Existência de Soluções Periódicas Para
Uma Classe de Equações Diferenciais
Funcionais Retardadas e Aplicações

MARCIO ROBERTO WEISSMANN

Orientadora: PROFA. DRA. SANDRA M. S. DE GODOY

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de
São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título
de "Mestre em Ciências - Área: Matemática".*

USP - São Carlos
Abril de 1997

À minha família

AGRADECIMENTOS

À orientadora e amiga Sandra Maria Semensato de Godoy, pela forma competente, dedicada e entusiasmada que sempre nos orientou.

À minha família, pelo apoio e compreensão ao longo destes anos.

Ao grande amigo Toninho, pelo apoio e companheirismo durante os anos de graduação e pós-graduação.

Às amigas e companheiras de graduação e pós-graduação: Simone, Ana e Regina, pela agradável convivência, apoio e colaboração durante estes anos.

A todos os professores com os quais trabalhei e convivi, em especial a Oziride Manzoli Neto (Dide), Hermínio Cassago Junior, Ires Dias, Alexandre Nolasco de Carvalho, Maria Aparecida Soares Ruas, Luiz Augusto da Costa Ladeira, Sérgio Luís Zani, Valdir Antonio Menegatto e Claudio Martins Mendes do ICMSC-USP e a Nativi Viana Pereira Bertolo, Rosa Lucia Sverzut Baroni e Solange Mancini do IGCE-UNESP-Rio Claro, pela forma receptiva e satisfatória com que sempre nos atenderam.

Aos meus amigos: André, Claudemir, Carlos, Anderson, Roger, Alexandra, Sarita, Sofia, Adriana, Nelson, Ivan, Luis Carlos, Lauro, Luciana, Sadao, Katia, Marta, Regilene, Marcão, José Hilário, Marcelo, Ana Paula, Silvana, Andrea, Veridiana e outros que por ventura não foram citados, pela presença e apoio durante estes anos.

A todos os funcionários do ICMSC-USP, pela disposição com que sempre nos atenderam.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro empregado na realização deste trabalho.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente cooperaram para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

We are concerned with the equation:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)), \quad \lambda > 0. \quad (0.1)$$

Under some general hypotheses on $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, we firstly state the existence of slowly oscillating periodic solutions of (0.1).

After this, the existence of an unbounded continuum of such solutions that appears by Hopf bifurcation is established.

Finally, some applications on biological and phisical models are made.

RESUMO

Estamos interessados no estudo da equação:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)), \quad \lambda > 0. \quad (0.1)$$

Sob algumas hipóteses gerais a respeito de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nós primeiramente investigamos a existência de soluções periódicas lentamente oscilantes de (0.1).

Em seguida, a existência de um contínuo ilimitado de tais soluções que aparece por bifurcação de Hopf é estabelecida.

Finalmente, algumas aplicações a modelos biológicos e físicos são feitas.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	3
2 Existência de soluções periódicas	7
3 Existência de um contínuo global de soluções periódicas lentamente oscilantes	29
4 Aplicações a modelos físicos e biológicos	47
Bibliografia	63

Introdução

Neste trabalho, estudamos a equação diferencial retardada:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)), \quad \lambda > 0, \quad (0.1)$$

sob certas hipóteses gerais em $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não linear.

Esta equação e outras similares a esta, têm sido abordadas em diferentes áreas da ciência, motivando o seu estudo, cada vez mais abrangente, por parte de vários autores. Veja [6], [7], [8], [10], [12], [13], [15], [16] e [19].

A nossa motivação inicial foi o trabalho [16] de Mallet-Paret e Nussbaum, onde, para provar a existência de um contínuo ilimitado de soluções periódicas lentamente oscilantes, os autores assumem a existência de soluções periódicas da equação (0.1).

No Capítulo 1, apresentamos algumas definições e fatos básicos, juntamente com resultados sobre a Teoria Geral das Equações Diferenciais Funcionais Retardadas, que serão utilizados posteriormente.

No Capítulo 2, inspirados em [9], mostramos a existência de soluções periódicas lentamente oscilantes da equação (0.1). A idéia básica consiste na escolha de um cone apropriado de funções iniciais, o qual é levado em si próprio por um certo operador de retorno definido pelo fluxo. Um ponto fixo não nulo deste operador corresponderá a uma solução periódica não constante de (0.1). Também, neste capítulo, fizemos uma análise completa e detalhada da equação característica da equação linear associada a (0.1).

No Capítulo 3, baseados em [16], mostramos que (0.1) possui um contínuo ilimitado de soluções periódicas lentamente oscilantes que emanam de um ponto de bifurcação de Hopf $\lambda = \lambda_0$. Para isto, fizemos uso de um teorema de bifurcação global devido a Nussbaum [22] e que também pode ser encontrado em [11].

No Capítulo 4, fizemos diversas aplicações dos resultados obtidos a modelos matemáticos, que envolvem a equação (0.1) ou equações que podem ser transformadas em equações do tipo (0.1) e que surgem, por exemplo, em biologia, óptica e ecologia.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados básicos e outros mais gerais da teoria das equações diferenciais retardadas, que serão utilizados no decorrer desta dissertação.

Seja $r \geq 0$ e $C = C[-r, 0]$ o espaço de Banach das funções contínuas de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ com a norma

$$|\phi| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|, \quad \forall \phi \in C.$$

Seja $D \subseteq \mathbb{R} \times C$.

Então $C(D, \mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções contínuas de D em $\mathbb{R}^n$ e $C^0(D, \mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções contínuas e limitadas de D em $\mathbb{R}^n$.

Este espaço $C^0(D, \mathbb{R}^n) \subseteq C(D, \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach com a norma:

$$|f| = \sup_{(t, \varphi) \in D} |f(t, \varphi)|.$$

Se $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ e $x \in C[\sigma - r, \sigma + A]$, então para qualquer $t \in [\sigma, \sigma + A]$, $x_t \in C$ é definida por:

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Se $D \subseteq \mathbb{R} \times C$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada, consideramos a equação diferencial funcional retardada (EDFR) sobre D :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (1.1)$$

Se quisermos enfatizar que esta equação é definida pela função f denotamos EDFR (f) .

Definição 1.1 *Uma função x é dita ser uma solução da equação (1.1) sobre $[\sigma - r, \sigma + A]$ se existirem $\sigma \in \mathbb{R}$ e $A > 0$ tais que $x \in C[\sigma - r, \sigma + A]$, $(t, x_t) \in D$ e $x(t)$ satisfaz a equação (1.1) para $t \in [\sigma, \sigma + A]$.*

Para dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$, dizemos que $x(\sigma, \phi, f)$ é uma solução da equação (1.1) por (σ, ϕ) se existir $A > 0$ tal que $x(\sigma, \phi, f)$ é uma solução da equação (1.1) sobre $[\sigma - r, \sigma + A)$ e $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$.

Com estas notações, temos os seguintes resultados básicos, que se encontram demonstrados em [11]:

Teorema 1.1 (Existência) *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto em $\mathbb{R} \times C$ e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se $(\sigma, \phi) \in \Omega$, então existe uma solução da EDFR (f^0) por (σ, ϕ) .*

Mais geralmente, se $W \subseteq \Omega$ é compacto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é dada, então existe uma vizinhança $V \subseteq \Omega$ de W tal que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, existe uma vizinhança $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de f^0 e um $\alpha > 0$ tal que, para cada $(\sigma, \phi) \in W$, $f \in U$, existe uma solução $x(\sigma, \phi, f)$ da EDFR (f) por (σ, ϕ) que existe sobre $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.

Teorema 1.2 (Dependência Contínua) *Suponhamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ seja aberto, $(\sigma^0, \phi^0) \in \Omega$, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e x^0 uma solução da EDFR(f^0) por (σ^0, ϕ^0) que existe e é única sobre $[\sigma^0 - r, b]$. Seja $W^0 \subseteq \Omega$ o conjunto compacto definido por:*

$$W^0 = \{(t, x_t) \mid t \in [\sigma^0, b]\}$$

e seja V^0 uma vizinhança de W^0 sobre a qual f^0 é limitada. Se (σ^k, ϕ^k, f^k) , $k = 1, 2, \dots$ satisfaz $\sigma^k \rightarrow \sigma^0$, $\phi^k \rightarrow \phi^0$ e $|f^k - f^0|_{V^0} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, então existe um k^0 tal que a EDFR (f^k) para $k \geq k^0$ é tal que cada solução $x^k = x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ através de (σ^k, ϕ^k) existe sobre $[\sigma^k - r, b]$ e $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente sobre $[\sigma^0 - r, b]$. Como nem todas x^k podem ser definidas sobre $[\sigma^0 - r, b]$, por $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente sobre $[\sigma^0 - r, b]$, entendemos que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $k_1(\varepsilon)$ tal que $x^k(t)$, $k \geq k_1(\varepsilon)$, é definida sobre $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$ e $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente sobre $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$.

Faremos uso dos seguintes conceitos:

Definição 1.2 *Seja D um subconjunto fechado de um espaço de Banach e $F : D \rightarrow D$ uma aplicação contínua. Um ponto fixo $\bar{x}$ de F é um ponto fixo atrator de F se existir uma vizinhança aberta V de $\bar{x}$ tal que para cada vizinhança U de $\bar{x}$ e $x \in V$, existe um inteiro N tal que $F^n(x) \in U$ para $n \geq N$.*

Definição 1.3 *Seja D um subconjunto fechado de um espaço de Banach e $F : D \rightarrow D$ uma aplicação contínua. Um ponto fixo $\bar{x}$ de F é um ponto fixo ejetivo de F se existir uma vizinhança aberta U de $\bar{x}$, tal que para todo $x \in U$ com $x \neq \bar{x}$ existe um inteiro $n = n(x)$ para o qual $F^n(x) \notin U$.*

A seguir enunciaremos alguns resultados que utilizaremos no decorrer deste trabalho.

Teorema 1.3 (Ascoli-Arzelá)

Sejam K um espaço métrico compacto e $E \subset C(K, \mathbb{R}^m)$. Suponhamos que exista $N > 0$ tal que $|f(x)| \leq N$, para quaisquer $x \in K$, $f \in E$ e que E seja equicontínuo. Então E é relativamente compacto.

Este Teorema pode ser encontrado em [1].

Teorema 1.4 *Seja D um conjunto limitado, fechado e convexo de dimensão infinita em um espaço de Banach, e seja $F : D \rightarrow D$ contínua e compacta. Então F tem um ponto fixo que não é ejetivo.*

Este Teorema é uma generalização do Teorema do Ponto Fixo de Schauder e sua demonstração foi feita em [2].

As considerações abaixo referem-se ao Teorema de Bifurcação de Hopf.

Consideremos uma família a um parâmetro de equações diferenciais funcionais retardadas da forma:

$$\dot{x}(t) = F(\alpha, x_t), \quad (1.2)$$

onde $F(\alpha, \phi)$ tem primeira e segunda derivadas contínuas em relação a α e ϕ , para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ e $F(\alpha, 0) = 0$ para todo α .

Definimos $L : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ por:

$$L(\alpha)\psi = F_\phi(\alpha, 0)\psi,$$

onde $F_\phi(\alpha, 0)$ é a derivada de $F(\alpha, \phi)$ com respeito a ϕ em $\phi = 0$.

Consideremos as seguintes hipóteses:

- (I) A $\text{EDFR}(L(0))$ linear tem uma raiz característica imaginária pura simples $\lambda_0 = i\nu_0 \neq 0$ e todas raízes características $\lambda_j \neq \lambda_0, \overline{\lambda_0}$ satisfazem $\lambda_j \neq m\lambda_0$ para qualquer inteiro m .

Como $L(\alpha)$ é continuamente diferenciável em relação a α , de acordo com [11] (Lema 2.2, Seção 7.2), existe $\alpha_0 > 0$ e uma raiz característica simples $\lambda(\alpha)$ da equação $\text{EDFR}(L(\alpha))$ linear, que possui derivada contínua $\lambda'(\alpha)$ em α , para $|\alpha| < \alpha_0$.

- (II) $\text{Re}(\lambda'(0)) \neq 0$.

Teorema 1.5 (Bifurcação de Hopf)

Suponhamos que $F(\alpha, \phi)$ seja continuamente diferenciável com respeito a α e ϕ , $F(\alpha, 0) = 0$ para todo α e que as hipóteses (I) e (II) estejam satisfeitas. Então, existem constantes a_0 , α_0 , δ_0 e funções continuamente diferenciáveis em a , $\alpha(a) \in \mathbb{R}$, $\omega(a) \in \mathbb{R}$ e $x^(a)$, $\omega(a)$ -periódica, para $|a| < a_0$, tais que $x^*(a)$ é uma solução da equação (1.2). Além disso, para $|\alpha| < \alpha_0$, $\left| \omega - \left(\frac{2\pi}{\nu_0} \right) \right| < \delta_0$, as soluções x^* são as únicas ω -periódicas da equação (1.2) com $|x_t| < \delta_0$, exceto por uma translação de fase.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [11].

Capítulo 2

Existência de soluções periódicas

Neste capítulo, mostraremos a existência de soluções periódicas lentamente oscilantes da equação:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)), \quad \lambda > 0, \quad (2.1)$$

sob certas hipóteses gerais em f .

Em geral, assumiremos que a função f satisfaz a seguinte hipótese:

(H1) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Existem constantes positivas A e B tais que:

$$f([-B, A]) \subseteq [-B, A] \quad \text{e} \\ xf(x) < 0 \quad \text{se } x \in [-B, A], x \neq 0.$$

Também $f(x) = f(-B)$ se $x < -B$ e $f(x) = f(A)$ se $x > A$.

A condição $xf(x) < 0$ se $x \neq 0$ é usualmente denominada condição de “feedback negativa”.

Estamos interessados em soluções periódicas de (2.1) que satisfazem a seguinte definição:

Definição 2.1 *Uma solução $x(t)$ de (2.1) é chamada uma solução periódica lentamente oscilante se existirem números $z_1 > 0$ e $z_2 > z_1 + 1$ tais que:*

- $x(-1) = 0$.
- $x(t) > 0$ quando $-1 < t < z_1$.
- $x(t) < 0$ quando $z_1 < t < z_2$.
- $x(t + 1 + z_2) = x(t)$, para todo t .

É claro que $x(z_1) = x(z_2) = 0$.

O termo *lentamente* na Definição 2.1 refere-se ao fato que a separação de zeros de $x(t)$ é maior que o retardo (no nosso caso igual a 1).

O principal resultado deste capítulo é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Suponhamos que f satisfaça (H1) e seja diferenciável na origem com $f'(0) = -k$, $k > 1$. Seja $\lambda > \lambda_0$, onde $\lambda_0 = \frac{\gamma_0}{\sqrt{k^2 - 1}}$ e $\cos \gamma_0 = -\frac{1}{k}$, $\gamma_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Então a equação diferencial (2.1) possui uma solução periódica lentamente oscilante não constante.*

A prova do Teorema 2.1 será baseada na definição de ponto fixo ejetivo, no Teorema 1.4 e nos lemas abaixo.

Observemos inicialmente que, para qualquer função inicial $\varphi \in C[-1, 0]$, uma solução da equação retardada (2.1) existe para todo $t \geq 0$. Em intervalos limitados, a solução depende uniformemente continuamente dos dados iniciais.

A representação implícita desta solução é:

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda f(x(s-1)) ds + e^{-\lambda(t-t_0)} x(t_0), \quad t \geq t_0, \quad (2.2)$$

com $t_0 = 0$.

A solução da equação (2.1) correspondente à função inicial $\varphi \in C[-1, 0]$ será denotada por $x(\cdot; \varphi)$. A norma do supremo em $C[-1, 0]$ será denotada $\|\cdot\|$.

Seja $\lambda > 0$ fixado.

Definimos:

$$K_\lambda = \{\varphi \in C[-1, 0] \mid \varphi(-1) = 0, e^{\lambda t} \varphi(t) \text{ é não decrescente em } [-1, 0]\}.$$

Definimos também $(K_\lambda)_0 = K_\lambda - \{0\}$.

Lema 2.1 *Suponhamos que a função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tenha a propriedade $f(x)x < 0$ para $x \neq 0$ e que existam números $\vartheta > 0$ e $c > \frac{1}{e^\lambda - 1}$ tais que:*

$$|f(x)| \geq c|x| \quad \text{para } |x| \leq \vartheta.$$

Seja $x(t) = x(t; \varphi)$ a solução correspondente à função inicial $\varphi \in (K_\lambda)_0$. Então:

- 1) x tem zeros enumeráveis $z_1 < z_2 < z_3 < \dots$
- 2) $z_1 > 0$; $z_{n+1} - z_n > 1$ para $n = 1, 2, \dots$

3) $\dot{x}(z_{2k-1}) < 0$, $\dot{x}(z_{2k}) > 0$ para $k = 1, 2, \dots$

4) A função $e^{\lambda t}x(t)$ é não crescente em cada um dos intervalos $(z_{2k-1}, z_{2k-1}+1)$ e não decrescente em cada um dos intervalos $(z_{2k}, z_{2k}+1)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

5) Para todo $M > 0$ existe uma constante $C_M > 0$ tal que de $\|\varphi\| \leq M$ segue $z_2 \leq C_M$.

Prova: Observe-mos inicialmente que, com as nossas hipóteses, uma aplicação do Teorema do Valor Médio garante a existência das constantes ϑ e c do enunciado.

Sejam $M > 0$ e $\delta > 0$, $\delta < \vartheta$, $\delta < M$; suponhamos $\|\varphi\| \leq M$ e notemos que, como $e^{\lambda t}\varphi(t)$ é não decrescente em $-1 \leq t \leq 0$ e $\varphi \neq 0$, então:

$$x(0) = \varphi(0) > e^{-\lambda}\varphi(-1) = 0.$$

Vamos mostrar que x assume valores negativos.

Se $x(t)$ é não negativa quando $0 \leq t \leq t_0$, para algum $t_0 > 0$, então, usando a condição de feedback negativa:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)) \leq 0, \text{ quando } 0 \leq t \leq t_0.$$

Seja

$$t_1 = \inf\{t \geq 1 : x(t) \leq \delta\}.$$

Mostremos que t_1 é finito.

Se $x(1) \leq \delta$, então $t_1 = 1$.

Agora, assumindo que $x(1) > \delta$, definimos

$$d = \min\{-\lambda f(y) : \delta \leq y \leq M\}.$$

Para $t \geq 1$, enquanto $x(t) > \delta$ (isto é, enquanto $t < t_1$), temos:

$$-\dot{x}(t) = \lambda x(t) - \lambda f(x(t-1)) \geq \lambda\delta + d,$$

pois como $1 \leq t < t_1$ e $\dot{x}(t) \leq 0$ em $[0, t_1]$, então $0 \leq t-1 < t_1-1$ e $\delta \leq x(t_1-1) \leq x(t-1) \leq x(0) = \varphi(0) \leq M$.

