INVARIÂNCIA E INSTABILIDADE PARA SISTEMAS NÃO AUTÔNOMOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS DO TIPO RETARDADO

Valdir Antonio Menegatto

Orientador: Prof.Dr. Natalino Adelmo de Molfetta

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS

1986

A meus

pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Natalino Adelmo de Molfetta pela orientação segura e pela amizade, que contribuíram de forma ímpar para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

Aos professores e colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, e do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pelo companheirismo e apoio constantes.

Este trabalho dependeu parcialmente das seguintes instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP - FNDCT (PROJ. Nº 4.3.86.0037.00).

Ī N D I C E

INTRODUÇÃO ..... *i*

CAPÍTULO I - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS DO TIPO RETARDADO 1

I-1. Preliminares 1
I-2. Estabilidade 4

CAPÍTULO II - SEMI-INVARIÂNCIA PARA SISTEMAS NÃO AUTÔNOMOS 6

II-1. Fatos Básicos 6
II-2. Conjuntos Semi-Invariantes 19

CAPÍTULO III - SEMI-INVARIÂNCIA E INSTABILIDADE 36

III-1. Introdução 36
III-2. Um Critério de Instabilidade para Sistemas Autônomos 36
III-3. Uma Aplicação para o Corolário III-1..... 43
III-4. Um Critério de Instabilidade para Sistemas não Autônomos 47
III-5. Aplicações para o Teorema III.3..... 50

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 64

ABSTRACT

This work is composed by two parts.

In the first one, we relate some basic facts about the invariance theory for non-autonomous functional differential equations of retarded type.

In the last one, by using Liapunov's functionals and invariance properties we obtain a criterion of instability for non-autonomous functional differential equations of retarded type.

INTRODUÇÃO

Em [9,10], L.C. Pavlu obteve um critério de instabilidade para uma classe bastante ampla de sistemas não autônomos, perturbados ou não, de equações diferenciais ordinárias.

O objetivo desse trabalho é obter uma extensão deste critério para equações diferenciais funcionais do tipo retardado.

Para tanto são utilizados técnicas de invariância e funcionais de Liapunov.

No capítulo I, relacionamos alguns fatos básicos sobre equações diferenciais funcionais do tipo retardado.

No capítulo II, apresentamos a teoria básica de invariância para sistemas não autônomos de equações diferenciais funcionais do tipo retardado, seguindo a ordem de idéias de Rodrigues em [11].

No capítulo III, provamos um teorema de instabilidade para sistemas autônomos de equações diferenciais funcionais do tipo retardado, com um conjunto de hipóteses menos exigente do que aquele estabelecido por Onuchic em [8].

A partir desse resultado, obtemos um critério similar para uma classe de sistemas não autônomos de equações diferenciais funcionais do tipo retardado.

Fazemos também algumas aplicações dos resultados obtidos.

Pode-se demonstrar que a aplicação

$$t \in [a,b] \longrightarrow x_t \in \mathbb{C}.$$

é contínua. Ver por exemplo [2,3].

Seja Λ um aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ e $f: \Lambda \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua.

Definição I-1.

A relação

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) \tag{1}$$

onde $\cdot = \frac{d}{dt}$, é chamada uma *Equação Diferencial Funcional do tipo Retardado*. É evidente que a equação (1) inclui como caso particular as Equações Diferenciais Ordinárias (r=0).

Definição I-2.

Para todo $(\sigma,\phi) \in \Lambda$, diz-se que uma função $x(t)$ é uma *solução de (1) com condição inicial* ϕ *em* σ, se existir um número real positivo A tal que

i) $x(t) \in \mathbb{C}([\sigma-r,\sigma+A), \mathbb{R}^n)$

ii) $x_\sigma = \phi$

iii) $x(t)$ satisfaz a equação (1), para $t \in [\sigma, \sigma+A)$.

Observação:

Não exigimos a diferenciabilidade de $x(t)$ no ponto σ. Consideramos, apenas, a existência da derivada direita nesse ponto.

Uma solução $x(t)$ da equação (1), com condição inicial ϕ em σ, será denotada por $x(\sigma,\phi)(t)$ e a correspondente função x_t por $x_t(\sigma,\phi)$.

Apresentamos, agora, alguns resultados básicos referentes às Equações Diferenciais Funcionais do Tipo Retardado. As demonstrações podem ser encontradas na bibliografia indicada:

1) O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x_t) \\ x_\sigma = \phi \end{cases}$$

é equivalente à equação integral

$$\begin{cases} x(t) = \phi(\sigma) + \displaystyle\int_\sigma^t f(\sigma,x_s)ds, & t \geq \sigma \\ x_\sigma = \phi \end{cases}$$

2) Para todo par $(\sigma,\phi) \in \Lambda$, existe uma solução local de (1) com condição inicial ϕ em σ. Ver [2,3].

Se $\mathbb{C}_H = \{\phi \in \mathbb{C}: ||\phi|| < H, 0<H\leq\infty\}$ $\Lambda = [0,\infty) \times C_H$ e f leva conjuntos fechados e limitados de Λ em conjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ temos:

3) Se x(t), definida em $[\sigma-h, \sigma+\delta]$, $\delta \in (0,\infty)$, é solução de (1) e se $|x(t)| < H$ neste intervalo, então, x(t) pode ser estendida à direita de $\sigma + \delta$, como solução de (1), tomando para condição inicial em $\sigma + \delta$

$$\psi(\theta) = x(\sigma+\delta+\theta), \quad \theta \in [-h,0]. \qquad \text{Ver } [6].$$

4) Se x(t), definida em $[\sigma-h, \sigma+\delta)$, $\delta \in (0,\infty)$, é solução de (1) e se, neste intervalo, $|x(t)| \leq \bar{H} < H$, então, podemos estender x(t), como solução de (1), a $[\sigma-h, \sigma+\delta]$ e, por conseguinte, por (3), à direita de $\sigma + \delta$. Ver [6].

5) Seja x(t) solução de (1) tal que $|x(t)| \leq \bar{H} < H$, para $t \in [\sigma-h, t^+)$, onde $[\sigma-h, t^+)$ é o máximo intervalo aberto à direita ao qual podemos estender x(t) como solução de (1). Então $t^+ = \infty$, isto é, x(t) está definida e limitada no futuro. Ver [6].

I-2. Estabilidade.

Seja $x(\sigma,\phi)(t)$ uma solução de (1) definida no fu

turo.

Definição I-3.

A solução $x(\sigma,\phi)(t)$ de (1) é *estável no sentido de Liapunov* se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon,\sigma) > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{C}$, $||\xi-\phi|| < \delta$, temos que

$$||Z_t(\sigma,\xi) - x_t(\sigma,\phi)|| < \varepsilon ,$$

para todo $t \geq \sigma$ e toda solução $Z(\sigma,\xi)(t)$ de (1).

Definição I-4.

Se a solução $x(\sigma,\phi)(t)$ de (1) não for estável, diremos que ela é *instável*.

CAPÍTULO II

INVARIANCIA PARA SISTEMAS NÃO AUTÔNOMOS

Relacionaremos, nesse capítulo, alguns resultados básicos sobre a Teoria de Invariância para Sistemas não Autônomos de Equações Diferenciais Funcionais do Tipo Retardado, que foram estudados por Rodrigues, em [11]. Esses resultados constituem ferramenta fundamental para o capítulo III.

II-1. Fatos Básicos.

Seja $W \subset \mathbb{C}$ aberto e consideremos o espaço $\mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ das funções contínuas de $\mathbb{R} \times W$ em $\mathbb{R}^n$, munido da topologia da convergência uniforme nas partes compactas de $\mathbb{R} \times W$.

Seja $P \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Definimos $P_\tau \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ do seguinte modo:

$$P_\tau(t,\phi) = P(t+\tau,\phi), \qquad (t,\phi) \in \mathbb{R} \times W.$$

Seja $\mathbb{P} = \{P_\tau \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n) : \tau \in \mathbb{R}\}$.

Lema II-1.

Consideremos o seguinte conjunto de hipóteses:

(a) Para cada $\phi \in W$ fixado, $P(t,\phi)$ é limitada em t.

(b) P é uniformemente contínua em todo conjunto da forma $\mathbb{R} \times M$, $M \subset W$ compacto.

i) Para qualquer $(t_0,\phi_0) \in \mathbb{R} \times W$ fixado, o conjunto $\{P_\tau(t_0,\phi_0): \tau \in \mathbb{R}\}$ é relativamente compacto em $\mathbb{R}^n$.

ii) $\mathbb{P}$ é equicontínuo em $\mathbb{R} \times W$.

Então as condições (a) e (b) são equivalentes a (i) e (ii) respectivamente.

Prova:

1) (i) é equivalente a (a).

Para todo $(t_0,\phi_0) \in \mathbb{R} \times W$ temos:

$$\{P_\tau(t_0,\phi_0):\tau \in \mathbb{R}\} = \{P(\tau+t_0,\phi_0):\tau \in \mathbb{R}\} = \{P(t,\phi_0):t \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto $\{P_\tau(t_0,\phi_0):\tau \in \mathbb{R}\}$ é relativamente compacto no $\mathbb{R}^n$, se e só se; $\{P(t,\phi_0): t \in \mathbb{R}\}$ é limitado, ou seja, se e só se existe $L = L(\phi_0) > 0$ tal que $|P(t,\phi_0| \leq L$,

para todo $t \in \mathbb{R}$.

2) (ii) é equivalente a (b).

Suponhamos que $\mathbb{P}$ é equicontínuo em $\mathbb{R} \times W$. Então dado $\phi_0 \in W$, o conjunto $\mathbb{P}$ é equicontínuo em $(0,\phi_0)$. Logo dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon,\phi_0) > 0$ tal que, para qualquer $(t,\phi) \in \mathbb{R} \times W$ satisfazendo $|t| < \delta$, $||\phi-\phi_0|| < \delta$, temos:

$$|P_\tau(t,\phi) - P_\tau(0,\phi_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } \tau \in \mathbb{R}.$$

Logo: $|t| < \delta$ e $||\phi-\phi_0|| < \delta$ implicam que $|P(\tau+t,\phi) - P(\tau,\phi_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Em particular temos:

$$t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ |t_1-t_2| < \delta,\ \phi \in W,\ ||\phi-\phi_0|| < \delta$$

implicam que $|P(t_2,\phi) - P(t_1,\phi_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $M \subset W$, compacto. Obtemos, então, que para qualquer $\psi \in M$, existe $\delta = \delta(\varepsilon,\psi) > 0$ tal que

$$|P(t_2,\phi) - P(t_1,\psi)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } |t_1-t_2| < \delta \text{ e } ||\phi-\psi|| < \delta.$$

Para cada $\psi \in M$, seja $B(\psi,\frac{\delta(\varepsilon,\psi)}{2})$ a bola em W, com centro em ψ e raio $\frac{\delta(\varepsilon,\psi)}{2}$. Então $M \subset \bigcup_{\psi\in M} B(\psi, \frac{\delta(\varepsilon,\psi)}{2})$. Como M é compacto, existem $\psi_1, \ldots \psi_m \in M$ tal que $M \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(\psi_i, \frac{\delta(\varepsilon,\psi_i)}{2})$. Seja $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{\delta(\varepsilon,\psi_i),\ i=1,..,m\}$.

