X , pois

$$\|F_\eta(u)\|^2 = \int_\Omega |F_\eta(u)(x)|^2 dx \leq \eta^2 |\Omega|, \quad (3.29)$$

e

$$\|F_\eta(u) - F_\eta(v)\|^2 = \int_\Omega |F_\eta(u)(x) - F_\eta(v)(x)|^2 dx \leq \eta^2 \|u - v\|_{\frac{1}{2}}^2, \quad (3.30)$$

para todo $u, v \in X$.

Para $\eta = 0$ temos o problema de Chafee-Infante (ver (CHAFEE; INFANTE, 1974/75)), que está bem posto em $X^{\frac{1}{2}}$ e as soluções existem para todo tempo positivo, e quando $t \rightarrow \infty$, cada solução $u(t, \cdot)$ de (3.28) com $\eta = 0$ converge em $X^{\frac{1}{2}}$ para um equilíbrio ϕ que satisfaz

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda(\phi(x) - \phi^3(x)) = 0, & x \in (0, \pi) \\ \phi(0) = \phi(\pi) = 0. \end{cases}$$

Eles também provam que existe somente um número finito de equilíbrios. De fato, se $n^2 < \lambda \leq (n+1)^2$ existem exatamente $2n+1$ equilíbrios, onde n é um inteiro não negativo. Além disso, se $0 < \lambda \leq 1$, então o único equilíbrio é a solução nula e esta é globalmente assintoticamente estável. Para $\lambda > 1$, a solução nula é instável e também todas as outras exeto duas, denotadas por ϕ_1^+ e ϕ_1^- . Estas duas soluções são caracterizadas pelo fato de que $\phi_1^-(x) < 0 < \phi_1^+(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$ e estas soluções são assintoticamente estáveis.

Usando (3.29) e (3.30) e os resultados de (HENRY, 1981), sabemos que o problema (3.28) está bem posto em $X^{\frac{1}{2}}$ e que as soluções existem para todo tempo positivo. Consequentemente para cada $\eta \in [0, 1]$ obtemos um semigrupo $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ em $X^{\frac{1}{2}}$ e

$$T_\eta(t)u_0 = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(T_\eta(s)u_0)ds + \int_0^t e^{-A(t-s)}F_\eta(T_\eta(s)u_0)ds, \quad (3.31)$$

para todo $t \geq 0$ e $u_0 \in X^{\frac{1}{2}}$.

O semigrupo $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ é a solução de (3.28) e é dado por

$$T_0(t)u_0 = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(T_0(s)u_0)ds, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } u_0 \in X^{\frac{1}{2}}. \quad (3.32)$$

Usando (HENRY, 1985), sabemos que para cada $\lambda \notin \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ a aplicação $T_0 = T_0(1)$ é uma aplicação Morse-Smale C^2 . Seja $B := B_r^{X^{\frac{1}{2}}}(0)$ com $r > 0$ tal que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_0) \subset B$, onde $\mathcal{N}(\mathcal{A}_0)$ vem da definição de aplicação Morse-Smale (Definição 3.1.11). Com abuso de notação, de agora em diante, denotaremos

$$T_0(t)u_0 = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}\tilde{f}(T_0(s)u_0)ds, \text{ para todo } u_0 \in X^{\frac{1}{2}}, t \geq 0. \quad (3.33)$$

onde $\tilde{f}$ é dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } \|x\| \leq r, \text{ e} \\ f\left(\frac{r}{\|x\|}x\right), & \text{se } \|x\| > r. \end{cases} \quad (3.34)$$

Denotemos $T_0 := T_0(1)$. Assim, temos que $\tilde{f}$ é limitada, globalmente Lipschitz. Note que, T_0 continua automaticamente sendo um semigrupo classe C^2 em B e que satisfaz as propriedades de semigrupo Morse-Smale, exceto possivelmente a hipótese de $T_0 \in C^1(X)$. Em particular, T_0 é um semigrupo LMS com $T_0|_B \in C^{1+}(B, X)$.

Denotaremos

$$T_\eta(t)u_0 = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}\tilde{f}(T_\eta(s)u_0)ds + \int_0^t e^{-A(t-s)}F_\eta(T_\eta(s)u_0)ds, \quad (3.35)$$

e $T_\eta := T_\eta(1)$.

Usando a proposição a seguir, pode-se ver que a teoria de perturbações pequenas autônomas de semigrupos não pode ser aplicada aqui para obter a estabilidade geométrica da família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$, pois a perturbação não é continuamente diferenciável e portanto os semigrupos $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ não são diferenciáveis para $\eta \in (0, 1]$.

Proposição 3.9.8. A função $F_\eta : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ não é Fréchet-diferenciável em nenhum ponto de $X^{\frac{1}{2}}$, para $\eta \in (0, 1]$.

Demonstração. Note que $\partial_x : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é uma isometria. De fato, se $u \in D(A)$, então

$$\|u\|_{\frac{1}{2}}^2 = \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 = \langle Au, u \rangle = \|\partial_x u\|^2.$$

Suponha F_η é diferenciável em $u_0 \in X^{\frac{1}{2}}$. Então,

$$\|F_\eta(u+h) - F_\eta(u) - DF_\eta(u)h\| = o(\|h\|_{\frac{1}{2}}) = o(\|\partial_x u\|).$$

Seja $u_0 = \partial_x u$, $k = \partial_x h$. Como no Lema B.7.4, fazendo $f(x) := \sin(x)$, obtemos (com abuso de notação)

$$\|f(u_0 + k) - f(u_0) - f'(u_0)k\| = o(\|k\|). \quad (3.36)$$

Seja $g_s(x)$ definida por

$$g_s(y) = |f(u_0(y) + s) - f(u_0(y)) - f'(u_0(y))s|^2, \quad s \in \mathbb{R}, x \in \Omega.$$

Como f não é uma função afim, seguindo os passos do Teorema B.7.6, segue que existe $s_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x_0 \in \Omega$ tais que $g_{s_0}(x_0) > 0$ e

$$A_r g_{s_0}(x_0) := \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} g_{s_0}(y) dy \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} g_{s_0}(x_0).$$

Seja $y_0 \in \Omega \setminus \{x_0\}$ e $r_0 > 0$ tal que $B_r^{\mathbb{R}}(x_0) \cap B_r^{\mathbb{R}}(y_0) = \emptyset$ para todo $r \in (0, r_0]$. Defina $u_r := |s_0| \chi_{B_r^{\mathbb{R}}(x_0)} - |s_0| \chi_{B_r^{\mathbb{R}}(y_0)}$ para $r \in (0, r_0]$. Defina

$$v_r(x) := \int_0^x u_r(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Então, $v_r \in X^{\frac{1}{2}}$ e $\partial_x v_r = u_r$. Fazendo $h = u_r$, obtemos

$$\|f(u_0 + u_r) - f(u_0) - \cos(u_0)u_r\| = o(\|u_r\|). \quad (3.37)$$

Por outro lado, da prova do Teorema B.7.6, obtemos

$$\frac{1}{\|u_r\|^2} \|f(u_0 + u_r) - f(u_0) - f'(u_0)u_r\|^2 \geq \frac{1}{|s_0|^2} A_r g_{s_0}(x_0)$$

com $A_r g_{s_0}(x_0) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} g_{s_0}(x_0) > 0$, que contradiz (3.37). $\square$

Observação 3.9.9. Não podemos aplicar diretamente a conclusão do Teorema B.7.6 em (3.36) pois $k \in R(\partial_x)$ que é o espaço das funções de X com média zero. Como $R(\partial_x)$ é fechado em X e diferente deste, segue que $R(\partial_x) \cap B_r^X(0)$ não é denso em $B_r^X(0)$. Portanto (3.36) não prova que f^e é diferenciável em u_0 .

Entretanto, nós podemos aplicar nosso resultado para dar a caracterização geométrica do atrator global do semigrupo perturbado.

Como temos uma perturbação limitada e globalmente Lipschitz, com constante de Lipschitz menor ou igual a $|\Omega|\eta$, podemos obter facilmente que a família de aplicações no tempo um $\{T_\eta(1)\}_{\eta \in [0,1]}$ é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ em $C(H^1(0, \pi))$ (basta seguir os passos do final da prova do Teorema 2.0.3). Além disso, existe um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$ (ou η suficientemente pequeno, se necessário) tal que $\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é pré-compacto em $H^1(0, \pi)$.

Com esta nova família $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ que obtemos acima, usando a fórmula da variação das constantes, obtemos que T_η converge para T_0 de forma Lipschitz em limitados de $X^{\frac{1}{2}}$.

Como $\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é pré-compacto em $H^1(0, \pi)$ e $\|T_\eta - T_0\|_{U, \infty} \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0^+$ (U limitado de $X^{\frac{1}{2}}$), temos que $\{\mathcal{E}_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$. Por outro lado $\|T_\eta - T_0\|_{U, Lip} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, consequentemente, do Corolário 3.5.3, segue que existe $p \in \mathbb{N}$ e $\eta_0 > 0$ tais que $\mathcal{E}_\eta$ contém somente equilíbrios $\mathfrak{L}$ -hiperbólicos e $\mathcal{E}_\eta = \{x_{1,\eta}^*, \dots, x_{p,\eta}^*\}$ que satisfaz

$$\max_{i=1, \dots, p} \|x_{i,\eta}^* - x_{i,0}^*\| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0,$$

isto é, acabamos de verificar o item **(b)** do Teorema 3.9.7 e, isto completa a verificação das hipóteses deste teorema.

ANÁLISE ESPECTRAL E SEMIGRUPOS

Neste apêndice apresentamos resultados e definições de análise espectral, semigrupos de operadores lineares e potências fracionárias que utilizamos neste trabalho. Eles também podem ser encontrados em (HENRY, 1981; KATO, 1960; KATO, 1995; PAZY, 1983; TAYLOR, 1958).

A.1 Análise espectral de operadores lineares

Definição A.1.1. Seja $X := (X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado. O conjunto resolvente de A é o subconjunto $\rho(A)$ de todos os λ em $\mathbb{C}$ tais que $\lambda - A$ é bijetor.

O espectro $\sigma(A)$ de um operador fechado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ pode ser decomposto em três partes disjuntas:

- (i) O conjunto dos autovalores de A é chamado de espectro pontual $\sigma_p(A)$ de A ; isto é, $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda - A) \text{ não é injetor}\}$.
- (ii) O espectro residual $\sigma_r(A)$ de A é definido por $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda - A) \text{ é injetor e } \overline{R(\lambda - A)} \subsetneq X\}$.
- (iii) O espectro contínuo $\sigma_c(A)$ de A é definido por $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda - A) \text{ é injetor, } \overline{R(\lambda - A)} \subsetneq X \text{ e } \overline{R(\lambda - A)} = X\}$.

Teorema A.1.2. Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Se $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \quad (\text{A.1})$$

e

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \quad (\text{A.2})$$

Corolário A.1.3. Sejam X um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado. Então, a função $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é analítica e

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n! (\lambda - A)^{-n-1}.$$

Definição A.1.4. Sejam X, Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Diremos que um operador linear $K : X \rightarrow Y$ é compacto se $K(B_1^X(0))$ é um subconjunto relativamente compacto de Y . Denotamos por $\mathcal{K}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares compactos $K : X \rightarrow Y$.

Teorema A.1.5. Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$. Se $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, então $N((\lambda - A)^n)$ tem dimensão finita, $n = 1, 2, 3, \dots$

Lema A.1.6. Sejam X um espaço de Banach com dimensão infinita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$. Se $\{\lambda_n\}$ é uma sequência de números distintos tais que

$$\begin{aligned} \lambda_n &\rightarrow \lambda \\ \lambda_n &\in \sigma(A) \setminus \{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Então $\lambda = 0$; isto é, todo ponto de $\sigma(A) \setminus \{0\}$ é isolado.

Teorema A.1.7. Seja X um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$. Então todo ponto de $\sigma(A) \setminus \{0\}$ é um autovalor, $\sigma(A)$ contém no máximo um número contável de pontos e o conjunto dos pontos de acumulação de $\sigma(A)$ é vazio ou $\{0\}$.

Definição A.1.8. Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado e com resolvente não vazio. Diremos que A tem **resolvente compacto** se para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$ temos que $(\lambda_0 - A)^{-1} \in \mathcal{K}(X)$.

É uma consequência simples da identidade do resolvente (A.1) que se A tem resolvente compacto, então $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

A seguir recordamos a definição de operadores adjuntos. Seja X um espaço de Banach com dual X^* . Se $x^* \in X^*$ denotaremos o seu valor em um vetor $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou por $\langle x, x^* \rangle$. Seja $S : D(S) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com domínio denso. O adjunto $S^* : D(S^*) \subset X^* \rightarrow X^*$ de S é o operador linear definido por: $D(S^*)$ é o conjunto dos $x^* \in X^*$ para os quais existe $y^* \in X^*$ satisfazendo

$$\langle x^*, Sx \rangle = \langle y^*, x \rangle \quad \forall x \in D(S). \quad (\text{A.3})$$

Se $x^* \in D(S^*)$ definimos $S^*x^* := y^*$ onde y^* é o (único) elemento de X^* satisfazendo (A.3).

Seja H um espaço de Hilbert com produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Identificamos H e H^* e denotamos ambos por H .

Definição A.1.9. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diremos que um operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é simétrico (também chamado Hermitiano quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$; isto é, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ para todo $x, y \in D(A)$. Diremos que A é auto adjunto se $A = A^*$.

Observação A.1.10. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Se $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é simétrico e $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de A , então $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\inf_{\|x\|_H=1} \langle Ax, x \rangle \leq \lambda \leq \sup_{\|x\|_H=1} \langle Ax, x \rangle.$$

Proposição A.1.11. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é um operador auto adjunto, injetor e com imagem densa, então A^{-1} é auto adjunto.

Teorema A.1.12. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é um operador simétrico e sobrejetor, então A é auto adjunto.

Lema A.1.13. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador auto adjunto com resolvente compacto. Então, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ e existem projeções ortogonais $P_j = P_{\lambda_j}$ associadas a cada autovalor tais que, para $x \in D(A)$,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} P_j x$$

e

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j x.$$

Definição A.1.14. Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. A aplicação dualidade $J : X \rightarrow 2^{X^*}$ é uma função multívoca definida por

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2, \|x^*\| = \|x\|\}.$$

$J(x) \neq \emptyset$, pelo Teorema de Hahn-Banach.

Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é **dissipativo** se para cada $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$.

Lema A.1.15. O operador linear A é dissipativo se, e somente se,

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\| \tag{A.4}$$

para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Se A é um operador linear em um espaço de Banach complexo X a sua imagem numérica $W(A)$ é o conjunto

$$W(A) := \{\langle x^*, Ax \rangle : x \in D(A), x^* \in X^*, \|x\| = \|x^*\| = 1, \langle x^*, x \rangle = 1\}. \tag{A.5}$$

No caso em que X é um espaço de Hilbert

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle : x \in D(A), \|x\| = 1\}.$$

Teorema A.1.16. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado densamente definido. Seja $W(A)$ a imagem numérica de A e Σ um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$. Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é injetora e tem imagem fechada e satisfaz

$$\|(\lambda - A)x\|_{\mathcal{L}(X)} \geq d(\lambda, W(A))\|x\|. \quad (\text{A.6})$$

Além disso, se $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$, então $\rho(A) \supset \Sigma$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))}, \quad \forall \lambda \in \Sigma, \quad (\text{A.7})$$

onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ a $W(A)$.

Corolário A.1.17. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador auto adjunto. Segue que A é fechado e densamente definido. Se A é limitado superiormente; isto é, $\langle Au, u \rangle \leq a\langle u, u \rangle$ para algum $a \in \mathbb{R}$, então $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a] \subset \rho(A)$, e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para alguma constante $M \geq 1$ dependendo somente de φ e para todo $\lambda \in \Sigma_{a, \varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{a\} : |\arg(\lambda - a)| < \varphi\}$, $\varphi < \pi$.

A.2 Semigrupos de operadores lineares

Definição A.2.1. Um **semigrupo** de operadores lineares em X é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que

- (i) $T(0) = I_X$,
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Se, além disso,

- (iii) $\|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, diremos que o semigrupo é uniformemente contínuo.
- (iv) $\|T(t)x - x\|_X \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, $\forall x \in X$, diremos que o semigrupo é fortemente contínuo.

O estudo dos semigrupos de operadores lineares está associado ao estudo de problemas de Cauchy lineares da forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear (em geral ilimitado). O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é o operador solução de (A.8); isto é, para cada $x_0 \in X$, $t \mapsto T(t)x_0$ é a solução (em algum sentido) de (A.8).

Definição A.2.2. Se $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu **gerador infinitesimal** é o operador definido por $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, onde

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

Exemplo 1. Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e defina $e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$. Então $\{e^{At} : t \in \mathbb{R}\}$ define um grupo uniformemente contínuo com gerador A e satisfazendo $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}$.

Teorema A.2.3. Suponha que $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo. Então, existe $M \geq 1$ e β tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Para qualquer $\ell > 0$ podemos escolher $\beta \geq \frac{1}{\ell} \ln \|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e então escolher M .

Teorema A.2.4. Suponha que $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo.

1. Para qualquer $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ é contínuo para $t \geq 0$.
2. $t \mapsto \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é semicontínua inferiormente e portanto mensurável.
3. Seja A o gerador infinitesimal de $T(t)$; então, A é densamente definido e fechado. Para $x \in D(A)$, $t \mapsto T(t)x$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$

4. $\cap_{m \geq 1} D(A^m)$ é denso em X .
5. Para $\operatorname{Re} \lambda > \beta$ e β dado no Teorema A.2.3, λ está no resolvente $\rho(A)$ de A e

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X.$$

Lema A.2.5. Suponha que A é um operador linear cujo conjunto resolvente contém (β, ∞) e que satisfaz

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M |\lambda - \beta|^{-n}, \quad n \geq 1, \lambda > \beta.$$

Então existe uma norma $|\cdot|_X$ em X tal que

$$\|x\|_X \leq |x|_X \leq M \|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

e

$$|(\lambda - A)^{-1}x|_X \leq \lambda^{-1} |x|_X, \quad \forall x \in X, \lambda > \beta.$$

Teorema A.2.6 (Forma Geral do Teorema de Hille-Yosida). Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. As seguintes afirmativas são equivalentes

- (i) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0;$$

- (ii) A é fechado, densamente definido, o conjunto resolvente de A contém (β, ∞) e

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda - \beta)^{-n}, \quad \forall \lambda > \beta, n = 1, 2, \dots.$$

Teorema A.2.7 (G. Lumer). Suponha que A é um operador linear densamente definido em um espaço de Banach X . Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Corolário A.2.8. Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos A e A^* são dissipativos, então $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Definição A.2.9. Dizemos que $-A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é setorial se é densamente definido e se, existem constantes a, C e $\varphi \in (\pi/2, \pi]$, tais que $\Sigma_{a,\varphi} := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{a\} : |\arg(\lambda - a)| < \varphi\}$ está em $\rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad \text{em } \Sigma_{a,\varphi}.$$

Diremos que $\Sigma_{a,\varphi}$ é um setor de vértice a e ângulo φ .

Teorema A.2.10. Suponha $-A$ setorial como na Definição A.2.9. Então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ com

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

onde Γ_a é a fronteira de $\Sigma_{a,\varphi} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| \leq r\}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, r pequeno, orientada com no sentido da parte imaginária crescente. Além disso, $t \mapsto T(t)$ se estende a uma função analítica de $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \varphi - \pi/2\}$ em $\mathcal{L}(X)$ (ou a complexificação de X , se X é um espaço de Banach real) e para algum $K = K(C, a, \varphi) > 0$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{at}, \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K t^{-1} e^{at}$$

para todo $t > 0$. Note que

$$\frac{d}{dt} T(t) = AT(t)$$

é um operador limitado para qualquer $t > 0$.

Teorema A.2.11. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ densamente definido e tal que $-A$ é setorial com resolvente compacto. Então o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ gerado por A é compacto.

A.3 Operadores de tipo positivo

Seja X um espaço de Banach. Um operador linear A em X é dito de **tipo positivo** com constante $M \geq 1$, se é fechado, densamente definido, $\mathbb{R}^+ \subset \rho(-A)$ e

$$(1+s)\|(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad s \in \mathbb{R}^+. \quad (\text{A.9})$$

Denotamos o conjunto dos operadores de tipo positivo por

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}(X).$$

Teorema A.3.1. Seja $A \in \mathcal{P}(X)$ com constante M . Se $\theta_M := \arcsin(1/2M)$ e

$$\Sigma_M := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \theta_M\} + \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2M\},$$

então $\Sigma_M \subset \rho(-A)$ e

$$(1+|\lambda|)\|(\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2M+1, \quad \forall \lambda \in \Sigma_M.$$

Com isto para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha < 0$, definimos

$$A^\alpha := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^\alpha (\lambda+A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma} \lambda^\alpha (\lambda-A)^{-1} d\lambda, \quad (\text{A.10})$$

onde Γ é qualquer curva simples em $\Sigma_M \setminus \mathbb{R}^+$ suave por partes, conexa, contendo o conjunto $\{te^{-iv}, te^{iv}\}_{t \geq t_0}$ para algum $t_0 > 0$ e $v \in (0, \arcsin 1/(2M)]$, e com orientação tal que a parte imaginária cresce à medida que o parâmetro de Γ cresce.

Lema A.3.2. Para todo α e β com parte real negativa $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$

Teorema A.3.3. $\{A^z; \operatorname{Re} z < 0\} \cup \{A^0 = I_X\}$ é um semigrupo fortemente contínuo e analítico sobre X .

É uma consequência do Teorema A.3.3 que $\{A^{-t}; t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo sobre X . Denotamos o seu gerador infinitesimal por

$$-\log A$$

o que define o logaritmo de $A \in \mathcal{P}(X)$. Então a fórmula intuitiva

$$A^{-t} = e^{-t \log A}, \quad t \geq 0,$$

é válida.

Definição A.3.4. Definimos as potências fracionárias para $\operatorname{Re} z > 0$ por

$$A^z := (A^{-z})^{-1}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (\text{A.11})$$

Denotamos $X^\alpha := (D(A^\alpha), \|A^\alpha(\cdot)\|)$ para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, isto é, o conjunto com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ definida por $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$ para cada $x \in D(A^\alpha)$. Chamaremos X^α de espaço de potência fracionária associado a A . Quando trabalharmos simultaneamente com espaços de potências fracionárias associadas a operadores distintos, denotaremos X_A^α no lugar de X^α .

Proposição A.3.5. Os espaços X^α são espaços de Banach. Se A tem resolvente compacto, então

$$X^w \hookrightarrow X^z \hookrightarrow X, \quad 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w,$$

são inclusões densas e compactas.

Definição A.3.6. Dizemos que A é do tipo (ω, M) em um espaço de Banach X se A é fechado, densamente definido e o resolvente de $-A$ contém um setor aberto $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi - \omega\}$ e $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ é uniformemente limitado em cada setor menor $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi - \omega - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ e $\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \leq M$, $\lambda \geq 0$.

O teorema a seguir é devido a T. Kato (veja (KATO, 1960)).