Como

$$\int_1^t \dot{x}(s)ds \leq - \int_1^t (\lambda\delta + d)ds,$$

então

$$x(t) \leq x(1) - (\lambda\delta + d)(t-1) \leq M - (\lambda\delta + d)(t-1).$$

Logo, $x\left(1 + \frac{M-\delta}{d+\lambda\delta}\right) \leq M - (d+\lambda\delta)\frac{M-\delta}{d+\lambda\delta} = \delta$, ou seja, t_1 é finito e

$$t_1 \leq 1 + \frac{M-\delta}{d+\lambda\delta}.$$

Definimos agora

$$z_1 = \inf\{t \geq 0 : x(t) \leq 0\}.$$

Mostremos que z_1 é finito.

Suponhamos $z_1 \geq t_1 + 1$ (caso contrário, z_1 é finito como queremos). Então $x(t) > 0$ se $t_1 \leq t \leq t_1 + 1$ e para $t_1 + 1 \leq t \leq t_1 + 2$, temos:

- 1) Se s é tal que $t_1 + 1 \leq s \leq t \leq t_1 + 2$, então $t_1 \leq s - 1 \leq t_1 + 1$.

Mas $x(t_1) \leq \delta$ e $x(t)$ é não crescente para $0 \leq t \leq t_1 + 1$ (pois $x(t) \geq 0$ para $0 \leq t \leq t_1 + 1$). Assim $x(t) \leq \delta$ para $t_1 \leq t \leq t_1 + 1$. Em particular $|x(s - 1)| = x(s - 1) \leq \delta < \vartheta$ e por hipótese $|f(x(s - 1))| \geq c|x(s - 1)| \Rightarrow -f(x(s - 1)) \geq cx(s - 1) \Rightarrow f(x(s - 1)) \leq -cx(s - 1)$.

- 2) Se $t_1 + 1 \leq s \leq t \leq t_1 + 2$, como $x(t)$ é não crescente para $0 \leq t \leq t_1 + 1$ e $t_1 \leq s - 1 \leq t_1 + 1$, então $x(s - 1) \geq x(t_1 + 1) \Rightarrow -x(s - 1) \leq -x(t_1 + 1)$.

Assim, de (2.2) com $t_0 = t_1 + 1$, para $t_1 + 1 \leq t \leq t_1 + 2$, segue que:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_1+1}^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda f(x(s-1)) ds + e^{-\lambda(t-t_1-1)} x(t_1+1) \\ &\stackrel{1)}{\leq} - \int_{t_1+1}^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda cx(s-1) ds + e^{-\lambda(t-t_1-1)} x(t_1+1) \\ &\stackrel{2)}{\leq} x(t_1+1) \left(-ce^{-\lambda(t-s)} \Big|_{t_1+1}^t \right) + e^{-\lambda(t-t_1-1)} x(t_1+1) \\ &= x(t_1+1) (-c + ce^{-\lambda(t-t_1-1)}) + e^{-\lambda(t-t_1-1)} x(t_1+1) \\ &= x(t_1+1) [(1+c)e^{-\lambda(t-t_1-1)} - c]. \end{aligned}$$

Portanto $x(t) \leq x(t_1+1) [(1+c)e^{-\lambda(t-t_1-1)} - c]$ para $t_1 + 1 \leq t \leq t_1 + 2$; e como por hipótese $c > \frac{1}{e^{\lambda-1}}$, segue que:

$$x(t_1+2) \leq x(t_1+1) [(1+c)e^{-\lambda} - c] < 0,$$

pois $(1+c)e^{-\lambda} - c < 0$.

Logo z_1 é finito e $z_1 < t_1 + 2 \leq \frac{(M-\delta)}{\lambda\delta+d} + 3$.

Mostremos agora que $\dot{x}(z_1) < 0$.

Se $z_1 \geq 1$, então $\dot{x}(z_1) = -\lambda x(z_1) + \lambda f(x(z_1 - 1)) = \lambda f(x(z_1 - 1)) < 0$.

Por outro lado, se $z_1 < 1$ e $\dot{x}(z_1) = 0$, então de (2.1) segue que $f(x(z_1 - 1)) = 0$ e portanto $x(z_1 - 1) = 0$.

Mas, como $-1 < z_1 - 1 < 0$, então $\varphi(z_1 - 1) = x(z_1 - 1) = 0$.

E como $e^{\lambda t}\varphi(t)$ é uma função não decrescente para $-1 \leq t \leq 0$, temos, para $-1 \leq t \leq -1 + z_1$, que:

$$0 = e^{-\lambda}\varphi(-1) \leq e^{\lambda t}\varphi(t) \leq e^{\lambda(-1+z_1)}\varphi(-1+z_1) = 0 \Rightarrow e^{\lambda t}\varphi(t) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = 0$$

e de (2.2), com $t = z_1$ e $t_0 = 0$, obtemos:

$$x(z_1) = \int_0^{z_1} e^{-\lambda(z_1-s)}\lambda f(x(s-1))ds + e^{-\lambda(z_1)}x(0) = e^{-\lambda z_1}x(0) > 0,$$

o que é uma contradição.

Logo, se $z_1 < 1$ então $\dot{x}(z_1) \neq 0$ e de (2.1) segue que $\dot{x}(z_1) < 0$.

Mostremos agora que existe um outro zero, z_2 , tal que $z_2 - z_1 > 1$.

Para $t \in (z_1, z_1 + 1)$, considerando:

$$M_1 = \max\{-\lambda f(y) : 0 \leq y \leq M\},$$

temos:

- 1) Se s é tal que $z_1 \leq s \leq t \leq z_1 + 1$ então $z_1 - 1 \leq s - 1 \leq z_1$ e $x(s - 1) \geq 0$.

Como $x(t)$ é não crescente em $[0, z_1]$ e $\|\varphi\| \leq M$, então $0 \leq x(s - 1) \leq M$, para todo s em $[z_1, z_1 + 1]$.

Segue da definição de M_1 que:

$$-\lambda f(x(s - 1)) \leq M_1.$$

Consequentemente,

$$-e^{-\lambda(t-s)}\lambda f(x(s - 1)) \leq -\lambda f(x(s - 1)) \leq M_1.$$

- 2) Se $z_1 < t < z_1 + 1$, então $0 < t - z_1 < 1 \Rightarrow -M_1(t - z_1) \geq -M_1$.

Assim, de (2.2) com $t_0 = z_1$ e $t \in (z_1, z_1 + 1)$, obtemos:

$$x(t) = \int_{z_1}^t e^{-\lambda(t-s)}\lambda f(x(s - 1))ds \stackrel{1)}{\geq} -M_1(t - z_1) \stackrel{2)}{\geq} -M_1.$$

Em uma vizinhança de z_1 a função x é decrescente, mas ela não precisa ser monótona em $(z_1, z_1 + 1)$.

A função $y(t) = e^{\lambda t}x(t)$ satisfaz:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \lambda e^{\lambda t}x(t) + e^{\lambda t}\dot{x}(t) \\ &= \lambda e^{\lambda t}x(t) + e^{\lambda t}(-\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1))) \\ &= e^{\lambda t}\lambda f(x(t-1)) < 0, \quad t \in (z_1, z_1 + 1)\end{aligned}$$

e assim $y(t)$ é decrescente em $(z_1, z_1 + 1)$.

Seja agora

$$z_2 = \inf\{t > z_1 : x(t) > 0\}.$$

Como $x(t)$ é positiva em $(z_1 - 1, z_1)$, de (2.2) segue que $x(t)$ é negativa em $(z_1, z_1 + 1)$, pois $x(t) = \int_{z_1}^t e^{-\lambda(t-s)}\lambda f(x(s-1)) < 0$. Assim $z_2 > z_1 + 1$.

Para $z_1 + 1 < t < z_2$, $\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)) > 0$, ou seja, $x(t)$ é crescente.

Mostremos que z_2 é finito.

Escolhemos $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \vartheta$, $\delta_1 < M_1$ e sejam:

$$d_1 = \min\{\lambda f(y) : -M_1 \leq y \leq -\delta_1\},$$

$$t_2 = \inf\{t \geq z_1 + 2 : x(t) \geq -\delta_1\}.$$

Se $x(z_1 + 2) \geq -\delta_1$, então $t_2 = z_1 + 2$. Por outro lado, suponhamos que $x(z_1 + 2) < -\delta_1$. Se $t \geq z_1 + 2$, enquanto $x(t) < -\delta_1$ (isto é, enquanto $t < t_2$), temos

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)) \geq \lambda\delta_1 + d_1,$$

pois como $z_1 + 2 \leq t < t_2$, então $z_1 + 1 \leq t - 1 < t_2 - 1$. Daí, como $x(t) \geq -M_1$ em $(z_1, z_1 + 1)$ e $x(t)$ é crescente em $[z_1 + 1, z_2]$, temos $x(t) \geq -M_1$ em (z_1, z_2) . Logo $x(t-1) \geq -M_1$. Também como $z_1 + 1 \leq t - 1 \leq t < t_2$ e $x(t)$ é crescente em $(z_1 + 1, z_2)$, temos $x(t-1) \leq x(t) < -\delta_1$. Portanto $-M_1 \leq x(t-1) \leq -\delta_1$ e pela definição de d_1 segue que $d_1 \leq \lambda f(x(t-1))$.

Daí, para $z_1 + 2 \leq t < t_2$, temos que:

$$\int_{z_1+2}^t \dot{x}(s)ds \geq \int_{z_1+2}^t (\lambda\delta_1 + d_1)ds \Rightarrow x(t) - x(z_1 + 2) \geq (\lambda\delta_1 + d_1)(t - z_1 - 2)$$

e então:

$$x(t) \geq x(z_1 + 2) + (\lambda\delta_1 + d_1)(t - z_1 - 2) \geq -M_1 + (\lambda\delta_1 + d_1)(t - z_1 - 2).$$

Logo $x\left(z_1 + 2 + \frac{M_1 - \delta_1}{d_1 + \lambda\delta_1}\right) \geq -M_1 + (d_1 + \lambda\delta_1)\frac{M_1 - \delta_1}{d_1 + \lambda\delta_1} = -\delta_1$, ou seja, t_2 é finito e $t_2 \leq z_1 + 2 + \frac{M_1 - \delta_1}{d_1 + \lambda\delta_1}$.

Suponhamos $z_2 \geq t_2 + 1$ (caso contrário z_2 é finito como queremos). Então $x(t) < 0$ se $t_2 \leq t \leq t_2 + 1$ e para $t_2 + 1 \leq t \leq t_2 + 2$, temos:

1) Se s é tal que $t_2 + 1 \leq s \leq t \leq t_2 + 2$, então $t_2 \leq s - 1 \leq t_2 + 1$.

Mas $x(t_2) \geq -\delta_1$, $x(t)$ é uma função não decrescente para $z_1 + 1 \leq t \leq z_2$ e $z_1 + 2 \leq t_2 \leq s - 1 \leq t_2 + 1 \leq z_2$.

Assim $x(t) \geq -\delta_1$ para $t_2 \leq t \leq t_2 + 1$. Em particular $|x(s - 1)| = -x(s - 1) \leq \delta_1 < \vartheta$ e por hipótese $|f(x(s - 1))| \geq c|x(s - 1)|$, o que implica $f(x(s - 1)) \geq -cx(s - 1)$.

2) Se s é tal que $t_2 + 1 \leq s \leq t \leq t_2 + 2$, como $x(t)$ é não decrescente para $z_1 + 1 \leq t \leq z_2$ e $z_1 + 2 \leq t_2 \leq s - 1 \leq t_2 + 1 \leq z_2$, então $x(s - 1) \leq x(t_2 + 1)$.

Agora, de (2.2) para $t_2 + 1 \leq t \leq t_2 + 2$, vem que:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_2+1}^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda f(x(s-1)) ds + e^{-\lambda(t-t_2-1)} x(t_2+1) \\ &\stackrel{1)}{\geq} - \int_{t_2+1}^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda c x(s-1) ds + e^{-\lambda(t-t_2-1)} x(t_2+1) \\ &\stackrel{2)}{\geq} x(t_2+1) \left(-ce^{-\lambda(t-s)} \Big|_{t_2+1}^t \right) + e^{-\lambda(t-t_2-1)} x(t_2+1) \\ &= x(t_2+1) (-c + ce^{-\lambda(t-t_2-1)}) + e^{-\lambda(t-t_2-1)} x(t_2+1) \\ &= x(t_2+1) [(c+1)e^{-\lambda(t-t_2-1)} - c]. \end{aligned}$$

Portanto $x(t) \geq x(t_2+1) [(c+1)e^{-\lambda(t-t_2-1)} - c]$ para $t_2 + 1 \leq t \leq t_2 + 2$.

Usando a hipótese $c > \frac{1}{e^\lambda - 1}$, temos que:

$$[(c+1)e^{-\lambda} - c] < 0.$$

Daí, para $t = t_2 + 2$:

$$x(t_2 + 2) \geq x(t_2 + 1) [(c+1)e^{-\lambda} - c] > 0.$$

Logo z_2 é finito e

$$z_2 \leq t_2 + 2 \leq z_1 + \frac{(M_1 - \delta_1)}{\lambda\delta_1 + d_1} + 4 \leq \frac{(M - \delta)}{(\lambda\delta + d)} + \frac{(M_1 - \delta_1)}{(\lambda\delta_1 + d_1)} + 7.$$

Como $z_2 > z_1 + 1$, então $x(z_2 - 1) < 0$ e $\dot{x}(z_2) = \lambda f(x(z_2 - 1)) > 0$.

Novamente, a função $y(t) = e^\lambda x(t)$ obedece:

$$\dot{y}(t) = e^{\lambda t} \lambda f(x(t-1))$$

e assim $y(t)$ é crescente em $(z_2, z_2 + 1)$.

A função φ_1 , onde $\varphi_1(t) = x(z_2 + t + 1)$, $-1 \leq t \leq 0$ está novamente em $(K_\lambda)_0$ pois:

1)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} \varphi_1(t)) &= \lambda e^{\lambda t} \varphi_1(t) + e^{\lambda t} \dot{\varphi}_1(t) = \lambda e^{\lambda t} \varphi_1(t) + e^{\lambda t} \dot{x}(z_2 + t + 1) \\
&= \lambda e^{\lambda t} x(z_2 + t + 1) + e^{\lambda t} (-\lambda x(z_2 + t + 1) + \lambda f(x(z_2 + t))) \\
&= e^{\lambda t} \lambda f(x(z_2 + t)) \geq 0, \quad \text{para } -1 \leq t \leq 0.
\end{aligned}$$

2) $\varphi_1(-1) = x(z_2) = 0$.3) $\varphi_1 \neq 0$, pois $e^{\lambda t} x(t)$ é estritamente crescente em $(z_2, z_2 + 1)$.

Portanto, o argumento pode ser repetido e a existência de infinitos zeros está estabelecida. ■

Definimos agora uma aplicação $F_\lambda : K_\lambda \rightarrow C[-1, 0]$ por:

$$\begin{aligned}
F_\lambda(\varphi)(t) &= x(z_2(\varphi) + 1 + t; \varphi), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad \text{para } \varphi \in (K_\lambda)_0, \\
F_\lambda(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Lema 2.2 *Suponhamos que a função f satisfaça às mesmas hipóteses do Lema 2.1. Seja $x(t) = x(t; \varphi)$ a solução correspondente à função inicial $\varphi \in (K_\lambda)_0$. Então:*

- 1) *A aplicação $\varphi \rightarrow z_2(\varphi)$ de $(K_\lambda)_0$ em $(0, \infty)$ é contínua.*
- 2) *$F_\lambda(K_\lambda) \subset K_\lambda$.*
- 3) *F_λ é completamente contínua.*

Prova: Seja $\varphi \in (K_\lambda)_0$ e $\|\varphi\| \leq M$. Pelo Lema (2.1), existe uma constante C tal que $z_2(\psi) \leq C$ para $\|\psi\| \leq M$. Pelo Teorema da Dependência Contínua, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|\varphi - \psi\| < \delta$, então $|x(t, \varphi) - x(t, \psi)| < \varepsilon$ para $t \leq C + 1$.

Como $z_2(\varphi)$ é um zero de $x(t, \varphi)$, $x(z_2(\varphi), \psi)$ está arbitrariamente próximo de zero, isto é, $|x(z_2(\varphi), \varphi) - x(z_2(\varphi), \psi)| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$.

Mas $\dot{x}(z_2(\varphi), \varphi) > 0$, ou seja, $x(t, \varphi)$ está crescendo perto de $z_2(\varphi)$ e consequentemente $x(t, \psi)$ está crescendo perto de $z_2(\varphi)$. Logo, a função contínua $x(t, \psi)$ tem um zero $\bar{z}_2$ arbitrariamente próximo de $z_2(\varphi)$, isto é, $|\bar{z}_2 - z_2(\varphi)| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Observemos que $\bar{z}_2 = z_2(\psi)$.

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|\varphi - \psi\| < \delta \Rightarrow |z_2(\varphi) - z_2(\psi)| < \varepsilon,$$

ou seja, a aplicação $\varphi \rightarrow z_2(\varphi)$ de $(K_\lambda)_0$ em $(0, \infty)$ é contínua.

Mostremos que $F_\lambda(K_\lambda) \subset K_\lambda$.

Se $\varphi \in K_\lambda$ então $F_\lambda(\varphi) \in C[-1, 0]$ e:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} F_\lambda(\varphi)(t)) &= \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} x(z_2(\varphi) + 1 + t, \varphi)) \\ &= \lambda e^{\lambda t} x(z_2(\varphi) + 1 + t, \varphi) + e^{\lambda t} \dot{x}(z_2(\varphi) + 1 + t, \varphi) \\ &= \lambda e^{\lambda t} x(z_2(\varphi) + 1 + t, \varphi) - e^{\lambda t} \lambda x(z_2(\varphi) + 1 + t, \varphi) \\ &\quad + e^{\lambda t} \lambda f(x(z_2(\varphi) + t, \varphi)) \\ &= e^{\lambda t} \lambda f(x(z_2(\varphi) + t, \varphi)) \geq 0, \quad \text{se } -1 \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Logo $e^{\lambda t} F_\lambda(\varphi)(t)$ é uma função não decrescente de t para $-1 \leq t \leq 0$.

E ainda $F_\lambda(\varphi)(-1) = x(z_2(\varphi), \varphi) = 0$.

Portanto $F_\lambda(\varphi) \in K_\lambda$.

Portanto $F_\lambda(K_\lambda) \subset K_\lambda$.