Consideremos $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ e $\phi,\psi \in M$ tal que $|t_1-t_2| < \delta_0$ e $||\phi-\psi|| < \delta_0$. Existe $j \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $\psi \in B(\psi_j, \frac{\delta(\varepsilon,\psi_j)}{2})$. Seja $\delta_j = \delta(\varepsilon,\psi_j)$. Temos então que

CAPÍTULO I

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO TIPO RETARDADO

I-1. Preliminares.

Sejam $[a,b]$ um intervalo da reta e $\mathbb{R}^n$ o espaço vetorial n-dimensional com uma norma qualquer $|.|$. Denotemos por $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ o espaço de Banach das funções contínuas, definidas em $[a,b]$ com valores em $\mathbb{R}^n$, munido da seguinte norma:

$$||\phi|| = \sup_{\theta\varepsilon[a,b]} |\phi(\theta)|.$$

Se $r \geq 0$ é um número real fixado, devido a frequência com que ocorre neste trabalho, o espaço $\mathbb{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ será designado por $\mathbb{C}$.

Se $x \varepsilon \mathbb{C}([a-r,b],\mathbb{R}^n)$ definimos, para cada $t \varepsilon [a,b]$, a função $x_t \varepsilon \mathbb{C}$ dada por

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \qquad \theta \varepsilon [-r,0].$$

(o gráfico de x_t é o transladado ao longo do eixo t sobre $[-r,0]$, do gráfico de x restrito ao intervalo $[t-r,t]$).

$||\psi-\psi_j|| < \frac{\delta_j}{2}$ e como $|t_1-t_2| < \delta_0 < \frac{\delta_j}{2}$ concluímos que

$$|P(t_1,\psi) - P(t_2,\psi_j)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Além disso,

$$||\phi-\psi_j|| \leq ||\phi-\psi|| + ||\psi-\psi_j|| < \delta_0 + \frac{\delta_j}{2} < \delta_j .$$

Logo,

$$|P(t_2,\phi) - P(t_2,\psi_j)| < \varepsilon/2$$

e,portanto,

$$|P(t_2,\phi)-P(t_1,\psi)| = |P(t_2,\phi)-P(t_2,\psi_j)+P(t_2,\psi_j)-P(t_1,\psi)|$$

$$\leq |P(t_2,\phi) - P(t_2,\psi_j)| + |P(t_2,\psi_j) - P(t_1,\psi)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Assim (b) está satisfeita.

Reciprocamente, suponhamos que P é uniformemente contínua em todo conjunto da forma $\mathbb{R} \times M$, $M \subset W$ compacto. Então dados $\varepsilon > 0$ e $M \subset W$ compacto, existe $\delta = \delta(\varepsilon,M) > 0$ tal que

$t_1,t_2 \in \mathbb{R}$, $|t_1-t_2| < \delta$, $\phi,\psi \in M$, $||\phi-\psi|| < \delta$ implicam que $|P(t_1,\phi) - P(t_2,\psi)| < \varepsilon$.

Queremos mostrar que dados $\varepsilon > 0$ e $(t_0,\phi_0) \in \mathbb{R} \times W$ existe $\delta = \delta(\varepsilon,t_0,\phi_0) > 0$ tal que para qualquer $(t,\phi) \in \mathbb{R} \times W$

satisfazendo $|t-t_0| < \delta$ e $||\phi-\phi_0|| < \delta$ temos:

$$|P(t+\tau,\phi) - P(t_0+\tau,\phi_0)| < \varepsilon \text{ para todo } \tau \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos que isso não seja verdade. Então existem $\varepsilon_0 > 0$ e $(t_0,\phi_0) \in \mathbb{R} \times W$ tal que para qualquer $\delta > 0$, existem $t = t(\delta)$, $\phi = \phi(\delta)$ e $\tau = \tau(\delta)$ satisfazendo:

$$|t-t_0| < \delta, \ ||\phi-\phi_0|| < \delta \text{ e } |P(t+\tau,\phi) - P(t_0+\tau,\phi_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Em particular existem t_n, ϕ_n e τ_n tal que $|t_n-t_0| < \frac{1}{n}$, $||\phi_n-\phi_0|| < \frac{1}{n}$ e

(2) $$|P(t_n+\tau_n,\phi_n) - P(t_0+\tau_n,\phi_0)| \geq \varepsilon_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que $\phi_n \to \phi_0$ quando $n \to \infty$.

Consideremos o compacto $K = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\phi_0\}$. Pela hipótese, existe $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\varepsilon_0,K) > 0$ de modo que se $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$, $|t_1-t_2| < \delta$ e $\phi,\psi \in K$, $||\phi-\psi|| < \bar{\delta}$ temos

(3) $$|P(t_1,\phi) - P(t_2,\psi)| < \varepsilon_0.$$

Escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \bar{\delta}$, temos:

$$|t_{n_0}-t_0| < \frac{1}{n_0}, \quad ||\phi_{n_0}-\phi_0|| < \frac{1}{n_0}$$

e $$|P(t_{n_0}+\tau_{n_0},\phi_{n_0}) - P(t_0+\tau_{n_0},\phi_0)| \geq \varepsilon_0$$

Mas

$$|(t_{n_0}+\tau_{n_0}) - (t_0+\tau_{n_0})| = |t_{n_0}-t_0| < \frac{1}{n_0} < \bar{\delta}$$

e $$||\phi_{n_0}-\phi_0|| < \frac{1}{n_0} < \bar{\delta}.$$

Logo, por (3),

$$|P(t_{n_0}+\tau_{n_0},\phi_{n_0}) - P(t_0+\tau_{n_0},\phi_0)| < \varepsilon_0,$$

contrariando (2).

Assim vale (ii).

Lema II-2. (Teorema de Áscoli)

Seja Z um espaço métrico, Y um espaço de Hausdorff separável e consideremos $\mathbb{C}(Y,Z)$ munido da topologia da convergencia uniforme nas partes compactas de Y. Então $F \subset \mathbb{C}(Y,Z)$ é relativamente compacto em $\mathbb{C}(Y,Z)$ se e só se:

i) F é equicontínuo em Y.

ii) $F(x_0) = \{f(x_0): f \in F\}$ é relativamente compacto em Z, para qualquer $x_0 \in Y$.

Prova:

Veja [12].

Corolário II-1.

Seja $P \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$. P tem as propriedades (a) e (b) se, e somente se, o conjunto $\mathbb{P}$ é relativamente compacto em $\mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$.

Prova:

Segue dos lemas II-1 e II-2.

Corolário II-2.

Seja $P \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ com as hipóteses (a) e (b). Então, dada uma sequência (τ_m), $\tau_m \in \mathbb{R}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, existe subsequência (τ_{m_j}) e $P^* \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ tal que $P_{\tau_{m_j}} \to P^*$ quando $j \to \infty$, em $\mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$. Além disso disso P^* satisfaz as condições (a) e (b).

Prova:

Suponhamos $P \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo as hipóteses (a) e (b).

Pelo corolário II-1, concluímos que $\mathbb{P}$ é um conjunto relativamente compacto em $\mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$. Logo, toda sequência (P_{τ_m}), $P_{\tau_m} \in \mathbb{P}$ para todo m, possui uma subsequência convergente em $\mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$.

Assim, dada uma sequência (τ_m), $\tau_m \in \mathbb{R}$ para todo m, existe uma subsequência (τ_{m_j}) e $P^* \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ tal que $P_{\tau_{m_j}} \to P^*$ quando $j \to \infty$, em $\mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$.

Mostremos, agora, que P^* satisfaz as condições (a) e (b).

Como P satisfaz a condição (a), existe $L = L(\phi) \geq 0$ tal que:

$$|P(t,\phi)| \leq L, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$. Então, $P(t_0+\tau_{m_j},\phi) \to P^*(t_0,\phi)$ quando $j \to \infty$. Mas $|P(t_0+\tau_{m_j},\phi)| \leq L$, para todo j.

Logo $|P^*(t_0,\phi)| \leq L$.

Portanto P^* satisfaz a condição (a).

Como P satisfaz a condição (b), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon,M) > 0$ tal que se $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $|t_1-t_2| < \delta$, $\phi,\psi \in M$ e $||\phi-\psi|| < \delta$ então $|P(t_1,\phi) - P(t_2,\psi)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para qualquer $M \subset W$, M compacto.

Como $P_{\tau_m} \to P^*$ quando $m \to \infty$, dados t_1, t_2, ϕ e ψ nas condições acima, existe $n_0 = n_0(\varepsilon,M,t_1,t_2)$ tal que:

$$|P(t_1+\tau_{n_0},\phi) - P^*(t_1,\phi)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{e}$$

$$|P(t_2+\tau_{n_0},\psi) - P^*(t_2,\psi)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Logo:

$$|P^*(t_1,\phi) - P^*(t_2,\psi)| \leq$$

$$|P^*(t_1,\phi) - P(t_1+\tau_{n_0},\phi)| +$$

$$+ |P(t_1+\tau_{n_0},\phi) - P(t_2+\tau_{n_0},\psi)| +$$

$$+ |P(t_2+\tau_{n_0},\psi) - P^*(t_2,\psi)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto P^* satisfaz a condição (b).

Sejam $P \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{P}$ a aderência de $\mathbb{P}$ em $\mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$.

Definição II-1.

O conjunto $\Omega(P) = \{P^* \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ tal que existe sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, com $P_{t_m} \to P^*$ quando $m \to \infty\}$ é chamado conjunto *w-limite de P*.

Observações:

(1) Se P satisfaz (a) e (b), então a aplicação $j: \mathbb{R} \to \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ definida por $j(\tau) = P_\tau$ é contínua.

Prova:

Fixemos $P \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ e consideremos $\tau \in \mathbb{R}$. Seja

$$V = V(P_\tau, K, \varepsilon) = \{Q \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n) \text{ tal que}$$

$$\max_{(t,\phi)\in K} |P_\tau(t,\phi) - Q(t,\phi)| < \varepsilon\}$$

onde $\varepsilon > 0$, $K = [-\ell,\ell] \times M$, $\ell > 0$ e $M \subset W$ é compacto.

Vamos mostrar que existe $\delta = \delta(K,\varepsilon) > 0$, tal que se $|\tau-\sigma| < \delta$ então $P_\sigma \in V$.

Como $P(t,\phi)$ satisfaz (b), existe $\delta = \delta(\varepsilon,M) > 0$ tal que se $\sigma,\tau \in \mathbb{R}$, $|\tau-\sigma| < \delta$, $\phi,\psi \in M$ e $||\phi-\psi|| < \delta$, então

$$|P(\tau,\phi) - P(\sigma,\psi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular $|\sigma-\tau| < \delta$ implica que

$$|P(t+\tau,\phi) - P(t+\sigma,\phi)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $\phi \in M$.