Teorema A.3.7 (Kato). Seja A um operador de tipo (ω, M) em um espaço de Banach X com $0 \in \rho(A)$ e $0 < \alpha < 1$, então

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda + (-\mu)^\alpha} (\mu + A)^{-1} d\mu, \quad \lambda \geq 0, \quad (\text{A.12})$$

onde Γ é qualquer curva simples suave por partes em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ indo de $\infty e^{-i\varphi}$ a $\infty e^{i\varphi}$ para algum $\varphi \in (0, \pi)$ tal que $\sigma(-A)$ fica estritamente a esquerda de Γ .

Deformando Γ sobre $\mathbb{R}^+$ segue que

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^\alpha (s + A)^{-1}}{s^{2\alpha} + 2\lambda s^\alpha \cos \pi \alpha + \lambda^2} ds, \quad \lambda \geq 0. \quad (\text{A.13})$$

Além disso, A^α é de tipo $(\alpha\omega, M)$. Se $\alpha\omega < \pi/2$ então $-A^\alpha$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T_\alpha(t) : t \in \Sigma_{\pi/2 - \alpha\omega}\}$. No caso em que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial $T_\alpha(t)$ é dado por

$$T_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty T(\tau) \int_{\Gamma} e^{-\tau\mu - t(-\mu)^\alpha} d\mu d\tau. \quad (\text{A.14})$$

Teorema A.3.8. Suponha que $A \in \mathcal{P}(X)$ e que $0 < \alpha < 1$. Então $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ para $\beta \in \mathbb{R}$.

Teorema A.3.9. Se $A \in \mathcal{P}(X)$ com constante $M \geq 1$, então existe uma constante $K = K(M) > 0$, tal que $\|A^\alpha x\|_X \leq K \|Ax\|_X^\alpha \|x\|_X^{1-\alpha}$ para $0 \leq \alpha \leq 1$, $x \in D(A)$.

Lema A.3.10. Se $x \in D(A^\alpha)$, $\alpha > 0$ e $0 < \beta < \alpha$ então

$$A^\beta x = \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \int_0^\infty s^{\beta-1} A(s + A)^{-1} x ds.$$

Teorema A.3.11. Suponha A setorial como na Definição A.2.9 e $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > \delta > 0$. Então, para todo $t > 0$, $\alpha \geq 0$, temos $R(e^{-At}) \subset D(A^\alpha)$ e

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \quad \text{para } t > 0,$$

com $M_\alpha =$ dependendo somente de $\alpha, C, \delta, \varphi$. Além disso, M_α é limitada em qualquer compacto de $(0, \infty)$ e M_α é limitada quando $\alpha \rightarrow 0^+$.

PROVAS

B.1 Prova do Teorema 1.4.13

A seguir apresentamos os lemas que usamos para provar o Teorema 1.4.13.

Recordamos que X um espaço métrico, $I := [0, 1]$ e, para cada $B \subset X$, denotamos $\gamma_\eta^+(B) = \bigcup_{t \geq 0} S_\eta(t)B$ a órbita positiva de B pelo semigrupo $S_\eta(\cdot)$.

Lema B.1.1. Se a família $\{B_\eta\}_{\eta \in I}$ de subconjuntos de X é coletivamente compacta em $\eta = 0$, então $\{B_\eta\}_{\eta \in I}$ é uniformemente limitada em uma vizinhança de $\eta = 0$; isto é, $\bigcup_{0 \leq \eta \leq \eta_0} B_\eta$ é limitado em X .

Lema B.1.2. Seja $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ uma família de semigrupos em um espaço de Banach X que é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Então, dado um limitado B , existe $\eta_0 > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que a união $\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} \gamma_\eta^+(S_\eta(t_0)B)$ é limitada em X .

Lema B.1.3. Seja $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ uma família de semigrupos em um espaço de Banach X que é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ e eventualmente convergente em $\eta = 0$. Assuma que, para cada $\eta \in I$, $S_\eta(\cdot)$ tenha um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ e que $\mathcal{A}_\eta \subset B_\eta$ com $\{B_\eta\}_{\eta \in I}$ coletivamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que exista uma família $\{\Xi_\eta^*\}_{\eta \in I}$ de compactos invariantes isolados associados a $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ tais que $\Xi_\eta^* = \{\Xi_{\eta,1}^*, \dots, \Xi_{\eta,k}^*\}$ para certo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $\eta \in I$. Além disso,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \max_{1 \leq j \leq k} \{\text{dist}_H(\Xi_{0,j}^*, \Xi_{\eta,j}^*)\} = 0,$$

e, adicionalmente, $\Xi_0^* = \{\Xi_{0,1}^*, \dots, \Xi_{0,k}^*\}$ atrai pontos de X sob a ação de $S_0(\cdot)$.

Então, dado $\delta > 0$, existem T_0 e $\eta > 0$ tais que para todo $\eta \in [0, \eta_0]$ e

$$x \in \gamma_\eta^+(S_\eta(T) \bigcup_{0 \leq \eta \leq \eta_0} B_\eta) := B(\eta, \eta_0),$$

temos que

$$\{S_\eta(t)x : t \in [0, T_0]\} \cap \mathcal{O}_\delta(\mathcal{Y}_\eta) \neq \emptyset,$$

onde $\mathcal{Y}_\eta := \bigcup_{j=1}^k \Xi_{k,\eta}^*$ e T é como na Definição 1.4.1.

Demonstração. Provaremos este lema por contradição. Suponha que existam $\delta > 0$ e seqüências $\eta_n \rightarrow 0$, $t_n \rightarrow \infty$, $x_n \in B(\eta_n, \frac{1}{n})$, tais que

$$\{S_{\eta_n}(t)x_n : t \in [0, t_n]\} \cap \mathcal{O}_\delta(\mathcal{Y}_{\eta_n}) = \emptyset.$$

Como, por hipótese, para cada $n \in \mathbb{N}$, sem perda de generalidade, temos que $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\mathcal{Y}_0) \subset \mathcal{O}_\delta(\mathcal{Y}_{\eta_n})$, então, para quase todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\{S_{\eta_n}(t)x_n : t \in [0, t_n]\} \cap \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\mathcal{Y}_0) = \emptyset.$$

Além disso, existem seqüências $\{y_n\} \subset \bigcup_{\eta \in [0, \frac{1}{n}]} B_\eta$, $\eta_{k_n} \rightarrow 0$ e $\{\tau_n\} \subset [0, \infty)$ tais que $x_n = S_{\eta_{k_n}}(T + \tau_n)y_n$ e para quase todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\{S_{\eta_n}(t)S_{\eta_{k_n}}(T + \tau_n)y_n : t \in [0, t_n]\} \cap \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\mathcal{Y}_0) = \emptyset. \quad (\text{B.1})$$

Afirmamos que existe uma subsequência de $\{S_{\eta_{k_n}}(T + \tau_n)y_n\}$ (que sem perda de generalidade suporemos a mesma) e $z \in X$ tais que

$$S_{\eta_{k_n}}(T + \tau_n)y_n \rightarrow z. \quad (\text{B.2})$$

De fato, se τ_n é limitada, (e sem perda de generalidade, convergente para $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$) usamos que a família $\{B_\eta\}_{\eta \in I}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ para garantir que $\{y_n\}$ tenha subsequência convergente (que suporemos ser a mesma, para simplificar a notação) para certo $z_0 \in X$ e consequentemente obtemos (B.2) com $z = S_0(T + \tau_0)z_0$. Se $\{\tau_n\}$ não tem subsequência limitada, (B.2) é uma consequência imediata da compacidade assintótica em $\eta = 0$ dos semigrupos.

Assim, (B.1) implica que $\{S_0(t)z : t \in [T, \infty)\} \cap \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\mathcal{Y}_0) = \emptyset$, que contradiz a hipótese de que $\mathcal{Y}_0$ atrai pontos sob a ação de $S_0(\cdot)$. $\square$

O lema abaixo deixa claro porque da importância de assumirmos que o semigrupo limite não possui estrutura homoclínica.

Lema B.1.4. Suponham válidas as hipóteses do Lema B.1.3. Suponha também que a família de semigrupos $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ é eventualmente contínua com relação ao tempo e que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \max_{1 \leq j \leq k} \text{dist}_H(\Xi_{\eta,j}^*, \Xi_{0,j}^*) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Suponha finalmente que $S_0(\cdot)$ não possui estrutura homoclínica e seja $T \geq 0$ como na Definição 1.4.1.

Com estas hipóteses, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que a propriedade (p_j) (abaixo) é satisfeita para todo $j = 1, \dots, k$:

$$(p_j) \text{ se } \eta \in [0, \eta_0], x \in \mathcal{O}_\delta(\Xi_{j,\eta}) \cap \gamma_\eta^+(S_\eta(2T) \bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta) \text{ e se } S_\eta(t_1)x \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{j,\eta}^*)$$

para algum $t_1 > 0$, então $S_\eta(t)x \notin \mathcal{O}_\delta(\Xi_{j,\eta}^*)$ para todo $t \geq t_1$.

Demonstração. Suponha o resultado falso. Então, existem $\varepsilon > 0$ e sequências $\delta_n \rightarrow 0$, $\eta_n \in [0, \frac{1}{n}]$, $v_n \in \mathcal{O}_{\delta_n}(\Xi_{j,\eta_n}^*) \cap \gamma_{\eta_n}^+(S_{\eta_n}(2T) \bigcup_{\eta \in [0, \frac{1}{n}]} B_\eta)$, $\{t_n\} \subset (0, \infty)$, $\{\tau_n\} \subset (0, \infty)$ satisfazendo $\tau_n < t_n$ e também $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\text{dist}_H(S_{\eta_n}(\tau_n)\{v_n\}, \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{j,\eta_n}^*)).$$

Note que, por hipótese, sem perda de generalidade, temos que

$$v_n \rightarrow y^* \in \Xi_{0,j}^*, S_{\eta_n}(t_n)v_n \rightarrow z^* \in \Xi_{0,j}^* \text{ e } \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathcal{Y}_{0,j}^*) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\eta_n,j}).$$

Defina a seguinte sequência de tempos s_n , tais que

$$\{S_{\eta_n}(t)v_n : t \in [0, s_n]\} \subset \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Xi_{0,j}^*) \text{ e } \text{dist}_H(S_{\eta_n}(s_n)\{v_n\}, \Xi_{0,j}^*) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Note que, para certa subsequência (que denotaremos de forma igual) temos que $s_n \rightarrow \infty$. Caso contrário, supondo sem perda de generalidade que $s_n \rightarrow s_0$, então deveríamos ter

$$S_{\eta_n}(s_n)v_n \rightarrow S_0(s_0)y^* \in \Xi_{0,j}^*, \quad (\text{B.4})$$

que provamos ser uma contradição. De fato, existem sequências $\{T_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\eta_{k_n} < \frac{1}{n}$ e $y_{k_n} \in B_{\eta_{k_n}}$ tais que $v_n = S_{\eta_n}(T)S_{\eta_n}(T + T_n)y_{k_n}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que existe um $\bar{T} \in \mathbb{R}^+$ tal que $T_n \rightarrow \bar{T}$. Usando que $\{B_\eta\}_{\eta \in I}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ e que $\{S_\eta(\cdot)\}_{\eta \in I}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ (caso $\bar{T} = \infty$) ou eventualmente convergente em $\eta = 0$ (caso $\bar{T} < \infty$), tomando subsequências se necessário, temos que $S_{\eta_n}(T + T_n)y_{k_n} \rightarrow w$. Consequentemente,

$$y^* \leftarrow v_n = S_{\eta_n}(T)S_{\eta_n}(T + T_n)y_{k_n} \rightarrow S_0(T)w.$$

Disso, concluímos que

$$S_{\eta_n}(s_n)v_n = S_{\eta_n}(T + s_n)S_{\eta_n}(T + T_n)y_{k_n} \rightarrow S_0(T + s_0)w = S_0(s_0)y^*.$$

A seguir provaremos que existe uma estrutura homoclínica para o semigrupo $S_0(\cdot)$ relacionada à Ξ_0^* .

Seja $\phi_n : [-s_n, \infty)$ definida por $\phi_n(t) = S_{\eta_n}(t + s_n)v_n$, $t \geq -s_n$ e $s_n \geq T$. Note que $\phi_n(t) = S_{\eta_n}(t + T)S_{\eta_n}(s_n - T)v_n$ e que, por hipótese, $\{S_{\eta_n}(s_n - T)v_n\}$ é pre-compacta. Tomando subsequência se necessário, podemos definir $\phi(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)$ para $t \in [0, \infty)$.

Para estender ϕ para intervalos maiores e definir $\phi : [-1, \infty) \rightarrow X$ tomemos uma subsequência $\{\phi_{n_{k(1)}}\}$ de $\{\phi_n\}$ tal que $s_{n_{k(1)}} \geq 1 + T$ e $S_{\eta_{n_{k(1)}}}(s_{n_{k(1)}} - 1 - T)v_{n_{k(1)}}$ é convergente. Então, a sequência de aplicações

$$\phi_{n_{k(1)}}(t) = S_{n_{k(1)}}(t + 1 + T)S_{n_{k(1)}}(s_{n_{k(1)}} - 1 - T)v_{n_{k(1)}}.$$

é uma subsequência de $\{\phi_n(t)\}$ que é convergente para cada $-1 \leq t < \infty$ e o limite coincide com ϕ sobre $[0, \infty)$, o que permite definir ϕ para $t \in [-1, \infty)$ como limite de $\phi_{n_{k(1)}}$.

É simples ver que continuando este processo, obteremos uma solução $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ como limite da sequência de tipo 'diagonal' $\{\phi_{n_{k(n)}}(t)\}$ e que ϕ tem a propriedade de que $\text{dist}_H(\phi(t), \Xi_{0,j}^*) \leq \varepsilon$ para todo $t \leq 0$.

Relembramos que, por construção, ϕ é contínua e é uma solução global limitada de $S_0(\cdot)$.

Segue das hipóteses sobre $S_0(\cdot)$ que existe $\Xi_{0,l}^* \in \Xi_0^*$ tal que $\phi(t) \rightarrow \Xi_{0,l}^*$ quando $t \rightarrow \infty$. Consequentemente, se $l = j$, então a prova está completa.

Se $l \neq j$, então podemos continuar nossa construção. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_\theta(\Xi_{0,j}^*) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{0,j}^*)$ pequena o suficiente para que $\phi(t)$ não encontre esta para $t \geq 0$. Isto pode ser justificado usando que $\phi(t) \rightarrow \Xi_{0,l}^*$, que $\Xi_{0,j}^*$ é um compacto invariante e que $\phi(t)$ é uma solução global limitada de $S_0(\cdot)$.

Por hipótese temos $\phi(t_m) \rightarrow \Xi_{0,l}^*$ e, recordando a construção de ϕ , sabemos que para cada $m \geq m_0$, o ponto $\phi(t_m)$ pode ser aproximado por uma subsequência apropriada $\{S_{\eta_{n'_m}}(t + s_{n'_m})v_{n'_m}\}$ de $\{S_{\eta_n}(t + s_n)v_n\}$ no tempo t_m com $\eta_{n'_m} \rightarrow 0$. Portanto, existe uma sequência de pontos da forma $z_{n'_m} := S_{\eta_{n'_m}}(t_m + s_{n'_m})v_{n'_m} \in \mathcal{Y}_{\eta_{n'_m}}^+(S_{\eta_{n'_m}}(T)(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta))$ convergente para $\Xi_{0,l}^*$ e tais que $\eta_{n'_m} \rightarrow 0$. Também, fixando $m \in \mathbb{N}$ e denotando $G_m = \{S_{\eta_{n'_m}}(t + s_{n'_m})v_{n'_m} : t \in [0, t_m]\}$ nós observamos que $G_m \cap \mathcal{O}_{\frac{\theta}{2}}(\Xi_{0,j}^*) = \emptyset$. Isto acontece porque $S_{\eta_{n'_m}}(t + s_{n'_m})v_{n'_m}$ aproxima a solução global $\phi(t)$ no intervalo $[0, t_m]$ e $\phi(t)$ é separado de $\mathcal{O}_{\frac{\theta}{2}}(\Xi_{0,j}^*)$ para todo $t \geq 0$. Consequentemente a sequência de pontos $z_{n'_m}$ tem a propriedade de que as orbitas $S_{\eta_{n'_m}}(t)z_{n'_m}$ necessariamente visita a 'vizinhança inicial' $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{0,l}^*)$ no tempo, respectivamente, maior do que t_m .

O que foi dito acima também indica que o procedimento descrito anteriormente para definir a solução global ϕ indo de $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{0,j}^*)$ para $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{0,l}^*)$ pode ser repetida novamente para então construirmos uma nova solução global, saindo agora de $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{0,l}^*)$ para $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{0,i}^*)$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$.

Continuando, em não mais do que k passos, nós vamos 'construir um loop', que seria uma contradição do fato de $S_0(\cdot)$ não possuir uma estrutura homoclínica e isto completa a prova. $\square$

Lema B.1.5. Sob as hipóteses do Teorema 1.4.13, existem $\eta_0 > 0$ e $\tau_0 \geq 0$ tais que para cada $(\eta, v) \in [0, \eta_0] \times S_\eta(\tau_0)(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta)$ e uma aplicação

$$\tilde{u}_\eta : [0, \infty) \rightarrow A_\eta,$$

tal que

$$\text{dist}_H(S_\eta(t)\{v\}, A_\eta) \leq \|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| \leq \tilde{c}e^{-\tilde{\gamma}t} \text{ para cada } t \geq 0. \quad (\text{B.5})$$

Aqui, $\tau_0 = 2T + t_0 + \tau$, onde t_0 é como no Lema B.1.2, T é como na Definição 1.4.1 e τ é como na Definição 1.4.4. A constante $\tilde{\gamma}$ depende somente de γ e L , enquanto que a constante $\tilde{c}$ depende de $c, \gamma, L, T_0, T, t_0$ e de $\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta$, onde c, γ, L são como em (1.7) e (1.8) e T_0 é como no Lema

B.1.1. Além disso, $\tilde{c}, \tilde{\gamma}$ são independentes de $(\eta, v) \in [0, \eta_0] \times S_\eta(\tau_0)(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta)$.

Demonstração. Escolha $\varepsilon > 0$ e $\eta_\varepsilon > 0$ suficientemente pequenos tais que, dado $\eta \in [0, \eta_\varepsilon]$, então todas as k vizinhanças $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\eta, j}^*)$ são disjuntas duas a duas e o Lema B.1.1 se aplica; isto é, $\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta$ é limitado. Escolha $\delta > 0$ e $\eta_0 \in (0, \eta_\varepsilon]$ para o ε acima de acordo com o Lema B.1.4; isto é, tal que as propriedades (p_j) , $j = 1, \dots, k$ deste último teorema sejam satisfeitas.

Devido ao Lema B.1.2, existe $t_0 \geq 0$ tal que, fazendo η_0 menor se necessário, a união $\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} \gamma_\eta^+(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta)$ é limitado.

De acordo com a propriedade Lipschitz (1.7), existe certo $\eta_0 > 0$ que, sem perda de generalidade podemos denotar o mesmo, e que existem constantes $\tau, c, L > 0$ tais que para cada $\eta \in [0, \eta_0]$ e todo $(x, y) \in \gamma_\eta^+(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta) \times B_\eta$, temos

$$\|S_\eta(t)x - S_\eta(t)y\| \leq ce^{Lt}\|x - y\|, t \geq 0.$$

Recordemos que, pelo Lema B.1.3, existe $T_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ (que novamente podemos supor igual ao anterior) tal que, para $\eta \in [0, \eta_0]$ e $w \in \gamma_\eta^+(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta)$, temos

$$S_\eta(t)w \in \mathcal{O}_\delta(\mathcal{B}_\eta) = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{O}_\delta(\Xi_{\eta, j}^*) \text{ para algum } t \leq T_0,$$

onde T é como na Definição 1.4.1.

Assim, dado qualquer $(\eta, v) \in [0, \eta_0] \times S_\eta(2T + t_0 + \tau)(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta)$, existem sequências $\{t_{i(j)}^-\}_{j=0}^m$, $\{t_{i(j)}^+\}_{j=0}^m$ e $\{\Xi_{\eta^{i(j)}}^*\}_{j=0}^m$ tais que para $i(j) \in \{1, \dots, k\}$, $1 \leq j \leq m \leq k$,

$$t_{i(1)}^- \leq T_0, 0 < t_{i(j)}^+ - t_{i(j)}^- \leq T_0, 1 \leq j \leq m, t_{i(m)}^+ = \infty,$$

onde $t_{i(j)}^-$ é o tempo que $S_\eta(t)v$ entra em $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\eta^{i(j)}}^*)$ e $t_{i(j)}^+$ é (para $j < m$) o tempo que $S_\eta(t)v$ deixa $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\eta^{i(j)}}^*)$ cruzando sua fronteira e não retornando à $\mathcal{O}_\delta(\Xi_{\eta^{i(j)}}^*)$.

Em particular,

$$S_\eta(t)v \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\eta^{i(j)}}^*) \text{ para todo } t \in [t_{i(1)}^-, t_{i(1)}^+] \text{ e } j = 1, \dots, m.$$

Por simplicidade vamos assumir que $i(j) = j$; isto é, reenumeramos os invariantes cujas vizinhanças são visitadas pela órbita considerada como $\Xi_1^*, \dots, \Xi_m^*$ onde $m \leq k$ é o número de elementos da família $\Xi_\eta^* = \{\Xi_{\eta,1}^*, \dots, \Xi_{k,\eta}^*\}$ cujas vizinhanças são visitadas.

É verdade que esta enumeração, o número n e os tempos de 'entrada e saída' $t_l^\pm$, até este ponto, dependem de (η, v) ; entretanto, para simplificar a notação, não vamos exibir esta dependência.