Mostremos que F_λ é contínua. Seja $\varepsilon > 0$. Para todo $\psi \in (K_\lambda)_0$, existe $\delta > 0$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, onde δ_1 e δ_2 vêm do Teorema da Dependência Contínua e da continuidade da aplicação $\varphi \rightarrow z_2(\varphi)$ respectivamente, tal que:

$$\begin{aligned} |F_\lambda(\varphi)(t) - F_\lambda(\psi)(t)| &= |x(z_2(\varphi) + 1 + t, \varphi) - x(z_2(\psi) + 1 + t, \psi)| \\ &\leq |x(z_2(\varphi) + 1 + t, \varphi) - x(z_2(\varphi) + 1 + t, \psi)| \\ &\quad + |x(z_2(\varphi) + 1 + t, \psi) - x(z_2(\psi) + 1 + t, \psi)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{se } \|\varphi - \psi\| < \delta \text{ e } 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Portanto F_λ é contínua.

Mostremos que F_λ é completamente contínua.

Seja A um subconjunto limitado arbitrário de K_λ . Então existe $M > 0$ tal que $\|\varphi\| \leq M$, $\forall \varphi \in A$.

Mostremos inicialmente que $F_\lambda(A)$ é limitado.

Temos, para $-1 \leq t \leq 0$, que se $z_2(\varphi) \leq s \leq z_2(\varphi) + 1 + t$ então $z_2(\varphi) - 1 \leq s - 1 \leq z_2(\varphi) + t \leq z_2(\varphi)$. Mas $x(t) \geq -M_1$ em (z_1, z_2) como mostramos na prova do Lema (2.1). Assim $-M_1 \leq x(s - 1) \leq 0$. Daí, tomando:

$$M_2 = \max\{\lambda f(y) : -M_1 \leq y \leq 0\} > 0,$$

onde $M_1 = \max\{-\lambda f(y) : 0 \leq y \leq M\}$ (como anteriormente), temos que:

$$|\lambda f(x(s - 1))| = \lambda f(x(s - 1)) \leq M_2.$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 |F_\lambda(\varphi)(t)| &= |x(z_2(\varphi) + 1 + t; \varphi)| \\
 &= \left| \int_{z_2(\varphi)}^{z_2(\varphi)+1+t} e^{-\lambda(z_2(\varphi)+1+t-s)} \lambda f(x(s-1)) ds \right| \\
 &\leq \int_{z_2(\varphi)}^{z_2(\varphi)+1+t} |e^{-\lambda(z_2(\varphi)+1+t-s)}| |\lambda f(x(s-1))| ds \\
 &\leq \int_{z_2(\varphi)}^{z_2(\varphi)+1+t} |\lambda f(x(s-1))| ds \\
 &\leq M_2(1+t) \leq M_2, \quad \text{para } -1 \leq t \leq 0.
 \end{aligned}$$

Portanto $\|F_\lambda(\varphi)\| \leq M_2$.

Portanto, existe $M_2 > 0$ tal que $\|F_\lambda(\varphi)\| \leq M_2$, para todo $\varphi \in A$, ou seja, $F_\lambda(A)$ é uniformemente limitado.

Agora, mostremos que $F_\lambda(A)$ é equicontínuo, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que, se $|t_1 - t_2| < \delta$, então $|F_\lambda(\varphi)(t_1) - F_\lambda(\varphi)(t_2)| < \varepsilon$ para qualquer $\varphi \in A$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $t_1 \geq t_2$.

Se $t_1, t_2 \in [-1, 0]$, $|t_1 - t_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{M_2(\lambda + 1)}$, temos que:

$$|F_\lambda(\varphi)(t_1) - F_\lambda(\varphi)(t_2)| = |x(z_2(\varphi) + 1 + t_1; \varphi) - x(z_2(\varphi) + 1 + t_2; \varphi)|.$$

E pelo Teorema do Valor Médio,

$$|x(z_2(\varphi) + 1 + t_1; \varphi) - x(z_2(\varphi) + 1 + t_2; \varphi)| = |\dot{x}(\tau; \varphi)| |t_2 - t_1|,$$

com $\tau \in (z_2 + 1 + t_2, z_2 + 1 + t_1)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
 |F_\lambda(\varphi)(t_1) - F_\lambda(\varphi)(t_2)| &= |\dot{x}(\tau; \varphi)| |t_2 - t_1| \\
 &= |-\lambda x(\tau) + \lambda f(x(\tau - 1))| |t_2 - t_1| \\
 &\leq (|\lambda x(\tau)| + |\lambda f(x(\tau - 1))|) |t_2 - t_1| \\
 &\leq (\lambda M_2 + M_2) |t_2 - t_1| \\
 &= (M_2(\lambda + 1)) |t_2 - t_1| < \varepsilon, \quad \text{para qualquer } \varphi \in A.
 \end{aligned}$$

Portanto, $F_\lambda(A)$ é equicontínuo.

E pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, concluímos que $\overline{F_\lambda(A)}$ é compacto, ou seja, F_λ é completamente contínua. ■

Lema 2.3 *Suponhamos que a função f satisfaça às mesmas hipóteses do Lema 2.1. Suponhamos que exista $\beta = \lambda A > 0$ onde $A > 0$ é tal que $f(x) \leq A$ para todo x (conforme (H1)). Então se $\varphi \in (K_\lambda)_0$ e $\|\varphi\| \leq \beta$, $x(t; \varphi) \leq \beta$ quando $t \geq 0$.*

Prova: Em $[0, z_1]$, $x(t)$ é não crescente e assim $x(t) \leq x(0) = \varphi(0) \leq \beta$. Nos intervalos (z_{2n+1}, z_{2n+2}) , a função é negativa e assim $x(t) < 0 < \beta$.

Observemos que:

$$\text{se } s \leq t, \quad e^{-\lambda(t-s)} \lambda f(x(s-1)) \stackrel{\text{hipótese}}{\leq} e^{-\lambda(t-s)} \lambda A \leq \lambda A = \beta.$$

Assim, para os intervalos $[z_{2n}, z_{2n} + 1]$ segue que $x(t) \leq \beta$, pois, com $t_0 = z_{2n}$ temos de (2.2) que:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{z_{2n}}^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda f(x(s-1)) ds + e^{-\lambda(t-z_{2n})} x(z_{2n}) \\ &\leq \beta(t - z_{2n}) \leq \beta, \quad \text{para } t \in [z_{2n}, z_{2n} + 1]. \end{aligned}$$

Nos intervalos $(z_{2n} + 1, z_{2n+1})$ temos que $x(t) > 0$ e portanto:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)) < 0,$$

ou seja, $x(t)$ é decrescente e assim $x(t) < x(z_{2n} + 1) \leq \beta$. ■

Temos como consequência imediata o seguinte resultado:

Lema 2.4 *A função F_λ aplica o conjunto limitado, fechado e convexo de dimensão infinita $D = \{\varphi \in K_\lambda : \|\varphi\| \leq \beta\}$ nele próprio.*

Faremos neste momento um estudo bem detalhado da equação característica da equação linear associada a (2.1). Este estudo será utilizado para provarmos os próximos lemas necessários à demonstração do Teorema 2.1.

Linearizando a nossa equação (2.1) em torno de 0, obtemos:

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) + \lambda k x(t-1) = 0,$$

onde $k = -f'(0)$ como na hipótese do Teorema 2.1.

Esta equação linearizada tem como equação característica:

$$H(\xi) = \xi + \lambda + \lambda k e^{-\xi} = 0. \tag{2.3}$$

Proposição 2.1 *Se $\lambda > 0$ e $-1 < k \leq 1$, então cada solução da equação característica (2.3) satisfaz $\operatorname{Re}(\xi) < 0$.*

Prova: Se existisse uma solução $\xi = \mu + i\gamma$, com $\mu \geq 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, então tomando os módulos de ambos lados de $\xi + \lambda = -\lambda k e^{-\xi}$, teríamos:

$$\lambda \leq \sqrt{(\mu + \lambda)^2 + \gamma^2} = |\xi + \lambda| = |\lambda k e^{-\xi}| = \lambda |k| e^{-\mu} \leq \lambda.$$

Assim, as desigualdades acima seriam igualdades e $\xi = 0$ (pois $\mu = \gamma = 0$). Todavia, $\xi = 0$ não é uma solução da equação característica se $-1 < k \leq 1$.

Portanto, cada solução ξ da equação característica satisfaz $\operatorname{Re}(\xi) < 0$.

Proposição 2.2 *Seja $k > 1$. Então existe uma sequência:*

$$\dots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

tal que se $\lambda \neq 0$, então a equação característica $\xi + \lambda + \lambda k e^{-\xi} = 0$ tem uma solução com parte real nula se, e somente se, $\lambda = \lambda_m$ para algum m . Se $0 < \lambda < \lambda_0$, então todas soluções ξ da equação característica satisfazem $\operatorname{Re}(\xi) < 0$. Se $\lambda = \lambda_m$, então a equação característica tem um par de raízes complexas conjugadas:

$$\xi = \pm i\gamma_m \neq 0;$$

estas raízes são simples e não existem outras raízes com parte real nula. Para λ perto de λ_m existe um único par $\xi_m(\lambda)$, $\overline{\xi_m(\lambda)}$ de raízes complexas conjugadas perto de $\pm i\gamma_m$. A função $\xi_m(\lambda)$ depende analiticamente de λ , satisfaz $\xi_m(\lambda_m) = i\gamma_m$ e sua derivada satisfaz

$$\operatorname{sgn}(\lambda_m) \operatorname{Re}[\xi'_m(\lambda_m)] > 0. \quad (2.4)$$

Os valores de γ_m e λ_m são dados por:

$$\gamma_m = \gamma_0 + 2\pi m \quad e \quad \lambda_m = \frac{\gamma_0 + 2\pi m}{\sqrt{k^2 - 1}}, \quad (2.5)$$

onde γ_0 é a única solução de:

$$\cos \gamma_0 = -\frac{1}{k}, \quad \gamma_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \quad (2.6)$$

Prova: Observemos inicialmente que se $\xi = i\gamma$ for uma solução de (2.3) então $\bar{\xi} = -i\gamma$ também será.

Assumimos que $\lambda \neq 0$ e que $\xi = i\gamma$ é uma solução da equação característica para algum número real γ . Sem perda de generalidade, suponhamos $\lambda\gamma \geq 0$.

Tomando-se as partes real e imaginária da equação característica temos:

$$\lambda(1 + k \cos \gamma) = 0, \quad (2.7)$$

$$\gamma = \lambda k \sin \gamma. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) e $\lambda \gamma \geq 0$ implicam que $\sin \gamma \geq 0$ e assim (2.7) vale se, e somente se, $\gamma = \gamma_m$ para algum inteiro m , onde γ_m é dado por (2.5) e (2.6), pois

$$\lambda(1 + k \cos \gamma) = 0 \stackrel{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \cos \gamma = -\frac{1}{k} < 0 \Leftrightarrow \gamma = \gamma_m.$$

Como $\sin^2 \gamma_m = 1 - \cos^2 \gamma_m = 1 - \frac{1}{k^2}$, temos que:

$$\sin \gamma_m = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}. \quad (2.9)$$

Este fato e a equação (2.8) implicam que $\lambda = \lambda_m$, onde λ_m é como em (2.5), pois:

$$\gamma_m = \lambda k \sin \gamma_m \Leftrightarrow \lambda = \frac{\gamma_m}{k \sin \gamma_m} = \frac{\gamma_0 + 2\pi m}{k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}} = \frac{\gamma_0 + 2\pi m}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Agora, consideremos o lado esquerdo da equação característica como uma função analítica

$$\Delta(\xi, \lambda) = \xi + \lambda + \lambda k e^{-\xi}$$

de ξ e λ . Temos $\Delta(i\gamma_m, \lambda_m) = 0$ e usando (2.6) e (2.9) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial \xi}(i\gamma_m, \lambda_m) &= 1 - \lambda_m k e^{-i\gamma_m} \\ &= 1 - \lambda_m k (\cos \gamma_m - i \sin \gamma_m) \\ &= 1 - \lambda_m k \left(-\frac{1}{k} \right) + i \lambda_m k \left(\sqrt{\frac{k^2 - 1}{k^2}} \right) \\ &= 1 + \lambda_m + i \lambda_m \sqrt{k^2 - 1} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto $i\gamma_m$ é uma raiz simples da equação característica e pelo Teorema da Função Implícita existe uma função analítica $\xi_m(\lambda)$ definida para λ perto de λ_m e satisfazendo $\xi_m(\lambda_m) = i\gamma_m$ e:

$$\Delta(\xi_m(\lambda), \lambda) = 0, \quad \text{para todo } \lambda \text{ perto de } \lambda_m. \quad (2.10)$$

Claro que também temos $\Delta(\overline{\xi_m(\lambda)}, \lambda) = 0$ para λ (real) perto de λ_m . Diferenciação implícita de (2.10) produz:

$$\begin{aligned}\xi'_m(\lambda_m) &= -\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}(i\gamma_m, \lambda_m) \left[\frac{\partial\Delta}{\partial\xi}(i\gamma_m, \lambda_m) \right]^{-1} \\ &= -(1 + ke^{-i\gamma_m})(1 + \lambda_m + i\lambda_m\sqrt{k^2 - 1})^{-1} \\ &= -(1 + k(\cos\gamma_m - i\sin\gamma_m))(1 + \lambda_m + i\lambda_m\sqrt{k^2 - 1})^{-1} \\ &= -(1 - 1 - i\sqrt{k^2 - 1})(1 + \lambda_m + i\lambda_m\sqrt{k^2 - 1})^{-1} \\ &= i\sqrt{k^2 - 1}(1 + \lambda_m + i\lambda_m\sqrt{k^2 - 1})^{-1}\end{aligned}$$

e vemos então que:

$$Re[\xi'_m(\lambda_m)] = \frac{\lambda_m(k^2 - 1)}{(1 + \lambda_m)^2 + \lambda_m^2(k^2 - 1)}$$

é não nula e tem o mesmo sinal de λ_m , implicando (2.4).

Resta provar que $Re(\xi) < 0$ para cada solução da equação característica quando $0 < \lambda < \lambda_0$. Para $0 < \lambda < \lambda_0$, qualquer solução ξ da equação característica com $Re(\xi) \geq 0$ também satisfaz:

$$\begin{aligned}|\xi| &= |\lambda + \lambda ke^{-\xi}| \leq \lambda + \lambda ke^{-Re(\xi)} \leq \lambda(1 + k) \quad e \\ Re(\xi) &> 0\end{aligned}$$

e assim está no semi-disco aberto:

$$H(\lambda_0, k) = \{\xi \in \mathbb{C}: |\xi| < \lambda_0(1 + k) \text{ e } Re(\xi) > 0\}.$$

Em particular, nenhuma solução está na fronteira $\partial H(\lambda_0, k)$ e assim pelo Teorema de Rouché, que pode ser encontrado em [4], o número de soluções dentro de $H(\lambda_0, k)$ é independente de λ para $0 < \lambda < \lambda_0$.

Agora, consideremos λ perto de 0. Se $\lambda = 0$, então $\xi = 0$ é a única solução da equação característica no semi-disco fechado $\overline{H(\lambda_0, k)}$; além disso, esta solução é uma raiz simples e está na fronteira $\partial H(\lambda_0, k)$. Para λ perto de 0 uma aplicação do Teorema da Função Implícita, como antes, mostra que esta raiz continua como uma função analítica $\xi(\lambda)$ e satisfaz:

$$\xi'(0) = -\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}(0, 0) \left[\frac{\partial\Delta}{\partial\xi}(0, 0) \right]^{-1} = -(1 + k) < 0. \quad (2.11)$$

Portanto $Re(\xi'(0)) < 0$.

Portanto, a solução nula se desloca para a esquerda e não existem raízes com parte real positiva, para λ positivo e perto de 0.

Em particular (2.11) implica que $\xi(\lambda) \notin H(\lambda_0, k)$ para λ positivo e suficientemente pequeno. Como observamos acima, todas as raízes da equação característica no semi-plano fechado do lado direito estão em $H(\lambda_0, k)$ para $0 < \lambda < \lambda_0$, e o número de tais raízes é constante para qualquer λ nesta condições. Concluimos então que se $0 < \lambda < \lambda_0$, a equação característica não tem soluções satisfazendo $Re(\xi) \geq 0$.

Portanto, se $0 < \lambda < \lambda_0$ todas as soluções ξ da equação característica satisfazem $Re(\xi) < 0$. ■

Corolário 2.1 *Seja $k > 1$ e $\lambda > \lambda_0$. Então a equação característica tem uma solução ξ com $Re(\xi) > 0$ e $\frac{\pi}{2} < Im(\xi) < \pi$.*

Prova: Pela Proposição 2.2, se $\lambda = \lambda_m$ a equação característica tem um par de raízes complexas conjugadas $\xi = \pm i\gamma_m$ sobre o eixo imaginário. Para λ perto de λ_m ($\lambda > \lambda_m$) existe um único par $\xi_m(\lambda), \overline{\xi_m(\lambda)}$ de raízes complexas conjugadas perto de $\pm i\gamma_m$ e a função $\xi_m(\lambda)$, que depende analiticamente de λ , satisfaz $\xi_m(\lambda_m) = i\gamma_m$ e:

$$sgn(\lambda_m)Re[\xi'_m(\lambda_m)] > 0.$$

Assim, como $\lambda > \lambda_0 > 0$, $sgn(\lambda_m) > 0$, ou seja $Re[\xi'_m(\lambda_m)] > 0$. Daí, λ perto de λ_m ($\lambda > \lambda_m$) implica $Re[\xi_m(\lambda)] > 0$. Podemos também supor $Im[\xi_m(\lambda)] > 0$ pois $\overline{\xi_m(\lambda)}$ também é raiz. Seja então $\xi_m(\lambda) = \mu + i\gamma$, com $\mu > 0$ e $\gamma > 0$.

Como $\xi_m(\lambda)$ é raiz da equação característica, temos:

$$\mu + i\gamma + \lambda + \lambda ke^{-\mu - i\gamma} = 0$$

e considerando a parte real e a parte imaginária, vem:

$$\mu + \lambda + \lambda ke^{-\mu} \cos \gamma = 0 \quad \text{e} \quad \gamma = \lambda ke^{-\mu} \sin \gamma,$$

donde obtemos:

$$\cos \gamma = \frac{-(\mu + \lambda)}{\lambda ke^{-\mu}} < 0 \quad \text{e} \quad \sin \gamma = \frac{\gamma}{\lambda ke^{-\mu}} > 0.$$

$$\text{Logo } \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi.$$

Portanto, a equação característica tem uma solução ξ com $Re(\xi) > 0$ e $\frac{\pi}{2} < Im(\xi) < \pi$. ■

Feito este estudo da equação característica (2.3), podemos provar nosso próximo lema, que será útil para demonstrarmos que para $\lambda > \lambda_0$, $\varphi = 0$ é um ponto fixo ejetivo do operador F_λ .

