Desigualdades Ponderadas para Operadores Maximais

Antonio Luis Mometti

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título
de "Mestre em Ciências- Área: Matemática".*

São Carlos, fevereiro de 1997.

*À minha Família
e à minha Noiva.*

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida.

Ao Prof. Dr. Sérgio Luís Jani, pela atenção, dedicação, amizade, incentivo e apoio durante o período de orientação.

À minha família, em especial aos meus pais Antonio e Rosa, e aos meus irmãos: Aucimar, Altair e Alaudenice, que sempre me apoiaram e almejavam êxito neste trabalho.

À minha noiva Ana Nery, pelo amor, carinho, compreensão e incentivo durante a elaboração deste trabalho.

Ao meu grande amigo Marcio, pelo companheirismo e cooperação.

Aos professores do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, em especial a Ozírde Manzoli Neto, Maria Aparecida Soares Ruas, Ires Dias, Valdir Antonio Menegatto, Luiz Augusto da Costa Ladeira e Alexandre Nolasco de Carvalho, pelo muito que aprendi com seus ensinamentos.

Aos professores do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP - Rio Claro, pela formação que me proporcionaram.

Aos amigos de graduação e pós-graduação: Ana Cláudia, Simone, Regina, Nelson, Marta, Regilene e Katia, que foram companheiros de estudo e serão amigos para sempre.

Aos amigos mais recentes: André, Claudemir, Carlos, Anderson, Alexandra, Sarita, Luis Carlos, Adriana, Silvana, Luciane e Lauro, pelos momentos agradáveis que compartilhamos.

A todos os funcionários do ICMSC, pela atenção e eficiência.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Abstract

Maximal operators of Hardy-Littlewood and fractional types control the behavior of many other operators in Harmonic Analysis on weighted L^p – spaces. One of these operators is the fractional integral.

The purpose of this thesis is to present a study on norm inequalities for maximal operators defined over starlike sets.

Resumo

Operadores maximais dos tipos Hardy-Littlewood e fracionário controlam o comportamento de vários outros operadores da Análise Harmônica em espaços L^p com pesos. Um desses operadores é a integral fracionária.

O objetivo desta dissertação é apresentar um estudo sobre desigualdades ponderadas para operadores maximais definidos sobre conjuntos estrelados.

Índice

0	Introdução	1
1	Preliminares	6
2	As Classes de Pesos A_p e o teorema de Muckenhoupt	10
2.1	Função Maximal Homogênea de Hardy-Littlewood.	10
2.2	As classes de pesos A_p e o teorema de Muckenhoupt.	14
2.3	Desigualdades ponderadas para o operador maximal centrado $M_{Q_1, \mu}$	18
3	Desigualdades ponderadas para operadores maximais sobre conjuntos estrelados	28
3.1	Desigualdades dos tipos forte e fraco para o operador maximal centrado $M_{S, \mu}$ e desigualdade do tipo fraco para o operador maximal não centrado $M_{S, Q_1, \mu}$, caso $S = S_\rho$	29
3.2	Desigualdades dos tipos forte e fraco para o operador maximal centrado $M_{S, \mu}$, caso S estrelado em relação à origem.	44
3.3	Desigualdade do tipo forte para o operador maximal não centrado $M_{S, E, \mu}$	49
3.4	Desigualdade do tipo fraco para o operador maximal não centrado $M_{S, E, \mu}$, caso S estrelado em relação à origem.	58

Capítulo 0

Introdução

Seja f uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$. Definamos

$$Mf(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad (0.1)$$

onde o supremo é tomado sobre todo cubo Q contendo x . Mf denota o operador maximal de Hardy-Littlewood. De acordo com um resultado de Muckenhoupt [M], Mf é um operador limitado sobre o espaço L_w^p , $1 < p < \infty$, se e somente se o peso w satisfaz a simples condição geométrica

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq c,$$

para todo cubo Q , denominada condição A_p .

O estudo de tais propriedades para operadores maximais do tipo (0.1) tem sido de grande importância para o estudo da continuidade em espaços com peso dos operadores da Análise Harmônica Clássica. Um desses operadores é a integral fracionária definida por

$$I_{\Omega, \mu} f(x) = f * K_{\Omega, \mu}(x), \quad (0.2)$$

onde

$$K_{\Omega, \mu}(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^{n-\mu}},$$

para $0 < \mu < n$ e para Ω uma função não negativa homogênea de grau zero. O kernel $K_{\Omega, \mu}$ tem o seguinte conjunto estrelado associado: seja $\rho(\theta) = \Omega(\theta)^{1/(n-\mu)}$ e seja

$$S = S_\rho = \{r\theta; \theta \in S^{n-1}, 0 \leq r < \rho(\theta)\} = \{x; K_{\Omega, \mu}(x) > 1\}.$$

É claro que S é um conjunto estrelado com relação à origem e que $|S| < \infty$ se e somente se $\rho \in L^n(S^{n-1})$. Para $\Omega \equiv 1$ em (0.2), temos

$$I_\mu f(x) = f * |x|^{\mu-n} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\mu}} dy.$$

I_μ é denominada a integral fracionária de índice μ .

Em [MW] temos que a integral fracionária I_μ é comparável em L_w^p com operador maximal fracionário definido por

$$M_\mu f(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\mu}{n}}} \int_Q |f(y)| dy, \quad (0.3)$$

onde o supremo é tomado sobre todo cubo Q com centro x .

Baseados em [W] e [CWW] apresentaremos neste trabalho um estudo sobre desigualdades ponderadas para operadores maximais que generalizam o operador maximal fracionário (0.3), para ser mais preciso, estudaremos basicamente os operadores maximais definidos abaixo:

Dado $0 \leq \mu < n$ e dois conjuntos (possivelmente não relacionados) S e E em $\mathbb{R}^n$, definamos o operador maximal não centrado

$$M_{S,E,\mu} f(x) = \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ x \in z+tE}} t^{\mu-n} \int_{z+tS} |f(y)| dy, \quad (0.4)$$

onde $z + tE$ denota o conjunto $\{z + t\xi; \xi \in E\}$ e similarmente $z + tS$.

Definamos também o operador maximal centrado

$$M_{S,\mu} f(x) = \sup_{t > 0} t^{\mu-n} \int_{x+tS} |f(y)| dy, \quad 0 \leq \mu < n, \quad (0.5)$$

que corresponde a tomar E vazio em (0.4).

Observemos que para $S = Q_1$, onde Q_1 é o cubo unitário centrado na origem, $M_{S,\mu}$ recai no operador M_μ definido acima.

O operador $M_{S,\mu}$ está relacionado com o seguinte caso particular de (0.2)

$$I_{\alpha,\beta} f(x) = f * K_{\alpha,\beta}(x),$$

onde $K_{\alpha,\beta}(x) = |x|^{\alpha-n+1} |x_n|^{\beta-1}$, para $x = (x_1, \dots, x_n)$, $-\beta < \alpha < n-1$ e $0 < \beta < 1$. Obtemos $I_{\alpha,\beta}$ tomando $\mu = \alpha + \beta$ e $\Omega(x) = \left(\frac{|x|}{|x_n|}\right)^{1-\beta}$ em (0.2).

Se colocarmos $\gamma = (n - 1 - \alpha)/(1 - \beta)$, então $\rho(\theta) = |\theta_n|^{-1/(\gamma+1)}$, assim $S_\rho = \{r\theta; \theta \in S^{n-1}, 0 \leq r < |\theta_n|^{-1/(\gamma+1)}\}$ depende somente de γ .

A seguir, resumiremos como o trabalho está organizado.

Inicialmente apresentaremos, no capítulo 1, preliminares para este assunto. No capítulo 2, daremos uma introdução ao estudo da teoria de pesos A_p introduzida por Muckenhoupt [M] em 1972. Em síntese, definiremos as classes de pesos A_p e provaremos o teorema de Muckenhoupt.

Ainda no capítulo 2, provaremos estimativas dos tipos fraco e forte para o operador maximal centrado (0.5) com $S = Q_1$, onde Q_1 é cubo unitário centrado na origem. Tais resultados serão utilizados no capítulo 3 para provar o teorema 3.1 que se refere às estimativas dos tipos fraco e forte para (0.5), onde $S = S_\rho$ e $\rho(\theta) = |\theta_n|^{-1/(\gamma+1)}$. Para apresentarmos os resultados, precisaremos do seguinte: para $a \geq 1$ e $\gamma > 0$ fixados, associaremos o operador linear $\delta_a x = (ax_1, \dots, ax_{n-1}, a^{-\gamma}x_n)$ e os retângulos $R_a = \delta_a Q_1$. Dado um retângulo R , denotaremos por $\mathcal{B}(R)$ a coleção de todos transladados e dilatados de R , isto é,

$$\mathcal{B}(R) = \{z + tR; z \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

Para $S = S_\rho$ com $\rho(\theta) = |\theta_n|^{-1/(\gamma+1)}$, $1 < p \leq q < \infty$ e para v e w pesos, o teorema 3.1 assegura que se o operador maximal centrado $M_{S,\mu}$ satisfaz a estimativa do tipo fraco

$$w(\{x; M_{S,\mu}f(x) > s\}) \leq \left(\frac{B\|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q,$$

com B independente de f e λ , $\lambda > 0$, então existe uma constante C tal que para $a \geq 1$ e $R \in \mathcal{B}(R_a)$, v, w satisfazem

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_R w dx \right)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} \leq C B a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})},$$

onde C é uma constante independente de v, w e a . Reciprocamente, se existe uma função não crescente $C(a)$ tal que para todo $a \geq 1$ e $R \in \mathcal{B}(R_a)$

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_R w dx \right)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} \right)^{1/p'} \leq C(a) a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})} \quad (0.6)$$

e se $C(a)$ também satisfaz

$$\int_1^\infty C(a) \frac{da}{a} = b, \quad (0.7)$$

então $M_{S,\mu}$ satisfaz a estimativa do tipo fraco, com $B \leq cb$ para alguma constante c independente de v, w e f . Ainda, vale a estimativa do tipo forte

$$\|M_{S,\mu}f\|_{L_w^q} \leq B\|f\|_{L_v^p}$$

se existir $r > 1$, tal que

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-\frac{1}{p}} \left(\int_R w dx \right)^{1/q} \left(\frac{1}{|R|} \int_R v^{-rp'/p} \right)^{1/rp'} \leq C(a) a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (0.8)$$

para todo $R \in \mathcal{B}(R_a)$ e $a \geq 1$, onde $C(a)$ satisfaz (0.7). É claro que, (0.8) é mais forte que (0.6) pela desigualdade de Hölder.

Observemos que as condições acima são semelhantes à condição A_p .

No capítulo 3, provaremos o teorema 3.1 citado acima e apresentaremos estimativas dos tipos fraco e forte para o operador maximal não centrado definido em (0.4).

A desigualdade do tipo fraco para o operador não centrado definido em (0.4) para $S = S_\rho$ e $E = Q_1$ será abordada no teorema 3.10 do capítulo 3. Para descrever isto, seja δ_a^* o operador definido por $\delta_a^* = (ax_1, \dots, ax_{n-1}, x_n)$ para $a \geq 1$, e seja $R_a^* = \delta_a^* Q_1$. Para referências futuras R_a^* é o menor retângulo que contém ambos R_a e Q_1 . Para cada $R \in \mathcal{B}(R_a)$, associamos um retângulo R^* como segue: se $R = z + tR_a$, então $R^* = z + tR_a^*$. Provaremos que se $1 < p \leq q < \infty$ e

$$w(\{x; M_{S,Q_1,\mu}f(x) > s\}) \leq \left(\frac{B\|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q, \quad (0.9)$$

então

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_{R^*} w dx \right)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} \leq C a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})},$$

para cada $a \geq 1$ e cada par de retângulos $(R, R^*) \in \mathcal{B}(R_a, R_a^*)$.

Reciprocamente, suponhamos $1 < p \leq q < \infty$ e que exista uma função não crescente $C(a)$ tal que para todo $a \geq 1$ e $(R, R^*) \in \mathcal{B}(R_a, R_a^*)$,

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_{R^*} w dx \right)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} \leq C(a) a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}.$$

Se $C(a)$ também satisfaz (0.7) então $M_{S,Q_1,\mu}$ satisfaz a estimativa do tipo fraco (0.9) com B limitada por algum múltiplo fixo de b .

Após as provas dos teoremas 3.1 e 3.10, que são baseadas nos mesmos argumentos, daremos uma versão mais geral do teorema 3.1, onde consideraremos S um conjunto estrelado em relação a origem. Notemos que, exceto para no máximo um conjunto de medida nula sobre a fronteira, conjuntos S estrelados em relação à origem são sempre da forma $S = S_\rho = \{r\theta; \theta \in S^{n-1}, 0 \leq r < \rho(\theta)\}$, onde ρ é denominada função fronteira de S .

O objetivo principal no capítulo 3 é o estudo da desigualdade do tipo forte para o operador maximal não centrado $M_{S,E,\mu}$ definido em (0.4), o qual se resume na prova do próximo teorema. Antes de enunciá-lo, descreveremos um conjunto comparável a S_ρ para $\rho(\theta) = |\theta_n|^{-1/(\gamma+1)}$.

Seja $x = (x', x_n)$ com $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e definamos

$$S_\gamma = \left\{ x : |x_n| \leq \min\left\{1, \frac{c_0}{|x'|^\gamma}\right\} \right\}, \quad \gamma > 0.$$

Observemos que S_γ é comparável a $S_\rho = \{r\theta, \theta \in S^{n-1}, 0 \leq r < |\theta_n|^{-1/(\gamma+1)}\} = \{x; K_{\alpha,\beta}(x) > 1\}$, ou seja, existem constantes τ e τ' positivas, tais que $\tau S_\gamma \subseteq S_\rho \subseteq \tau' S_\gamma$. Conseqüentemente, os operadores obtidos pela troca de S_ρ por S_γ são também comparáveis.

Se tomarmos na definição de $M_{S,E,\mu}$, $S = S_\gamma$ e $E = Q_1$ e se escolhermos c_0 tal que $Q_1 \subset S_\gamma$, então a hipótese em (0.4) de que $x \in z + tE$ simplesmente equivale a exigir que x pertença à porção central de $z + tS_\gamma$ que se assemelha a um cubo.

Teorema 0.10 *Sejam $\gamma > 0$ e $S = S_\gamma$. Sejam $0 \leq \mu < n$, $1 < p \leq q < \infty$ e suponhamos que exista $r > 1$ tal que*

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-\frac{1}{p}} w(R^*)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|R|} \int_R v^{(-p'r)/p} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \leq C(a) |R_a|^{\frac{\mu}{n}-1}$$

para todo $R \in \mathcal{B}(R_a)$ e todo $a \geq 1$, onde $C(a)$ é uma função não crescente que satisfaz (0.7). Então,

$$\|M_{S_\gamma, Q_1, \mu} f\|_{L_w^q} \leq c \|f\|_{L_v^p}.$$

Na verdade, provaremos este resultado para conjuntos estrelados S em relação a origem e para conjuntos limitados E , o qual inclui o teorema acima.

Finalmente, daremos um resultado não encontrado nos artigos estudados, que é análogo ao teorema 3.10 para desigualdade do tipo fraco de $M_{S,E,\mu}$, para S estrelado em relação a origem e E limitado. Deixaremos esta parte por último, pelo fato de sua demonstração ser baseada na prova do teorema 0.10.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e alguns resultados que serão úteis para este trabalho.

Definição 1.1 *Uma função mensurável, não negativa e localmente integrável w em $\mathbb{R}^n$ é chamada peso. Frequentemente usaremos as seguintes notações: $|E| = \int_E dx$ e $w(E) = \int_E w(x)dx$.*

Trabalharemos no espaço L^p com pesos definido abaixo:

Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável, onde E é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$. Para w um peso definimos

$$L_w^p(E) = \{f; \left(\int_E |f|^p w dx \right)^{1/p} < \infty\} \quad \text{se } 0 < p < \infty,$$

e

$$L_w^\infty(E) = \{f; \inf\{\alpha : w(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\} < +\infty\}.$$

Usaremos as notações:

$$\|f\|_{L_w^p(E)} = \left(\int_E |f|^p w dx \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{L_w^\infty(E)} = \sup_E f = \inf\{\alpha : w(\{x \in E; |f(x)| > \alpha\}) = 0\}.$$

No caso $E = \mathbb{R}^n$, usaremos apenas $\|f\|_{L_w^p}$.

Definição 1.2 *Uma medida de Borel μ em $\mathbb{R}^n$ é dita ser dobrante se existir uma constante $c > 0$ tal que $\mu(2Q) \leq c\mu(Q)$ para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.3 (lema simples de Vitali) *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$, cuja medida exterior de Lebesgue satisfaz $0 < |E|_e < \infty$. Suponhamos que E é coberto por uma coleção de cubos $\{Q\}$. Então, existe um número finito de cubos disjuntos $Q_1, \dots, Q_N$ em $\{Q\}$ e uma constante $\gamma = \gamma(n) > 0$ tais que $\sum_{i=1}^N |Q_i| > \gamma |E|_e$.*

A prova do lema Simples de Vitali pode ser encontrada em [WZ].

Observação: O lema simples de Vitali continua válido para qualquer medida dobrante μ .

Definição 1.4 *Um operador definido em funções sobre um espaço de medida $(M, \mathcal{M}, \mu)$ a valores em $(N, \mathcal{N}, \nu)$ é sublinear se*

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |T(f_1)(x)| + |T(f_2)(x)|,$$

para quase todo x .