Agora considere $(\eta, v) \in [0, \eta_0] \times S_\eta(2T + t_0 + \tau) \left(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta \right)$ e fixe um ponto arbitrário $y_{\eta,1} \in A_\eta$. Usando a compacidade de $\overline{W_{\text{loc}}^u(\Xi_{\eta,1}^*)}$, definimos a seguinte função

$$\psi_{\eta,1,t_1^-,t_1^+} : [t_1^-, t_1^+] \rightarrow \overline{W_{\text{loc}}^u(\Xi_{\eta,1}^*)} \subset A_\eta$$

satisfazendo

$$\|S_\eta(t)v - \psi_{\eta,1,t_1^-,t_1^+}(t)\| = \text{dist}(S_\eta(t)v, W_{\text{loc}}^u(\Xi_{\eta,1}^*))$$

e defina

$$\tilde{u}_\eta(t) := \begin{cases} y_{\eta,1}, & t \in [0, t_1^-), \\ \psi_{\eta,1,t_1^-,t_1^+}(t), & t \in [t_1^-, t_1^+]. \end{cases}$$

Por hipótese temos

$$\begin{aligned} \|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| &\leq ce^{LT_0} \text{dist}_H(A_\eta, \{v\}) e^{\gamma T_0} e^{-\gamma t} \\ &\leq ce^{LT_0} \sup_{\eta \in [0, \eta_0]} \sup_{v \in S_\eta(2T+t_0+\tau) \left(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta \right)} \text{dist}_H(A_\eta, \{v\}) e^{\gamma T_0} e^{-\gamma t} \\ &=: \tilde{c}_1 e^{-\gamma t}, \quad t \in [0, t_1^-), \text{ ou} \\ &\leq ce^{-\gamma(t-t_1^-)} \leq ce^{\gamma T_0} e^{-\gamma t} =: \hat{c}_1 e^{-\gamma t}, \quad t \in [t_1^-, t_1^+]. \end{aligned}$$

e seguimos denotando

$$c_1 := \max\{\tilde{c}_1, \hat{c}_1\}, \quad t_0^+ := 0, \quad t_0^1 := t_1^+, \quad \gamma_1 = \gamma. \quad (\text{B.6})$$

Agora vamos definir $\tilde{u}_\eta$ sobre $[0, \infty)$ passo a passo da seguinte forma:

$$\gamma_j = \frac{\gamma_{j-1}^2}{L + 2\gamma_{j-1}}, \quad t_j^0 = \min\left\{\frac{L + 2\gamma_{j-1}}{L + \gamma_{j-1}} t_j^-, t_j^+\right\}, \quad j = 2, \dots, m. \quad (\text{B.7})$$

e estendemos $\tilde{u}_\eta$ para $\mathbb{R}^+$ da seguinte forma:

$$\tilde{u}_\eta(t) := \begin{cases} S_\eta(t - t_{j-1}^+) \tilde{u}_\eta(t_{j-1}^+), & t \in [t_{j-1}^+, t_j^-), \\ S_\eta(t - t_j^-) S_\eta(t_j^- - t_{j-1}^+) \tilde{u}_\eta(t_{j-1}^+), & t \in [t_j^-, t_j^0], \\ \psi_{\eta,j,t_j^-,t_j^+}(t), & t \in [t_j^0, t_j^+], \end{cases}$$

com a aplicação $\psi_{\eta,j,t_j^-,t_j^+} : [t_j^-,t_j^+] \rightarrow \overline{W_{\text{loc}}^u(\Xi_{\eta,j}^*)} \subset A_\eta$ satisfazendo

$$\|S_\eta(t)v - \psi_{\eta,j,t_j^-,t_j^+}(t)\| = \text{dist}(S_\eta(t)v, W_{\text{loc}}^u(\Xi_{\eta,j}^*)).$$

Como em [(CARVALHO; CHOLEWA, 2011), Lemma 2.1] mostramos que, para cada $j = 2, \dots, m$, a seguinte implicação vale:

se (i) $\|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| \leq c_{j-1}e^{-\gamma_{j-1}t}$, $t \in [t_{j-2}^+, t_{j-1}^-]$ com algum $c_{j-1} > 0$, então (ii) $\|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| \leq c_j e^{-\gamma_j t}$, $t \in [t_{j-1}^+, t_j^-]$ com algum $c_j > 0$,

onde para $j = m$, temos $[t_{m-1}^+, t_m^+] := [t_{m-1}^+, \infty)$. Embora esta parte seja análoga a prova de referência em [(CARVALHO; CHOLEWA, 2011), Lema 2.1], incluímos abaixo para completude desta prova.

Usando (i) primeiramente notamos que, para $t \in [t_{j-1}^+, t_j^-]$,

$$\begin{aligned} \|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| &\leq ce^{L(t-t_{j-1}^+)} \|S_\eta(t_{j-1}^+)v - \tilde{u}_\eta(t_{j-1}^+)\| \\ &\leq cc_{j-1}e^{L(t-t_{j-1}^+)-\gamma_{j-1}t_{j-1}^+}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Por outro lado, por construção, se t_j^0 é considerado como uma variável do intervalo $(t_j^-, t_j^+]$ então por hipótese e por (B.8), temos

$$\begin{aligned} \|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| &\leq ce^{L(t-t_j^-)} \|S_\eta(t_j^-)v - S_\eta(t_j^- - t_j^+) \tilde{u}_\eta(t_{j-1}^+)\| \\ &\leq cc_{j-1}e^{LT_0} e^{L(t-t_j^-)-\gamma_{j-1}t_{j-1}^+} \leq cc_{j-1}e^{(L+\gamma)T_0} e^{L(t-t_j^-)-\gamma_{j-1}t_{j-1}^+}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

para todo $t \in [t_j^-, t_j^0]$ e

$$\|S_\eta(t)v - \psi_{\eta,j,t_j^-,t_j^+}(t)\| \leq ce^{-\gamma(t-t_j^-)} \leq ce^{-\gamma_{j-1}(t-t_j^-)}, \forall t \in [t_j^-, t_j^+]. \quad (\text{B.10})$$

Evidentemente, quando o tempo t_j^0 está dentro do intervalo (t_j^-, t_j^+) , ele é tal que os expoentes do lado direito de (B.9) e (B.10) se tornam iguais; de fato,

$$[L(t-t_j^-) - \gamma_{j-1}t_j^-]_{t=t_j^0} = [-\gamma_{j-1}(t-t_j^-)]_{t=t_j^0}.$$

Figura: Determinação de t_j^0 e γ_j .

A partir do que foi dito acima pode-se inferir que

$$L(t - t_j^-) - \gamma_{j-1} t_j^- \leq -\gamma_j t, \quad t \in [t_j^-, t_j^0], \quad (\text{B.11})$$

$$-\gamma_{j-1}(t - t_j^-) \leq -\gamma_j t, \quad t \in (t_j^0, t_j^+], \quad (\text{B.12})$$

para obter de (B.9) e (B.11) que

$$\|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| \leq cc_{j-1}e^{(L+\gamma)T_0}e^{-\gamma_j t} \forall t \in [t_j^-, t_j^0],$$

e de (B.10) e (B.12)

$$\|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| \leq cc_{j-1}e^{(L+\gamma)T_0}e^{-\gamma_j t} \forall t \in (t_j^0, t_j^+].$$

Assim, (B.8) se estende para a seguinte estimativa

$$\|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| \leq cc_{j-1}e^{(L+\gamma)T_0}e^{-\gamma_j t}, \quad (\text{B.13})$$

e então, a condição (ii) segue com

$$c_j = \max\{c, cc_{j-1}e^{(L+\gamma)T_0}\}. \quad (\text{B.14})$$

Do que tínhamos dito antes, para cada $(\eta, v) \in [0, \eta_0] \times S_\eta(2T + t_0 + \tau)(\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta)$, obtemos

$$\text{dist}_H(S_\eta(t)\{v\}, A_\eta) \leq \|S_\eta(t)v - \tilde{u}_\eta(t)\| \leq c_m e^{-\gamma_m t}, \quad t \geq 0.$$

com c_m dependendo somente de c, γ, T_0, T, t_0 e $\bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} B_\eta$ e a prova está completa. $\square$

B.2 Prova da Proposição 1.4.15

Recordemos que estamos interessados em mostrar que existe uma função limitada e Lipschitz contínua $\Sigma^* : Z^+ \rightarrow Z^-$ tal que

$$W^u(0,0) = \{(z^+, z^-) : z^- = \Sigma^*(z^+), z^+ \in Z^+\}.$$

De fato, estamos procurando uma função Σ^* tal que, se $\tau \in \mathbb{R}$ e $(\xi, \Sigma^*(\xi)) \in Z^+ \times Z^-$, então a solução de (1.14) começando em $z^+(\tau) = \xi$, $z^-(\tau) = \Sigma^*(\xi)$ permanece no gráfico de Σ^* para todo tempo positivo e negativo. Isto significa que $z^-(t) = \Sigma^*(z^+(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e assim, (1.14) se torna

$$\begin{aligned} \dot{z}^+ &= A^+ z^+ + H(z^+, \Sigma^*(z^+)), \\ \dot{z}^- &= A^- z^- + G(z^+, \Sigma^*(z^+)). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Também, as soluções $(z^+(t), z^-(t))$ devem tender a zero quando $t \rightarrow -\infty$; em particular, ela deve ser limitada quando $t \rightarrow -\infty$. Como

$$z^-(t) = e^{A^-(t-t_0)} z^-(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A^-(t-s)} G(z^+(s), \Sigma^*(z^+(s))) ds,$$

obtemos, fazendo $t_0 \rightarrow -\infty$,

$$z^-(t) = \Sigma^*(z^+(t)) = \int_{-\infty}^t e^{A^-(t-s)} G(z^+(s), \Sigma^*(z^+(s))) ds,$$

e, em particular,

$$\Sigma^*(\xi) = \Sigma^*(z^+(\tau)) = z^-(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{A^-(\tau-s)} G(z^+(s), \Sigma^*(z^+(s))) ds$$

Para $\tau \in \mathbb{R}$ e $\xi \in Z^+$ arbitrário, $\Sigma \in \mathcal{LB}(D, L)$, denote por $z^+(t) = \psi(t, \tau, \xi, \Sigma)$ a solução de

$$\frac{dz^+}{dt} = A^+ z^+ + H(z^+, \Sigma^*(z^+)), \quad t < \tau, \quad z^+(\tau) = \xi. \quad (\text{B.16})$$

Defina também

$$\Phi(\Sigma)(\xi) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{A^-(\tau-s)} G(z^+(s), \Sigma^*(z^+(s))) ds, \quad \xi \in Z^+, \Sigma \in \mathcal{LB}(D, L). \quad (\text{B.17})$$

A seguir mostraremos que, para $\rho > 0$ satisfazendo (1.13), a aplicação Ψ leva $\mathcal{LB}(D, L)$ em si mesmo, é uma contração e portanto tem um único ponto fixo em $\mathcal{LB}(D, L)$.

Primeiro note que, de (1.11), temos

$$\|\Psi(\Sigma)(\cdot)\|_{\mathcal{L}} \leq \int_{-\infty}^{\tau} \rho M e^{-\omega(\tau-s)} ds = \frac{\rho M}{\omega}, \quad (\text{B.18})$$

e então, obtemos $\|\Psi(\Sigma)(\cdot)\|_{\mathcal{L}} \leq D$ por (1.13).

A seguir, suponha que Σ e $\tilde{\Sigma}$ são funções satisfazendo (1.12), $\xi, \tilde{\xi} \in Z^+$ e denote $z^+(t) = \psi(t, \tau, \xi, \Sigma)$, $\tilde{z}^+(t) = \psi(t, \tau, \tilde{\xi}, \tilde{\Sigma})$. Então,

$$z^+(t) - \tilde{z}^+(t) = e^{A^+(t-\tau)}(\xi - \tilde{\xi}) + \int_{\tau}^t e^{A^+(t-s)} [H(z^+(s), \Sigma(z^+(s))) - H(\tilde{z}^+(s), \tilde{\Sigma}(\tilde{z}^+(s)))] ds$$

e com (1.11) e (1.15), obtemos

$$\begin{aligned} \|z^+(t) - \tilde{z}^+(t)\|_{\mathcal{X}} &\leq M e^{\omega(t-\tau)} \|\xi - \tilde{\xi}\|_{\mathcal{X}} + \rho M \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\| \int_t^\tau e^{\omega(t-s)} ds \\ &\quad + \rho M (1+L) \int_t^\tau e^{\omega(t-s)} \|z^+(s) - \tilde{z}^+(s)\|_{\mathcal{X}} ds. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Se $\phi(t) = e^{-\omega(t-\tau)} \|z^+(t) - \tilde{z}^+(t)\|_{\mathcal{X}}$, então

$$\phi(t) \leq M \|\xi - \tilde{\xi}\|_{\mathcal{X}} + \rho M \int_t^\tau e^{\omega(\tau-s)} ds \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\| + \rho M (1+L) \int_t^\tau \phi(s) ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall (Lema 1.4.14)

$$\begin{aligned} \|z^+(t) - \tilde{z}^+(t)\|_{\mathcal{X}} &\leq [M \|\xi - \tilde{\xi}\|_{\mathcal{X}} e^{\omega(t-\tau)} + \rho M \int_t^\tau e^{\omega(t-s)} ds \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|] e^{-\rho M (1+L)(t-\tau)} \\ &\leq [M \|\xi - \tilde{\xi}\|_{\mathcal{X}} + \rho M \omega^{-1} \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|] e^{-\rho M (1+L)(t-\tau)}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\Psi(\Sigma)(\xi) - \Psi(\tilde{\Sigma})(\tilde{\xi})\| &\leq M \int_{-\infty}^\tau e^{-\omega(\tau-s)} \|G(z^+(s), \Sigma(z^+(s))) - G(\tilde{z}^+(s), \tilde{\Sigma}(\tilde{z}^+(s)))\| \\ &\leq \rho M \int_{-\infty}^\tau e^{-\omega(\tau-s)} [(1+L) \|z^+(s) - \tilde{z}^+(s)\|_{\mathcal{X}} + \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|] ds. \end{aligned}$$

Usando a estimativa de $\|z^+(t) - \tilde{z}^+(t)\|_{\mathcal{X}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Psi(\Sigma)(\xi) - \Psi(\tilde{\Sigma})(\tilde{\xi})\| &\leq \frac{\rho M}{\omega} \left[1 + \frac{\rho M (1+L)}{\omega - \rho M (1+L)} \right] \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\| \\ &\quad + \frac{\rho M^2 (1+L)}{\omega - \rho M (1+L)} \|\xi - \tilde{\xi}\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Seja

$$I_\Sigma = \frac{\rho M}{\omega} \left[1 + \frac{\rho M (1+L)}{\omega - \rho M (1+L)} \right] \quad \text{e} \quad I_\xi = \frac{\rho M^2 (1+L)}{\omega - \rho M (1+L)}.$$

Como $I_\Sigma \leq \frac{\rho M}{\omega} (1+L)$, segue de (1.13) que $I_\Sigma \leq \vartheta$, $I_\xi \leq L$ e

$$\|\Phi(\Sigma)(\xi) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tilde{\xi})\|_Z \leq L \|\xi - \tilde{\xi}\|_{\mathcal{X}} + \vartheta \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|. \quad (\text{B.22})$$

As desigualdades (B.18) e (B.22) com $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ implicam que Ψ leva $\mathcal{LB}(D, L)$ em $\mathcal{LB}(D, L)$. De (1.13), a estimativa (B.22) com $\xi = \tilde{\xi}$ mostra que Ψ é uma contração. Portanto, existe um único ponto fixo $\Sigma^* = \Psi(\Sigma^*)$ em $\mathcal{LB}(D, L)$.

A seguir provaremos que, se $(z^+(t), z^-(t))$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução global de (1.14), então existem $M \geq 1$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\|z^-(t) - \Sigma^*(z^+(t))\|_{\mathcal{X}} \leq M e^{-\gamma(t-t_0)} \|z^-(t_0) - \Sigma^*(z^+(t_0))\|_{\mathcal{X}}, \quad t_0 \leq t. \quad (\text{B.23})$$

Assim, se $(z^+(t), z^-(t))$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução global de (1.14) que é limitada para $t \rightarrow -\infty$, então fazendo $t_0 \rightarrow -\infty$ em (B.23), obtemos que $z^-(t) = \Sigma^*(z^+(t))$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Também vamos garantir que $\Sigma^*(0) = 0$ pois $(0, 0)$ é um equilíbrio de (1.14).

Seja $\xi(t) = z^-(t) - \Sigma^*(z^+(t))$ e $y^+(s, t)$, $s \leq t$, a solução de

$$\dot{y}^+ = A^+ y^+ + H(y^+, \Sigma^*(y^+)), s \leq t, y^+(t, t) = z^+(t).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|y^+(s, t) - z^+(s)\|_{\mathcal{X}} &= \left\| \int_t^s e^{A^+(s-\theta)} [H(y^+(\theta, t), \Sigma^*(y^+(\theta, t))) - H(z^+(\theta), z^-(\theta))] d\theta \right\| \\ &\leq \rho M \int_s^t e^{\omega(s-\theta)} [(1+L)\|y^+(\theta, t) - z^+(\theta)\|_{\mathcal{X}} + \|\xi(\theta)\|] d\theta. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|y^+(s, t) - z^+(s)\|_{\mathcal{X}} \leq \rho M \int_s^t e^{-(\omega - \rho M(1+L)(\theta-s))} \|\xi(\theta)\|_{\mathcal{X}} ds, s \leq t. \quad (\text{B.24})$$

Considere $s \leq t_0 \leq t$. Então,

$$\begin{aligned} \|y^+(s, t) - y^+(s, t_0)\|_{\mathcal{X}} &\leq \|e^{A^+(s-t_0)}[y^+(t_0, t) - z^+(t_0)]\|_{\mathcal{X}} \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^s e^{A^+(s-\theta)} [H(y^+(\theta, t), \Sigma^*(y^+(\theta, t))) - H(y^+(\theta, t_0), \Sigma^*(y^+(\theta, t_0)))] d\theta \right\| \\ &\leq \rho M^2 e^{\omega(s-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(\omega - \rho M(1+L)(\theta-t_0))} \|\xi(\theta)\|_{\mathcal{X}} d\theta \\ &\quad + \rho M \int_s^{t_0} e^{\omega(s-\theta)} (1+L) \|y^+(\theta, t) - y^+(\theta, t_0)\|_{\mathcal{X}} d\theta \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|y^+(s, t) - y^+(s, t_0)\|_{\mathcal{X}} \leq \rho M^2 \int_{t_0}^t e^{-(\omega - \rho M(1+L)(\theta-t_0))} \|\xi(\theta)\|_{\mathcal{X}} d\theta. \quad (\text{B.25})$$

A seguir vamos estimar $\xi(t)$. Note que

$$\begin{aligned} \xi(t) &- e^{A^-(t-t_0)} \xi(t_0) \\ &= \int_{t_0}^t e^{A^-(t-s)} [G(z^+(s), z^-(s)) - G(y^+(s, t), \Sigma^*(y^+(s, t)))] ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^{t_0} [G(y^+(s, t), \Sigma^*(y^+(s, t))) - G(y^+(s, t_0), \Sigma^*(y^+(s, t_0)))] ds. \end{aligned}$$

Assim, usando (B.24) e (B.25), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - e^{A^-(t-t_0)} \xi(t_0)\|_{\mathcal{X}} &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\omega(t-s)} \|\xi(s)\|_{\mathcal{X}} ds \\ &\quad + \rho^2 M^2 (1+L) \int_{t_0}^t e^{-\omega(t-s)} \int_s^t e^{-(\omega - \rho M(1+L)(\theta-s))} \|\xi(\theta)\|_{\mathcal{X}} d\theta ds \\ &\quad + \rho^2 M^3 (1+L) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\omega(t-s)} \int_{t_0}^t e^{-(\omega - \rho M(1+L)(\theta-s))} \|\xi(\theta)\|_{\mathcal{X}} d\theta ds, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - e^{A^-(t-t_0)}\xi(t_0)\| &\leq \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2 (1+L)}{2\omega - \rho M(1+L)} \right] \int_{t_0}^t e^{-\omega(t-s)} \|\xi(s)\|_{\mathcal{X}} ds \\ &+ \frac{\rho^2 M^3 (1+L)}{2\omega - \rho M(1+L)} e^{-\omega(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(\omega - \rho M(1+L))(\theta-s)} \|\xi(\theta)\|_{\mathcal{X}} d\theta ds \end{aligned}$$

e portanto

$$e^{\omega(t-t_0)} \|\xi(t)\|_{\mathcal{X}} \leq M \|\xi(t_0)\|_{\mathcal{X}} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2 (1+L)(1+M)}{2\omega - \rho M(1+L)} \right] \int_{t_0}^t e^{\omega(s-t_0)} \|\xi(s)\|_{\mathcal{X}} ds.$$

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|\xi(t)\|_{\mathcal{X}} \leq M \|\xi(t_0)\|_{\mathcal{X}} e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad (\text{B.26})$$

onde

$$\gamma := \omega - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2 (1+L)(1+M)}{2\omega - \rho M(1+L)} \right].$$

Isto prova (B.23) e consequentemente $W^u(0,0) \subset \{w \in Z^+ \times Z^- : w = (\mathcal{Q}w, \Sigma^*(\mathcal{Q}w))\}$.

Provaremos agora a inclusão contrária. Considere $z_0^+ \in Z^+$ e a solução $z_*^+(\cdot)$ do problema de valor inicial

$$\dot{z}^+ = A^+ z^+ + H(z^+, \Sigma^*(z^+)), \quad z^+(\tau) = z_0^+.$$

Isto define uma curva $(z_*^+(t), \Sigma^*(z_*^+(t))), t \in \mathbb{R}$. Recordando (B.17), podemos verificar que

$$\Sigma^*(z_*^+(t)) = \int_{-\infty}^t e^{A^-(t-s)} G(z_*^+(s), \Sigma^*(z_*^+(s))) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim, $\Sigma^*(z_*^+(\cdot))$ resolve

$$\dot{z}^- = A^- z^- + G(z_*(t), \Sigma^*(z_*(t))), \quad t \in \mathbb{R}$$

e concluímos que $(z_*^+(t), \Sigma^*(z_*^+(t))), t \in \mathbb{R}$, é solução de (1.14) passando por $(z_0^+, \Sigma^*(z_0^+))$ com $\Sigma^*(z_*^+(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ (pela fórmula da variação das constantes). Como $\Sigma^*(0) = 0$, usando a fórmula da variação das constantes, obtemos $\|z_*^+(t)\|_{\mathcal{X}} \leq M \|z_0^+\|_{\mathcal{X}} e^{(\omega - \rho M(1+L))(t-\tau)}$. Como consequência $z_*^+(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ e isto completa a prova da Proposição 1.4.15.

B.3 Prova do Teorema 2.7.2

Esta prova é análoga a prova da Proposição 4.4 de (BRUSCHI *et al.*, 2006). Para efeito de completude, vamos expor os detalhes para o nosso caso. Como já argumentamos logo abaixo do enunciado do Teorema 2.7.2, resta provarmos a convergência das variedades instáveis, o que está representado por (2.40) e (2.41). Como as provas são análogas, exibiremos apenas a prova de (2.40).