Como $K \subset \mathbb{R} \times M$, se $|\tau-\sigma| < \delta$, então

$$\max_{(t,\phi)\in K} |P_\tau(t,\phi) - P_\sigma(t,\phi)| \leq \sup_{(t,\phi)\in \mathbb{R}\times M} |P_\tau(t,\phi)-P_\sigma(t,\phi)| < \varepsilon,$$

ou seja $P_\sigma \in V$.

(2) Se $P \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ satisfaz (a) e (b), então $\hat{\Omega}(P) \neq \phi$.

Prova:

Basta escolhermos, no corolário II-2, a sequência (τ_m), $\tau_m \in \mathbb{R}$ para todo m, de modo que $\tau_m \to \infty$ quando $m \to \infty$.

(3) $\hat{\Omega}(P) \subset \overline{\mathbb{P}}$.

(4) Se $P(t,\phi) = P(\phi)$, então $\hat{\Omega}(P) = \{P\}$.

(5) Se $P(t,\phi) = P(t+w,\phi)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $\phi \in W$, onde $w > 0$, então $\mathbb{P} = \{P_\tau \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n) : \tau\in[0,w]\}$ e $\overline{\mathbb{P}} = \hat{\Omega}(P) = \mathbb{P}$.

Prova:

Mostremos inicialmente que $\mathbb{P} = \overline{\mathbb{P}}$.

Seja $Q \in \overline{\mathbb{P}}$. Então, existe sequência (t_m) tal que $P_{t_m} \to Q$ quando $m \to \infty$.

Como a aplicação $j: \mathbb{R} \to \mathbb{C}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ é periódica de período w e $t_m \in \mathbb{R}$ para todo m, então $t_m = i_m w + \tau_m$, $\tau_m \in [0,w]$ e i_m inteiro.

Logo, $P_{t_m} = P_{i_m w + \tau_m} = P_{\tau_m}$, $\tau_m \in [0,w]$ e, portanto, existe subsequência (τ_{m_j}), com $\tau_{m_j} \to \tau \in [0,w]$, quando $j \to \infty$.

A observação (1) acima, implica que $P_{\tau m_j} \to P_\tau$ quando $j \to \infty$.

Assim $P_\tau = Q$, ou seja $Q \in \mathbb{P}$.

Consequentemente $\overline{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$.

A outra inclusão é imediata.

Para provar que $\hat{\Omega}(P) = \overline{\mathbb{P}}$, basta mostrar que $\overline{\mathbb{P}} \subset \hat{\Omega}(P)$, pois da observação (3) temos que $\hat{\Omega}(P) \subset \overline{\mathbb{P}}$.

Seja $Q \in \overline{\mathbb{P}}$. Então, existe $Q_n \in \mathbb{P}$ tal que $Q_n \to Q$ quando $n \to \infty$.

Como $\mathbb{P} = \overline{\mathbb{P}}$, temos que $Q = P_\tau$, $Q_n = P_{\tau_n}$, com $\tau, \tau_n \in [0,w]$, para todo n.

Tomemos $\sigma_n = \tau_n + nw$. Então $\sigma_n \to \infty$, quando $n \to \infty$ e $P_{\sigma_n} = P_{\tau_{n+nw}} = P_{\tau_n}$.

Assim $P_{\sigma_n} \to P_\tau = Q$, quando $n \to \infty$, isto é $Q \in \hat{\Omega}(P)$.

Seja $h \geq 0$ e $x: [\sigma-h,\infty) \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Como no capítulo I, denotemos por x_t, $t \in [\sigma,\infty)$ a função

$$x_t: [-h,0] \to \mathbb{R}^n$$

dada por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$.

Definição II-2.

Chamamos de conjunto w-limite de x_t ao conjunto

$\Omega = \{\phi \in \mathbb{C}$ tal que existe sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, com $x_{t_m} \to \phi$ quando $m \to \infty$, em $\mathbb{C}\}$.

Definição II-3.

Chamamos de *conjunto w-limite de x(t)* ao conjunto

$\Omega(x(t)) = \{p \in \mathbb{R}^n$ tal que existe sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$ com $x(t_m) \to p$ quando $m \to \infty\}$.

Observação:

Se $x(t) \in K$, para todo $t \in [\tau,\infty)$, onde $\tau \geq \sigma-h$ e K é um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$, então $\Omega(x(t))$ é não vazio e $\Omega(x(t)) \subset K$.

Prova:

Seja $(t_m) \subset [\tau,\infty)$ tal que $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$.

Para todo m, $x(t_m) \in K$.

Como K é compacto, existe subsequência (t_{m_j}) de

(t_m) tal que $x(t_{m_j}) \to x_0 \in K$, quando $j \to \infty$.

Logo $x_0 \in \Omega(x(t))$ e, portanto, $\Omega(x(t)) \neq \phi$.

Desde que K é fechado em $\mathbb{R}^n$, segue que $\Omega(x(t)) \subset K$.

II-2. Conjuntos Semi-invariantes.

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e consideremos as seguintes hipóteses:

(H_1) Seja $P: \mathbb{R} \times \mathbb{C}([-h,0],D) \to \mathbb{R}^n$ tal que:

(a) Para cada $\phi \in \mathbb{C}([-h,0],D)$ fixado, $P(t,\phi)$ é limitada em t.

(b) P é uniformemente contínua em conjuntos da forma $\mathbb{R} \times M$, onde $M \subset \mathbb{C}([-h,0],D)$ é compacto.

(H_2) P é limitada em conjuntos da forma $\mathbb{R} \times \mathbb{C}([-h,0],K)$, onde $K \subset D$ é compacto.

(H_3) Seja $Q: [0,\infty) \times \mathbb{C}([-h,0],D) \to \mathbb{R}^n$ tal que para toda função contínua $x: [0,\infty) \to D$, com $x(t) \in K$, para todo $t \geq 0$, $K \subset D$ compacto, temos:

$$\int_s^{s+t} Q(\tau,x_\tau)d\tau \to 0$$

quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [0,1]$.

(H_4) Seja $S: [0,\infty) \times \mathbb{C}([-h,0],D) \to \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{C}([-h,0], D)$ tal que a todo subconjunto compacto K de D e a todo $\varepsilon > 0$, correspondem $\delta = \delta(\varepsilon,K) > 0$ e $T_0 = T_0(\varepsilon,K) > 0$ de modo que se $t \geq T_0, \phi \in \mathbb{C}([-h,0],K)$ e $d(\phi,A) < \delta$, então

$$|S(t,\phi)| < \varepsilon$$

Observação:

Se (H_3) é satisfeita então, para qualquer $\ell > 0$, temos:

$$\int_s^{s+t} Q(\tau,x_\tau)d\tau \to 0$$

quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [-\ell,\ell]$.

Prova:

Vamos mostrar, inicialmente, que (H_3) está verificada para $t \in [0,p]$, $p > 0$.

Seja $m \geq p$, um inteiro fixado.

Se $t \in [0,p]$, então $\frac{t}{m} \in [0,1]$.

Temos que:

$$\int_s^{s+t} Q(\tau,x_\tau)d\tau = \int_s^{s+\frac{t}{m}} Q(\tau,x_\tau)d\tau + \int_{s+\frac{t}{m}}^{(s+\frac{t}{m})+\frac{t}{m}} Q(\tau,x_\tau)d\tau +$$

$$+ \dots + \int_{s+(m-1)\frac{t}{m}}^{[s+(m-1)\frac{t}{m}]+\frac{t}{m}} Q(\tau,x_\tau)d\tau.$$

Cada parcela do 2º membro é tal que

$$\int_{s+\frac{kt}{m}}^{s+\frac{kt}{m}+\frac{t}{m}} Q(\tau,x_\tau)d\tau \to 0$$

quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [0,p]$, pois $s \to \infty$ implica que $s + \frac{kt}{m} \to \infty$.

Logo, $\int_s^{s+t} Q(\tau,x_\tau)d\tau \to 0$ quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [0,p]$, para qualquer $p > 0$.

Resta mostrar que $\int_s^{s+t} Q(\tau,x_\tau)d\tau \to 0$ quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [-p,0]$, para qualquer $p > 0$.

Se $t \in [-p,0]$ então $-t \in [0,p]$,

$$\int_s^{s+t} Q(\tau,x_\tau)d\tau = -\int_{s+t}^{s} Q(\tau,x_\tau)d\tau = -\int_{s+t}^{(s+t)-t} Q(\tau,x_\tau)d\tau$$

e recaímos no caso anterior.

Seja, então, $P \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{C}([-h,0],D),\mathbb{R}^n) = \mathbb{C}_1$ e $\mathbb{P} = \{P_\tau : \tau \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}_1$.

Consideremos em $\mathbb{C}_1$ a topologia da convergência uniforme nas partes compactas de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}([-h,0],D)$. Seja $\overline{\mathbb{P}}$ a aderência de $\mathbb{P}$ em $\mathbb{C}_1$.

Sejam os sistemas de equações diferenciais do tipo retardado:

(4) $\dot{y} = P(t,y_t)$

(5) $\dot{x} = P(t,x_t) + S(t,x_t) + Q(t,x_t)$

Teorema II-1.

Suponhamos satisfeitas as hipóteses (H_1), (H_2), (H_3) e (H_4). Seja $x(t)$ uma solução de (5) tal que $x(t) \in K$ para $t \in [T,\infty)$, onde $K \subset D$ é compacto, e suponhamos que $x_t \to A$ quando $t \to \infty$. Então, para cada $z \in \Omega(x(t))$, corresponde uma sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, uma função $y(t)$ definida em $\mathbb{R}$ e $P^* \in \hat{\Omega}(P)$, de modo que:

(i) $y(0) = z$ e $\dot{y}(t) = P^*(t,y_t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $x(t+t_m) \to y(t)$ quando $t \to \infty$, uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

(iii) $P_{t_m} \to P^*$, quando $m \to \infty$, em $\mathbb{C}_1$.

Prova:

Sem perda de generalidade, podemos supor que $x(t) \in K$ para todo $t \in [0,\infty)$.

Seja $z \in \Omega(x(t))$ e (ε_m) sequência decrescente de números reais positivos, com $\varepsilon_m \to 0$ quando $m \to \infty$.

Como $z \in \Omega(x(t))$, existe sequência (t_m), $t_m \to \infty$

quando $m \to \infty$, de modo que $x(t_m) \to z$ quando $m \to \infty$.

Seja $\ell > 0$ um número fixado. Podemos supor $t_1 > 2h + \ell$.

Afirmação 1: Podemos assumir que a sequência (t_m) satisfaz $|S(t,x_t)| < \varepsilon_m$ para $t \geq t_m - \ell - h$.

De fato, dado $\varepsilon_k > 0$, a hipótese (H_4) garante que existem $\delta_k = \delta(\varepsilon_k,K) > 0$ e $T_k = T(\varepsilon_k,K)$, de modo que se $t \geq T_k$, $\phi \in \mathbb{C}([-h,0],K)$ e $d(\phi,A) < \delta_k$, então

$$|S(t,\phi)| < \varepsilon_k.$$

Como $x_t \to A$ quando $t \to \infty$, existe $T_0^k \geq T_k$ tal que $t \geq T_0^k$ implica que $d(x_t,A) < \delta_k$.