Definição 1.5 *Um operador T é dito do tipo fraco (p, q) se $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ e se*

$$\nu(\{x; |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{c \|f\|_{L_\mu^p}}{\lambda} \right)^q,$$

para todo $\lambda > 0$, c independente de f e λ .

Definição 1.6 *Um operador T é do tipo forte (p, q) se*

$$\|Tf\|_{L_\nu^q} \leq c \|f\|_{L_\mu^p},$$

com c independente de f .

É fácil vermos que se T é um operador do tipo forte (p, q) então T é do tipo fraco (p, q) .

Teorema 1.7 (teorema de Interpolação de Marcinkiewicz) *Seja T um operador sublinear que é simultaneamente dos tipos fracos (p_1, q_1) e (p_2, q_2) com $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, para $i = 1, 2$ e $q_1 \neq q_2$, então T é do tipo forte (p_t, q_t) , onde $\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}$ e $\frac{1}{q_t} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_2}$, para todo $0 < t < 1$.*

A prova do teorema de interpolação de Marcinkiewicz pode ser encontrada em [T].

Observemos que se $p_1 = q_1$ e $p_2 = q_2$, e T é dos tipos fracos (p_1, p_1) e (q_2, q_2) então é fácil ver que $p_t = q_t$, e quando t percorre $(0, 1)$, p_t cobre todo o intervalo (p_1, p_2) .

Para uma medida μ qualquer definamos

$$\omega(\alpha) = \omega_{f,E}(\alpha) = \mu(\{x \in E; f(x) > \alpha\}),$$

onde f é uma função mensurável sobre E e $-\infty < \alpha < \infty$.

Teorema 1.8 *Se $f \geq 0$, $f \in L^p_\mu(E)$ então,*

$$\int_E f^p d\mu = - \int_0^\infty \alpha^p d\omega(\alpha) = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

A prova deste teorema é análoga à prova com μ igual à medida de Lebesgue, e esta pode ser encontrada em [WZ].

Teorema 1.9 *Seja f uma função mensurável sobre E , e seja $E_{ab} = \{x \in E; a < f(x) \leq b\}$ (a e b finitos). Então,*

$$\int_{E_{ab}} f = - \int_a^b \alpha d\omega(\alpha).$$

A prova também pode ser encontrada em [WZ].

Definição 1.10 *Dizemos que uma família K de retângulos tem sobreposição limitada se existe uma constante c tal que cada $x \in \mathbb{R}^n$ pertença no máximo a c retângulos de K . Assim, K tem sobreposição limitada se e somente se,*

$$\sum_{R \in K} \chi_R(x) \leq c, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

O próximo teorema é um substituto para o lema simples de Vitali.

Teorema 1.11 (lema de Recobrimento de Besicovitch) *Seja E um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ e seja K uma família de retângulos R cobrindo E , tal que $R \in \mathcal{B}(R_0)$, onde R_0 é um retângulo centrado na origem com lados paralelos aos eixos coordenados. Então, se R_x denota um retângulo com centro em x para $x \in E$, existem pontos $\{x_k\}$ em E tal que*

$$(i) \quad E \subset \cup R_{x_k},$$

$$(ii) \quad \{R_{x_k}\} \text{ tem sobreposição limitada.}$$

Ainda mais, a constante c para qual $\sum \chi_{R_{x_k}} \leq c$ pode ser escolhida dependendo somente de n .

A prova do lema de Besicovitch “standard” para cubos permanece praticamente a mesma se trocarmos cubos por transladados e dilatados de algum retângulo fixado, sem qualquer mudança nos argumentos sobre a cobertura ou da constante c . A prova deste lema para cubos pode ser encontrada em [WZ].

Definição 1.12 *O espaço $L_w^{q,\infty}$ é definido como sendo a coleção de todas as funções mensuráveis $f, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $\|f\|_{L_w^{q,\infty}} < \infty$, onde*

$$\|f\|_{L_w^{q,\infty}} = \sup_{\lambda > 0} \lambda [w(\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > \lambda\})]^{1/q}, \quad 0 < q \leq \infty.$$

Teorema 1.13 *O espaço $L_w^{q,\infty}$ é um espaço de Banach para $1 < q \leq \infty$.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [H].

Capítulo 2

As Classes de Pesos A_p e o teorema de Muckenhoupt

2.1 Função Maximal Homogênea de Hardy-Littlewood.

Definição 2.1 *Sejam w um peso e $f \in L_w^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Assuma que w é dobrante (isto é, $w(x)dx$ é uma medida dobrante). Definamos*

$$M_w f(x) = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f| w dy,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos Q tais que $x \in Q$.

A função $M_w f$ é denominada Função Maximal Homogênea de Hardy-Littlewood de f .

Sobre $M_w f$ temos o seguinte:

Teorema 2.2 *Se w é dobrante então:*

(i) $\|M_w f\|_{L_w^p} \leq c \|f\|_{L_w^p}, 1 < p < \infty$ (desigualdade do tipo forte (p,p))

(ii) $w(\{x; M_w f(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L_w^1}$ (desigualdade do tipo fraco $(1,1)$)

onde as constantes em (i) e (ii) dependem somente de n e p .

Prova: (ii) Fixemos $\lambda > 0$. Consideremos $E = \{x; M_w f(x) > \lambda\}$. É fácil ver que E é um conjunto mensurável (E é na verdade um conjunto aberto). Para cada $x \in E$ existe um cubo Q_x tal que $x \in Q_x$ e

$$\frac{1}{w(Q_x)} \int_{Q_x} |f| w dy > \lambda. \quad (2.3)$$

Seja B_N a bola de centro 0 e raio N . Consideremos $E \cap B_N$. Se $x \in E \cap B_N$, como $x \in E$, existe Q_x tal que $x \in Q_x$ e vale (2.3). Pelo lema de Vitali (teorema 1.3) aplicado a $E \cap B_N$ e à cobertura $\{Q_x\}_{x \in E \cap B_N}$ segue que existem cubos disjuntos $Q_1, \dots, Q_M$ e uma constante γ positiva tais que

$$w(E \cap B_N) \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^M w(Q_j),$$

que combinada com a desigualdade (2.3), implica que

$$w(E \cap B_N) \leq \frac{1}{\gamma} \lambda^{-1} \sum_{j=1}^M \int_{Q_j} |f| w dy \leq \frac{1}{\gamma} \lambda^{-1} \int_{E \cap B_N} |f| w dy \leq \frac{1}{\gamma} \lambda^{-1} \|f\|_{L_w^1}.$$

Fazendo $N \rightarrow \infty$, concluímos a demonstração de (ii).

Notemos que (i) é imediato quando $p = \infty$. Pelo teorema 1.8 temos

$$\|g\|_{L_\mu^p(E)}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{x \in E; |g(x)| > \lambda\}) d\lambda.$$

Logo,

$$\|M_w f\|_{L_w^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} w(\{x; M_w f(x) > \lambda\}) d\lambda.$$

Dado $\lambda > 0$, escreva, $f = f_\lambda + f^\lambda$ onde

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \text{se } |f(x)| > \frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \text{se } |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

Observemos que $f_\lambda \in L^\infty$ e que $M_w(f) \leq M_w(f_\lambda) + M_w(f^\lambda)$. Assim, se $M_w f(x) > \lambda$ então ou $M_w f_\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}$ ou $M_w f^\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} w(\{x; M_w f(x) > \lambda\}) &\leq w(\{x; M_w f_\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}\}) \\ &+ w(\{x; M_w f^\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}\}) = I + II, \quad \text{digamos.} \end{aligned}$$

Notemos que, como $\|f_\lambda\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2}$, então, $M_w f_\lambda(x) \leq \frac{\lambda}{2}$ e, portanto, $I = 0$. Também, observemos que por (ii)

$$II \leq \frac{c}{\lambda} \|f^\lambda\|_{L_w^1} = \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f^\lambda| w dx = \frac{c}{\lambda} \int_{\{x; |f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f| w dx.$$

E assim sendo temos que

$$\begin{aligned} \|M_w f\|_{L_w^p}^p &\leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\frac{c}{\lambda} \int_{\{x; |f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f| w dx \right) d\lambda \\ &= cp \int_0^\infty \lambda^{p-2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| \chi_{\{x; |f| > \frac{\lambda}{2}\}} w dx \right) d\lambda \\ &= cp \int_{\mathbb{R}^n} |f| w \left(\int_0^\infty \lambda^{p-2} \chi_{\{x; |f| > \frac{\lambda}{2}\}} d\lambda \right) dx \\ &= cp \int_{\mathbb{R}^n} |f| w \left(\int_0^{2|f|} \lambda^{p-2} d\lambda \right) dx \\ &= \frac{cp}{p-1} 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w dx = c_{n,p} \|f\|_{L_w^p}^p, \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema. ■

Consideremos $M_1 f = Mf$, onde Mf é o operador definido em (0.1). Pelo teorema 2.2 temos

$$\|Mf\|_{L^p} \leq c \|f\|_{L^p}, \quad 1 < p < \infty$$

e

$$|\{x; Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1}, \quad p = 1.$$

Neste ponto cabe o seguinte problema: Caracterizar todos os pesos w tais que

$$\|Mf\|_{L_w^p} \leq c \|f\|_{L_w^p}, \quad 1 < p \leq \infty$$

e

$$w(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L_w^1}, \quad p = 1.$$

Para responder o problema acima observemos que se $p > 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| dy &= \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| w^{1/p} w^{-1/p} dy \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \left(\int_Q w^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \left(\int_Q |f|^p w dy \right)^{1/p} \\ &= \frac{1}{|Q|} \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{1/p'} \left(\int_Q |f|^p w dy \right)^{1/p} \\ &= \frac{w(Q)^{1/p}}{|Q|} \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f|^p w dy \right)^{1/p} \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{1/p'} \\ &= \frac{1}{|Q|} \left(\int_Q w dy \right)^{1/p} \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f|^p w dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

e se $p = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| dy &\leq \frac{1}{|Q|} \left(\sup_Q \frac{1}{w} \right) \int_Q f w dy \\ &= \frac{w(Q)}{|Q|} \left(\sup_Q \frac{1}{w} \right) \frac{1}{w(Q)} \int_Q f w dy. \end{aligned}$$

Tomando o supremo nas desigualdades acima sobre todos os cubos Q tais que $x \in Q$ segue que:

$$Mf(x) \leq \sup_Q \left\{ \frac{1}{|Q|} \left(\int_Q w dy \right)^{1/p} \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \right\} M_w(|f|^p)^{1/p}(x), \quad (2.4)$$

se $1 < p < \infty$ e

$$Mf(x) \leq \sup_Q \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w dy \sup_Q \frac{1}{w} \right\} M_w f(x), \quad \text{se } p = 1. \quad (2.5)$$

Daí a motivação para a definição das classes de pesos A_p .

2.2 As classes de pesos A_p e o teorema de Muckenhoupt.

Nesta seção introduziremos a classe de pesos A_p , algumas de suas propriedades e provaremos o teorema de Muckenhoupt.

Definição 2.6 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $p' = \frac{p}{p-1}$. Dizemos que o peso w satisfaz a condição A_p se existir uma constante positiva C tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$*

$$\frac{1}{|Q|} \left(\int_Q w \right)^{1/p} \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{1/p'} \leq C, \quad \text{se } 1 < p < \infty$$

ou

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w \sup_Q \frac{1}{w} \leq C, \quad \text{se } p = 1.$$

Notemos que se $w \in A_p$ então, segue de (2.4) e (2.5) que

$$(Mf)^p \leq C_{w,p} M_w(|f|^p). \quad (2.7)$$

Exemplo: $w(x) = |x|^\alpha, x \in \mathbb{R}^n$, pertence a $A_p \Leftrightarrow -n < \alpha < n(p-1)$.

Lema 2.8 *Se $1 \leq p \leq q < \infty$ então $A_p \subset A_q$.*

A prova deste lema decorre simplesmente da desigualdade de Hölder.

O próximo lema nos diz que se $p < q$ e p e q estiverem suficientemente próximos, então a recíproca do lema 2.8 é verdadeira, mais precisamente temos:

Lema 2.9 *Se $w \in A_p$ para algum $1 < p < \infty$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$.*

A prova do lema 2.9 é mais elaborada e pode ser encontrada em [FZ] ou em [T].

Teorema 2.10 (Muckenhoupt) *Seja $1 < p < \infty$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $w \in A_p$.

(ii) Existe $c > 0$ tal que

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda^p} \|f\|_{L_w^p}^p,$$

para todo $\lambda > 0$ e toda f .

(iii) Existe $c > 0$ tal que

$$\|Mf\|_{L_w^p} \leq c \|f\|_{L_w^p},$$

para toda f .

Prova: Suponhamos que (iii) seja válida. Então,

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda^p} \int [Mf]^p w \leq \frac{c}{\lambda^p} \int |f|^p w = \frac{c}{\lambda^p} \|f\|_{L_w^p}^p.$$

Suponhamos agora que a afirmação (ii) seja válida. Fixado um cubo Q , definamos $f(x) = \chi_Q(x)w(x)^{-\frac{1}{p-1}}$. Observemos que

$$\|f\|_{L_w^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\chi_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^p w = \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Por outro lado, se $x \in Q$,

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I \chi_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \\ &= \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_{I \cap Q} \chi_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Tomemos em (ii) $\lambda = \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}$, o qual, por um momento, assumiremos ser finito e positivo. De (2.11) obtemos $Q \subset \{x; Mf(x) > \lambda\}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_Q w &\leq w(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \\ &\leq \frac{c}{\lambda^p} \int |f|^p w = \frac{c}{\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^p} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq c,$$

isto é, $w \in A_p$.

Se $\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} = 0$ não há nada a ser demonstrado - estamos assumindo $0 \cdot \infty = 0$.

Se $\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} = \infty$, mostraremos que $w(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para cada $\varepsilon > 0$ definamos $w_\varepsilon = \max\{w, \varepsilon\}$. Então, $w_\varepsilon \geq \varepsilon$ e $w_\varepsilon \geq w$. Tomemos $f = \chi_Q w_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}$ e $\lambda = \frac{1}{|Q|} \int_Q w_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}} < \infty$. Obtemos

$$\int_Q w \leq \frac{c}{\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}\right)^p} \int_Q w_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}$$

e, portanto,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w\right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq c.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0_+$, pelo teorema da convergência monótona, obtemos $\int_Q w = 0$ e, portanto, $w(x) = 0$ para quase todo $x \in Q$. Como $\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} = \infty$, então para todo cubo $I \supset Q$, $\int_I w^{-\frac{1}{p-1}} = \infty$. O mesmo argumento acima mostra que $w(x) = 0$ para quase todo $x \in I$. Portanto, $w(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Finalmente, suponhamos que a afirmação (i) seja válida. Então pelo lema 2.9 existe $\varepsilon > 0$, tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$ e, obviamente, $w \in A_{p+\varepsilon}$. Assim, por (2.7), $Mf(x) \leq c[M_w|f|^{p-\varepsilon}(x)]^{1/(p-\varepsilon)}$ e $Mf(x) \leq c[M_w|f|^{p+\varepsilon}(x)]^{1/(p+\varepsilon)}$. Assim,

$$\{x; Mf(x) > \lambda\} = \{x; Mf(x)^{p-\varepsilon} > \lambda^{p-\varepsilon}\} \subset \{x; M_w(|f|^{p-\varepsilon}) > \lambda^{p-\varepsilon}/c\}.$$

Portanto,

$$w(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \leq w(\{x; M_w(|f|^{p-\varepsilon}) > \lambda^{p-\varepsilon}/c\}) \leq \frac{C}{\lambda^{p-\varepsilon}} \int |f|^{p-\varepsilon} w$$

e, analogamente,

$$w(\{x, Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^{p+\varepsilon}} \int |f|^{p+\varepsilon} w.$$

Desse modo, a função maximal de Hardy-Littlewood Mf satisfaz as condições do tipo fraco $(p-\varepsilon, p-\varepsilon)$ e $(p+\varepsilon, p+\varepsilon)$. Portanto, pelo teorema 1.7, Mf satisfaz a condição do tipo forte (p, p) ,

$$\|Mf\|_{L_w^p} \leq c\|f\|_{L_w^p},$$

que é o que queríamos demonstrar.

No caso de pesos da classe A_1 , temos o seguinte resultado:

Teorema 2.12 (*Muckenhoupt*). *São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $w \in A_1$.

(ii) Existe $c > 0$ tal que

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1_w},$$

para todo $\lambda > 0$ e toda f .

Prova: Suponhamos que (i) seja satisfeita. Então, por (2.7), existe $c > 0$ tal que

$$\{x; Mf(x) > \lambda\} \subset \{x; M_w f(x) > \lambda/c\}.$$

Portanto, pela condição (ii) do teorema 2.2

$$w(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \leq w(\{x; M_w f(x) > \lambda/c\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int |f|w,$$

que é a condição (ii).