Vamos denotar $P_\alpha := I - \mathcal{Q}_\alpha$ e $\tilde{P}_\alpha := I - \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha$ e

$$\begin{aligned}
\Sigma_\alpha^* &:= \Sigma_{\alpha,0}^*; & \tilde{\Sigma}_\alpha^* &:= \Sigma_{\alpha,1}^*; & \mathcal{Q}_\alpha &:= \tilde{\mathcal{Q}}_{\alpha,0}^+; & \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha &:= \tilde{\mathcal{Q}}_{\alpha,1}^+; \\
A_\alpha^- &:= \tilde{A}_{\alpha,0}; & A_\alpha^+ &:= B_{\alpha,0}; & \tilde{A}_\alpha^- &:= \tilde{A}_{\alpha,1}; & \tilde{A}_\alpha^+ &:= B_{\alpha,1}; \\
H_{\alpha,0} &:= H_\alpha; & H_{\alpha,1} &:= \tilde{H}_\alpha; & G_{\alpha,0} &:= G_\alpha; & G_{\alpha,1} &:= \tilde{G}_\alpha; \\
\mathcal{Z}_{\alpha,0}^\pm &:= \mathcal{Z}_\alpha^\pm; & \mathcal{Z}_{\alpha,1}^\pm &:= \tilde{\mathcal{Z}}_\alpha^\pm.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
& \|\Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha(z)) - \tilde{\Sigma}_\alpha^*(\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(z))\|_{\mathcal{X}} \\
& \leq \|\Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha(z)) - \Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(z))\|_{\mathcal{X}} + \|\Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(z)) - \tilde{\Sigma}_\alpha^*(\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(z))\|_{\mathcal{X}} \\
& \leq L\|\mathcal{Q}_\alpha(z) - \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(z)\|_{\mathcal{X}} + \|\Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(z)) - \tilde{\Sigma}_\alpha^*(\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(z))\|_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\sup_{\substack{z \in \mathcal{Z} \\ \|z\|_{\mathcal{X}} \leq r}} \|\mathcal{Q}_\alpha(z) - \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(z)\|_{\mathcal{X}} = O((1-\alpha)^{2-\frac{1}{\alpha}}),$$

resta estimarmos

$$\sup_{\substack{z \in \mathcal{Z}_\alpha^+ \\ \|z\|_{\mathcal{X}} \leq r}} \|\Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha(z)) - \tilde{\Sigma}_\alpha^*(z)\|_{\mathcal{X}}.$$

Se $z \in \mathcal{Z}_\alpha^+$ satisfaz $\|z\|_{\mathcal{X}} \leq r$,

$$\begin{aligned}
& \Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha z) - \tilde{\Sigma}_\alpha^*(z) \\
& = \int_{-\infty}^{\tau} \left[e^{-A_\alpha^-(\tau-s)} G_\alpha(z_\alpha^+(s), \Xi_\alpha^*(z_\alpha^+(s))) - e^{-\tilde{A}_\alpha^-(\tau-s)} \tilde{G}_\alpha(\tilde{z}_\alpha^+(s), \tilde{\Xi}_\alpha^*(\tilde{z}_\alpha^+(s))) \right] \\
& = \int_{-\infty}^{\tau} \left[e^{-A_\alpha^-(\tau-s)} P_\alpha - e^{-\tilde{A}_\alpha^-(\tau-s)} \tilde{P}_\alpha \right] G_\alpha(z_\alpha^+(s), \Xi_\alpha^*(z_\alpha^+(s))) ds \\
& + \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{A}_\alpha^-(\tau-s)} [G_\alpha(z_\alpha^+(s), \Xi_\alpha^*(z_\alpha^+(s))) - \tilde{G}_\alpha(z_\alpha^+(s), \Xi_\alpha^*(z_\alpha^+(s)))] ds \\
& + \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{A}_\alpha^-(\tau-s)} [\tilde{G}_\alpha(z_\alpha^+(s), \Xi_\alpha^*(z_\alpha^+(s))) - \tilde{G}_\alpha(\tilde{z}_\alpha^+(s), \tilde{\Xi}_\alpha^*(\tilde{z}_\alpha^+(s)))] ds \\
& =: I_1(\alpha) + I_2(\alpha) + I_3(\alpha).
\end{aligned}$$

Note que

$$e^{-A_\alpha^-(\tau-s)} P_\alpha - e^{-\tilde{A}_\alpha^-(\tau-s)} \tilde{P}_\alpha = e^{-A_\alpha^-(\tau-s)} (P_\alpha - \tilde{P}_\alpha) + (e^{-A_\alpha^-(\tau-s)} - e^{-\tilde{A}_\alpha^-(\tau-s)}) \tilde{P}_\alpha$$

Como $P_\alpha - \tilde{P}_\alpha = -(\mathcal{Q}_\alpha - \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha)$ e $\|\tilde{P}_\alpha\|_{\mathcal{L}(X, \mathcal{X})}$ é uniformemente limitado para α próximo de 1, segue de (2.35), do Lema 2.4.3 e da versão análoga do Teorema 2.3.8 para $e^{-A_\alpha^-(\tau-s)} - e^{-\tilde{A}_\alpha^-(\tau-s)}$, que, para cada $\theta \in (0, 1)$, temos

$$\|I_1(\alpha)\|_{\mathcal{X}} = O((1-\alpha)^\theta) \text{ quando } \alpha \rightarrow 1^-.$$

De agora em diante, fixaremos $\theta \in (0, 1)$. Vamos estimar $I_2(\alpha)$. Note que

$$\tilde{z}_\alpha^+(t) = e^{-\tilde{A}_\alpha^+(t-\tau)} \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha z + \int_{\tau}^t e^{-\tilde{A}_\alpha^+(t-s)} \tilde{H}_\alpha(\tilde{z}_\alpha^+(s), \tilde{\Sigma}_\alpha^*(\tilde{z}_\alpha^+(s))) ds,$$

e portanto, analogamente ao caso de (B.20) obtemos

$$\|\tilde{z}_\alpha^+(t)\|_{\mathcal{X}} \leq e^{(\omega - \rho M(1+L))(t-\tau)} \|\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha z\|_{\mathcal{X}}. \quad (\text{B.27})$$

Note que A_α é auto adjunto implica que $\mathcal{Q}_\alpha$ é auto adjunto, portanto ortogonal. Logo, $\|\mathcal{Q}_\alpha\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 1$ e

$$\|\tilde{z}_\alpha^+(t)\|_{\mathcal{X}} \leq r.$$

Sabendo que

$$\sup_{x \in \mathcal{X}, \|x\|_{\mathcal{X}} \leq r} \|G_\alpha(x) - \tilde{G}_\alpha(x)\|_X = O((1 - \alpha)^\theta) \text{ quando } \alpha \rightarrow 1^-, \quad (\text{B.28})$$

obtemos $\|I_2(\alpha)\|_{\mathcal{X}} = O((1 - \alpha)^\theta)$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$.

Agora provaremos (B.28). De fato,

$$\begin{aligned} G_\alpha(v, z) - \tilde{G}_\alpha(v, z) &= P_\alpha[f(v + z + u_{\alpha,0}^*) - f(u_{\alpha,0}^*) - f'(u_{\alpha,0}^*)(v + z)] \\ &\quad - P_\alpha[f(v + z + u_{\alpha,1}^*) - f(u_{\alpha,1}^*) - f'(u_{\alpha,1}^*)(v + z)] \\ &\quad + P_\alpha[f(v + z + u_{\alpha,1}^*) - f(u_{\alpha,1}^*) - f'(u_{\alpha,1}^*)(v + z)] \\ &\quad - \tilde{P}_\alpha[f(v + z + u_{\alpha,1}^*) - f(u_{\alpha,1}^*) - f'(u_{\alpha,1}^*)(v + z)] \\ &= (P_\alpha - \tilde{P}_\alpha)[f(v + z + u_{\alpha,1}^*) - f(u_{\alpha,1}^*) - f'(u_{\alpha,1}^*)(v + z)] \\ &\quad + P_\alpha h_\alpha(v + z), \end{aligned}$$

onde

$$h_\alpha(w) = P_\alpha[f(w + u_{\alpha,0}^*) - f(w + u_{\alpha,1}^*) - (f(u_{\alpha,0}^*) - f(u_{\alpha,1}^*)) - (f'(u_{\alpha,0}^*) - f'(u_{\alpha,1}^*))(w)].$$

Assim, usando (2.31), (2.32), Proposição 2.2.1 e que $f : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é de classe C^2 , obtemos (B.28), completando a estimativa de $I_2(\alpha)$.

Usando (B.27), obtemos

$$\|z_\alpha^+(s) - \mathcal{Q}_\alpha(\tilde{z}_\alpha^+(s))\|_{\mathcal{X}} = \|\mathcal{Q}_\alpha(z_\alpha^+(s) - \tilde{z}_\alpha^+(s))\|_{\mathcal{X}} \leq \|z_\alpha^+(s) - \tilde{z}_\alpha^+(s)\|_{\mathcal{X}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|I_3(\alpha)\|_{\mathcal{X}} &\leq \rho M \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega(\tau-s)} (\tau-s)^{-\eta} \|z_\alpha^+(s) - \tilde{z}_\alpha^+(s)\|_{\mathcal{X}} ds \\ &\quad + \rho M \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega(\tau-s)} (\tau-s)^{-\eta} \|\Sigma_\alpha^*(z_\alpha^+(s)) - \Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha \tilde{z}_\alpha^+(s))\|_{\mathcal{X}} ds \\ &\quad + \rho M \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega(\tau-s)} (\tau-s)^{-\eta} \|\Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha \tilde{z}_\alpha^+(s)) - \tilde{\Sigma}_\alpha^*(\tilde{z}_\alpha^+(s))\|_{\mathcal{X}} ds \\ &\leq \rho M(1+L) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega(\tau-s)} (\tau-s)^{-\eta} \|z_\alpha^+(s) - \tilde{z}_\alpha^+(s)\|_{\mathcal{X}} ds \\ &\quad + \rho M \omega^{-(1-\eta)} \Gamma(1-\eta) \|\Sigma_\alpha^* - \tilde{\Sigma}_\alpha^*\|_r, \end{aligned}$$

onde $\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$, $t > 0$ e

$$\|\Sigma_\alpha^* - \tilde{\Sigma}_\alpha^*\|_r := \sup_{\substack{z \in \mathcal{Z}_\alpha^+ \\ \|z\|_{\mathcal{Z}} \leq r}} \|\Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha(z)) - \tilde{\Sigma}_\alpha^*(z)\|_{\mathcal{Z}}. \quad (\text{B.29})$$

Assim, obtemos destas observações que

$$\begin{aligned} \|\Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha z) - \tilde{\Sigma}_\alpha^*(z)\|_{\mathcal{Z}} &\leq O((1-\alpha)^\theta) + \rho M \omega^{-(1-\eta)} \Gamma(1-\eta) \|\Sigma_\alpha^* - \tilde{\Sigma}_\alpha^*\|_r \\ &\quad + \rho M(1+L) \int_{-\infty}^\tau e^{-\omega(\tau-s)} (\tau-s)^{-\eta} \|z_\alpha^+(s) - \tilde{z}_\alpha^+(s)\|_{\mathcal{Z}} ds. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Analogamente a (B.28), temos

$$\sup_{x \in \mathcal{Z}, \|x\|_{\mathcal{Z}} \leq r} \|\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(H_\alpha(x) - \tilde{H}_\alpha(x))\|_X = O((1-\alpha)^\theta) \text{ quando } \alpha \rightarrow 1^-.$$

Por outro lado, segue da 2.2.2 que para α próximo de 1, temos $\dim \mathcal{Z}_\alpha^+ = \dim \mathcal{Z}_1^+ < \infty$ e, usando a Observação 2.2.3, segue que para α próximo de 1, existe $c > 0$ independente de α tal que

$$\|x\|_{\mathcal{Z}} \leq c \|x\|_X, \quad \forall x \in \mathcal{Z}_\alpha^+. \quad (\text{B.31})$$

Logo,

$$\sup_{x \in \mathcal{Z}, \|x\|_{\mathcal{Z}} \leq r} \|\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha(H_\alpha(x) - \tilde{H}_\alpha(x))\|_{\mathcal{Z}} = O((1-\alpha)^\theta) \text{ quando } \alpha \rightarrow 1^-.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $c = 1$ em (B.31). Então,

$$\begin{aligned} \|z_\alpha^+(t) - \tilde{z}_\alpha^+(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \|e^{-A_\alpha^+(t-\tau)} \mathcal{Q}_\alpha z - e^{-\tilde{A}_\alpha^+(t-\tau)} \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha z\|_{\mathcal{Z}} \\ &\quad + \left\| \int_\tau^t [e^{-A_\alpha^+(t-s)} \mathcal{Q}_\alpha - e^{-\tilde{A}_\alpha^+(t-s)} \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha] H_\alpha(z_\alpha^+(s), \Sigma_\alpha^*(z_\alpha^+(s))) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &\quad + \left\| \int_\tau^t e^{-\tilde{A}_\alpha^+(t-s)} \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha [H_\alpha(z_\alpha^+(s), \Sigma_\alpha^*(z_\alpha^+(s))) - \tilde{H}_\alpha(z_\alpha^+(s), \Sigma_\alpha^*(z_\alpha^+(s)))] ds \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &\quad + \left\| \int_\tau^t e^{-\tilde{A}_\alpha^+(t-s)} \tilde{\mathcal{Q}}_\alpha [\tilde{H}_\alpha(z_\alpha^+(s), \Sigma_\alpha^*(z_\alpha^+(s))) - \tilde{H}_\alpha(\tilde{z}_\alpha^+(s), \tilde{\Sigma}_\alpha^*(\tilde{z}_\alpha^+(s)))] ds \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq O((1-\alpha)^\theta) + \frac{\rho M}{\omega} \|\Sigma_\alpha^* - \tilde{\Sigma}_\alpha^*\|_r + \rho M(1+L) \int_t^\tau e^{\omega(t-s)} \|z_\alpha^+(s) - \tilde{z}_\alpha^+(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \end{aligned}$$

Assim, denotando $\phi_\alpha(t) := e^{\omega(\tau-t)} \|z_\alpha^+(t) - \tilde{z}_\alpha^+(t)\|_{\mathcal{Z}}$, $b := \rho M(1+L)$, e

$$a_\alpha := O((1-\alpha)^\theta) + \frac{\rho M}{\omega} \|\Sigma_\alpha^* - \tilde{\Sigma}_\alpha^*\|_r,$$

obtemos

$$\phi_\alpha(t) \leq a_\alpha e^{\omega(\tau-t)} + b \int_t^\tau \phi_\alpha(s) ds$$

e portanto, pela desigualdade de Gronwall,

$$\phi_\alpha(t) \leq a_\alpha e^{\omega(\tau-t)} + \frac{a_\alpha b}{\omega - b} (e^{\omega(\tau-t)} - e^{b(\tau-t)})$$

isto é,

$$\|z_\alpha^+(t) - \tilde{z}_\alpha^+(t)\|_{\mathcal{X}} \leq a_\alpha + \frac{a_\alpha b}{\omega - b}(1 - e^{-(\omega - b)(\tau - t)}) \leq \frac{\omega a_\alpha}{\omega - b}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega(\tau - s)} (\tau - s)^{-\eta} \|z_\alpha^+(s) - \tilde{z}_\alpha^+(s)\|_{\mathcal{X}} ds &\leq \omega^{-(1-\eta)} \Gamma(1 - \eta) \frac{\omega a_\alpha}{\omega - b} \\ &\leq O((1 - \alpha)^\theta) + \frac{\rho M \Gamma(1 - \eta)}{\omega^{1-\eta}(\omega - b)} \|\Sigma_\alpha^* - \tilde{\Sigma}_\alpha^*\|_r. \end{aligned}$$

Assim, voltando à (B.30) obtemos que

$$\|\Sigma_\alpha^*(\mathcal{Q}_\alpha z) - \tilde{\Sigma}_\alpha^*(\tilde{\mathcal{Q}}_\alpha z)\|_{\mathcal{X}} \leq O((1 - \alpha)^\theta) + \frac{\rho M \omega^\eta \Gamma(1 - \eta)}{\omega - \rho M(1 + L)} \|\Sigma_\alpha^* - \tilde{\Sigma}_\alpha^*\|_r \quad (\text{B.32})$$

Recordando a notação dada por (B.29) e usando (B.32), obtemos

$$\|\Sigma_\alpha^* - \tilde{\Sigma}_\alpha^*\|_r \leq O((1 - \alpha)^\theta) + \frac{\rho M \omega^\eta \Gamma(1 - \eta)}{\omega - \rho M(1 + L)} \|\Sigma_\alpha^* - \tilde{\Sigma}_\alpha^*\|_r, \quad (\text{B.33})$$

e isto completa a prova.

B.4 Provas da seção 2.9

Nesta seção usaremos noções de espaços L^p , espaços de Sobolev e solução fraca (ver (ADAMS, 1975), (BREZIS, 1983)). Noções de homogeneização usadas aqui podem ser encontradas em (CIORANESCU; DONATO, 1999). Nossa motivação para buscar introduzir corretores na dinâmica vem dos trabalhos (ARRIETA *et al.*, 2011; PEREIRA; SILVA, 2012).

Dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.48) se

$$a_\varepsilon(\phi, u) := \int_{\Omega} [a_\varepsilon u' \phi' + u \phi] dx = \int_{\Omega} f \phi dx, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (\text{B.34})$$

Segue do Teorema de Lax-Milgram que existe uma única solução fraca de (2.48).

Sejam $\phi, \psi \in H^1(\Omega)$. Denotaremos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ de $H^1(\Omega)$ por

$$\langle \phi, \psi \rangle_1 = \langle \phi, \psi \rangle + \langle \phi', \psi' \rangle = \int_{\Omega} [\phi \psi + \phi' \psi'] dx.$$

Se J é um espaço métrico, $\lambda_0 \in J$ e $\{u_\lambda\}_{\lambda \in J} \subset H^1(\Omega)$, então diremos que u_λ **converge fracamente para** $u \in H^1(\Omega)$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$ se, para cada $\phi \in H^1(\Omega)$,

$$\langle \phi, u_\lambda \rangle_1 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} \langle \phi, u \rangle_1,$$

e neste caso denotaremos

$$u_\lambda \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\Omega).$$

Denotaremos $X := L^2(\Omega)$ e $X^{\frac{1}{2}} := H^1(\Omega)$. Seja $f \in L^1(I)$ com $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

Prova do Teorema 2.9.1

Como $0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta < \infty$, segue de (2.48) que existe k_1 independente de ε tal que

$$\|u^\varepsilon\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq k_1 \|f\|_X$$

e portanto existe $u_0 \in X^{\frac{1}{2}}$ tal que $u^\varepsilon \rightharpoonup u_0$ em $X^{\frac{1}{2}}$. Defina $\xi^\varepsilon = a_\varepsilon(u^\varepsilon)'$. Então, temos

$$-(\xi^\varepsilon)' = f - u^\varepsilon \rightharpoonup f - u_0.$$

e analogamente, existe $k_2 > 0$ independente de ε tal que

$$\|\xi^\varepsilon\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq k_2 \|f\|_X.$$

Logo, $\xi^\varepsilon \rightarrow \xi_0$ em X . Como $\frac{1}{a_\varepsilon} \rightharpoonup M_{(0,l_1)}(\frac{1}{a})$ em X (ver (CIORANESCU; DONATO, 1999)), segue que

$$(u^\varepsilon)' = \frac{1}{a_\varepsilon} \xi^\varepsilon \rightharpoonup M_{(0,l_1)}(\frac{1}{a}) \xi_0 = u_0'.$$

Assim, $-\xi_0' = -\frac{1}{M_{(0,l_1)}(\frac{1}{a})} u_0'' = f - u_0$ e portanto

$$-a_0 u_0'' + u_0 = f.$$

Por outro lado, por passagem ao limite, obtemos

$$\int_{\Omega} [a_0 u_0' \phi' + u_0 \phi] dx = \int_{\Omega} \phi f dx, \forall \phi \in X^{\frac{1}{2}}.$$

Combinando as duas últimas equações acima e usando funções teste $\phi \in H^1(\Omega)$ convenientemente escolhidas, obtemos a condição de fronteira e o resultado segue.

Observação B.4.1. Se $\frac{1}{a} \in H^1(\Omega)$, então para cada $f \in L^2(\Omega)$, o problema (2.48) tem solução em $H^2(\Omega)$. De fato, usando o Teorema de Lax-Milgram, obtemos uma única **solução fraca** de (2.48); isto é, existem um único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a_\varepsilon(\phi, u) := \int_{\Omega} [a_\varepsilon u' \phi' + u \phi] dx = \int_{\Omega} f \phi dx, \forall \phi \in H^1(\Omega), \quad (\text{B.35})$$

e portanto $(-a_\varepsilon u')' = f - u$ em $H^1(\Omega)$. Além disso, segue de (B.35) e (2.47) que $A_\varepsilon^{-1} \in \mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})$ e $\|A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Como $\frac{1}{a} \in H^2(\Omega)$, segue que $u \in H^2(\Omega)$. Denotando $\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} uv dx$, temos

$$a_\varepsilon(\phi, u) = -(a_\varepsilon u' \phi) \Big|_{d_1}^{d_2} + \langle \phi, A_\varepsilon u \rangle = \langle \phi, f \rangle, \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (\text{B.36})$$

e portanto, variando convenientemente as funções teste $\phi \in H^1(\Omega)$, obtemos $u' = 0$ em $\partial\Omega$.

Observação B.4.2. Note que $H^1(\Omega) = (D(A_0^{\frac{1}{2}}), \|A_0^{\frac{1}{2}}(\cdot)\|)$. De fato, se $u \in H^1(\Omega)$, então $u' \in L^2(\Omega)$ e portanto existe $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|\phi_n - u'\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Seja $\{\Phi_n\} \subset H^2(\Omega)$ dada por

$$\Phi_n(t) = u(d_1) + \int_{d_1}^t \phi_n(s) ds.$$

Então, é fácil ver que $\|\Phi_n - u\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\Phi_n'|_{\partial\Omega} = 0$ e portanto $\Phi_n \in D(A_0)$. Isto prova que $D(A_0)$ é denso em $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$. Por outro lado, temos que $D(A_0)$ é denso em $(D(A_0^{\frac{1}{2}}), \|A_0^{\frac{1}{2}}(\cdot)\|)$ e que, para $u \in D(A_0)$, $\|A_0^{\frac{1}{2}}u\|^2 = \langle A_0u, u \rangle$. Logo,

$$\min\{a_0, 1\} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|A_0^{\frac{1}{2}}u\|^2 \leq \max\{a_0, 1\} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Prova do Teorema 2.9.6

Segue de (2.57) que $a_\varepsilon - a_\varepsilon(\chi')_\varepsilon = a_0$ e portanto

$$a_\varepsilon(u_1^\varepsilon)' = a_\varepsilon u_0' - a_\varepsilon(\chi')_\varepsilon u_0' - \varepsilon a_\varepsilon \chi_\varepsilon u_0'' = a_0 u_0' - \varepsilon a_\varepsilon \chi_\varepsilon u_0''.$$

Por outro lado, para toda $\phi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} [a_\varepsilon(u^\varepsilon)' \phi' + u^\varepsilon \phi] dx = \int_{\Omega} [a_0(u_0)' \phi' + u_0 \phi] dx = \int_{\Omega} f \phi dx,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [a_\varepsilon(u^\varepsilon - u_1^\varepsilon)' \phi' + (u^\varepsilon - u_1^\varepsilon) \phi] dx &= \int_{\Omega} [(a_0 u_0' - a_\varepsilon(u_1^\varepsilon)') \phi' + (u_0 - u_1^\varepsilon) \phi] dx \\ &= \int_{\Omega} [(\varepsilon a_\varepsilon \chi_\varepsilon u_0'') \phi' + (\varepsilon \chi_\varepsilon u_0') \phi] dx. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Usando a limitação inferior de a e fazendo $\phi = u^\varepsilon - u_1^\varepsilon$ obtemos

$$\|u^\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq c\varepsilon \|u_0\|_{H^2(\Omega)}.$$

Observação B.4.3. Segue do Teorema 2.9.6 que $\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c\varepsilon$. De fato, dado $f \in L^2$,

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})f\| = \|u^\varepsilon - u^0\| \leq \|u^\varepsilon - u_1^\varepsilon\| + \|u_1^\varepsilon - u_0\| \leq c_0\varepsilon[\|f\| + \|u_0\|_{H^1}] \leq c_1\varepsilon\|f\|.$$

Em particular, por interpolação (Teorema A.3.9), segue que para $\alpha < \frac{1}{2}$ temos convergência de resolventes. Especificamente,

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})f\|_{X^\alpha} \leq c\varepsilon^{1-2\alpha}\|f\|,$$

com c independente de $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\varepsilon \in [0, 1]$.

Prova da Proposição 2.9.8

Afirmção 1: A_0 é do tipo $(0, M)$.