Seja t_{m_k} satisfazendo $t_{m_k} - \ell - h \geq T_0^k$. Então, $t \geq t_{m_k} - \ell - h \geq T_0^k$ implica que $d(x_t,A) < \delta_k$ e, portanto, $|S(t,\phi)| < \varepsilon_k$.

Suponhamos, então, que $|S(t,x_t)| < \varepsilon_m$ para $t \geq t_m - \ell - h$ e que (t_m) seja uma sequência crescente.

Pela hipótese (H_2), podemos supor, ainda, que existe $L > 0$ tal que:

$$\sup\{|P(t,\phi)|: t \in \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{C}([-h,0],K)\} = L < \infty.$$

Para $t \in [-h-\ell,\ell]$ e $m \in \mathbb{N}$ temos:

$$x(t+t_m) = x(t_m) + \int_{t_m}^{t+t_m} [P(s,x_s) + S(s,x_s) + Q(s,x_s)]ds$$

A última expressão faz sentido pois se $t \in [-h-\ell,\ell]$ temos:

$$t+t_m \geq -h-\ell+t_m > -h-\ell+t_1 > -h-\ell+2h+\ell = h > 0$$

e $\quad t_m > t_1 > 2h+\ell > 2h > h > 0.$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos $x_m: [-h-\ell,\ell] \to \mathbb{R}^n$ pela expressão

$$x_m(t) = x(t+t_m).$$

Logo para $t \in [-h-\ell,\ell]$ e $m \in \mathbb{N}$, temos:

$$(6) \quad x_m(t) = x(t_m)+\int_{t_m}^{t+t_m} P(s,x_s)ds+\int_{t_m}^{t+t_m} S(s,x_s)ds+\int_{t_m}^{t+t_m} Q(s,x_s)ds.$$

Fazendo $s = \tau + t_m$ na primeira integral, temos que para $s = t_m$, $\tau = 0$ e para $s = t + t_m$, $\tau = t$.

Além disso se $\mu \in [-h,0]$, temos:

$$x_s(\mu) = x_{\tau+t_m}(\mu) = x_{t_m}(\tau+\mu) = x_m(\tau+\mu) = (x_m)_\tau(\mu).$$

Logo para $t \in [-h-\ell,\ell]$ e $m \in \mathbb{N}$, temos:

$$(7) \qquad x_m(t) = x(t_m) + \int_0^t P(s+t_m,(x_m)_s)ds + \int_{t_m}^{t+t_m} S(s,x_s)ds + \int_{t_m}^{t+t_m} Q(s,x_s)ds.$$

Pela hipótese (H_3), podemos supor que a sequência (t_m) satisfaz:

$$(8) \qquad \left|\int_{t_m}^{t_m+\tau} Q(s,x_s)ds\right| < \varepsilon_m, \text{ para } \tau \in [-h-\ell,\ell]$$

Consideremos, agora, o espaço de Banach $\mathbb{C}([-h-\ell,\ell], \mathbb{R}^n)$ munido da topologia da convergência uniforme e o conjunto $F = \{x_m \in \mathbb{C}([-h-\ell,\ell], \mathbb{R}^n) : m \in \mathbb{N}\}$ onde $x_m(t) = x(t+t_m)$ para $t \in [-h-\ell,\ell]$.

Como $x_m(t) \in K$ para todo $t \in [-h-\ell,\ell]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$, a compacidade de K implica que F é uniformemente limitado.

Afirmação 2: F é equicontínuo em $[-h-\ell,\ell]$.

De fato, sejam $s_1, s_2 \in [-h-\ell,\ell]$, com $s_1 \leq s_2$.

A fórmula (6) implica que:

$$|x_m(s_2)-x_m(s_1)| \leq \left|\int_{s_1}^{s_2} P(s+t_m,(x_m)_s)ds\right| + \left|\int_{t_m}^{s_2+t_m} S(s,x_s)ds\right| +$$

$$+ \left|\int_{t_m}^{s_1+t_m} S(s,x_s)ds\right| + \left|\int_{t_m}^{s_2+t_m} Q(s,x_s)ds\right| + \left|\int_{t_m}^{s_1+t_m} Q(s,x_s)ds\right|.$$

Como $(x_m)_s \in \mathbb{C}([-h-0],K)$ para todo $s \in [s_1,s_2]$, a hipótese (H_2) implica que existe $L > 0$ tal que

$$\left|\int_{s_1}^{s_2} P(s+t_m,(x_m)_s)ds\right| < L|s_2-s_1|.$$

Por outro lado, se $s_j \geq 0$, então $s_j + t_m \geq t_m$ e, portanto, $s \geq t_m \geq t_m -h-\ell$ para todo $s \in [t_m, s_j + t_m]$. Se $s_j < 0$, então $s_j + t_m < t_m$ e, portanto, $s \geq s_j+t_m \geq -\ell-h+t_m$ para todo $s \in [s_j + t_m, t_m]$. Logo, para $j = 1,2$, temos que:

$$\left|\int_{t_m}^{s_j+t_m} S(s,x_s)ds\right| < \left|\int_{t_m}^{s_j+t_m} |S(s,x_s)|ds\right| \leq \varepsilon_m|s_j| \leq \varepsilon_m(h+\ell).$$

De (8), segue que:

$$\left|\int_{t_m}^{t_m+s_j} Q(s,x_s)ds\right| < \varepsilon_m, \quad \text{para} \quad j = 1,2.$$

Assim, para $s_1,s_2 \in [-h-\ell,\ell]$, temos:

$$|x_m(s_2) - x_m(s_1)| < L|s_2-s_1| + 2(h+\ell)\varepsilon_m + 2\varepsilon_m =$$

$$= L|s_2-s_1| + 2\varepsilon_m(h+\ell+1).$$

Como $\varepsilon_m \to 0$ quando $m \to \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ implica que $2\varepsilon_m(h+\ell+1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $\delta' = \frac{\varepsilon}{2L}$. Então, se $m \geq n_0$, $s_1, s_2 \in [-h-\ell,\ell]$ e $|s_1-s_2| < \delta'$, temos que

$$|x_m(s_2) - x_m(s_1)| < \varepsilon.$$

Como o conjunto $\{x_1,\ldots,x_{n_0-1}\}$ é equicontínuo em $[-h-\ell,\ell]$, existe $\bar{\delta}$ tal que se $|s_2-s_1| < \bar{\delta}$, então

$$|x_m(s_2) - x_m(s_1)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad m \in \{1,2,\ldots,n_0-1\}.$$

Tomando $\delta = \min\{\bar{\delta},\delta'\}$, temos que se $|s_2-s_1| < \varepsilon$ então

$|x_m(s_2) - x_m(s_1)| < \varepsilon$, para todo $m \in \mathbb{N}$, ou seja, F é equicontínuo.

O lema II-2 garante, então, que o conjunto F é relativamente compacto em $\mathbb{C}([-h-\ell,\ell],\mathbb{R}^n)$. Logo, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que (x_m) é uma sequência convergente em $\mathbb{C}([-h-\ell,\ell], \mathbb{R}^n)$, ou seja, existe $y \in \mathbb{C}([-h-\ell,\ell], \mathbb{R}^n)$ tal que $x_m(t) = x(t+t_m) \to y(t)$ quando $m \to \infty$, uniformemente em $t \in [-h-\ell,\ell]$. Por conseguinte, $(x_m)_t \to y_t$ quando $m \to \infty$, em $\mathbb{C}$, uniformemente em

$t \in [-\ell,\ell]$, pois:

$$||(x_m)_t - y_t|| = \sup_{\theta\in[-h,0]} |(x_m)_t(\theta) - y_t(\theta)| =$$

$$= \sup_{\theta\in[-h,0]} |x(t+t_m+\theta) - y(t+\theta)| \leq \sup_{s\in[-h-\ell,\ell]} |x(t_m+s) - y(s)|.$$

Consideremos, agora, o conjunto

$$V = \{(x_m)_t : t \in [-\ell,\ell],\ m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}.$$

O lema II-2 implica que V é relativamente compacto. De fato, a limitação uniforme de V segue do fato que, $x(t) \in K$ para todo $t \in [0,\infty)$. Provemos a equicontinuidade de V.

Sejam $\theta_1,\theta_2 \in [-h,0]$ e $t \in [-\ell,\ell]$. Temos que:

$$|(x_m)_t(\theta_2) - (x_m)_t(\theta_1)| = |x_m(t+\theta_2) - x_m(t+\theta_1)| \leq$$

$$\leq M|\theta_2-\theta_1| + 2(h+\ell+1)\varepsilon_m .$$

Usando o mesmo tipo de argumento aplicado anteriormente temos a equicontinuidade de V.

Notemos, ainda, que $y_t \in \bar{V} \subset \mathbb{C}([-h,0],K)$.

Como P satisfaz a hipótese (H_1), segue do corolário II-2 que existe uma subsequência de (t_m), que denotaremos do mesmo modo, tal que

$$P_{t_m} \to P^*, \text{ quando } m \to \infty, \text{ em } \mathbb{C}_1, \text{ onde } P^* \in \hat{\Omega}(P) \subset \bar{\mathbb{P}}.$$

Para $t \in [-\ell,\ell]$ temos:

$$\left|\int_0^t |P(s+t_m,(x_m)_s) - P^*(s,y_s)|ds\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^t |P(s+t_m,(x_m)_s)-P^*(s,(x_m)_s)|ds\right| + \left|\int_0^t |P^*(s,(x_m)_s)-P^*(s,y_s)|ds\right|$$

Como $P(s+t_m,\phi) \to P^*(s,\phi)$ quando $m \to \infty$, uniformemente em $[-\ell,\ell] \times \bar{V}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon,\ell,\bar{V})$ tal que $m \geq n_0$ implica que

$$|P(s+t_m,\phi) - P^*(s,\phi)| < \varepsilon,$$

para todo $s \in [-\ell,\ell]$ e todo $\phi \in \bar{V}$.

Em particular, temos que $m \geq n_0$ implica que

$$|P(s+t_m,(x_m)_s) - P^*(s,(x_m)_s)| < \varepsilon$$

para todo $s \in [-\ell,\ell]$.

Assim, se $m \geq n_0$, temos que:

$$\left| \int_0^t |P(s+t_m,(x_m)_s) - P^*(s,(x_m)_s)|ds \right| < \varepsilon \ell$$

para todo $s \in [-\ell,\ell]$.

Como P^* é uniformemente contínua em $[-\ell,\ell] \times \bar{V}$, existe $\bar{n} \geq n_0$ tal que se $m \geq \bar{n}$, então

$$\left| \int_0^t |P^*(s,(x_m)_s) - P^*(s,y_s)|ds \right| < \varepsilon \ell,$$

para todo $t \in [-\ell,\ell]$.

Portanto,

$$\int_0^t \left| P(s+t_m,(x_m)_s) - P^*(s,y_s) \right| ds \to 0$$

quando $m \to \infty$, uniformemente para $t \in [-\ell,\ell]$.