Lema 2.5 *Suponhamos que f , λ e k tenham as propriedades listadas nas hipóteses do Teorema 2.1. Então existe uma constante $a > 0$ tal que para qualquer função inicial $\varphi \in (K_\lambda)_0$ e qualquer zero z de $x(\cdot, \varphi)$:*

$$\sup_{t \geq z} |x(t; \varphi)| \geq a.$$

Prova: Seja $\xi = \mu + i\gamma$, com $0 < \mu$ e $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ a solução da equação característica (2.3) garantida pelo Corolário 2.1 acima.

Tomemos um $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \mu e^{-\lambda} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Como $-\lambda k = \lambda f'(0) = \lambda \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \lambda \frac{f(y)}{y}$, temos, por definição de limite, que existe $a > 0$ tal que, se $|y| \leq a$, então $\left| \lambda \frac{f(y)}{y} - (-\lambda k) \right| \leq \varepsilon$, ou seja,

$$\left| \frac{\lambda f(y) + \lambda k y}{y} \right| \leq \varepsilon, \text{ o que implica:}$$

$$\lambda |f(y) + ky| \leq \varepsilon |y|. \quad (2.12)$$

Seja $\varphi \in (K_\lambda)_0$. Mostremos que:

$$\sup_{t \geq z_n} |x(t)| \geq a, \quad (2.13)$$

para cada zero z_n de $x(\cdot; \varphi)$.

Suponhamos que (2.13) seja falso. Então existe um zero z tal que:

$$\sup_{t \geq z} |x(t)| = \delta < a. \quad (2.14)$$

Assim, existe um extremo m com $z_n \leq m \leq z_n + 1$ para algum n , tal que $|x(m)| \geq \frac{\delta}{2}$. Observemos que em $(z_n + 1, z_{n+1})$ a função $x(t)$ cresce se for negativa e decresce se for positiva, logo o extremo não ocorre neste intervalo. Para fixar as idéias assumimos que m é um máximo e n é par.

Agora, reescrevemos a equação (2.1) na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\lambda x(t) - \lambda k x(t-1) + h(t), \\ h(t) &= \lambda f(x(t-1)) + \lambda k x(t-1). \end{aligned}$$

Usando integração por partes, temos que para $T = z_n + 1$:

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \dot{x}(t) e^{-\xi t} dt &= -x(T) e^{-\xi T} - \int_T^\infty x(t) (-\xi e^{-\xi t}) dt \\ &= -x(T) e^{-\xi T} + \xi \int_T^\infty x(t) e^{-\xi t} dt. \end{aligned} \quad (2.15)$$

E da equação (2.1) escrita na forma dada acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \dot{x}(t)e^{-\xi t}dt &= -\lambda \int_T^\infty x(t)e^{-\xi t}dt - \lambda k \int_T^\infty x(t-1)e^{-\xi t}dt \\ &\quad + \int_T^\infty h(t)e^{-\xi t}dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Em vista da equação característica (2.3):

$$-\lambda k e^{-\xi} = \xi + \lambda \Rightarrow -\lambda k = e^{\xi}(\xi + \lambda).$$

Assim:

$$\begin{aligned} -\lambda k \int_T^\infty x(t-1)e^{-\xi t}dt &= e^{\xi}(\xi + \lambda) \int_T^\infty x(t-1)e^{-\xi t}dt \\ &= (\xi + \lambda) \int_T^\infty x(t-1)e^{-\xi(t-1)}dt \\ &= (\xi + \lambda) \int_{T-1}^\infty x(t)e^{-\xi t}dt \\ &= \lambda \int_{T-1}^\infty x(t)e^{-\xi t}dt + \xi \int_{T-1}^\infty x(t)e^{-\xi t}dt. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão (2.16), vem:

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \dot{x}(t)e^{-\xi t}dt &= -\lambda \int_T^\infty x(t)e^{-\xi t}dt + \lambda \int_{T-1}^\infty x(t)e^{-\xi t}dt \\ &\quad + \xi \int_{T-1}^\infty x(t)e^{-\xi t}dt + \int_T^\infty h(t)e^{-\xi t}dt \\ &= \lambda \int_{T-1}^T x(t)e^{-\xi t}dt + \xi \int_{T-1}^\infty x(t)e^{-\xi t}dt + \int_T^\infty h(t)e^{-\xi t}dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

De (2.15) e (2.17) obtemos:

$$\begin{aligned} -x(T)e^{-\xi T} - \lambda \int_{T-1}^T x(t)e^{-\xi t}dt + \xi \int_{T-1}^\infty x(t)e^{-\xi t}dt - \xi \int_{T-1}^\infty x(t)e^{-\xi t}dt \\ = \int_T^\infty h(t)e^{-\xi t}dt, \end{aligned} \quad (2.18)$$

daí:

$$-x(T)e^{-\xi T} - \lambda \int_{T-1}^T x(t)e^{-\xi t}dt - \xi \int_{T-1}^T x(t)e^{-\xi t}dt = \int_T^\infty h(t)e^{-\xi t}dt,$$

e considerando $y(t) = e^{\lambda t}x(t)$, vem:

$$-x(T)e^{-\xi T} - (\xi + \lambda) \int_{T-1}^T y(t)e^{-(\xi+\lambda)t} dt = \int_T^\infty h(t)e^{-\xi t} dt. \quad (2.19)$$

Integrando novamente por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{T-1}^T -(\xi + \lambda)y(t)e^{-(\xi+\lambda)t} dt &= \left(y(t)e^{-(\xi+\lambda)t} \Big|_{T-1}^T \right) - \int_{T-1}^T \dot{y}(t)e^{-(\xi+\lambda)t} dt \\ &= y(T)e^{-(\xi+\lambda)T} - y(T-1)e^{-(\xi+\lambda)(T-1)} \\ &\quad - \int_{T-1}^T \dot{y}(t)e^{-(\xi+\lambda)t} dt \\ &= x(T)e^{-\xi T} - x(T-1)e^{-\xi(T-1)} \\ &\quad - \int_{T-1}^T \dot{y}(t)e^{-(\xi+\lambda)t} dt \\ &= x(T)e^{-\xi T} - \int_{T-1}^T \dot{y}(t)e^{-(\xi+\lambda)t} dt, \end{aligned}$$

pois $T = z_n + 1$ e então $x(T-1) = 0$.

Assim, retornando à expressão (2.19):

$$- \int_{T-1}^T \dot{y}(t)e^{-(\xi+\lambda)t} dt = \int_T^\infty h(t)e^{-\xi t} dt.$$

E multiplicando ambos lados por $e^{\xi(T-\frac{1}{2})}$, vem:

$$- \int_{T-1}^T \dot{y}(t)e^{-\xi(t-T+1/2)-\lambda t} dt = \int_T^\infty h(t)e^{-\xi(t-T+1/2)} dt. \quad (2.20)$$

Vamos encontrar um limitante inferior do valor absoluto do lado esquerdo de (2.20). Sabemos, pelo Lema (2.1), que $\dot{y}(t) \geq 0$ para $T-1 \leq t \leq T$.

Também temos que:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t)e^{-\xi(t-T+1/2)-\lambda t} &= \dot{y}(t)e^{-\mu(t-T+1/2)-\lambda t} e^{-i\gamma(t-T+1/2)} \\ &= \dot{y}(t)e^{-\mu(t-T+1/2)-\lambda t} \cos[\gamma(t-T+1/2)] \\ &\quad + \dot{y}(t)e^{-\mu(t-T+1/2)-\lambda t} (-i \operatorname{sen}[\gamma(t-T+1/2)]). \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\xi(t-T+1/2)-\lambda t} dt \right| = \\
& = \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\mu(t-T+1/2)-\lambda t} \cos[\gamma(t-T+1/2)] dt \right. \\
& \quad \left. - i \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\mu(t-T+1/2)-\lambda t} \operatorname{sen}[\gamma(t-T+1/2)] dt \right| \\
& \stackrel{|z| \geq |\operatorname{Re}(z)|}{\geq} \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\mu(t-T+1/2)-\lambda t} \cos[\gamma(t-T+1/2)] dt \right|. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Agora:

$$T-1 \leq t \leq T \Rightarrow -1 \leq t-T \leq 0 \Rightarrow -1/2 \leq t-T+1/2 \leq 1/2$$

$$\stackrel{\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi}{\Rightarrow} -\frac{\gamma}{2} \leq \gamma(t-T+1/2) \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Se $0 \leq \gamma(t-T+1/2) \leq \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$, então, como a função coseno é decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos[\gamma(t-T+1/2)] \geq \cos \frac{\gamma}{2}$.

Se $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\gamma}{2} \leq \gamma(t-T+1/2) \leq 0$, então, como a função coseno é crescente em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \leq \cos[\gamma(t-T+1/2)]$.

Portanto $\cos[\gamma(t-T+1/2)] \geq \cos \frac{\gamma}{2}$.

Daí:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) e^{-\mu(t-T+1/2)-\lambda t} \cos[\gamma(t-T+1/2)] & \geq \dot{y}(t) e^{-\mu/2} e^{-\mu(t-T)} e^{-\lambda t} \cos \frac{\gamma}{2} \\
& \geq \dot{y}(t) e^{-\mu/2} e^{-\lambda t} \cos \frac{\gamma}{2},
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\mu(t-T+1/2)-\lambda t} \cos[\gamma(t-T+1/2)] dt \right| \\
& \geq \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\lambda t} dt \right| e^{-\mu/2} \cos \frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.21), temos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\xi(t-T+1/2)-\lambda t} dt \right| &\geq \left| \int_{T-1}^T \dot{y}(t) e^{-\lambda t} dt \right| e^{-\mu/2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ &\geq e^{-\mu/2} \cos \frac{\gamma}{2} e^{-\lambda T} [y(T) - y(T-1)] \\ &= e^{-\mu/2} \cos \frac{\gamma}{2} x(T), \end{aligned}$$

pois $y(T-1) = 0$.

Vamos construir uma limitação inferior para $x(T)$ em termos de δ . De (2.2), lembrando que $T = z_n + 1 \geq m$, segue que:

$$\begin{aligned} x(T) &= \int_m^{z_n+1} e^{-\lambda(T-s)} \lambda f(x(s-1)) ds + e^{-\lambda(T-m)} x(m) \\ &= \int_{m-1}^{z_n} e^{-\lambda(z_n-s)} \lambda f(x(s)) ds + e^{-\lambda(T-m)} x(m) \\ &\geq e^{-\lambda(T-m)} x(m) \\ &\geq e^{-\lambda} \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Assim, o lado esquerdo de (2.20) é limitado inferiormente.

Mostremos que o lado direito de (2.20) é limitado superiormente.

$$T < t < \infty \Rightarrow z_n = T - 1 < t - 1 < \infty,$$

o que implica

$$|x(t-1)| \leq \sup_{s \geq z} |x(s)| = \delta < a.$$

Assim, para $T < t < \infty$, segue de (2.12),

$$|h(t)| = |\lambda f(x(t-1)) + \lambda k x(t-1)| \leq \varepsilon |x(t-1)| \leq \varepsilon \delta.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_T^\infty h(t) e^{-\xi(t-T+1/2)} dt \right| &\leq \int_T^\infty |h(t)| e^{-\xi(t-T+1/2)} dt \\ &\leq \varepsilon \delta \int_T^\infty e^{-\xi(t-T+1/2)} dt \\ &= \varepsilon \delta \int_T^\infty e^{-\mu(t-T+1/2)} dt \\ &= \varepsilon \delta e^{-\mu/2} \int_T^\infty e^{-\mu(t-T)} dt \\ &= \varepsilon \delta e^{-\mu/2} \mu^{-1}. \end{aligned}$$

Daí, segue das limitações acima e de (2.20) que:

$$\varepsilon \delta e^{-\mu/2} \mu^{-1} \geq e^{-\mu/2} \cos \frac{\gamma}{2} x(T) \geq e^{-\mu/2} \cos \frac{\gamma}{2} e^{-\lambda} \frac{\delta}{2},$$

donde obtemos:

$$\varepsilon \geq \frac{1}{2} \mu e^{-\lambda} \cos \frac{\gamma}{2},$$

o que é uma contradição, pois ε foi tomado de forma que $\varepsilon < \frac{1}{2} \mu e^{-\lambda} \cos \frac{\gamma}{2}$.

Portanto (2.13) é verdadeira, ou seja,

$$\sup_{t \geq z_n} |x(t)| \geq a,$$

para cada zero z_n de $x(\cdot; \varphi)$. ■

Lema 2.6 *Suponhamos que f , λ e k tenham as propriedades listadas nas hipóteses do Teorema 2.1. Então $\varphi \equiv 0$ é um ponto fixo ejetivo do operador F_λ .*

Prova: De acordo com o Lema 2.5, existe um número $a > 0$ tal que

$$|x(z_n + \delta_n)| \geq \frac{a}{2}, \quad 0 < \delta_n \leq 1,$$

para infinitos inteiros n .

Escolhemos um número $b > 0$ tal que:

$$b < \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad \max\{-\lambda f(y) : 0 \leq y \leq b\} < \frac{a}{2}.$$

Seja m_n um extremo de $x(t)$ tal que $z_n \leq m_n \leq z_n + 1$ e suponhamos, por um momento, que $x(m_{2n}) \leq b$ para todo $n \geq N$, onde N é algum inteiro fixado. Daí, temos que:

Se s é tal que $z_{2n+1} \leq s \leq m_{2n+1}$, então $z_{2n} \leq s - 1 \leq z_{2n+1}$.

Temos que m_{2n} é um ponto extremo (ponto de máximo) em $[z_{2n}, z_{2n+1}]$, pois o é em $[z_{2n}, z_{2n} + 1]$ e então $0 \leq x(s - 1) \leq x(m_{2n}) \leq b$. Logo $-\lambda f(x(s - 1)) \leq \max\{-\lambda f(y) : 0 \leq y \leq b\} < \frac{a}{2}$, donde obtemos, $e^{-\lambda(m_{2n+1}-s)} \lambda f(x(s - 1)) > -\frac{a}{2}$.

E, por (2.2):

$$\begin{aligned} x(m_{2n+1}) &= \int_{z_{2n+1}}^{m_{2n+1}} e^{-\lambda(m_{2n+1}-s)} \lambda f(x(s - 1)) ds \\ &> - \int_{z_{2n+1}}^{m_{2n+1}} \frac{a}{2} ds \\ &= -\frac{a}{2} (m_{2n+1} - z_{2n+1}) \geq -\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Temos então, para todo $n \geq N$, $|x(m_{2n+1})| < \frac{a}{2}$.

Logo, para todo $n \geq 2N$, $|x(m_n)| < \frac{a}{2}$, o que implica

$$|x(z_n + \delta_n)| \leq |x(m_n)| < \frac{a}{2},$$

para qualquer $0 \leq \delta_n \leq 1$ e para qualquer $n \geq 2N$.

Mas isto contradiz o fato que $|x(z_n + \delta_n)| \geq \frac{a}{2}$, $0 < \delta_n \leq 1$, para infinitos inteiros n .

Portanto, existe $n_0 \geq N$ tal que $x(m_{2n_0}) > b$.

Agora, como

$$F_\lambda^n(\varphi)(t) = x(z_{2n}(\varphi) + 1 + t; \varphi), \quad -1 \leq t \leq 0$$

e como

$$(m_{2n_0} - z_{2n_0} - 1) \in [-1, 0],$$

temos que

$$F_\lambda^{n_0}(\varphi)(m_{2n_0} - z_{2n_0} - 1) = x(m_{2n_0}) > b.$$

Logo $\|F_\lambda^{n_0}(\varphi)\| \geq b$.

Assim, existe uma vizinhança aberta $U = \{\varphi \in K_\lambda : \|\varphi\| < b\}$ da função nula, tal que para cada $\varphi \in U$, $\varphi \neq 0$ (isto é $\varphi \in (K_\lambda)_0$), existe um inteiro $n_0 = n_0(\varphi)$ para o qual $F_\lambda^{n_0}(\varphi) \notin U$, ou seja, a função nula é um ponto fixo ejetivo do operador F_λ . ■

Provemos agora o Teorema 2.1, utilizando o Teorema 1.4 e os lemas anteriores.

Prova do Teorema 2.1: Pelo Lema 2.4, a função completamente contínua F_λ aplica o conjunto limitado, fechado e convexo de dimensão infinita:

$$D = \{\varphi \in K_\lambda : \|\varphi\| \leq \beta\}$$

nele próprio. Assim, pelo Teorema 1.4, F_λ tem um ponto fixo que não é ejetivo. Como 0 é um ponto fixo ejetivo do operador F_λ (Lema 2.6), então F_λ tem um ponto fixo $\varphi \neq 0$ em D , ou seja, existe $\varphi \in D$, $\varphi \neq 0$ tal que $F_\lambda(\varphi)(t) = \varphi(t)$, para todo $-1 \leq t \leq 0$, donde concluímos que

$$x(z_2(\varphi) + 1 + t; \varphi) = \varphi(t) = x(t), \quad \forall -1 \leq t \leq 0.$$

Portanto, a equação diferencial (2.1) possui uma solução periódica não constante.

Temos pelo Lema 2.1, que esta solução é uma solução periódica lentamente oscilante. ■

Capítulo 3

Existência de um contínuo global de soluções periódicas lentamente oscilantes

Neste capítulo, vamos mostrar a existência de um contínuo global de soluções periódicas lentamente oscilantes da equação (2.1).

Sejam $\varphi \in C[-1, 0]$, f uma função contínua, $\lambda > 0$ e $x(t) = x(t; \lambda, \varphi)$ solução de:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)), & \text{para todo } t \geq 0, \\ x/[-1, 0] = \varphi. \end{cases} \quad (3.1)$$

Proposição 3.1 (i) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\lambda > 0$.*

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo fechado (possivelmente infinito) tal que $f(I) \subseteq I$.

Se $\varphi \in C[-1, 0]$ satisfaz:

$$\varphi(t) \in I \quad \text{para todo } t \in [-1, 0], \quad (3.2)$$

então a solução $x(t; \lambda; \varphi)$ de (3.1) satisfaz:

$$x(t; \lambda; \varphi) \in I \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Se além disso $\varphi(0) \in \text{int}(I)$, onde $\text{int}(I)$ denota o interior do conjunto I , então $x(t; \lambda; \varphi) \in \text{int}(I)$ para todo $t \geq 0$.

(ii) *Definimos o conjunto:*

$$I_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{f^n(I)};$$

Então I_∞ é um subconjunto conexo e fechado de I .

Se $I_\infty \neq \emptyset$, então a solução acima de (3.1) com (3.2) satisfaz:

$$\text{dist}(x(t; \lambda; \varphi), I_\infty) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

onde "dist" denota a distância de um ponto a um conjunto.

Prova:

(i) Seja

$$t_0 = \sup\{t \in [0, \infty) : x(s) \in I \text{ para todo } s \in [0, t]\}$$

e suponhamos que $t_0 < \infty$.

Suponhamos que $I = [D, C]$.