Agora, suponhamos que (ii) seja satisfeita. Dado um cubo Q seja $A = \inf_Q w$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto mensurável $E \subset Q$ de medida positiva tal que $w \leq A + \varepsilon$ em E . Tomemos $f = \frac{1}{w} \chi_E$ e $\lambda = \frac{|E|}{|Q|(A+\varepsilon)}$ em (ii). Desse modo, obtemos para todo $x \in Q$

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| = \frac{1}{|Q|} \int_E \frac{1}{w} \geq \frac{|E|}{|Q|(A+\varepsilon)}.$$

Portanto, utilizando (ii), chegamos a

$$\int_Q w \leq \frac{c}{\frac{|E|}{|Q|(A+\varepsilon)}} \int \chi_E \frac{1}{w} w = c(A+\varepsilon)|Q|.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0_+$, obtemos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w \leq cA = c \inf_Q w,$$

que é o que queríamos demonstrar. ■

2.3 Desigualdades ponderadas para o operador maximal centrado $M_{Q_1, \mu}$.

Retomemos agora o operador maximal centrado definido em (0.5)

$$M_{S, \mu} f(x) = \sup_{t>0} t^{\mu-n} \int_{x+tS} |f(y)| dy, \quad 0 \leq \mu < n,$$

Observemos que para $S = Q_1$, onde Q_1 é o cubo unitário centrado na origem:

$$M_{Q_1, \mu} f(x) = \sup_{t>0} t^{\mu-n} \int_{x+tQ_1} |f(y)| dy = \sup_Q |Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_Q |f(y)| dy,$$

onde o supremo é tomado sobre todo cubo Q centrado em x , uma vez que podemos escrever um dado cubo Q na forma $x + tQ_1, t > 0$. Observemos também que se $\mu = 0$, $M_{Q_1, \mu}$ recai no operador usual Mf .

Para o operador $M_{Q_1, \mu}$, temos os seguintes resultados:

Lema 2.13 *Suponhamos que f é uma função não negativa limitada com suporte compacto. Para cada $t > 0$, seja $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n; M_{Q_1, \mu} f(x) > t\}, 0 \leq \mu < n$. Então, se E_t é não vazio, temos*

$$E_t \subset \bigcup_j 3Q_j,$$

onde Q_j é a família de cubos diádicos maximais satisfazendo

$$\frac{t}{4^n} < |Q_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{Q_j} f(y) dy \leq \frac{t}{2^n},$$

para cada j .

Ainda mais, temos que

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n; M_{Q_1, \mu}^d f(x) > \frac{t}{4^n} \right\} = \bigcup_j Q_j,$$

onde $M_{Q_1, \mu}^d$ denota a correspondente versão diádica de $M_{Q_1, \mu}$, ou seja o supremo é tomado sobre todo cubo diádico contendo x .

Prova: Seja $C_t = \{P_j\}$ a família de cubos maximais diádicos satisfazendo a condição

$$t < |P_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{P_j} f(y) dy. \quad (2.14)$$

Para mostrar que existe esta tal família C_t , observemos que

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_Q f(y) dy \rightarrow 0, \quad (2.15)$$

com $Q \uparrow \mathbb{R}^n$, pois f tem suporte compacto e $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\mu}{n}-1} = 0$. Se para algum cubo diádico Q

$$t < |Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_Q f(y) dy, \quad (2.16)$$

então Q está contido num cubo diádico maximal com relação à inclusão satisfazendo (2.16), cuja existência é garantida pela observação (2.15). Assim, existe uma família de cubos diádicos maximais $\{P_j\}$ satisfazendo (2.16). Da maximalidade dos cubos P_j resulta

$$t < |P_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{P_j} f(y) dy \leq 2^n |P'_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{P'_j} f(y) dy \leq 2^n t, \quad (2.17)$$

onde P'_j denota o menor cubo diádico contendo propriamente P_j . Desta discussão é claro que

$$\{x \in \mathbb{R}^n; M_{Q_1, \mu}^d f(x) > t\} = \bigcup_j P_j.$$

Seja $x \in E_t$. Pela definição, existe um cubo R contendo x tal que

$$t < |R|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_R f(y) dy.$$

Seja k o único inteiro tal que $2^{-(k+1)n} < |R| \leq 2^{-kn}$. Existem cubos diádicos com lados de comprimento 2^{-k} e no máximo 2^n deles, $\{J_i : i = 1, \dots, 2^n\}$ tocando o interior de R . É fácil ver que, para um destes cubos, digamos J_1 ,

$$\frac{t}{2^n} < |R|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{R \cap J_1} f(y) dy.$$

Agora, desde que $|R| \leq |J_1| < 2^n |R|$, $|R|^{\frac{\mu}{n}} \leq |J_1|^{\frac{\mu}{n}}$, temos

$$\frac{t}{4^n} |J_1| < \frac{t}{2^n} |R| < |R|^{\frac{\mu}{n}} \int_{R \cap J_1} f(y) dy \leq |J_1|^{\frac{\mu}{n}} \int_{J_1} f(y) dy.$$

Portanto,

$$\frac{t}{4^n} < |J_1|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{J_1} f(y) dy.$$

Pondo $C_{t/4^n} = \{Q_j\}$, vemos que $J_1 \subset Q_k$, para algum k , e $R \subset 3J_1 \subset 3Q_k$. Disto concluímos que

$$E_t \subset \bigcup_j 3Q_j.$$

Finalmente, segue de (2.17) que

$$\frac{t}{4^n} < |Q_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{Q_j} f(y) dy \leq t 2^{-n},$$

para cada j , e ainda

$$\{x \in \mathbb{R}^n; M_{Q_1, \mu}^d f(x) > \frac{t}{4^n}\} = \bigcup_j Q_j.$$

■

Teorema 2.18 *Se $1 \leq p \leq q < \infty$, $0 \leq \mu < n$, e v, w são pesos, então $M_{Q_1, \mu}$ satisfaz a desigualdade do tipo fraco*

$$w(\{x; M_{Q_1, \mu} f(x) > s\}) \leq \left(\frac{B_0 \|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q \quad (2.19)$$

se e somente se v e w satisfazem a condição $A_{p,q}^\mu$: isto é, se e somente se existe uma constante B_1 tal que

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q w \right)^{1/q} \left(\int_Q v^{-p'/p} \right)^{1/p'} \leq B_1, \quad p > 1, \quad (2.20)$$

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q w \right)^{1/q} \sup_Q v(x)^{-1} \leq B_1, \quad p = 1, \quad (2.21)$$

para todo cubo Q . As constantes B_0 e B_1 são comparáveis, com constantes de comparabilidade independentes de v e w .

Prova: Primeiramente assumiremos que vale (2.20). Para $0 < v(x) < \infty$ quase sempre em Q_j , pelo lema 2.13 e por (2.20) temos:

$$\begin{aligned}
w(\{x; M_{Q_1, \mu} f(x) > s\}) &\leq \sum_j \int_{3Q_j} w dx \\
&\leq \sum_j \left[\frac{4^n |Q_j|^{\frac{\mu}{n}-1}}{s} \int_{Q_j} f(y) dy \right]^q \int_{3Q_j} w dx \\
&= \frac{4^{nq}}{s^q} \sum_j \left[\left(\int_{Q_j} f v^{1/p} v^{-1/p} dy \right) \left(\int_{3Q_j} w dx \right)^{1/q} |Q_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \right]^q \\
&\leq \frac{(4^n 3^{(1-\frac{\mu}{n})})^q}{s^q} \sum_j \left[\left(\int_{Q_j} f^p v dy \right)^{1/p} \left(\int_{3Q_j} v^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\int_{3Q_j} w dx \right)^{1/q} |3Q_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \right]^q, \text{ por Hölder} \\
&\leq \frac{\overbrace{(4^n 3^{(1-\frac{\mu}{n})} B_1)}^{B_0}}{s^q} \sum_j \left(\int_{Q_j} f^p v dy \right)^{q/p} \leq \frac{B_0^q}{s^q} \left(\sum_j \int_{Q_j} f^p v dy \right)^{q/p}, \quad (p \leq q) \\
&= \left(\frac{B_0}{s} \left(\int_{\cup_j Q_j} f^p v dy \right)^{1/p} \right)^q \leq \left(\frac{B_0 \|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q.
\end{aligned}$$

Se $v(x) = 0$ em um subconjunto de medida positiva de Q_j , por (2.20) $\int_{Q_j} w dx = 0$. Logo $w(x) = 0$ para quase todo $x \in Q_j$. Como $\int_{Q_j} v^{-1/(p-1)} = \infty$, então para todo cubo $I \supset Q$, $\int_I v^{-1/(p-1)} = \infty$. Novamente por (2.20) temos $\int_I w dx = 0$, logo $w(x) = 0$ para quase todo $x \in I$. Portanto, $w(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Suponhamos agora que vale (2.21). Pelo lema 2.13 temos:

$$\begin{aligned}
w(\{x; M_{Q_1, \mu} f(x) > s\}) &\leq \sum_j \int_{3Q_j} w dx \\
&\leq \sum_j \left(\frac{4^n |Q_j|^{\frac{\mu}{n}-1}}{s} \int_{Q_j} f dy \right)^q \int_{3Q_j} w dx \\
&\leq \frac{4^{nq} 3^{(1-\frac{\mu}{n})q}}{s^q} \sum_j \left[\sup_{3Q_j} v(y)^{-1} \int_{Q_j} f v dy \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\int_{3Q_j} w dx \right)^{1/q} |3Q_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \right]^q \\
&\leq \frac{\overbrace{(4^n 3^{(1-\frac{\mu}{n})} B_1)^q}^{B_0}}{s^q} \left(\sum_j \int_{Q_j} f v dy \right)^q \\
&= \frac{B_0^q}{s^q} \left(\int_{\cup_j Q_j} f v dy \right)^q \leq \left(\frac{B_0 \|f\|_{L_v^1}}{s} \right)^q.
\end{aligned}$$

Os argumentos para $v(y) = 0$ e $v(y) = \infty$ são análogos aos dados acima. Mostramos assim a condição necessária. Para mostrarmos a condição suficiente, suponhamos que vale (2.19). Fixemos um cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ e definamos

$$A = \int_Q v^{-p'/p} dx$$

Se $A = 0$, (2.20) vale para qualquer B_1 .

Se $0 < A < \infty$, seja $f(x) = \chi_Q(x) v(x)^{-p'/p}$. Então, para $x \in Q$

$$\begin{aligned}
M_{Q_1, \mu} f(x) &= \sup_{t>0} t^{\mu-n} \int_{x+tQ_1} \chi_Q v^{-p'/p} dy \\
&\geq t^{\mu-n} \int_Q v^{-p'/p} dy = |Q|^{\frac{\mu}{n}-1} A.
\end{aligned}$$

Portanto, $Q \subset \{x; M_{Q_1, \mu} f(x) > |Q|^{\frac{\mu}{n}-1} A\}$, logo por (2.19) temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_Q w dx \right)^{1/q} &\leq B_0 \left(|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} A \right)^{-1} \left(\int_Q v^{-p'} v dx \right)^{1/p} \\
&= B_0 |Q|^{1-\frac{\mu}{n}} A^{-1} A^{1/p} = B_0 |Q|^{1-\frac{\mu}{n}} A^{-1/p'},
\end{aligned}$$

pois $A < \infty$, $v(x) > 0$ quase sempre em Q . Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} A^{1/p'}$, obtemos (2.20) com $B_1 \leq B_0$.

Se $A = \infty$, então $(v(x))^{-1/p}$ não está em $L^{p'}$ sobre Q . Dessa forma, existe uma função $g(x)$, a qual está em L^p sobre Q e que se anula fora de Q tal que $\int_Q g(x)v(x)^{-1/p} dx = \infty$. Definamos $f(x) = g(x)v(x)^{-1/p}$. Então como $[f(x)]^p v(x) \leq [g(x)]^p$, $[f(x)]^p v(x)$ é integrável sobre Q , embora $M_{Q_1, \mu} f(x) = \infty$ em quase todo Q . Assim (2.19) implica que $\int_Q w(x) dx = 0$, logo (2.20) vale para qualquer B_1 .

Provemos agora que (2.19) implica (2.21).

Se $\inf_Q v(y) = \infty$ então (2.21) vale para qualquer B_1 . Caso contrário, dado $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto E de Q tal que $|E| > 0$ e $v(x) < \inf_Q v(y) + \varepsilon$ para todo $x \in E$. Definamos $f(x) = 1$ sobre E e 0 fora de E . Assim, para $x \in Q$

$$M_{Q_1, \mu} f(x) = \sup_Q |Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_Q |f| dy = \sup_Q |Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_E dy \geq |Q|^{\frac{\mu}{n}-1} |E|.$$

Logo por (2.19)

$$\begin{aligned} \left(\int_Q w dx \right)^{1/q} &\leq B_0 |Q|^{1-\frac{\mu}{n}} |E|^{-1} \left(\int_E v(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq B_0 |Q|^{1-\frac{\mu}{n}} |E|^{-1} \int_E (\inf_Q v(y) + \varepsilon) dy \\ &= B_0 |Q|^{1-\frac{\mu}{n}} |E|^{-1} |E| (\inf_Q v(y) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos (2.21). ■

Lema 2.22 *Seja N o operador definido por*

$$Nf(x) = \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^{(rp')'} dy \right)^{1/(rp')'}$$

onde $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Se $r > 1$ então:

$$N : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

Prova: Observemos que

$$Nf(x) = \left(M(f(y))^{(rp')'} \right)^{1/(rp')'},$$

onde M é o operador definido em (0.1).

Se tomarmos $q = \frac{p}{(rp')'}$ temos

$$\begin{aligned} q &= \frac{p}{(rp')'} = \frac{p}{\frac{rp'}{rp'-1}} \\ &= \frac{p(rp'-1)}{rp'} = p - \frac{p}{rp'} \\ &= p - \frac{1}{r}(p-1) \stackrel{(r>1)}{>} p - (p-1) = 1. \end{aligned}$$

Portanto, como $q > 1$, por (i) do teorema 2.2 com $w = 1$, segue que

$$\begin{aligned} \|Nf\|_{L^p} &= \left\| \left(M(f(y))^{(rp')'} \right)^{1/(rp')'} \right\|_{L^p} \\ &= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(M|f(y)|^{(rp')'} \right)^{p/(rp')'} dy \right)^{(rp')'/p} \right]^{1/(rp')'} \\ &\leq \left[c \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(y)|^{(rp')'} \right)^{p/(rp')'} dy \right)^{(rp')'/p} \right]^{1/(rp')'} \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} = c\|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.23 *Sejam $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \mu < n$ e suponhamos que para algum $r > 1$ que v e w satisfaçam o seguinte fortalecimento da condição $A_{p,q}^\mu$:*

$$|Q|^{\mu/n-1/p} \left(\int_Q w dy \right)^{1/q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v^{-\frac{rp'}{p}} dy \right)^{1/rp'} \leq B_1, \quad (2.24)$$

para todo cubo Q . Então $M_{Q_1,\mu}$ satisfaz a desigualdade do tipo forte

$$\|M_{Q_1,\mu}f(x)\|_{L_v^q} \leq B_0\|f\|_{L_v^p}.$$

com $B_0 \leq cB_1$, para alguma constante c independente de v e w .

Prova: Para provarmos esse teorema, é suficiente mostrar que existe uma constante B_0 tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} [M_{Q_1, \mu} f]^q w dy \right)^{1/q} \leq B_0 \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p v dy \right)^{1/p},$$

para cada função f limitada não negativa com suporte compacto.

Para cada inteiro k , e para uma constante $a > 2^n$ que será escolhida mais adiante, sejam Ω_k e D_k os conjuntos

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n; a^k < M_{Q_1, \mu} f(x)\}$$

e

$$D_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \frac{a^k}{4^n} < M_{Q_1, \mu}^d f(x) \right\}.$$

Usando o lema 2.13 com $t = 4^n a^k$, existe uma família de cubos maximais diádicos $\{Q_{k,j}\}$ para qual $\Omega_k \subset \cup_j 3Q_{k,j}$ e $D_k = \cup_j Q_{k,j}$, e

$$a^k < |Q_{k,j}|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{Q_{k,j}} f(y) dy \leq 2^n a^k. \quad (2.25)$$

Com esta notação temos a seguinte seqüência de desigualdades:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_{Q_1, \mu} f(x))^q w dy \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_k \int_{\Omega_k - \Omega_{k+1}} (M_{Q_1, \mu} f(x))^q w dy \right)^{1/q} \\ &\leq a \left(\sum_k a^{kq} w(\Omega_k) \right)^{1/q} \leq c \left(\sum_{k,j} \left(|Q_{k,j}|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{Q_{k,j}} f(y) dy \right)^q w(3Q_{k,j}) \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\sum_{k,j} \left(|3Q_{k,j}|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{Q_{k,j}} f v^{1/p} v^{-1/p} dy \right)^q w(3Q_{k,j}) \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\sum_{k,j} |3Q_{k,j}|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_{Q_{k,j}} (fv^{1/p})^{(rp')'} dy \right)^{1/(rp')'} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\int_{Q_{k,j}} v^{-rp'/p} dy \right)^{1/rp'} w(3Q_{k,j})^{1/q} \right)^q \\
&\leq C \left(\sum_{k,j} |3Q_{k,j}|^{\frac{\mu}{n}} \left(\frac{1}{|3Q_{k,j}|} \int_{3Q_{k,j}} (fv^{1/p})^{(rp')'} dy \right)^{1/(rp')'} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\frac{1}{|3Q_{k,j}|} \int_{3Q_{k,j}} v^{-rp'/p} dy \right)^{1/rp'} w(3Q_{k,j})^{1/q} \right)^q \\
&\leq CB_1 \left(\sum_{k,j} |3Q_{k,j}|^{1/p} \left(\frac{1}{|3Q_{k,j}|} \int_{3Q_{k,j}} (fv^{1/p})^{(rp')'} dy \right)^{1/(rp')'} \right)^q \\
&\leq CB_1 \left(\sum_{k,j} [N(fv^{1/p})]^q |3Q_{k,j}|^{q/p} \right)^{1/q} \\
&\leq CB_1 \left(\sum_{k,j} [N(fv^{1/p})]^p |3Q_{k,j}| \right)^{1/p}, \quad \text{pois } p \leq q
\end{aligned}$$

