Sobre a topologia das fibrações de Milnor

Rafaella de Souza Martins

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Rafaella de Souza Martins

Sobre a topologia das fibrações de Milnor

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

Coorientador: Prof. Dr. José Antonio Seade Kuri

USP – São Carlos
Abril de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M386s Martins, Rafaella de Souza
 Sobre a topologia das fibrações de Milnor /
 Rafaella de Souza Martins; orientador Nivaldo de
 Góes Grulha Júnior; coorientador José Antonio Seade
 Kuri. -- São Carlos, 2018.
 119 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
 de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

 1. Fibrção de Milnor. 2. Fibrção de Milnor-Lê.
 3. d-regularidade. 4. valores críticos não isolados.
 5. categoria subanalítica. I. Grulha Júnior, Nivaldo
 de Góes, orient. II. Seade Kuri, José Antonio ,
 coorient. III. Título.

Rafaella de Souza Martins

On the topology of the Milnor fibrations

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

Co-advisor: Prof. Dr. José Antonio Seade Kuri

USP – São Carlos

April 2018

Este trabalho é dedicado a minha família, aos meus pais Sergio e Rosângela, a minha avó Alzira e aos meus irmãos Neto e Gabriella.

AGRADECIMENTOS

Ao fim desse trabalho meu coração está transbordando gratidão. Primente a Deus que me permitiu viver e conquistar esse sonho e me ajudou em cada passo dado nessa trajetória. Sem Ele nada sou e nada seria possível. Deus é bom o tempo todo.

À minha família abençoada, por terem entrado nesse sonho ao meu lado e compreenderem minha ausência. Aos meus pais e minha avó por sempre acreditarem em mim e me apoiarem em todos os momentos, com suas orações, conselhos e colo. Aos meus irmãos Neto e Gabriella pela amizade e torcida. Vocês são minha vida. Ao Tio Jairo (*in memoriam*).

Ao meu noivo Thales pelo companherismo, por sempre me fazer confiar na minha capacidade, por me encorajar e por toda ajuda dedicada. A sua família por toda a torcida e carinho.

À família construída em São Carlos, irmãos que a vida me deu, vocês tornaram esses anos de doutorado mais alegres, amorosos e esperançosos, em especial: Ana Maria (minha irmã do coração), Fernando, Zé, Pedro, Amanda, Matheus, Carol, Ângelo, Patrícia, Otoniel e Hellen. Vocês moram no meu coração.

Ao meu orientador Prof. Nivaldo de Góes Grulha Júnior por entrar nesse desafio comigo, por partilhar seus conhecimentos, por toda paciência e disponibilidade. Admiro muito seu caminho e sou muito grata e feliz por fazer parte dessa jornada.

Ao Prof. José Seade por ter aceitado me coorientar, por trocar seus conhecimentos e experiências, por toda contribuição a esse projeto. Por me permitir conhecer o México, um país que só me deu amor e alegrias.

Aos meus amigos mexicanos por terem tornado minha estadia no México mais alegre e cheia de amor: Adriana, Alex, Andrea, Chuchu, Malena, Vanessa e Aubín.

Aos professores Aurélio Menegon Neto, Maria Aparecida Soares Ruas, Jose Luis Cisneros Molina e Jawad Snoussi pela disponibilidade em me ajudar e por partilhar o conhecimento de vocês.

Aos professores que passaram pela minha vida, em especial aos do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP e ao grupo de Singularidades. Um carinho especial aos professores Behrooz Mirzaii, Denise de Mattos, Ana Cláudia Nabarro e Irene Onnis. Aos funcionários do ICMC-USP pelo apoio.

À banca examinadora.

À FAPESP (processos 2013/22718-0 e 2015/19721-5), pelo apoio financeiro, importante para a realização deste projeto.

Essa vitória é um pouco de cada um de vocês.

*“O senhor é o meu pastor
e nada me faltará.”
(Salmo 23:1)*

RESUMO

MARTINS, R. S. **Sobre a topologia das fibrações de Milnor**. 2018. 119 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Nesta tese abordaremos dois tipos de problemas relacionados aos célebres Teorema da Fibração de Milnor e Teorema da Fibração de Milnor-Lê para o caso real com valores críticos não isolados.

Primeiramente, asseguramos fibrações do tipo Milnor-Lê para $F : (X^m, 0) \longrightarrow (Y^n, 0)$, germe de aplicação subanalítico com X e Y espaços subanalíticos sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma curva subanalítica conexa em Y e sobre um subespaço analítico suave $W \subset Y$ de dimensão $p, n \geq p \geq 2$, sob algumas condições. Em particular, mostramos a existência das fibrações sobre o discriminantes de germe de aplicações subanalíticos, caso esse ainda não estudado na literatura, normalmente o conjunto dos valores críticos são desconsiderados. Finalizando nossa análise da categoria subanalítica, certificamos que existe a fibração de Milnor-Lê para $f : (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, com dimensão de X maior que $p \geq 2$, subanalítica e X subanalítico com valores críticos não isolados, definindo d -regularidade. Abordamos estes problemas utilizando resultados de campos de vetores rugosos.

Em uma segunda etapa apresentamos um novo critério necessário e suficiente para verificar a importante propriedade de transversalidade de um germe de aplicação real f de classe C^ℓ , $\ell \geq 1$. Fazendo uso também de uma recente ferramenta desenvolvida, a D -regularidade, verificamos condições para a existência das fibrações do germe de aplicação $\psi_{F,X} : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ não holomorfo, dado por

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , com $j = 1, \dots, n$. Observamos que $\psi_{F,X}$ são polinômios homogêneos pesados mistos com $\mathbb{R}^+$ -ação.

Consideramos $\psi_{F,X} : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ germe de aplicação analítico real. Estudamos a topologia dessas fibrações nos reais, constatando que o discriminante tem dimensão 1 e por isso tem ambas as fibrações conhecidas. Por fim exibimos um homeomorfismo entre as fibras dos valores regulares e dos valores críticos.

Palavras-chave: Fibração de Milnor, Fibração de Milnor-Lê, d -regularidade, valores críticos não isolados, categoria subanalítica.

ABSTRACT

MARTINS, R. S. **On the topology of the Milnor fibrations**. 2018. 119 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

In this thesis two types of problems related to the famous Milnor Fibration Theorem and Milnor-Lê Fibration Theorem for the real case with non-isolated critical values will be addressed.

Primarily, we assure the fibrations of type Milnor-Lê for the germ $F : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ subanalytic with X and Y subanalytic spaces on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a subanalytic connected curve in Y and over a smooth analytical subspace $W \subset Y$ of dimension p , $n \geq p \geq 2$, under some conditions. In particular, we show the existence of the fibrations about the discriminants of subanalytical map-germ, if this not been studied in the literature, usually the set of critical values are disregarded. Finalizing our analysis of this subanalytic category, we certify that there exist the fibrations of type Milnor-Lê to $f : (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, with dimension of X greater than $p \geq 2$, subanalytic and X subanalytic with non-isolated critical values, setting d -regularity. We address these problems using results of the rugose vector fields.

In a second part, we present a new necessary and sufficient criterion to verify the important transversality property of a real map-germ f of class C^ℓ , $\ell \geq 1$. Using a recent developed tool, D -regularity, we verify conditions for the existence of the fibrations of map-germ $\psi_{F,X} : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ non holomorphic, given by

$$\psi_{F,X}(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

with $a_j = b_j$ for at least one j and $a_j \neq b_j$ for at least one j , with $j = 1, \dots, n$. We note that $\psi_{F,X}$ are mixed weighted homogeneous polynomials with $\mathbb{R}^+$ -action.

We consider $\psi_{F,X} : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ real analytic map-germ. We studied the topology of these fibrations, noting that the discriminant has dimension 1 and therefore has both the fibrations known. Lastly we show a homeomorphism between the fibers of the regular values and the critical values for a case special this family.

Keywords: Milnor Fibration, Milnor-Lê Fibration, d -regularity, non-isolated critical values, subanalytic category.

SUMÁRIO

Introdução	17
1 PRELIMINARES	23
1.1 Conjuntos algébricos e semialgébricos	23
1.2 Conjuntos semianalíticos e subanalíticos	28
1.3 Estratificação de Whitney	31
1.4 Fibração de Milnor caso complexo	34
1.5 Fibração no caso real e de Milnor-Lê	37
1.6 A d -regularidade	40
1.7 A D , d_h e D_h -regularidades	45
1.7.1 D -regularidade	46
1.7.2 d_h regularidade	48
1.7.3 D_h -regularidade	50
1.8 Família de polinômios homogêneos pesados polares mistos	52
2 TEOREMA DA FIBRAÇÃO PARA ESPAÇOS SUBANALÍTICOS	55
2.1 Teorema da Fibração de Milnor-Lê para germes de aplicações subanalíticas	55
2.1.1 Teorema da Fibração sobre espaço subanalítico de dimensão 1	57
2.1.2 Teorema da Fibração sobre um subespaço analítico suave de dimensão 2	62
2.1.3 Teorema da Fibração sobre um subespaço analítico suave de dimensão p , $p > 2$	67
2.2 Fibrações para germe de aplicações subanalíticas com o domínio subanalítico	70
2.3 D -regularidade para aplicação subanalítica	74
3 CRITÉRIO PARA A PROPRIEDADE DE TRANSVERSALIDADE	79
4 FAMÍLIA DE POLINÔMIOS MISTOS	85
4.1 Fibração para a família de polinômios homogêneos pesados mistos com valor crítico não isolado	85
REFERÊNCIAS	109

APÊNDICE A	EXEMPLO CLÁSSICO DE FIBRAÇÃO DE MILNOR .	113
A.1	Um exemplo das fibrações: polinômio de Pham-Brieskorn	113
A.1.1	<i>Fibrações</i>	115
Índice		119

INTRODUÇÃO

O estudo de geometria e topologia de singularidades complexas isoladas é um tópico que teve desenvolvimentos notáveis nos anos 1960 e 1970. Um marco para esse tópico é o teorema da fibração de Milnor ((MILNOR, 1968)): seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe analítico complexo não constante, e seja $K = f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$, o link da singularidade, onde $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ é a $(2n-1)$ -esfera centrada na origem de $\mathbb{C}^n$, de raio ε suficientemente pequeno. Então a aplicação

$$\phi_f := \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

é a projeção de uma fibração C^∞ localmente trivial.

Muitas vezes é conveniente estudar esta fibração de uma maneira alternativa, que na literatura moderna é chamada de fibração Milnor-Lê. Esse objeto foi esboçado por Milnor em seu célebre livro (MILNOR, 1968), mas para provar a existência dessa fibração no caso de singularidades não isoladas, é necessário um importante resultado que não era conhecido na época da publicação do mesmo. Esse teorema é devido a Hironaka (HIRONAKA, 1977) e foi provado alguns anos após o livro de Milnor. Usando o teorema de Hironaka, Lê provou a versão do teorema de Milnor apresentada abaixo, em uma configuração muito mais geral que a considerada aqui. Considere f como acima, e seja $N(\varepsilon, \delta) = \mathbb{B}_\varepsilon^{2n} \cap f^{-1}(\partial \mathbb{D}_\delta^2)$ o “tubo de Milnor”, onde $\mathbb{B}_\varepsilon^{2n}$ é a bola de bordo $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$, $\partial \mathbb{D}_\delta^2$ é o bordo da bola de raio δ centrada na origem de $\mathbb{C}$. Através do Teorema de Lê em (LÊ, 1977), quando $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$, tem-se uma fibração localmente trivial:

$$f : N(\varepsilon, \delta) \rightarrow \partial \mathbb{D}_\delta^2.$$

Figura 1 – Tubo de Milnor

Quando a origem é uma singularidade isolada, isto é, quando é um ponto crítico isolado de f , ϕ_f induz uma composição open-book da esfera $\mathbb{S}^{2n-1}$ com o link K sendo a conexão, a interseção das folhas que são os fechados das fibras de ϕ_f .

Figura 2 – Open-book

Em (MILNOR, 1968), Milnor inicia a investigação da fibração no caso real, ele mostra que se $f : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é um germe analítico não constante com singularidade isolada na origem, então existe fibração similar ao caso complexo, e também um open-book, exceto pelo fato de nem sempre ser possível garantir que o mapa de projeção

$$\phi_f : \mathbb{S}_\varepsilon^{n+p-1} \setminus K \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1},$$

é a aplicação $\frac{f}{|f|}$. Existe um grande interesse no caso real, pois apesar de muitos estudos e avanços, pouco se sabe sobre a geometria e topologia dessas fibras. Isto é, de alguma forma, devido a dois motivos, que são descritos por Milnor em seu livro.

O primeiro é que a hipótese de ter um ponto crítico isolado é muito rigorosa, conhecida como *condição de Milnor*. Os autores de (LOOIJENGA, 1971), (CHURCH; LAMOTKE, 1975) e (SANTOS *et al.*, 2016) entre outros classificam pares (n, p) que satisfazem essa condição. Um exemplo é quando $p = 2$, o conjunto de pontos críticos de f é, em geral, uma curva, e não é fácil encontrar exemplos de germes analíticos reais que satisfaçam esta condição. Um trabalho pioneiro para encontrar essa condição foi (PICHON; SEADE, 2003), a discussão é seguida em (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2009) e (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2010).

O segundo motivo é que, como mencionado acima, mesmo quando a função satisfaz esta condição, em geral não é sempre que a projeção ϕ_f possa ser descrita como $\frac{f}{|f|}$ como no caso complexo. Quando isso acontece, dizemos que o germe de aplicação satisfaz a *forte condição de Milnor*. Nos trabalhos (JACQUEMARD, 1989), (SEADE, 1997), (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002), (RUAS; SANTOS, 2005), (CISNEROS-MOLINA, 2008) e (OKA, 2010) são apresentados exemplos de singularidades que satisfazem essa forte condição.

Milnor em seu livro apresenta o exemplo de um germe de aplicação analítico não constante $f(x, y) = (x, x^2 + y(x^2 + y^2))$ onde $\frac{f}{|f|}$ tem uma curva de pontos críticos, ou seja, não satisfaz a *forte condição de Milnor*. Na década de 80 Jacquemard em (JACQUEMARD, 1989) apresenta um avanço para avaliar essa difícil condição, um critério para os pontos críticos da

projeção de uma aplicação em $\mathbb{R}^2$. Massey em (MASSEY, 2010) também exhibe as condições (a) e (b) para conseguir as desejadas fibrações de Milnor e Milnor-Lê que satisfazem as condições explicitadas acima.

Consequentemente, é interessante encontrar famílias de singularidades analíticas reais com singularidades isoladas, que não são equivalentes a singularidades holomorfas, e para as quais se pode descrever a sua geometria e topologia. Considerando os germes em $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ de campos de vetores holomorfos F e X , a função $\psi_{F,X} : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\psi_{F,X}(z) := \langle F(z), X(z) \rangle = \sum_{i=1}^n F_i(z) \overline{X_i(z)} \quad (1)$$

onde F, X campos vetoriais holomorfos da forma:

$$F = (k_1 z_{\sigma_1}^{a_1}, \dots, k_n z_{\sigma_n}^{a_n}), \quad X = (t_1 z_1^{b_1}, \dots, t_n z_n^{b_n}),$$

onde k_j e t_j são números complexos não nulos para todos os j 's, o a_j e b_j são inteiros positivos e σ é uma permutação do conjunto $\{1, \dots, n\}$, é um polinômio homogêneo pesado misto (Def. 1.94). Os autores em (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002) exibem requisitos para que $\psi_{F,X}$ satisfaçam ambas as condições de Milnor e assim possuam a fibração de Milnor. Em (PICHON; SEADE, 2003) os autores mostram que o link K é isotópico ao link de um germe de aplicação holomorfo para $n = 2$, mas a decomposição open-book dada pela fibração de Milnor de $\psi_{F,X}$ não é equivalente a decomposição de qualquer germe holomorfo. Nessa mesma linha de pesquisa existem as funções do tipo $f\bar{g} : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e as funções mistas, família de germes de aplicações não holomorfos que são vistos no corpo dos complexos e dos reais. Exemplos e resultados desses germes estão em (PICHON; SEADE, 2003), (OKA, 2008), (CISNEROS-MOLINA, 2008), (OKA, 2010) e (PARAMESWARAN; TIBĂR, 2017) dentre outros.

Todos os resultados e avanços citados anteriormente são para a categoria de aplicações analíticas, reais ou complexas, a qual é uma categoria muito importante. O estudo da topologia dessas aplicações tem sido estudado por mais de 60 anos.

Existe outra categoria mais geral, a categoria das aplicações subanalíticas original dos trabalhos de (LOJASIEWICZ, 1959) e (LOJASIEWICZ, 1964) e também desenvolvida em (HIRONAKA, 1973a), (HIRONAKA, 1973b) (BIERSTONE; MILMAN, 1988), (SHIOTA, 1997). Um subconjunto X em $\mathbb{R}^n$ é dito subanalítico em $\mathbb{R}^n$ se todo ponto de $\mathbb{R}^n$ admite uma vizinhança U tal que $X \cap U = \pi(A)$, onde A é semianalítico e a projeção $\pi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ restrita a A é uma aplicação própria. Um fator muito relevante dessa categoria é o Teorema de Tarski-Seidenberg (BIERSTONE; MILMAN, 1988). Uma aplicação será subanalítica quando suas componentes forem, ou seja, quando o gráfico de cada uma delas for um conjunto subanalítico.

As aplicações subanalíticas se comportam de maneira semelhante, em muitos sentidos, às aplicações analíticas. O estudo da topologia dessas funções do ponto de vista das fibrações de Milnor é uma área da singularidades pouca explorada.