Assim, se $s \in [0, t_0 + 1]$, então $(s - 1) \in [-1, t_0]$ e então $x(s - 1) \in I$, o que implica $f(x(s - 1)) \in I$ e portanto $f(x(s - 1)) \leq C$.

Daí:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(e^{\lambda s} x(s)) &= \lambda e^{\lambda s} x(s) + e^{\lambda s} \dot{x}(s) \\ &= \lambda e^{\lambda s} x(s) + e^{\lambda s} (-\lambda x(s) + \lambda f(x(s - 1))) \\ &= \lambda e^{\lambda s} f(x(s - 1)) \\ &\leq \lambda e^{\lambda s} C, \quad \forall s \in [0, t_0 + 1]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Integrando (3.3) de 0 a $t \in [0, t_0 + 1]$ e lembrando que $x(0) = \varphi(0) \leq C$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{\lambda s} x(s)) ds &\leq \int_0^t (\lambda e^{\lambda s} C) ds \\ \Rightarrow [e^{\lambda s} x(s)] \Big|_0^t &\leq C e^{\lambda s} \Big|_0^t \\ \Rightarrow e^{\lambda t} x(t) - x(0) &\leq C e^{\lambda t} - C \\ \Rightarrow e^{\lambda t} x(t) &\leq x(0) + C e^{\lambda t} - C \\ \Rightarrow x(t) &\leq C + e^{-\lambda t} (x(0) - C) \leq C. \end{aligned}$$

Analogamente, $x(t) \geq D$ se $t \in [0, t_0 + 1]$ e assim $x(t) \in I$ para todo $t \in [0, t_0 + 1]$. Mas isto contradiz a definição de t_0 . Logo $t_0 = \infty$.

Se $\varphi(0) \in \text{int}(I)$, então a última desigualdade nos cálculos acima será estrita para cada $t \geq 0$, isto é, $x(t) < C$ para cada $t \geq 0$. Analogamente $x(t) > D$, assim $x(t) \in \text{int}(I)$ para cada $t \geq 0$.

- (ii) Como f é contínua, I é compacto e $f(I) \subseteq I$, os conjuntos $f^n(I)$ formam uma sequência decrescente e encaixante de intervalos compactos (ou pontos). Assim podemos escrever:

$$f^n(I) = [D_n, C_n], \quad n \geq 0,$$

onde $D = D_0 \leq D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq C_2 \leq C_1 \leq C_0 = C$.

Notemos que $I_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{f^n(I)} = [D_\infty, C_\infty]$, onde

$$D_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n \quad \text{e} \quad C_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n.$$

Suponhamos que para algum $n \geq 0$ temos:

$$\text{dist}(x(t), f^n(I)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

$$\text{ou} \quad D_n \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq C_n.$$

Então:

$$D_{n+1} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) \leq C_{n+1},$$

de modo que para cada $\delta > 0$ existe $T \geq 0$ tal que:

$$D_{n+1} - \delta \leq f(x(t-1)) \leq C_{n+1} + \delta \quad \text{para todo } t \geq T. \quad (3.5)$$

Integrando a igualdade em (3.3) de T a t , temos:

$$\int_T^t \frac{d}{ds} (e^{\lambda s} x(s)) ds = \int_T^t \lambda e^{\lambda s} f(x(s-1)) ds.$$

E desta igualdade e de (3.5), vem:

$$(D_{n+1} - \delta)[e^{\lambda t} - e^{\lambda T}] \leq e^{\lambda t} x(t) - e^{\lambda T} x(T) \leq (C_{n+1} + \delta)[e^{\lambda t} - e^{\lambda T}],$$

ou

$$D_{n+1} - \delta \leq \frac{e^{\lambda t} x(t) - e^{\lambda T} x(T)}{e^{\lambda t} - e^{\lambda T}} \leq C_{n+1} + \delta.$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - e^{\lambda T}} = 1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{\lambda T}}{e^{\lambda t} - e^{\lambda T}} = 0$, fazendo $t \rightarrow \infty$, temos:

$$D_{n+1} - \delta \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq C_{n+1} + \delta.$$

Mas δ é arbitrário, assim:

$$\text{dist}(x(t), f^{n+1}(I)) \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Portanto, se (3.4) vale para n , então (3.4) vale para $n + 1$. Como (3.4) vale para $n = 0$ (pela parte (i)), por indução (3.4) vale para cada $n \geq 0$. Mas isto prova que:

$$\text{dist}(x(t), I_\infty) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

como queríamos.

Se I for um intervalo infinito (e também $I_\infty \neq \emptyset$ na parte (ii)), então todos os argumentos acima são válidos com algumas pequenas trocas. ■

Corolário 3.1 *Sejam f , λ , I e I_∞ como na Proposição 3.1. Se $x(t)$ for uma solução periódica de (2.1) satisfazendo:*

$$x(t) \in I \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

então temos

$$x(t) \in I_\infty \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se $x(t)$ não é constante, então:

$$x(t) \in \text{int}(I_\infty) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Prova: Por (ii) da Proposição (3.1), temos que:

$$\text{dist}(x(t), I_\infty) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Como $x(t)$ é periódica, $\text{dist}(x(t), I_\infty) = 0$, $\forall t$. Como I_∞ é fechado, $x(t) \in I_\infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $x(t)$ não é constante, então I_∞ não é constituído por apenas um ponto, pois $x(t) \in I_\infty$ e $x(t)$ não é constante. Assim, $x(t_0) \in \text{int}(I_\infty)$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Trocando $x(t)$ com a solução $x(t + t_0)$ se necessário, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $t_0 = 0$. Mas então, $\varphi(0) \in \text{int}(I_\infty)$, onde $\varphi = x/[-1, 0]$ e assim por (i) da Proposição (3.1), com I_∞ em lugar de I , temos $x(t) \in \text{int}(I_\infty)$ para todo $t \geq 0$. Como $x(t)$ é periódica, a prova está concluída.

Observação 3.1: Suponhamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua para a qual $f(I) \subset I$, onde $I = [D, C]$ é um intervalo compacto. Definimos uma nova função $\tilde{f}$ por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(D) & \text{se } x \leq D, \\ f(x) & \text{se } D \leq x \leq C, \\ f(C) & \text{se } x \geq C. \end{cases}$$

Pelo Corolário 3.1 qualquer solução periódica não constante $x(t)$ de:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda \tilde{f}(x(t-1)), \quad \lambda > 0, \quad (3.6)$$

toma valores somente no interior de $I_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\tilde{f}^n(\mathbb{R})} \subseteq [D, C]$ e assim satisfaz $D < x(t) < C$ para todo t .

Mas então $x(t)$ é também uma solução de (2.1). Portanto, se estudarmos somente soluções periódicas de (2.1) tomando valores em $[D, C]$, será suficiente para procurarmos soluções periódicas de (3.6).

Observemos que se $f : I \rightarrow I$ for contínua, onde $I = [D, C]$ e $I_\infty = \{a\}$ para algum $a \in I$, então para qualquer $x_0 \in I$, temos $x_n = f(x_{n-1}) \in f^n(I)$ e assim $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Proposição 3.2 *Suponhamos que $f : I \rightarrow I$ seja contínua, onde I é um intervalo compacto. Suponhamos também que exista $a \in I$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ sempre que $x_0 \in I$ e $x_n = f^n(x_0)$ é a n -ésima iterada de x_0 pela aplicação f . Então o conjunto $I_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(I)$ é simplesmente $I_\infty = \{a\}$.*

Prova: Mostremos primeiramente que f tem um único ponto fixo em I . A existência de um ponto fixo é clara, pois como $f(I) \subseteq I$, considerando $I = [D, C]$ e $g(x) = f(x) - x$, temos que g é contínua, $g(D) \geq 0$ e $g(C) \leq 0$ e daí, pelo teorema do valor intermediário, existe $x_0 \in I$ tal que $g(x_0) = 0$, ou seja, existe $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = x_0$. Agora, considerando x um ponto fixo arbitrário de f , temos que $x = f^n(x)$ e como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, segue que $x = a$.

Analogamente, $x = a$ é o único ponto fixo da função composta $f \circ f$ em I .

Observemos que f aplica o conjunto I_∞ nele próprio e como I_∞ é um conjunto conexo não vazio, I_∞ deve conter um ponto fixo de f , isto é, o ponto $a \in I_\infty$. Denotamos $I_\infty = [D_\infty, C_\infty]$ onde $D_\infty \leq a \leq C_\infty$. Vamos provar que $D_\infty = C_\infty$.

Como $x = a$ é o único ponto fixo de f em I_∞ , temos que:

$$\begin{aligned} f(x) &> x & \text{se} & \quad D_\infty \leq x < a, \\ f(x) &< x & \text{se} & \quad a < x \leq C_\infty. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Do mesmo modo, para a função composta temos:

$$f(f(x)) > x \quad \text{se} \quad D_\infty \leq x < a, \quad (3.8)$$

$$f(f(x)) < x \quad \text{se} \quad a < x \leq C_\infty. \quad (3.9)$$

De (3.7) temos $f(x) \neq C_\infty$ se $a < x \leq C_\infty$. Mas $C_\infty \in I_\infty = f(I_\infty)$, assim existe algum $\xi \in [D_\infty, a]$ tal que $f(\xi) = C_\infty$.

Analogamente, existe $\eta \in [a, C_\infty]$ tal que $f(\eta) = D_\infty$. Logo:

$$\eta \in [a, C_\infty] \subseteq f([\xi, a]),$$

$$\xi \in [D_\infty, a] \subseteq f([a, \eta]).$$

Assim, existe $\tau \in [\xi, a]$ e $\tau' \in [a, \eta]$ tais que $f(\tau) = \eta$ e $f(\tau') = \xi$. Mas então,

$$f(f(\tau)) = D_\infty \leq \tau,$$

$$f(f(\tau')) = C_\infty \geq \tau',$$

de modo que, por (3.8), (3.9), $\tau \in [a, C_\infty]$ e $\tau' \in [D_\infty, a]$.

Portanto,

$$\tau \in [\xi, a] \cap [a, C_\infty] \quad \text{e} \quad \tau' \in [a, \eta] \cap [D_\infty, a],$$

o que implica $\tau = \tau' = a$ e:

$$\begin{cases} D_\infty = f(f(\tau)) = f(f(a)) = a, \\ C_\infty = f(f(\tau')) = f(f(a)) = a. \end{cases} \quad (3.10)$$

Portanto $C_\infty = D_\infty = a$. ■

Corolário 3.2 *Sejam f , $I = [D, C]$ e a como na proposição 3.2. Se $\varphi \in C[-1, 0]$ satisfaz:*

$$D \leq \varphi(t) \leq C \quad \text{para todo } t \in [-1, 0]$$

e $\lambda > 0$, então temos para a solução de (2.1),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; \lambda, \varphi) = a.$$

Estamos interessados em soluções periódicas de (2.1) que oscilam sobre um ponto fixo a de f . Sem perda de generalidade podemos assumir que $a = 0$; pois se $a \neq 0$ introduziremos $\bar{x} = x - a$ e definiremos $\bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x} + a) - f(a)$. Então $\bar{f}(0) = 0$ e a equação (2.1) é equivalente a equação:

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = -\lambda \bar{x}(t) + \lambda \bar{f}(\bar{x}(t-1)).$$

Geralmente, então, vamos assumir $f(0) = 0$.

Observemos que se f satisfizer todas as condições em (H1) exceto a última sentença (isto é, que $f(x)$ é constante em $(-\infty, -B]$ e em $[A, \infty)$), então podemos definir uma nova função $\tilde{f}$ por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(-B) & \text{se } x \leq -B, \\ f(x) & \text{se } -B \leq x \leq A, \\ f(A) & \text{se } x \geq A. \end{cases}$$

Claramente $\tilde{f}$ satisfaz (H1). A Observação 3.1 mostra que toda solução periódica não-constante de:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda \tilde{f}(x(t-1)), \quad \lambda > 0,$$

satisfaz $-B < x(t) < A$ para todo t , assim é uma solução periódica de (2.1). Como estas são as soluções que estamos interessados, sem perda de generalidade consideramos a função modificada $\tilde{f}$ em lugar de f . Isto é, a sentença final da hipótese (H1), essencialmente não impõe restrição adicional sobre f para nossos propósitos. Para enfatizar isto, enunciamos o seguinte resultado:

Proposição 3.3 *Seja f satisfazendo (H1). Então qualquer solução periódica não constante da equação (2.1) satisfaz:*

$$-B < x(t) < A \quad \text{para todo } t.$$

Agora, através da demonstração do Teorema 2.1 do capítulo anterior, vemos que sob a hipótese (H1), existe uma correspondência um a um entre as soluções periódicas lentamente oscilantes de (2.1) e os pontos fixos não triviais de F_λ , ou seja, $x(t)$ é uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1) se, e somente se, $F_\lambda(\varphi) = \varphi$ onde $\varphi \in (K_\lambda)_0$ é a função inicial, definida em $[-1, 0]$, da solução $x(t)$.

Definimos então o conjunto de todas tais soluções:

$$\Sigma = \{(\lambda, \varphi) \in (0, \infty) \times K \mid \varphi \in (K_\lambda)_0 \text{ e } F_\lambda(\varphi) = \varphi\}, \quad (3.11)$$

onde

$$K = \{\varphi \in C[-1, 0] \mid \varphi(-1) = 0 \text{ e } \varphi(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in [-1, 0]\}$$

e K_λ , $(K_\lambda)_0$ já foram definidos no capítulo anterior.

Mostraremos neste capítulo que Σ contém um contínuo ilimitado Σ_0 que se estende do ponto de bifurcação de Hopf $(\lambda_0, 0)$ por toda a imagem $\lambda_0 < \lambda < \infty$, onde λ_0 foi determinado no capítulo anterior.

Teorema 3.1 *Suponhamos que f satisfaça (H1) e seja diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = -k$, onde $k > 1$. Seja o conjunto $\Sigma \subseteq (0, \infty) \times K$ definido por (3.11) e $\lambda_0 > 0$ dado por $\lambda_0 = \frac{\gamma_0}{\sqrt{k^2 - 1}}$ onde $\cos \gamma_0 = -\frac{1}{k}$, $\gamma_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Então temos o seguinte:*

- (i) *Existe $\delta > 0$ tal que se $(\lambda, \varphi) \in \Sigma$, então $\lambda \geq \delta$ e $\|\varphi\| < A$.*
- (ii) *O fecho $\bar{\Sigma}$ de Σ em $(0, \infty) \times K$ é $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{(\lambda_0, 0)\}$*
- (iii) *Seja $\Sigma_0 \subseteq \bar{\Sigma}$ a componente conexa maximal de $\bar{\Sigma}$ contendo $(\lambda_0, 0)$. Então Σ_0 é um subconjunto ilimitado de $(0, \infty) \times K$.*
- (iv) *Para cada $\lambda > \lambda_0$, existe uma solução periódica lentamente oscilante $x(t)$ de (2.1) tal que $(\lambda, \varphi) \in \Sigma_0$, onde $\varphi = x/[-1, 0]$ e $-B < x(t) < A$ para todo t .*

Antes de provarmos o Teorema 3.1, vamos apresentar alguns lemas. Lembramos que a aplicação $F_\lambda : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ é definida por:

$$\begin{aligned} F_\lambda(\varphi)(t) &= x(z_2(\varphi) + 1 + t; \varphi), & -1 \leq t \leq 0, & \text{ para } \varphi \in (K_\lambda)_0, \\ F_\lambda(0) &= 0 \end{aligned}$$

e é uma aplicação completamente contínua.

Definimos agora $F : (0, \infty) \times K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ por:

$$F(\lambda, \varphi) = F_\lambda(\varphi).$$

O primeiro dos lemas é usado para estender o domínio de definição de F de $(0, \infty) \times K_\lambda$ para $(0, \infty) \times K$.

Lema 3.1 *Existe uma retração contínua ρ de $(0, \infty) \times K$ sobre $(0, \infty) \times K_\lambda$. Esta retração tem a forma*

$$\rho(\lambda, \varphi) = (\lambda, \rho_\lambda(\varphi)) \text{ para todo } (\lambda, \varphi) \in (0, \infty) \times K,$$

onde $\rho_\lambda^{-1}(0) = \{0\}$.

Prova: Lembrando que:

$$K_\lambda = \{\varphi \in C[-1, 0] \mid \varphi(-1) = 0 \text{ e } e^{\lambda t} \varphi(t) \text{ é não decrescente em } [-1, 0]\},$$

notemos que para quaisquer números reais α e β , os conjuntos K_α e K_β são homeomorfos por um homeomorfismo $h_{\alpha, \beta} : K_\alpha \rightarrow K_\beta$ definido por:

$$(h_{\alpha, \beta} \varphi)(t) = e^{(\alpha - \beta)t} \varphi(t), \quad -1 \leq t \leq 0. \quad (3.12)$$

A aplicação inversa de $h_{\alpha,\beta}$ é $h_{\beta,\alpha}$. Observemos ainda que a fórmula (3.12) define, de fato, uma extensão de $h_{\alpha,\beta}$ para um homeomorfismo de K sobre K ; denotamos a aplicação estendida por $H_{\alpha,\beta}$.

A aplicação $\rho_0 : K \rightarrow K_0$ definida por:

$$(\rho_0\varphi)(t) = \max_{-1 \leq s \leq t} \varphi(s), \text{ para } -1 \leq t \leq 0$$

é uma retração contínua de K sobre K_0 . De fato, $K_0 \subseteq K$ e para cada $\psi \in K_0$, $\psi(t)$ é não decrescente em $[-1, 0]$ (pela definição de K_0) e assim:

$$(\rho_0\psi)(t) = \max_{-1 \leq s \leq t} \psi(s) = \psi(t), \quad \forall t \in [-1, 0].$$

Logo, $\forall \psi \in K_0$, $\rho_0\psi = \psi$, ou seja, ρ_0 é uma retração contínua de K sobre K_0 . Também temos que $\rho_0^{-1}(0) = \{0\}$. De fato, se $\varphi \in K$ e $\rho_0(\varphi) = 0$, então:

$$\rho_0(\varphi)(t) = \max_{-1 \leq s \leq t} \varphi(s) = 0, \quad \forall t \in [-1, 0].$$

Em particular,

$$\rho_0(\varphi)(0) = \max_{-1 \leq s \leq 0} \varphi(s) = 0$$

e como $\varphi(-1) = 0$ e $\varphi(t) \geq 0$ para $t \in [-1, 0]$, então φ é a função nula. Logo $\rho_0^{-1}(0) = \{0\}$.