Passando ao limite quando $m \to \infty$ na equação (7), temos:

$$y(t) = z + \int_0^t P^*(s,y_s)ds,$$

para todo $t \in [-\ell,\ell]$.

Tomando $\ell = 1,2,3,\ldots$ e procedendo por indução construimos sequências $(t_{p,m})$, $p \in \mathbb{N}$, com $(t_{p+1,m})$ sendo subsequência de $(t_{p,m})$.

Chamando de $t_m = t_{m,m}$ temos:

(iii) $P_{t_m} \to P^*$ quando $m \to \infty$, em $\mathbb{C}_1$.

(ii) $x(t+t_m) \to y(t)$ quando $m \to \infty$, uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}$.

(i) $y(t) = \int_0^t P^*(s,y_s)ds + z$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, donde, $\dot{y} = P^*(t,y_t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e $y(0) = z$.

A prova está completa.

Teorema II-2:

Suponhamos satisfeitas as hipóteses (H_1), (H_2), (H_3), e (H_4). Seja $x(t)$ uma solução de (5) tal que $x(t) \in K$ para todo $t \in [T,\infty)$, onde $K \subset D$ é compacto, e suponhamos $x_t \to A$ quando $t \to \infty$. Então, o conjunto w-limite Ω de x_t é não vazio, e para cada $\psi \in \Omega$, existem sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, $P^* \in \hat{\Omega}(P)$ e uma função $y(t)$ de modo que:

(a) $\dot{y}(t) = P^*(t,y_t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $y_0 = \psi$

(b) $x_{t+t_m} \to y_t$, quando $m \to \infty$, uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}$ e $y_t \in \Omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) $P_{t_m} \to P^*$ quando $m \to \infty$, em $\mathbb{C}_1$.

(d) $x_t \to \Omega$, quando $t \to \infty$.

Prova:

Como $\Omega(x(t)) \neq \phi$, existe $z \in \Omega(x(t))$. Então, o teorema II-1, implica que existe uma sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$ e uma função $y(t)$ definida em $\mathbb{R}$, com $x_{t+t_m} \to y_t$, quando $m \to \infty$, uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}$. Além disso, $y_t \in \Omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e portanto $\Omega \neq \phi$.

Seja $\psi \in \Omega$. Então, existe sequência (t'_m), $t'_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, com $x_{t'_m} \to \psi$ quando $m \to \infty$, em $\mathbb{C}$. Logo $x_{t'_m}(0) \to \psi(0)$ quando $m \to \infty$, ou seja, $x(t'_m) \to \psi(0)$ quando $m \to \infty$.

Portanto, $\psi(0) \in \Omega(x(t))$ e pelo teorema II-1, existem sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, uma função $y(t)$ definida em $\mathbb{R}$, e $P^* \in \hat{\Omega}(P)$ de modo que:

(i) $y(0) = \psi(0)$ e $\dot{y}(t) = P^*(t, y_t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $x(t+t_m) \to y(t)$, quando $m \to \infty$, uniformemente em compactos de $\mathbb{R}$.

(iii) $P_{t_m} \to P^*$, quando $m \to \infty$, em $\mathbb{C}_1$.

Logo, valem (a), (b) e (c).

Finalmente, suponhamos que (d) não esteja satisfeita. Então, podemos encontrar uma sequência (s_m), $s_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, e uma constante $\sigma > 0$ tal que $d(x_{s_m}, \Omega) \geq \sigma$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Como $x(t) \in K$, para todo $t \in [T,\infty)$, podemos assumir que $x(s_m) \to \alpha \in \Omega(x(t))$, quando $m \to \infty$.

Da prova do teorema II-1, segue que existe uma subsequência (s_{m_k}) de (s_m), tal que $x_{s_{m_k}} \to \phi \in \mathbb{C}$, quando $k \to \infty$, que é uma contradição.

O teorema está provado.

A definição abaixo é motivada pelo teorema II-2.

Definição II-4:

$M \subset \mathbb{C}$ é dito *semi-invariante relativamente a(4)*, se a qualquer $\psi \in M$ corresponde $P^* \in \hat{\Omega}(P)$ e uma solução $y(t)$ de $\dot{y} = P^*(t,y_t)$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que $y_t \in M$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $y_0 = \psi$.

Corolário II-3:

Dentro das hipóteses do teorema II-2, o conjunto w-limite Ω de x_t é não vazio, semi-invariante relativamente a (4) e $x_t \to \Omega$ quando $t \to \infty$.

Corolário II-4:

Consideremos o sistema (5) com $S \equiv 0$. Suponhamos que as hipóteses (H_1), (H_2) e (H_3) estejam satisfeitas, e que $x(t)$ é uma solução de (5) tal que $x(t) \in K$, para todo $t \in [T,\infty)$, onde $K \subset D$ é compacto. Então o conjunto w-limite Ω de x_t é não vazio, compacto, conexo, semi-invariante relativamente a(4) e $x_t \to \Omega$ quando $t \to \infty$.

Prova:

Tomemos $A = \mathbb{C}$ em (H_4).

O corolário II-3, implica que Ω é não vazio, semi-invariante relativamente a(4) e $x_t \to \Omega$ quando $t \to \infty$.

Para provar a compacidade e a conexidade de Ω ver, por exemplo, [4,6].

Observações:

(1) Quando for exigido alguma condição de unicidade em relação ao problema de valor inicial para (4) diz-se, na definição II-4, que M é invariante em relação a (4).

(2) No caso em que P é periódica em t, de período $w > 0$, a definição II-4 pode ser formulada do seguinte modo:

Dizemos que $M \subset \mathbb{C}$ é *semi-invariante em relação a (4)* se, a cada $\psi \in M$, correspondem $\tau \in [0,w]$ e uma função $y(t)$ definida em $\mathbb{R}$, tal que $\dot{y}(t) = P_\tau(t,y_t)$, $y_0 = \psi$ e $y_t \in M$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(3) No caso autônomo, dizemos que $M \subset \mathbb{C}$ é *semi-invariante em relação a (4)* se a cada $\psi \in M$ corresponde uma solução $y(t)$ de (4), definida em $\mathbb{R}$, com $y_0 = \psi$ e $y_t \in M$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(4) Uma particularidade importante do corolário II-4, é que se o sistema (4) for autônomo, se $x(t)$ for solução de (4) e existir um compacto $K \subset D$ de modo que $x(t) \in K$ para $t \in [T,\infty)$, então o conjunto w-limite Ω de x_t é semi-invariante em relação a (4).

(5) Já que a hipótese (H_3) impõe condições de "pequenez" à função Q, o corolário II-4 nos diz simplesmente que se Q for uma perturbação "pequena" de (4), e $x(t)$ é solução de (5) tal que $x(t) \in K$ para todo $t \in [T,\infty)$, onde $K \subset D$ é compacto, então o conjunto w-limite Ω de x_t é semi-invariante em relação a (4).

CAPÍTULO III

SEMI-INVARIÂNCIA E INSTABILIDADE

III-1 Introdução:

O ponto de partida nesse capítulo, é um artigo de Onuchic ([8]), onde é estabelecido um Critério de Instabilidade para Sistemas Autônomos de Equações Diferenciais Funcionais do Tipo Retardado.

Pavlu, em [10], conseguiu estabelecer um Critério de Instabilidade para Equações Diferenciais Ordinárias semelhante ao obtido por Onuchic, utilizando um conjunto de hipóteses mais fraco.

Na verdade, no trabalho de Pavlu, nenhuma condição de unicidade de soluções foi exigida.

Em seguida, Pavlu conseguiu estender esse Critério para uma classe bastante ampla de Equações Diferenciais Ordinárias não Autônomas (veja [9, 10]).

O nosso objetivo é obter uma generalização desse Critério para Sistemas não Autônomos de Equações Diferenciais Funcionais do Tipo Retardado.

III-2 Um Critério de Instabilidade para Sistemas Autônomos

O resultado abaixo será utilizado com muita fre

quência:

Lema III-1

Seja $\xi:[a,b) \to \mathbb{R}$, $b \leq \infty$ uma função contínua. Se $\dot{\xi}(t) = \overline{\lim_{r\to 0^+}} \frac{\xi(t+r)-\xi(t)}{r} \leq 0$ em $[a,b)$, então $\xi(t)$ é não crescente em $[a,b)$. Analogamente, se $\dot{\xi}(t) \geq 0$ em $[a,b)$, então $\xi(t)$ é não decrescente em $[a,b)$.

Prova:

Consideremos o caso $\dot{\xi}(t) \leq 0$. O caso $\dot{\xi}(t) \geq 0$ é similar.

Sejam $t_1, t_2 \in [a,b)$, $t_1 \leq t_2$, e mostremos que $\xi(t_2) \leq \xi(t_1)$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, vamos mostrar que

$$\xi(t_2) - \xi(t_1) \leq \varepsilon(t_2-t_1).$$

Suponhamos que isto não seja verdadeiro, ou seja, admitamos que exista $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\Phi(t_2) > 0$, onde $\Phi(t) = \xi(t) - \xi(t_1) - \varepsilon_0(t-t_1)$.

Como $\dot{\xi}(t) \leq 0$ em $[a,b)$, existem pontos $t \in (t_1,t_2)$ de modo que $\Phi(t) \leq 0$.

Seja $\tau = \sup\{t \in (t_1,t_2): \Phi(t) = 0\}$. Então $t_1 < \tau < t_2$, $\Phi(\tau) = 0$, e $\Phi(t) > 0$ para $t \in (\tau,t_2]$.

Portanto $\dot{\Phi}(\tau) \geqq 0$, ou seja $\dot{\xi}(\tau) \geqq \varepsilon_0$, contrariando a hipótese.

A prova está completa.

O teorema a seguir, melhora o Critério de Instabilidade dado por Onuchic em [8], pois contém um conjunto de hipóteses menos exigente.

Seja $g: \mathbb{C}_H \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, onde

$$\mathbb{C}_H = \{\phi \in \mathbb{C}: ||\phi|| < H, \quad 0 < H \leqq \infty\},$$

e consideremos o sistema

$$\dot{x} = g(x_t). \tag{9}$$

Se $V: \mathbb{C}_H \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $\phi \in \mathbb{C}_H$ e $x(t_0,\phi)(t)$ é uma solução de (9), definimos:

$$\dot{V}_{(9)}(\phi) = \overline{\lim_{r\to 0^+}} \frac{V(x_{t_0+r}(t_0,\phi)) - V(\phi)}{r}.$$

Teorema III-1

Seja $g(0) = 0$. Suponhamos que exista uma função $V: \mathbb{C}_H \to \mathbb{R}$ contínua e um aberto U de $\mathbb{C}_H$ de modo que:

(i) $V(\phi) > 0$ em U e $V(\phi) = 0$ em ∂U, onde ∂U é a fronteira de U em $\mathbb{C}_H$.

(ii) $0 \in \partial U$.

(iii) $\dot{V}_{(9)}(\phi) \geq 0$ em U.