Nosso trabalho está dividido em quatro partes. A primeira parte desenvolvemos as principais ferramentas necessárias para a compreensão dos nossos resultados. Descrevemos apenas o que julgamos necessário para contextualizar os problemas abordados na tese. Na parte final deste primeiro capítulo apresentamos a d -regularidade ((CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2009), (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2010) e (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2012)) e suas extensões, essa condição foi criada por Cisneros-Molina, Seade e Snoussi para germe de aplicações analíticas reais com valor crítico isolado e aperfeiçoada recentemente pelos criadores e por Menegon Neto em (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -) para germe de aplicações de classe C^ℓ , $\ell > 1$ com valor crítico não isolado. A regularidade é originada da geometria por trás da prova de Milnor de sua fibração, observando o comportamento dos campos de vetores necessários para obter $\phi_f = \frac{f}{|f|}$.

No segundo capítulo buscamos estudar germe de aplicações reais $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$, $n > p > 1$ com valor crítico não isolado, dessa forma o discriminante tem dimensão maior que zero. Esse subespaço é subanalítico por definição, então usando as propriedades dessa categoria e os resultados de campos rugosos (VERDIER, 1976) obtemos fibração do tipo Milnor-Lê sobre esse subespaço. Em geral, obtemos a fibração do “tubo de Milnor” (este tubo é definido sobre o subespaço subanalítico e não pelo bordo da bola, como anteriormente) sobre um subespaço subanalítico, onde cada fibração é localmente trivial sobre cada estrato de sua estratificação. Nesse caso o germe de aplicação é subanalítico, $F : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$, onde F é a restrição de f por X subespaço de $\mathbb{R}^n$ subanalítico e $Y \subset \mathbb{R}^p$ também subanalítico. Por fim conseguimos mostrar a existência de fibrações de Milnor-Lê para espaços subanalíticos e germes de aplicações subanalíticas em $\mathbb{R}^p$. Essa categoria não é simples de ser manipulada, talvez por não ter sido muito explorada, sendo assim um pouco abstrata e possuindo poucos exemplos. Buscamos exibir condições para provar a fibração e alguns exemplos para contextualizar os resultados.

A transversalidade das fibras com a esfera é necessária para alcançar a fibração de Milnor-Lê de um germe de aplicação de classe C^ℓ , $\ell > 1$. Os autores Araújo dos Santos, Cisneros-Molina, Menegon Neto, Parameswaran, Seade, Snoussi e Tibăr dentre outros, estudam condições para assegurar que um germe tem a propriedade de transversalidade com a finalidade de conseguir o fibrado no tubo. No terceiro capítulo provamos um critério necessário e suficiente para verificar essa tão importante propriedade.

Por último, estudamos $\psi_{F,X} : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ descrita em (1) com a permutação identidade e condições sobre os expoentes para que possua valor crítico não isolado. Provamos algumas características dessa família para confirmar a existência das duas fibrações fora dos valores críticos e neste caso a equivalência entre elas, fazendo uso da regularidade descrita no primeiro capítulo e da propriedade de transversalidade. Aplicando os resultados de fibração para discriminantes obtidos no capítulo dois desta tese, concluímos a existência de fibrado localmente trivial sobre o discriminante de $\psi_{F,X}$ e comparamos os fibrados para um caso particular dessa família. Essa família de polinômios homogêneos não é holomorfa então a abordagem se deu no

corpo dos reais e foi possível ver particularidades muito interessantes de $\psi_{F,X}$.

PRELIMINARES

Esse capítulo trata dos conceitos básicos necessários para desenvolvimento dos resultados relacionados as Fibrações de Milnor e Milnor-Lê, apresentados neste trabalho.

Por fim introduziremos a Fibração de Milnor para o caso complexo e iniciamos o estudo para fibração no caso real (caso da pesquisa). Exibimos também a d -regularidade, uma importante ferramenta para o ambiente real. A principal referência desse capítulo é o livro (MILNOR, 1968) dentre outras destacadas nas seções.

1.1 Conjuntos algébricos e semialgébricos

Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito qualquer e seja $\mathbb{K}^n$ o espaço coordenado de todas as n -uplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ dos elementos de $\mathbb{K}$. Estamos interessados quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, números complexos e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, números reais.

Considere $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \left\{ \sum_{j=1}^l c_{\alpha^j} x_1^{\alpha_1^j} \cdots x_n^{\alpha_n^j}; \alpha^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j) \in \mathbb{N}^n \text{ e } c_{\alpha^j} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Definição 1.1. Dado $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, definimos seu conjunto de zeros por

$$V(f) = \{a \in \mathbb{K}^n; f(a) = 0\}.$$

Se $S \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, então seja $V(S)$ o conjunto de zeros comuns

$$V(S) = \bigcap_{f \in S} V(f).$$

Um conjunto dessa forma é chamado *conjunto algébrico*. Ou seja, um conjunto algébrico é o lugar geométrico dos zeros comuns de alguma coleção de funções definidas em $\mathbb{K}$.

Seja R um anel comutativo com unidade. Dizemos que R é noetheriano se toda cadeia de ideais em R estaciona, isto é, se $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ então existe j_0 tal que $I_j = I_{j+1}$ para todo $j \geq j_0$.

Se $\mathbb{K}$ é corpo então $\mathbb{K}$ é noetheriano.

Teorema 1.2. (*Teorema da Base de Hilbert*): *Seja R anel comutativo noetheriano então $R[x_1, \dots, x_n]$ é noetheriano.*

Como consequência do teorema acima tem-se a condição das cadeias descendentes de conjuntos algébricos: considere

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_j \supseteq \cdots.$$

Logo,

$$I(V_1) \subseteq I(V_2) \subseteq \cdots.$$

Pelo teorema anterior, $\exists j_0$ tal que $I(V_j) = I(V_{j+1})$, $\forall j \geq j_0$. Assim,

$$V(I(V_1)) \supseteq V(I(V_2)) \supseteq \cdots,$$

estaciona. Como V_i é algébrico temos $V(I(V_i)) = V_i$, para todo i e com isso,

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_j \supseteq \cdots$$

estaciona.

Definição 1.3. Seja V um conjunto algébrico. O conjunto

$$I(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]; f(x) = 0, \forall x \in V\}$$

é um ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, chamado ideal associado a V .

Definição 1.4. Um conjunto algébrico não vazio V é chamado variedade ou conjunto algébrico irredutível se não pode ser expressado como a união de dois subconjuntos algébricos próprios.

Observe que quando V é irredutível o ideal $I(V)$ é primo. Lembrando que ele consiste de todos os polinômios, $f_j : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $j = 1, \dots, l$, que se anulam em todos os pontos de V , isto é, $I(V) = \langle f_1, \dots, f_l \rangle$.

Definição 1.5. Um ponto $x \in V$ é dito não-singular ou regular se a matriz $(\frac{\partial f_j}{\partial x_k})$ tem rank máximo ρ em x e singular ou crítico se o $\text{rank} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) < \rho$.

Lema 1. O conjunto $\Sigma(V)$ de todos os pontos críticos de V forma um subconjunto algébrico próprio (podendo ser vazio) de V .

Teorema 1.6. (*Whitney*) *Se $\mathbb{K}$ é o corpo dos números reais (ou complexos), então o conjunto $V \setminus \Sigma(V)$ de pontos regulares de V forma uma variedade suave, não vazia. De fato essa variedade é analítica real (ou complexa) e tem dimensão $n - \rho$ sobre $\mathbb{K}$. Lembrando que ρ é o rank máximo que a matriz pode ter nos pontos de V .*

Teorema 1.7. (Whitney) *Para qualquer par $V \supset W$ de conjuntos algébricos no espaço coordenado real ou complexo, a diferença $V \setminus W$ tem no máximo um número finito de componentes topológicas.*

Dessa forma o conjunto $V \setminus \Sigma(V)$ tem um número finito de componentes topológicas.

Proposição 1.8. *Uma variedade complexa nunca é uma variedade suave na vizinhança de um ponto crítico.*

Proposição 1.9. *Qualquer conjunto algébrico real ou complexo V pode ser expresso como uma união finita disjunta*

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p,$$

onde M_i são variedades diferenciáveis com apenas um número finito de componentes conexas.

Consequentemente qualquer diferença de conjuntos algébricos, $V_1 \setminus V_2$, também pode ser expresso por uma união finita disjunta como acima.

Recordando que estamos considerando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $V \subset \mathbb{K}^n$ conjunto algébrico com $I(V) = \langle f_1, \dots, f_l \rangle$. Seja $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ função polinomial. O resultado a seguir ajuda a caracterizar os pontos críticos de $g|_{M_1}$, onde $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$.

Proposição 1.10. *O conjunto dos pontos críticos da função $g|_{M_1}$ é igual à interseção de M_1 com o conjunto algébrico W que consiste de todos os pontos $x \in V$ tais que*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x) < \rho.$$

Lembrando que ρ é o rank máximo da seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Corolário 1.11. *Uma função polinomial g em $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$ pode ter no máximo um número finito de valores críticos.*

Corolário 1.12. *Seja V um conjunto algébrico e $x_0 \in V$, ponto regular ou ponto crítico isolado de V . Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$ com centro em x_0 e raio ε intercepta V gerando uma variedade suave K (ou vazia).*

A variedade definida acima é chamada de *link da singularidade*, $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$.

Agora segue um resultado muito importante para a estrutura da fibração de Milnor. Ele garante a estrutura cônica de $V = f^{-1}(0)$.

Definição 1.13. O subespaço $X \subset \mathbb{R}^n$ tem estrutura cônica quando é homeomorfo ao $\text{Cone}(X \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1})$, que se trata de todos os segmentos $tk + (1-t)x_0$, $0 \leq t \leq 1$ onde $k \in X \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ e x_0 é o ponto base, neste caso o centro da esfera e do disco para algum ε .

Teorema 1.14. Para ε suficientemente pequeno, a interseção de V com a bola $\mathbb{B}_\varepsilon$ é homeomorfa ao cone sobre $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$. De fato, o par $(\mathbb{B}_\varepsilon^n, V \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ é homeomorfo ao par que consiste do $(\text{Cone}(\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}), \text{Cone}(K))$.

Por isso é garantido a conhecida ilustração da esfera de Milnor.

Figura 3 – Esfera de Milnor

O $\text{Cone}(\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}) = \mathbb{B}_\varepsilon^n$, pela definição.

Agora definiremos uma classe de conjuntos um pouco mais ampla que dos conjuntos algébricos, a saber, os semialgébricos, seguiremos (BIERSTONE; MILMAN, 1988), (SHIOTA, 1997) e (BEZERRA, 2007). O seguinte resultado é uma das causas da criação dessa nova classe.

Proposição 1.15. (BEZERRA, 2007) Sejam $B \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto algébrico e $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial. Então $F^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto algébrico.

Dessa forma é natural questionar se a imagem de um conjunto algébrico por uma aplicação polinomial é um conjunto algébrico. A resposta é, nem sempre, o exemplo a seguir mostra que uma situação em que isso não ocorre.

Exemplo 1. Sejam $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção $\pi(x, y) = x$ e $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Sabemos que $\mathbb{S}^1$ é um conjunto algébrico, mas $\pi(\mathbb{S}^1) = [-1, 1]$ não o é. De fato, para todo polinômio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, temos duas possibilidades para $f^{-1}(0)$. Se f não for o polinômio identicamente nulo, temos que $f^{-1}(0)$ é o conjunto finito de raízes do polinômio. Caso contrário, $f^{-1}(0)$ é toda reta, logo não existe um polinômio f , tal que $f^{-1}(0) = [-1, 1]$. Ou seja, o intervalo $[-1, 1]$ não é um conjunto algébrico.

Assim segue a definição:

Definição 1.16. ((BIERSTONE; MILMAN, 1988), Def. 1.1) Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é semialgérico quando existem f_{kj}, g_{kj} funções polinomiais definidas em $\mathbb{R}^n$, tais que:

$$A = \bigcup_{j=1}^{\ell} \left(\bigcap_{k=1}^{s_j} \{x \in \mathbb{R}^n; f_{jk}(x) = 0, g_{jk}(x) > 0\} \right).$$

Todo conjunto algébrico é semialgérico.

Proposição 1.17. ((BEZERRA, 2007), p.4) Um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto subalgébrico.

Proposição 1.18. ((BEZERRA, 2007), p.4) Na reta, um conjunto semialgérico é a reunião finita de intervalos abertos, fechados, semiabertos e pontos.

Observação 1.19. Usando a proposição anterior podemos observar que uma sequência infinita de pontos isolados na reta não é um conjunto semialgérico. De fato, usando a Definição 1.16 e lembrando que todo polinômio na reta tem um número finito de raízes.

Definição 1.20. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ é semialgérica se seu gráfico $\text{Graf}(F) = \{(x, F(x)); x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto semialgérico.

Exemplo 2. Seja $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $h(x) = \sqrt{x}$. Então, tem-se que $\text{Graf}(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 = x, y \geq 0\}$. Tomando $f(x, y) = y^2 - x, g_1 = y$ e usando o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g_1(x, y) > 0\} \cup \{(0, 0)\}$, segue diretamente da definição que $\text{Graf}(h)$ é um conjunto semialgérico, logo h é uma função semialgérica.

Definição 1.21. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$. Uma aplicação $F : A \rightarrow B$ é semialgérica se suas funções coordenadas são semialgéricas.

Proposição 1.22. Uma aplicação $F : A \rightarrow B$, nas condições acima, é semialgérica se seu gráfico $\text{Graf}(F) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é um conjunto semialgérico.

Enunciaremos agora algumas propriedades de conjuntos e aplicações semialgéricas ((SHIOTA, 1997), p.52):

Propriedades 1.23. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgéricos e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação semialgérica.

i) Os conjuntos $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, X \cap Y, \bar{X}$ e $X \setminus Y$ são semialgéricos.

ii) A família de componentes conexas de X é finita e toda componente conexa é semialgérica.

iii) O conjunto $f^{-1}(Y)$ é semialgérico.

iv) Para cada $x \in \bar{X} \setminus X$ existe uma aplicação semialgérica $\Phi : [0, 1] \rightarrow \bar{X}$ tal que $\Phi([0, 1]) \subset X$, $\Phi(0) = x$ e $\Phi|_{]0, 1]}$ é analítica.

v) Suponhamos X uma subvariedade de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ de dimensão m . A união $TX = \cup_{x \in X} \{x\} \times T_x X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de espaços tangentes, e o conjunto $\{(x, T_x X) \in X \times G_{n,m}\}$ são semialgêbricos. ($G_{n,m}$ denota a variedade grassmanniana de planos m -dimensionais em $\mathbb{R}^n$).

vi) Sejam f_1, f_2 funções semialgêbricas em X . O produto $f_1 \cdot f_2$ e a soma $f_1 + f_2$ são semialgêbricos.

vii) Suponhamos $f(X) \subset Y$. Seja $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação semialgêbrica. A composição $g \circ f$ é semialgêbrica.

viii) Dada uma função semialgêbrica $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$ são semialgêbricas.

Finalmente exibiremos o resultado que responde a questão que motivou a origem dessa classe de conjuntos.

Teorema 1.24. (Tarski-Seidenberg) (BIERSTONE; MILMAN, 1988), Teo. 1.5): A imagem de um conjunto semialgêbrico $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por uma projeção $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ própria é um conjunto semialgêbrico em $\mathbb{R}^n$.

Corolário 1.25. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgêbrico e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação polinomial. Então $F(X)$ é um conjunto semialgêbrico.

1.2 Conjuntos semianalíticos e subanalíticos

Buscando respostas para as mesmas perguntas para conjuntos analíticos foi obtido outras classes de conjuntos.

Recordando que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito analítico se para todo $x \in A$ existe uma vizinhança $U_x \subset \mathbb{R}^n$ de x e funções analíticas $f_j : U_x \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, tal que $A \cap U_x = f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_j^{-1}(0)$.

Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é analítica se para todo $x_0 \in U$ existe um aberto $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ onde f pode ser desenvolvida como série de potências.

Observe que todo conjunto algébrico é analítico, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Por exemplo, considere $f(x, y) = y - \ln(x)$ uma aplicação analítica, note que $f^{-1}(0) = y - \ln(x)$ é um conjunto analítico, por definição. Não é algébrico pois $\ln(x)$ não se trata de uma função polinomial.

Questionando se uma aplicação analítica leva conjunto analítico em conjunto analítico, foi definida mais uma classe de conjuntos.

Definição 1.26. ((BIERSTONE; MILMAN, 1988), Def.2.1) Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito semianalítico se para todo $x \in A$ existe uma vizinhança $U_x \subset \mathbb{R}^n$ de x e funções f_{jk}, g_{jk} analíticas

em U_x tal que

$$A \cap U_x = \bigcup_{j=1}^{\ell} \left(\bigcap_{k=1}^{s_j} \{x \in \mathbb{R}^n; f_{jk}(x) = 0, g_{jk}(x) > 0\} \right).$$

Exemplo 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^x - y$, então o conjunto definido por $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) > 0\}$ é um conjunto semianalítico.

Observe que todo conjunto analítico é um conjunto semianalítico. E mais como todo polinômio é analítico, tem-se que todo conjunto semialgébrico é um conjunto semianalítico.

Definição 1.27. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ é semianalítica se seu gráfico $\text{Graf}(F) = \{(x, F(x)); x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto semianalítico.

Exemplo 4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|$ uma função semianalítica. De fato, observe que f não se trata de uma função analítica, pois não é diferenciável no zero e $\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R} \text{ e } y = |x|\} = \{(x, |x|) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$.

Note que $F(x, y) = x^2 - y^2$ e $g(x, y) = y$ são analíticas, dessa forma podemos garantir que $\text{Graf}(f)$ é um conjunto semianalítico

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0 \text{ e } g(x, y) > 0\}.$$

Portanto f é uma função semianalítica.

Definição 1.28. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $F : A \rightarrow B$ é semianalítica se suas funções coordenadas são semianalíticas.

Proposição 1.29. Uma aplicação $F : A \rightarrow B$, como acima, é semianalítica se seu gráfico $\text{Graf}(F) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é um conjunto semianalítico.