Definimos agora uma aplicação de K sobre K_λ por:

$$\rho_\lambda(\varphi) = h_{0,\lambda}(\rho_0(H_{\lambda,0}(\varphi))).$$

Esta aplicação também é uma retração contínua de K sobre K_λ . De fato, $K_\lambda \subseteq K$ e $\forall \varphi \in K_\lambda$, $e^{\lambda t}\varphi(t)$ é não decrescente em $[-1, 0]$ (pela definição de K_λ) e assim:

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(\varphi)(t) &= h_{0,\lambda}(\rho_0(H_{\lambda,0}(\varphi)(t))) = h_{0,\lambda}(\rho_0(e^{\lambda t}\varphi(t))) \\ &= h_{0,\lambda}\left(\max_{-1 \leq s \leq t} e^{\lambda s}\varphi(s)\right) = h_{0,\lambda}(e^{\lambda t}\varphi(t)) \\ &= \varphi(t), \quad \forall t \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Logo, $\forall \varphi \in K_\lambda$, $\rho_\lambda(\varphi) = \varphi$, ou seja, ρ_λ é uma retração contínua de K sobre K_λ .

Então $\rho : (0, \infty) \times K \rightarrow (0, \infty) \times K_\lambda$ dada por:

$$\rho(\lambda, \varphi) = (\lambda, \rho_\lambda(\varphi)),$$

define uma retração contínua $\rho : (0, \infty) \times K \rightarrow (0, \infty) \times K_\lambda$, pois se $(\lambda, \varphi) \in (0, \infty) \times K_\lambda$, então:

$$\rho(\lambda, \varphi) = (\lambda, \rho_\lambda(\varphi)) = (\lambda, \varphi).$$

Ainda $\rho_\lambda^{-1}(0) = \{0\}$. De fato, se $\varphi \in K$ e $\rho_\lambda(\varphi) = 0$, então para todo $t \in [-1, 0]$, temos:

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(\varphi)(t) = 0 &\Rightarrow h_{0,\lambda}(\rho_0(H_{\lambda,0}(\varphi)(t))) = 0 \stackrel{\text{def. de } h_{0,\lambda}}{\Rightarrow} \rho_0(H_{\lambda,0}(\varphi)(t)) = 0 \\ &\stackrel{\rho_0^{-1}(0)=\{0\}}{\Rightarrow} H_{\lambda,0}(\varphi)(t) = 0 \stackrel{\text{def. de } H_{\lambda,0}}{\Rightarrow} \varphi(t) = 0. \end{aligned}$$

Logo $\varphi = 0$.

Portanto $\rho_\lambda^{-1}(0) = \{0\}$. ■

Agora, com a ajuda do Lema 3.1, definimos uma extensão G de F por:

$$G(\lambda, \varphi) = F(\rho(\lambda, \varphi)), \text{ onde } \rho(\lambda, \varphi) \in (0, \infty) \times K_\lambda$$

e definimos $G_\lambda : K \rightarrow K_\lambda$ por:

$$G_\lambda(\varphi) = G(\lambda, \varphi).$$

Vemos então que o conjunto dos pontos fixos de G_λ é exatamente o conjunto dos pontos fixos de F_λ , pois:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ é um ponto fixo de } G_\lambda &\Leftrightarrow G_\lambda(\varphi) = \varphi \in K_\lambda \Leftrightarrow G(\lambda, \varphi) = \varphi \\ &\Leftrightarrow F(\rho(\lambda, \varphi)) = \varphi \Leftrightarrow F(\lambda, \rho_\lambda(\varphi)) = \varphi \\ &\Leftrightarrow F_\lambda(\rho_\lambda(\varphi)) = \varphi \stackrel{\varphi \in K_\lambda}{\Leftrightarrow} F_\lambda(\varphi) = \varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi \text{ é um ponto fixo de } F_\lambda. \end{aligned}$$

Assim:

$$\Sigma = \{(\lambda, \varphi) \in (0, \infty) \times K \mid G_\lambda(\varphi) = \varphi \text{ e } \varphi \neq 0\}.$$

Para provarmos que Σ_0 é ilimitado, vamos usar as definições de ponto fixo atrator, ponto fixo ejetivo e o seguinte teorema, devido a Nussbaum [22] e que pode ser encontrado em [11]:

Teorema 3.2 *Suponhamos que K seja um conjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X , 0 um ponto extremo de K , $\{0\} \neq K$ e $J = (a, \infty)$, com $-\infty \leq a < \infty$. Suponhamos que $A : K \times J \rightarrow K$ satisfaça às seguintes hipóteses:*

- (i) $A(0, \alpha) = 0$ para $\alpha \in J$.
- (ii) A é completamente contínua.
- (iii) Existe um $\alpha_0 \in J$ tal que, para qualquer intervalo compacto $J_0 \in J$, $\alpha_0 \notin J_0$, existe um $\varepsilon = \varepsilon(J_0) > 0$ tal que $A(x, \alpha) \neq x$ para $\alpha \in J_0$, $0 < |x| \leq \varepsilon$.

(iv) Existe um intervalo aberto I_0 contendo λ_0 tal que 0 é um ponto atrator uniforme de $A(., \alpha)$ para $\alpha \in I_0$, $\alpha < \alpha_0$, e 0 é um ponto ejetivo de $A(., \alpha)$ para $\alpha \in I_0$, $\alpha > \alpha_0$, ou reciprocamente.

(v) Existe um $\alpha_1 \in J$ tal que $A(x, \alpha) = x$ para $x \neq 0$ implica $\alpha \geq \alpha_1$.

Se as hipóteses acima são satisfeitas e $S \subseteq K \times J$ e $S_0 \subseteq K \times J$ são definidos por:

$$S = \bar{u}, \text{ onde } u = \{(x, \alpha) \in K \times J \mid x \neq 0, A(x, \alpha) = x\},$$

$$S_0 = \text{componente conexa fechada maximal de } S \text{ contendo } (0, \alpha_0),$$

então S_0 é ilimitado.

Sabendo que a equação característica (2.3) tem somente raízes com parte real negativa se $0 < \lambda < \lambda_0$ (provamos isto na Proposição 2.2), o seguinte lema é um resultado padrão na teoria de estabilidade de equações diferenciais retardadas e pode ser encontrado em [11]. Como um caso especial, ele implica que $0 \in K$ é um ponto fixo atrator de $G_\lambda : K \rightarrow K_\lambda$ se $0 < \lambda < \lambda_0$.

Lema 3.2 *Suponhamos que f satisfaça (H1) e seja diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = -k$. Suponhamos que $0 < \lambda < \lambda_0$ com λ_0 como no Teorema 3.1 se $k > 1$ e $\lambda_0 = \infty$ se $0 \leq k \leq 1$. Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $\kappa > 0$ existe um número $T_\kappa \geq 0$ tal que:*

$$\sup_{t \geq T_\kappa} |x(t; \lambda, \varphi)| < \kappa,$$

sempre que $\varphi \in C[-1, 0]$ satisfizer $\|\varphi\| < \delta$.

Se, por outro lado, $\lambda > \lambda_0$, mostramos no Lema 2.6 que 0 é um ponto fixo ejetivo de $F_\lambda : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$.

Agora, lembremos que nossa retração $\rho_\lambda : K \rightarrow K_\lambda$ foi escolhida de modo que $\rho_\lambda^{-1}(0) = \{0\}$. Usando este fato e o fato que para qualquer $\varphi \in K$ temos $G_\lambda^n(\varphi) = F_\lambda^n(\rho_\lambda(\varphi))$, vemos que a ejetividade de F_λ implica a ejetividade de G_λ e assim obtemos o seguinte resultado:

Lema 3.3 *Suponhamos que f satisfaça (H1) e seja diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = -k$, onde $k > 1$. Suponhamos que $\lambda > \lambda_0$ com λ_0 como no Teorema 3.1. Então $0 \in K$ é um ponto fixo ejetivo de G_λ .*

O próximo Lema vai nos ajudar na prova da parte (i) do Teorema 3.1.

Lema 3.4 *Suponhamos que f satisfaça (H1) e seja diferenciável em $x = 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que se $x(t)$ for uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1) para algum $\lambda > 0$, então $\lambda \geq \delta$. Assim $\Sigma \subseteq [\delta, \infty) \times K$.*

Prova: Sabemos da Proposição 3.3 que toda solução periódica lentamente oscilante $x(t)$ de (2.1) satisfaz:

$$-B < x(t) < A \text{ para todo } t,$$

onde A e B são como em (H1).

Como f é diferenciável na origem, existe uma constante Ω tal que:

$$|f(x)| \leq \Omega|x| \text{ se } -B \leq x \leq A.$$

Seja $x(t)$ uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1) para algum $\lambda > 0$, com primeiro zero z_1 e segundo zero z_2 e os conjuntos:

$$M_+ = \max_{-1 \leq x \leq z_1} x(t) \text{ e } M_- = \max_{z_1 \leq t \leq z_2} |x(t)|.$$

Lembremos que as hipóteses sobre f implicam que:

$$M_+ = \max_{-1 \leq x \leq 0} x(t) \text{ e } M_- = \max_{z_1 \leq t \leq z_1+1} |x(t)|; \quad (3.13)$$

e a periodicidade implica:

$$M_+ = \max_{z_2 \leq t \leq z_2+1} x(t).$$

Usando (2.2) com $t_0 = z_1$, vem:

$$x(t) = \int_{z_1}^t \lambda e^{\lambda(s-t)} f(x(s-1)) ds,$$

o que implica, para $z_1 \leq t \leq z_1 + 1$:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \int_{z_1}^t \lambda e^{\lambda(s-t)} |f(x(s-1))| ds \\ &\leq \int_{z_1}^t \lambda e^{\lambda(s-t)} \Omega |x(s-1)| ds \\ &\stackrel{z_1-1 \leq s-1 \leq z_1}{\leq} \Omega M_+ \int_{z_1}^t \lambda e^{\lambda(s-t)} ds \\ &= \Omega M_+ (1 - e^{\lambda(z_1-t)}). \end{aligned}$$

Portanto $|x(t)| \leq (1 - e^{\lambda(z_1-t)}) \Omega M_+$, se $z_1 \leq t \leq z_1 + 1$.

Assim:

$$\begin{aligned} M_- &= \max_{z_1 \leq t \leq z_1+1} |x(t)| \\ &\leq \max_{z_1 \leq t \leq z_1+1} (1 - e^{\lambda(z_1-t)}) \Omega M_+ \\ &= (1 - e^{\lambda(z_1-(z_1+1))}) \Omega M_+ \\ &= (1 - e^{-\lambda}) \Omega M_+. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Um argumento análogo mostra que

$$M_+ \leq (1 - e^{-\lambda}) \Omega M_-$$

e combinando isto com (3.14), vem:

$$M_+ \leq (1 - e^{-\lambda})^2 \Omega^2 M_+. \quad (3.15)$$

Mas, se escolhermos $\delta > 0$ de modo que $(1 - e^{-\delta})^2 \Omega^2 \leq 1$, então (3.15) é impossível para $0 < \lambda < \delta$ e $M_+ > 0$, pois neste caso:

$$\begin{aligned} M_+ &\leq (1 - e^{-\lambda})^2 \Omega^2 M_+ \\ &< (1 - e^{-\delta})^2 \Omega^2 M_+ \\ &\leq M_+. \end{aligned}$$

Portanto, tomando δ deste modo, $\lambda \geq \delta$. ■

Será conveniente obtermos uma limitação sobre o período minimal de qualquer solução periódica lentamente oscilante. Faremos isto através do seguinte lema:

Lema 3.5 *Suponhamos que f satisfaça (H1) e seja diferenciável em $x = 0$. Existe um número $Q > 0$ tal que se $x(t)$ é uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1) para algum $\lambda > 0$, então o período minimal $z_2 + 1$ de $x(t)$ satisfaz:*

$$z_2 + 1 \leq Q.$$

O número Q depende somente de f e não depende de λ .

Prova: Consideremos as notações da prova do Lema 3.4 e suponhamos que $x(t)$ seja uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1) para algum $\lambda > 0$. O Lema 3.4 implica $\lambda \geq \delta$.

De (2.1) temos, para $0 \leq t \leq z_1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{\lambda t} x(t)) &= \lambda e^{\lambda t} x(t) + e^{\lambda t} (-\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1))) \\ &= \lambda e^{\lambda t} f(x(t-1)) \leq 0 \end{aligned}$$

e assim, para $0 \leq t \leq z_1$:

$$e^{\lambda t} x(t) \leq x(0) \Rightarrow x(t) \leq e^{-\lambda t} x(0) \leq e^{-\delta t} M_+,$$

o que implica:

$$0 \leq x(t) \leq e^{-\delta t} M_+ \leq e^{-\delta(z_1-1)} M_+, \quad \text{se } z_1 - 1 \leq t \leq z_1.$$

Usando este fato e (2.2) com $t_0 = z_1$ e $t \in [z_1, z_1 + 1]$, vem:

$$\begin{aligned}
 e^{\lambda(t-z_1)}|x(t)| &\leq \int_{z_1}^t \lambda e^{\lambda(s-z_1)}|f(x(s-1))|ds \\
 &\leq \int_{z_1}^t \lambda e^{\lambda(s-z_1)}\Omega|x(s-1)|ds \\
 &\stackrel{z_1-1 \leq s-1 \leq z_1}{\leq} \Omega e^{-\delta(z_1-1)}M_+ \int_{z_1}^t \lambda e^{\lambda(s-z_1)}ds \\
 &= (e^{\lambda(t-z_1)} - 1) e^{-\delta(z_1-1)}\Omega M_+.
 \end{aligned}$$

Isto e (3.13) implicam:

$$\begin{aligned}
 M_- &= \max_{z_1 \leq t \leq z_1+1} |x(t)| \\
 &\leq \max_{z_1 \leq t \leq z_1+1} \frac{(e^{\lambda(t-z_1)} - 1)}{e^{\lambda(t-z_1)}} e^{-\delta(z_1-1)}\Omega M_+ \\
 &\leq e^{-\delta(z_1-1)}\Omega M_+.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Um argumento análogo mostra que

$$M_+ \leq e^{-\delta(z_2-z_1-1)}\Omega M_-$$

e combinando com (3.16) temos:

$$\begin{aligned}
 M_+ &\leq e^{-\delta(z_2-z_1-1)}\Omega M_- \\
 &\leq e^{-\delta(z_2-z_1-1)}\Omega e^{-\delta(z_1-1)}\Omega M_+ \\
 &= e^{-\delta(z_2-2)}\Omega^2 M_+.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Como $M_+ > 0$, $e^{-\delta(z_2-2)}\Omega^2 \geq 1$, assim:

$$z_2 \leq \frac{2 \ln \Omega}{\delta} + 2; \quad z_2 + 1 \leq Q = \frac{2 \ln \Omega}{\delta} + 3$$

e notemos que Ω só depende de f e que δ só depende de Ω e portanto de f . ■

Lema 3.6 *Suponhamos que f satisfaça (H1) e seja diferenciável em $x = 0$ com $k = -f'(0)$ e seja $J \subset (0, \infty)$ qualquer conjunto compacto. Além disso, se $k > 1$, seja λ_0 como no Teorema 3.1 e suponhamos que $\lambda_0 \notin J$. Então existe $\kappa = \kappa(J) > 0$ tal que se $x(t)$ é uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1) para algum $\lambda \in J$, então $\max_t |x(t)| > \kappa$. E ainda,*

$$\overline{\Sigma} - \Sigma \subseteq \{(\lambda_0, 0)\}.$$

Prova: Suponhamos que para algum J não exista κ . Então existe uma sequência de soluções periódicas lentamente oscilantes $x_n(t)$ de (2.1) para alguma sequência $\lambda_n \in J$, tal que $\max_t |x_n(t)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Definimos $y_n(t)$ por:

$$y_n(t) = \frac{x_n(t)}{\|x_n\|},$$

onde $\|x_n\| = \max_t |x_n(t)|$;

Então:

$$\begin{aligned} \dot{y}_n(t) &= \frac{1}{\|x_n\|} \dot{x}_n(t) \\ &= \frac{1}{\|x_n\|} (-\lambda_n x_n(t) + \lambda_n f(x_n(t-1))) \\ &= \frac{-\lambda_n x_n(t)}{\|x_n\|} + \frac{\lambda_n f(x_n(t-1))}{\|x_n\|} \\ &= -\lambda_n y_n(t) - \lambda_n k y_n(t-1) + \lambda_n R(y_n(t-1), \|x_n\|), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde R é a função contínua definida por:

$$R(y, \xi) = \begin{cases} ky + \xi^{-1} f(\xi y) & \text{se } \xi \neq 0, \\ 0 & \text{se } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Denotamos também o primeiro zero de $x_n(t)$ por z_1^n e o segundo zero de $x_n(t)$ por z_2^n .

Tomando subsequências, podemos agora assumir:

- $\lambda_n \rightarrow \lambda \in J$ (pois $\lambda_n \in J$ e J é compacto).
- $z_1^n \rightarrow z_1$ e $z_2^n \rightarrow z_2$ (pois $z_1^n, z_2^n \leq Q$ são sequências limitadas).
- $y_n(t) \rightarrow y(t)$ onde $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e $\dot{y}_n(t) \rightarrow \dot{y}(t)$ uniformemente sobre conjuntos compactos. Além disso, temos:

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t) - \lambda k y(t-1) \quad \text{para todo } t, \quad (3.20)$$

$$y(t) \geq 0 \text{ em } (-1, z_1) \text{ e } y(t) \leq 0 \text{ em } (z_1, z_2), \quad (3.21)$$

$$y(t+1+z_2) = y(t) \quad \text{para todo } t, \quad (3.22)$$

$$z_1 \geq 0 \text{ e } z_2 - z_1 \geq 1, \quad (3.23)$$

$$\max_t |y(t)| = \max_t \frac{\|x(t)\|}{\|x(t)\|} = 1. \quad (3.24)$$

A teoria padrão para equações diferenciais retardadas lineares implica que (3.20) não pode ter uma solução periódica a menos que a equação característica (2.3) tenha uma raiz com parte real nula. E já provamos na Proposição 2.2 que se isto acontecer e $\lambda > 0$ e $k \geq 0$ (como é o caso aqui), então necessariamente $k > 1$ e $\lambda = \lambda_m$ para algum $m \geq 0$, onde:

$$\lambda_m = \frac{\gamma_0 + 2\pi m}{\sqrt{k^2 - 1}},$$

com $\gamma_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ como no Teorema 3.1. E também, para $\lambda = \lambda_m$ as únicas raízes da equação característica (2.3) sobre o eixo imaginário são as raízes complexas conjugadas simples:

$$\xi = \pm i\gamma_m,$$

onde $\gamma_m = \gamma_0 + 2\pi m$.