(iv) O conjunto $F = \{\phi \in U: \dot{V}_{(9)}(\phi) = 0\}$ não contém conjunto compacto e semi-invariante em relação a (9).

Então, para cada $\phi \in U$ e cada solução $x(0,\phi)(t)$ de (9), existe uma sequência (t_m) de números reais, tal que $|x(0,\phi)(t_m)| \to H$ quando $m \to \infty$ e, consequentemente, de (ii) resulta que a solução $x(t) \equiv 0$ de (9) é instável.

Prova:

Suponhamos que a tese não seja válida. Então, existem $\phi \in U$, $H_1 \in (0,H)$ e uma solução $x(0,\phi)(t)$ de (9), de modo que $||x_t(0,\phi)|| \leq H_1$ para todo $t \geq 0$.

Afirmamos que $x_t(0,\phi) \in U$, para todo $t \geq 0$.

De fato, se isso não ocorresse, existiria um número $\tau > 0$ tal que $x_\tau(0,\phi) \in \partial U$ e $x_t(0,\phi) \in U$ para $t \in [0,\tau)$. Então, pela hipótese (i), $V(x_\tau(0,\phi)) = 0$ e $V(x_t(0,\phi)) > 0$, para todo $t \in [0,\tau)$. Mas isto é uma contradição, pois a hipótese (iii) e o lema III-1 garantem que $V(x_t(0,\phi))$ é não de

crescente em t.

Como $||x_t(0,\phi)|| \leq H_1$ para todo $t \geq 0$, o corolário II-4 implica que o conjunto w-limite Ω de $x_t(0,\phi)$ é não vazio, compacto e semi-invariante em relação a (9). Então, como $V(x_t(0,\phi)) \geq V(x_0(0,\phi)) = V(\phi) > 0$, para todo $t \geq 0$, segue que $\Omega \subset U$.

Afirmamos, agora, que V é constante em Ω.

De fato, se $\psi \in \Omega$, existe sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $x_{t_m}(0,\phi) \to \psi$, quando $m \to \infty$.

Como V é contínua, segue que $V(x_{t_m}(0,\phi)) \to V(\psi)$, quando $m \to \infty$.

Como $V(x_t(0,\phi))$ é não decrescente em t, segue que $V(x_t(0,\phi)) \to V(\psi)$, quando $t \to \infty$.

Por outro lado, se ψ' é outro elemento de Ω, o mesmo argumento implica que $V(x_t(0,\phi)) \to V(\psi')$ quando $t \to \infty$.

Pela unicidade do limite, temos que $V(\psi) = V(\psi')$.

Finalmente, afirmamos que $\Omega \subset F$.

De fato, tomemos $\phi \in \Omega$. Como Ω é semi- invariante em relação a (9), existe uma solução y(t) de (9), definida em $\mathbb{R}$, $y_0 = \phi$, com $y_t \in \Omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto $\dot{V}^{(9)}(\phi) = 0$ e, por conseguinte, $\phi \in F$.

Desse modo, temos uma contradição, ou seja, existe sequência (t_m) tal que $|x(0,\phi)(t_m)| \to H$, quando $m \to \infty$.

O teorema está provado.

A definição seguinte permitirá reescrevermos a condição (iv) do teorema III-1.

Definição III-1

Seja D um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}_H$. Uma função $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é *limitada em D*, se existir um subconjunto compacto K de D, tal que $x_t \in K$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema III-2

A hipótese (iv) do teorema III-1 é equivalente a:

(iv') Não existe solução x(t) de (9), limitada em U, com $V(x_t)$ = constante para todo $t \in \mathbb{R}$.

Prova:

Suponhamos que a hipótese (iv') não seja válida. Então, existe uma solução x(t) de (9), definida em $\mathbb{R}$, com $V(x_t)$ = constante para todo $t \in \mathbb{R}$, e existe $K \subset U$, K compacto, com $x_t \in K$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nestas condições, o corolário II-4 garante que o conjunto w-limite Ω de x_t é não vazio, compacto e semi-invariante em relação a (9).

Como K é fechado em U, segue que $\Omega \subset K$, e portanto $\Omega \subset U$.

Mostremos que $\Omega \subset F$.

Seja $\psi \in \Omega$. Como Ω é semi-invariante em relação a (9), existe uma solução y(t) de (9), definida em $\mathbb{R}$, com

$y_0 = \psi$ e $y_t \in \Omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $V(x_t)$ = constante, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue da continuidade de V que $V(y_t)$ = constante, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto $\dot{V}(\psi) = 0$ e, assim, não vale a hipótese (iv).
(9)

Reciprocamente, suponhamos que a hipótese (iv) não seja válida. Então, existe $K \subset F$, K compacto e semi - invariante em relação a (9).

Seja $\psi \in K$. Existe solução $y(t)$ de (9) definida em $\mathbb{R}$, com $y_0 = \psi$ e $y_t \in K$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $K \subset F$, temos que $\dot{V}(y_t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e o lema III-1 implica que $V(y_t)$ = constante, para todo $t \in \mathbb{R}$.
(9)

Portanto, não vale a hipótese (iv').

Desse modo, podemos reescrever o teorema III-1 na seguinte forma:

Corolário III-1

Seja $g(0) = 0$. Suponhamos que exista uma função $V: \mathbb{C}_H \to \mathbb{R}$ contínua e um aberto $U \subset \mathbb{C}_H$ de modo que:

(i) $V(\phi) > 0$ em U e $V(\phi) = 0$ em ∂U.

(ii) $0 \in \partial U$.

(iii) $\dot{V}_{(9)}(\phi) \geq 0$ em U.

(iv) Não existe solução $x(t)$ de (9), limitada em U, com $V(x_t)$ = constante para todo $t \in \mathbb{R}$.

Então, para cada $\phi \in U$ e cada solução $x(0,\phi)(t)$ de (9), existe uma sequência (t_m), tal que $|x(0,\phi)(t_m)| \to H$ quando $m \to \infty$ e consequentemente de (iv), resulta que a solução $x(t) \equiv 0$ de (9) é instável.

III-3 Uma aplicação do corolário III-1

O lema a seguir será utilizado nesta aplicação e nas subsequentes:

Lema III-3

Seja $f(x)$ uma função escalar contínua em $(-\alpha,\alpha)$, $0 < \alpha \leq \infty$, e suponhamos que $x\,f(x) \geq 0$ para $|x| < \alpha$. Seja $x(t)$ uma solução não estacionária de $\ddot{x} = f(x)$, definida em $\mathbb{R}$. Então, não existe $\rho \in (0,\alpha)$ tal que $|x(t)| < \rho$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Prova:

Suponhamos que exista $\rho \in (0,\alpha)$ tal que $|x(t)| < \rho$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $\frac{d^2}{dt^2} x^2(t) = 2\dot{x}(t)\dot{x}(t)+2x(t)\ddot{x}(t) \geq 0$, segue que $\frac{d}{dt} x^2(t)$ é não decrescente, e por conseguinte $\frac{d}{dt} x^2(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Além disso, $\frac{d}{dt} x^2(t) \not\equiv 0$ pois, caso contrário, $x^2(t)$ = constante e, por continuidade, $x(t)$ = constante contrariando a hipótese.

Assim, existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\left[\frac{d}{dt} x^2(t)\right]_{t=\tau} = -\beta$, para algum $\beta > 0$.

Então, para $s \leq \tau$, temos:

$$\int_t^\tau \left[\frac{d}{dt} x^2(t)\right]_{t=s} ds \leq \int_t^\tau -\beta \, ds$$

ou seja,

$$x^2(\tau) + \beta\tau - \beta t \leq x^2(t).$$

Logo, $x^2(t) \to \infty$, quando $t \to -\infty$, uma contradição.

Aplicação:

Consideremos a equação diferencial escalar do tipo retardado de 2ª ordem

$$\ddot{x} = g(x_t, \dot{x}_t) + f(x)$$

ou, equivalentemente

$$(10) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = g(x_t, y_t) + f(x) \end{cases}$$

com f contínua em $\{x \in \mathbb{R} : |x| < \alpha\}$ e g contínua em $\beta_\alpha = \{(\phi_1,\phi_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}: ||\phi_1|| + ||\phi_2|| < \alpha\}$, onde $0 < \alpha \leq \infty$ e $f(0) = g(0,0) = 0$.

Teorema III-2

Se $x\, f(x) \geq 0$ para $|x| < \alpha$ e $\phi_2(0)g(\phi_1,\phi_2) \geq 0$ para $\phi_1,\phi_2 \in \beta_\alpha$, então a solução $(x,y) = (0,0)$ de (10) é instável.

Prova:

Vamos aplicar o corolário III-1 tomando

$$V(\phi_1,\phi_1) = \frac{\phi_2^2(0)}{2} - \int_0^{\phi_1(0)} f(s)ds$$

e $U = \{(\phi_1,\phi_2) \in \beta_\alpha: V(\phi_1,\phi_2) > 0\}$.

É fácil ver que V é contínua em β_α e que as hipó

teses (i) e (ii) do corolário III-1 estão satisfeitas.

Se $(x(t),y(t))$ é solução de (10), temos:

$$V(x_t,y_t) = \frac{y^2(t)}{2} - \int_0^{x(t)} f(s)ds$$

e $\dot{V}_{(10)}(x_t,y_t) = y(t)\dot{y}(t)-f(x(t))\dot{x}(t) = y(t)g(x_t,y_t) \geq 0$ em B_α.

Logo $\dot{V}_{(10)}(\phi_1,\phi_2) \geq 0$ em U e, portanto, vale a hipótese (iii).

Finalmente, suponhamos que exista uma solução $(x(t),y(t))$ de (10), limitada em U, com $V(x_t,y_t)$ = constante para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $V_{(10)}(x_t,y_t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $y(t)g(x_t,y_t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Afirmamos que $y(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

De fato, se existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y(t_0) = 0$ teremos:

$$V(x_{t_0},y_{t_0}) = \frac{y^2(t_0)}{2} - \int_0^{x(t_0)} f(s)ds = - \int_0^{x(t_0)} f(s)ds \leq 0$$

contradizendo o fato de que $(x_{t_0},y_{t_0}) \in U$.

Assim, $g(x_t,y_t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Então, $\ddot{x}(t) = g(x_t,y_t) + f(x(t)) = f(x(t))$ e, por

tanto, $x(t)$ é uma solução não estacionária e limitada de $\ddot{x} = f(x)$.

Mas, isto contradiz o lema III-3 e verifica a hipótese (iv).

A prova do teorema está completa.

III-4 Um Critério de Instabilidade para Sistemas não Autônomos.

O teorema abaixo generaliza o corolário III-1 para uma classe de sistemas não autônomos de equações diferenciais do tipo retardado.

Seja $P: \mathbb{R} \times \mathbb{C}_H \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e consideremos os sistemas

(11) $\dot{y} = P(t, y_t)$

(12) $\dot{x} = P(t, x_t) + Q(t, x_t)$

com as seguintes hipóteses:

H_1) (a) Para cada $\phi \in \mathbb{C}_H$ fixado, $P(t,\phi)$ é limitada em t.