Observação 1.30. Observe que essas duas categorias de conjuntos são semelhantes, com uma diferença da característica local dos conjuntos semianalíticos em contrapartida à definição de conjuntos semialgébricos. Sendo assim muitos resultados são comuns, mas infelizmente o célebre Teorema de Tarski-Seidenberg não é válido para ambas as classes. Logo, não é garantido que aplicações analíticas levam conjuntos semianalíticos em conjuntos semianalíticos. É possível encontrar um exemplo que exibi essa situação em (BIERSTONE; MILMAN, 1988), Exemplo 2.14.

Assim foi desenvolvida a categoria mais geral, os conjuntos subanalíticos.

Definição 1.31. ((BIERSTONE; MILMAN, 1988), Def.3.1) Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é dito subanalítico se todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$ admite uma vizinhança U tal que $A \cap U$ é a projeção de um subconjunto semianalítico compacto, isto é, existe um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ semianalítico compacto, $m \geq n$, tal que a projeção $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ restrita a X é uma aplicação própria e $A \cap U = \pi(X)$.

Observe que é possível definir um subconjunto semianalítico A em $Y \subset \mathbb{R}^n$. Neste caso usamos a definição acima mas para todo $x \in Y$. Logo, a definição de conjunto subanalítico depende do espaço onde ele está.

Teorema 1.32. (*Teorema de Tarski-Seidenberg para conjuntos subanalíticos*)((BEZERRA, 2007), p.8): *A imagem de um conjunto subanalítico $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por uma projeção $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ própria é um conjunto subanalítico.*

Note que todo conjunto semianalítico é subanalítico.

Definição 1.33. (BEZERRA, 2007) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ é subanalítica se seu gráfico $\text{Graf}(F) = \{(x, F(x)); x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto subanalítico.

Definição 1.34. (BEZERRA, 2007) Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $F : A \rightarrow B$ é subanalítica se suas funções coordenadas são subanalíticas.

Proposição 1.35. *Uma aplicação $F : A \rightarrow B$, como acima, é subanalítica se seu gráfico $\text{Graf}(F) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é um conjunto subanalítico.*

Existem definições equivalentes de conjuntos subanalíticos. Antes de enuncia-las apresentaremos um resultado muito relevante.

Teorema 1.36. (*Teorema do Complemento*)((BIERSTONE; MILMAN, 1988), Teo. 3.10): *Seja M uma variedade analítica real e seja X subconjunto subanalítico de M . Então X^c é subanalítico.*

Agora por meio do teorema a seguir teremos definições equivalentes.

Proposição 1.37. ((BIERSTONE; MILMAN, 1988), Prop. 3.13): *Seja M uma variedade analítica real, e seja X um subconjunto de M . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) X é subanalítico;
- (2) todo ponto de M tem uma vizinhança U tal que

$$X \cap U = \bigcup_{i=1}^p (f_{i1}(A_{i1}) - f_{i2}(A_{i2})),$$

onde, para cada $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, 2$, A_{ij} é um subconjunto analítico fechado de uma variedade analítica real N_{ij} , $f_{ij} : N_{ij} \rightarrow U$ é analítica real, e f_{ij} restrita a A_{ij} é própria.

- (3) todo ponto de M tem uma vizinhança U tal que $X \cap U$ pertence as classes de subconjuntos de U obtidas usando interseções finitas, união finita e complementar; a partir da família de subconjuntos fechados de U da forma $f(A)$, onde A é um subconjunto analítico fechado de uma variedade analítica real N , $f : N \rightarrow U$ é analítico real e $f|_A$ é própria.

Observação 1.38. O item (2) do teorema acima é a definição utilizada em (SHIOTA, 1997).

Apresentaremos agora algumas propriedades de conjuntos e aplicações subanalíticas ((SHIOTA, 1997), p.52):

Propriedades 1.39. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos subanalíticos e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação subanalítica.*

- i) *Os conjuntos $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $X \cap Y$, $\bar{X}$ e $X \setminus Y$ são subanalíticos.*
- ii) *A família de componentes conexas de X é finita e toda componente conexa é subanalítica.*
- iii) *Os conjuntos $f(X)$ e $f^{-1}(Y)$ são subanalíticos.*
- iv) *Para cada $x \in \bar{X} \setminus X$ existe uma aplicação subanalítica $\Phi : [0, 1] \rightarrow \bar{X}$ tal que $\Phi([0, 1]) \subset X$, $\Phi(0) = x$ e $\Phi|_{(0, 1]}$ é analítica.*
- v) *Suponhamos X uma subvariedade de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ de dimensão m . A união $TX = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times T_x X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de espaços tangentes, e o conjunto $\{(x, T_x X) \in X \times G_{n, m}\}$ são subanalíticos.*
- vi) *Sejam f_1, f_2 funções subanalíticas em X . O produto $f_1 \cdot f_2$ e a soma $f_1 + f_2$ são subanalíticos.*
- vii) *Suponhamos $f(X) \subset Y$. Seja $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação subanalítica. A composição $g \circ f$ é subanalítica.*
- viii) *Dada uma função subanalítica $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$ são subanalíticas.*

Observação 1.40. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para $p \in \mathbb{R}$ na reta não se trata de um conjunto subanalítico. De fato, pelo item iv) da propriedade acima sabemos que como $p \in \overline{(x_n)}$ então existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{(x_n)}$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma|_{(0, 1]}$ é analítico, o que gera um absurdo, pois entre dois pontos da sequência sempre existe um ponto que não pertence a mesma, ou seja, impossível obter um caminho nessa sequência. Por exemplo o conjunto dos racionais e dos irracionais não são subanalíticos na reta.

Os espaços subanalíticos tem estrutura cônica ((SHIOTA, 1997), (COSTE, 1999) Thm 4.10).

1.3 Estratificação de Whitney

A ideia da estratificação é decompor um espaço singular em variedades suaves com algum controle ou regra sobre como fragmentar esse espaço. As referências mais usadas nessa seção são (TROTMAN, 2007), (SHIOTA, 1997) e (VERDIER, 1976).

Definição 1.41. ((VERDIER, 1976), p.300) Uma estratificação de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma partição localmente finita $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X , onde S_α é uma subvariedade analítica suave e um subespaço subanalítico em X chamada estrato.

Lembrando que a Definição 1.31 de espaços subanalíticos depende do espaço onde foi mergulhado, isto é, uma definição local.

Observação 1.42. Algumas referências, por exemplo (SHIOTA, 1997) não pede que cada estrato seja subanalítico em X . Mas (VERDIER, 1976) exige essa condição pois nesse trabalho usa-se um tipo de condição para a estratificação que se faz necessário essa exigência (a (w) -condição, a qual definiremos posteriormente).

Definição 1.43. ((SHIOTA, 1997), p.4) A estratificação S satisfaz a Condição de Fronteira se S_α e S_β são estratos com $S_\alpha \cap \overline{S_\beta} \neq \emptyset$, implica que $S_\alpha \subset \overline{S_\beta}$, para qualquer par $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$.

Definição 1.44. ((BIERSTONE; MILMAN, 1988), Remark 2.12) Se $X = \cup_\alpha S_\alpha$ é uma estratificação, a dimensão de X é igual a dimensão máxima de S_α , ou seja, $\dim X = \max_\alpha \dim S_\alpha$.

Os exemplos desta seção são clássicos, retirados de (BEZERRA, 2007).

Exemplo 5. Seja $f(x, y, z) = z(x^2 - y^2) + x^4 + y^4$ então a variedade V_f definida por $V_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\}$ tem as seguintes estratificações.

Figura 4 – Estratificação de V_f

Exemplo 6. O famoso “Guarda-chuva de Whitney”, $g(x, y, z) = x^2 - y^2z$ e seja $V_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; g(x, y, z) = 0\}$.

Figura 5 – Estratificação de V_g

Considere X o conjunto estratificado, vamos denotar $X = \cup_{\alpha} S_{\alpha}$, S_{α} estratos.

Exemplo 7. Seja $h(x, y) = x(x - y^2)$ considere $V_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; h(x, y) = 0\}$.

Figura 6 – Estratificação de V_h

Agora consideramos uma tripla $(y, S_{\alpha}, S_{\beta})$ com S_{α} e S_{β} estratos de X que satisfazem a condição de fronteira e $y \in S_{\alpha} \subset \overline{S_{\beta}}$.

Definição 1.45. ((VERDIER, 1976), p.300) Considere a tripla $(y, S_{\alpha}, S_{\beta})$ de estratos de X que satisfazem a condição de fronteira. Dizemos que o par satisfaz a condição (a)-regular em um ponto $y \in S_{\alpha}$, se dada uma sequência $\{x_n\}$ de pontos em S_{β} tal que $\{x_n\} \rightarrow y$ e $T_{x_n}S_{\beta}$ convirja para algum plano $\tau \in \mathbb{R}^n$, temos que $T_y S_{\alpha} \subset \tau$.

Dizemos que a tripla $(y, S_{\alpha}, S_{\beta})$ satisfaz a condição (a)-regular se ele a satisfaz em todos os pontos de S_{α} .

Agora segue a (b)-regularidade.

Definição 1.46. ((VERDIER, 1976), p.300) Dizemos que a tripla $(y, S_{\alpha}, S_{\beta})$ é Whitney regular se satisfaz a condição (b) de Whitney, i.e., dada uma sequência $\{x_n\} \subset S_{\beta}$ que converge para $y \in S_{\alpha}$ tal que a sequência de espaços tangentes $T_{x_n}S_{\beta}$ converge para um subespaço τ em $\mathbb{R}^n$ e uma sequência $\{y_n\} \subset S_{\alpha}$ convergindo para y tal que a sequência de retas secantes l_{x_i, y_i} de x_i a y_i converge para uma reta l , tem-se $l \subset \tau$.

A tripla $(y, S_{\alpha}, S_{\beta})$ é (b)-regular se ele satisfaz a condição (b) em todos os pontos de S_{α} . Neste caso, dizemos que o par (S_{α}, S_{β}) é *Whitney regular*.

A condição (b) implica na condição (a) por isso costuma-se verificar somente a condição (b) para obter a estratificação de Whitney.

Consideramos agora um conjunto analítico $X \subset \mathbb{R}^n$ equipado com $S = \{S_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma estratificação de Whitney de classe C^{∞} . Dizemos que essa estratificação satisfaz a (w)-condição de Kuo se: dados subespaços vetoriais A e B de $\mathbb{R}^n$, seja π_B a projeção ortogonal em B . Define a distância (ou ângulo) entre A e B por

$$\delta(A, B) = \sup_{a \in A, \|a\|=1} \text{dist}(a, B) = \sup_{a \in A, \|a\|=1} \|a - \pi_B(a)\|.$$

Considere a tripla (y, S_α, S_β) , onde S_α e S_β são estratos de X com $y \in S_\alpha \subset \overline{S_\beta}$. A (w) -condição de Kuo (também conhecida como condição forte de Whitney) para uma tripla é satisfeita quando existe uma vizinhança U_y de $y \in S_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e uma constante $C > 0$ tal que

$$\delta(T_{y'}S_\alpha, T_xS_\beta) \leq C||y' - x||,$$

para todo $y' \in U_y \cap S_\alpha$ e todo $x \in U_y \cap S_\beta$.

Definição 1.47. A estratificação $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de Whitney de classe C^∞ é dita (w) -regular se toda tripla (y, S_α, S_β) satisfaz a w -condição.

Teissier em (TEISSIER, 1982) mostra que nos complexos as condições $(w) \iff (b)$. Em (VERDIER, 1976) p. 297 constatamos a necessidade de se definir cada estrato como um subespaço subanalítico no espaço mergulhado (Observação 1.42), para termos $(w) \implies (b)$ no corpo dos reais, caso contrário não teríamos essa implicação em geral.

Abaixo ilustraremos uma função nos reais que possui a (b) -regularidade e não satisfaz a (w) -regularidade.

Em (TROTMAN, 2007), Trotman mostra que a condição (b) é um C^1 invariante enquanto a (w) não é (se trata de um C^2 invariante).

Exemplo 8. ((BRODERSEN; TROTMAN, 1979), Exemplo 1) Seja $f(x, y, z) = z^2x^3 + x^5 - y^3$ com $x, y, z \in \mathbb{R}$ considere a variedade $V = \{y^3 = z^2x^3 + x^5\} \in \mathbb{R}^3$. Vamos assumir a estratificação como sendo Z o eixo- z e $X = V \setminus Z$. Observe que essa variedade pode ser escrita como gráfico da função $g(x, z) = \sqrt[3]{z^2x^3 + x^5}$. É possível mostrar que g é de classe C^1 mas não é C^2 .

Figura 7 – Estratificação canônica sem a w -regularidade

1.4 Fibrção de Milnor caso complexo

Nesta sessão exibiremos o Teorema da Fibrção de Milnor. As provas podem ser consultadas em (MILNOR, 1968) e (LIMA, 2011).

Definição 1.48. Sejam E , B e F variedades diferenciáveis. Um fibrado diferenciável η sobre B , com fibra F , é uma terna $\eta = (E, p, F)$ satisfazendo as seguintes condições:

- i) $p : E \longrightarrow B$ uma submersão sobrejetora, chamada projeção.
- ii) para cada $b \in B$, existe um aberto $U_b \subset B$, $b \in U_b$ e um difeomorfismo $\phi_b : U_b \times F \longrightarrow p^{-1}(U_b)$ tal que $p \circ \phi_b = \pi_1$, sendo π_1 a projeção na primeira coordenada (*condição de trivialidade local*).

O espaço E é chamado espaço total, o espaço B base do fibrado e o par (U_b, ϕ_b) uma trivialização local do fibrado, sendo que $\{U_b\}$ é uma cobertura por abertos da base B .

Observação 1.49. Um fibrado é topológico quando os espaços E , B e F são espaços topológicos, p uma projeção e ψ_b um homeomorfismo.

A partir de agora assumiremos $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial complexa que se anula na origem. Nosso objetivo é provar que a aplicação $\phi := \frac{f}{\|f\|}$ não tem pontos críticos em $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$ para todo ε suficientemente pequeno. Usando o Lema 4.1 (MILNOR, 1968) basta garantirmos que para todo $z \in \mathbb{C}^n \setminus V$ suficientemente próximo da origem, z e $i\nabla \log f(z)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Milnor apresenta um resultado ainda mais forte do que almejávamos.

E além disso essa proposição ajuda na caracterização do campo de vetores necessário para a prova do Teorema da Fibrção de Milnor.

Proposição 1.50. *Dado uma função polinomial f , existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}^n \setminus V$ com $\|z\| \leq \varepsilon_0$, os vetores z e $\nabla \log f(z)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ ou*

$$\nabla \log f(z) = \lambda z,$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\arg \lambda < \frac{\pi}{4}$.

Em outras palavras, λ pertence ao quadrante aberto do plano complexo contendo o semi-eixo real positivo. Segue-se que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Portanto, λ não pode ser imaginário puro.

Observação 1.51. Por meio da proposição acima podemos observar que, se z e $\nabla \log f(z)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ então o mesmo vale para z e $i\nabla \log f(z)$. Assim, são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Caso $\nabla \log f(z) = \lambda z$, com λ não sendo imaginário puro, então, $i\nabla \log f(z) = (i\lambda)z$ com $i\lambda \notin \mathbb{R}$. Portanto, $i\nabla \log f(z)$ não será um múltiplo real de z , concluindo assim que $i\nabla \log f(z)$ e z são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

A prova do resultado anterior depende do Lema de Seleção da Curva e do seguinte lema:

Lema 2. *Seja $p : [0, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ um caminho analítico real com $p(0) = 0$ tal que, para cada $t > 0$ o número $f(p(t))$ é não nulo e $\nabla \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$, $\lambda(t) \in \mathbb{C}$. Então*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = 0,$$

onde $\theta(t) = \arg \lambda(t)$. Em outras palavras, $\lambda(t)$ é não nulo para valores positivos suficientemente pequenos de t e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = 1.$$

Segue assim, da Proposição 1.50 o seguinte resultado:

Corolário 1.52. *Para todo $z \in \mathbb{C}^n \setminus V$ suficientemente próximo da origem, os vetores z e $i\nabla \log f(z)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.*

Corolário 1.53. *Se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ então a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto \frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)} \end{aligned}$$

não tem pontos críticos.

Consequentemente, ϕ é uma submersão. Além disso, para cada $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, a fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$, é uma $(2n-2)$ variedade diferenciável. Chamamos F_θ de *fibra de Milnor de f* .

Para provar que ϕ se trata da projeção de um fibrado localmente trivial, é necessário controlar o comportamento de $\phi(z)$ quando z tende ao conjunto K onde ϕ não está definida. Isto é, queremos assegurar que o caminho $p(t)$ não tente a K quando t vai para t_0 , equivalentemente, garantir que $f(p(t))$ não tende a zero ou $\log|f(p(t))|$ não vai para $-\infty$ quando t tende para t_0 . Milnor faz uso da Proposição 1.50 e resolve esse problema definindo um campo de vetores que satisfaz o seguinte resultado:

Proposição 1.54. *Se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ então existe um campo de vetores diferenciável tangente $v(z)$ em $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$ tal que, para cada $z \in \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$, o produto interno hermitiano $\langle v(z), i\nabla \log f(z) \rangle$ é não nulo e tem argumento principal menor do que $\frac{\pi}{4}$ em valor absoluto.*

Teorema 1.55. (Teorema da Fibrção de Milnor) *Para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, o espaço $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre $\mathbb{S}^1$ com projeção*

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

Agora para encerrar esse sessão apresentaremos alguns resultados para ajudar na caracterização topológica da fibra F_θ e do link K . Todos os resultados podem ser encontrados (MILNOR, 1968).