Para cada k seja $D_k = \cup_j Q_{k,j}$ e seja para cada k, j o conjunto

$$E_{k,j} = Q_{k,j} - Q_{k,j} \cap D_{k+1}$$

Então $\{E_{k,j}\}$ é uma família disjunta de conjuntos que satisfazem com $a > 2^n$ a estimativa

$$|Q_{k,j}| < \frac{1}{1 - \frac{2^n}{a}} |E_{k,j}|.$$

De fato, usando o lema 2.13 com $t = 4^n a^k$ temos

$$\begin{aligned}
|Q_{k,j} \cap D_{k+1}| &= \sum_i |Q_{k,j} \cap Q_{k+1,i}| = \sum_{i: Q_{k+1,i} \subset Q_{k,j}} |Q_{k+1,i}| \\
&< \sum_{i: Q_{k+1,i} \subset Q_{k,j}} \frac{|Q_{k+1,i}|^{\mu/n}}{a^{k+1}} \int_{Q_{k+1,i}} f(y) dy \\
&\leq \frac{|Q_{k,j}|^{\mu/n}}{a^{k+1}} \int_{Q_{k,j} \cap (\cup_i Q_{k+1,i})} f(y) dy \\
&\leq \frac{a^k 2^n}{a^{k+1}} |Q_{k,j}| = \frac{2^n}{a} |Q_{k,j}|.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{|E_{k,j}|}{|Q_{k,j}|} &= \frac{|Q_{k,j}| - |Q_{k,j} \cap D_{k+1}|}{|Q_{k,j}|} \\
&= 1 - \frac{|Q_{k,j} \cap D_{k+1}|}{|Q_{k,j}|} \geq 1 - \frac{2^n}{a}
\end{aligned}$$

Logo,

$$|Q_{k,j}| \leq \frac{1}{1 - \frac{2^n}{a}} |E_{k,j}|.$$

Portanto, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_{Q_1, \mu} f(x))^q w dy \right)^{1/q} &\leq C' B_1 \left(\sum_{k,j} [N(fv^{1/p})]^p |3E_{k,j}| \right)^{1/p} \\
&= C' B_1 \left(\sum_{k,j} \int_{3E_{k,j}} [N(fv^{1/p})]^p dy \right)^{1/p} \leq C' B_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} [N(fv^{1/p})]^p dy \right)^{1/p} \\
&\leq C' B_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} (fv^{1/p})^p dy \right)^{1/p} = C' B_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p v dy \right)^{1/p} = B_0 \|f\|_{L^p_v}
\end{aligned}$$

pois, pelo lema 2.22 temos que N é um operador limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Isto conclui a prova do teorema. ■

Capítulo 3

Desigualdades ponderadas para operadores maximais sobre conjuntos estrelados

Neste capítulo provaremos o teorema 0.10 da introdução, que se refere à desigualdade do tipo forte para o operador não centrado $M_{S,\gamma,Q_1,\mu}$. Por motivos de comparação, estudaremos primeiramente as desigualdades tipos fraco e forte para o operador maximal centrado $M_{S,\mu}$. Analisaremos também a desigualdade do tipo fraco para o operador maximal não centrado $M_{S,Q_1,\mu}$. Primeiramente consideraremos em ambos os casos $S = S_\rho$, onde S_ρ é definido abaixo.

Seja $K(x) = K_{\alpha,\beta}(x) = |x|^{\alpha-n+1}|x_n|^{\beta-1}$ para $x = (x_1, \dots, x_n)$ com $-\beta < \alpha < n-1$ e $0 < \beta < 1$. Seja $S = S_\rho = \{r\theta : \theta \in S^{n-1}, 0 \leq r < \rho(\theta)\} = \{x; K(x) > 1\}$, onde $\rho(\theta) = |\theta_n|^{-1/(\gamma+1)}$ com $\gamma = (n-1-\alpha)/(1-\beta)$. É claro que S é um conjunto estrelado com relação à origem.

Posteriormente, consideraremos conjuntos estrelados com relação à origem e conjuntos limitados. Quando dizemos que um conjunto é estrelado, estamos dizendo que o conjunto é estrelado com relação à origem. Vemos que, exceto para no máximo um conjunto de medida nula sobre a fronteira, conjuntos estrelados S são sempre da forma $S = S_\rho = \{r\theta; \theta \in S^{n-1}, 0 \leq r < \rho(\theta)\}$, e que S_ρ é aberto se e somente se ρ é semicontínua inferiormente e $\rho \geq c > 0$. Todas as condições sobre S serão feitas em termos da função fronteira ρ de S .

3.1 Desigualdades dos tipos forte e fraco para o operador maximal centrado $M_{S,\mu}$ e desigualdade do tipo fraco para o operador maximal não centrado $M_{S,Q_1,\mu}$, caso $S = S_\rho$.

Para $a \geq 1$ e $\gamma > 0$ fixados, associamos o operador linear $\delta_a x = (ax_1, \dots, ax_{n-1}, a^{-\gamma}x_n)$ e os retângulos $R_a = \delta_a Q_1$. Dado um retângulo R , denotaremos por $\mathcal{B}(R)$ a coleção de todos transladados e dilatados de R , isto é,

$$\mathcal{B}(R) = \{z + tR; z \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

Com esta notação temos

Teorema 3.1 Para $\gamma > 0$, seja $S = S_\rho$ para $\rho(\theta) = |\theta_n|^{-1/(\gamma+1)}$. Suponhamos que $1 \leq p \leq q < \infty$, $0 \leq \mu < n$, e sejam v, w pesos.

(i) Suponhamos que $M_{S,\mu}$ satisfaça a estimativa do tipo fraco

$$w(\{x; M_{S,\mu}f(x) > s\}) \leq \left(\frac{B\|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q. \quad (3.2)$$

Então, existe uma constante C tal que quando $a \geq 1$ e $R \in \mathcal{B}(R_a)$, v e w satisfazem

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_R w dy \right)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \leq C B a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (3.3)$$

para $p > 1$,

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_R w dy \right)^{1/q} \sup_{x \in R} v(y)^{-1} \leq C B a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (3.4)$$

para $p = 1$. Onde C é uma constante independente de v, w e a .

(ii) Reciprocamente, suponhamos que exista uma função não crescente $C(a)$ tal que para todo $a \geq 1$ e $R \in \mathcal{B}(R_a)$ valha

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_R w dy \right)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \leq C(a) a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (3.5)$$

para $p > 1$,

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_R w dy \right)^{1/q} \sup_{x \in R} v(y)^{-1} \leq C(a) a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (3.6)$$

para $p = 1$. E se $C(a)$ também satisfaz

$$\int_1^\infty C(a) \frac{da}{a} = b, \quad q > 1, \quad (3.7)$$

e

$$\int_1^\infty C(a) \left(1 + \log^+ \frac{1}{C(a)} \right) \frac{da}{a} = b, \quad p = q = 1, \quad (3.8)$$

então $M_{S,\mu}$ satisfaz a estimativa do tipo fraco (3.2), com $B \leq cb$ para alguma constante c independente de v, w e f .

(iii) Suponhamos que $1 < p \leq q < \infty$, e que v e w satisfaçam para algum $r > 1$

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-\frac{1}{p}} \left(\int_R w dy \right)^{1/q} \left(\frac{1}{|R|} \int_R v^{-rp'/p} dy \right)^{1/rp'} \leq C(a) a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (3.9)$$

para todo $R \in \mathcal{B}(R_a)$ e $a \geq 1$, onde $C(a)$ satisfaz (3.7). Então $M_{S,\mu}$ satisfaz a desigualdade do tipo forte

$$\|M_{S,\mu} f\|_{L_w^q} \leq B \|f\|_{L_v^p}.$$

A seguir, daremos um resultado para o operador maximal não centrado $M_{s_\rho, Q_1, \mu}$. Para isto seja δ_a^* o operador definido por $\delta_a^* = (ax_1, \dots, ax_{n-1}, x_n)$ para $a \geq 1$ e seja $R_a^* = \delta_a^* Q_1$. Para cada $R \in \mathcal{B}(R_a)$, associamos um retângulo R^* como segue: se $R = z + tR_a$, então $R^* = z + tR_a^*$.

Teorema 3.10 *Sejam S, γ, μ, p e q como no teorema 3.1 e sejam v e w pesos.*

(i) *Suponhamos que $M_{S, Q_1, \mu}$ satisfaça a estimativa do tipo fraco*

$$w(\{x; M_{S, Q_1, \mu} f(x) > s\}) \leq \left(\frac{B \|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q. \quad (3.11)$$

Então, para cada $a \geq 1$ e cada par de retângulos $(R, R^*) \in \mathcal{B}(R_a, R_a^*)$, v e w satisfazem

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_{R^*} w dy \right)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \leq C a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (3.12)$$

para $p > 1$,

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_{R^*} w dy \right)^{1/q} \sup_{R^*} v(y)^{-1} \leq C a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (3.13)$$

para $p = 1$.

Podemos tomar c menor que um múltiplo fixo de B independente de v, w e a .

(ii) Reciprocamente, suponhamos que exista uma função não crescente $C(a)$ tal que para todo $a \geq 1$, e $(R, R^*) \in \mathcal{B}(R_a, R_a^*)$ valha

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_{R^*} w dy \right)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \leq C(a) a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (3.14)$$

para $p > 1$,

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_{R^*} w dy \right)^{1/q} \sup_{R^*} v(y)^{-1} \leq C(a) a^{(\gamma-n+1)(1-\frac{\mu}{n})}, \quad (3.15)$$

para $p = 1$. Se $C(a)$ também satisfaz (3.7) e (3.8), então $M_{S, Q_1, \mu}$ satisfaz a estimativa do tipo fraco (3.11), com B limitada por algum múltiplo fixo de b .

Para provarmos os teoremas 3.1 e 3.10, precisaremos de alguns resultados:

Seja $k(x) = K_{\alpha, \beta}(x) = |x|^{\alpha-n+1} |x_n|^{\beta-1}$ e escrevamos $x \in \mathbb{R}^n$ como $x = (x', x_n)$, onde $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Então para $|x'| \geq |x_n|$, $k(x) \approx |x'|^{\alpha-n+1} |x_n|^{\beta-1}$ e se $|x'| \leq |x_n|$, $k(x) \approx |x_n|^{\alpha+\beta-n}$. Logo, se $c_0 > 0$ e definirmos

$$S_\gamma = \{x; |x_n| \leq \min\{1, c_0 |x'|^{-\gamma}\}\},$$

então S_γ é comparável a $S = S_\rho = \{x; k(x) > 1\}$, ou seja, existem constantes $\tau, \tau' > 0$ tais que $\tau S_\gamma \subseteq S \subseteq \tau' S_\gamma$.

Conseqüentemente, os operadores obtidos trocando S por S_γ são comparáveis.

Fixemos c_0 para que $Q_1 \subseteq S_\gamma$, o que assegura também que se $a \geq 1$ então o retângulo $R_a = \delta_a Q_1$ está contido em S_γ , pois $\delta_a(S_\gamma) \subseteq S_\gamma$ para $a \geq 1$. Podemos ver também que $S_\gamma \subseteq \cup_{k=0}^{\infty} (\kappa R_{2^k})$ para uma constante κ dependendo somente de n e c_0 . Isto nos dá as seguintes comparações:

$$\chi_{R_a}(x/\tau) \leq \chi_S(x), \quad (3.16)$$

$$\chi_S(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{R_{2^k}}(x/(\tau'\kappa)). \quad (3.17)$$

Agora,

$$\begin{aligned} M_{S,\mu}f(x) &= \sup_{t>0} t^{\mu-n} \int_{x+tS} |f(y)| dy \\ &= \sup_{t>0} t^{\mu-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{x+tS}(y) f(y)| dy \\ &= \sup_{t>0} t^{\mu-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{tS}(y-x) f(y)| dy \\ &\geq \sup_{t>0} t^{\mu-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{tR_a}((y-x)/\tau) f(y)| dy, \quad \text{por (3.16)} \\ &= \sup_{t>0} t^{\mu-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{x+\tau tR_a}(y) f(y)| dy = \sup_{t>0} t^{\mu-n} \int_{x+\tau tR_a} |f(y)| dy \\ &= \sup_{s>0} \tau^{n-\mu} s^{\mu-n} \int_{x+sR_a} |f(y)| dy = \tau^{n-\mu} M_{R_a,\mu}f(x) \end{aligned}$$

Logo,

$$M_{S,\mu}f(x) \geq c M_{R_a,\mu}f(x), \quad a \geq 1 \quad (3.18)$$

onde $c = \tau^{n-\mu}$.

Analogamente, usando (3.17) temos

$$M_{S,\mu}f(x) \leq C \sum_{k=0}^{\infty} M_{R_{2^k},\mu}f(x). \quad (3.19)$$

onde $C = (\tau'\kappa)^{n-\mu}$.

Quando Λ for uma transformação linear invertível em $\mathbb{R}^n$, identificaremos Λ com o operador

$$\Lambda f(x) = |\det \Lambda| f(\Lambda x). \quad (3.20)$$

Observemos que

$$\Lambda^{-1} M_{S,\mu} \Lambda f = |\det \Lambda|^{-1} M_{\Lambda S,\mu} f. \quad (3.21)$$

Portanto, se identificarmos δ_a com o operador em (3.20), temos

$$M_{R_a,\mu} f(x) = a^{n-1-\gamma} \delta_a^{-1} M_{Q_1,\mu} \delta_a f(x). \quad (3.22)$$

Para qualquer operador sublinear T , qualquer transformação linear invertível Λ e quaisquer $p, q > 1$, a desigualdade do tipo fraco

$$w(\{x : |(\Lambda^{-1} T \Lambda) f(x)| > s\}) \leq \left(\frac{B \|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q, \quad (3.23)$$

para toda $f \in L^p(v)$ e $s > 0$ é equivalente à desigualdade

$$(\Lambda w)(\{x : |T f(x)| > s\}) \leq \left(\frac{B \|f\|_{L_{\Lambda v}^p}}{s} \right)^q, \quad (3.24)$$

para toda $f \in L^p(\Lambda v)$ e $s > 0$, com mesma constante B .

De fato: Observemos primeiro que

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} T \Lambda f(x) &= |\det \Lambda|^{-1} T \Lambda f(\Lambda^{-1} x) \\ &= |\det \Lambda|^{-1} T(|\det \Lambda| f(\Lambda \Lambda^{-1} x)) \\ &= |\det \Lambda|^{-1} |\det \Lambda| T f(x) = T f(x). \end{aligned}$$

Portanto, $\{x; |(\Lambda^{-1} T \Lambda) f(x)| > s\} = \{x; |T f(x)| > s\} = C_f$
e

$$\begin{aligned} \Lambda C_f &= \{\Lambda x; x \in C_f\} = \{\Lambda x; |T f(x)| > s\} \\ &= \{\Lambda x; |\Lambda^{-1} T \Lambda f(x)| > s\} \\ &= \{y; |\Lambda^{-1} T \Lambda f(\Lambda^{-1} y)| > s\} \\ &= \{y; |\Lambda^{-1} T \Lambda g(y)| > s\} = C_g, \end{aligned}$$

onde $y = \Lambda x$ e $g = f\Lambda^{-1}$.

Observemos também que

$$\begin{aligned}\Lambda w(C_f) &= \int_{C_f} \Lambda w(y) dy = \int_{C_f} |\det \Lambda| w(\Lambda y) dy \\ &= \int_{\Lambda C_f} |\det \Lambda| w(y) |\det \Lambda|^{-1} dy \\ &= \int_{\Lambda C_f} w(y) dy = w(\Lambda C_f).\end{aligned}$$

Com estes resultados e por (3.23) temos

$$\begin{aligned}\Lambda w(C_f) &= w(\Lambda C_f) = w(C_g) \leq \left(\frac{B \|g\|_{L_v^p}}{s} \right)^q \\ &= \left(\frac{B}{s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\Lambda^{-1}x)|^p v(x) dx \right)^{1/p} \right)^q \\ &= \left(\frac{B}{s} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p v(\Lambda y) |\det \Lambda| dy \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{B}{s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \Lambda v(y) dy \right)^{1/p} \right)^q = \left(\frac{B}{s} \|f\|_{L_{\Lambda v}^p} \right)^q,\end{aligned}$$

para $y = \Lambda^{-1}x$.

Por outro lado, assumindo (3.24) temos

$$\begin{aligned}w(C_f) &= \Lambda^{-1} w(\Lambda C_f) = \Lambda^{-1} w(C_g) \\ &\leq \left(\frac{B \|g\|_{L_{\Lambda^{-1}v}^p}}{s} \right)^q = \left(\frac{B}{s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\Lambda^{-1}x)|^p \Lambda^{-1} v(x) dx \right)^{1/p} \right)^q \\ &= \left(\frac{B}{s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |\det \Lambda|^{-1} v(y) |\det \Lambda| dy \right)^{1/p} \right)^q \\ &= \left(\frac{B}{s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p v(y) dy \right)^{1/p} \right)^q = \left(\frac{B \|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q,\end{aligned}$$

para $y = \Lambda^{-1}x$.