(b) P é uniformemente contínua em conjuntos da forma $\mathbb{R} \times M$, onde $M \subset \mathbb{C}_H$ é compacto.

H_2) P é limitada em conjuntos da forma $\mathbb{R} \times \mathbb{C}([-h,0],K)$, onde $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < H\}$ é compacto.

H_3) $Q: [0,\infty) \times \mathbb{C}_H \to \mathbb{R}^n$ é tal que, para toda função contínua x definida em $[0,\infty)$ com valores em algum subconjunto compacto de $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < H\}$, temos:

$$\int_s^{s+t} Q(\tau, x_\tau)d\tau \to 0 \text{ quando } s \to \infty \text{ uniformemente em}$$

$t \in [0,1]$.

Teorema III-3

Sejam $P(t,0) \equiv Q(t,0) \not\equiv 0$. Suponhamos que as hipóteses H_1), H_2) e H_3) estejam satisfeitas e que o sistema (12) admita uma função $V = V(\phi)$ contínua em $\mathbb{C}_H$ e, existe um aberto $U \subset \mathbb{C}_H$, de modo que as seguintes condições se verifiquem:

(i) $V(\phi) > 0$ em U e $V(\phi) = 0$ em ∂U.

(ii) $0 \in \partial U$

(iii) $\dot{V}(\phi) = W(t,\phi) \geq 0$ para $(t,\phi) \in [0,\infty) \times U$.
(12)

(iv) Não existe solução $y^*(t)$ de $y = P^*(t,y_t)$, $P^* \in \hat{\Omega}(P)$, limitada em U, com $V(y_t^*)$ = constante para todo $t \in \mathbb{R}$.

Então, para cada par $(\sigma,\phi) \in [0,\infty) \times U$ e cada solução $x(\sigma,\phi)(t)$ de (12), existe sequência (t_m) de números reais tal que $|x(\sigma,\phi)(t_m)| \to H$ quando $m \to \infty$ e, consequentemente de (ii), resulta que a solução $x(t) \equiv 0$ de (12) é instável.

Prova:

Suponhamos que a tese não seja válida. Então existem $(\sigma,\phi) \in [0,\infty) \times U$, $H_1 \in (0,H)$ e uma solução $x(\sigma,\phi)(t)$ de (12) de modo que $||x_t(\sigma,\phi)|| \leq H_1$ para todo $t \geq \sigma$.

Afirmamos que $x_t(\sigma,\phi) \in U$, para todo $t \geq \sigma$.

De fato, caso contrário, existiria um número $\tau > \sigma$ com $x_\tau(\sigma,\phi) \in \partial U$ e $x_t(\sigma,\phi) \in U$ para todo $t \in [\sigma,\tau)$.

Então, pela hipótese (i), $V(x_\tau(\sigma,\phi)) = 0$ e $V(x_t(\sigma,\phi)) > 0$ para $t \in [\sigma,\tau)$, o que é uma contradição pois a hipótese (iii) e o lema III-1 implicam que $V(x_t(\sigma,\phi))$ não decresce em t.

Como $||x_t(\sigma,\phi)|| \leq H_1$, para todo $t \geq \sigma$, o corolário II-4 garante que o conjunto w-limite Ω de $x_t(\sigma,\phi)$ é não vazio, compacto e semi-invariante em relação à (11).

Além disso, como $x_t(\sigma,\phi) \in U$ e $V(x_t(\sigma,\phi)) \geq$ $\geq V(x_\sigma(\sigma,\phi)) = V(\phi) > 0$, para todo $t \geq \sigma$, segue que $\Omega \subset U$.

Por outro lado, se $\psi \in \Omega$, existe sequência (t_m), $t_m \to \infty$, com $x_{t_m}(\sigma,\phi) \to \psi$ quando $m \to \infty$.

Então, como V é contínua, temos que $V(x_{t_m}(\sigma,\phi)) \to V(\psi)$, quando $m \to \infty$.

Pela hipótese (iii), concluimos que $V(x_t(\sigma,\phi)) \to V(\psi)$, quando $t \to \infty$ e, portanto, V é constante em Ω.

Assim, dado $\psi \in \Omega$, existe $P^* \in \hat{\Omega}(P)$ e solução $y(t)$ de $y = P^*(t,y_t)$, definida em $\mathbb{R}$, com $y_0 = \psi$, $y_t \in \Omega$ e $V(y_t)$ = constante para todo $t \in \mathbb{R}$, contradizendo (iv).

O teorema está provado.

III-5 Aplicações para o Teorema III-3.

Aplicação 1

Consideremos a equação diferencial escalar do tipo retardado

$$\dot{x} = a(t)x^3 + b(t)\, x^3(t-h) \tag{13}$$

com $h \geq 0$, onde:

h_1) $a(t)$ é uma função limitada, uniformemente contínua e $a(t) \geq \delta > 0$, para todo t.

h_2) $b(t)$ é uma função contínua em $[0,\infty)$, $|b(t)| < q.\delta$, $q \in (0,1)$ e

$$\int_t^{t+1} |b(s)|ds \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Vamos mostrar que a solução $x(t) \equiv 0$ de (13) é instável.

Sejam $P(t,\phi) = a(t)\ \phi^3(0)$ e $Q(t,\phi) = b(t)\phi^3(-h)$.

As hipóteses H_1) - (a) e H_2) são facilmente verificadas.

A hipótese H_1) - (b) é válida pois o produto de funções escalares uniformemente contínuas e limitadas é uma função uniformemente contínua.

Verifiquemos a hipótese H_3). Sejam $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $x : [0,\infty) \to K$ uma função contínua. Devemos verificar que :

$$\int_s^{s+t} b(\tau)x^3(\tau-h)d\tau \to 0 \quad \text{quando} \quad s \to \infty, \quad \text{uniformemente em } t \in [0,1).$$

Como existe $M > 0$ tal que $|x(t)| \leq M$ para todo $t \in [0,\infty)$, temos:

$$\int_s^{s+t} b(\tau)x^3(\tau-h)d\tau \leq \left|\int_s^{s+t} b(\tau)x^3(\tau-h)d\tau\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_s^{s+t} |b(\tau)||x^3(\tau-h)|d\tau\right| \leq M^3\left|\int_s^{s+t} |b(\tau)|d\tau\right| \leq$$

$$\leq M^3\left|\int_s^{s+t} |b(\tau)|d\tau\right| ,$$

para todo $t \in [0,1]$ e s arbitrariamente grande.

Portanto, a hipótese h_2) implica no resultado desejado.

Logo, o teorema III-3 pode ser aplicado.

Para tanto, sejam

$$V(\phi) = \frac{\phi^4(0)}{4} - \frac{\delta}{2}\int_{-h}^{0} \phi^6(\theta)d\theta \quad \text{e}$$

$$U = \{\phi \in \mathbb{C}: V(\phi) > 0\}.$$

É fácil ver que as condições (i) e (ii) do teorema III-3 estão satisfeitas.

Seja x(t) uma solução de (13). Então

$$V(x_t) = \frac{x^4(t)}{4} - \frac{\delta}{2}\int_{-h}^{0} x^6(t+\theta)d\theta \quad \text{e}$$

$$\dot{V}_{(13}(x_t) = x^3(t)\dot{x}(t) - \frac{\delta}{2}x^6(t) + \frac{\delta}{2}x^6(t-h) =$$

$$= (a(t)-\frac{\delta}{2})x^3(t) + b(t)x^3(t)x(t-h) + \frac{\delta}{2}x^6(t-h) =$$

$$= (x^6(t), x^6(t-h)) \begin{bmatrix} a(t) - \frac{\delta}{2} & \frac{b(t)}{2} \\ \frac{b(t)}{2} & \frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^6(t) \\ x^6(t-h) \end{bmatrix}$$

Portanto, para que a hipótese (iii) esteja satisfeita, é suficiente que $\dot{V}_{(13)}(x_t)$ seja uma forma quadrática definida positiva em $x^6(t)$ e $x^6(t-h)$. Isto se verifica pois, das hipóteses sobre $a(t)$ e $b(t)$, temos:

$$a(t) - \frac{\delta}{2} > 0$$

e $$\left[a(t) - \frac{\delta}{2}\right]\frac{\delta}{2} - \frac{b(t)}{4} > \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{4} - \frac{q^2\delta^2}{4} = \frac{\delta^2}{4}(1-q^2) > 0.$$

Finalmente, verifiquemos a hipótese (iv).

Vamos mostrar, primeiramente, que se $P^* \in \hat{\Omega}(P)$ então qualquer solução não nula de $\dot{x} = P^*(t,x_t)$ não está definida no futuro.

Notemos que $P^*(t,\phi) = a^*(t)\phi^3(0)$, onde $a^*(t) \in \hat{\Omega}(a(t))$.

As soluções de $\dot{x} = P^*(t,x_t) = a^*(t)x^3(t)$ são da forma

$$x(t) = \frac{\pm x_0}{\sqrt{1-2x_0^2\int_{t_0}^{t} a^*(s)ds}}, \quad x_0 \geqq 0$$

Se $t < t_0 + \frac{1}{2\delta x_0^2}$ temos que $a(t) \geqq \delta$ implica que $a^*(t) \geqq \delta$ e portanto $\int_{t_0}^{t} a^*(s)ds \geqq \delta(t-t_0)$. Logo

$$1 - 2x_0^2 \int_{t_0}^{t} a^*(s)ds \leqq 1 - ax_0^2\delta(t-t_0),$$ donde segue

que

$$\frac{x_0}{\sqrt{1-2x_0^2\int_{t_0}^{t} a^*(s)ds}} \geqq \frac{x_0}{\sqrt{1-2x_0^2\delta(t-t_0)}}$$

Analogamente, se $t > t_0 + \frac{1}{2\delta x_0^2}$ temos que

$$\frac{-x_0}{\sqrt{1-2x_0^2\int_{t_0}^{t} a^*(s)ds}} \leqq \frac{-x_0}{\sqrt{1-2x_0^2\delta(t-t_0)}}$$

Portanto, a única solução de $\dot{x} = a^*(t)x^3(t)$ definida em $\mathbb{R}$ é $y(t) \equiv 0$.

Mas, nesse caso, $y_t \notin U$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, a hipótese (iv) é válida e o teorema III-3 implica que a solução $x(t) \equiv 0$ de (3) é instável.

Aplicação 2

Consideremos a equação escalar do tipo retardado de 2ª ordem

$$\ddot{x} = x^2(t-h)\dot{x} + x + e^{-t}\,\dot{x}(t), \qquad h > 0$$

ou equivalentemente

$$(14) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2(t-h)y + x + e^{-t}\,y(t) \end{cases}$$

Tomemos $P(t,x_t, y_t) = \begin{bmatrix} y \\ x^2(t-h)y + x \end{bmatrix}$

e $Q(t,x_t, y_t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t}\,y(t) \end{bmatrix}$.

Não é difícil verificar que as funções P e Q satisfazem as hipóteses H_1), H_2) e H_3) do teorema III-3.

Notemos que $\hat{\Omega}(P) = \{P\}$.