Definição 1.56. Dizemos que uma variedade é *paralelizável* se o seu fibrado tangente é trivial, isto é, existe um isomorfismo de fibrados vetoriais entre o fibrado tangente e o produto cartesiano da variedade e do espaço euclidiano. Paralelizável significa globalmente trivial.

Considere $n = m + 1 \geq 1$.

Teorema 1.57. *Toda fibra F_θ é uma variedade paralelizável e tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito de $\dim n - 1 = m$.*

Teorema 1.58. *O espaço $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ é $(m - 2)$ -conexo.*

Em consequência quando $m \geq 2$ o espaço K é conexo, já para $m \geq 3$ ele é simplesmente conexo.

Assumimos $f = f(z_1, \dots, z_{m+1})$ um polinômio de $m + 1$ variáveis que não possui pontos críticos em uma vizinhança da origem, exceto, talvez na própria origem. Dessa forma, a origem é um ponto crítico isolado ou um ponto regular da hipersuperfície $V = f^{-1}(0)$. Denotaremos $\overline{F_\theta}$ o fecho da fibra F_θ em $\mathbb{S}_\varepsilon$, para cada θ . Uma descrição deste fecho é encontrada a seguir:

Proposição 1.59. *Seja $\varepsilon > 0$ um número real suficientemente pequeno. Então $\overline{F_\theta}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2m$, com bordo $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$, cujo interior é exatamente F_θ .*

Corolário 1.60. *A variedade compacta com bordo $\overline{F_\theta}$ está mergulhada em $\mathbb{S}_\varepsilon$, tendo o mesmo tipo de homotopia que seu complementar $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}$.*

Corolário 1.61. *A homologia de F_θ está centrada nas dimensões 0 e m . Além disso, $H_0(F_\theta) = \mathbb{Z}$.*

Lema 3. *A fibra F_θ é $(m - 1)$ -conexa.*

Por fim segue um dos resultados mais famosos, no que diz respeito, a topologia da fibra.

Teorema 1.62. *Cada fibra F_θ tem o tipo de homotopia de um buquê de esfera:*

$$\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^m \vee \dots \vee \mathbb{S}^m$$

O número de esferas do buquê mencionado no Teorema acima é denominado número de Milnor da aplicação f .

1.5 Fibrção no caso real e de Milnor-Lê

Posteriormente por meio da Fibrção de Milnor, o pesquisador Lê chegou ao seguinte teorema:

Teorema 1.63. *(Teorema da Fibrção de Milnor-Lê) Seja $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, uma função polinomial holomorfa. Considere o “tubo de Milnor” definido por $N(\varepsilon, \delta) = \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\partial \mathbb{D}_\delta)$ onde $\mathbb{B}_\varepsilon$ é um bola de bordo $\mathbb{S}_\varepsilon$ e $\partial \mathbb{D}_\delta$ é o bordo do disco de raio δ centrado na origem de $\mathbb{C}$. Quando $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ a aplicação f induz a fibrção*

$$f : N(\varepsilon, \delta) \rightarrow \partial \mathbb{D}_\delta. \quad (1.1)$$

Figura 8 – Tubo de Milnor

Esse resultado foi provado por Milnor ((MILNOR, 1966), Teo. 2, (MILNOR, 1968), Teo. 11.2) quando f tem ponto crítico isolado. Utilizando do fato das fibras em $N(\varepsilon, \delta)$ serem transversais a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$ e o Teorema de Fibrção de Ehresmann para variedades com bordo.

Teorema 1.64. (*Teorema de Fibrção de Ehresmann*): *Seja $p : M \rightarrow N$ uma submersão sobrejetora própria de variedades diferenciáveis. Então p é a projeção de um fibrado localmente trivial.*

Quando queremos a versão desse teorema para variedade com bordo, basta adicionar a condição de $dp : \partial M \rightarrow N$ ser submersão, onde M tem bordo.

Definição 1.65. A aplicação f tem a a_f -condição de Thom se existe uma estratificação de Whitney $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ da fonte adaptada a $V = f^{-1}(0)$, isto é, V é a união de estratos e $\mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus V$ é o estrato de maior dimensão. Considere $y \in V$ e seja S_α o estrato que contém y . Seja $\{x_i\} \subset \mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus V$ uma sequência convergindo para y e $F_i = f^{-1}(f(x_i))$ tal que $T_x F_i \rightarrow T$, para algum subespaço da fonte. Dizemos que f satisfaz a a_f -condição de Thom se $T_y S_\alpha \subset T$.

Exemplo 9. Todo germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $n > p$, com ponto crítico isolado na origem tem a a_f -condição de Thom. Basta usar a estratificação $\mathbb{B}_\varepsilon^n = (\mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus V) \cup (V \setminus \{0\}) \cup \{0\}$.

O exemplo a seguir está em ((GIBSON *et al.*, 1976), p.23).

Exemplo 10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = xy$. Tomemos uma sequência de pontos x_i no primeiro quadrante convergindo para um ponto x no eixo- x . A condição de Thom afirma que as retas tangentes em x_i das fibras de x_i devem convergir para o eixo- x . A figura abaixo ajuda a compreender a situação acima e ilustra bem a propriedade a_f de Thom.

Figura 9 – Condição a_f -Thom

Observação 1.66. Note que a condição a_f -de Thom garante mais que a transversalidade das fibras com a esfera.

Agora para o caso geral Lê provou em ((LÊ, 1977), Teo. 1.1), por meio do teorema de Hironaka ((HIRONAKA, 1977)) do qual garante que toda função holomorfa $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz a a_f -condição de Thom e por consequência sabemos que as fibras em $N(\varepsilon, \delta)$ são transversais a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$. Segue o seguinte resultado:

Proposição 1.67. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação analítica real com valor crítico isolado satisfazendo a prop. de Thom em 0. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ existe $0 < \delta \ll \varepsilon$ e para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^p$ com $\|\xi\| = \delta$ a fibra $f^{-1}(\xi)$ é transversal a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$.*

Milnor em seu livro (MILNOR, 1968) levanta a questão sobre a fibração no caso real, quando estamos com o corpo dos números reais. Será possível existir resultados similares para aplicações germe analíticas reais $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com $n \geq p$? Fazendo algumas restrições, como por exemplo, exigindo que f tenha um ponto crítico isolado, então ele assegura que sempre existe uma fibração no tubo, do tipo (1.1). Como pontuado na introdução é necessário fazer algumas exigências para obter a fibração sobre uma pequena $(p-1)$ -esfera em $\mathbb{R}^p$, ter esse tubo sempre podendo ser inflado a $(p-1)$ -esfera, definindo uma fibração equivalente $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ tal que restrita a uma vizinhança de K é a projeção $\frac{f}{\|f\|}$. As condições solicitadas geram algumas fraquezas nesse teorema, das quais são:

1) O fato de exigir um ponto crítico isolado é muito rigorosa. Quando isso ocorre é dito que o germe de aplicação correspondente satisfaz a *condição de Milnor*. Um linha de pesquisa interessante nessa área é buscar pares (n, p) para que existam germes de aplicações analíticas satisfazendo essa condição, há algumas classificações em ((CHURCH; LAMOTKE, 1975), (LOOIJENGA, 1971), (SANTOS *et al.*, 2016)). Particularmente quando $p = 2$ existem muitas fibrações de Milnor associadas. Um trabalho pioneiro nessa condição foi (PICHON; SEADE, 2003).

2) Tomando a aplicação ϕ sendo globalmente a projeção canônica $\phi := \frac{f}{\|f\|}$. Quando isto acontece dizemos que a aplicação germe satisfaz a *forte condição de Milnor*. Os trabalhos (JACQUEMARD, 1989), (SEADE, 1997), (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002), (CISNEROS-

MOLINA, 2008), (SANTOS, 2012) dentre outros, explicitam exemplos e requisitos que satisfaçam essa condição.

3) Por fim, quando é garantida a existência dos dois tipos de fibrações, uma no tubo de Milnor e outra em uma esfera menos o link, não sabemos se as duas fibrações são equivalentes.

O exemplo abaixo exhibe uma aplicação que não satisfaz o item 1).

Exemplo 11. Considere

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, w) &\longmapsto (x^3 + xy + z^2 + w^2, x^2y + y^3) \end{aligned}$$

Encontrando a matriz jacobiana é possível ver que os pontos críticos dessa aplicação é o seguinte conjunto, $\Sigma_g = \{(0, 0, z, w) \in \mathbb{R}^4\}$.

Segue um exemplo de uma aplicação que ilustra o item 2).

Exemplo 12. ((MILNOR, 1968), p.99) Seja

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ (x, y) &\longmapsto (x, x^2 + y(x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.1. em ((SANTOS, 2012)) garantimos que $\frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\varepsilon^2 \setminus K \longrightarrow \mathbb{S}^1$ não é uma projeção de uma fibração suave localmente trivial.

Um exemplo interessante e muito conhecido do item 3) é o polinômio de Pham-Brieskorn, segue no apêndice A, ele está no corpo dos complexos mas exemplifica as fibrações e sua equivalência e posteriormente no capítulo 4 será exibido uma relação topológica com um polinômio misto.

Cisneros-Molina, Seade e Snoussi criam uma condição para garantir esse último item, essa ferramenta foi motivada pela prova do Teorema da Fibração de Milnor no caso complexo, está implícita na demonstração. Na próxima seção detalharemos essa tão importante condição.

1.6 A d-regularidade

Nas duas próximas seções apresentaremos o conceito de regularidade, criado por J.L. Cisneros-Molina, J. Seade e J. Snoussi ((CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2009), (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2010) e (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2012)) e recentemente estendido com a colaboração de A. Menegon (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -). Se trata de uma condição necessária para garantirmos a Fibração de Milnor e de Milnor-Lê no caso real. Seguiremos (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2012) e (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -).

Agora trabalharemos no caso real, apesar da regularidade ser definida nos complexos também.

Definição 1.68. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação analítica real localmente sobrejetora em uma vizinhança da origem e $L \subset \mathbb{R}^p$ uma reta contendo a origem. Definimos

$$X_L := \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \in L\}.$$

A família de espaços $\{X_L\}$ quando L varia em $\mathbb{RP}^{p-1}$ é chamado pencil canônico associado a f .

Quando f tem valor crítico isolado garantimos que toda a família é suave fora de $V = f^{-1}(0)$.

Note que para qualquer L e L' em $\mathbb{RP}^{p-1}$ as pré-imagens correspondentes satisfazem.

$$X_L \cap X_{L'} = V$$

e o pencil cobre toda a vizinhança onde a aplicação f é definida, isto é,

$$U = \bigcup_{L \in \mathbb{RP}^{p-1}} X_L.$$

Suponhamos que a aplicação f tem um valor crítico isolado no 0 e é localmente sobrejetora. Então toda X_L tem dimensão $n - (p - 1)$. Neste caso X_L é suave fora de V .

Toda linha L intercepta a esfera $\mathbb{S}^{p-1}$ em dois pontos antípodas θ^- e θ^+ . Podemos então decompor a linha L em duas linhas semi-abertas L^- e L^+ contendo respectivamente os pontos θ^- e θ^+ , assim podemos expressar

$$L = L^- \cup \{0\} \cup L^+.$$

Se definirmos E_{θ^-} , respectivamente E_{θ^+} , sendo a imagem inversa $f^{-1}(L^-)$, respectivamente $f^{-1}(L^+)$, então podemos expressar todos os elementos do pencil canônico como a seguinte união

$$X_L = E_{\theta^-} \cup V \cup E_{\theta^+}. \quad (1.2)$$

Usando essas notações descrevemos as fibras da aplicação $\phi : \mathbb{S}_{\varepsilon}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ como segue

$$\phi^{-1}(\theta^-) = E_{\theta^-} \cap \mathbb{S}_{\varepsilon}^{n-1}$$

e

$$\phi^{-1}(\theta^+) = E_{\theta^+} \cap \mathbb{S}_{\varepsilon}^{n-1}.$$

Sendo K o link de f em $\mathbb{S}_{\varepsilon}^{n-1}$, segue a seguinte expressão

$$X_L \cap \mathbb{S}_{\varepsilon}^{n-1} = (E_{\theta^-} \cap \mathbb{S}_{\varepsilon}^{n-1}) \cup K \cup (E_{\theta^+} \cap \mathbb{S}_{\varepsilon}^{n-1}) = \phi^{-1}(\theta^-) \cup K \cup \phi^{-1}(\theta^+).$$

Dessa forma segue agora a definição precisa de d -regularidade.

Definição 1.69. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação analítica real localmente sobrejetora com um valor crítico isolado em 0. Dizemos que f é d -regular se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e para toda linha L que passa pela origem em $\mathbb{R}^p$, a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ e a variedade $X_L \setminus V$ são transversais.

Observação 1.70. Recordando que toda X_L pode ser decomposta como na equação (1.2), a condição de d -regularidade indica que E_θ 's são transversais as esferas. Essa condição de regularidade foi criada olhando a geometria da prova do Teorema da Fibrção de Milnor em seu livro. Observando como se comporta os pontos críticos para termos a projeção desejada.

A ilustração abaixo representa um pouco da motivação da d -regularidade e nos dá a ideia da transversalidade do pencil canônico com a esfera de Milnor.

Figura 10 – Esfera de Milnor e o pencil canônico

Agora, vamos exibir um resultado que oferece uma maneira de verificar a d -regularidade sem usar a transversalidade.

Lema 4. ((CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2012), Lema 3.13) A aplicação $f = (f_1, \dots, f_n)$ é d -regular se e somente se não existe ponto fora de V e próximo da origem em $\mathbb{R}^n$ onde a matriz M tem rank estritamente menor que p , onde a matriz M é dada por: suas primeiras $\frac{p(p-1)}{2}$ colunas são dadas por $f_k \text{ grad } f_j - f_j \text{ grad } f_k$ para $1 \leq k < j \leq n$, e a última coluna é o vetor $(x_1, \dots, x_n)$.

Os dois próximos exemplos estão em (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2012).

Exemplo 13. Considere a aplicação analítica real

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (xz + y^3, z) \end{aligned}$$

Podemos verificar que

$$V = f^{-1}(0) = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$$

coincide com o lugar geométrico crítico de f . Assim, ele tem um valor crítico isolado na origem de $\mathbb{R}^2$.

Agora aplicamos a Lema 4. Assim os pontos onde os X_L 's não são transversais as esferas correspondentes são os pontos onde a matriz

$$\begin{pmatrix} -z^2 & -3y^2z & y^3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

tem rank estritamente menor que 2. Isso é alcançado apenas em V . Assim essa aplicação é d -regular.

Exemplo 14. Agora exibiremos outra aplicação sutilmente diferente

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2z + y^3, x) \end{aligned}$$

Note que $V = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$, ou seja, essa aplicação ainda tem valor crítico isolado. Contudo ao longo de toda a linha $\{(x, 0, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$, os espaços X_L não são transversais as esferas correspondentes, assim não é d -regular.

Observação 1.71. Os polinômios homogêneos pesados polares e radiais e as aplicações homogêneas pesadas reais com um valor crítico isolado, satisfazem a d -regular.

No mesmo sentido de garantir a projeção da fibração na esfera existe também o Teorema 2.2 em (SANTOS; TIBĂR, 2010).

Proposição 1.72. ((CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2010), Prop.3.2) *A aplicação f é d -regular se e somente se existe ε_0 tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ a aplicação ϕ induzida em $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ é uma submersão.*

Consequentemente, dada uma aplicação f analítica real localmente sobrejetora com um valor crítico isolado e com a a_f -propriedade de Thom, d -regularidade é necessária para a aplicação associada $\phi = \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ ser uma fibração localmente trivial. Veremos agora porque e como d -regularidade é também uma condição suficiente para ϕ ser a aplicação projeção de uma fibração localmente trivial. O método que utilizado garante que sempre os dois tipos de fibrações existem, uma no tubo de Milnor, e outra na pequena esfera menos o link, e são equivalentes. Para tal definimos:

Definição 1.73. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} : U \setminus V &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\longmapsto \|x\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|}. \end{aligned}$$

Chamamos aplicação esferificação associada a f .

Essa aplicação tem a especificidade que seus tubos de Milnor são as esferas menos o link, leva esferas em $\mathbb{R}^n$ em esferas em $\mathbb{R}^p$ preservando o raio. E mais, cada uma de suas fibras está contida em um único elemento do pencil canônico de f .

A partir de agora assumimos $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ com um valor crítico isolado, localmente sobrejetora, d -regular e com a a_f -propriedade de Thom.

Seja v um campo de vetores radial em $\mathbb{R}^p$, $v(y_1, \dots, y_p) = (y_1, \dots, y_p)$. Consequentemente f e $\mathfrak{F}$ não tem ponto crítico fora V , podemos levantar v afim obter dois campos vetoriais v_f e $v_{\mathfrak{F}}$ usando respectivamente f e $\mathfrak{F}$.

O vetor v_f é transversal a todos os tubos suficientemente pequenos $N(\varepsilon, \delta)$ e tangente a todos os X_L 's. Entretanto o campo de vetores $v_{\mathfrak{F}}$ é transversal a todas as esferas e tangente a cada X_L 's. Pode-se mostrar que suficientemente próximo da origem esses campos vetoriais não podem apontar em direções opostas, assim a sua soma $w = v_f + v_{\mathfrak{F}}$ é um campo de vetores suave nunca vazio, que é tangente a X_L 's e transversal as esferas e a $f^{-1}(\partial \mathbb{D}_\delta)$ (quando apontam em direções opostas, basta tomar um deles). Tem-se

Lema 5. ((CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2009), Lema 5.2) Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe analítico com valor crítico isolado em 0. A aplicação f é d -regular se e somente se existe um campo de vetores suave w em $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus V$ que tem as seguintes propriedades:

- i) é radial, isto é, é transversal a todas as esferas em $\mathbb{B}_\varepsilon^n$ centrada em origem de $\mathbb{R}^n$.
- ii) é tangente a cada $X_L \setminus V$.
- iii) é transversal a todos os tubos $f^{-1}(\partial \mathbb{D}_\delta)$.