Similarmente a desigualdade

$$\|\Lambda^{-1} T \Lambda f\|_{L_w^q} \leq B' \|f\|_{L_v^p}, \quad (3.25)$$

é equivalente à desigualdade

$$\|Tf\|_{L_{\Lambda w}^q} \leq B'\|f\|_{L_{\Lambda v}^p}. \quad (3.26)$$

Assim, por exemplo, vemos de (3.22) que qualquer desigualdade do tipo fraco para $M_{R_a, \mu}$ é equivalente neste sentido à desigualdade do tipo fraco para $M_{Q_1, \mu}$ com uma constante apropriada. Então por (3.18) e (3.22) temos

$$M_{S, \mu}f(x) \geq ca^{-(\gamma-n+1)}\delta_a^{-1}M_{Q_1, \mu}\delta_a f(x), \quad \text{para } a \geq 1, \quad (3.27)$$

e por (3.19),

$$M_{S, \mu}f(x) \leq C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\gamma-n+1)}\delta_{2^{-k}}M_{Q_1, \mu}\delta_{2^k}f(x). \quad (3.28)$$

Para o operador maximal $M_{S, E, \mu}$, observemos que se S e S' são conjuntos comparáveis, e se E e E' são também conjuntos comparáveis, então $M_{S, E, \mu}$ e $M_{S', E', \mu}$ são comparáveis. Assim, de (3.16) e (3.17) podemos escrever

$$M_{S, Q_1, \mu}f(x) \geq cM_{R_a, Q_1, \mu}f(x), \quad a \geq 1 \quad (3.29)$$

e

$$M_{S, Q_1, \mu}f(x) \leq C \sum_{k=0}^{\infty} M_{R_{2^k}, Q_1, \mu}f(x). \quad (3.30)$$

Precisaremos também do seguinte lema, obtido de [StWe].

Lema 3.31 *Suponhamos que para $j = 1, 2, \dots, g_j(x)$ seja uma função não negativa mensurável para qual $|\{x; g_j(x) > s\}| < 1/s$. Seja $\{c_j\}$ uma seqüência de números positivos com $\sum_j c_j = 1$ e colocamos $K = \sum_j c_j \log(1/c_j)$. Então, $|\{x; \sum_j c_j g_j(x) > s\}| < 2(K+2)/s$.*

Prova: Definamos

$$\ell_j(x) = \begin{cases} g_j(x) & \text{se } g_j(x) < s/2 \\ 0 & \text{se } g_j(x) \geq s/2. \end{cases}$$

$$u_j(x) = \begin{cases} g_j(x) & \text{se } g_j(x) > s/2c_j \\ 0 & \text{se } g_j(x) \leq s/2c_j. \end{cases}$$

e

$$m_j(x) = g_j(x) - \ell_j(x) - u_j(x).$$

Então,

$$\ell(x) = \sum c_j \ell_j(x) = \begin{cases} \sum c_j g_j(x) & \text{se } g_j(x) < s/2 \\ 0 & \text{se } g_j(x) \geq s/2. \end{cases}$$

Daí $\ell(x) < s/2$ em quase toda parte, pois $|\{x; g_j(x) > s\}| < 1/s$ e $\sum_j c_j = 1$.
E

$$u(x) = \sum c_j u_j(x) = \begin{cases} \sum c_j g_j(x) & \text{se } g_j(x) > s/2c_j \\ 0 & \text{se } g_j(x) \leq s/2c_j. \end{cases}$$

Assim $u(x) = 0$ exceto em um conjunto de medida menor que $2/s$ pelos mesmos argumentos acima. Observemos que para

$$g_j(x) < s/2 \leq s/2c_j, \quad \text{temos } m_j(x) = 0;$$

$$g_j(x) > s/2c_j \geq s/2, \quad \text{temos } m_j(x) = 0;$$

$$\text{e } s/2 \leq g_j(x) \leq s/2c_j, \quad \text{temos } m_j(x) = g_j(x).$$

Pondo $\lambda_j(y) = |\{x; g_j(x) > y\}|$, $y > 0$ e $m(x) = \sum c_j m_j(x)$ temos

$$\begin{aligned} \int m(x) dx &= \int \sum c_j m_j(x) dx = \sum c_j \int m_j(x) dx \\ &= \sum c_j \int_{\{x; s/2 \leq g_j(x) \leq s/2c_j\}} g_j(x) dx \\ &= - \sum c_j \int_{s/2}^{s/2c_j} y d\lambda_j(y), \quad \text{pelo teorema 1.9} \\ &= \sum c_j \left[\int_{s/2}^{s/2c_j} \lambda_j(y) dy - y \lambda_j(y) \Big|_{s/2}^{s/2c_j} \right] \\ &< \sum c_j \left[\int_{s/2}^{s/2c_j} y^{-1} dy + 1 \right] = K + 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\{x; m(x) > s/2\}| &= \int_{\{x; m(x) > s/2\}} dx = 2/s \int_{\{x; m(x) > s/2\}} s/2 dx \\ &< 2/s \int m(x) dx < 2(K + 1)/s. \end{aligned}$$

Sejam

$$A = \{x; \ell(x) \geq s/2\} \cup \{x; u(x) \neq 0\}$$

e

$$C_g = \{x; \sum c_j g_j(x) > s\}$$

Observemos que

$$|A| \leq |\{x; \ell(x) \geq s/2\}| + |\{x; u(x) \neq 0\}| < 2/s$$

e que se $x \notin A$, $u(x) = 0$ e $\ell(x) < s/2$. Então, para $x \notin A$ e $x \in C_g$

$$m(x) = \sum c_j g_j(x) - \sum c_j \ell_j(x) - \sum c_j u_j(x) > s - s/2 = s/2.$$

Portanto,

$$|C_g| = |C_g \cap A| + |C_g \cap A^c| \leq |A| + 2(K+1)/s < 2/s + 2(K+1)/s = 2(K+2)/s.$$

■

Prova do teorema 3.1:

Parte (i): Suponhamos que valha a desigualdade do tipo fraco (3.2), logo por (3.27) temos

$$w(\{x; \delta_a^{-1} M_{Q_1, \mu} \delta_a f(x) > s\}) \leq \left(\frac{c B a^{\gamma-n+1} \|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q,$$

ou pela equivalência entre (3.23) e (3.24),

$$\delta_a w(\{x; M_{Q_1, \mu} f(x) > s\}) \leq \left(\frac{c B a^{\gamma-n+1} \|f\|_{L_{\delta_a v}^p}}{s} \right)^q.$$

Assim, pelo teorema 2.18, obtemos

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q \delta_a w \right)^{1/q} \left(\int_Q (\delta_a v)^{-p'/p} \right)^{1/p'} \leq C B a^{\gamma-n+1}, \quad p > 1,$$

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q \delta_a w \right)^{1/q} \sup_{Q} (\delta_a v)^{-1} \leq C B a^{\gamma-n+1}, \quad p = 1.$$

Para cada cubo $Q = z + tQ_1$ existe um único $R \in \mathcal{B}(R_a)$ tal que $R = z + tR_a$, portanto se tomarmos a mudança de variáveis $T(x) = z + t\delta_a^{-1}x$ para $x \in R_a$,

vemos que estas duas últimas desigualdades são respectivamente equivalentes a (3.3) e (3.4).

Parte (ii): Para $q > 1$, $L_w^{q,\infty}$ é um espaço de Banach (teorema 1.13), assim por (3.28)

$$\begin{aligned}
\|M_{s,\mu}f\|_{L_w^{q,\infty}}^q &= \sup_{\lambda>0} (\lambda^q w(\{x \in \mathbb{R}^n; M_{s,\mu}f(x) > \lambda\})) \\
&\leq \sup_{\lambda>0} (\lambda^q w(\{x \in \mathbb{R}^n; C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\gamma-n+1)} \delta_{2^{-k}} M_{Q_1,\mu} \delta_{2^k} f(x) > \lambda\})) \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\gamma-n+1)} \sup_{\lambda>0} (\lambda^q w(\{x \in \mathbb{R}^n; \delta_{2^{-k}} M_{Q_1,\mu} \delta_{2^k} f(x) > \lambda\})) \\
&= C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\gamma-n+1)} \|\delta_{2^{-k}} M_{Q_1,\mu} \delta_{2^k} f\|_{L_w^{q,\infty}}^q.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Assumindo que valem (3.5) e (3.6), pela mudança de variáveis $T(x) = z + t\delta_a x$ para $x \in Q_1$, obtemos

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q \delta_a w \right)^{1/q} \left(\int_Q (\delta_a v)^{-p'/p} \right)^{1/p'} \leq C(a) a^{\gamma-n+1}, \quad p > 1,$$

e

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q \delta_a w \right)^{1/q} \sup_Q (\delta_a v)^{-1} \leq C(a) a^{\gamma-n+1}, \quad p = 1.$$

Usando agora o teorema 2.18 temos

$$\delta_a w(\{x; M_{Q_1,\mu}f(x) > s\}) \leq \left(\frac{cC(a)a^{\gamma-n+1} \|f\|_{L_{\delta_a v}^p}}{s} \right)^q,$$

qual, pela equivalência entre (3.23) e (3.24) é equivalente a

$$w(\{x; \delta_a^{-1} M_{Q_1,\mu} \delta_a f(x) > s\}) \leq \left(\frac{cC(a)a^{\gamma-n+1} \|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q, \tag{3.33}$$

Portanto,

$$\|\delta_{2^{-k}} M_{Q_1,\mu} \delta_{2^k} f\|_{L_w^{q,\infty}}^q \leq (c2^{k(\gamma-n+1)} C(2^k) \|f\|_{L_v^p})^q. \tag{3.34}$$

Usando (3.34) na estimativa (3.32) dada acima temos

$$\|M_{S,\mu}\|_{L_w^{q,\infty}}^q \leq C' \sum_{k=0}^{\infty} C(2^k) \|f\|_{L_v^p}.$$

Por (3.7) a série $\sum_{k=0}^{\infty} C(2^k)$, converge, o que conclui a parte (ii) para $q > 1$. Para $q = 1$, usaremos o lema 3.31.

Tomemos no lema 3.31

$$g_j(x) = \frac{\delta_{2^{-j}} M_{Q_1,\mu} \delta_{2^j} f(x)}{cC(2^j)2^{j(\gamma-n+1)}},$$

onde c é a constante em (3.33) e

$$C_j = \frac{C(2^j)}{\sum_k C(2^k)}.$$

Para simplificar a notação, como $\sum_j C(2^j)$ converge, seja c' seu limite. Assumiremos $\|f\|_{L_v^p} = 1$, sem perda de generalidade.

Por (3.33), temos que

$$\begin{aligned} w(\{x; g_j(x) > s\}) &= w(\{x; \delta_{2^{-j}} M_{Q_1,\mu} \delta_{2^j} f(x) > scC(2^j)2^{j(\gamma-n+1)}\}) \\ &\leq \frac{cC(2^j)2^{j(\gamma-n+1)}\|f\|_{L_v^p}}{scC(2^j)2^{j(\gamma-n+1)}} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

e

$$\sum_j C_j = \sum_j \frac{C(2^j)}{c'} = 1.$$

Portanto, estão satisfeitas as condições do lema 3.31 e como nesse mesmo lema coloquemos.

$$K = \frac{1}{c'} \sum_j C(2^j) \log \left(\frac{c'}{C(2^j)} \right).$$

Então, pelo lema 3.31 e por (3.28) temos

$$\begin{aligned} w(\{x; M_{S,\mu} f(x) > s\}) &\leq w(\{x; C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\gamma-n+1)} \delta_{2^{-k}} M_{Q_1,\mu} \delta_{2^k} f(x) > s\}) \\ &= w(\{x; cc' C \sum_{j=1}^{\infty} C_j g_j(x) > s\}), \end{aligned}$$

onde $j = k + 1$ e C é a constante em (3.28). Então, se $\lambda = cc'C$ temos

$$\begin{aligned} w(\{x; M_{S,\mu}f(x) > \lambda\}) &\leq w(\{x; \sum_{j=1}^{\infty} C_j g_j(x) > s\}) \\ &\leq \frac{2(K+2)}{s} = \frac{cc'C2(K+2)}{\lambda} = \frac{cc'C2(K+2)}{\lambda} \|f\|_{L_v^p}. \end{aligned}$$

Para concluir resta mostrar que $K < \infty$. Para isto, observemos que a função contínua

$$g(x) = \frac{1 + \log^+ x}{x} = \begin{cases} \frac{1 + \log x}{x} & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

é tal que

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{-\log x}{x^2} < 0 & \text{se } x > 1 \\ \frac{-1}{x^2} < 0 & \text{se } 0 < x < 1, \end{cases}$$

ou seja, g é decrescente.

Agora como $C(a)$ é não-crescente, para $a < b$ temos, $C(a) \geq C(b)$ e $0 < 1/C(a) \leq 1/C(b)$. Portanto como g é decrescente temos

$$g(1/C(a)) = C(a)(1 + \log^+ 1/C(a)) \geq C(b)(1 + \log^+ 1/C(b)) = g(1/C(b))$$

e como $1/a > 1/b$ temos

$$\frac{C(a)(1 + \log^+ 1/C(a))}{a} \geq \frac{C(b)(1 + \log^+ 1/C(b))}{b}$$

Concluimos assim que a função

$$f(a) = \frac{C(a)(1 + \log^+ 1/C(a))}{a}$$

é não-crescente. Aplicando agora o teste da integral e por (3.8) obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} C(2^j)(1 + \log^+ 1/C(2^j)) < \infty$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{C(a)(1 + \log^+ c'/C(a))}{a} da &= \int_1^{\infty} \frac{C(a)(1 + \log^+ 1/C(a) + \log^+ c')}{a} da \\ &= \int_1^{\infty} \frac{C(a)(1 + \log^+ 1/C(a))}{a} da + \log^+ c' \int_1^{\infty} \frac{C(a)}{a} da < \infty, \end{aligned}$$

por (3.7) e (3.8). Portanto, analogamente obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} C(2^j)(1 + \log^+ c'/C(2^j)) < \infty.$$

E, como

$$\sum_{j=1}^{\infty} C(2^j) \log \left(\frac{c'}{C(2^j)} \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} C(2^j)(1 + \log^+ c'/C(2^j))$$

concluimos que $K < \infty$.

Parte (iii): Temos que (3.9) é equivalente a

$$|Q|^{\frac{\mu}{n} - \frac{1}{p}} \left(\int_Q \delta_a w \right)^{1/q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (\delta_a v)^{-rp'/p} \right)^{1/rp'} \leq C(a) a^{\gamma-n+1}.$$

Logo, pelo teorema 2.23 temos

$$\|M_{Q_1, \mu} f\|_{L_{\delta_a w}^q} \leq cC(a) a^{\gamma-n+1} \|f\|_{L_{\delta_a v}^p}$$

e pela equivalência entre (3.25) e (3.26) temos

$$\|\delta_a^{-1} M_{Q_1, \mu} \delta_a f\|_{L_w^q} \leq cC(a) a^{\gamma-n+1} \|f\|_{L_v^p}. \quad (3.35)$$

Para $q \geq 1$, L_w^q é um espaço de Banach, assim por (3.28) e (3.35),

$$\begin{aligned} \|M_{S, \mu} f\|_{L_w^q} &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\gamma-n+1)} \|\delta_{2^{-k}} M_{Q_1, \mu} \delta_{2^k} f\|_{L_w^q} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\gamma-n+1)} cC(2^k) 2^{k(\gamma-n+1)} \|f\|_{L_v^p} \\ &= Cc \sum_{k=0}^{\infty} C(2^k) \|f\|_{L_v^p} \leq B \|f\|_{L_v^p}, \end{aligned}$$

com $B \leq cbC$, onde b é a constante em (3.7). ■

Prova do teorema 3.10: Para provar a afirmação necessária (i), suponha que valha (3.11). Seja $(R, R^*) \in \mathcal{B}(R_a, R_a^*)$. Suponhamos primeiro que $p > 1$ e seja $f = v^{-p'/p} \chi_R$. Se ξ denota o centro de R, R^* , então para algum $t > 0$ temos

$$R = \xi + tR_a \quad \text{e} \quad R^* = \xi + tR_a^*.$$

Se $x \in R^*$, podemos facilmente encontrar $y \in tQ_1$ tal que $z = x - y$ está em R , para que R esteja contido no retângulo $z + 2tR_a$. Então como por (3.29) $M_{S,Q_1,\mu}f(x) \geq cM_{R_a,Q_1,\mu}f(x)$ e como $x \in z + tQ_1 \subseteq z + 2tQ_1$, $R \subseteq z + 2tR_a$, temos

$$M_{S,Q_1,\mu}f(x) \geq c(2t)^{\mu-n} \left(\int_R v^{-p'/p} dy \right) \chi_{R^*}(x).$$

Substituindo esta desigualdade em (3.11), usando $t^n = |R|/|R_a|$ e

$$\|f\|_{L_v^p} = \left(\int_R v^{-p'/p} dy \right)^{1/p},$$

conseguimos (3.12), assumindo $\int_R v^{-p'/p} dy \neq 0, \infty$. Se $\int_R v^{-p'/p} dy = 0$, não há nada a provar e se $\int_R v^{-p'/p} dy = \infty$, podemos usar o mesmo argumento "standard" usado no teorema 2.10.

Provemos agora para $p = 1$. Seja $A = \inf_{x \in R} v(x)$. Assim, se $\varepsilon > 0$ então $E = \{x \in R; v(x) \leq A + \varepsilon\}$ tem medida positiva. Pondo $f = \chi_E$, pelos mesmos argumentos acima, obtemos $M_{S,Q_1,\mu}f(x) \geq c(2t)^{\mu-n}|E|\chi_{R^*}(x)$. Também $\|f\|_{L_v^1} \leq (A + \varepsilon)|E|$. Substituindo este resultado em (3.11), cancelando $|E|$, e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, temos (3.13).