Definamos $V(\phi_1,\phi_2) = \frac{\phi_2^2(0)}{2} - \int_0^{\phi_1(0)} s\, ds$ e

$U = \{(\phi_1,\phi_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}: V(\phi_1,\phi_2) > 0\}$.

As condições (i) e (ii) do teorema III-3 estão satisfeitas.

Se $(x(t),y(t))$ é solução de (14) temos

$$\dot{V}(x_t,y_t) = y(t)\dot{y}(t) - x(t)\dot{x}(t) = y^2(t)\, x^2(t-h) + \tag{14}$$

$$+ y(t)x(t) + e^{-t}\, y^2(t) - x(t)y(t) =$$

$$= y^2(t)\, x^2(t-h) + e^{-t}\, y^2(t) \geq 0, \quad \text{para} \quad t \in [0,\infty).$$

Logo vale a hipótese (iii).

Suponhamos que a hipótese (iv) não seja válida. Então existe uma solução $(x^*(t), y^*(t))$ de

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2(t-h)\, y + x \end{cases} \tag{15}$$

limitada em U, com $V(x_t^*, y_t^*)$ = constante para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nestas condições, o corolário II-4 implica que o conjunto w-limite Ω^* de (x_t^*, y_t^*) é não vazio, compacto e semi-invariante em relação a (15).

Além disso, $\Omega^* \subset U$ e V é constante sobre Ω^*.

Portanto, dado $(\phi,\psi) \in \Omega^*$, existe uma solução $(x^{**}(t), y^{**}(t))$ de (15), definida em $\mathbb{R}$, com $(x_t^{**}, y_t^{**}) \in \Omega^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $(x_0^{**}, y_0^{**}) = (\phi,\psi)$. Logo $\dot{V}_{(15)}(x_t^{**}, y_t^{**}) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $[y^{**}(t)]^2 . [x^{**}(t-h)]^2 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Afirmamos que $[y^{**}(t)]^2 > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, se $y^{**}(t_0) = 0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, então $V(x_{t_0}^{**}, y_{t_0}^{**}) \leq 0$, contradizendo o fato de que $(x_{t_0}^{**}, y_{t_0}^{**}) \in U$.

Assim $[x^{**}(t-h)]^2 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e por conseguinte, $x^{**}(t-h) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Finalmente, obtemos:

$$\dot{x}^{**}(t) = y^{**}(t)$$

e

$$\dot{y}^{**}(t) = [x^{**}(t-h)]^2 \, y^{**}(t) + x^{**}(t) = x^{**}(t).$$

ou seja, $x^{**}(t)$ é solução não estacionária e limitada de $\ddot{x} = x$, o que contraria o lema III-2.

Isto verifica a hipótese (iv).

Portanto, as hipóteses do teorema III-3 estão verificadas e a solução nula de (14) é instável.

O exemplo dado acima pode ser generalizado do seguinte modo:

Consideremos a equação diferencial escalar de 2ª ordem

$$\ddot{x} = K(t,x_t,\dot{x}_t)\ \dot{x} + f(x) + g(t,x_t,\dot{x}_t)$$

ou equivalentemente

$$(16) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = K(t,x_t,y_t)\ y + f(x) + g(t,x_t,y_t) \end{cases}$$

Seja $B_\alpha = \{(\phi_1,\phi_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}: ||\phi_1||+||\phi_2|| < \alpha\}$, $0 < \alpha \leq \infty$ e $f(0) = g(t,0,0) = 0$.

Teorema III-4

Suponhamos válidas as seguintes hipóteses:

h_1) f é contínua e $x\ f(x) \geq 0$ para $|x| < \alpha$.

h_2) K é contínua e não negativa em $\mathbb{R} \times B_\alpha$.

h_3) $K(t,\phi_1,\phi_2)$ é limitada em t para cada par $(\phi_1,\phi_2) \in B_\alpha$

fixado.

h_4) K é uniformemente contínua em $\mathbb{R} \times B$, para cada $B \subset B_\alpha$, B compacto.

h_5) K é limitada em conjuntos da forma $\mathbb{R} \times \mathbb{C}[-h,0],B)$, onde $B \subset B_\alpha$ é compacto.

h_6) g é contínua e $\phi_2(0).\, g(t,\phi_1,\phi_2) \geq 0$ para todo $t \in [0,\infty)$ e todo par $(\phi_1,\phi_2) \in B_\alpha$.

h_7) Para todo compacto $K \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| < \alpha\}$ e todo par $(x(t),y(t))$ de funções contínuas definidas em $[0,\infty)$ com valores em K tem-se

$$\int_s^{s+t} g(\tau,x_\tau,y_\tau)d\tau \to 0$$

quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [0,1]$.

Então, a solução $(x(t),y(t)) = (0,0)$ de (16) é instável.

Prova:

$$\text{Seja } P(t,x_t,y_t) = \begin{bmatrix} y \\ K(t,x_t,y_t)y + f(x) \end{bmatrix}$$

e $\qquad Q(t,x_t,y_t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t,x_t,y_t) \end{bmatrix}$.

Se P^* e $\hat{\Omega}(P)$, é fácil ver que P^* é da forma

$$P^*(t,x_t,y_t) = \begin{bmatrix} y \\ K^*(t,x_t,y_t)y + f(x) \end{bmatrix} \quad \text{onde } K^* \in \Omega(K).$$

Definamos $V(\phi_1,\phi_2) = \frac{\phi_2^2(0)}{2} - \int_0^{\phi_1(0)} f(s)ds$ e

$U = \{(\phi_1,\phi_2) \in B_\alpha : V(\phi_1,\phi_2) > 0\}$.

É fácil ver que as hipóteses (i) e (ii) do teorema III-3 estão satisfeitas.

Se $(x(t),y(t))$ é solução de (16) temos:

$$\dot{V}(x_t,y_t) \underset{(16)}{=} y(t)\dot{y}(t)-f(x(t))\dot{x}(t) =$$

$$= y^2(t)K(t,x_t,y_t)+f(x(t))y(t)+y(t)g(t,x_t,y_t)-f(x(t))y(t)$$

$$= y^2(t)K(t,x_t,y_t)+y(t)g(t,x_t,y_t) \geq 0$$

para $(t,x_t,y_t) \in [0,\infty) \times B_\alpha$.

Logo $\dot{V}_{(16)}(\phi_1,\phi_2) \geq 0$ para $(t,\phi_1,\phi_2) \in [0,\infty) \times U$.

Suponhamos que a hipótese (iv) do teorema III-3 não seja válida. Então, existe $K^* \in \hat{\Omega}(K)$ e uma solução $(x^*(t),y^*(t))$ de

$$(17) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = K^*(t,x_t,y_t)y + f(x) \end{cases}$$

limitada em U, com $V(x_t^*,y_t^*)$ = constante para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nestas condições, o corolário II-4 implica que o conjunto w-limite Ω^* de $(x^*(t),y^*(t))$ é não vazio, compacto, semi-invariante em relação a (17) e $\Omega^* \subset U$.

Além disso, V = constante sobre Ω^*.

Portanto, dado $(\phi,\psi) \in \Omega^*$, existe $K^{**} \in \hat{\Omega}(K^*)$ e solução $(x^{**}(t),y^{**}(t))$ de

$$(18) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = K^{**}(t,x_t,y_t)y + f(x) \end{cases}$$

definida em $\mathbb{R}$, com $(x_t^{**},y_t^{**}) \in \Omega^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $(x_0^{**},y_0^{**}) = (\phi,\psi)$.

Logo $\dot{V}_{(18)}(x_t^{**},y_t^{**}) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $[y^{**}(t)]^2 K^{**}(t,x_t^{**},y_t^{**}) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Afirmamos que $[y^{**}(t)]^2 > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

De fato, se $y^{**}(t_0) = 0$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, então $V(x^{**}_{t_0}, y^{**}_{t_0}) = -\int_0^{x^{**}(t_0)} f(s)ds \leq 0$, contradizendo o fato de que $(x^{**}_{t_0}, y^{**}_{t_0}) \in U$.

Assim, $K^{**}(t, x^{**}_t, y^{**}) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e temos:

$$\dot{x}^{**}(t) = y^{**}(t)$$

$$\dot{y}^{**}(t) = K^{**}(t, x^{**}_t, y^{**}_t)y^{**}(t) + f(x^{**}(t) = f(x^{**}(t))$$

Logo $x^{**}(t)$ é solução limitada em B_α e não estacionária de $\ddot{x} = f(x)$, contradizendo o lema III-2.

Isto verifica a hipótese (iv).

Podemos, então, aplicar o teorema III-3 e, por conseguinte, a solução (0,0) de (16) é instável.

Observações:

1) É importante enfatizar que nos teoremas III-1 e III-3, e no corolário III-1, exibimos um aberto U de $\mathbb{C}_H$ e obtivemos informações sobre o comportamento das soluções que começam em U para algum instante $t_0 \geq 0$.

2) Cada uma das condições abaixo é suficiente pa

ra que a condição

$$\text{"} \int_t^{t+1} |b(s)|ds \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty \text{"}$$

da aplicação 1, esteja verificada:

(i) $b(t)$ é contínua, definida em $[0,\infty)$ e $b(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

(ii) $b(t)$ é contínua, definida em $[0,\infty)$, $b(t) \geq 0$ e $\int_0^\infty b(s)ds < \infty$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Hale, J.K. - Ordinary Differential Equations. Wiley, (1969).

[2] Hale, J.K. - Functional Differential Equations. Applied Mathematics Sciences, vol.3, Springer Verlag, New York, (1971).

[3] Hale, J.K. - Theory of Functional Differential Equations. Springer Verlag, New York Inc, (1977).

[4] Hale, J.K. - Sufficient Conditions for Stability and Instability of Autonomous Functional - Differential Equations. Journal of Differential Equations 1 (1965), 452-482.

[5] Miller, R.K. - Asymptotic Behavior of Non - linear Delay Differential Equations. Journal of Differential Equations 3(1965) 293-305.

[6] Onuchic,N. - Equações Diferenciais com Retardamento. 8º Colóquio Brasileiro de Matemática (1971).

[7] Onuchic,N. - Invariance Properties for Ordinary Differential Equations: Stability and Instability.

Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications 1(1978), 69-76.

[8] Onuchic, N. - On a Criterion of Instability for Differential Equations with Time Delay. G.E.O. Giacaglia (ed), Periodic Orbits, Stability and Ressonances (1970), 339-342.

[9] Onuchic, N. and Pavlu, L.C. - On a Criterion of Instability for Non-autonomous Ordinary Differential Equations. American Mathematical Journal special number (1982), 239-248.

[10] Pavlu, L.C. - Funções de Liapunov e Propriedades de Invariança para Sistemas não Autônomos: Estabilidade e Instabilidade. Tese de Doutoramento, I.C.M.S.C. - USP, (1978).

[11] Rodrigues, H.M. - Invariança para Sistemas não Autônomos de Equações Diferenciais com Retardamento e Aplicações. Trabalho de Mestrado, EESC - USP, (1970).

[12] Royden, H.L. - Real Analysis, The Macmillan Company, New York, (1968).