O fluxo gerado pelo campo de vetores w deforma a fibração no tubo na desejada fibração na esfera. De fato, chamamos $\overset{\circ}{T}(\varepsilon, \delta) = \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \cap f^{-1}(\overset{\circ}{\mathbb{D}}_\delta \setminus \{0\})$ o espaço interpretado como sendo a “tampa” do tubo $f^{-1}(\overset{\circ}{\mathbb{D}}_\delta \setminus \{0\}) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$, ou seja, $\overset{\circ}{T}(\varepsilon, \delta)$ é o conjunto onde $f^{-1}(\overset{\circ}{\mathbb{D}}_\delta \setminus \{0\}) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ encontra o bordo da esfera $\mathbb{S}_\varepsilon$.

A ideia para obter a equivalência entre as fibrações é: qualquer ponto no $N(\varepsilon, \delta)$ pode ser movimentado através do fluxo gerado pelo campo de vetores w até atingir (de maneira única) um ponto em $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus \overset{\circ}{T}(\varepsilon, \delta) \supset \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus K$. Obtém-se a fibração

$$\phi_1 : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus \overset{\circ}{T}(\varepsilon, \delta) \longrightarrow \partial \mathbb{D}_\delta \cong \mathbb{S}^{p-1}.$$

Consequentemente o fluxo é tangente aos X_L 's, qualquer ponto é levado ao longo do mesmo X_L . Assim a aplicação ϕ_1 coincide com $\frac{f}{\|f\|}$.

Por outro lado existe uma fibração no complementar

$$\phi_T : \overset{\circ}{T}(\varepsilon, \delta) \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1}.$$

Essas duas fibrações coladas (unidas) gera a fibração desejada

$$\phi : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus K \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1}.$$

Assim temos o seguinte teorema, inclusive o holomorfismo clássico caso de Milnor.

Teorema 1.74. (*CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2009*) Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germe analítico com um valor crítico isolado em 0. Se as duas fibrações existem (uma no todo de Milnor, outra na esfera menos o link), então essas duas fibrações são suavemente equivalentes. Isto é, existe um difeomorfismo entre os espaços totais correspondentes, levando fibras em fibras.

1.7 A D , d_h e D_h -regularidades

Continuando com o conceito de d -regularidade, vamos definir e dar alguns resultados da sua extensão. Nos baseamos em (*CISNEROS-MOLINA et al., -*).

Considere $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $1 < p \leq n$ germe analítico real com valores críticos não isolados. Denotaremos Σ_f para os pontos críticos de f e $\Delta_f := f(\Sigma_f)$ o discriminante da f .

Definição 1.75. Dizemos que um germe analítico real $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tem discriminante linear Δ_f se existe $\delta > 0$ tal que a interseção $\Delta_f \cap \mathbb{B}_\delta^p$ é uma união de segmentos de retas. Isto é,

$$\Delta_f \cap \mathbb{B}_\delta^p = \text{Cone}(\Delta_f \cap \mathbb{S}_\delta^{p-1}).$$

Nós chamamos δ de raio linear de Δ_f .

Exemplo 15. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, x^2 + y^2)$ analítica real. Seus pontos críticos estão no plano xy , $\Sigma_f = \{z = 0\} \cup \{x = y = 0\}$, logo, $\Delta_f = (x^2 + y^2, x^2 + y^2)$ ou $\Delta_f = (-z^2, 0)$ se trata da reta identidade e de um semi-eixo, respectivamente. Ambos discriminantes são lineares.

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germe analítico real com discriminante linear, e considere uma representação f e um número real $\delta > 0$ como na definição acima. Considere

$$\Delta_f^\delta := \Delta_f \cap \mathbb{B}_\delta^p \text{ e } \mathcal{A} := \Delta_f \cap \mathbb{S}_\delta^{p-1}.$$

Seguindo a ideia da definição de pencil canônico, vamos alterar a definição dos elementos da família do pencil. Isso será necessário para quando o discriminante não é linear e será necessário fazer sua linearização, veremos mais para frente. Para todo $\theta \in \mathbb{S}_\delta^{p-1}$, seja $L_\theta \subset \mathbb{R}^p$ um segmento aberto de reta que começa na origem (mas não a contém) e termina em θ (contendo-o). Seja,

$$E_\theta := f^{-1}(L_\theta).$$

Observação 1.76. Pode-se também usar a seguinte notação: $E_\theta = f^{-1}(L_\theta) = X_{f, id, \theta}$. Note que E_θ é uma variedade suave, para qualquer $\theta \in \mathbb{S}_\delta^{p-1} \setminus \mathcal{A}$, se trata do pencil canônico associado a f .

1.7.1 *D-regularidade*

Segue a definição de D -regularidade para quando f tem valor crítico não isolado, com um comportamento bom, isto é, discriminante linear. Todos os resultados e definições foram retirados de (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -).

Definição 1.77. Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe analítico real com discriminante linear. Dizemos que f é D -regular se existe ε_0 suficientemente pequeno, com $0 < \varepsilon_0 \leq \delta$, tal que $X_{f, id, \theta}$ intersecta a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ transversalmente em $\mathbb{R}^n$, para ε com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e qualquer $\theta \in \mathbb{S}_\delta^{p-1} \setminus \mathcal{A}$ tal que a interseção não seja vazia.

O critério para verificar a d -regularidade, Lema 4, continua válido para essa expansão de regularidade. Apenas é necessário alterar o ambiente a ser avaliado, isto é, deve-se mostrar que não existe pontos fora de V e de $f^{-1}(\Delta_f)$ próximos da origem de $\mathbb{R}^n$ onde a matriz M tem rank estritamente menor que p .

Definição 1.78. Dizemos que f tem a propriedade de transversalidade se existe um número real $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para qualquer $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existe um número real $\eta = \eta(\varepsilon)$, com $0 < \eta \ll \varepsilon$, tal que para qualquer $t \in \mathbb{B}_\eta^p \setminus \Delta_f$ temos que a fibra $f^{-1}(t)$ ou não intersecciona a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ ou $f^{-1}(t)$ intersecta a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ transversalmente em $\mathbb{R}^n$.

Observe que se f tem a a_f -Thom então possui a propriedade de transversalidade, mas a Thom regularidade é uma condição mais forte e mais complexa de ser mostrada. Existem germes de aplicações tais que as fibras dos valores regulares próximos da origem são transversais a esfera de raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (propriedade de transversalidade), assegurando a fibração no o de Milnor mas não tem a Thom regularidade. Essa situação pode ser encontrada em (PARAMESWARAN; TIBĂR, 2017) seção 5.1.

A proposição a seguir garante que toda aplicação ICIS (Interseção Completa com Singularidade Isolada, Def. 4.13) tem a propriedade acima e também nos auxilia a verificá-la.

Proposição 1.79. (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -) Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação analítico. Se $V = \{0\}$ ou se a interseção do conjunto crítico Σ_f de f com a variedade V está contida no conjunto $\{0\}$, então f tem a propriedade de transversalidade.

Demonstração. Suponhamos $V = \{0\}$ e fixe $\varepsilon > 0$. A continuidade de f garante que existe $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que $f^{-1}(t) \subset \mathbb{B}_\varepsilon^n$, para qualquer $t \in \mathbb{B}_\eta^p$. Assim, f tem a propriedade de transversalidade.

Agora assumimos $\dim V > 0$. Como f é real analítica, existe $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que V intersecta a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ transversalmente em $\mathbb{R}^n$, para qualquer ε com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Fixando um ε e considerando a restrição $f|_V$ de f a $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$. Seus pontos críticos são os pontos críticos de f que estão em $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ e os pontos regulares $x \in \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ de f tais que $f^{-1}(f(x))$ intersecta $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ não transversalmente.

Como $\Sigma_f \cap V \subset \{0\}$, segue que qualquer $x \in V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ é um ponto regular de f . Fazendo mudança de coordenadas, f é um projeção em uma vizinhança aberta de $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$, portanto as fibras de f próximas a V são transversais a $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$. Logo, existe uma vizinhança aberta W de $V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ em $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ tal que para qualquer $y \in W$ é um ponto regular de $f|_V$. Assim basta tomarmos $\delta = \delta(\varepsilon)$ suficientemente pequeno tal que $f^{-1}(\mathbb{B}_\delta^p) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ está contido em W . $\square$

Observação 1.80. Optamos por demonstrar esse resultado de grande relevância no capítulo 4 e também porque até o momento esse resultado não foi publicado.

O exemplo 15 exibe uma aplicação que possui essa propriedade pois nesta situação seu $V = \{0\}$.

Usando (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2009) e o fato da propriedade de transversalidade ser mais fraca que a a_f -Thom, porém ser suficientes em (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -) é estendido alguns resultados como:

Proposição 1.81. *Seja $f : (\mathbb{B}_{\varepsilon_0}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação analítico real de classe C^ℓ com $\ell \geq 1$, com discriminante linear. Considere $W = f^{-1}(\Delta_f^\eta)$. As seguintes afirmações são equivalente:*

1. a aplicação f é D -regular em 0.
2. para cada esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ em $\mathbb{R}^n$ centrada em 0 e de raio $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, a aplicação restrição $\mathfrak{F}_\varepsilon : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus W \longrightarrow \mathbb{S}_\varepsilon^{p-1} \setminus \Delta_f^\eta$ de $\mathfrak{F}$ é uma submersão.
3. a aplicação esferificação $\mathfrak{F}$ é uma submersão em $x \in \mathbb{B}_\varepsilon \setminus W$.
4. a aplicação $\phi = \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus W \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \mathcal{A}$ é uma submersão para toda esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ com $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

O resultado abaixo é igual ao Lema 5 mas para f com valor crítico não isolado que possui a D -regularidade.

Lema 6. A aplicação f é D -regular, se e somente se, existe um campo de vetores w, C^ℓ , em $\mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_0} \setminus W$ que tem as seguintes propriedades:

- i) radial, isto é, transversal a todas as esferas em $\mathring{\mathbb{B}}_{\varepsilon_0}$ centradas em 0.
- ii) é tangente a cada E_θ , quando a interseção for não vazia.
- iii) é transversal a todos os tubos $f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^{p-1} \setminus \Delta_f^\eta)$.

Os dois próximos resultados também estão em (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -) serão usados no capítulo 4.

Teorema 1.82. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com $n \geq p \geq 2$ um germe de classe C^ℓ com discriminante linear e raio η . Se f é D -regular e tem a propriedade de transversalidade, então existe números reais positivos $0 \leq \delta \ll \varepsilon \ll \eta$ tal que a restrição de Φ*

$$\phi = \Phi| : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus W \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \mathcal{A}$$

é uma fibração localmente trivial sobre sua imagem, onde $W = f^{-1}(\Delta_f^\eta)$. Se f é analítica real então a fibração é suave.

Usando o Lema 6 tem-se,

Teorema 1.83. *Considerando as hipóteses do teorema anterior e com a projeção $\tilde{\pi} : \mathbb{B}_\delta^n \setminus \Delta_f^\eta \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \mathcal{A}$, temos que os fibrados*

$$\tilde{f} := \tilde{\pi} \circ f| : \mathbb{B}_\varepsilon^n \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^{p-1}) \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \mathcal{A}$$

e

$$\phi : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus W \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \mathcal{A}$$

são equivalentes.

1.7.2 d_h regularidade

Vamos definir o homeomorfismo cônico e a d_h -regularidade.

Definição 1.84. Dizemos que um germe de homeomorfismo

$$h : (\mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0),$$

é o germe de um homeomorfismo cônico se para qualquer representação da seguinte forma:

$$h_\eta : \mathbb{B}_\eta^p \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p,$$

com $\mathbb{B}_\eta^p := h(\mathbb{B}_\eta^p)$ e com η suficientemente pequeno, tem-se:

- i) para cada $\theta \in \mathbb{S}_\eta^{p-1}$ a imagem $h_\eta(L_\theta)$ é um caminho em $\mathbb{R}^p$ de classe C^l com $l \geq 1$;
- ii) a aplicação inversa h^{-1} de h é de classe C^l com $l \geq 1$ fora da origem;
- iii) a aplicação h^{-1} é uma submersão fora da origem.

Dizemos que uma representação h_η como acima é um homeomorfismo cônico.

Quando temos um homeomorfismo cônico h fixado, e sem perigo de confusão, usamos $h : \mathbb{B}_\eta^{p-1} \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^{p-1}$ e definimos: $\varphi_{h,\theta} := h(L_\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{S}_\eta^{p-1}$.

Exemplo 16. Seja $h : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada por $h(u, v) = (u, v^3)$ cuja a inversa é $h^{-1}(u, v) = (u, \sqrt[3]{v})$. Como h é definida polinomialmente então é diferenciável e o i) é satisfeito, já sua inversa não é diferenciável no eixo u , como temos que avaliar os itens ii) e iii) fora da origem temos que h se trata de um homeomorfismo cônico.

Considerando $h : \mathbb{B}_\eta^{p-1} \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p$ um homeomorfismo cônico, então todo ponto $x \in \mathbb{B}_\eta^p$ pertence a algum caminho suave $\varphi_{h,\theta(x)}$, onde $\theta(x) = \frac{h^{-1}(x)}{\|h^{-1}(x)\|}$. Definindo $S_\eta^{p-1} := h(\mathbb{S}_\eta^{p-1})$ o homeomorfismo cônico h induz uma aplicação contínua e sobrejetora

$$\begin{aligned} \xi_h : \mathbb{B}_\eta^p \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}_\eta^{p-1} \\ x &\longmapsto h\left(\eta \frac{h^{-1}(x)}{\|h^{-1}(x)\|}\right). \end{aligned}$$

O ponto $\xi_h(x)$ é o ponto onde a curva $\varphi_{h,\theta(x)}$ que contem x interceciona S_η^{p-1} . Isto é, $\xi_h(x)$ leva cada curva suave $\varphi_{h,\theta(x)}$ no ponto $h(\theta) \in S_\eta^{p-1}$.

Para cada $\theta \in \mathbb{S}_\eta^{p-1}$ tem-se

$$h(L_\theta) := \varphi_{h,\theta} = \xi_h^{-1}(h(\theta)).$$

Considere um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ e um germe de homeomorfismo cônico $h : (\mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, tal que

$$f_h := h^{-1} \circ f,$$

é chamada de *modificação cônica* de f , podemos representam com o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ & \searrow f_h & \downarrow h \\ & & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Usando um representante de $h : \mathbb{B}_\eta^p \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p$, para todo $\theta \in \mathbb{S}_\eta^{p-1}$ define

$$X_{f,h,\theta} := f^{-1}(\varphi_{h,\theta}) = f^{-1}(h(L_\theta)).$$

Agora estamos aptos para definir d_h .

Definição 1.85. Dizemos que um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ e um homeomorfismo cônico $h : \mathbb{B}_\eta^p \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p$ são compatíveis em um subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{S}_\eta^{p-1}$ se $X_{f,h,\theta}$ é uma variedade diferenciável, para cada $\theta \in \mathcal{C}$. Dessa forma, f e h são compatíveis se f e h são compatíveis em $\mathbb{S}_\eta^{p-1}$.

Observação 1.86. Observe que se $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é um germe de aplicação de classe C^ℓ com valor crítico isolado, então qualquer homeomorfismo cônico $h : \mathbb{B}_\eta^p \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p$ é compatível com f .

Definição 1.87. Sejam $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação e $h : \mathbb{B}_\eta^{p-1} \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^{p-1}$ um homeomorfismo cônico compatível com f em $\mathcal{C} \subset \mathbb{S}_\eta^{p-1}$. Dizemos que f é d_h -regular relativamente a $\mathcal{C}$ se existe um $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno (com $f(\mathbb{B}_{\varepsilon_0}^n) \subset \mathbb{B}_\eta^p$) tal que para todo ε com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ intersecta $X_{f,h,\theta}$ transversalmente quando tal interseção não for vazia. Se $\mathcal{C} = \mathbb{S}_\eta^{p-1}$, dizemos que f é d_h -regular.

O resultado que segue para ajudar a garantir que uma aplicação é d_h -regular.

Proposição 1.88. *Sejam $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação C^ℓ e $h : \mathbb{B}_\eta^p \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p$ um homeomorfismo cônico.*

i) *A aplicação f é compatível com h em $\mathcal{C}$ se e somente se a modificação cônica $f_h = h^{-1} \circ f$ é compatível com a aplicação identidade em $\mathcal{C}$.*

ii) *Suponhamos que f e h são compatíveis em $\mathcal{C} \subset \mathbb{S}_\eta^{p-1}$. Então f é d_h -regular relativamente a $\mathcal{C}$ se e somente se f_h é d -regular relativamente a $\mathcal{C}$.*

Observe que a d_h -regularidade é de fato a generalização da d -regularidade, pois no caso da d -regularidade o homeomorfismo cônico é a identidade. Dessa forma é possível expressar $X_{f,h,\theta} = X_{f,id,\theta}$.

O interessante da d_h -regularidade é que podemos ter uma aplicação que não seja d -regular mas tenha a regularidade d_h . O seguinte exemplo exhibe muito bem essa situação. Já mostramos no Exemplo 14 que f não é d -regular.

Exemplo 17. Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada por $f(x, y, z) = (x^2z + y^3, x)$, onde $\Sigma_f = \{x = 0 = y\}$ então $\Delta_f = (0, 0)$, ou seja, f tem valor crítico isolado.

Considerando o homeomorfismo cônico $h(u, v) = (u, v^3)$ e sua inversa $h^{-1}(u, v) = (u, \sqrt[3]{v})$ usando a Observação 1.86 sabemos que f é compatível com h e h^{-1} . Usando a Prop. 1.88 basta mostrarmos que $f_{(h^{-1})} = h^{-1} \circ f$ é d -regular. Como $f_{(h^{-1})}$ é dada por $f_{(h^{-1})}(x, y, z) = (x^2z + y^2, x^3)$ analítica, podemos aplicar o Lema 4 e garantir a d -regularidade de $f_{(h^{-1})}$. Logo, f é $d_{(h^{-1})}$ -regular.