Calculando a imagem numérica de A_0 obtemos para cada $u \in D(A_0)$

$$\langle A_0 u, u \rangle \geq \|u\|_X^2.$$

Assim, $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \times 0 \subset \rho(-A_0)$ e obtemos uma estimativa de $\|\lambda(\lambda + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ uniforme em cada setor aberto da forma

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon\}.$$

Afirmção 2: $A_0^{\frac{1}{2}}$ é do tipo $(0, M)$ e portanto $-A_0^{\frac{1}{2}}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Segue da afirmação 1 e do Teorema A.3.7.

Seja $V_\varepsilon := c\alpha_\varepsilon A_0^{\frac{1}{2}}$ com a constante $c > 0$ e $\alpha_\varepsilon > 0$ a determinar. Então, para todo $u \in D(A_0^{\frac{1}{2}}) = H^1(\Omega)$,

$$\|\varepsilon B_\varepsilon u\|_X \leq c_1 \varepsilon \|u'\|_X \leq c_2 \varepsilon \|A_0^{\frac{1}{2}} u\|_X = \frac{c_2 \varepsilon}{c \alpha_\varepsilon} \|V_\varepsilon u\|_X. \quad (\text{B.38})$$

Seja $M = M_\theta$ tal que $\|\lambda(\lambda + A_0)^{-1}\| \leq M$ para todo $\lambda \in \Sigma_{0, \pi-\theta}$. Como $\rho(-A_0^{\frac{1}{2}}) = \rho(-V_\varepsilon)$ e

$$\lambda(\lambda + V_\varepsilon)^{-1} = \lambda(c\alpha_\varepsilon)^{-1}(\lambda(c\alpha_\varepsilon)^{-1} + A_0^{\frac{1}{2}})^{-1},$$

obtemos $\|\lambda(\lambda + V_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ para todo $\lambda \in \Sigma_{0, \pi-\theta}$.

Tomando $c = 2Mc_2$ e usando (B.38) obtemos

$$\|\varepsilon B_\varepsilon(\lambda + V_\varepsilon)^{-1} u\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha_\varepsilon} \|u\|_X.$$

Assim, para $0 < \varepsilon \leq 1$, $\alpha_\varepsilon \geq \varepsilon$ e $\lambda \in \Sigma_{0, \pi-\theta}$ obtemos que

$$\lambda + \varepsilon B_\varepsilon + V_\varepsilon = [\varepsilon B_\varepsilon(\lambda + V_\varepsilon)^{-1} + I](\lambda + V_\varepsilon)$$

é invertível. Logo $\Sigma_{0, \pi-\theta} \subset \rho(-(\varepsilon B_\varepsilon + c\alpha_\varepsilon A_0^{\frac{1}{2}}))$ e $R_\varepsilon := I + \varepsilon B_\varepsilon + c\alpha_\varepsilon A_0^{\frac{1}{2}} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é uma bijeção linear e contínua, portanto com inversa limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ tal que $C_\varepsilon u = f$. Note que $D(A_0)$ é denso em $H^1(\Omega)$. Assim, se $\{u_n\}$ é uma sequência em $D(A_0)$ com $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$, então $C_\varepsilon u_n \rightarrow C_\varepsilon u = f$ em $L^2(\Omega)$ e portanto C_ε restrito a $D(A_0)$ (que denotaremos também por C_ε) tem imagem densa em $L^2(\Omega)$.

Prova do Corolário 2.9.9

Segue da Proposição 2.9.8 e do Corolário 2.9.7. Para ver que D_ε tem resolvente compacto, basta notar que $A_0^{-\frac{1}{2}}$ é compacto, $B_\varepsilon A_0^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(X)$ e que

$$D_\varepsilon^{-1} = [A_0^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon B_\varepsilon A_0^{-\frac{1}{2}} + c\varepsilon^{\frac{1}{2}} A_0^{-\frac{1}{2}}] A_0^{-\frac{1}{2}}.$$

De fato, para $f \in X^{\frac{1}{2}}$,

$$\|B_\varepsilon f\|^2 = \|\chi_\varepsilon f'\|^2 \leq c^2 \|f'\|^2 \leq c^2 [a_0 \|f'\|^2 + \|f\|^2] = c^2 \|A_0^{\frac{1}{2}} f\|^2,$$

e portanto $(A_0^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon B_\varepsilon A_0^{-\frac{1}{2}} + c\varepsilon^{\frac{1}{2}} A_0^{-\frac{1}{2}}) \in \mathcal{L}(X)$ e o resultado segue.

Prova do Lema 2.9.10

Sejam $D_\varepsilon^{-1} := F_\varepsilon = C_\varepsilon A_0^{-1}$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $u = A_0 f$ com $f \in D(A_0)$. Então,

$$\langle u, F_\varepsilon u \rangle = \langle A_0 f, C_\varepsilon f \rangle = \langle A_0 f, (I + \varepsilon B_\varepsilon + c\varepsilon A_0^{\frac{1}{2}}) f \rangle = \|f\|_{X^{\frac{1}{2}}}^2 + \langle A_0 f, \varepsilon B_\varepsilon f \rangle + c\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|A_0^{3/4} f\|_X^2.$$

Seja $f = f_1 + if_2$ com f_1, f_2 respectivamente a parte real e imaginária de f . Como χ é uma função real, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle A_0 f, \varepsilon B_\varepsilon f \rangle &= \int_\Omega a_0 \varepsilon \chi_\varepsilon \operatorname{Re}[(f_1'' f_1' + f_2'' f_2') - i(f_1'' f_2' + f_1' f_2'')] dx \\ &= \int_\Omega \frac{a_0 \varepsilon}{2} \chi_\varepsilon [((f_1')^2 + (f_2')^2)'] dx = \int_\Omega \frac{a_0 \varepsilon}{2} \chi_\varepsilon (|f'|^2)' dx \\ &= \int_\Omega \left[\left(\frac{a_0}{2} \varepsilon \chi_\varepsilon |f'|^2 \right)' - \frac{a_2}{2} (\varepsilon \chi_\varepsilon)' |f'|^2 \right] dx \\ &= -\frac{a_0}{2} \int_\Omega (\varepsilon \chi_\varepsilon)' |f'|^2 dx. \end{aligned} \tag{B.39}$$

Como temos $a - a\chi' = a_0$, obtemos $1 - \frac{1}{2}(\varepsilon \chi_\varepsilon)' \geq \frac{1}{2}$ e portanto

$$\operatorname{Re} \langle u, F_\varepsilon u \rangle \geq \frac{1}{2} \|A_0^{\frac{1}{2}} f\|_X^2 + c\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|A_0^{3/4} f\|_X^2.$$

e o resultado segue.

Prova do Lema 2.9.11

É suficiente provarmos que

$$\|A_0^{\frac{1}{4}} (\varepsilon B_\varepsilon A_0^{-\frac{1}{2}}) g\| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|A_0^{\frac{1}{4}} g\|, \quad \forall g \in X^{\frac{1}{2}}. \tag{B.40}$$

Note que, de (2.56), obtemos $b_0 - l_1 \leq \chi(t) \leq b_0 \leq \frac{l_1}{2}$ e portanto $|\chi(t)| \leq c_0$ com $c_0 := \max\{|b_0|, |l_1 - b_0|\}$.

Seja $f_\varepsilon : X \rightarrow X$ dada por $f_\varepsilon(g) := \varepsilon B_\varepsilon A_0^{-\frac{1}{2}} g$. Então, $f_\varepsilon|_{X^{\frac{1}{2}}} : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X^{\frac{1}{2}}$ está bem definida. Além disso,

$$\|f_\varepsilon(g)\| = \|\varepsilon \chi_\varepsilon(A_0^{-\frac{1}{2}} g)'\| \leq c_0 \varepsilon \|(A_0^{-\frac{1}{2}} g)'\| \leq \frac{c_0 \varepsilon}{a_0^{\frac{1}{2}}} \|g\|,$$

e, para $g \in X^{\frac{1}{2}}$, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon(g)\|_{X^{\frac{1}{2}}} &\leq \|A_0^{\frac{1}{2}}(\varepsilon \chi_\varepsilon(A_0^{-\frac{1}{2}} g)')\| = [a_0 \|(\varepsilon \chi_\varepsilon(A_0^{-\frac{1}{2}} g)')'\|^2 + \|\varepsilon \chi_\varepsilon(A_0^{-\frac{1}{2}} g)'\|]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq a_0^{\frac{1}{2}} \|(\varepsilon \chi_\varepsilon(A_0^{-\frac{1}{2}} g)')'\| + \|\varepsilon \chi_\varepsilon(A_0^{-\frac{1}{2}} g)'\| \\ &\leq a_0^{\frac{1}{2}} [\|(\varepsilon \chi_\varepsilon)'(A_0^{-\frac{1}{2}} g)'\| + \|\varepsilon \chi_\varepsilon(A_0^{-\frac{1}{2}} g)''\| + \|\varepsilon \chi_\varepsilon(A_0^{-\frac{1}{2}} g)'\|] \\ &\leq c_1 \|g\| + a_0^{\frac{1}{2}} c_0 \varepsilon \|(A_0^{-\frac{1}{2}} g)''\| \leq d_2 \|g\|_{X^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Logo, usando resultados de interpolação (ver (AMANN, 1995)), obtemos o resultado.

Observação B.4.4. Os resultados usados de (AMANN, 1995) tem a seguinte cadeia de argumentos:

- (i) $A_0 = A_0^* \geq 1$ e portanto as potências imaginárias puras de A_0 são uniformemente limitadas, especificamente,

$$\|A_0^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Este resultado está na Seção 4.7.3.

- (ii) Segue do item (i) e dos resultados da Seção 2.9 que

$$[D(A_0^\alpha), D(A_0^\beta)]_\theta = D(A_0^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta})$$

para $0 \leq \operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \beta$, $\theta \in (0, 1)$. Precisamente, se

$$X^\alpha := (D(A_0^\alpha), \|A_0^\alpha(\cdot)\|), \quad \operatorname{Re} \alpha \geq 0,$$

então dado $\theta \in (0, 1)$, existe uma constante $c \geq 1$ tal que

$$c^{-1} \|\cdot\|_{X^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta}} \leq \|\cdot\|_{[X^\alpha, X^\beta]_\theta} \leq c \|\cdot\|_{X^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta}}.$$

- (iii) Da Seção 2.4.2, temos que $[X^\alpha, X^\beta]_\theta$ satisfaz a seguinte propriedade: Se $f \in \mathcal{L}(X^\alpha)$ e $f \in \mathcal{L}(X^\beta)$, então, para cada $\theta \in (0, 1)$, $f \in \mathcal{L}([X^\alpha, X^\beta]_\theta)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}([X^\alpha, X^\beta]_\theta)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}(X^\alpha)}^{1-\theta} \|f\|_{\mathcal{L}(X^\beta)}^\theta.$$

Logo, do item anterior, obtemos $f \in \mathcal{L}(X^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta})$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta})} \leq c^2 \|f\|_{\mathcal{L}(X^\alpha)}^{1-\theta} \|f\|_{\mathcal{L}(X^\beta)}^\theta.$$

Assim, para $\alpha = 0, \beta = \theta = \frac{1}{2}$, obtemos o resultado usado para estimar $\|f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{4}})}$ na prova do Lema 2.9.11.

Prova da Proposição 2.9.12

A prova segue do Lema 2.9.10 e da hipótese (2.62).

Prova do Corolário 2.9.13

Sejam $F_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1}$ e $M := \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|F_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X)}$. Então, para $|\lambda| \leq \frac{1}{2M}$ temos

$$(\lambda + D_\varepsilon)^{-1} = F_\varepsilon(I + \lambda F_\varepsilon)^{-1}$$

com

$$(I + \lambda F_\varepsilon)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda F_\varepsilon)^n.$$

Logo,

$$\|(\lambda + D_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \frac{1}{2M}.$$

Da proposição anterior e das considerações acima segue que para cada $\omega \in (0, \frac{1}{2M})$, existe $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $k > 0$ tal que

$$\|(\lambda + D_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{k}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{-\omega, \phi}.$$

Assim, a menos de recalculer a constante k obtemos o corolário.

Prova do Lema 2.9.14

Segue da prova de 2.9.8 que $D(D_\varepsilon) = C_\varepsilon(D(A_0)) = H^1(\Omega) = D(A_0^{\frac{1}{2}})$.

Afirmção 1: Existe uma constante $c > 0$ tal que $\|A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - A_0^{-\frac{1}{2}}\| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

De fato, segue da observação B.4.3 que

$$\|(s + A_\varepsilon)^{-1} - (s + A_0)^{-1}\| \leq \min\left\{\frac{2M}{s}, c\varepsilon\right\}, \quad \forall s > 0, \varepsilon \in [0, 1],$$

onde M é tal que

$$\|(s + A_\varepsilon)^{-1}\| \leq \frac{M}{s}, \quad \forall s > 0, \varepsilon \geq 0.$$

Assim, usando (A.13), obtemos

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - A_0^{-\frac{1}{2}}\| &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} \|(s + A_\varepsilon)^{-1} - (s + A_0)^{-1}\| ds \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2M}{c\varepsilon}} s^{-\frac{1}{2}} ds + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2M}{c\varepsilon}}^\infty 2Ms^{-\frac{3}{2}} ds \\ &= \frac{1}{\pi} 2\left(\frac{2M}{c\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} c\varepsilon + \frac{1}{\pi} 4M\left(\frac{2M}{c\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Assim, segue que existem $c, \varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\|A_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\| \geq c, \quad \forall 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Consequentemente,

$$\|A_0^{\frac{1}{2}}A_\varepsilon^{-1}\| \geq c_1\|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_\varepsilon^{-1}\| \geq c_2 > 0, \quad \forall 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Continuando,

$$\|A_0^{\frac{1}{2}}D_\varepsilon^{-1}\| \geq \|A_0^{\frac{1}{2}}A_\varepsilon^{-1}\| - \|A_0^{\frac{1}{2}}(D_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^{-1})\| \geq c_2 - c\varepsilon \geq c_3 > 0,$$

para ε suficientemente pequeno. Isto prova que $X_{A_0}^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow X_{D_\varepsilon}^1$ uniformemente para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$; isto é,

$$\|D_\varepsilon f\| \leq c_4\|A_0^{\frac{1}{2}}f\|, \quad \forall f \in H^1(\Omega).$$

Por outro lado, usando o Teorema A.3.9 para estimar $\|A_0^{\frac{1}{2}}(\varepsilon B_\varepsilon)A_0^{-1}\|$, obtemos

$$\begin{aligned} \|A_0^{\frac{1}{2}}D_\varepsilon^{-1}\| &= \|A_0^{\frac{1}{2}}(I + \varepsilon B_\varepsilon + c\varepsilon A_0^{\frac{1}{2}})A^{-1}\| \\ &= \|A_0^{-\frac{1}{2}} + A_0^{\frac{1}{2}}(\varepsilon B_\varepsilon)A_0^{-1} + c\varepsilon I\| \leq c_4, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|A_0^{\frac{1}{2}}f\| \leq c_4\|D_\varepsilon f\|, \quad \forall f \in H^1(\Omega),$$

isto é, $X_{D_\varepsilon}^1 \hookrightarrow X_{A_0}^{\frac{1}{2}}$ uniformemente para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Como $D(D_\varepsilon) \subset D(D_\varepsilon^\alpha)$ para $\alpha \in [0, 1]$, segue do Corolário 2.9.13 e do Teorema A.3.9 que existe uma constante c_5 tal que

$$\|D_\varepsilon^\alpha f\| \leq c_5\|D_\varepsilon f\|, \quad \forall f \in H^1(\Omega),$$

e portanto o resultado segue.

Prova do Teorema 2.9.15

Como $\{A_\varepsilon\}$ e $\{D_\varepsilon\}$ são famílias uniformemente setoriais, temos

$$e^{-A_\varepsilon t} - e^{-D_\varepsilon t} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} [(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda + D_\varepsilon)^{-1}] d\lambda.$$

Como $e^{-A_\varepsilon t} f \in H^1(\Omega)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$, segue do Lema 2.9.14 que

$$\|D_\varepsilon^\alpha e^{-A_\varepsilon t} f\|_X \leq c_1\|A_0^{\frac{1}{2}}e^{-A_\varepsilon t} f\|_X \leq c_2\|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}e^{-A_\varepsilon t} f\|_X \leq c_3e^{-\omega t}t^{-\frac{1}{2}}$$

onde $\omega \in (0, 1)$ é uma constante como em (2.51).

Sem perda de generalidade, podemos supor $\omega \in (0, \frac{1}{2M})$ como na prova do Corolário 2.9.13. Assim,

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-D_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^\alpha)} \leq k_4 \max\{t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\alpha}\} e^{-\omega t}. \quad (\text{B.41})$$

Por outro lado, usando o Corolário 2.9.9, os Lemas 2.3.1, 2.9.14 e a setorialidade uniforme, obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-D_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^\alpha)} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |e^{\lambda t}| \|(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda + D_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^\alpha)} d|\lambda| \\ &\leq c\varepsilon t^{-1} e^{-\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Assim, de (B.41) e (2.19), o resultado segue.

Prova do Teorema 2.9.16

Seja $u \in X$ com $\|u\|_X \leq r$. Usando a fórmula da variação das constantes temos

$$T_\varepsilon(t)u = e^{-A_\varepsilon t}u + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)} f(T_\varepsilon(s)u) ds, \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

e

$$\tilde{T}_\varepsilon(t)u = e^{-D_\varepsilon t}u + \int_0^t e^{-D_\varepsilon(t-s)} f(\tilde{T}_\varepsilon(s)u) ds, \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|(T_\varepsilon(t) - \tilde{T}_\varepsilon(t))u\|_{X_\varepsilon^\alpha} &\leq \| (e^{-A_\varepsilon t} - e^{-D_\varepsilon t})u \|_{X_\varepsilon^\alpha} \\ &\quad + \int_0^t \| e^{-A_\varepsilon(t-s)} f(T_\varepsilon(s)u) - e^{-D_\varepsilon(t-s)} f(\tilde{T}_\varepsilon(s)u) \|_{X_\varepsilon^\alpha} ds. \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Segue do Teorema 2.9.15 que

$$\|(e^{-A_\varepsilon t} - e^{-D_\varepsilon t})u\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq g(t) e^{-\omega t},$$

com $g(t) := c \min\{\varepsilon t^{-1}, \max\{t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\alpha}\}\}$.

Como $f : X_\varepsilon^\alpha \rightarrow X$ é globalmente Lipschits e uniformemente limitada independente de ε , usando a estimativa dos semigrupos lineares, obtemos

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(s, t) &:= \|e^{-A_\varepsilon(t-s)} f(T_\varepsilon(s)u) - e^{-D_\varepsilon(t-s)} f(\tilde{T}_\varepsilon(s)u)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \\ &\leq \| (e^{-A_\varepsilon(t-s)} - e^{-D_\varepsilon(t-s)}) f(T_\varepsilon(s)u) \|_{X_\varepsilon^\alpha} + \| e^{-D_\varepsilon(t-s)} (f(T_\varepsilon(s)u) - f(\tilde{T}_\varepsilon(s)u)) \|_{X_\varepsilon^\alpha} \\ &\leq g(t-s) e^{-\omega(t-s)} \|f(T_\varepsilon(s)u)\|_X + c_2(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)u - \tilde{T}_\varepsilon(s)u\|_X \\ &\leq c_3 g(t-s) e^{-\omega(t-s)} + c_2(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)u - \tilde{T}_\varepsilon(s)u\|_X. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

e portanto

$$\int_0^t I_\varepsilon(s, t) ds \leq \int_0^t c_3 g(t-s) e^{-\omega(t-s)} ds + \int_0^t c_2(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)u - \tilde{T}_\varepsilon(s)u\|_X ds.$$

Logo, como no Lema 2.4.3, obtemos

$$\int_0^t I_\varepsilon(s, t) ds \leq c_4 \varepsilon |\ln(\varepsilon)| + \int_0^t c_2(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)u - \tilde{T}_\varepsilon(s)u\|_{X_\varepsilon^\alpha} ds.$$

Seja $\phi_\varepsilon(t) := \|T_\varepsilon(s)u - \tilde{T}_\varepsilon(s)u\|_{X_\varepsilon^\alpha}$. Então,

$$\phi_\varepsilon(t) \leq c g(t) e^{-\omega t} + c_4 \varepsilon |\log(\varepsilon)| + \int_0^t c_2(t-s)^{-\frac{1}{2}} \phi_\varepsilon(s) ds.$$

Fixado $\theta \in (0, 1)$, temos

$$g(t) = c \min\{t^{-\frac{1}{2}}, \varepsilon t^{-1}\} \leq c \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}(1+\theta)}.$$

Por outro lado, $\varepsilon^{1-\theta} |\ln(\varepsilon)| = o(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e portanto

$$\phi_\varepsilon(t) \leq c \varepsilon^\theta (t^{-\frac{1}{2}(1+\theta)} e^{-\omega t} + o(\varepsilon)) + \int_0^t c_2(t-s)^{-\frac{1}{2}} \phi_\varepsilon(s) ds.$$

Note que para cada $\delta > 0$, existe $c > 0$ tal que

$$e^{-\omega t} + o(\varepsilon) t^{\frac{1}{2}(1+\theta)} \leq e^{\delta t}.$$

Logo,

$$\phi_\varepsilon(t) \leq c t^{-\frac{1}{2}(1+\theta)} \varepsilon^\theta e^{\delta t} + \int_0^t c_2(t-s)^{-\frac{1}{2}} \phi_\varepsilon(s) ds.$$

Denotando $\varphi_\varepsilon(t) := \phi_\varepsilon(t) e^{-\delta t}$ obtemos

$$\varphi_\varepsilon(t) \leq c t^{-\frac{1}{2}(1+\theta)} \varepsilon^\theta + \int_0^t c_2(t-s)^{-\frac{1}{2}} \varphi_\varepsilon(s) ds.$$

Usando a desigualdade de Gronwall generalizada (Lema 2.4.4), obtemos

$$\varphi_\varepsilon(t) \leq c \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}(1+\theta)} e^{L_0 t},$$

para algum $L_0 > 0$ e portanto, para todo $u \in X$, $\|u\|_X \leq r$, temos

$$\|(T_\varepsilon(t) - \tilde{T}_\varepsilon(t))u\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq c \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}(1+\theta)} e^{(L_0 + \delta)t}.$$

para todo $t > 0$.

B.5 Perturbação Lipschitz de MS e Lipschitz Shadowing

A prova da Proposição 3.1.14, que construímos nesta seção, é análoga a prova do Lema A.0.9 de (SANTAMARÍA, 2013). Para efeito de completude do texto, inserimos e destacamos os lemas de (SANTAMARÍA, 2013) que foram usados para provarmos o nosso resultado.

Em toda esta seção, $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação Morse-Smale (gradient-like) com atrator global $\mathcal{A}$. Se $V \subset \mathbb{R}^m$, denotamos

$$\gamma^+(V) := \bigcup_{n \geq 0} T^n(V), \quad \gamma^-(V) := \bigcup_{n \leq 0} T^n(V),$$

e

$$\gamma(V) := \gamma^+(V) \cup \gamma^-(V).$$

Denotamos por $p_1, \dots, p_N$ o conjunto dos equilíbrios hiperbólicos de T .