Logo, a teoria para equações diferenciais retardadas lineares implica que para $\lambda = \lambda_m$ as únicas soluções periódicas de (3.20) são combinações lineares de $\sin \gamma_m t$ e $\cos \gamma_m t$, ou seja, são da forma:

$$y(t) = a \cos \gamma_m t + b \sin \gamma_m t.$$

E usando as fórmulas (3.21), (3.22) e (3.23), temos:

$$y(-1) = a \cos \gamma_m - b \sin \gamma_m = 0,$$

o que implica, $a \cos \gamma_m = b \sin \gamma_m$;

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{\gamma_m} - 1\right) &= a \cos(\pi - \gamma_m) + b \sin(\pi - \gamma_m) \\ &= -a \cos \gamma_m + b \sin \gamma_m = 0 \end{aligned}$$

e,

$$y(t) \geq 0 \text{ em } \left(-1, \frac{\pi}{\gamma_m} - 1\right)$$

e também:

$$\begin{aligned} y\left(\frac{2\pi}{\gamma_m} - 1\right) &= a \cos(2\pi - \gamma_m) + b \sin(2\pi - \gamma_m) \\ &= a \cos \gamma_m - b \sin \gamma_m = 0; \end{aligned}$$

$$y(t) \leq 0 \text{ em } \left(\frac{\pi}{\gamma_m} - 1, \frac{2\pi}{\gamma_m} - 1\right);$$

$$y\left(t + 1 + \frac{2\pi}{\gamma_m} - 1\right) = y(t);$$

$$\frac{\pi}{\gamma_m} - 1 \geq 0 \text{ e } \frac{2\pi}{\gamma_m} - 1 - \left(\frac{\pi}{\gamma_m} - 1 \right) \geq 1,$$

donde concluimos que $\gamma_m \leq \pi$ e portanto $m = 0$.

Mas, por hipótese, $\lambda = \lambda_0 \notin J$, contradizendo $\lambda_n \rightarrow \lambda \in J$.

Portanto, existe $\kappa = \kappa(J) > 0$ como queríamos.

Como Σ consiste daqueles (λ, φ) para os quais $\lambda \geq \delta$ e $G_\lambda(\varphi) = \varphi \neq 0$, $\varphi \in K$, segue que $\overline{\Sigma} - \Sigma \subseteq (0, \infty) \times \{0\}$. De fato, se $(\lambda, \varphi) \in \overline{\Sigma}$, então existe uma sequência $(\lambda_n, \varphi_n) \in \Sigma$ tal que:

$$(\lambda_n, \varphi_n) \rightarrow (\lambda, \varphi).$$

Como G é contínua, temos:

$$G(\lambda_n, \varphi_n) \rightarrow G(\lambda, \varphi),$$

ou

$$G_{\lambda_n}(\varphi_n) \rightarrow G_\lambda(\varphi).$$

Assim:

$$G_\lambda(\varphi) = \lim G_{\lambda_n}(\varphi_n) = \lim \varphi_n = \varphi.$$

Daí, se $\varphi \neq 0$, então $(\lambda, \varphi) \in \Sigma$, ou seja, $(\lambda, \varphi) \notin \overline{\Sigma} - \Sigma$.

Logo, $\overline{\Sigma} - \Sigma \subseteq (0, \infty) \times \{0\}$.

Portanto, dos resultados acima, segue que:

$$\overline{\Sigma} - \Sigma \subseteq \{(\lambda_0, 0)\}.$$

■

Agora podemos provar o Teorema 3.1:

Prova do Teorema 3.1:

- (i) Pelo Lema 3.4 segue que $\lambda \geq \delta$. Se $(\lambda, \varphi) \in \Sigma$ então $\varphi = x/[-1, 0]$, onde $x(t) = x(t; \lambda, \varphi)$ é uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1). Pela Proposição 3.3 temos $-B < x(t) < A$ para todo t , assim, se $-1 \leq t \leq 0$, $0 \leq x(t) = \varphi(t) < A$. Logo $\|\varphi\| < A$.
- (ii) Segue diretamente do Lema 3.6.
- (iii) Nesta parte vamos utilizar o Teorema 3.2.

Temos que K é um subconjunto fechado e convexo do espaço de Banach $C[-1, 0]$, 0 é um ponto extremo (ponto de mínimo) de K , $K \neq \{0\}$, $G : (0, \infty) \times K \rightarrow K$ e:

- a) $G(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda > 0$.
- b) G é completamente contínua.
- c) $\lambda_0 > 0$ e pelo Lema 3.6, para qualquer conjunto compacto $J_0 \subset (0, \infty)$, $\lambda_0 \notin J_0$, existe um $\kappa = \kappa(J_0) > 0$ tal que se $x(t)$ é uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1) para algum $\lambda \in J_0$, isto é, se $G(\lambda, \varphi) = G_\lambda(\varphi) = \varphi$ onde $\varphi = x/[-1, 0]$, então $\max_t |x(t)| > \kappa$. Logo, $G(\lambda, \varphi) \neq \varphi$ para $\lambda \in J_0$, $0 < |x| \leq \kappa$.
- d) Pelo Lema 3.2, $0 \in K$ é um ponto fixo atrator de G_λ para $0 < \lambda < \lambda_0$ e pelo Lema 3.3, $0 \in K$ é um ponto fixo ejetivo de G_λ para $\lambda > \lambda_0$.
- e) Pelo Lema 3.4, existe $\delta > 0$ tal que, se $x(t)$ é uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1) para algum λ , isto é, se $G(\lambda, \varphi) = \varphi$, $\varphi \neq 0$, então $\lambda \geq \delta$.

E ainda $\bar{\Sigma} \subseteq (0, \infty) \times K$ e $\Sigma_0 \subset (0, \infty) \times K$ é a componente conexa maximal de $\bar{\Sigma}$ contendo $(\lambda_0, 0)$.

Portanto, pelo Teorema 3.2, Σ_0 é ilimitado.

- (iv) Como $\Sigma_0 \subseteq (0, \infty) \times K$ é ilimitado e cada $(\lambda, \varphi) \in \Sigma_0$ satisfaz (i) deste teorema e $(\lambda_0, 0) \in \Sigma_0$, vemos que existe $(\lambda, \varphi) \in \Sigma_0$ para cada $\lambda > \lambda_0$. E como já foi observado, cada $(\lambda, \varphi) \in \Sigma$ com $\varphi \neq 0$, corresponde a uma solução periódica lentamente oscilante de (2.1). ■

Capítulo 4

Aplicações a modelos físicos e biológicos

Neste capítulo, vamos aplicar os resultados desenvolvidos nos capítulos anteriores ao estudo de alguns modelos físicos e biológicos.

No exemplo 1, consideraremos um modelo dado por uma equação diferencial retardada linear e, nos outros exemplos, consideraremos modelos não-lineares.

Exemplo 4.1:

No estudo do reflexo da luz na pupila humana, realizado em [15], aparece a equação diferencial retardada linear:

$$\frac{da}{dt} + \alpha a = \frac{\gamma}{\beta A^*} a(t - \tau), \quad (4.1)$$

onde α , γ , A^* e o retardo τ são constantes positivas e β é uma constante negativa.

Para as análises feitas em [15], os autores assumem que esta equação possui solução periódica sobre determinadas condições a respeito dos parâmetros.

Vamos utilizar os resultados que estudamos para mostrar isto.

A equação característica de (4.1) é:

$$\xi + \alpha - \frac{\gamma}{\beta A^*} e^{-\xi\tau} = 0,$$

ou

$$\xi + \alpha - \alpha G e^{-\xi\tau} = 0, \quad (4.2)$$

onde $G = \frac{\gamma}{\alpha\beta A^*} < 0$.

Como já observamos anteriormente, a equação diferencial retardada linear (4.1) possui uma solução periódica, quando a equação característica (4.2) tiver uma solução com parte real nula.

De acordo com a Proposição 2.2, a equação característica (4.2) possui uma solução com parte real nula, quando:

$$G < -1; \quad \alpha = \frac{\omega_1}{\sqrt{G^2 - 1}};$$

$$\tau\omega_1 = \arccos\left(\frac{1}{G}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

e neste caso $\xi = \pm i\omega_1$.

Logo, a equação diferencial retardada linear (4.1) possui uma solução periódica, quando as condições acima forem satisfeitas.

Exemplo 4.2:

A equação:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda (x^3(t-1) - \mu x(t-1)) \quad (4.3)$$

é do tipo (2.1). Notemos que, neste caso, $f(x) = x^3 - \mu x$ e esta função, apesar de simples, ilustra muito bem a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores.

Figura 4.1: Gráfico de $f(x) = x^3 - \mu x$.

Esta aplicação $f(x)$, claramente tem um ponto fixo em $x_0 = 0$ e, além disso,

$$f'(0) = -\mu.$$

Então tomamos $k = \mu > 1$. Assim, a hipótese $f'(0) = -k$, com $k > 1$, dos Teoremas 2.1 e 3.1, está satisfeita.

Agora, precisamos encontrar um intervalo da forma $[-B, A]$ tal que:

$$f : [-B, A] \rightarrow [-B, A]$$

e

$$xf(x) < 0 \text{ se } x \in [-B, A], x \neq 0.$$

Pois bem, os zeros de f são, 0, $\sqrt{\mu}$ e $-\sqrt{\mu}$, sendo que em $[-\sqrt{\mu}, 0)$, $f(x) = x(x^2 - \mu)$ é positiva e em $(0, \sqrt{\mu}]$, f é negativa, ou seja, no intervalo $[-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}]$, $xf(x) < 0$ se $x \neq 0$.

Resta sabermos para que valores de μ , $f : [-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}] \rightarrow [-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}]$.

Temos que:

$$f'(x) = 3x^2 - \mu = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3\mu}}{3},$$

ou seja, $\frac{\sqrt{3\mu}}{3}$ e $-\frac{\sqrt{3\mu}}{3}$ são os únicos pontos críticos de f . Analisando f' , vemos que $\frac{\sqrt{3\mu}}{3}$ é ponto de mínimo de f e $-\frac{\sqrt{3\mu}}{3}$ é ponto de máximo de f .

Precisamos então que:

$$f\left(-\frac{\sqrt{3\mu}}{3}\right) < \sqrt{\mu} \text{ e } f\left(\frac{\sqrt{3\mu}}{3}\right) > -\sqrt{\mu}.$$

Fazendo estes cálculos, obtemos:

$$f\left(-\frac{\sqrt{3\mu}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3\mu}}{3} \left(\frac{\mu}{3} - \mu\right) = \frac{2\sqrt{3\mu}\sqrt{\mu}}{9} < \sqrt{\mu} \Leftrightarrow \mu < \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

e analogamente,

$$f\left(\frac{\sqrt{3\mu}}{3}\right) > -\sqrt{\mu} \Leftrightarrow \mu < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $f : [-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}] \rightarrow [-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}]$, se $\mu < \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

E tomando

$$\lambda_0 = \frac{\gamma_0}{\sqrt{k^2 - 1}},$$

onde

$$\cos \gamma_0 = -\frac{1}{k}; \quad \gamma_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

ou seja, tomando

$$\lambda_0 = \frac{\arccos\left(-\frac{1}{\mu}\right)}{\sqrt{\mu^2 - 1}},$$

estamos em condições de aplicar nossos principais resultados a este modelo.

Pelo Teorema 3.1, temos que para $\lambda > \lambda_0$, a família parametrizada de equações diferenciais (4.3), admite um contínuo ilimitado de soluções periódicas lentamente oscilantes, para $1 < \mu < \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exemplo 4.3:

A equação:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda (\mu_1 + \mu_2 \sin(\mu_3 x(t-1) + \mu_4)) \quad (4.4)$$

é do tipo (2.1). Esta equação surge em problemas ópticos e é estudada, por exemplo, em [5], [6], [12], [13] e [14], onde as interpretações físicas podem ser encontradas.

Notemos que, neste caso:

$$f(x) = \mu_1 + \mu_2 \sin(\mu_3 x + \mu_4). \quad (4.5)$$

Mostremos que esta função f pode ser reduzida à forma:

$$f(x) = -\mu [\sin(x + \theta) - \sin \theta], \quad (4.6)$$

onde $\mu > 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi$,

Observemos que f possui ao menos um ponto fixo x_0 e então, tomando $y = x - x_0$, da equação (4.4) temos:

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t) + \lambda g(y(t-1)), \quad (4.7)$$

onde

$$g(y) = f(y + x_0) - f(x_0)$$

satisfaz $g(0) = 0$.

Assim:

$$g(y) = \mu_1 + \mu_2 \sin(\mu_3 y + \mu_3 x_0 + \mu_4) - x_0 = \mu_1 - x_0 + \mu_2 \sin(\mu_3 y + \mu_3 x_0 + \mu_4)$$

também tem a forma (4.5) mas com diferentes valores de μ_1 ($\mu'_1 = \mu_1 - x_0$) e μ_4 ($\mu'_4 = \mu_3 x_0 + \mu_4$). No entanto, continuaremos denotando os novos valores por μ_1 e μ_4 .

Daí, de $g(0) = 0$, vem:

$$\mu_1 = -\mu_2 \operatorname{sen} \mu_4.$$

Logo:

$$g(y) = \mu_2 (\operatorname{sen}(\mu_3 y + \mu_4) - \operatorname{sen} \mu_4).$$

Agora, assumindo $\mu_2 \neq 0$ e $\mu_3 \neq 0$ (caso contrário g é identicamente nula), tomamos

$$z = \pm \mu_3 y, \quad (4.8)$$

com o sinal $\pm$ a ser determinado na sequência.

A equação diferencial (4.7) agora torna-se:

$$\dot{z}(t) = -\lambda z(t) + \lambda h(z(t-1)),$$

onde

$$h(z) = \mu_2 \mu_3 [\operatorname{sen}(z \pm \mu_4) - \operatorname{sen}(\pm \mu_4)].$$

Colocando:

$$\begin{aligned} \mu &= |\mu_2 \mu_3|, \\ \theta &= \begin{cases} \pm \mu_4 \pmod{2\pi} & \text{se } \mu_2 \mu_3 < 0, \\ \pm \mu_4 + \pi \pmod{2\pi} & \text{se } \mu_2 \mu_3 > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

vemos que a função h tem precisamente a forma (4.6). Além disso, uma escolha apropriada do sinal em (4.8) garante que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Desta forma, para nossas análises, consideraremos a função $f(x)$ em (4.5) escrita na forma:

$$f(x) = -\mu [\operatorname{sen}(x + \theta) - \operatorname{sen} \theta],$$

com $\mu > 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi$.

Esta aplicação $f(x)$ tem $x_0 = 0$ como ponto fixo e, além disso,

$$f'(x) = -\mu \cos(x + \theta); \quad f'(0) = -\mu \cos \theta.$$

Se exigirmos que $f'(0) < -1$, obtemos:

$$f'(0) = -\mu \cos \theta < -1 \Leftrightarrow \mu \cos \theta > 1 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{\cos \theta}$$

e também obtemos que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, pois $\mu \cos \theta > 1$ implicando $\cos \theta > 0$.

Assim, tomando $\mu > \frac{1}{\cos \theta}$ e $k = \mu \cos \theta$, a hipótese $f'(0) = -k$ com $k > 1$ é satisfeita.

Precisamos agora, encontrar um intervalo da forma $[-B, A]$ tal que:

$$f : [-B, A] \rightarrow [-B, A]$$

e

$$xf(x) < 0 \text{ se } x \in [-B, A], x \neq 0.$$

Pois bem, os zeros de f mais próximos de 0 (à esquerda e à direita, respectivamente) são $x_1 = -\pi - 2\theta$ e $x_2 = \pi - 2\theta$, sendo que em $[x_1, 0]$, f é positiva e em $(0, x_2]$, f é negativa, ou seja, no intervalo $[-\pi - 2\theta, \pi - 2\theta]$, $xf(x) < 0$ se $x \neq 0$.

Figura 4.2: Gráfico de $f(x) = -\mu[\sin(x + \theta) - \sin \theta]$.

Resta sabermos para que valores de μ e θ , $f : [-\pi - 2\theta, \pi - 2\theta] \rightarrow [-\pi - 2\theta, \pi - 2\theta]$.

Sabemos que, neste intervalo:

$$f'(x) = -\mu \cos(x + \theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(x + \theta) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} - \theta \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

ou seja, $x_3 = -\frac{\pi}{2} - \theta$ e $x_4 = \frac{\pi}{2} - \theta$ são os únicos pontos críticos de f , no intervalo $[-\pi - 2\theta, \pi - 2\theta]$. Analisando f' , vemos que x_3 é um ponto de máximo de f e x_4 é um ponto de mínimo de f .

Precisamos então que:

$$f(x_3) < \pi - 2\theta \quad \text{e} \quad f(x_4) > -\pi - 2\theta.$$

Fazendo estes cálculos, obtemos:

$$f\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\mu[-1 - \sin \theta] < \pi - 2\theta \Leftrightarrow \mu < \frac{\pi - 2\theta}{1 + \sin \theta}$$

e

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\mu[1 - \sin \theta] > -\pi - 2\theta \Leftrightarrow \mu[1 - \sin \theta] < \pi + 2\theta \Leftrightarrow \mu < \frac{\pi + 2\theta}{1 - \sin \theta}.$$

Como $\frac{\pi - 2\theta}{1 + \sin \theta} < \frac{\pi + 2\theta}{1 - \sin \theta}$, então $f : [-\pi - 2\theta, \pi - 2\theta] \rightarrow [-\pi - 2\theta, \pi - 2\theta]$
se $\mu < \frac{\pi - 2\theta}{1 + \sin \theta}$.

Desta forma, para aplicarmos os Teoremas 2.1 e 3.1, precisamos que

$$\frac{1}{\cos \theta} < \mu < \frac{\pi - 2\theta}{1 + \sin \theta}.$$

Mas, fazendo alguns cálculos, percebemos que, para

$$\frac{1}{\cos \theta} < \frac{\pi - 2\theta}{1 + \sin \theta}$$

é necessário que

$$\theta < \frac{\pi}{5,14504} \approx 0,610606.$$

Assim, assumiremos também que $0 \leq \theta < 0,610606$.

E tomando

$$\lambda_0 = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \theta - 1}},$$

onde

$$\cos \gamma_0 = -\frac{1}{\mu \cos \theta}; \quad \gamma_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

estamos em condições de aplicar nossos principais teoremas a esta equação que se origina de problemas ópticos.

Pelo Teorema 3.1, temos que para $\lambda > \lambda_0$, a família parametrizada de equações diferenciais (4.4), admite um contínuo ilimitado de soluções periódicas lentamente

oscilantes, para $\frac{1}{\cos \theta} < \mu < \frac{\pi - 2\theta}{1 + \sin \theta}$ e $0 \leq \theta < 0,610606$.

Exemplo 4.4:

O seguinte modelo com retardamento, usado para descrever o efeito da luz na retina do olho do caranguejo em forma de ferradura (crustáceo da ordem dos xifosuros), é citado em [9]:

$$\frac{1}{\nu}\dot{u}(t) + u(t) = \beta\vartheta(y - u(t - \tau)),$$

onde ν , β , y e o retardo τ são constantes positivas e

$$\vartheta(x) = \frac{|x| + x}{2} = \max\{x, 0\}.$$

Tomando $v = y - u$, esta equação pode ser colocada na forma:

$$\frac{1}{\nu}\dot{v}(t) + v(t) = y - \beta\vartheta(v(t - \tau)). \quad (4.9)$$

Em [3], são obtidas fórmulas explícitas para soluções periódicas de algumas equações integrais não lineares que são equivalentes à equação do tipo acima. As considerações físicas a respeito do modelo, também podem ser encontradas em [3].