De maneira análoga tem-se os resultados de fibração para quando a aplicação possui essa regularidade.

Proposição 1.89. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação de classe C^ℓ com valor crítico isolado. Se f tem a propriedade de transversalidade e é d_h -regular, para algum homeomorfismo cônico $h : \mathbb{B}_\eta^p \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p$ de classe C^ℓ então a aplicação*

$$\phi_{f,h} := (\pi \circ f_h)| : \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1}$$

é uma fibração localmente trivial C^ℓ sobre sua imagem com $K = f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$.

Pode-se encontrar mais consequências em (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -).

1.7.3 D_h -regularidade

Por fim resta pensarmos na D -regularidade quando não temos o discriminante linear. Isso está respondido no artigo base dessa seção.

Definição 1.90. Dizemos que um homeomorfismo cônico $h : \mathbb{B}_\eta^p \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p$ é uma linearização para f se temos que:

$$h^{-1}(\Delta_f \cap \mathbb{B}_\eta^p) = \text{Cone}(h^{-1}(\Delta_f \cap \partial \mathbb{B}_\eta^p)).$$

O Exemplo 18 exibe um discriminante não linear que por um homeomorfismo se torna linear.

Lema 7. Se f é um germe de aplicação analítico real, então existe uma linearização para f .

Dada uma linearização h para f , é definido:

$$\mathcal{A}_{h,\eta} := h^{-1}(\Delta_f \cap \partial \mathbb{B}_\eta^p) = h^{-1}(\Delta_f) \cap \mathbb{S}_\eta^{p-1}.$$

Para cada $\theta \in \mathbb{S}_\eta^{p-1}$ tem-se:

$$X_{f,h,\theta} := f^{-1}(\varphi_{h,\theta}),$$

que é suave se $\theta \in \mathcal{A}_{h,\eta}$. Note que $X_{f,h,\theta} = f^{-1}(h(L_\theta))$. Assim qualquer linearização h para um germe de aplicação analítica f é compatível com f em $\mathbb{S}_\eta^{p-1} \setminus \mathcal{A}_{h,\eta}$.

Assim segue a seguinte definição:

Definição 1.91. Sejam $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação analítico e $h : \mathbb{B}_\eta^p \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p$ uma linearização para f . Dizemos que f é D_h -regular se f é d_h -regular relativa a $\mathbb{S}_\eta^{p-1} \setminus \mathcal{A}_h$.

Logo, f é D_h -regular se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que toda esfera de raio menor ou igual a ε_0 centrada em 0 encontra $X_{f,h,\theta}$ transversalmente, para todo $\theta \in \mathbb{S}_\eta^{p-1} \setminus \mathcal{A}_h$ tal que a interseção seja não vazia.

Seja $\pi : \mathbb{S}_\eta^{p-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ projeção na esfera unitária e definimos $\mathcal{A}_h = \pi(\mathcal{A}_{h,\eta})$. Considere a aplicação

$$\phi_{f,h} : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus K_f \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1},$$

dada por

$$\phi_{f,h}(x) = \frac{f_h(x)}{\|f_h(x)\|}.$$

Segue a proposição semelhante para as outras regularidades.

Proposição 1.92. Sejam $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação de classe C^ℓ e $h : \mathbb{B}_\eta^p \longrightarrow \mathbb{B}_\eta^p$ uma linearização de f . Se f possui a propriedade de transversalidade e é D_h -regular, então a restrição

$$(\phi_{f,h})| : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \mathcal{A}_h$$

é uma fibração localmente trivial C^ℓ sobre sua imagem.

1.8 Família de polinômios homogêneos pesados polares mistos

Nessa seção exibiremos alguns resultados de Fibrção de Milnor encontrados da literatura a respeito da família de polinômios homogêneos pesados polares mistos com singularidade isolada. Ressaltando o homeomorfismo que relaciona a família de polinômios homogêneos pesados polares mistos e o polinômio de Pham-Brieskorn. Na primeira seção do capítulo 4, apresentaremos um difeomorfismo que generalizada todos os casos de expoentes dessa família. O primeiro resultado a relacioná-los apareceu em 2002 ((RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002), Thm 4.1), posteriormente abrangendo um pouco mais em (OKA, 2011) apresenta um difeomorfismo para tal.

Definição 1.93. ((CISNEROS-MOLINA; ROMANO-VELÁZQUEZ, 2017)) Seja p_j, u_j com $j = 1, \dots, n$ inteiros não nulos tal que $\text{mdc}(p_1, \dots, p_n) = 1$ e $\text{mdc}(u_1, \dots, u_n) = 1$. Considere $\tau \in \mathbb{C}^*$ escrito da forma polar $\tau = t\lambda$, com $t \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda \in \mathbb{S}^1$. A $\mathbb{C}^*$ -ação polar em $\mathbb{C}^n$ com peso radial $(p_1, \dots, p_n)$ e peso angular $(u_1, \dots, u_n)$ é dada por

$$t\lambda \cdot (z, \bar{z}) = (t^{p_1}\lambda^{u_1}z_1, \dots, t^{p_n}\lambda^{u_n}z_n, t^{p_1}\lambda^{-u_1}\bar{z}_1, \dots, t^{p_n}\lambda^{-u_n}\bar{z}_n).$$

De fato, a $\mathbb{C}^*$ -ação polar é a combinação das duas ações: a $\mathbb{R}^+$ -ação dada pelo pesos $(p_1, \dots, p_n)$, e uma $\mathbb{S}^1$ -ação dada pelo pesos $(u_1, \dots, u_n)$.

Definição 1.94. ((CISNEROS-MOLINA; ROMANO-VELÁZQUEZ, 2017)) Uma função mista $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é homogênea pesada polar se existe $p_1, \dots, p_n$ inteiro positivos e $q_1, \dots, q_n$ inteiros não nulos, a e c inteiros positivos e a $\mathbb{C}^*$ -ação dada acima tal que f satisfaz:

$$f(t\lambda \cdot (z, \bar{z})) = t^a \lambda^c f(z, \bar{z}).$$

Dizemos que a função homogênea pesada polar f tem peso radial tipo $(p_1, \dots, p_n; a)$ e peso angular tipo $(q_1, \dots, q_n; c)$.

Observação 1.95. É possível ocorrer de um polinômio homogêneo pesado misto ter somente $\mathbb{R}^+$ -ação, ou seja, só ação radial ou apenas $\mathbb{S}^1$ -ação, isto é, ação angular.

Dados germes em $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ de campos de vetores holomorfos F e X , definimos a função $\psi_{F,X}: U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\psi_{F,X}(z) = \langle F(z), X(z) \rangle = \sum_{j=1}^n F_j(z) \overline{X_j(z)}.$$

Sejam F, X campos vetoriais holomorfos da forma:

$$F = (k_1 z_{\sigma_1}^{a_1}, \dots, k_n z_{\sigma_n}^{a_n}), \quad X = (t_1 z_1^{b_1}, \dots, t_n z_n^{b_n}),$$

onde k_j e t_j são números complexos não nulos para todos os j 's, os a_j e b_j são inteiros positivos e $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ é a permutação do conjunto $\{1, \dots, n\}$. Assim a função $\psi_{F,X}$ é definida da seguinte forma:

$$\psi_{F,X}(z) = \langle F(z), X(z) \rangle = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_{\sigma_j}^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}.$$

Considerando $\psi := \psi_{F,X}$ como uma aplicação em $\mathbb{R}^2$, parte real e imaginária de ψ . Afim de determinar o rank da matriz jacobiana, suponhamos inicialmente $F = (k_1 z_1^{a_1}, \dots, k_n z_n^{a_n})$ e $X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$, ou seja, tomamos a permutação como a identidade e t_j 's = 1. Nesse caso tem-se:

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (k_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j} + \bar{k}_j \bar{z}_j^{a_j} z_j^{b_j}),$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (k_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j} - \bar{k}_j \bar{z}_j^{a_j} z_j^{b_j}).$$

Considere a matriz 2×2 de ψ correspondendo as derivadas parciais de (ψ_1, ψ_2) com respeito a z_j e $\bar{z}_j$. Seu determinante (multiplicado por -2) é:

$$\|k_j\|^2 a_j^2 \|z_j\|^{2a_j-2} \|z_j\|^{2b_j} - \|k_j\|^2 b_j^2 \|z_j\|^{2a_j} \|z_j\|^{2b_j-2},$$

assim é zero se e somente se $z_j = 0$ ou $a_j = b_j, \forall j$. Consequentemente, se $z_j \neq 0$ e $a_j \neq b_j$, então $\psi_{F,X}$ é uma submersão. Reciprocamente se $a_j = b_j$ para algum j , então o rank é menor que dois quando estamos no eixo z_j , nesse caso a função $\psi_{F,X}$ não satisfaz a condição de Milnor no zero, ou seja, não se trata de uma singularidade isolada. O caso de nosso interesse é quando a singularidade não é isolada.

Em (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002) eles garantem a existência da Fibrção de Milnor para $\psi_{F,X}$ com singularidade isolada.

Teorema 1.96. (Teorema 2.7) *Sejam $F = (k_1 z_{\sigma_1}^{a_1}, \dots, k_n z_{\sigma_n}^{a_n})$ e $X = (t_1 z_1^{b_1}, \dots, t_n z_n^{b_n})$ campos de vetores como citados acima, e assumimos que as seguintes condições são satisfeitas:*

- a) *para cada ciclo de σ de comprimento 1, os expoentes correspondentes satisfazem $a_j \neq b_j$;*
- b) *para cada ciclo de comprimento $r > 1$, r ímpar, temos $a_1 \geq 1, b_j = 1$ e ao menos para algum j , $a_j \gg 1$ para $j = 1, \dots, r$;*
- c) *para cada ciclo de comprimento $r > 1$, r par, temos $a_1 \geq 1, b_j = 1$ e ao menos para dois a_j 's, dizemos que a_{j_1} e a_{j_2} são estritamente maiores que 1, com j_1 começando ímpar e j_2 par no ciclo.*

Então $\psi_{F,X}$ satisfaz a forte condição de Milnor em 0. Isto é, para toda esfera suficientemente pequena $\mathbb{S}_{\varepsilon}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, a função

$$\phi = \frac{\psi}{\|\psi\|} : \mathbb{S}_{\varepsilon}^{2n-1} \setminus K \longrightarrow \mathbb{S}^1,$$

é a projeção suave, fibração localmente trivial. Todo par de fibras antípodas $\phi^{-1}(e^{i\theta}), \phi^{-1}(e^{-i\theta})$ são coladas juntas ao longo de $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$, onde $V = \psi^{-1}(0)$, formando uma $(2n-1)$ -variedade suave:

$$V_\theta \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} = \{z \in \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n; \operatorname{Re}\langle e^{i\theta} F(z), z \rangle = 0\},$$

onde $V_\theta := \psi_\theta^{-1}(0)$ com

$$\psi_\theta^{-1} = \operatorname{Re}\langle e^{i\theta} F(z), X(z) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (e^{i\theta} F_j(z) \overline{X_j}(z) + e^{-i\theta} \overline{F_j}(z) X_j(z)).$$

Agora segue um dos principais resultados em (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002). Tomando F e X campos vetoriais da forma $F = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n}), X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$ tal que os expoentes correspondentes satisfazem $a_j > b_j \geq 1$ para todo $j = 1, \dots, n$. Seja $\psi := \psi_{F,X}$ definido como acima, i. e.,

$$\psi = \langle F(z), X(z) \rangle = \sum_{j=1}^n z_j^{a_j} \overline{z_j}^{b_j}.$$

Definiram $c_j = a_j - b_j$ para cada j . Consequentemente:

Teorema 1.97. (Teorema 4.1) *A variedade singular $V = \psi^{-1}(0)$ é homeomorfa a variedade de Brieskorn $V_{c_1, \dots, c_n}$, e as fibrações de Milnor correspondentes são topologicamente equivalentes. Mais precisamente, existe um homeomorfismo $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\psi = f \circ h$, onde f é o polinômio de Pham-Brieskorn:*

$$f(z_1, \dots, z_n) = z_1^{c_1} + \dots + z_n^{c_n}.$$

Oka em (OKA, 2011) exhibe um difeomorfismo entre os dois polinômios definidos das seguinte maneira:

$$f_{a,b}(z, \bar{z}) = z_1^{a_1+b_1} \overline{z_1}^{b_1} + \dots + z_n^{a_n+b_n} \overline{z_n}^{b_n} \quad \text{e} \quad f_a(z) = z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n},$$

com $a_j > 0$ e $b_j \geq 0, j = 1, \dots, n$.

E garante que as duas variedades,

$$V_{f_{a,b}} := \{z \in \mathbb{C}^n; f_{a,b}(z, \bar{z}) = 0\} \quad \text{e} \quad V_{f_a} := \{z \in \mathbb{C}^n; f_a(z) = 0\},$$

são difeomorfas.

Observação 1.98. É possível verificar que $\psi_{F,X}$ (com singularidade isolada) e $f_{a,b}$ são polinômios homogêneos pesados polares mistos. Isso está desenvolvido no capítulo 4.

TEOREMA DA FIBRAÇÃO PARA ESPAÇOS SUBANALÍTICOS

Na literatura, assim como abordado no capítulo anterior, encontramos resultados sobre fibrações associadas à funções analíticas e sobre os espaços analíticos ou sobre os valores regulares. Agora vamos nos dedicar aos germes de aplicações subanalíticas e aos espaços subanalíticos na meta, um exemplo muito conhecido é o conjunto do discriminante de uma aplicação. Usualmente consideramos ele como sendo somente a origem, e mesmo quanto possui mais elementos sempre estudamos o seu complementar. Em particular, exibiremos alguns resultados desse espaço tão relevante e curioso.

Vamos também obter alguns resultados exibindo as Fibrações de Milnor e Milnor-Lê para aplicações subanalíticas com o domínio subanalítico.

2.1 Teorema da Fibração de Milnor-Lê para germes de aplicações subanalíticas

Considere $f : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, $m \geq n$ um germe de aplicação analítica.

Considere a restrição de f a $\mathbb{S}_\varepsilon^{m-1}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $f| := f|_{\mathbb{S}_\varepsilon^{m-1}} : \mathbb{S}_\varepsilon^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\Sigma_{f|(\mathbb{S}_\varepsilon^{m-1})}$ o conjunto dos pontos em que a matriz $A_{(n+1) \times m}$ tem rank menor que $n + 1$, onde as n primeiras linhas são as n linhas da matriz jacobiana de f e a última linha é o vetor gradiente da função distância ao quadrado. Os pontos críticos de $f|$ são $\Sigma_{f|} = \Sigma_{f|(\mathbb{S}_\varepsilon^{m-1})} \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{m-1}$.

A partir de agora apresentaremos algumas definições e resultados a respeito de estratificação de Whitney com a (w) -regularidade. As definições iniciais estão no capítulo 1, terceira seção.

Definição 2.1. ((SHIOTA, 1997), p.18): Seja $f : X \longrightarrow Y$ aplicação contínua entre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Uma estratificação analítica (subanalítica) de Whitney de classe C^∞ de f é um par de estratificações analítica (subanalítica) de Whitney de classe C^∞ $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X e $S' = \{S'_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de Y tal que para cada α , a imagem $f(S_\alpha) \subset S'_\gamma$ para algum γ e a aplicação $f|_{S_\alpha} : S_\alpha \longrightarrow S'_\gamma$ é uma submersão C^∞ . Chamamos $f : \{S_\alpha\} \longrightarrow \{S'_\gamma\}$ uma aplicação estratificada analítica (subanalítica) de Whitney de classe C^∞ .

Definição 2.2. ((VERDIER, 1976), Def. 3.2.) Dizemos que f é transversal à S se, para todo S_α , f restrita a S_α é uma submersão em Y .

Observação 2.3. A aplicação ser transversal como definida em Verdier significa ser estratificada como na Def. 2.1 mas a estratificação do contradomínio ter somente um estrato, ele mesmo.

Teorema 2.4. ((VERDIER, 1976), Teo. 2.2.): *Seja X um espaço analítico real e Y_β uma família localmente finita de subespaços subanalíticos de X . Então existe uma estratificação de Whitney com a (w) -regularidade de X tal que cada Y_β é uma reunião de estratos.*

Observe que o teorema anterior nos garante que todo subespaço subanalítico W admite estratificação de Whitney com a (w) -regularidade. De fato, basta tomarmos o espaço euclidiano que contenha o espaço subanalítico e adotá-lo como sendo o X do Teorema 2.4, e $W = Y_\beta$ para algum β , então obtemos a estratificação desejada de W .

Teorema 2.5. ((VERDIER, 1976), Teo. 3.3.): *Sejam X e Y espaços analíticos reais e $f : X \longrightarrow Y$ um aplicação analítica. Seja A um subespaço fechado de X , S uma estratificação de A . Suponhamos $f : A \longrightarrow Y$ própria. Então existe uma vizinhança aberta U de $f(A)$, densa em $f(A)$, suave em Y e subanalítica em Y tal que $f : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ é transversal à $S \cap f^{-1}(U)$.*

Considerando a partir de agora $X \subset \mathbb{R}^n$ um espaço subanalítico dotado de uma estratificação subanalítica de Whitney $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de classe C^∞ com a (w) -regularidade. Agora definiremos campos de vetores rugosos (VERDIER, 1976). Seguiremos por exemplo, (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2009).

Uma função real $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *função rugosa* se para qualquer $\alpha \in \Lambda$ tem-se

- i) a restrição de f a S_α é suave, e
- ii) para qualquer $x \in S_\alpha$ existe uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^m$ e uma constante real $C > 0$ tal que para qualquer $x' \in U \cap S_\alpha$ e qualquer $y \in U \cap X$ tem-se

$$\|f(x') - f(y)\| \leq C\|x' - y\|.$$

Dizemos que uma aplicação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *aplicação rugosa* se cada função coordenada é rugosa. Dizemos que um fibrado vetorial F sobre X é rugoso se sua aplicação mudança de coordenadas é rugosa.