Observação B.5.1. Observamos que, para pontos fixos hiperbólicos, pode-se encontrar na literatura a seguinte notação:

$$\mathbf{S}(q) := T_p W^s(q) \quad \text{e} \quad \mathbf{U}(q) := T_p W^u(q),$$

com $T_p W^s(q)$ (resp. $T_p W^u(q)$) sendo o espaço tangente, no ponto q , da variedade estável (resp. instável) do ponto fixo hiperbólico q . Chamaremos $\mathbf{S}(q)$ de variedade estável linear de q e $\mathbf{U}(q)$ de variedade instável linear de q .

O Lema a seguir fala sobre o comportamento das trajetórias de semigrupos gradient-like. Observamos que este resultado vale para dimensão infinita, e a prova é a mesma.

Lema B.5.2. Sejam $V_1, \dots, V_N$ vizinhanças de $p_1, \dots, p_N$ respectivamente. Então, dado $B \subset \mathbb{R}^m$ limitado, existe $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0(B) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{T^n x : n \in \{0, 1, \dots, \mathbf{T}_0\}\} \cap \left(\bigcup_{i=1}^N V_i \right) \neq \emptyset,$$

para todo $x \in B$.

Demonstração. Argumentaremos por contradição. Suponha que exista uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B e uma sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ com $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ tais que

$$\{T^n x_k : n \in \{1, \dots, 2n_k\}\} \cap \left(\bigcup_{i=1}^N V_i \right) = \emptyset.$$

Seja $\mathcal{A}$ o atrator global de T . Então, sem perda de generalidade (a menos de subsequência), temos $T^{n_k} x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y \in \mathcal{A}$. Como $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n y = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{n+n_k} x_k \in \overline{\mathbb{R}^m \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N V_i \right)},$$

e portanto $y \in \mathcal{A}$, mas $T^n y$ não converge para nenhum equilíbrio de T , contradizendo a hipótese de T ser gradient-like. $\square$

Denotaremos por $|\cdot|$ a norma usual de $\mathbb{R}^m$.

Lema B.5.3 ((SANTAMARÍA, 2013)). Seja $\{p_1, \dots, p_N\}$ o conjunto de equilíbrios hiperbólicos de T . Para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, existe uma vizinhança V_i de p_i , uma família de subespaços $\{S_i(x), U_i(x)\}_{x \in \bar{V}_i \cup \gamma(V_i)}$ de $\mathbb{R}^m$, e $\lambda_0 \in (0, 1)$ tais que

(1) S_i, U_i são DT - invariantes, isto é,

$$DT(x)S_i(x) = S_i(T(x)), \quad \forall x \in \bar{V}_i \cup \gamma(V_i),$$

e

$$DT(x)U_i(x) = U_i(T(x)), \quad \forall x \in \bar{V}_i \cup \gamma(V_i),$$

(2) Para todo $x \in V_i$,

$$S_i(x) \oplus U_i(x) = \mathbb{R}^m,$$

(3) $S_i(p_i) = \mathbf{S}(p_i)$ e $U_i(p_i) = \mathbf{U}(p_i)$ para cada $i = 1, \dots, N$, com $\{\mathbf{S}(p_i), \mathbf{U}(p_i)\}$ sendo as variedades estável e instável lineares de p_i ,

(4) $S_i(x) \subset S_j(x)$, $U_i(x) \supset U_j(x)$ para $x \in \gamma^+(V_i) \cap \gamma^-(V_j)$,

(5) Para $x \in V_i$, $v^s \in S_i(x)$ e $v^u \in U_i(x)$, temos

$$\begin{aligned} |DT(x)v^s| &\leq \lambda_0 |v^s|, \\ |DT^{-1}(x)v^u| &\leq \lambda_0 |v^u|. \end{aligned}$$

Uma vez que para cada $i = 1, \dots, N$ temos a família $\{S_i(x), U_i(x)\}_{x \in \bar{V}_i \cup \gamma(V_i)}$, nosso próximo passo será estender esta propriedade para uma vizinhança $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ do atrator global, i é, construir uma família $\{S_i(x), U_i(x)\}_{q \in \mathcal{N}(\mathcal{A})}$ com algumas propriedades similares as do Lema B.5.3.

Seja

$$V := \bigcup_{i=1}^N V_i,$$

onde $\{V_i\}_{i=1}^N$ são as vizinhanças dos pontos fixos hiperbólicos dadas pelo Lema B.5.3. Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança limitada de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R}^m$ tal que $T, DT(x)$ sejam injetoras em $\mathcal{U}$ para cada $x \in \mathcal{U}$, e $T\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ (ver Observação 3.1.12 e Observação 3.1.13). Sem perda de generalidade, suponha que $T^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow X$ esteja bem definida e tenha constante de Lipschitz limitada (poderíamos tomar, desde o começo, $U := T(\mathcal{U})$ no lugar de $\mathcal{U}$, a fim de obtermos $T^{-1} : U \rightarrow X$ bem definida). Seja $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0(\mathcal{U})$ dado pelo Lema B.5.2. Dado $q \in \mathcal{U}$, denotemos por $i(q)$ o natural em $\{1, \dots, N\}$ tal que $V_{i(q)}$ é o primeiro conjunto da família $\{V_i\}_{i=1}^N$ visitado pela órbita positiva de q (isto está bem definido graças ao Lema B.5.3). Isto é, se $q \in V_i$, então $i(q) = i$ ou, se $q \notin V_j$ para nenhum $j \in \{1, \dots, N\}$, então existe $n(q) \in \{1, \dots, \mathbf{T}_0\}$ tal que $y := T^{n(q)}(q) \in V_{i(q)}$ para algum $i(q) \in \{1, \dots, N\}$ e $T^n(q) \notin \bigcup_{i=1}^N V_i$ para $n = 0, 1, \dots, n(q) - 1$.

Para cada $q \in \mathcal{U}$, definimos os subespaços lineares $S(q), U(q)$ de $\mathbb{R}^m$ por

$$\begin{aligned} S(q) &= D(T^{-n(q)})(y)S_{i(q)}(y) \text{ e} \\ U(q) &= D(T^{-n(q)})(y)U_{i(q)}(y). \end{aligned}$$

Note que, se $q \in \gamma(V_i) \cap \mathcal{U}$, então $S(q) = S_i(q)$ e $U(q) = U_i(q)$.

Com as considerações acima, enunciamos o seguinte resultado.

Lema B.5.4 ((SANTAMARÍA, 2013)). A família $\{S(q), U(q)\}_{q \in \mathcal{U}}$, de subespaços de $\mathbb{R}^m$, definida acima satisfaz as seguintes propriedades:

(1) para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$D(T^n)(q)S(q) \subset S(T^n(q)) \text{ e } D(T^{-n})(q)U(q) \subset S(T^{-n}(q));$$

(2) existe $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} |D(T^n)(q)v^s| &\leq C\lambda_0^n |v^s|, \quad v^s \in S(q), \\ |D(T^{-n})(q)v^u| &\leq C\lambda_0^n |v^u|, \quad v^u \in U(q), \end{aligned}$$

com $\lambda_0 \in (0, 1)$ dado pelo Lema B.5.3;

(3) existe $J > 0$ tal que

$$\|P(q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}, \|Q(q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq J, \quad \forall q \in \mathcal{U},$$

onde $P(q)$ (resp. $Q(q)$) é uma projeção de $\mathbb{R}^m$ sobre $S(q)$ paralelas a $U(q)$ (resp. sobre $U(q)$ paralelas a $S(q)$).

(4) Para cada $q \in \mathcal{U}$, $S(q) \oplus U(q) = \mathbb{R}^m$.

A seguir, enunciamos um resultado abstrato sobre Shadowing que foi o ponto central para provarmos o principal resultado desta seção, que é a Proposição 3.1.14. O objetivo do restante da seção é, a partir das hipóteses da Proposição 3.1.14, verificar as hipóteses do lema a seguir, de forma a obtermos a propriedade de Shadowing de forma uniforme numa vizinhança de T em $\text{Lip}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$.

Seja $\{E_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de espaços de Banach (podendo ser de dimensão infinita) e considere uma sequência de aplicações $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\phi_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$$

tais que,

$$\phi_k(v) = A_k v + \omega_{k+1}(v)$$

com A_k linear e ω_{k+1} podendo ser não linear. Então, podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema B.5.5 ((SANTAMARÍA, 2013)). Assuma que

(1) Existem projeções lineares

$$P_k, Q_k : E_k \rightarrow E_k$$

e constantes $\lambda_1 \in (0, 1)$, $J > 0$ tais que

$$\|P_k\|_{\mathcal{L}(E_k, E_k)}, \|Q_k\|_{\mathcal{L}(E_k, E_k)} \leq J, P_k + Q_k = I$$

e

$$\|A_k|_{P_k(E_k)}\|_{\mathcal{L}(E_k, E_{k+1})} \leq \lambda_1, A_k P_k(E_k) \subset P_{k+1}(E_{k+1})$$

com I a identidade.

(2) Existem aplicações lineares $B_k : Q_{k+1}(E_{k+1}) \rightarrow E_k$ tais que

$$B_k Q_{k+1}(E_{k+1}) \subset Q_k(E_k), \|B_k\|_{\mathcal{L}(E_k, E_{k+1})} \leq \lambda_1, A_k B_k|_{Q_{k+1}(E_{k+1})} = I.$$

(3) Existem constantes $\kappa, \Delta > 0$ tais que

$$\|\omega_{k+1}(v) - \omega_{k+1}(v')\|_{E_{k+1}} \leq \kappa \|v - v'\|_{E_{k+1}} \quad \text{para } \|v\|_{E_{k+1}}, \|v'\|_{E_{k+1}} \leq \Delta.$$

Suponha também que a desigualdade

$$\kappa N_1 < 1$$

é satisfeita com

$$N_1 = J \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1}.$$

Então, existem constantes $d_0, L > 0$ dependendo somente de $\lambda_1, J, \Delta, \kappa$ tais que, se

$$\|\phi_k(0)\|_{E_{k+1}} \leq d \leq d_0, k \in \mathbb{Z},$$

então existe uma sequência de pontos $v_k \in E_k, k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\phi_k(v_k) = v_{k+1} \quad \text{e} \quad \|v_k\|_{E_k} \leq Ld, k \in \mathbb{Z}.$$

Com o auxílio do Lema B.5.5, provamos da propriedade Lipschitz Shadowing em uma pequena vizinhança de um equilíbrio $\mathcal{L}$ -hiperbólico. Este resultado é a Proposição 3.2.5, e a prova segue abaixo.

Prova da Proposição 3.2.5. Sem perda de generalidade, suponha $x^* = 0$ $\mathcal{L}$ -hiperbólico com parâmetros γ, a, b, δ . Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $A_n := L, P_n := P := \pi_s, Q_n := Q := \pi_u, E_n := X, B_n := L_u^{-1} : X_u \rightarrow X$. Seja

$$\phi_n(v) := T(v + x_n) - x_{n+1} = A_n v + \omega_{n+1}(v),$$

com $\omega_{n+1}(v) := N(v + x_n) + Lx_n - x_{n+1}$. Então, $\text{Lip}_{B_\delta^x(0)}(\omega_{n+1}) = \text{Lip}_{B_\delta^x(0)}(N) \leq \gamma =: \kappa$. Sejam $\lambda_1 := \max\{b, a^{-1}\}$, $J := \max\{\|P\|, \|Q\|\}$ e $N_1 := J \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1}$. Note que

$$\kappa N_1 < 1 \Leftrightarrow \gamma < \frac{1}{J} \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1}.$$

Assim, tomando $\Delta \in (0, \delta)$, podemos aplicar o Lema B.5.5 e o resultado segue. $\square$

A seguir, enunciamos o último resultado técnico, de (SANTAMARÍA, 2013), que usamos na prova da Proposição 3.1.14.

Lema B.5.6 ((SANTAMARÍA, 2013)). Seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Morse-Smale gradient-like. Seja $\{S(q), U(q)\}_{q \in \mathcal{U}}$ a família de subespaços de $\mathbb{R}^m$ obtida no Lema B.5.4. Então, dados $v > 0$ e $N \in \mathbb{N}$, existe $d_0 > 0$ tal que se $z, p \in \mathcal{U}$ e

$$\text{dist}(z, T^N p), \text{dist}(T^{-N} z, p) < d_0,$$

então existe um isomorfismo linear $\Pi(p, z) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com

$$\|\Pi - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq v, \quad \Pi(p, z)(D(T^N)(p)S(p)) \subset S(z),$$

e um isomorfismo linear $\Theta(p, z) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com

$$\|\Theta - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq v, \quad \Theta(p, z)(D(T^{-N})(z)U(z)) \subset U(p).$$

Prova da Proposição 3.1.14

A prova deste resultado consiste basicamente em aplicar o Lema B.5.5 com o auxílio dos outros lemas desta seção. Aqui, nosso foco é provar as hipóteses do Lema B.5.5. Dividiremos a prova em 2 passos:

Passo 1: Prova da Propriedade Lipschitz Shadowing para T

Primeiro, provaremos o resultado para $(d, \mathbf{N})$ -pseudo-trajetórias, $d \leq d_0$, com $\mathbf{N}$ e d_0 a serem determinados. Em seguida, com um pequeno passo, mostraremos a propriedade de Lipschitz Shadowing para d -pseudo-trajetórias.

Como $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação Morse-Smale, temos $T \in C^1(\mathbb{R}^m)$. Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ dado pelo Lema B.5.4. Então, segue para cada $q \in \mathcal{U}$, existem subespaços $S(q), U(q)$ de $\mathbb{R}^m$ que satisfazem as condições do Lema B.5.4. Em particular, existem $C > 0$ e $\lambda_0 \in (0, 1)$ tais que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} |D(T^n)(q)v^s| &\leq C\lambda_0^n |v^s|, \quad v^s \in S(q); \\ |D(T^{-n})(q)v^u| &\leq C\lambda_0^n |v^u|, \quad v^u \in U(q). \end{aligned}$$

Fixemos $\mu \in (0, 1)$ e consideremos $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ tal que

$$C\lambda_0^{\mathbf{N}-1} \leq \mu. \tag{B.45}$$

Com isto, temos que para cada $q \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} |D(T^n)(q)v^s| &\leq \mu|v^s|, \quad v^s \in S(q); \\ |D(T^{-n})(q)v^u| &\leq \mu|v^u|, \quad v^u \in U(q). \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

para todo $n \geq \mathbf{N} - 1$. Além disso, tomando $K \geq J$ tal que

$$\|D(T^n)(q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq K \quad \text{para } |n| \leq \mathbf{N} + 1, \text{ e } q \in \mathcal{U}, \quad (\text{B.47})$$

onde J é a constante tal que $\|P(q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}, \|Q(q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq J$ para todo $q \in \mathcal{U}$.

Afim de obtermos as hipóteses do Lema B.5.5 e, por razões técnicas, tomaremos $v_0 \in (0, 1)$ tal que $\lambda := (1 + v_0)\mu < 1$. Então, para este λ e para J do Lema B.5.4, denotamos $N_1 := J \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ e fixamos $\kappa > 0$ tal que $\kappa N_1 < 1$. Além disso, tomaremos $v \in (0, v_0)$ tal que

$$K(2K + 1)v < \frac{\kappa}{2}. \quad (\text{B.48})$$

Para aplicar o Lema B.5.5, necessitamos de uma sequência de espaços de Banach $\{E_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e uma sequência de aplicações $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$ uma $(d, \mathbf{N})$ -pseudo-trajetória negativa de T em $\mathcal{U}$. Definimos a extensão $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ da seguinte forma: se $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \{k\mathbf{N}, \dots, (k+1)\mathbf{N} - 1\}$, então $x_n := T^{(k+1)\mathbf{N}}x_{-\mathbf{N}+(n-k\mathbf{N})}$. Então, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma $(d, \mathbf{N})$ -pseudo-trajetória de T em $\mathcal{U}$. Definimos $E_k := \mathbb{R}^m$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Seja $\mathcal{T}$ a $\mathbf{N}$ -ésima iteração de T ; isto é, $\mathcal{T}(q) := T^{\mathbf{N}}(q)$. Então, definimos

$$\phi_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$$

por

$$\phi_k(v) := \mathcal{T}(x_k + v) - x_{k+1}.$$

Assim, $D\phi_k(0) = D\mathcal{T}(x_k)$ e $D\phi_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$.

Note que podemos escrever

$$\phi_k(v) = D\phi_k(0) + \underbrace{\phi_k(v) - D\phi_k(0)v}_{h_{k+1}(v)} = D\phi_k(0)v + h_{k+1}(v).$$

Como $T \in C^1(\mathbb{R}^m)$, segue que $Dh_{k+1}(0) = 0$. Além disso,

$$|h_{k+1}(v) - h_{k+1}(v')| = |\mathcal{T}(x_k + v) - \mathcal{T}(x_k + v') - D\mathcal{T}(x_k)(v - v')|.$$

Então, como a derivada de $\mathcal{T}$ é uniformemente contínua em limitados de $\mathbb{R}^m$, segue que existe $\Delta > 0$ tal que

$$|h_{k+1}(v) - h_{k+1}(v')| \leq \frac{\kappa}{4}|v - v'| \quad \text{para } v, v' \in \mathbb{R}^m \text{ com } |v|, |v'| \leq \Delta. \quad (\text{B.49})$$

Como mencionamos antes, para $\{x_k\} \subset \mathcal{U}$, existe uma família de subespaços lineares $S(x_k), U(x_k)$ de E_k e sua correspondente família de projeções $P(x_k), Q(x_k)$ com

$$\begin{aligned} S(x_k) &= P(x_k)E_k, \\ U(x_k) &= Q(x_k)E_k \end{aligned}$$

que satisfazem as propriedades descritas no Lema B.5.4.

Além disso, pelo Lema B.5.4, podemos relacionar $S(x_k)$ com $S(\mathcal{T}(x_k))$ e $U(x_k)$ com $U(\mathcal{T}(x_k))$. Mas para obtermos a propriedade de Lipschitz Shadowing para T , precisaremos relacionar $S(x_k)$ com $S(x_{k+1})$ e $U(x_k)$ com $U(x_{k+1})$. É neste ponto que faremos uso do Lema B.5.6. Fixe $\delta_1 > 0$ tal que, se

$$\text{dist}(x_k, \mathcal{T}^{-1}(x_{k+1})), \text{dist}(\mathcal{T}(x_k), x_{k+1}) < \delta_1, \quad (\text{B.50})$$

então existem os isomorfismos lineares $\Pi(x_k, x_{k+1})$ e $\Theta(x_k, x_{k+1})$, dados pelo Lema B.5.6, tais que

$$\|\Pi(x_k, x_{k+1}) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}, \|\Theta(x_k, x_{k+1}) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq \nu,$$

com $\nu \in (0, \nu_0)$ (ver (B.48)).

Note que, se $c := \max\{1, \text{Lip}((\mathcal{T}|_{\mathcal{U}})^{-1})\}$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$ é uma $(d, \mathbb{N})$ -pseudo trajetória de T em $\mathcal{U}$ com $d < \delta_1/c$, então (B.50) é satisfeita para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Note também que, se $\nu \in (0, 1)$ e $\|\Theta(x_k, x_{k+1}) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq \nu$, então, para cada $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\|\Theta(x_k, x_{k+1})x\| = \|x - (x - \Theta(x_k, x_{k+1})x)\| \geq (1 - \nu)\|x\|,$$

e então,

$$\|\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1})x - x\| = \|\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1})(x - \Theta(x_k, x_{k+1})x)\| \leq \frac{\nu}{1 - \nu}\|x\|.$$

Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\|\Pi(x_k, x_{k+1}) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}, \|\Theta(x_k, x_{k+1}) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}, \|\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1}) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq \nu < \nu_0. \quad (\text{B.51})$$

Definimos

$$\begin{aligned} A_k^s &:= \Pi(x_k, x_{k+1})D\mathcal{T}(x_k)P(x_k) \\ A_k^u &:= D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}))\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1})Q(x_k), \end{aligned}$$

e

$$B_k := \Theta(x_k, x_{k+1})D\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}).$$

Isto é, A_k^s relaciona os espaços $S(x_k)$ e $S(x_{k+1})$, A_k^u relaciona os espaços $U(x_k)$ e $U(x_{k+1})$ e B_k relaciona os espaços $U(x_{k+1})$ e $U(x_k)$.

Agora, $\phi_k(v)$ pode ser escrita como segue,

$$\phi_k(v) = A_k v + \omega_{k+1}(v),$$

com

$$A_k := A_k^s + A_k^u,$$

e

$$\omega_{k+1}(v) = \phi_k(v) - A_k v = [D\mathcal{T}(x_k) - A_k]v + h_{k+1}(v).$$

Nosso próximo passo é provar que A_k, B_k e ω_{k+1} satisfazem as condições do Lema B.5.5. Com este fim, tomamos $v^s \in S(x_k) = P(x_k)E_k$. Segue do Lema B.5.4 e de (B.46) que

$$D\mathcal{T}(x_k)v^s \in S(\mathcal{T}(x_k)) \text{ e } |D\mathcal{T}(x_k)v^s| \leq \mu|v^s|.$$

Segue do Lema B.5.6 que $\Pi(x_k, x_{k+1})(D\mathcal{T}(x_k)v^s) \in S(x_{k+1})$, e portanto,

$$A_k^s S(x_k) \subset S(x_{k+1}).$$

De (B.51) e (B.46), obtemos

$$|\Pi(x_k, x_{k+1})(D\mathcal{T}(x_k)v^s)| \leq (1 + \nu)\mu|v^s| \leq \lambda|v^s|,$$

com $\lambda := (1 + \nu_0)\nu < 1$ definido anteriormente. Assim,

$$\|A_k^s|_{S(x_k)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq \lambda.$$

Agora, tomemos $v'' \in U(x_{k+1})$. Do Lema B.5.6, obtemos

$$B_kv'' = \Theta(x_k, x_{k+1})D\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1})v'' \in U(x_k), \quad (\text{B.52})$$

e, de (B.51) e (B.46),

$$|\Theta(x_k, x_{k+1})D\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1})v''| \leq (1 + \nu)\mu|v''| \leq \lambda|v''|.$$

Logo,

$$B_k U(x_{k+1}) \subset U(x_k), \quad \|B_k|_{U(x_{k+1})}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq \lambda.$$

Seja $v^1 = B_kv''$. De (B.52), obtemos $v^1 \in U(x_k)$, $Q(x_k)v^1 = v^1$. Então,

$$\begin{aligned} A_k^u B_k v'' &= D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}))\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1})Q(x_k)v^1 \\ &= D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}))\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1})(\Theta(x_k, x_{k+1})D\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}))v'' = v''. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_k^u B_k|_{U(x_{k+1})} = I.$$

Como $A_k|_{S(x_k)} = A_k^s$, segue que $A_k B_k|_{U(x_{k+1})} = A_k^u B_k|_{U(x_{k+1})}$, e portanto, A_k, B_k satisfazem as condições do Lema B.5.5.