Para provar (ii) do teorema 3.10, mostraremos que para cada $a \geq 1$, (3.14) implica a estimativa do tipo fraco

$$w(\{x; M_{R_a,Q_1,\mu}f(x) > s\}) \leq \left(\frac{DC(a)\|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q, \quad (3.36)$$

com D uma constante independente de a . Disto, a estimativa do tipo fraco para $M_{S,Q_1,\mu}$ segue pelo mesmo argumento usado para o operador centrado, que para $q > 1$ é

$$\|M_{S,Q_1,\mu}f\|_{L_w^{q,\infty}} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \|M_{R_{2^k},Q_1,\mu}f\|_{L_w^{q,\infty}} \leq C' \sum_{k=0}^{\infty} C(2^k) \|f\|_{L_v^p} \leq C'' \|f\|_{L_v^p},$$

onde a primeira desigualdade decorre de (3.30) e do fato de que $L_w^{q,\infty}$ é um espaço de Banach para $q > 1$ (teorema 1.13), a segunda desigualdade segue de (3.36) e a desigualdade final de (3.7). O caso $q = 1$ decorre do lema 3.31, de modo análogo ao caso $q = 1$ na prova da parte (ii) do teorema 3.1.

Provemos agora que (3.14) implica (3.36). Para $p > 1$, seja $f \geq 0$, $f \in L_v^p$ e seja $s > 0$. Seja $E = \{x : M_{R_a,Q_1,\mu}f(x) > s\}$. Para cada $x \in E$ podemos

encontrar $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$ tal que $x \in \xi + tQ_1$ e

$$t^{\mu-n} \int_{R(x)} f(y) dy > s,$$

onde $R(x) = \xi + tR_a$. Escrevendo $R^*(x) = \xi + tR_a^*$, como $t^n = |R|/|R_a|$, pela desigualdade de Hölder e (3.14) obtemos

$$\begin{aligned} s &< \left(\frac{|R|}{|R_a|} \right)^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{R(x)} f(y) dy \\ &\leq (a^{\gamma-n+1} |R|)^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_{R(x)} f^p v dy \right)^{1/p} \left(\int_{R(x)} v^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \\ &\leq C(a) \left(\int_{R(x)} f^p v dy \right)^{1/p} \left(\int_{R^*(x)} w dy \right)^{-1/q}, \end{aligned}$$

resultando

$$s^q \left(\int_{R^*(x)} w dy \right) < C(a)^q \left(\int_{R(x)} f^p v dy \right)^{q/p}.$$

Podemos agora aplicar o lema de recobrimento 1.11 para E e da cobertura $\{R^*(x) : x \in E\}$ escolher uma subcoleção enumerável $\{R_j^*\}$ a qual cobre E e tem sobreposição limitada. Seja N a constante para a qual $\sum_{x \in R_j^*} \chi_{R_j^*}(x) \leq N$, dependendo somente de n .

Se os R_j são os retângulos correspondentes tal que $(R_j, R_j^*) \in \mathcal{B}(R_a, R_a^*)$, então como $q \geq p$, temos

$$\begin{aligned} s^q w(\{x : M_{R_a, Q_1, \mu} f(x) > s\}) &\leq s^q \sum_j \int_{R_j^*} w dy \\ &\leq C(a)^q \sum_j \left(\int_{R_j} f^p v dy \right)^{q/p} \\ &\leq C(a)^q \left(\sum_j \int_{R_j} f^p v dy \right)^{q/p} \\ &\leq NC(a)^q \|f\|_{L_v^p}^q, \end{aligned}$$

dando o resultado desejado. O argumento para $p = 1$ é similar. ■

3.2 Desigualdades dos tipos forte e fraco para o operador maximal centrado $M_{S,\mu}$, caso S estrelado em relação à origem.

Nesta seção apresentaremos uma versão do teorema 3.1 para conjuntos estrelados em relação à origem. Para isto precisaremos dos seguintes resultados:

Definição 3.37 *Dado um conjunto estrelado S centrado na origem, diremos que uma coleção de retângulos abertos $\{R_j\}$ com orientação arbitrária é uma cobertura estrelada de S se:*

- (i) *Para cada j , R_j contém a origem no seu eixo maior;*
- (ii) $S \subseteq \cup_j R_j$;
- (iii) $\sum |R_j| \leq c|S|$ para algum $c > 0$.

Além disso, se pudermos escolher $\{R_j\}$ tal que para algum $c < 1$, $cR_j \subseteq S$ para todo j , então diremos que $\{R_j\}$ é uma cobertura estrelada própria de S . Finalmente, se cada dos retângulos R_j está centrado na origem, então diremos que $\{R_j\}$ é uma cobertura estrelada centrada.

Lema 3.38 (i) *Todo conjunto estrelado S tem uma cobertura estrelada $\{R_j\}$ e podemos escolher $\{R_j\}$ sendo uma cobertura estrelada centrada.*

- (ii) *Se S é estrelado e aberto, então ele admite uma cobertura estrelada própria $\{R_j\}$ e podemos escolher $\{R_j\}$ tal que $cR_j \subseteq S$ para cada j , com $c < 1$ dependendo somente de n e $|S| \approx \sum |R_j|$, com constantes de comparabilidade dependendo somente de n . Finalmente, se S é também simétrico com relação a origem, então podemos ainda escolher a cobertura estrelada própria tal que esta seja também uma cobertura estrelada centrada.*

Prova:

Para provarmos (i), escrevamos $S = \{r\theta; \theta \in S^{n-1}, 0 \leq r < \rho(\theta)\}$ e seja $O_j = \{\theta \in S^{n-1} : \rho(\theta) > 2^{j-1}\}$, $j \in \mathbb{Z}$. Como ρ é semicontínua inferiormente, O_j é aberto e podemos assim cobrir O_j por discos $D_{jk} = \{\theta \in S^{n-1} : |\theta - \theta_{jk}| < \varepsilon_{jk}\}$ tais que $\sum_k |D_{jk}| \approx |O_j|$. Para cada disco D_{jk} , fixemos um retângulo R_{jk} com eixo maior na direção θ_{jk} tal que R_{jk} é o menor

retângulo contendo o "cone" $\{r\theta : \theta \in D_{jk}, -2^j < r < 2^j\}$. Notemos que R_{jk} é único a menos de rotação sobre seu eixo maior, e qualquer escolha serve. Então para cada j , $|R_{jk}| \approx 2^{nj}|D_{jk}|$, com constantes de comparabilidade dependendo somente de n , resultando:

$$\sum_j \sum_k |R_{jk}| \approx \sum_j 2^{nj}|O_j| \approx \frac{1}{n} \|\rho\|_n^n = c_n |S|.$$

Para completar a prova de (i), observemos que

$$S \subseteq \cup_j \{r\theta : \theta \in O_j, 0 \leq r < 2^j\} \subseteq \cup_j R_{jk}.$$

Para provar (ii), como S é aberto, segue que $\rho \geq c > 0$ e que ρ é semi-contínua inferiormente. Por conveniência, suponhamos que $c = 1$. Definamos os conjuntos O_j como na prova de (i), exceto que desta vez consideraremos somente $j \geq 0$, notando que O_j é aberto para $j > 0$, e $O_0 = S^{n-1}$. Com O_0 , associamos o retângulo $R_{01} = (1/\sqrt{n})Q_1$ e com O_j , $j > 0$, associamos a coleção de retângulos R_{jk} possivelmente infinita como segue:

Primeiro, escrevamos O_j como a união dos discos $D(w, r) = \{\theta \in S^{n-1} : |\theta - w| < r\}$ com $w \in O_j$ e $r = 2^{-j} \text{dist}(w, \partial O_j)$. Por um processo de seleção "standard" podemos escolher desta coleção, discos disjuntos $D_{jk} = D(\theta_{jk}, r_{jk})$ tais que $O_j \subseteq \cup_k D(\theta_{jk}, 5r_{jk})$. Seja C_{jk} o menor cilindro com eixo paralelo a θ_{jk} contendo o cone $C = \{r\theta : \theta \in D_{jk}, 0 \leq r < 2^{j-1}\}$ e escolha $\tilde{R}_{jk}$ como sendo um dos maiores retângulos contidos em C_{jk} tal que para qualquer $z \in \tilde{R}_{jk}$, $\text{dist}(z, 0) \leq 2^{j-1}$. Então $\tilde{R}_{jk}$ contém a origem na interseção de uma face com o eixo maior.

Afirmamos que $\tilde{R}_{jk} \subset S$. De fato, seja $z \in \tilde{R}_{jk}$. Como $\rho \geq c = 1$ S contém a bola unitária B_1 centrada na origem. Assim se $z \in \tilde{R}_{jk} \cap B_1$, $z \in S$. Suponhamos então que $z \in \tilde{R}_{jk} \setminus B_1$. Observemos que a interseção do cone C com S^{n-1} é um disco D_{jk} com diâmetro que é aproximadamente 2^{-j} vezes o diâmetro da base do cone, logo se ampliarmos D_{jk} por um fator de 2^j obteremos um disco $\tilde{D}_{jk}$ em S^{n-1} que contém a interseção de $\tilde{R}_{jk}$ com S^{n-1} . Tomemos o cone $\tilde{C} = \{r\theta; \theta \in \tilde{D}_{jk}, 0 \leq r \leq 2^{j-1}\}$, portanto $\tilde{R}_{jk} \setminus B_1 \subset \tilde{C}$, ou seja, z é da forma $r\theta$, $\theta \in \tilde{D}_{jk}$ com $1 < r \leq 2^{j-1}$. Ainda $\tilde{D}_{jk} \subset O_j$ pois construímos os discos D_{jk} tais que possam ser ampliados por 2^j e ainda estarem contidos em O_j . Assim, como $\theta \in \tilde{D}_{jk} \subset O_j$, $\rho(\theta) > 2^{j-1}$, logo $1 < r \leq 2^{j-1} < \rho(\theta)$, ou seja $z \in S$.

Podemos estender $\tilde{R}_{jk}$ um pouco na direção $-\theta_{jk}$ para obtermos um retângulo (novamente denotado por $\tilde{R}_{jk}$) que contém propriamente a ori-

gem e está contido em S . Além do mais se S é simétrico com relação a origem podemos de fato estender $\tilde{R}_{jk}$ tal que este esteja centrado na origem.

Observemos que $|\tilde{R}_{jk}| \approx 2^{nj} |D_{jk}|$ e que $|O_j| \approx \sum_k |D_{jk}|$. Também, existe uma constante positiva $c_0 < 1$ dependendo somente de n tal que $D(\theta_{jk}, c_0 r_{jk})$ está contido na projeção da base de $\tilde{R}_{jk}$ sobre a esfera unitária. Assim se $C = 5/c_0$, então

$$S \cap \{2^{j-1} < |x| < 2^j\} \subseteq \cup_k C \tilde{R}_{jk}.$$

Assim a coleção $\{R_{jk}\}_{j,k}$ para $R_{jk} = C \tilde{R}_{jk}$ é a cobertura estrelada própria desejada. ■

Para cada retângulo R contendo a origem, podemos associar uma transformação linear δ_R de determinante positivo tal que $R = \delta_R Q_R$, onde Q_R é um cubo unitário contendo a origem, com arestas paralelas aos lados de R e δ_R é diagonal em relação a base ortonormal de vetores unitários paralelos aos lados de R , e que a entrada diagonal correspondente a um lado de R é o comprimento de R naquela direção. Então $\det \delta_R = |R|$.

O teorema seguinte é análogo ao teorema 3.1.

Teorema 3.39 *Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$ e $0 \leq \mu < n$ e sejam v, w pesos.*

- (i) *Seja S um conjunto aberto estrelado e simétrico com relação à origem e suponhamos que $M_{S,\mu}$ satisfaça a estimativa do tipo fraco*

$$w(\{x; M_{S,\mu} f(x) > s\}) \leq \left(\frac{B \|f\|_{L_v^p}}{s} \right)^q. \quad (3.40)$$

Então, para cada retângulo R contido em S e contendo a origem num eixo e para todo cubo Q , os pesos v e w satisfazem

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q \delta_R w \right)^{1/q} \left(\int_Q (\delta_R v)^{-p'/p} \right)^{1/p'} \leq \frac{CB}{|R|}, \quad p > 1, \quad (3.41)$$

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q \delta_R w \right)^{1/q} \sup_Q (\delta_R v)^{-1} \leq \frac{CB}{|R|}, \quad p = 1, \quad (3.42)$$

onde C é uma constante independente de v, w , e R .

- (ii) *Reciprocamente, suponhamos que S seja um conjunto estrelado, $\{R_j\}$ seja uma cobertura estrelada, e sejam C_j constantes tais que para todo*

cubo Q ,

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q \delta_{R_j} w \right)^{1/q} \left(\int_Q (\delta_{R_j} v)^{-p'/p} \right)^{1/p'} \leq \frac{C_j}{|R_j|}, \quad p > 1, \quad (3.43)$$

e

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-1} \left(\int_Q \delta_{R_j} w \right)^{1/q} \sup_Q (\delta_{R_j} v)^{-1} \leq \frac{C_j}{|R_j|}, \quad p = 1. \quad (3.44)$$

Se, também

$$\sum_j C_j = b < \infty, \quad q > 1 \quad (3.45)$$

e

$$\sum_j C_j \left(1 + \log^+ \frac{1}{C_j} \right) = b < \infty, \quad q = p = 1. \quad (3.46)$$

Então, $M_{S,\mu}$ satisfaz a estimativa do tipo fraco 3.40, com $B \leq cb$ para alguma constante c independente de v, w .

(iii) Sejam S e R_j como em (ii). Se $1 < p \leq q < \infty$ e v, w satisfazem para algum $r > 1$,

$$|Q|^{\frac{\mu}{n}-\frac{1}{p}} \left(\int_Q \delta_{R_j} w \right)^{1/q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (\delta_{R_j} v)^{-rp'/p} \right)^{1/(rp')} \leq \frac{C_j}{|R_j|}$$

para todo j e todo cubo Q , com $\{C_j\}$ satisfazendo (3.45) e (3.46), então $M_{S,\mu}$ satisfaz a estimativa do tipo forte

$$\|M_{S,\mu} f\|_{L_w^q} \leq B \|f\|_{L_v^p}.$$

com $B \leq cb$ e c independente de w, v e f .

Prova:

Do lema 3.38, vemos que se S é estrelado com relação a origem e $\{R_j\}$ é uma cobertura estrelada como garantida pelo lema, então

$$\chi_S(x) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{R_j}(x), \quad (3.47)$$

com as integrais dos dois lados sendo comparáveis.

Ainda, o lema 3.38 mostra que se S é aberto, podemos escolher a cobertura satisfazendo

$$\chi_S(x) \geq \chi_{R_j}(x/c), \quad (3.48)$$

onde c é a constante tal que $cR_j \subseteq S$ para todo j .

Na parte (i) do teorema, como S é simétrico com relação à origem além de aberto, pelo lema 3.38, S admite uma cobertura estrelada própria por retângulos centrados na origem. Portanto, se R é um retângulo centrado na origem e se δ_R, Q_R são respectivamente a correspondente transformação linear e o cubo unitário tal que $R = \delta_R Q_R$ como mencionado anteriormente, então Q_R está também centrado na origem e, portanto, é comparável a Q_1 e à bola unitária, isto é, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que $c_1 Q_R \subseteq Q_1 \subseteq c_2 Q_R$ onde c_1 e c_2 não dependem de R .

Nas partes (ii) e (iii) do teorema, apesar de S não ser necessariamente aberto e nem simétrico em relação à origem, é suficiente cobrir S por retângulos contendo a origem, pois se R é um tal retângulo com δ_R, Q_R associados, então Q_R contém a origem e assim $Q_R \subseteq cQ_1$ com c uma constante dependendo somente de n . A comparação contrária falha, desde que a origem possa estar arbitrariamente próxima ao fecho da fronteira de Q_R .

Assim, em ambos os casos é possível relacionar operadores envolvendo médias sobre Q_R por correspondentes operadores envolvendo médias sobre Q_1 . Uma afirmação similar vale com Q_1 trocado pela bola unitária centrada na origem.

Com isto, observemos que o teorema 3.39 segue quase como o teorema 3.1, pois quando (3.47) vale, então por (3.21) (lembrando que $|\det \delta_R| = |R|$, e pondo $Q_j = Q_R$ para $R = R_j$) temos

$$\begin{aligned} M_{S,\mu} f(x) &\leq c \sum_{j=0}^{\infty} M_{R_j,\mu} f(x) = c \sum_{j=0}^{\infty} |R_j| \delta_{R_j}^{-1} M_{Q_j,\mu} \delta_{R_j} f(x) \\ &\leq c' \sum_{j=0}^{\infty} |R_j| \delta_{R_j}^{-1} M_{Q_1,\mu} \delta_{R_j} f(x). \end{aligned} \quad (3.49)$$

A última desigualdade de (3.49) segue pela troca de Q_R com o múltiplo fixo de Q_1 ou a bola unitária que contém Q_R para todo j .

Reciprocamente, se R é um retângulo centrado na origem contido em S , então por (3.48)

$$\begin{aligned} M_{S,\mu}f(x) &\geq cM_{R,\mu}f(x) = c|R|\delta_R^{-1}M_{Q_{R,\mu}}\delta_R f(x) \\ &\geq c|R|\delta_R^{-1}M_{Q_1,\mu}\delta_R f(x), \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde a última desigualdade usa o fato que Q_1 e Q_R são comparáveis se R está centrado na origem, com constantes de comparabilidade dependendo somente de n .