Um *fibrado vetorial rugoso* F em X tangente a estratificação S é um fibrado vetorial sobre X tal que, para cada estrato S_α existe uma injeção $i_\alpha : F|_{S_\alpha} \longrightarrow TS_\alpha$ tal que o morfismo do fibrado vetorial $F \longrightarrow i^*T\mathbb{R}^m|_X$ induzido por i_α é rugoso. Um campo de vetores estratificado $\vec{v}$ em X é uma seção de fibrados tangentes $T\mathbb{R}^m|_X$ tal que cada $x \in X$, o vetor $\vec{v}(x)$ é tangente ao estrato que contém x .

Um *campo de vetores estratificado* $\vec{v}$ em X é chamado *rugoso próximo* a $y \in S_\alpha$ se existe uma vizinhança U de y em $\mathbb{R}^m$ e uma constante real $C > 0$ tal que

$$\|\vec{v}(y') - \vec{v}(x)\| \leq C\|y' - x\|,$$

para todo par $(x, y') \in (U \cap S_\beta, U \cap S_\alpha)$ com $S_\alpha \subset \overline{S_\beta}$.

O resultado a seguir garante a existência de um campo de vetores rugoso levantado.

Proposição 2.6. ((VERDIER, 1976), Prop. 4.6): *Seja Z um espaço analítico real de $\mathbb{R}^m$ e X um subespaço localmente fechado de Z munido de um estratificação de Whitney $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ com a (w) -regularidade. Seja Y um espaço analítico real suave de $\mathbb{R}^n$, $g : Z \longrightarrow Y$ uma aplicação cuja a restrição em cada estrato S_α é uma submersão suave, e η um campo de vetores C^∞ em Y . Então existe um campo de vetores estratificado rugoso $\vec{v}$ em X que levanta η , isto é, para cada $x \in X$ tem-se $dg(\vec{v}(x)) = \eta(g(x))$.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2009), Proposição 1.11.

Dizemos que um *campo de vetores rugoso estratificado* $\vec{v}$ em X é integrável se existe uma vizinhança aberta U de $X \times \{0\}$ em $X \times \mathbb{R}$ e uma aplicação rugosa $\theta : U \longrightarrow X$ tal que para qualquer $\alpha \in \Lambda$ tem-se:

- i) $\theta((S_\alpha \times \mathbb{R}) \cap U) \subset S_\alpha$,
- ii) para qualquer $x \in S_\alpha$ tal que $(x, t) \in (S_\alpha \times \mathbb{R}) \cap U$ temos que $\frac{\partial}{\partial t} \theta(x, t) = \vec{v}(\theta(x, t))$.

A aplicação θ é um fluxo associado ao campo de vetores $\vec{v}$.

Para cada $x_0 \in X$, a restrição $\theta|_{(\{x_0\} \times \mathbb{R}) \cap U} : (\{x_0\} \times \mathbb{R}) \cap U \longrightarrow X$ se trata de uma curva integral para o campo de vetores $\vec{v}$ com condição inicial x_0 . Pela condição i) acima é garantido que se x_0 pertence ao estrato S_α então a imagem da curva integral por $\vec{v}$ com condição inicial x_0 está contida em S_α .

Proposição 2.7. ((VERDIER, 1976), Prop. 4.8.): *Qualquer campo de vetores rugoso em um conjunto subanalítico fechado X de $\mathbb{R}^m$, como na proposição anterior, é integrável.*

2.1.1 Teorema da Fibração sobre espaço subanalítico de dimensão 1

Nessa subseção apresentaremos alguns resultados que asseguram a existência das fibrações sobre espaços subanalíticos de dimensão 1. Como consequência vamos obter as fibrações

sobre o discriminante de dimensão 1.

Sejam X e Y subconjuntos subanalíticos de dimensão m e n , $m > n \geq 2$, respectivamente dos espaços euclidianos $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Seja $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ um germe de aplicação subanalítico tal que f é a restrição de um germe de aplicação analítico $\tilde{f} : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$. Denotaremos $\mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ o disco aberto centrado na origem de Y com a topologia induzida e $\mathbb{B}_\varepsilon^m$ a bola fechada centrada na origem de X com a topologia induzida.

Teorema 2.8. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ subanalíticos de dimensão m e n respectivamente com $m > n \geq 2$ e $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ um germe de aplicação subanalítico. Considere C um subespaço subanalítico conexo contido na imagem de f em Y de dimensão 1 com $C = \bigcup_{j=1}^k C_j$, onde C_j são ramos suaves e $0 \in \bigcap_{j=1}^k C_j$, tal que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que a restrição,*

$$f| : f^{-1}(C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

é uma fibração topológica trivial, onde $C^ := C \setminus \{0\}$.*

Demonstração. Sabemos que C^* e $\mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ são subconjuntos subanalíticos, usando o item i) da Propriedade 1.39 concluímos que $C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ é subanalítico. A interseção $C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ são os ramos suaves da curva C^* .

Através do item iii) da Propriedade 1.39 constatamos que $f^{-1}(C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n)$ é subanalítico, uma vez que f é subanalítico. Logo o subconjunto $A = f^{-1}(C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m$ é subanalítico.

Por hipótese $C = \bigcup_{j=1}^k C_j$, com C_j são ramos suaves e $0 \in \bigcap_{j=1}^k C_j$. Estamos afim de mostrar a existência da fibração sobre $C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n = \bigcup_{j=1}^k C_j^*$, com $C_j^* = C_j \setminus \{0\}$, $j = 1, \dots, n$. Vamos desenvolver a demonstração sobre C_j^* , o ramo disjunto da curva C^* . O resultado se estenderá para C^* pois os ramos são disjuntos em C^* , isto é, somente $0 \in \bigcap_{j=1}^k C_j$.

Vamos mostrar que C_j^* é analítico. Usando o Lema 7 é possível linearizar C_j^* , isto é, torná-lo um segmento de reta. A partir de agora iremos trabalhar com C_j^* linearizado.

Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{S}^1; x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ a projeção na esfera unitária, uma aplicação analítica. Note que $C_j^* = \pi^{-1}(p)$, $p \in \mathbb{S}^1$, como imagem inversa por uma aplicação analítica de conjunto analítico é analítica então basta garantirmos que o ponto $\{p\}$ é um conjunto analítico. De fato, seja $f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_p(x_1, x_2) = (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2$, onde $p = (p_1, p_2)$ uma função analítica. Seja V_p vizinhança de $\mathbb{R}^2$ tal que $p \in V_p$ então $\{p\} \cap V_p = f_p^{-1}(0)$.

Segue do Teorema 2.4 que existe uma estratificação de Whitney com a (w) -condição subanalítica C^∞ do subconjunto subanalítico A . Denote tal estratificação por $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, ou seja, $A = \bigcup_\alpha S_\alpha$.

Observe que $f| : A \rightarrow C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ é própria. De fato, considere um subconjunto K compacto em $C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$, isto é, K é fechado e limitado em $C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$, como f se trata da restrição de uma aplicação analítica então $f^{-1}(K) \subset A$ é fechado em A , e mais, limitado em $A \subset \mathbb{B}_\varepsilon^m$.

Agora estamos aptos a aplicar o Teorema 2.5, assim existe um aberto U em $f(A)$, denso em $f(A)$, suave em $C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$, subanalítico em $C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ tal que a restrição $f|_U : f^{-1}(U) \rightarrow U$ induzida por f é transversal à $S \cap f^{-1}(U)$.

Assim, como $0 \notin U$, temos que $0 \in \bar{U} = C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ segue também pelo item iv) da Propriedade 1.39 que existe um caminho analítico I em U cujo ponto inicial é 0 e está em seu fecho. Tomando um $\delta' < \delta$ tal que $C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n = I$, e assim restringimos a vizinhança U também. Dessa forma podemos tomar $\delta' > 0$ suficientemente pequeno tal que $U \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n = (C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n) \setminus \{0\}$. A figura abaixo ilustra bem que podemos escolher um $0 < \delta' < \delta$ tal que teremos o desejado, isto é, $U \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n = (C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n) \setminus \{0\}$.

Figura 11 – A curva C^* .

Neste caso temos que $f| : f^{-1}(C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n$ é transversal à estratificação de $f^{-1}(C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m$.

Agora resta provar que $f : A \rightarrow C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n$ é um fibrado topológico trivial. Considere $\vec{v}$ um campo de vetores tangente e suave a $C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n$, assim usando a Proposição 2.6 podemos levantá-lo a um campo de vetores rugoso estratificado em S_α e portanto integrável pela Proposição 2.7 tal que as curvas integráveis ajudam a definir o homeomorfismo que propicia a trivialização de $f : A \rightarrow C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_{\delta'}^n$.

Portanto, $f|_A$ é um fibrado topológico trivial. □

No próximo exemplo é possível ter uma noção intuitiva que teremos fibração sobre uma curva subanalítica.

Exemplo 18. ((CISNEROS-MOLINA *et al.*, -), Ex.5.10) Considere f um germe analítico, dado por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} ((x+y)^2, 2(x^2+y^2+z^3)), & \text{se } (x+y) \geq 0 \\ (-(x+y)^2, 2(x^2+y^2+z^3)), & \text{se } (x+y) < 0 \end{cases}$$

os pontos críticos de f são $\Sigma_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y \text{ e } z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2; x = -y\}$ e assim $\Delta_f := \{(u, u) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0\} \cup \{(u, -u) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0\} \cup \{(0, 4x^2 + z^3) \in \mathbb{R}^2; x, z \in \mathbb{R}\}$. Mas observe que $A = \{(u, u) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0\} \cup \{(u, -u) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0\}$ é subanalítico (Exemplo 4) e $A \subset \Delta_f$.

Vamos descrever as fibras sobre A , isto é, (t, t) , $t > 0$ e $(t, -t)$, $t > 0$;

$$\begin{aligned} f^{-1}(t, t) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x+y)^2 = t = 2(x^2 + y^2 + z^3)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-y)^2 + 2z^3 = 0 \text{ e } (x+y)^2 = t\} \\ f^{-1}(t, -t) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x+y)^2 = t \text{ e } 2(x^2 + y^2 + z^3) = -t\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3(x^2 + y^2) + 2(xy + z^3) = 0 \text{ e } (x+y)^2 = t\}. \end{aligned}$$

É possível notar que ambas as fibras serão compostas por duas componentes conexas, devido a restrição $(x+y)^2 = t$, $t > 0$, e cada componente será homeomorfa a uma cúspide.

O exemplo acima se trata de uma função analítica, agora mostraremos uma $g|$ subanalítica e X um espaço subanalítico e a fibra de uma curva analítica como no Teorema 2.8. Observe que não provaremos que se trata de uma fibração localmente trivial, somente daremos uma noção intuitiva. Observe que construímos o germe de aplicação subanalítico considerando um germe analítico restrito a um subespaço subanalítico.

Exemplo 19. Seja

$$\begin{aligned} g : (\mathbb{R}^5, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ (x, y, z, w, t) &\longmapsto (x^2 + y^2 - z^2 - w^2 + t^2, x^2 + t^2). \end{aligned}$$

Considere $X = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5; t \geq 0\}$ um subespaço semianalítico, consequentemente subanalítico. Quando fazemos $g| : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ obtemos um germe de aplicação subanalítico induzido de um germe analítico, como no Teorema 2.8. Vamos agora definir a fibra de um segmento de reta $(0, r)$, $r > 0$, o semi-eixo em $\mathbb{R}^2$.

$$g|^{-1}(0, r) = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5, x^2 + t^2 = r \text{ e } z^2 + w^2 - y^2 - r = 0\}.$$

Note que $x^2 + t^2 = r$ é uma $\mathbb{S}^1$ e $z^2 + w^2 - y^2 - r = 0$ é um hiperboloide de duas folhas ambos em $\mathbb{R}^5$, assim $g|^{-1}$ tem o mesmo tipo de homotopia de duas $\mathbb{S}^1$ disjuntas. E mais, independe do ponto r escolhido, pois $r > 0$.

Observe que a curva $(0, r)$, $r > 0$ adotada não pertence ao discriminante de g .

Como consequência imediata do teorema anterior temos o fibrado sobre o discriminante de um germe de aplicação com dimensão 1.

Corolário 2.9. *Seja $f : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, $m > n \geq 2$ germe subanalítico com $\dim \Delta_f = 1$, onde Δ_f denota o discriminante de f . Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $f|_A : A \longrightarrow Y$ é um fibrado topológico trivial, onde $A := f^{-1}(\Delta_f^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m$, $Y := \Delta_f^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ com $\Delta_f^* := \Delta_f \setminus \{0\}$.*

Nos seguintes exemplos podemos ver os fibrados topológicos triviais sobre discriminante.

Exemplo 20. Seja

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2 + y^2 - z^2, x^2 - y^2 - z^2) \end{aligned}$$

O conjunto de pontos críticos é $\Sigma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z = 0\}$ e o discriminante $\Delta_f = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u = v\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v = -u \text{ e } u \geq 0\}$.

Observe que temos dois tipos de fibras na bola $\mathbb{B}_\varepsilon^3$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno:

1) $f^{-1}(t, t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = t \text{ e } y = 0\}$, $t \in \mathbb{R}^*$ onde o tipo topológico é de dois intervalos disjuntos em $\mathbb{B}_\varepsilon^3$;

2) $f^{-1}(t, -t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = 0 \text{ e } y^2 = t\}$, $t > 0$ seu tipo topológico é da forma de um “X” onde os pontos de interseção dos intervalos são $(0, t, 0)$ e $(0, -t, 0)$.

Observe que o tipo 1) é para as componentes conexas de $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u = v\} \setminus \{(0, 0)\}$ e o tipo 2) é para $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v = -u \text{ e } u \geq 0\}$ do discriminante.

A seguir exibiremos dois exemplos de germes analíticos com $n > 2$ em que o discriminante tem dimensão real 1. Mostrando situações diferentes da natural.

Exemplo 21. ((CISNEROS-MOLINA *et al.*, -), Ex. 2.4) Seja

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^4, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \\ (x, y, z, w) &\longmapsto (x^2 - y^2z, y, w). \end{aligned}$$

Os pontos críticos de f são $\Sigma_f = \{(0, 0, z, w) \in \mathbb{R}^4\}$ e seus valores críticos são $\Delta_f = \{(0, 0, v) \in \mathbb{R}^3\}$, discriminante não isolado, linear de $\dim_{\mathbb{R}} 1$. Vamos encontrar $X = f^{-1}(\Delta_f^*)$, seja $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{-1}(0, 0, t) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x = 0, y = 0 \text{ e } w = t\} = \{(0, 0, z, t) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Logo X para $t > 0$ é o semiplano $\{(0, 0, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$ e para $t < 0$ o outro semiplano. Como se trata de variedades suaves a estratificação de Whitney é o próprio conjunto e vale a (w) -regularidade por vacuidade. Então estamos nas condições do teorema anterior. Por fim, observe que as fibras terão o mesmo tipo de homotopia de uma reta ou segmento.

Exemplo 22. Considere

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^6, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (x, y, z, w, t, k) &\longmapsto (x^2 - yz^2, wt^2 + kz, xy, z(t^2 + k^2)) \end{aligned}$$

onde $\Sigma_f = \{(0, y, 0, w, t, k) \in \mathbb{R}^6\}$ é seu lugar crítico. Dessa forma tem-se $\Delta_f = \{(0, wt^2, 0, 0)\}$, um dos eixos, discriminante com dimensão real 1. Assim a fibra do discriminante é:

$$f^{-1}(0, r, 0, 0) = \{(0, y, 0, w, t, k) \in \mathbb{R}^6; wt^2 = r\}.$$

As clássicas aplicações de López de Medrano, exemplos 2.5, 2.6 e 5.7 de (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -), satisfazem as hipóteses do Teorema anterior.

É possível garantir o Teorema 2.8 para $f|_{\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Basta somente adaptar as estratificações para o novo domínio e contradomínio.

Teorema 2.10. *Seja $f : (X \subset M, 0) \longrightarrow (Y \subset N, 0)$ germe de aplicação subanalítica. Vamos considerar $f|_Y : \mathbb{S}_\varepsilon^{m-1} \longrightarrow Y$ a restrição de f pela esfera de raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno com $\dim \Delta_f = 1$. Então $f|_{A'} : A' \longrightarrow Y'$ é um fibrado topológico trivial, onde $A' := f^{-1}(\Delta_f^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{m-1}$ e $Y' := \Delta_f^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ com $\delta \ll \varepsilon$ e $\Delta_f^* := \Delta_f \setminus \{0\}$.*

O corolário a seguir é um caso particular dos teoremas anteriores, pois estamos com a meta sendo $\mathbb{R}^2$. Talvez a situação mais natural de termos o discriminante sendo composto por segmentos.

Corolário 2.11. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ germe de aplicação subanalítica. Então $f|_A : A \longrightarrow Y$ e $f|_{A'} : A' \longrightarrow Y'$ são fibrados topológicos triviais, onde $A := f^{-1}(\Delta_f^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^n$, $Y := \Delta_f^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$, $A' := f^{-1}(\Delta_f^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ e $Y' := \Delta_f^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ com $\delta \ll \varepsilon$, sendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.*

O próximo resultado é conhecido para germe de aplicação analítica, agora obtemos também para germe de aplicação subanalítico.

Corolário 2.12. *Seja $f : (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germe subanalítico com X subanalítico. Então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que a restrição,*

$$f|_X : f^{-1}([-\delta, \delta] \setminus \{0\}) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \longrightarrow [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$$

é uma fibração topológica trivial.