Como $D\mathcal{T}$ é uniformemente contínua em limitados de $\mathbb{R}^m$, segue que existe $\delta_2 > 0$ tal que, se

$$\text{dist}(x_k, \mathcal{T}^{-1}(x_{k+1})) < \delta_2,$$

então

$$\|D\mathcal{T}(x_k) - D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq \nu. \quad (\text{B.53})$$

Note que, se $c := \max\{1, \text{Lip}((\mathcal{T}|_{\mathcal{U}})^{-1})\}$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-} \subset \mathcal{U}$ é uma $(d, \mathbb{N})$ -pseudo-trajetória negativa de T com $d < \delta_2/c$, então $\text{dist}(x_k, \mathcal{T}^{-1}(x_{k+1})) < \delta_2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Resta mostrar que $\{\omega_{k+1}\}$ satisfaz as hipóteses do Lema B.5.5; isto é, que ω_{k+1} satisfaz a condição de Lipschitz. Recordando,

$$\omega_{k+1}(v) := (D\mathcal{T}(x_k) - A_k)v + h_{k+1}(v).$$

Então, para $d \in (0, \delta_2]$, primeiro estimamos $\|D\mathcal{T}(x_k) - A_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}$,

$$\begin{aligned} \|D\mathcal{T}(x_k) - A_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} &= \|D\mathcal{T}(x_k)(P(x_k) + Q(x_k)) - A_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq \|D\mathcal{T}(x_k)P(x_k) - A_k^s\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} + \|D\mathcal{T}(x_k)Q(x_k) - A_k^u\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq \|D\mathcal{T}(x_k)P(x_k) - \underbrace{\Pi(x_k, x_{k+1})D\mathcal{T}(x_k)P(x_k)}_{A_k^s}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \\ &\quad + \|D\mathcal{T}(x_k)Q(x_k) - \underbrace{D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}))\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1})Q(x_k)}_{A_k^u}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

De (B.46) e (B.51), o primeiro termo é estimado como segue,

$$\|D\mathcal{T}(x_k)P(x_k) - \Pi(x_k, x_{k+1})D\mathcal{T}(x_k)P(x_k)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq K^2 v.$$

Como $d \in (0, \delta_2]$, segue de (B.53) que

$$\begin{aligned} &\|D\mathcal{T}(x_k)Q(x_k) - D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}))\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1})Q(x_k)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq K\|D\mathcal{T}(x_k) - D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}))\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1})\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \\ &= K\|D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}))(\Theta^{-1}(x_k, x_{k+1}) - I) + D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1}) - D\mathcal{T}(x_k))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq K^2 v + K\|D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(x_{k+1})) - D\mathcal{T}(x_k)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq K^2 v + Kv = vK(K+1). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|D\mathcal{T}(x_k) - A_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leq K^2 v + vK(K+1) = vK(2K+1) \leq \frac{\kappa}{2},$$

com a última desigualdade dada por (B.48). Como (B.49) vale, então obtemos a desejada estimativa

$$|\omega_{k+1}(v) - \omega_{k+1}(v')| \leq \frac{3}{4}\kappa|v - v'| \leq \kappa|v - v'|, \quad v, v' \in \mathbb{R}^m \text{ com } |v|, |v'| \leq \Delta. \quad (\text{B.54})$$

Assim, se $d < \delta_3 := \frac{1}{c} \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ satisfaz as condições do Lema B.5.5.

Pelo Lema B.5.5, existem constantes $d^*, L > 0$ dependendo somente de $\lambda, J, \Delta, \kappa$ tais que, se

$$|\phi_k(0)| \leq d \leq d^*, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.55})$$

então existe uma sequência $\{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\phi_k(v_k) = v_{k+1} \text{ e } |v_k| \leq Ld, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.56})$$

Por outro lado, como $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{U}$ é uma $(d, \mathbf{N})$ -pseudo-trajetória de T , segue que

$$|\phi_k(0)| = |\mathcal{T}(x_k) - x_{k+1}| = |T^{\mathbf{N}}(x_k) - x_{k+1}| \leq d, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, se $d_0 \in (0, \min\{\delta_3, d^*\})$ e $d \leq d_0$, então (B.56) segue.

Seja $\mathbf{p}_k = x_k + v_k$. Como $\phi_k(v) := \mathcal{T}(x_k + v) - x_{k+1}$ satisfaz (B.56), segue que

$$\mathcal{T}(\mathbf{p}_k) = \mathbf{p}_{k+1},$$

isto é, $\{\mathbf{p}_k\}_{k \in \mathbb{Z}^-}$ é uma trajetória negativa de $\mathcal{T}$. Além disso, para $k \in \mathbb{Z}^-$,

$$|\mathbf{p}_k - x_k| = |(x_k + v_k) - x_k| = |v_k| \leq Ld, \quad \text{com } d \leq d_0.$$

Então, acabamos de provar que $T^{\mathbf{N}}$ tem Lipschitz Shadowing para d -pseudo-trajetória sobre $\mathcal{U}$. A seguir, provaremos este resultado para T . Seja $d \leq d_1$ (d_1 será determinado a seguir) e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$ uma d -pseudo-trajetória negativa de T em $\mathcal{U}$. Seja L_T a constante de Lipschitz de T em $\mathcal{U}$. Então,

$$\begin{aligned} |y_{(k+1)\mathbf{N}} - T^{\mathbf{N}}y_{k\mathbf{N}}| &\leq |y_{(k+1)\mathbf{N}} - T(y_{(k+1)\mathbf{N}-1})| + |T(y_{(k+1)\mathbf{N}-1}) - T^2(y_{(k+1)\mathbf{N}-2})| \\ &\quad + \dots + |T^{\mathbf{N}-1}y_{k\mathbf{N}+1} - T^{\mathbf{N}}y_{k\mathbf{N}}| \\ &\leq d(1 + L_T + \dots + L_T^{\mathbf{N}-1}) := \tilde{d}. \end{aligned}$$

Assim, escolhemos $d_1 > 0$ tal que $d_1(1 + L_T + \dots + L_T^{\mathbf{N}-1}) = d_0$. Logo, $\{y_{k\mathbf{N}}\}_{k \in \mathbb{Z}^-}$ é uma $\tilde{d}$ -pseudo-trajetória negativa de $\mathcal{T}$ e portanto existe $\{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}^-}$ trajetória negativa de $\mathcal{T}$ que $L\tilde{d}$ -shadows a $\tilde{d}$ -pseudo-trajetória negativa $\{y_{k\mathbf{N}}\}_{k \in \mathbb{Z}^-}$.

Defina $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$ da seguinte forma: se $n \in \{k\mathbf{N}, \dots, (k+1)\mathbf{N} - 1\} \cap \mathbb{Z}^-$, então $x_n := T^{n-k\mathbf{N}}(p_k)$. Então, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$ é uma trajetória negativa de T .

Seja $n \in \{k\mathbf{N}, \dots, (k+1)\mathbf{N} - 1\}$. Então,

$$\begin{aligned} |x_n - y_n| &\leq |T^{n-k\mathbf{N}}(y_{k\mathbf{N}}) - T^{n-k\mathbf{N}}(y_{k\mathbf{N}})| + |T^{n-k\mathbf{N}}(y_{k\mathbf{N}}) - y_n| \\ &\leq L_T^{n-k\mathbf{N}}|p_k - y_{k\mathbf{N}}| + d(1 + L_T + \dots + L_T^{n-k\mathbf{N}-1}) \\ &\leq L_T^{n-k\mathbf{N}}L\tilde{d} + \max\{1, L\}d(1 + L_T + \dots + L_T^{n-k\mathbf{N}-1}) \\ &\leq \max\{1, L\}(1 + L_T + \dots + L_T^{\mathbf{N}-1})\tilde{d} \\ &= \max\{1, L\}(1 + L_T + \dots + L_T^{\mathbf{N}-1})^2d, \end{aligned}$$

e portanto $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}^-}$ é L_1d -shadowed pela trajetória negativa $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$ com

$$L_1 = \max\{1, L\}(1 + L_T + \dots + L_T^{\mathbf{N}-1})^2,$$

e $d \leq d_1$. Isto prova que T tem a propriedade Lipschitz Shadowing sobre $\mathcal{U}$ com parâmetros L_1, d_1

Passo 2: Prova da propriedade Lipschitz Shadowing para perturbações Lipschitz pequenas de T

Seja d_0 do passo 1 e fixe $\bar{d} \in (0, d_0)$. Seja $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ uma $(d, \mathbf{N})$ -pseudo-trajetória de S em $\mathcal{U}$ com $d \leq \bar{d}$. Então,

$$|z_{n+1} - S^{\mathbf{N}} z_n| \leq d, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

e portanto

$$|z_{n+1} - T^{\mathbf{N}} z_n| \leq d + \|T^{\mathbf{N}} - S^{\mathbf{N}}\|_{L^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Suponha que

$$\|T^{\mathbf{N}} - S^{\mathbf{N}}\|_{L^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)} \leq d_0 - \bar{d}. \quad (\text{B.57})$$

Então, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma $(d_0, \mathbf{N})$ -pseudo-trajetória de T em $\mathcal{U}$ e podemos repetir os argumentos do passo 1 para obtermos

$$\bar{\phi}_k(v) := S^{\mathbf{N}}(v + z_k) - z_{k+1} = A_k + \underbrace{\omega_{k+1}(v) + (S^{\mathbf{N}} - T^{\mathbf{N}})(v + z_k)}_{\bar{\omega}_{k+1}(v)}.$$

Seja $\kappa > 0$ escolhido no início do passo 1. Assim, se

$$\|S^{\mathbf{N}} - T^{\mathbf{N}}\|_{\text{Lip}(\mathcal{O}_{d_0}(\mathcal{U}), \mathbb{R}^m)} \leq \frac{\kappa}{4}, \quad (\text{B.58})$$

então, de (B.54) obtemos

$$|\bar{\omega}_{k+1}(v) - \bar{\omega}_{k+1}(v')| \leq \kappa |v - v'|, \quad v, v' \in \mathbb{R}^m \quad \text{com} \quad |v|, |v'| \leq d_0, \quad (\text{B.59})$$

e, aplicando o Lema B.5.5, obtemos (como no passo 1) uma órbita negativa $\{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$ de $S^{\mathbf{N}}$ tal que

$$|q_n - z_n| \leq Ld, \quad \text{com} \quad d \leq \bar{d},$$

com L dado no passo 1. Analogamente, obtemos para S a propriedade de Lipschitz Shadowing sobre $\mathcal{U}$ com constantes $L_{1,S}, d_{1,S}$ definidas por

$$\begin{aligned} d_{1,S} &:= \bar{d}(1 + L_S + \cdots + L_S^{\mathbf{N}-1})^{-1}; \\ L_{1,S} &:= \max\{1, L\}(1 + L_S + \cdots + L_S^{\mathbf{N}-1})^2. \end{aligned}$$

Como $L_{1,S}$ e $d_{1,S}$ são funções contínuas (em S) de $\text{Lip}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ em $\mathbb{R}$, segue que, dado $\delta > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$\|S - T\|_{\text{Lip}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)} < \delta' \quad (\text{B.60})$$

implica que

$$\begin{aligned} d_{1,T} - \delta &\leq d_{1,S} \leq d_{1,T} + \delta; \\ L_{1,T} - \delta &\leq L_{1,S} \leq L_{1,T} + \delta. \end{aligned}$$

Seja $\delta > 0$ tal que (B.57) e (B.58) também sejam válidas. Então, para todo S na vizinhança $\mathcal{O}$ de T definida por (B.60), temos que S tem Lipschitz Shadowing com constantes $L^0 := L_{1,T} + \delta$ e $d^0 = d_{1,T} - \delta$ e a prova está completa.

B.6 Prova do Teorema 3.3.1

Temos a seguinte decomposição $X = X_u \oplus X_s$, $L = L_u \oplus L_s$ com

$$\sigma(L_u) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > a\} \text{ e } \sigma(L_s) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < b\},$$

onde $L_j = L|_{X_j}$, $j = u, s$, para algum $b < \rho < a$.

Escolhemos normas equivalentes em X_u e X_s tais que $\|L_u^{-1}\| \leq a^{-1}$ e $\|L_s\| \leq b$, respectivamente, e em $X = X_u \oplus X_s$ usamos a norma do máximo dada por $\|x_u + x_s\| := \max\{\|x_u\|, \|x_s\|\}$.

Também vamos escolher γ pequeno tal que

$$b + 2\gamma < \rho < a - 2\gamma. \quad (\text{B.61})$$

Nesta decomposição, S toma valores da forma

$$\begin{aligned} S: X_u \times X_s &\rightarrow X_u \times X_s \\ (x_u, x_s) &\mapsto (L_u x_u + N_u(x_u + x_s), L_s x_s + N_s(x_u + x_s)), \end{aligned}$$

com $\text{Lip} N_u, \text{Lip} N_s \leq \gamma$, onde $N_j = \pi_j \circ N$ e $\pi_j : X \rightarrow X_j$ é a projeção de X em X_j , $j = u, s$.

Nosso objetivo é encontrar W_ρ^u na forma $\{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_u\}$, para alguma aplicação Lipschitz $\theta : X_u \rightarrow X_s$ com $\theta(0) = 0$ e $\text{Lip } \theta \leq 1$.

A condição $SW_\rho^u \subset W_\rho^u$ implica que, para cada $\xi \in X_u$, existe $\hat{\xi} \in X_u$ com $S(\xi + \theta(\xi)) = \hat{\xi} + \theta(\hat{\xi})$; isto é,

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_u \xi + N_u(\xi + \theta(\xi)) \\ \theta_*(\hat{\xi}) = L_s \theta(\xi) + N_s(\xi + \theta(\xi)) \end{cases} \quad (\text{B.62})$$

com $\theta_* = \theta$, onde θ é o ponto fixo da aplicação $\theta \mapsto \theta_*$ definida por (B.62).

Vamos mostrar que esta aplicação de fato tem um ponto fixo θ e então, que $W_\rho^u := \{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_u\}$ satisfaz a condição dada neste teorema.

Seja $\theta : X_u \rightarrow X_s$ uma aplicação Lipschitz com $\theta(0) = 0$ e $\text{Lip } \theta \leq 1$. Então, a aplicação $\xi \mapsto -L_u^{-1}N_u(\xi + \theta(\xi))$ é uma contração em X_u , pois

$$\begin{aligned} \|-L_u^{-1}N_u(\xi_1 + \theta(\xi_1)) + L_u^{-1}N_u(\xi_2 + \theta(\xi_2))\| &\leq a^{-1}\gamma[\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\theta(\xi_1) - \theta(\xi_2)\|] \leq \\ &\leq 2a^{-1}\gamma\|\xi_1 - \xi_2\|, \end{aligned}$$

e $2a^{-1}\gamma < 1$. Portanto, para cada $\hat{\xi} \in X_u$, existe um único $\xi \in X_u$ satisfazendo a primeira equação em (B.62) pois, para cada $\hat{\xi} \in X_u$, a aplicação

$$X_u \ni \xi \mapsto L_u^{-1}\hat{\xi} - L_u^{-1}N_u(\xi + \theta(\xi)) \in X_u \quad (\text{B.63})$$

é uma contração, e portanto tem um único ponto fixo $\xi \in X_u$.

Assim, (B.62) define uma aplicação $\theta_* : X_u \rightarrow X_s$, com $\theta_*(0) = 0$. Dado $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2 \in X_u$, com $\xi_1, \xi_2 \in X_u$ sendo os pontos fixos correspondentes pela aplicação dada em (B.63), temos que

$$\begin{aligned} \|\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2\| &= \|L_u \xi + N_u(\xi_1 + \theta(\xi_1)) - L_u \xi_2 - N_u(\xi_2 + \theta(\xi_2))\| \\ &\geq \|L_u(\xi_1 - \xi_2)\| - \gamma[\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\theta(\xi_1) - \theta(\xi_2)\|] \\ &\geq (a - 2\gamma)\|\xi_1 - \xi_2\|. \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} \|\theta_*(\hat{\xi}_1) - \theta_*(\hat{\xi}_2)\| &= \|L_s \theta(\xi_1) + N_s(\xi_1 + \theta(\xi_1)) - L_s \theta(\xi_2) - N_s(\xi_2 + \theta(\xi_2))\| \\ &\leq b\|\theta(\xi_1) - \theta(\xi_2)\| + \gamma[\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\theta(\xi_1) - \theta(\xi_2)\|] \\ &\leq (b + 2\gamma)\|\xi_1 - \xi_2\|, \end{aligned} \tag{B.64}$$

portanto $\|\theta_*(\hat{\xi}_1) - \theta_*(\hat{\xi}_2)\| \leq \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\|\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2\|$; isto é, $\text{Lip } \theta_* \leq \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma} < 1$.

O conjunto $\mathcal{F}$ constituído de todas as aplicações Lipschitz $\theta : X_u \rightarrow X_s$ com $\theta(0) = 0$, $\text{Lip } \theta \leq 1$ com distância dada por

$$d(\theta, \tau) = \sup_{\substack{\xi \in X_u \\ \xi \neq 0}} \frac{\|\theta(\xi) - \tau(\xi)\|}{\|\xi\|},$$

é um espaço métrico completo, e a aplicação $\theta \mapsto \theta_*$ toma valores $\mathcal{F}$ em si mesmo. Nosso objetivo agora é provar que esta aplicação é também uma contração em $\mathcal{F}$. Sejam θ, τ duas aplicações em $\mathcal{F}$ e $\hat{\xi} \in X_u$. Defina $\xi_\theta, \xi_\tau \in X_u$ por

$$\hat{\xi} = L_u \xi_\theta + N_u(\xi_\theta + \theta(\xi_\theta)) = L_u \xi_\tau + N_u(\xi_\tau + \tau(\xi_\tau)).$$

Temos que $\|\hat{\xi}\| \geq (a - 2\gamma)\|\xi_\theta\|$ e

$$\begin{aligned} a\|\xi_\theta - \xi_\tau\| &\leq \|N_u(\xi_\theta + \theta(\xi_\theta)) - N_u(\xi_\tau + \tau(\xi_\tau))\| \\ &\leq \gamma[\|\xi_\theta - \xi_\tau\| + \|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\|] \\ &\leq \gamma[\|\xi_\theta - \xi_\tau\| + \|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\theta)\| + \|\tau(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\|] \\ &\leq \gamma[\|\xi_\theta - \xi_\tau\| + d(\theta, \tau)\|\xi_\theta\| + \|\xi_\theta - \xi_\tau\|] \\ &\leq \gamma[2\|\xi_\theta - \xi_\tau\| + d(\theta, \tau)\|\xi_\theta\|], \end{aligned}$$

e assim

$$\|\xi_\theta - \xi_\tau\| \leq \frac{\gamma d(\theta, \tau)}{a - 2\gamma}\|\xi_\theta\| \leq \frac{\gamma d(\theta, \tau)}{(a - 2\gamma)^2}\|\hat{\xi}\|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\theta_*(\hat{\xi}) - \tau_*(\hat{\xi})\| &= \|L_s\theta(\xi_\theta) + N_s(\xi_\theta + \theta(\xi_\theta)) - L_s\tau(\xi_\tau) - N_s(\xi_\tau + \tau(\xi_\tau))\| \\
&\leq b\|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\| + \gamma[\|\xi_\theta - \xi_\tau\| + \|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\|] \\
&\leq (b + \gamma)\|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\| + \gamma\|\xi_\theta - \xi_\tau\| \\
&\leq (b + \gamma)[\|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\theta)\| + \|\tau(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\|] + \gamma\|\xi_\theta - \xi_\tau\| \\
&\leq (b + \gamma)d(\theta, \tau)\|\xi_\theta\| + (b + 2\gamma)\|\xi_\theta - \xi_\tau\| \\
&\leq d(\theta, \tau)\|\hat{\xi}\| \left[\frac{b + \gamma}{a - 2\gamma} + \frac{\gamma}{a - 2\gamma} \cdot \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma} \right] \\
&\leq d(\theta, \tau)\|\hat{\xi}\| \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma},
\end{aligned}$$

o que implica que

$$d(\theta_*, \tau_*) \leq \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma} d(\theta, \tau), \text{ com } \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma} < 1,$$

e portanto a aplicação $\theta \mapsto \theta_*$ é uma contração em $\mathcal{F}$. Seja θ o ponto fixo desta aplicação. Usando a equação (B.64) para este ponto fixo, obtemos

$$\|\theta(\hat{\xi}_1) - \theta(\hat{\xi}_2)\| \leq \frac{(b + \gamma)\text{Lip } \theta + \gamma}{a - 2\gamma} \|\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2\|,$$

consequentemente $\text{Lip } \theta \leq \frac{(b + \gamma)\text{Lip } \theta + \gamma}{a - 2\gamma}$, o que implica que

$$\text{Lip } \theta \leq \frac{\gamma}{a - b - 3\gamma} < 1. \quad (\text{B.65})$$

Agora definimos

$$W_\rho^u := \{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_u\}.$$

Primeiramente afirmamos que $SW_\rho^u = W_\rho^u$, e para provar isto, seja $x = \xi + \theta(\xi) \in W_\rho^u$. Temos $Sx = \hat{\xi} + \hat{\eta}$, com $\hat{\xi} \in X_u$, $\hat{\eta} \in X_s$, $\hat{\xi} = L_u\xi + N_u(\xi + \theta(\xi))$ e $\hat{\eta} = L_s\theta(\xi) + N_s(\xi + \theta(\xi)) = \theta(\hat{\xi})$, pela definição de θ . Assim, $SW_\rho^u \subset W_\rho^u$. Por outro lado, $\hat{\xi} = L_u\xi + N_u(\xi + \theta(\xi))$ e assim $S(\xi + \theta(\xi)) = \hat{\xi} + \theta(\hat{\xi})$, o que prova que $W_\rho^u \subset SW_\rho^u$ e isto conclui a afirmação.

Agora, se $x = \xi + \theta(\xi)$ e $z = \zeta + \theta(\zeta)$ são pontos de W_ρ^u , $Sx = \hat{\xi} + \theta(\hat{\xi})$ e $Sz = \hat{\zeta} + \theta(\hat{\zeta})$ então $\|x - z\| = \max\{\|\xi - \zeta\|, \|\theta(\xi) - \theta(\zeta)\|\} = \|\xi - \zeta\|$, pois $\|\theta(\xi) - \theta(\zeta)\| \leq \|\xi - \zeta\|$. Também

$$\|Sx - Sz\| = \|\hat{\xi} - \hat{\zeta}\| \geq (a - 2\gamma)\|\xi - \zeta\| = (a - 2\gamma)\|x - z\|,$$

e $a - 2\gamma > \rho$, o que prova (iii) para W_ρ^u ; isto é,

$$\text{Lip}(S|_{W_\rho^u}^{-1}) \leq (a - 2\gamma)^{-1} < \rho^{-1}.$$

Dado $x \in W_\rho^u$, existe $\{x_j\}_{j < 0}$ em W_ρ^u tal que $S^{j|}x_j = x$ e $S(x_{j+1}) = x_j$, para todo $j < 0$ com $x_0 := x$ (pois $SW_\rho^u = W_\rho^u$). Também

$$\|x_{j+1}\| = \|S(x_j) - S(0)\| \geq (a - 2\gamma)\|x_j\|,$$

e assim a aplicação $j \mapsto \frac{\|x_j\|}{(a-2\gamma)^j}$ é crescente pois

$$\frac{\|x_j\|}{(a-2\gamma)^j} \leq \frac{\|x_{j+1}\|}{(a-2\gamma)^{j+1}}, \text{ for all } j < 0,$$

o que prova que $\frac{\|x_j\|}{(a-2\gamma)^j} \leq \|x\|$, e então, $\|x_j\| \leq \|x\|(a-2\gamma)^j = o(\rho^j)$ quando $j \rightarrow -\infty$. Portanto

$$W_\rho^u \subset \{x \in X : \text{existe } \{x_j\}_{j \leq 0} \text{ com } x_0 = x, \\ x_{j+1} = S(x_j), \text{ e } \sup_{j \leq 0} \rho^{-j} \|x_j\| < \infty\}.$$

Sejam $x \in X$, $\{x_j\}_{j \leq 0}$, com $x_0 = x$, tal que $T(x_j) = x_{j+1}$, para todo $j < 0$ e $\|x_j\| = O(\rho^j)$ quando $j \rightarrow -\infty$. Escrevemos $x_j = \xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j$, onde $\xi_j \in X_u$, $\eta_j \in X_s$ e como $T(x_j) = x_{j+1}$, temos que

$$L_u \xi_j + N_u(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j) + L_s[\theta(\xi_j) + \eta_j] + N_s(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j) = \\ = \xi_{j+1} + \theta(\xi_{j+1}) + \eta_{j+1},$$

isto é,

$$\begin{cases} \xi_{j+1} = L_u \xi_j + N_u(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j) \\ \theta(\xi_{j+1}) + \eta_{j+1} = L_s(\theta(\xi_j) + \eta_j) + N_s(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j) \end{cases}$$

e se $\hat{\xi}_j := L_u \xi_j + N_u(\xi_j + \theta(\xi_j))$ então $\theta(\hat{\xi}_j) = L_s \theta(\xi_j) + N_s(\xi_j + \theta(\xi_j))$. Também $\|\hat{\xi}_j - \xi_{j+1}\| \leq \gamma \|\eta_j\|$ e

$$\begin{aligned} \|\eta_{j+1}\| - \|\xi_{j+1} - \hat{\xi}_j\| &\leq \|\theta(\xi_{j+1}) + \eta_{j+1} - \theta(\hat{\xi}_j)\| \leq \\ &\leq b \|\eta_j\| + \gamma \|\eta_j\| = (b + \gamma) \|\eta_j\|, \end{aligned}$$

o que implica que $\|\eta_{j+1}\| \leq (b + 2\gamma) \|\eta_j\|$.