Arguindo como no teorema 3.1, o teorema 3.39 para $M_{S,\mu}$ segue então de (3.49) e (3.50), usando a equivalência de (3.23) e (3.24), e de (3.25) e (3.26). ■

Nos artigos estudados, não temos o que seria o análogo ao teorema 3.10 para conjuntos estrelados S mais gerais, ou seja, um resultado do tipo fraco sobre o operador maximal não centrado $M_{S,Q_1,\mu}$ para conjuntos S mais gerais que $S = S_\rho$ para $\rho(\theta) = |\theta_n|^{-1/(\gamma+1)}$, contudo faremos um estudo deste caso na seção 3.4.

3.3 Desigualdade do tipo forte para o operador maximal não centrado $M_{S,E,\mu}$.

Nesta seção provaremos o teorema 0.10 da introdução, o qual enunciamos novamente abaixo:

Sejam $\gamma > 0$ e $S = S_\gamma$. Sejam $0 \leq \mu < n$, $1 < p \leq q < \infty$ e suponhamos que exista $r > 1$ tal que

$$|R|^{\frac{\mu}{n}-\frac{1}{p}}w(R^*)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|R|}\int_R v^{(-p'r)/p}dx\right)^{\frac{1}{r'p'}} \leq C(a)|R_a|^{\frac{\mu}{n}-1}$$

para todo $R \in \mathcal{B}(R_a)$ e todo $a \geq 1$, onde $C(a)$ é uma função não crescente que satisfaça

$$\int_1^\infty C(a)\frac{da}{a} = b$$

Então,

$$\|M_{S_\gamma,Q_1,\mu}f\|_{L_v^q} \leq c\|f\|_{L_v^p}.$$

Para esta prova precisaremos de vários resultados: seja $\mathcal{B}$ a família de todas as translações e dilatações de um retângulo fixado R_B (isto é, $\mathcal{B} =$

$\mathcal{B}(R_B)$ na nossa notação). Claro que R_B não é unicamente determinado por $\mathcal{B}$, mas suas excentricidades (razão dos lados) são, e podemos assumir sem perda de generalidade que seu primeiro comprimento é 1. Assim, por exemplo, podemos tomar o retângulo básico em $\mathcal{B}(R_a)$ como tendo lados de comprimentos $1, \dots, 1, a^{-\gamma-1}$. Para cada $R \in \mathcal{B}$ associamos um conjunto (não necessariamente um retângulo) R^* tal que o seguinte vale:

$$\text{Se } R_1, R_2 \in \mathcal{B} \text{ e } R_1 \subset R_2 \text{ então } R_1^* \subset R_2^*. \quad (3.51)$$

Por exemplo, o par (R, R^*) dos trasladados e dilatados de (R_a, R_a^*) definido anteriormente tem esta propriedade. Mais geralmente, se R_B^* é definido como sendo um retângulo qualquer contendo R_B e dado $R \in \mathcal{B}$, $R = z + tR_B$, definamos $R^* = z + tR_B^*$, então o par (R, R^*) satisfaz (3.51.)

Para uma tal coleção de pares e $0 \leq \alpha < 1$, definamos:

$$M_\alpha f(x) = \sup_{\substack{R \in \mathcal{B} \\ x \in R^*}} |R|^{\alpha-1} \int_R |f(y)| dy. \quad (3.52)$$

É claro que este operador depende de $\mathcal{B}$ e da escolha dos conjuntos R^* , embora para simplificar nossa notação, não citaremos esta dependência. Seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}(R_B)$ uma família de retângulos como descrito acima, com conjuntos associados R^* que satisfazem (3.51). Sejam $e_1, \dots, e_n$ ($e_1 = 1$, digamos) os comprimentos dos lados de R_B e seja $\mathcal{B}^{dy}$ a correspondente rede de retângulos diádicos da forma

$$\left[\frac{m_1 e_1}{2^j}, \frac{(m_1 + 1)e_1}{2^j} \right] \times \dots \times \left[\frac{m_n e_n}{2^j}, \frac{(m_n + 1)e_n}{2^j} \right]$$

para $j, m_1, \dots, m_n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Cada retângulo de $\mathcal{B}^{dy}$ está também em $\mathcal{B}$. Definamos

$$M_\alpha^{dy} f(x) = \sup_{\substack{R \in \mathcal{B}^{dy} \\ x \in R^*}} |R|^{\alpha-1} \int_R |f(y)| dy,$$

e para $z \in \mathbb{R}^n$, definamos

$$M_\alpha^{dy,z} f(x) = \sup_{\substack{R \in \mathcal{B}^{dy} \\ x \in (R+z)^*}} |R+z|^{\alpha-1} \int_{R+z} |f(y)| dy.$$

É claro que $|R+z| = |R|$.

Lema 3.53 Se $1 \leq q \leq \infty$ e w é um peso, então

$$\|M_\alpha f\|_{L_w^q} \leq c \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|M_\alpha^{dy,z} f\|_{L_w^q}$$

com c dependendo de α e n , mas não de $\mathcal{B}$ ou f .

Prova: Fixemos $R \in \mathcal{B}$ e consideremos a coleção daqueles $R_1 \in \mathcal{B}^{dy}$ cujos comprimentos dos lados são duas vezes os comprimentos dos lados de R , respectivamente, e consideremos $\mathbb{R}^n$ como a união de tais R_1 . Claro que $|R_1| \approx |R|$ para cada R_1 com constante de equivalência dependendo somente de n . Um simples argumento usando translações mostra que

$$|\{z \in \mathbb{R}^n : R \subset R_1 + z\}| \geq c|R_1|$$

com $c > 0$ dependendo somente de n . Também, com R ainda fixo, os conjuntos $\{z \in \mathbb{R}^n : R \subset R_1 + z\}$ são essencialmente disjuntos para diferentes (não sobrepostos) R_1 . Seja

$$E(R_1) = \{z \in \mathbb{R}^n : R \subset R_1 + z, R^* \subset (R_1 + z)^*\},$$

e notemos por (3.51) que $E(R_1)$ é o mesmo que o conjunto $\{z \in \mathbb{R}^n : R \subset R_1 + z\}$ acima. Também se $x \in R^*$ e $z \in E(R_1)$, então

$$|R|^{\alpha-1} \int_R |f(y)| dy \leq c|R_1 + z|^{\alpha-1} \int_{R_1+z} |f(y)| dy \leq cM_\alpha^{dy,z} f(x), \quad (3.54)$$

pois $|R_1 + z| = |R_1| \approx |R|$, $R \subset R_1 + z$ e $x \in (R_1 + z)^*$. A constante c depende somente de n, α .

Seja $\Omega = \cup_{R_1} E(R_1)$. Observemos que a desigualdade (3.54) vale se $x \in R^*$ e $z \in \Omega$. Observemos também que $|E(R_1)| \geq c|R_1|$ para cada R_1 e que os $E(R_1)$ são essencialmente disjuntos para distintos R_1 .

Agora, tomando o $\sup_{\substack{R \in \mathcal{B} \\ x \in R^*}}$ em (3.54) temos

$$M_\alpha f(x) \leq cM_\alpha^{dy,z} f(x).$$

Seja $R' = \cup_{j=1}^k E(R_1^j)$, logo

$$|R'|M_\alpha f(x) \leq c \int_{\cup_{j=1}^k E(R_1^j)} M_\alpha^{dy,z} f(x) dz.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|M_\alpha f\|_{L_w^q} &\leq \frac{c}{|R'|} \left\| \int_{\cup_{j=1}^k E(R_1^j)} M_\alpha^{dy,z} f dz \right\|_{L_w^q} \\
&\leq \frac{c}{|R'|} \int_{\cup_{j=1}^k E(R_1^j)} \|M_\alpha^{dy,z} f\|_{L_w^q} dz, \quad \text{por Minkowski,} \\
&= \frac{c}{|R'|} \sum_{j=1}^k \int_{E(R_1^j)} \|M_\alpha^{dy,z} f\|_{L_w^q} dz, \quad \text{pois os } E(R_1^j) \text{ são disjuntos,} \\
&\leq c \sup_{\mathbb{R}^n} \|M_\alpha^{dy,z} f\|_{L_w^q} \frac{\sum_{j=1}^k |E(R_1^j)|}{|R'|} \\
&\leq c \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|M_\alpha^{dy,z} f\|_{L_w^q}, \quad \text{pois } |R'| = \sum_{j=1}^k |E(R_1^j)|.
\end{aligned}$$

O seguinte teorema será de grande importância para a demonstração do teorema 0.10. ■

Teorema 3.55 *Sejam $1 < p \leq q < \infty$ e $0 \leq \alpha < 1$ e seja M_α definido por (3.52). Se existe $r > 1$ tal que*

$$|R|^{\alpha - \frac{1}{p}} w(R^*)^{1/q} \left(\frac{1}{|R|} \int_R v^{(-p'r)/p} dx \right)^{1/rp'} \leq C, \quad (3.56)$$

para todo $R \in \mathcal{B}$, então

$$\|M_\alpha f\|_{L_w^q} \leq C \|f\|_{L_v^p}, \quad (3.57)$$

com uma constante C que é um múltiplo da constante em (3.56) dependendo de α , n , p e q , mas não de $\mathcal{B}$ ou f .

Prova:

Para provar o teorema 3.55 é suficiente pelo lema 3.53 provar o análogo de (3.57) para cada $M_\alpha^{dy,z}$, com uma constante independente de z . Se trocarmos f por $f v^{-p'/p}$, isto significa o seguinte:

$$\|M_\alpha^{dy,z}(f v^{-p'/p})\|_{L_w^q} \leq c \|f\|_{L_{v^{-p'/p}}^p} \quad (3.58)$$

com c igual a um múltiplo da constante em (3.56) dependendo somente de α, n, p e q .

Para provar (3.58), fixemos z e $f \geq 0$ e para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, seja

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha^{dy, z}(fv^{-p'/p})(x) > 2^{kn}\}.$$

Então, $x \in \Omega_k$ se e somente se existe $R \in \mathcal{B}^{dy}$ tal que $x \in (R+z)^*$ e

$$|R|^{\alpha-1} \int_{R+z} fv^{-p'/p} dy > 2^{kn}. \quad (3.59)$$

Em particular, se $R \in \mathcal{B}^{dy}$ e (3.59) vale, então $(R+z)^* \subset \Omega_k$. Sejam $\{R_j^k\}_j$ os retângulos diádicos maximais (com respeito a inclusão) em $\mathcal{B}^{dy}$ que satisfazem (3.59). A existência destes retângulos é garantida se f tiver suporte compacto, o que podemos assumir sem perda de generalidade. Pela maximalidade, os $\{R_j^k + z\}_j$ são não sobrepostos para cada k . Ainda mais, se $\bar{R}_j^k$ é o próximo retângulo diádico contendo R_j^k , então

$$|\bar{R}_j^k|^{\alpha-1} \int_{\bar{R}_j^k + z} fv^{-p'/p} dy \leq 2^{kn}$$

pela maximalidade e como $|\bar{R}_j^k| = 2^n |R_j^k|$, temos

$$2^{kn} < |R_j^k|^{\alpha-1} \int_{R_j^k + z} fv^{-p'/p} dy \leq 2^{n(1-\alpha)} 2^{kn}. \quad (3.60)$$

Afirmamos que

$$\Omega_k = \cup_j (R_j^k + z)^*. \quad (3.61)$$

Já observemos que cada $(R_j^k + z)^*$ está em Ω_k . Por outro lado, se $x \in \Omega_k$ existe um diádico R com $x \in (R+z)^*$ tal que (3.59) vale. Assim $R \subset R_{j_o}^k$ para algum j_o (sendo R maximal ou não) e conseqüentemente $(R+z)^* \subset (R_{j_o}^k + z)^*$ por (3.51). Logo, $x \in (R_{j_o}^k + z)^*$ e a afirmação segue. Por (3.61),

$$\Omega_k \setminus \Omega_{k+1} = \cup_j [(R_j^k + z)^* \setminus \Omega_{k+1}] = \cup_j E_j^k,$$

onde

$$E_j^k = (R_j^k + z)^* \setminus \Omega_{k+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|M_{\alpha}^{dy,z}(fv^{-p'/p})\|_{L_w^q}^q &= \int_{\mathbb{R}^n} [M_{\alpha}^{dy,z}(fv^{-p'/p})(x)]^q w dx \\
&= \sum_k \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}} [M_{\alpha}^{dy,z}(fv^{-p'/p})(x)]^q w dx \\
&\leq \sum_{k,j} 2^{(k+1)nq} w(E_j^k) \\
&\leq 2^{nq} \sum_{k,j} \left(|R_j^k|^{\alpha-1} \int_{R_j^k+z} f v^{-p'/p} dy \right)^q w(E_j^k) \\
&= 2^{nq} \sum_{k,j} w(E_j^k) [|R_j^k|^{\alpha-1} A(R_j^k + z)]^q \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{A(R_j^k + z)} \int_{R_j^k+z} f v^{-p'/p} dy \right)^q,
\end{aligned}$$

onde para um retângulo R ,

$$A(R) = |R|^{1/r'} \left(\int_R v^{-p'/p} dy \right)^{1/r}.$$

Estimamos a última soma usando a hipótese (3.56) para os retângulos $R_j^k + z$ e o fato que $E_j^k \subset (R_j^k + z)^*$, obtendo

$$\begin{aligned}
\|M_{\alpha}^{dy,z}(fv^{-p'/p})\|_{L_w^q}^q &\leq 2^{nq} C^q \sum_{k,j} A(R_j^k + z)^{q/p} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{A(R_j^k + z)} \int_{R_j^k+z} f v^{-p'/p} dy \right)^q, \tag{3.62}
\end{aligned}$$

onde C é a constante em (3.56)

O restante da prova é baseado na aplicação do próximo lema, extraído de [SW], para estimar a soma em (3.62).

Lema 3.63 *Seja $\{R_i\}_{i \in I}$ uma coleção de retângulos de uma rede diádica fixada, como por exemplo da forma $\mathcal{B}^{dy} + z$ para z fixado, seja $\beta \geq 1$, e sejam $\{a_i\}_{i \in I}$ números positivos que satisfaçam*

$$(i) \int_{R_i} v^{-p'/p} dy \leq c_0 a_i$$

$$(ii) \sum_{j: R_j \subset R_i} a_j^\beta \leq c_o a_i^\beta$$

para cada i , com c_o independente de i . Então se $1 < p < \infty$ e $q = \beta p$,

$$\left[\sum_{i \in I} a_i^\beta \left(\frac{1}{a_i} \int_{R_i} |f| v^{-p'/p} dy \right)^q \right]^{1/q} \leq c \|f\|_{L_{v^{-p'/p}}^p},$$

com c dependendo de c_o, p e q , mas não de f ou da rede.

Prova: Consideremos a transformação T definida por:

$$T(f) = \left(\frac{1}{a_i} \int_{R_i} f v^{-p'/p} dy \right)_{i \in I}.$$

Afirmamos que T leva $L^\infty(\mathbb{R}^n, v^{-p'/p})$ em $\ell^\infty(I, a_i^\beta)$. De fato, pela condição (i) temos,

$$\left| \frac{1}{a_i} \int_{R_i} f v^{-p'/p} dy \right| \leq \|f\|_{L_{v^{-p'/p}}^\infty} \left| \frac{1}{a_i} \int_{R_i} v^{-p'/p} dy \right| \leq \|f\|_{L_{v^{-p'/p}}^\infty} c_o = C',$$

desde que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, v^{-p'/p})$. Seja $b_i = \frac{1}{a_i} \int_{R_i} f v^{-p'/p} dy$, portanto pela desigualdade acima temos que $|b_i| \leq C'$, para $\forall i \in I$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $J_\varepsilon = \{i \in I, |b_i| > C' + \varepsilon\}$ é vazio e $a(J_\varepsilon) = 0$, onde $a(J) = \sum_{i \in J} a_i^\beta$, $J \subset I$; conseqüentemente $\|T(f)\|_{\ell_{a_i^\beta}^\infty} \leq C'$.

Temos também que T leva $L^1(\mathbb{R}^n, v^{-p'/p})$ em $\ell^\beta(I, a_i^\beta)$ fraco, pela condição (ii), como mostraremos agora.