Mostremos que podemos aplicar os nossos principais teoremas à equação (4.9). Para isto, notemos inicialmente que (4.9) é equivalente a:

$$\dot{v}(t) + \nu\tau v(t) = \nu\tau y - \nu\tau\beta\vartheta(v(t - 1))$$

e então, considerando $v(t) = x(t) + \frac{y}{1 + \beta}$ e $\bar{y} = \frac{\nu\tau y\beta}{1 + \beta}$, temos:

$$\dot{x}(t) + \nu\tau x(t) = -[\vartheta(\bar{y} + \nu\tau\beta x(t - 1)) - \bar{y}].$$

Agora, considerando $\lambda = \nu\tau$ e

$$f(x(t - 1)) = -\frac{1}{\nu\tau}[\vartheta(\bar{y} + \nu\tau\beta x(t - 1)) - \bar{y}],$$

vemos que esta última equação é da forma (2.1).

E temos que:

$$xf(x) = -\frac{x}{\nu\tau}[\vartheta(\bar{y} + \nu\tau\beta x) - \bar{y}] < 0, \quad \text{se } x \neq 0;$$

e também

$$f'(0) = -\beta.$$

Assim, se $\beta > 1$ e $\lambda > \lambda_0$, onde:

$$\lambda_0 = \frac{\arccos\left(-\frac{1}{\beta}\right)}{\sqrt{\beta^2 - 1}},$$

podemos aplicar o Teorema 3.1 e garantir a existência de um contínuo ilimitado de soluções periódicas lentamente oscilantes para a família parametrizada de equações diferenciais (4.9).

Antes de fazermos o próximo exemplo, observemos o seguinte:

Vamos considerar a equação:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f_{\lambda,\mu}(x(t-1)),$$

onde $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ e:

$$f_{\lambda,\mu} : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f_{\lambda,\mu}(0) = 0, \quad f_{\lambda,\mu}(1) < 1,$$

para quaisquer λ e μ .

Dáí, se existir uma região $A_1 \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para $(\lambda, \mu) \in A_1$, f tem apenas o zero como ponto fixo e além disso $f'_{\lambda,\mu}(0) = k$, com $|k| < 1$, então, nesta região A_1 , a solução nula é estável e atrai toda solução com condição inicial φ tal que $\varphi(t) \in [0, 1]$ para $-1 \leq t \leq 0$.

De fato, para $(\lambda, \mu) \in A_1$, temos $f(1) < 1$ e $f(x) \neq x$ se $x \neq 0$. Assim, qualquer $x \neq 0$, $x \in [0, 1]$, satisfaz:

$$f(x) < x \quad \text{e} \quad f^{n+1}(x) < f^n(x),$$

o que implica $f^n(x) \rightarrow 0$, ou seja, $I_\infty = \{0\}$.

Portanto, pela Proposição 3.1, a solução nula é estável e atrai toda solução com condição inicial φ tal que $\varphi(t) \in [0, 1]$ para $-1 \leq t \leq 0$.

Agora, se existir uma região $A_2 \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para $(\lambda, \mu) \in A_2$, f tem um novo ponto fixo $x^* \neq 0$, $x^* = x^*(\lambda, \mu)$, com $f'_{\lambda,\mu}(0) > 1$ e $f'_{\lambda,\mu}(x^*) = k$, com $|k| < 1$ e também $(\lambda, \mu) \in A_2 \Rightarrow \lambda \geq \lambda_0$, onde λ_0 é definido como anteriormente, então, nesta região A_2 , a solução nula é ejetiva e x^* é estável.

E se existir uma região $A_3 \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para $(\lambda, \mu) \in A_3$, $f'_{\lambda,\mu}(0) > 1$ e $f'_{\lambda,\mu}(x^*) = -k$, $k > 1$, e também $(\lambda, \mu) \in A_3 \Rightarrow \lambda \geq \lambda_0$, onde λ_0 é definido como anteriormente, mas considerando agora $k = -f'_{\lambda,\mu}(x^*)$ nesta definição, então, nesta região A_3 , a solução nula e a solução x^* são ejetivas; ainda mais, nesta

região acontece uma bifurcação de Hopf da solução x^* , com o aparecimento de um contínuo ilimitado de soluções periódicas lentamente oscilantes.

De fato, isto é garantido pelos resultados já apresentados no Teorema 3.1 com uma translação apropriada. Neste caso, a condição $f'(0) < -1$ é equivalente a $f'_{\lambda,\mu}(x^*) < -1$ e a condição

$$xf(x) < 0 \quad \text{se } x \in [-B, A], x \neq 0$$

é equivalente a:

$$\begin{cases} f(x) > x & \text{para } 0 < x < x^*, \\ f(x) < x & \text{para } x^* < x < 1. \end{cases}$$

É relevante observarmos que os comentários anteriores também são válidos considerando-se um intervalo compacto $I = [0, \alpha]$ em lugar de $[0, 1]$.

Feito isto, voltemos aos exemplos:

Exemplo 4.5:

Modelos onde o crescimento de espécies pode ser considerado contínuo e portanto, pode ser discutido por meio de uma equação diferencial, surgem, por exemplo, em Biologia. O retardamento é levado em consideração, pois processos de nascimento e morte, naturais ou não, levam algum tempo para ocorrerem.

Um exemplo é o usado pela "Comissão Internacional de Pesca à Baleia"; este exemplo é tratado em [7], [8] e [19].

Vamos analisar aqui o seguinte modelo, que é mais geral e mais completo do que o usado pela "Comissão Internacional de Pesca à Baleia":

$$\frac{dN}{dt} = -\mu N(t) + \nu N(t-T) \left[1 + q \left\{ 1 - \left[\frac{N(t-T)}{k} \right]^z \right\} \right], \quad (4.10)$$

onde $N(t)$ é a população no tempo t , ν é a taxa de natalidade, μ é a taxa de mortalidade, $q > 0$ é o crescimento máximo em fecundidade que a população é capaz, k é a quantidade não pescada, T é o tempo para a maturidade sexual e $z > 0$ é uma medida da intensidade da reação a quedas de população que depende da densidade.

Esta equação (4.10) é equivalente a:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -T\mu N(t) + T\mu \frac{\nu}{\mu} N(t-1) \left[1 + q \left\{ 1 - \left[\frac{N(t-1)}{k} \right]^z \right\} \right].$$

De fato, reescalando o tempo t e considerando $t = Ts$ e $N(t) = \bar{N}(s)$, vem:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d\bar{N}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{N}(s)}{ds} T^{-1} \quad e$$

$$N(t - T) = N(Ts - T) = N(T(s - 1)) = \bar{N}(s - 1).$$

Assim de (4.10), temos

$$\frac{d\bar{N}(s)}{ds} = -T\mu\bar{N}(s) + T\nu\bar{N}(s - 1) \left[1 + q \left\{ 1 - \left[\frac{\bar{N}(s - 1)}{k} \right]^z \right\} \right]$$

e esta equação é equivalente a:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -T\mu N(t) + T\mu \frac{\nu}{\mu} N(t - 1) \left[1 + q \left\{ 1 - \left[\frac{N(t - 1)}{k} \right]^z \right\} \right].$$

Estudaremos esta equação, que é do tipo da equação (2.1) com $\lambda = T\mu$ e:

$$f(N(t - 1)) = \frac{\nu}{\mu} N(t - 1) \left[1 + q \left\{ 1 - \left[\frac{N(t - 1)}{k} \right]^z \right\} \right].$$

Os pontos fixos de

$$f(x) = \frac{\nu}{\mu} x \left(1 + q - q \frac{x^z}{k^z} \right),$$

são $x_0 = 0$ e $x^* = k \left(-\frac{\mu}{q\nu} + \frac{1}{q} + 1 \right)^{1/z}$.

Também temos que:

$$f'(x) = \frac{\nu}{\mu} \left(1 + q - \frac{q}{k^z} (z + 1) x^z \right) \quad e$$

$$f'(0) = \frac{\nu}{\mu} (1 + q); \quad f'(x^*) = -\frac{\nu}{\mu} z (1 + q) + z + 1,$$

e o zero será o único ponto fixo atrator quando $\frac{\nu}{\mu} < \frac{1}{1+q}$. Neste caso a taxa de mortalidade é maior que a taxa de natalidade, e a população caminha para a extinção.

Suponhamos agora $\alpha = \frac{\nu}{\mu} > \frac{1}{1+q}$. Vamos estudar a estabilidade do ponto fixo x^* com a condição que ele seja um ponto fixo atrator. Para este ponto ser atrator devemos ter satisfeita a desigualdade:

$$-1 < f'(x^*) < 1,$$

ou

$$-\frac{\nu}{\mu}z(1+q) + z + 1 < 1, \quad (4.11)$$

$$-\frac{\nu}{\mu}z(1+q) + z + 1 > -1. \quad (4.12)$$

De (4.11) obtemos $\alpha > \frac{1}{1+q}$ já exigido e de (4.12) obtemos $\alpha < \frac{2+z}{z(1+q)}$.

Portanto, o ponto x^* permanece estável enquanto $\alpha < \frac{2+z}{z(1+q)}$.

Claramente $f(0) = 0$ e para considerarmos o que foi observado anteriormente, precisamos encontrar um intervalo $I = [0, \alpha]$ tal que $f(x) = \frac{\nu}{\mu}x \left(1 + q - q\frac{x^z}{k^z}\right)$ seja uma aplicação de I em I e $f(\alpha) < \alpha$.

Pois bem, para $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\nu}{\mu}x \left(1 + q - q\frac{x^z}{k^z}\right) \geq 0 &\Leftrightarrow q\frac{x^z}{k^z} \leq 1 + q \\ &\Leftrightarrow x^z \leq \frac{1+q}{q}k^z \\ &\Leftrightarrow x \leq \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} k. \end{aligned}$$

Assim, tomando $I = \left[0, \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} k\right]$, f é positiva em I e:

$$f\left(\left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} k\right) = 0 < \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} k.$$

Notemos ainda que os pontos fixos 0 e x^* estão em I .

Calculemos agora o máximo de f para $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{\nu}{\mu} \left(1 + q - \frac{q}{k^z}(z+1)x^z\right) = 0 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} \frac{k}{(z+1)^{1/z}}.$$

Logo, $x = \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} \frac{k}{(z+1)^{1/z}}$ é o único ponto crítico de f e como f'' é

negativa neste ponto, obtemos $x_{\max} = \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} \frac{k}{(z+1)^{1/z}}$.

Portanto, o valor máximo de f é:

$$\begin{aligned}
 f(x_{\max}) &= \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{1+q}{q} \right)^{1/z} \frac{k}{(z+1)^{1/z}} \left(1+q - \frac{q}{k^z} \left(\frac{1+q}{q} \right) \frac{k^z}{z+1} \right) \\
 &= \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{1+q}{q} \right)^{1/z} \frac{k}{(z+1)^{1/z}} \left(1+q - \frac{1+q}{z+1} \right) \\
 &= \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{1+q}{q} \right)^{1/z} \frac{k}{(z+1)^{1/z}} \left(\frac{(1+q)z}{z+1} \right) \\
 &= \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{1+q}{q} \right)^{1/z} \frac{k(1+q)z}{(z+1)^{\frac{1}{z}+1}}.
 \end{aligned}$$

E f será uma aplicação de I em I se:

$$\frac{\nu}{\mu} \left(\frac{1+q}{q} \right)^{1/z} \frac{k(1+q)z}{(z+1)^{\frac{1}{z}+1}} \leq \left(\frac{1+q}{q} \right)^{1/z} k,$$

ou, equivalentemente:

$$\alpha \leq \frac{(z+1)^{\frac{1}{z}+1}}{z(1+q)}.$$

Concluimos então que, quando

$$\frac{2+z}{z(1+q)} < \alpha < \frac{(z+1)^{\frac{1}{z}+1}}{z(1+q)},$$

acontece uma bifurcação de Hopf da solução x^* , com o aparecimento de um contínuo ilimitado de soluções periódicas lentamente oscilantes.

De acordo com o que foi observado anteriormente, geometricamente temos:

Figura 4.3:

onde,

A_1 é a região em que $x_0 = 0$ é atrator.

A_2 é a região em que x^* é atrator.

A_3 é a região onde temos soluções periódicas lentamente oscilantes.

B é a região onde não tem sentido tratar o problema por este método, pois, nesta região, a aplicação f não observa a condição $f(I) \subseteq I$.

Como um caso particular deste modelo, podemos considerar $\mu = \nu$, ou seja, podemos analisar o modelo considerando a taxa de natalidade igual a taxa de mortalidade, como proposto em "Mathematical Biology" - J. D. Murray [20].

Neste caso, temos:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + \lambda N(t-1) \left[1 + q \left\{ 1 - \left[\frac{N(t-1)}{k} \right]^z \right\} \right],$$

onde $\lambda = T\mu$.

Os pontos fixos de $f(x) = x \left(1 + q - q \frac{x^z}{k^z} \right)$ são $x_0 = 0$ e $x^* = k$. E também:

$$f'(0) = 1 + q > 1; \quad f'(k) = 1 + q - q(z+1) = 1 - qz.$$

Portanto, neste caso, não existe a região A_1 onde o ponto fixo 0 é atrator.

Vamos estudar a estabilidade do ponto fixo $x^* = k$ com a condição que ele seja um ponto fixo atrator. Para este ponto ser atrator devemos ter satisfeita a desigualdade:

$$-1 < f'(x^*) < 1,$$

ou

$$1 - qz < 1, \quad (4.13)$$

$$1 - qz > -1. \quad (4.14)$$

De (4.14) obtemos $q < \frac{2}{z}$.

Portanto, o ponto $x^* = k$ permanece estável enquanto $q < \frac{2}{z}$.

E quando $q > \frac{2}{z}$, $f(x^*) < -1$.

Tomando I como no caso geral, $I = \left[0, \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} k\right]$, temos que f é positiva em I e:

$$f\left(\left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} k\right) = 0 < \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} k.$$

Notemos também que os pontos fixos $x_0 = 0$ e $x^* = k$ estão em I .

Analogamente ao caso geral, $x_{\max} = \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} \frac{k}{(z+1)^{1/z}}$ e f tem como valor máximo:

$$f(x_{\max}) = \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} \frac{k(1+q)z}{(z+1)^{\frac{1}{z}+1}}.$$

Logo, f será uma aplicação de I em I se:

$$\left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} \frac{k(1+q)z}{(z+1)^{\frac{1}{z}+1}} \leq \left(\frac{1+q}{q}\right)^{1/z} k,$$

ou, equivalentemente:

$$q \leq \frac{(z+1)^{\frac{1}{z}+1}}{z} - 1.$$

Concluimos então que, quando

$$\frac{2}{z} < q < \frac{(z+1)^{\frac{1}{z}+1}}{z} - 1,$$

acontece uma bifurcação de Hopf da solução $x^* = k$, com o aparecimento de um contínuo ilimitado de soluções periódicas lentamente oscilantes.

Neste caso, geometricamente temos:

Figura 4.4:

onde,

A_2 é a região em que $x^* = k$ é atrator.

A_3 é a região onde temos soluções periódicas lentamente oscilantes.

B é a região onde não tem sentido tratar o problema por este método, pois, nesta região, a aplicação f não observa a condição $f(I) \subseteq I$.

Bibliografia

- [1] H. Brézis, *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial S.A., Madrid, 1984.
- [2] F. E. Browder, *A further generalization of the Schauder fixed point theorem*, Duke Math. J., **32** (1965), 575-578.
- [3] B. D. Coleman & G. H. Renninger, *Periodic solutions of a nonlinear functional equation describing neural interactions*, Istituto Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, **109** (1975), 91-111.
- [4] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1978.
- [5] M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf & D. L. Kaplan, *Bifurcation gap in a hybrid optically bistable system*, Phys. Rev. A, **26** (1982), 3720-3722.
- [6] M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf & D. L. Kaplan, *Alternate paths to chaos in optical bistability*, Phys. Rev. A, **27** (1983), 3200-3208.
- [7] G. G. Duarte Jr., *Comportamento assintótico de uma classe de equações diferenciais retardadas com aplicações em biologia*, Tese de Doutorado, ICMSC-USP, São Carlos (1987).
- [8] S. M. S. Godoy, *Existência de soluções periódicas, estabilidade e aplicações de uma classe de equações diferenciais retardadas autônomas não lineares*, Tese de Doutorado, ICMSC-USP, São Carlos (1989).
- [9] K. P. Hadeler & J. Tomiuk, *Periodic solutions of difference-differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **65** (1977), 87-95.
- [10] K. P. Hadeler, *Delay Equations in Biology*, Lectures Notes in Math., **730** (1979), 136-156.
- [11] J. K. Hale, *Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1977.

-
- [12] F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs & R. L. Shoemaker, *Bifurcation to chaos in optical bistability*, Phys. Rev. A, **25** (1982), 2172-2182.
 - [13] K. Ikeda, H. Daido & O. Akimoto, *Optical turbulence: chaotic behaviour of transmitted light from a ring cavity*, Phys. Rev. Lett., **45** (1980), 709-712.
 - [14] K. Ikeda, K. Kondo & O. Akimoto, *Successive higher-harmonic bifurcations in Systems with delayed feedback*, Phys. Rev. Lett., **49** (1982), 1467-1470.
 - [15] A. Longtin & J. G. Milton, *Modelling autonomous oscillations in the human pupil light reflex using nonlinear delay-differential equations*, Bull. Math. Biology, **51** (1989), 605-624.
 - [16] J. Mallet-Paret & R. D. Nussbaum, *Global continuation and asymptotic behavior for periodic solutions of a differential-delay equation*, Ann. Mat. Pura Appl., **145** (1986), 33-182.
 - [17] J. Mallet-Paret & R. D. Nussbaum, *A differential-delay equation arising in Optics and Physiology*, SIAM J. Appl. Math., **20** (1989), 249-292.
 - [18] R. M. May, J. R. Beddington, C. W. Clark, S. J. Holt & R. M. Laws, *Management of multispecies fisheries*, Science, **205** (1979), 267-277.
 - [19] R. M. May, *Nonlinear phenomena in ecology and epidemiology*, Nonlinear Dynamics, Annals New York Academy of Sciences, **357** (1980), 267-281.
 - [20] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
 - [21] R. D. Nussbaum, *Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl., **101** (1974), 263-306.
 - [22] R. D. Nussbaum, *A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations*, J. Functional Analysis, **19** (1975), 319-338.
 - [23] M. R. T. Primo, *Um estudo de algumas classes específicas de equações diferenciais retardadas que surgem em modelos biológicos*, Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, São Carlos (1993).