Como $\|\xi_j\| \leq \|x_j\| = \max\{\|\xi_j\|, \|\theta(\xi_j) + \eta_j\|\} = O(\rho^j)$, segue que $\|\xi_j\| = O(\rho^j)$ e portanto $\|\eta_j\| = \|x_j - \xi_j - \theta(\xi_j)\| \leq \|x_j\| + 2\|\xi_j\| = O(\rho^j)$ quando $j \rightarrow -\infty$. Mas $\|\eta_j\| \geq (b + 2\gamma)^j \|\eta_0\|$ para todo $j \leq 0$, e então, existe $c > 0$ tal que $\|\eta_0\| \leq \frac{\|\eta_j\|}{(b+2\gamma)^j} \leq c(\frac{\rho}{b+2\gamma})^j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow -\infty$, o que mostra que $\eta_0 = 0$ e $x = x_0 = \xi_0 + \theta(\xi_0) \in W_\rho^u$, que conclui a prova de (v) para W_ρ^u .

Provemos (vi), e para isto definimos $\hat{P} : X \rightarrow W_\rho^u$ por $\hat{P}x = x_u + \theta(x_u)$, para $x = x_u + x_s$, e para $n \geq 0$ definimos

$$P_n = \left(S|_{W_\rho^u}\right)^{-n} \circ \hat{P} \circ S^n.$$

Se $S^n x = \xi_n + \theta(\xi_n) + \eta_n$, $\xi_n \in X_u$, $\eta_n \in X_s$, o cálculo anterior mostra que $\|\eta_{n+1}\| \leq (b + 2\gamma) \|\eta_n\|$ e $\|\eta_n\| \leq (b + 2\gamma)^n \|\eta_0\|$. Mas $\|\eta_0\| = \|x - \xi_0 - \theta(\xi_0)\| = \|x - \hat{P}x\|$, e então, $\|\eta_n\| \leq (b + 2\gamma)^n \|x - \hat{P}x\|$.

Também temos que

$$\begin{cases} S^{n+1} P_{n+1} x = S^{n+1} \left(S|_{W_\rho^u}\right)^{-(n+1)} \hat{P} S^{n+1} x = \hat{P} S^{n+1} x = \xi_{n+1} + \theta(\xi_{n+1}) \\ \xi_{n+1} + \theta(\xi_{n+1}) + \eta_{n+1} = S^{n+1} x = S(S^n x) = S(\xi_n + \theta(\xi_n) + \eta_n) \\ S^{n+1} P_n x = S^{n+1} \left(S|_{W_\rho^u}\right)^{-n} \hat{P} S^n x = S \hat{P} S^n x = S(\xi_n + \theta(\xi_n)) = \hat{\xi} + \theta(\hat{\xi}) \end{cases}$$

Além disso, $\|\xi_{n+1} - \hat{\xi}\| = \|L_u \xi_n + N_u(\xi_n + \theta(\xi_n) + \eta_n) - L_u \xi_n - N_u(\xi_n + \theta(\xi_n))\| \leq \gamma \|\eta_n\|$ e, como $\text{Lip}(S|_{W_\rho^u}) \leq (a - 2\gamma)^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} (a - 2\gamma)^{n+1} \|P_{n+1}x - P_nx\| &\leq \|S^{n+1}P_{n+1}x - S^{n+1}P_nx\| \leq \\ (1 + \text{Lip}(\theta)) \|\xi_{n+1} - \hat{\xi}_n\| &\leq 2\gamma \|\eta_n\| \leq 2\gamma(b + 2\gamma)^n \|x - \hat{P}x\|, \end{aligned}$$

e portanto $\|P_{n+1}x - P_nx\| \leq \frac{2\gamma}{a-2\gamma} \left(\frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^n \|x - \hat{P}x\|$ para todo $n \geq 0$; o que prova que $\{P_nx\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de Cauchy, para cada $x \in X$, pois

$$\begin{aligned} \|P_mx - P_nx\| &\leq \frac{\gamma}{a-2\gamma} \|x - \hat{P}x\| \sum_{k=n}^m \left(\frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^k \\ &\leq \frac{\gamma}{a-2\gamma} \|x - \hat{P}x\| \left(\frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^n \left(1 - \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Definindo $P : X \rightarrow W_\rho^u$ por $Px := \lim_{n \rightarrow \infty} P_nx$ para cada $x \in X$, e fazendo $m \rightarrow \infty$ na equação anterior, obtemos

$$\|Px - P_nx\| \leq C \left(\frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^n \|x - \hat{P}x\| \leq C \left(\frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^n K, \quad C := \frac{2\gamma}{a-b},$$

para $x \in \bar{B}_{\delta(x_0)}$, $x_0 \in X$, onde $K = \sup_{x \in \bar{B}_{\delta(x_0)}} \|x - \hat{P}x\|$; o que mostra que P é o limite, uniforme em limitados, da sequência $\{P_n\}_{n \geq 0}$ de aplicações contínuas e prova que $P : X \rightarrow W_\rho^u$ é contínua. Também, tomando $n = 0$ na inequação acima, $P_0 = \hat{P}$ e $\|Px - \hat{P}x\| \leq C\|x - \hat{P}x\|$, obtemos $\|Px - x\| \leq (C + 1)\|x - \hat{P}x\|$ e como $SP_{n+1}x = P_nSx$, segue que $SPx = PSx$, para todo $x \in X$.

Seja $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ em W_ρ^u tal que $\|x - x_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \text{dist}(x, W_\rho^u)$. Então,

$$\|\hat{P}x - x\| \leq \|\hat{P}(x - x_m) + (x_m - x)\| \leq 2\|x_m - x\|,$$

e então, $\|Px - x\| \leq 2(1 + C)\text{dist}(x, W_\rho^u)$.

Como $S^n x = \xi_n + \theta(\xi_n) + \eta_n$ com $\xi_n + \theta(\xi_n) \in W_\rho^u$, temos

$$\text{dist}(S^n x, W_\rho^u) \leq \|\eta_n\| \leq (b + 2\gamma)^n \|x - \hat{P}x\| \leq 2(C + 1)(b + 2\gamma)^n \text{dist}(x, W_\rho^u),$$

o que termina a prova para W_ρ^u .

Para o caso $W_\rho^s = \{\sigma(\eta) + \eta : \eta \in X_s\}$, $\sigma : X_s \rightarrow X_u$, a condição $SW_\rho^s \subset W_\rho^s$ implica que para todo $\eta \in X_s$ existe $\hat{\eta} \in X_s$ com

$$\begin{cases} \sigma(\hat{\eta}) = L_u \sigma_*(\eta) + N_u(\sigma(\eta) + \eta), \\ \hat{\eta} = L_s \eta + N_s(\sigma(\eta) + \eta), \end{cases} \quad (\text{B.66})$$

com $\sigma_* = \sigma$ e o restante da prova é completamente análogo.

Finalizando, vamos mostrar que $W_\rho^s \cap W_\rho^u = \{0\}$. Se $x = \xi + \eta \in W_\rho^s \cap W_\rho^u$, então $\xi = \sigma(\eta)$ e $\eta = \theta(\xi)$. Assim, $\xi = \sigma(\theta(\xi))$ e $\|\xi\| \leq \text{Lip } \sigma \cdot \text{Lip } \theta \|\xi\|$, portanto $\xi = 0$ e implica que $\eta = 0$, consequentemente $x = 0$.

Observação B.6.1. Segue da equação (B.65), que $\text{Lip } \theta \rightarrow 0$ quando $\gamma \rightarrow 0$.

B.7 Diferenciabilidade de operadores de Nemytskii

Esta seção está baseada nos resultados de (BREZIS, 1983) e (FOLLAND, 1999), e aqui provamos basicamente que a diferenciabilidade de operadores de Nemytskii de $L^p(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ de funções reais implica que a função é afim. Começamos revendo o Teorema da Convergência Dominada Inverso e, para este fim, consideramos Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ e $p \geq 1$.

Teorema B.7.1 (Convergência Dominada Inverso). Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$. Então, existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

- (i) $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ a.e. em Ω ;
- (ii) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo k , a.e. em Ω .

Demonstração. Ver (BREZIS, 1983). □

Lema B.7.2. Considere uma função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(s)| \leq c(1 + |s|^p)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $c \geq 0$ é uma constante, e defina o operador de Nemytskii $f^e: L^p(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ associado com f por $f^e(u)(x) = f(u(x))$ para cada $x \in \Omega$ e $u \in L^p(\Omega)$. Então, f^e está bem definido e é contínuo.

Demonstração. Seja $u \in L^p(\Omega)$ e $\{u_n\}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ que converge para u . Do Teorema B.7.1, existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ a.e. em Ω e $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo k , a.e. em Ω .

Consequentemente $|f(u_{n_k}(x))| \leq c(1 + |u_{n_k}(x)|^p) \leq C(1 + |h(x)|^p)$ e do Teorema da Convergência Dominada temos

$$\int_{\Omega} |f(u_{n_k}(x)) - f(u(x))| dx \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty,$$

e como este limite não depende da sequência $\{u_n\}$, obtemos a continuidade de f^e em u . □

O seguinte lema tem uma prova simples e vai ajudar-nos a seguir.

Lema B.7.3. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e globalmente Lipschitz, então seu operador de Nemytskii está bem definido de $L^p(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ e é globalmente Lipschitz.

Usaremos também o seguinte resultado.

Lema B.7.4. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e globalmente Lipschitz com f^e sendo Fréchet diferenciável em $u_0 \in L^p(\Omega)$, então $[Df^e(u_0)h](x) = f'(u_0(x))h(x)$ para cada $h \in L^p(\Omega)$, a.e. em Ω .

Demonstração. Como f^e é Fréchet diferenciável em $u_0 \in L^p(\Omega)$, para cada $h \in L^p(\Omega)$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \frac{f(u_0(x) + th(x)) - f(u_0(x))}{t} - [Df^e(u_0)h](x) \right|^p = 0,$$

e disto segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(u_0(x) + th(x)) - f(u_0(x))}{t} - [Df^e(u_0)h](x) \right\} = 0, \text{ a.e. in } \Omega,$$

o que implica que $[Df^e(u_0)h](x) = f'(u(x))h(x)$ a.e. em Ω . $\square$

Recordamos o Teorema de Diferenciação de Lebesgue, que será usado para provar o principal resultado desta seção.

Teorema B.7.5 (Teorema de Diferenciação de Lebesgue). Seja $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e defina

$$A_r g(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} g(y) dy, \text{ para cada } 0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega).$$

Então, $A_r g(x) \rightarrow g(x)$ quando $r \rightarrow 0^+$, a.e. em Ω .

Demonstração. Ver (FOLLAND, 1999) para a prova deste resultado. $\square$

Agora estamos prontos para estabelecer o principal resultado desta seção.

Teorema B.7.6. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e globalmente Lipschitz e seu operador de Nemytskii f^e é Fréchet diferenciável num ponto $u_0 \in L^p(\Omega)$, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(s) = as + b$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Defina $g_s(y) = |f(u_0(y) + s) - f(u_0(y)) - f'(u_0(y))s|^p$ para cada $s \in \mathbb{R}$ e $y \in \Omega$. Do Teorema B.7.5 segue que, fixado $x \in \Omega$, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} A_r g_s(x) = g_s(x) \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \setminus E_x,$$

onde E_x é um conjunto de medida de Lebesgue zero. Se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $g_s(x_0) = 0$ para quase todo $s \in \mathbb{R}$ então temos que $f(u_0(x_0) + s) = f(u_0(x_0)) + f'(u_0(x_0))s$ para quase todo $s \in \mathbb{R}$ e o resultado está provado. Se não valesse a afirmação acima, então para cada $x \in \Omega$, existiria um conjunto de medida positiva $S_x \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $g_s(x) \neq 0$ para todo $s \in S_x$. Como E_x é de medida nula, segue que dado $x \in \Omega$, existe $s_x \in S_x \cap (\mathbb{R} \setminus E_x)$ e, conseqüentemente $g_{s_x}(x) \neq 0$.

Sejam $s_0 \neq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R} \setminus E_{s_0}$ tais que $g_{s_0}(x_0) > 0$. Seja $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$ e $u_r = s_0 \chi_{B_r(x_0)}$. Como f^e é Fréchet diferenciável em u_0 , Lema B.7.4 implica que $[Df^e(u)h](x) = f'(u(x))h(x)$ q.s em Ω . Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|u_r\|_{L^p(\Omega)}^p} \int_{\Omega} |f(u_0(y) + u_r(y)) - f(u_0(y)) - f'(u_0(y))u_r(y)|^p dy \\ & \geq \frac{1}{\|u_r\|_{L^p(\Omega)}^p} \int_{B_r(x_0)} |f(u_0(y) + s_0) - f(u_0(y)) - f'(u_0(y))s_0|^p dy \\ & = \frac{1}{|s_0|^p} A_r g_{s_0}(x_0) \rightarrow \frac{g_{s_0}(x_0)}{|s_0|^p} \text{ quando } r \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

e como $g_{s_0}(x_0) > 0$, obtemos uma contradição com a Fréchet-diferenciabilidade de f^e em u_0 . $\square$

REFERÊNCIAS

ADAMS, R. A. **Sobolev spaces**. [S.l.]: Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. xviii+268 p. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Citado na página 142.

AMANN, H. **Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995. v. 89. xxxvi+335 p. (Monographs in Mathematics, v. 89). Abstract linear theory. ISBN 3-7643-5114-4. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-9221-6>. Citado nas páginas 49 e 147.

ARRIETA, J. M.; BEZERRA, F. D. M.; CARVALHO, A. N. Rate of convergence of global attractors of some perturbed reaction-diffusion problems. **Topol. Methods Nonlinear Anal.**, v. 41, n. 2, p. 229–253, 2013. ISSN 1230-3429. Citado na página 19.

ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; PEREIRA, M. C.; SILVA, R. P. Semilinear parabolic problems in thin domains with a highly oscillatory boundary. **Nonlinear Anal.**, v. 74, n. 15, p. 5111–5132, 2011. ISSN 0362-546X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2011.05.006>. Citado na página 142.

BABIN, A. V.; VISHIK, M. I. **Attractors of evolution equations**. [S.l.]: North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992. v. 25. x+532 p. (Studies in Mathematics and its Applications, v. 25). Translated and revised from the 1989 Russian original by Babin. ISBN 0-444-89004-1. Citado nas páginas 9, 11, 19, 20 e 23.

BEZERRA, F. **Taxa de convergência de atratores de algumas equações de reação-difusão perturbadas**. 1–147 p. Tese (PhD Thesis) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC). Universidade de São Paulo, São Carlos - SP - Brasil, 2009. Citado nas páginas 19 e 62.

BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle**. [S.l.]: Masson, Paris, 1983. xiv+234 p. (Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]). Théorie et applications. [Theory and applications]. ISBN 2-225-77198-7. Citado nas páginas 142 e 168.

BRUSCHI, S. M.; CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W.; DLOTKO, T. Uniform exponential dichotomy and continuity of attractors for singularly perturbed damped wave equations. **J. Dynam. Differential Equations**, v. 18, n. 3, p. 767–814, 2006. ISSN 1040-7294. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10884-006-9023-4>. Citado nas páginas 32 e 138.

CARVALHO, A. Notas de aula. **Equações Parabólicas Semilineares**. [s.n.], 2001. 1–106 p. (Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/sg.pdf>). Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/sg.pdf>. Citado na página 60.

_____. Notas de aula. **Sistemas dinâmicos não-lineares**. [s.n.], 2012. 1–273 p. (Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/SDNL2012.pdf>). Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/SDNL2012.pdf>. Citado nas páginas 24, 25, 26, 96 e 111.

_____. Notas de aula. **Análise Funcional II**. [s.n.], 2016. 1–299 p. (Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/AnaliseFuncional-II/AnaliseFuncional-II.pdf>). Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/AnaliseFuncional-II/AnaliseFuncional-II.pdf>>. Citado nas páginas 26, 44, 60 e 78.

CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W. Exponential global attractors for semigroups in metric spaces with applications to differential equations. **Ergodic Theory Dynam. Systems**, v. 31, n. 6, p. 1641–1667, 2011. ISSN 0143-3857. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1017/S0143385710000702>>. Citado nas páginas 9, 11, 20 e 133.

CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W.; DŁOTKO, T. Equi-exponential attraction and rate of convergence of attractors with application to a perturbed damped wave equation. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A**, v. 144, n. 1, p. 13–51, 2014. ISSN 0308-2105. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1017/S0308210511001235>>. Citado nas páginas 19, 23, 28, 30 e 31.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. **Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems**. Springer, New York, 2013. v. 182. xxxvi+409 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 182). ISBN 978-1-4614-4580-7; 978-1-4614-4581-4. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-4581-4>>. Citado nas páginas 19, 32, 35, 51 e 62.

CHAFEE, N.; INFANTE, E. F. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. **Applicable Anal.**, v. 4, p. 17–37, 1974/75. Citado na página 114.

CIORANESCU, D.; DONATO, P. **An introduction to homogenization**. [S.l.]: The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999. v. 17. x+262 p. (Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, v. 17). ISBN 0-19-856554-2. Citado nas páginas 20, 142 e 143.

FOLLAND, G. B. **Real analysis**. Second. New York: John Wiley & Sons Inc., 1999. xvi+386 p. (Pure and Applied Mathematics (New York)). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-31716-0. Citado nas páginas 168 e 169.

HALE, J. K. **Asymptotic behavior of dissipative systems**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 1988. v. 25. x+198 p. (Mathematical Surveys and Monographs, v. 25). ISBN 0-8218-1527-X. Citado nas páginas 19, 23 e 75.

HENRY, D. Manuscript. **Invariant manifolds near a fixed point**. [s.n.]. 1–55 p. (Disponível em: <https://www.ime.usp.br/map/dhenry/danhenry/main.htm>). Disponível em: <https://www.ime.usp.br/map/dhenry/danhenry/main.htm>>. Citado nas páginas 71, 72, 80, 81, 82 e 90.

_____. **Geometric theory of semilinear parabolic equations**. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. v. 840. iv+348 p. (Lecture Notes in Mathematics, v. 840). ISBN 3-540-10557-3. Citado nas páginas 35, 36, 69, 114 e 119.

_____. Some infinite-dimensional morse-smale systems defined by parabolic partial differential equations. **Journal of Differential Equations**, v. 59, n. 2, p. 165–205, 1985. Citado na página 115.

_____. Manuscript. **Dichotomies, hyperbolic sets, shadowing lemma and chaos**. [s.n.], 1994. 1–16 p. (Disponível em: <https://www.ime.usp.br/map/dhenry/danhenry/main.htm>). Disponível em: <https://www.ime.usp.br/map/dhenry/danhenry/main.htm>>. Citado na página 77.

HENRY, D. B. Exponential dichotomies, the shadowing lemma and homoclinic orbits in Banach spaces. **Resenhas**, v. 1, n. 4, p. 381–401, 1994. ISSN 0104-3854. Dynamical phase transitions (São Paulo, 1994). Citado na página 77.

JIKOV, V. V.; KOZLOV, S. M.; NIK, O. A. O. **Homogenization of differential operators and integral functionals**. Springer-Verlag, Berlin, 1994. xii+570 p. Translated from the Russian by G. A. Yosifian [G. A. Iosif/yan]. ISBN 3-540-54809-2. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-84659-5>>. Citado na página 66.

KATO, T. Note on fractional powers of linear operators. **Proc. Japan Acad.**, v. 36, p. 94–96, 1960. ISSN 0021-4280. Citado nas páginas 119 e 126.

_____. **Perturbation theory for linear operators**. Berlin: Springer-Verlag, 1995. xxii+619 p. Reprint of the 1980 edition. ISBN 3-540-58661-X. Citado nas páginas 46, 106 e 119.

LIMA, E. L. **Curso de análise. Vol. 2**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981. v. 2. ix+547 p. (Projeto Euclides [Euclid Project], v. 2). Citado na página 76.

PALIS, J. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977. Citado na página 80.

PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. Springer-Verlag, New York, 1983. v. 44. viii+279 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 44). ISBN 0-387-90845-5. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>>. Citado nas páginas 20 e 119.

PEREIRA, M. C.; SILVA, R. P. d. Rates of convergence for a homogenization problem in highly oscillating thin domains. In: **Dynamic systems and applications. Vol. 6**. [S.l.]: Dynamic, Atlanta, GA, 2012. p. 337–340. Citado nas páginas 20 e 142.

PILYUGIN, S. Y. **Shadowing in dynamical systems**. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1999. v. 1706. xviii+271 p. (Lecture Notes in Mathematics, v. 1706). ISBN 3-540-66299-5. Citado na página 72.

ROBINSON, J. C. **Infinite-dimensional dynamical systems**. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. xviii+461 p. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors. ISBN 0-521-63204-8. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-0732-0>>. Citado na página 19.

SANTAMARÍA, E. **Distance of Attractors of Evolutionary Equations**. 1–177 p. Tese (PhD Thesis) — Universidad Complutense de Madrid, Madrid - Spain, 2013. Citado nas páginas 9, 11, 21, 72, 74, 77, 151, 153, 154, 155 e 156.

TAYLOR, A. E. **Introduction to functional analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London, 1958. xvi+423 p. Citado na página 119.

VAINIKKO, G. **Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden**. [S.l.]: B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1976. 136 p. Mit Englischen und Russischen Zusammenfassungen, Teubner-Texte zur Mathematik. Citado na página 44.