Para f limitada com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$, sejam $\{R_j\}_{j \in J}$ os retângulos maximais diádicos da coleção $\{R_i\}_{i \in I}$ tal que $\frac{1}{a_i} \int_{R_i} |f| v^{-p'/p} dy$ excede λ (podemos assumir que a coleção $\{R_j\}_{j \in J}$ é finita). Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i: \left| \frac{1}{a_i} \int_{R_i} f v^{-p'/p} dy \right| > \lambda} a_i^\beta &\leq \sum_{j \in J} \sum_{i: R_i \subset R_j} a_i^\beta \leq \sum_{j \in J} c_o a_j^\beta \quad \text{por (ii)} \\ &\leq \frac{c_o}{\lambda^\beta} \sum_{j \in J} \left(\int_{R_j} |f| v^{-p'/p} dy \right)^\beta \leq \frac{C}{\lambda^\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| v^{-p'/p} dy \right)^\beta \end{aligned}$$

desde que $\beta \geq 1$ e os retângulos maximais $R_j, j \in J$, são dois a dois disjuntos. O teorema de interpolação de Marcinkiewicz completa a prova do lema. ■

Se aplicarmos o lema 3.63 para a soma em (3.62) e notarmos que $\int_R v^{-p'/p}$
 $\leq |R|^{1/r'} (\int_R v^{-p'r/p} dy)^{1/r} = A(R)$ pela desigualdade de Hölder, imediata-
mente obteremos (3.58) de (3.62) se verificarmos

$$\sum_{k,j: R_j^k \subset R_\ell^m} A(R_j^k + z)^{q/p} \leq c A(R_\ell^m + z)^{q/p} \quad (3.64)$$

para cada R_ℓ^m e $0 < p \leq q < \infty$, com c independente de ℓ, m e z . Usando
a simples desigualdade $\sum a_i^{q/p} \leq (\sum a_i)^{q/p}$, $q \geq p$, $a_i \geq 0$, podemos provar
apenas o caso $q = p$. Se R_j^k é um subconjunto próprio de R_ℓ^m , então

$$2^{mn} < |R_\ell^m|^{\alpha-1} \int_{R_\ell^m+z} f v^{-p'/p} dy \leq 2^{kn},$$

onde a segunda desigualdade segue da maximalidade de R_j^k . Portanto, de-
vemos ter $k > m$ em (3.64) e podemos reescrever o lado esquerdo de (3.64)
(com $q/p = 1$), como

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j: R_j^k \subset R_\ell^m} A(R_j^k + z). \quad (3.65)$$

Pela desigualdade de Hölder e da definição de $A(R)$, a soma interna em (3.65)
é majorada por

$$\left(\sum_{j: R_j^k \subset R_\ell^m} |R_j^k| \right)^{1/r'} \left(\sum_{j: R_j^k \subset R_\ell^m} \int_{R_j^k+z} v^{-p'r/p} dy \right)^{1/r}.$$

Logo, como $\{R_j^k + z\}_j$ são não sobrepostos para cada z fixado, o segundo
fator é majorado por $(\int_{R_\ell^m+z} v^{-p'r/p} dy)^{1/r}$. Também para o primeiro fator,
pela primeira desigualdade de (3.60),

$$\sum_{j: R_j^k \subset R_\ell^m} |R_j^k| \leq \sum_{j: R_j^k \subset R_\ell^m} \left(2^{-kn} \int_{R_j^k+z} f v^{-p'/p} dy \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{j: R_j^k \subset R_\ell^m} 2^{-kn} \int_{R_j^k+z} f v^{-p'/p} dy \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{pois } \frac{1}{1-\alpha} \geq 1 \\
&\leq \left(2^{-kn} \int_{R_\ell^m+z} f v^{-p'/p} dy \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&\leq (2^{-kn} |R_\ell^m|^{1-\alpha} 2^{n(1-\alpha)} 2^{mn})^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{pela 2ª desigualdade de (3.60)} \\
&= 2^n 2^{(m-k)n/(1-\alpha)} |R_\ell^m|.
\end{aligned}$$

Combinando estas estimativas, vemos que (3.65) é majorada por

$$\sum_{k=m}^{\infty} (2^n 2^{(m-k)n/(1-\alpha)} |R_\ell^m|)^{1/r'} \left(\int_{R_\ell^m+z} v^{-p'r/p} dy \right)^{1/r} = cA(R_\ell^m + z),$$

como desejado. Isto prova (3.64) e também completa a prova do teorema (3.55). $\blacksquare$

Mostraremos agora como o teorema (3.55) implica o teorema 0.10. De fato, se S é um conjunto estrelado em relação à origem, então pelo lema 3.38, S admite uma cobertura estrelada $\{R_j\}$.

Dado um conjunto estrelado S com relação à origem, fixemos uma cobertura $\{R_j\}$ como acima. Dado um conjunto limitado E , definamos R_j^* como sendo um retângulo contendo ambos E e R_j . Também, para cada j , seja $\mathcal{B}(R_j)$ a coleção de todos os dilatados e transladados de R_j e, se $R \in \mathcal{B}(R_j)$, digamos $R = z + tR_j$, definamos $R^* = z + tR_j^*$. Os pares (R, R^*) , $R \in \mathcal{B}(R_j)$, satisfazem então (3.51).

Teorema 3.66 *Sejam $0 \leq \mu < n$, $1 < p \leq q < \infty$, S um conjunto estrelado com relação à origem e E um conjunto limitado. Com a notação acima, assumamos que exista $r > 1$ tal que*

$$|R|^{\frac{\mu}{n} - \frac{1}{p}} w(R^*)^{1/q} \left(\frac{1}{|R|} \int_R v^{\frac{-r}{p-1}} dx \right)^{1/rp'} \leq C_{R_j} |R_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \quad (3.67)$$

para todo $R \in \mathcal{B}(R_j)$ e que $\sum C_{R_j} < \infty$. Então,

$$\|M_{S,E,\mu} f\|_{L_v^q} \leq c \|f\|_{L_v^p}.$$

Antes de iniciarmos a prova, observemos que o teorema (3.66) inclui o teorema 0.10 pondo $S = S_\gamma$, $E = Q_1$ e $R_j = \delta_a Q_1$ para $a = 2^j$, $j = 1, 2, \dots$, isto é, R_{2^j} na notação da introdução.

Lembremos que na introdução R_a^* é o menor retângulo contendo ambos R_a e Q_1 . A hipótese adicional no teorema (3.66) de que $\sum C_{R_j} < \infty$ equivale então a (3.7). Finalmente, provaremos o teorema 1, para isto escrevemos

$$\begin{aligned} M_{S,E,\mu} f(x) &= \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ x \in z+tE}} t^{\mu-n} \int_{z+tS} |f(y)| dy \\ &\leq \sum_j |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}} \left(\sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ x \in z+tE}} |tR_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \int_{z+tR_j} |f(y)| dy \right) \end{aligned}$$

pois $|tR_j| = t^n |R_j|$ e $S \subset \cup_j R_j$. Como $E \subset R_j^*$, temos $z + tE \subset z + tR_j^* = (z + tR_j)^*$ pela definição. Assim, na notação do teorema (3.55)

$$M_{S,E,\mu} f(x) \leq \sum_j |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}} M_{\frac{\mu}{n},j} f(x),$$

onde $M_{\frac{\mu}{n},j}$ é a função maximal (3.52) usando os retângulos em $\mathcal{B}(R_j)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|M_{S,E,\mu} f\|_{L_w^q} &\leq \sum_j |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}} \|M_{\frac{\mu}{n},j} f\|_{L_w^q} \\ &\leq c \sum_j |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}} C_{R_j} |R_j|^{\frac{\mu}{n}-1} \|f\|_{L_v^p} \\ &= c \left(\sum C_{R_j} \right) \|f\|_{L_v^p} \end{aligned}$$

por (3.67) e teorema (3.55).

Isto completa a prova do teorema (3.66). ■

3.4 Desigualdade do tipo fraco para o operador maximal não centrado $M_{S,E,\mu}$, caso S estrelado em relação à origem.

O seguinte teorema é em parte análogo ao teorema 3.10.

Teorema 3.68 *Sejam $0 \leq \mu < n$, $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha = \frac{\mu}{n}$, S um conjunto estrelado em relação a origem e E um conjunto limitado. Com a notação do teorema 3.66, suponhamos que v e w satisfaçam*

$$|R|^{\alpha-1} w(R^*)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} dy \right)^{1/p'} \leq C_j, \quad (3.69)$$

para todo $R \in \mathcal{B}(R_j)$ e que $\sum C_j = b < \infty$. Então $M_{S,E,\mu}$ satisfaz a estimativa do tipo fraco

$$w(\{x : M_{S,E,\mu} f(x) > \lambda\}) \leq \left(\frac{c \|f\|_{L_v^p}}{\lambda} \right)^q, \quad (3.70)$$

onde c é um múltiplo da constante b .

Prova: A prova segue em grande parte como a prova do teorema 0.10 e, portanto, omitiremos alguns trechos.

Considerando a notação do lema 3.53, temos:

Lema 3.71 *Se w é um peso, então*

$$w(\{x; M_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq w(\{x; M_\alpha^{dy,z} f(x) > \lambda/c\})$$

com c dependendo de α e n , mas não de $\mathcal{B}$ ou f .

Prova: Fixemos $R \in \mathcal{B}$ e consideremos a coleção daqueles $R_1 \in \mathcal{B}^{dy}$ cujos comprimentos dos lados são duas vezes o comprimento dos lados de R , respectivamente, e consideremos em $\mathbb{R}^n$ como a união de tais R_1 . É claro que $|R_1| \approx |R|$ com constante de comparabilidade dependendo somente de n .

Seja

$$E(R_1) = \{z \in \mathbb{R}^n; R \subset R_1 + z, R^* \subset (R_1 + z)^*\}.$$

Assim, se $x \in R^*$ e $z \in E(R_1)$, então

$$|R|^{\alpha-1} \int_R |f(y)| dy \leq c |R_1 + z|^{\alpha-1} \int_{R_1+z} |f(y)| dy \leq c M_\alpha^{dy,z} f(x),$$

pois $|R_1 + z| = |R_1| \approx |R|$, $R \subset R_1 + z$ e $x \in (R_1 + z)^*$. Tomando na expressão acima o supremo sobre $R \in \mathcal{B}$ com $x \in R^*$, temos

$$M_\alpha f(x) \leq c M_\alpha^{dy,z} f(x).$$

Portanto,

$$w(\{x; M_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq w(\{x; M_\alpha^{dy,z} f(x) > \lambda/c\}).$$

■

O seguinte teorema é a versão tipo fraco do teorema 3.55.

Teorema 3.72 *Sejam $1 < p \leq q < \infty$ e $0 \leq \alpha < 1$ e seja M_α o operador definido em (3.52). Então M_α satisfaz a estimativa do tipo fraco*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n; M_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq \left(\frac{c \|f\|_{L_v^p}}{\lambda} \right)^q \quad (3.73)$$

se e somente se

$$|R|^{\alpha-1} w(R^*)^{1/q} \left(\int_R v^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} \leq C, \quad \text{para } R \in \mathcal{B}, \quad (3.74)$$

com uma constante C que é um múltiplo de c , dependendo de α , n , p , e q , mas não de $\mathcal{B}$ ou f .

Prova: Observemos que para provar que (3.74) é condição suficiente para (3.73), é suficiente pelo lema 3.71 provar o análogo de (3.73) para $M_\alpha^{dy,z}$, com uma constante independente de z . Para isto, trocando f por $f v^{-p'/p}$ em (3.73) temos

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n; M_\alpha^{dy,z} f v^{-p'/p}(x) > \lambda\}) \leq \left(\frac{c \|f\|_{L_v^p}}{\lambda} \right)^q, \quad (3.75)$$

com c um múltiplo da constante em (3.73) dependendo somente de α , n , p , e q . Para provar (3.75) tomemos os conjuntos Ω_k como na prova do teorema 3.55, lembrando que valem então (3.60) e (3.61) e que por (3.61),

$$\Omega_k \setminus \Omega_{k+1} = \cup_j [(R_j^k + z)^* \setminus \Omega_{k+1}] = \cup_j E_j^k,$$

onde

$$E_j^k = (R_j^k + z)^* \setminus \Omega_{k+1}.$$

Para $\lambda > 0$, seja

$$\Omega_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; M_\alpha^{dy,z}(f v^{-p'/p})(x) > \lambda\}.$$

Tomemos $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2^{(k_0+1)n} \geq \lambda \geq 2^{k_0 n}.$$

Logo $\lambda^{-1} \approx 2^{-k_0 n}$ e $\Omega_\lambda \subset \Omega_{k_0}$.

Utilizando todos os resultados obtidos acima, temos:

$$\begin{aligned}
w(\Omega_\lambda) &\leq w(\Omega_{k_0}) = w(\cup_{k=k_0}^{\infty} \Omega_k \setminus \Omega_{k+1}) = w(\cup_{k=k_0}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} E_j^k) \\
&\leq \sum_{\substack{k=k_0 \\ j=1}}^{\infty} w(E_j^k) \leq \sum_{\substack{k=k_0 \\ j=1}}^{\infty} (2^{-kn} |R_j^k|^{\alpha-1} \int_{R_j^k+z} f v^{-p'/p} dx)^q w(E_j^k) \\
&\leq \sum_{\substack{k=k_0 \\ j=1}}^{\infty} w((R_j^k+z)^*) (2^{-kn} |R_j^k|^{\alpha-1} \int_{R_j^k+z} f v^{-p'/p} dx)^q \\
&\leq \lambda^{-q} \sum_{\substack{k=k_0 \\ j=1}}^{\infty} w((R_j^k+z)^*) (|R_j^k|^{\alpha-1} 2^{-(k-k_0)n})^q \left(\int_{R_j^k+z} f v^{-p'/p} dx \right)^q \\
&= \lambda^{-q} \sum_{\substack{k=k_0 \\ j=1}}^{\infty} w((R_j^k+z)^*) (|R_j^k|^{\alpha-1} 2^{-(k-k_0)n})^q \cdot \\
&\quad \cdot \left(\int_{R_j^k+z} f (v^{-p'/p})^{1/p} (v^{-p'/p})^{1/p'} dx \right)^q \\
&\leq \lambda^{-q} \sum_{\substack{k=k_0 \\ j=1}}^{\infty} w((R_j^k+z)^*) (|R_j^k|^{\alpha-1} 2^{-(k-k_0)n})^q \left(\int_{R_j^k+z} v^{-p'/p} dx \right)^{q/p} \\
&\quad \cdot \left(\int_{R_j^k+z} f^p v^{-p'/p} dx \right)^{q/p} \\
&\leq \lambda^{-q} C^q \sum_{\substack{k=k_0 \\ j=1}}^{\infty} 2^{-(k-k_0)nq} \left(\int_{R_j^k+z} f^p v^{-p'/p} dx \right)^{q/p} \quad \text{por (3.74)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{-q} C^q \sum_{k=K_0}^{\infty} 2^{-(k-k_0)nq} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{R_j^k+z} f^p v^{-p'/p} dx \right)^{q/p} \\
&\leq \lambda^{-q} C^q \sum_{m=0}^{\infty} (2^{-nq})^m \|f\|_{L_v^p}^q \quad \text{onde } m = k - k_0 \\
&= \lambda^{-q} C^q \left(\frac{2^{nq}}{2^{nq} - 1} \right) \|f\|_{L_v^p}^q
\end{aligned}$$

o que conclui a prova de (3.75).

Para provar a parte recíproca basta tomar $f = \chi_{Rv^{-p'/p}}$ e usar o mesmo argumento “standard” usado na prova do teorema de Muckenhoupt. ■

Finalmente, provemos o teorema 3.68.

Assim como na prova do teorema 3.66, temos

$$M_{S,E,\mu} f(x) \leq \sum_j |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}} M_{\frac{\mu}{n},j} f(x).$$

Logo;

$$\begin{aligned}
w(\{x; M_{S,E,\mu} f(x) > \lambda\}) &= \int_{\{x; M_{S,E,\mu} f(x) > \lambda\}} w dx \\
&\leq \int_{\{x; \sum_j |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}} M_{\frac{\mu}{n},j} f(x) > \lambda\}} w dx \\
&\leq \int_{\cup_j \{x; |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}} M_{\frac{\mu}{n},j} f(x) > \lambda/2^j\}} w dx \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{x; M_{\frac{\mu}{n},j} f(x) > \frac{\lambda}{2^j |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}}}\}} w dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} w \left(\left\{ x; M_{\frac{\mu}{n},j} f(x) > \frac{\lambda}{2^j |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}}} \right\} \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} [C_j |R_j|^{1-\frac{\mu}{n}}]^q \frac{\|f\|_{L_v^p}^q}{\lambda^q} 2^{-qj} |R_j|^{(\frac{\mu}{n}-1)q} \\
&\quad \text{pelo teorema 3.72 e por (3.69)} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} C_j \right)^q \left[\frac{\|f\|_{L_v^p}}{\lambda} \right]^q = C' \left[\frac{\|f\|_{L_v^p}}{\lambda} \right]^q.
\end{aligned}$$

A segunda desigualdade acima segue pelo seguinte fato:

Se $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) > \lambda$ então existe j tal que $g_j(x) > \lambda/2^j$. De fato, pois se para qualquer j , $g_j(x) \leq \lambda/2^j$, então

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda/2^j = \lambda$$

o que é uma contradição. Logo,

$$\{x; \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) > \lambda\} \subset \bigcup_j \{x; g_j(x) > \lambda/2^j\},$$

concluindo assim a prova do teorema 3.68.

Referências Bibliográficas

- [Ca] C. P. Calderón, *Differentiation through starlike sets in $\mathbb{R}^m$* , Studia Math. **48** (1973), 1-13.
- [CWW] S. Chanillo, D. K. Watson e R. L. Wheeden, *Some integral and maximal operators related to starlike sets*, Studia Math. **107** (1993), 223-255.
- [FZ] J. C. D. Fernandes e S. L. Zani, *Desigualdades de Poincaré e Sobolev com pesos*, 20º Col. Bras. Mat.-IMPA, (1995).
- [H] R. A. Hunt, *On $L(p, q)$ Spaces*, Enseignement Math. (2) **12** (1966), 249-276.
- [J] B. Jawerth, *Weighted inequalities for maximal operators: linearization, localization, and factorization*, Amer. J. Math. **108** (1986), 361-414.
- [M] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy Maximal Function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207-226.
- [MW] B. Muckenhoupt e R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261-274.
- [P1] C. Pérez, *Two weighted inequalities for potential and fractional type maximal operators*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 663-683.
- [P2] ———, *A remark on weighted inequalities for general maximal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 1121-1126.
- [SW] E. Sawyer e R. L. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and Homogeneous Spaces*, Amer. J. Math. **114** (1992), 813-874.

- [StWe] E. M. Stein e N. J. Weiss, *On the convergence of Poisson integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **140** (1969), 35-54.
- [T] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press Inc., New York, (1986).
- [W] R. L. Wheeden, *Norm inequalities for off centered maximal operators*, Publ. Mat. **37** (1993), n° 2, 429-441.
- [WZ] R. L. Wheeden e A. Zygmund, *Measure and Integral - An introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker Inc., New York (1977).