2.1.2 Teorema da Fibração sobre um subespaço analítico suave de dimensão 2

No mesmo ambiente que o Teorema 2.8, iremos mostrar que temos fibração localmente trivial sobre um subespaço analítico de dimensão 2.

Sejam X e Y subconjuntos subanalíticos de dimensão m e n , $m > n \geq 2$, respectivamente dos espaços euclidianos $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Seja $f : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ um germe de aplicação subanalítico tal que f é a restrição de um germe de aplicação analítico $\tilde{f} : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$. Denotaremos $\mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ o disco aberto centrado na origem de Y com a topologia induzida e $\mathbb{B}_\varepsilon^m$ a bola fechada centrada na origem de X com a topologia induzida.

Lema 8. Todo subespaço subanalítico Z de dimensão 0 em um espaço compacto K é composto por um número finito de pontos.

Demonstração. Suponhamos que um espaço subanalítico Z de dimensão 0 com infinitas componentes, isto é, Z é composto por infinitos pontos.

Como estamos sobre um compacto K então pontos infinitos gera uma sequência de pontos, logo temos um limite para essa sequência, pois em um espaço compacto toda sequência converge. Assim, seja $\tilde{Z} = (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Z$ tende ao $p \in K$. Usando o item iv) da Propriedade 1.39 sabemos que $p \in \bar{Z}$ então existe um caminho analítico $\lambda :]0, 1] \rightarrow Z$ tal que $\lambda(0) = p$. O que gera um absurdo pois Z tem dimensão 0.

□

Teorema 2.13. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ subanalíticos de dimensão m e n respectivamente com $m > n \geq 3$ e $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ um germe de aplicação subanalítico. Considere $0 \in W \subset Y$ um subespaço analítico suave de dimensão 2 contido na imagem de f . Existe uma curva subanalítica $C \subset W$ com $0 \in C$ tal que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$f|_1 : f^{-1}((W \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow (W \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

e

$$f|_1 : f^{-1}(C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

são fibrados topológicos triviais.

Demonstração. Por hipótese $0 \in W \subset Y$ é um subespaço analítico suave de dimensão 2. Tome $Y' = W \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$, onde $\mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ denota um disco aberto de raio δ e centro na origem de Y . Observe que Y' contém a origem e que Y' é analítico.

Note que $f^{-1}(Y')$ um subespaço subanalítico. Defina $A = f^{-1}(Y') \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m$, com $\mathbb{B}_\varepsilon^m$ bola fechada de raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno centrada na origem de X . Então A é um subespaço subanalítico e pelo Teorema 2.4 admite uma estratificação de Whitney com a (w) -condição, $S = \{S_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$.

Observe que $f|_1 : A \rightarrow Y'$ é própria, pois tomando K compacto em Y' , $f|_1^{-1}(K)$ é fechado e como está contido em $\mathbb{B}_\varepsilon^m$ compacto então $f|_1^{-1}(K)$ também é limitado.

Usando o Teorema 2.5, existe uma vizinhança $U \subset f(A) = Y'$ tal que $\bar{U} = Y'$, U é suave e subanalítico em Y' . Agora desenvolveremos a caracterização de U . Trabalharemos localmente em Y' , ou seja, para $x \in Y'$ considere uma vizinhança U de x tal que $U(x) = U \cap \mathbb{D}^n(x)$, onde $\mathbb{D}^n(x)$ é um disco suficientemente pequeno com centro em $x \in U$. Como $U(x)$ é subanalítico tem estrutura cônica ((SHIOTA, 1997), (COSTE, 1999) Thm 4.10), isto é, $U(x) \approx \text{Cone}(\partial U(x))$, onde $\partial U(x) = U(x) \cap \mathbb{S}^{n-1}(x)$. Assim o problema de encontrar $U(x)$ se resume da seguinte forma:

$$U(x) \text{ é denso e subanalítico em } \mathbb{D}^2(x) \Leftrightarrow \partial U(x) \text{ é denso e subanalítico em } \mathbb{S}^1.$$

Como Y' tem dimensão 2 então $\partial U(x)$ tem dimensão 1 e é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ e os densos e subanalíticos na esfera compacta já são conhecidos, pelo Lema 8, se trata do complementar de

pontos finitos isolados. Consequentemente usando que $U(x) \approx \text{Cone}(\partial U(x))$, sabemos que $U(x)$ é um subespaço complementar de uma curva $C(x)$ subanalítica onde essa curva é homeomorfa ao cone sobre os pontos finitos isolados. Recordamos que essa curva é subanalítica usando que o complementar de um conjunto subanalítico é subanalítico (Teorema 1.36). Defina $C := \bigcup_{x \in Y'} C(x)$

Figura 12 – Conjunto $U(x)$.

Portanto o subespaço $U = Y' \setminus C$. Consequentemente pelo Teorema 2.5 temos que $f|_U : f^{-1}(U) \rightarrow U$ é transversal à estratificação $S \cap f^{-1}(U)$.

Considere $\vec{v}$ um campo de vetores tangente a $Y' \setminus C$ então pela Proposição 2.6 podemos levá-lo a um campo de vetores rugoso estratificado em S_β e portanto integrável pela Proposição 2.7 cujas curvas integráveis produzem o homeomorfismo que fornece a trivialização de

$$f|_U : f^{-1}(Y' \setminus C) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow Y' \setminus C$$

Assim, temos um fibrado topológico localmente trivial.

Observe que a existência do fibrado localmente trivial para curva subanalítica C^* já foi provado no Teorema 2.8.

Lembrando que $Y' = W \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$, concluímos que

$$f|_U : f^{-1}((W \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow (W \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

e

$$f|_U : f^{-1}(C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

são fibrados topológicos localmente triviais, com ε e δ como no enunciado.

Observe que $W \setminus C$ e C^* são espaços contráteis então obtemos fibrados topológicos triviais.

□

O próximo teorema nos mostra que é possível obter o mesmo resultado que acima, mas quando o W não é suave, vamos trabalhar nos estratos de W .

Corolário 2.14. *Seja f como acima e considere $0 \in W \subset Y$ um subespaço subanalítico de dimensão 2 contido na imagem de f . Considere $S = \{S_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ a estratificação de Whitney de W com a (w) -condição tal que $\{0\}$ seja um estrato. Então para cada estrato S_γ de dimensão 2*

existe uma curva subanalítica $C \subset S_\gamma$ com $0 \in C$ tal que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$f| : f^{-1}((S_\gamma \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \longrightarrow (S_\gamma \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

e

$$f| : f^{-1}(C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \longrightarrow C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

são fibrados topológicos triviais, onde S_γ são os estratos de dimensão 2.

Demonstração. Como W é um subespaço subanalítico então pelo Teorema 2.4 existe uma estratificação $S = \{S_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ por subespaços analíticos suaves tal que S_γ é subanalítico em W para todo γ . Usando a Definição 1.44 sabemos que W será dividido em estratos de dimensão 0, 1 e 2. Para os estratos de dimensão 0 e 1 já sabemos que existe fibrado topológico localmente trivial sobre esses estratos, neste caso é sobre o estrato todo.

Quando estamos sobre o estrato S_γ de dimensão 2 então usaremos o teorema anterior que se aplica a cada estrato e obtemos fibrado topológico localmente trivial em $f| : f^{-1}((S_\gamma \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \longrightarrow (S_\gamma \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$. Observe que a trivialidade é em cada estrato e como são contráteis concluímos a trivialidade global. $\square$

Nesse último resultado como estamos desenvolvendo em cada estrato também é possível obter o Teorema de Ehresmann.

Como corolário imediato do teorema acima e do Teorema 2.8, tem-se a fibração sobre o discriminante de dimensão 2.

Corolário 2.15. *Seja $f : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, $m > n \geq 3$ germe de aplicação analítico com $\Delta_f = f(\Sigma_f)$ analítico suave com dimensão 2 então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tais que*

$$f| : f^{-1}((\Delta_f \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \longrightarrow (\Delta_f \setminus C) \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

e

$$f| : f^{-1}(C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \longrightarrow C^* \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

são fibrados topológicos localmente triviais.

Observe que nas hipóteses do corolário anterior pedimos que o discriminante seja analítico para obtermos a fibrado topológico localmente trivial sobre o discriminante menos as curvas descritas. Como descorreremos isso na Observação 2.16

O seguinte exemplo tem o discriminante analítico de dimensão 2.

Exemplo 23. *Seja $f : (\mathbb{R}^5, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ um germe analítico definido por,*

$$f(x, y, z, w, t) = (x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - t^3, 2x^3 - y^3 + z^3 - w^3 + t^3, -x^3 + 2y^3 - z^3 + w^3 - 2t^3).$$

Os pontos críticos de f tal que o rank da matriz jacobiana é 2 são $\Sigma_{f_2} = \{(x, y, 0, 0, 0)\} \cup \{(x, 0, z, 0, 0)\} \cup \{(x, 0, 0, w, 0)\} \cup \{(x, 0, 0, 0, t)\} \cup \{(0, y, z, 0, 0)\} \cup \{(0, y, 0, w, 0)\} \cup \{(0, y, 0, 0, t)\} \cup \{(0, 0, z, w, 0)\} \cup \{(0, 0, z, 0, t)\} \cup \{(0, 0, 0, w, t)\}$ consequentemente $\Delta_{f_2} = \{(x^3 + y^3, 2x^3 - y^3, -x^3 + 2y^3)\} \cup \{(x^3 + z^3, 2x^3 + z^3, -x^3 - z^3)\} \cup \{(x^3 + w^3, 2x^3 - w^3, -x^3 + w^3)\} \cup \{(x^3 - t^3, 2x^3 + t^3, -x^3 - 2t^3)\} \cup \{(y^3 + z^3, -y^3 + z^3, 2y^3 - z^3)\} \cup \{(y^3 + w^3, -y^3 - w^3, 2y^3 + w^3)\} \cup \{(y^3 - t^3, -y^3 + t^3, 2y^3 - 2t^3)\} \cup \{(z^3 + w^3, z^3 - w^3, -z^3 + w^3)\} \cup \{(z^3 - t^3, z^3 + t^3, -z^3 - 2t^3)\} \cup \{(w^3 - t^3, -w^3 + t^3, w^3 - 2t^3)\}$, onde f_2 denota o rank 2 da matriz Jacobiana. Note que todos os discriminantes são planos em $\mathbb{R}^3$.

Agora os pontos críticos de f tal que o rank da matriz jacobiana é 1 são $\Sigma_{f_1} = \{(x, 0, 0, 0, 0)\} \cup \{(0, y, 0, 0, 0)\} \cup \{(0, 0, 0, z, 0)\} \cup \{(0, 0, 0, 0, w)\} \cup \{(0, 0, 0, 0, t)\}$ consequentemente $\Delta_{f_1} = \{(x^3, 2x^3, -x^3)\} \cup \{(-2y^3, -y^3, 3y^3)\} \cup \{(3z^3, -z^3, -z^3)\} \cup \{(w^3, w^3, -2w^3)\} \cup \{(-t^3, t^3, -2t^3)\}$, onde f_1 denota o rank 1 da matriz Jacobiana. Note que todos os discriminantes são retas em $\mathbb{R}^3$. Note que cada discriminante plano contém duas retas.

A família que satisfaz o Teorema 2.13 e o exemplo acima é um caso particular, é a generalização do Exemplo de S. López Medrano, (MEDRANO, 2014) dada em (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -), dada por:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (\sum a_i x_i^p, \sum b_i x_i^p, \sum c_i x_i^p), \quad p \geq 2 \end{aligned}$$

com (a_j, a_k) , (b_j, b_k) e (c_j, c_k) linearmente independentes para qualquer $k, j = 1, \dots, n$ e $k \neq j$. O discriminante de f de rank 2 são planos.

O próximo exemplo é um caso em que o discriminante é subanalítico e tem dimensão 2.

Exemplo 24. Considere

$$\begin{aligned} g : \quad (\mathbb{R}^4, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \\ (x, y, z, w) &\longmapsto (x + zw, y^2, w^2x). \end{aligned}$$

Os pontos críticos de g são $\{(x, y, z, 0)\} \cup \{(x, 0, z, w)\}$ consequentemente $\Delta_g = \{(x, y^2, 0)\} \cup \{(x + zw, 0, w^2x)\}$. Observe que $(x, y^2, 0)$ define um semi-plano em $\mathbb{R}^3$. Logo, esse discriminante é subanalítico. Uma possibilidade de estratos analíticos para esse discriminante subanalítico é: $\{0\}$, $\{(x, 0, 0), x > 0\}$, $\{(x, 0, 0), x < 0\}$ e $\{(x, y, 0), y > 0\}$. Resta verificar se satisfaz a (w) -condição.

Observação 2.16. No corolário 2.15 quando exigimos o discriminante analítico suave não é uma condição difícil de ser encontrada, mas necessário para obtermos os fibrados sobre as componentes conexas descritas. Quando trabalhamos sobre um espaço subanalítico, até o momento só sabemos que existirá fibrações sobre cada estrato. O levantamento de campo de vetores está sobre cada estrato, não sabemos como fazer uma “perfeita colagem” para obtermos o campo de vetores na união dos estratos.

2.1.3 Teorema da Fibração sobre um subespaço analítico suave de dimensão p , $p > 2$

Sejam X e Y subconjuntos subanalíticos de dimensão m e n , $m > n \geq 2$, respectivamente dos espaços euclidianos $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Seja $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ um germe de aplicação subanalítico tal que f é a restrição de um germe de aplicação analítico $\tilde{f} : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$. Denotaremos $\mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ o disco aberto centrado na origem de Y com a topologia induzida e $\mathbb{B}_\varepsilon^m$ a bola fechada centrada na origem de X com a topologia induzida.

Continuamos no ambiente da subseção anterior, mas agora vamos considerar W um subespaço analítico de Y com dimensão p , $p \geq 3$. Faremos o primeiro resultado para $p = 3$ e a generalização faremos uso de indução. Segue de maneira análoga ao Teorema 2.13

Teorema 2.17. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ subanalíticos de dimensão m e n respectivamente com $m > n \geq 4$ e $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ um germe de aplicação subanalítico. Considere $0 \in W \subset Y$ um subespaço analítico suave de dimensão 3 contido na imagem de f . Existe uma coleção finita de subespaços subanalíticos $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset W$ com $0 \in F_\alpha$, $\dim F_\alpha = 2$. Então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tais que*

$$f|_I : f^{-1}(W \setminus \{F_\alpha\} \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow W \setminus \{F_\alpha\} \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n,$$

é um fibrado topológico localmente trivial.

Demonstração. Com $0 \in W \subset Y$ subespaço analítico suave de dimensão 3 podemos tomar $Y' = W \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$, onde $\mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ denota um disco aberto de raio δ e centro na origem de Y . Observe que Y' não contém a origem e se mantém analítico.

Assumimos $f^{-1}(Y')$ um subespaço subanalítico definimos $A = f^{-1}(Y') \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m$, com $\mathbb{B}_\varepsilon^m$ bola fechada de raio ε suficientemente pequeno centrada na origem de X , então A é um subespaço subanalítico e pelo Teorema 2.4 admite uma estratificação de Whitney com a (w) -condição, $S = \{S_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$.

Note que $f|_I : A \rightarrow Y'$ é própria.

Usando o Teorema 2.5, existe uma vizinhança $U \subset f(A) = Y'$ tal que $\overline{U} = Y'$, U é suave e subanalítico em Y' . Agora desenvolveremos a caracterização de U , de forma similar ao Teorema 2.13. Trabalharemos localmente em Y' , ou seja, para $x \in Y'$ considere uma vizinhança U de x tal que $U(x) = U \cap \mathbb{D}^n(x)$, onde $\mathbb{D}^n(x)$ é um disco suficientemente pequeno com centro em $x \in U$. Como $U(x)$ é subanalítico tem estrutura cônica ((SHIOTA, 1997), (COSTE, 1999) Thm 4.10), isto é, $U(x) \approx \text{Cone}(\partial U(x))$, onde $\partial U(x) = U(x) \cap \mathbb{S}^{n-1}(x)$. Assim o problema de encontrar $U(x)$ se resume da seguinte forma:

$$U(x) \text{ é denso e subanalítico em } \mathbb{D}^3(x) \Leftrightarrow \partial U(x) \text{ é denso e subanalítico em } \mathbb{S}^2.$$

Como Y' tem dimensão 3 então $\partial U(x)$ tem dimensão 2 é homeomorfo ao plano, como visto no Teorema 2.13 os densos e subanalíticos no plano são homeomorfos aos subespaços complementares das curvas subanalíticas. Assim, usando a mesma ideia aplicada no teorema anterior, a vizinhança $U(x)$ também tem estrutura cônica e será homeomorfa ao cone dessas curvas. Então a vizinhança $U(x)$ é um subespaço complementar de subespaços de dimensão 2 subanalíticos, $F_\alpha(x) \ni 0$. Observe que esses subespaços de dimensão 2 são subanalíticos usando que o complementar de um conjunto subanalítico é subanalítico (Teorema 1.36). Defina $F_\alpha := \cup_{x \in Y'} F_\alpha(x)$.

Figura 13 – Conjunto $U(x)$.

Portanto o subespaço $U = Y' \setminus \{F_\alpha\}$. Consequentemente pelo Teorema 2.5 temos que $f| : f^{-1}(U) \rightarrow U$ é transversal à estratificação $S \cap f^{-1}(U)$.

Seja $\vec{v}$ um campo de vetores tangente a $Y' \setminus \{F_\alpha\}$. Usando a Proposição 2.6 podemos levá-lo a um campo de vetores rugoso estratificado em S_β e portanto integrável pela Proposição 2.7 cujas curvas integráveis fornecem a trivialização de $f| : Y' \setminus \{F_\alpha\} \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow Y' \setminus \{F_\alpha\}$. Assim, temos um fibrado topológico trivial.

Portanto,

$$f| : f^{-1}(W \setminus \{F_\alpha\} \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \rightarrow W \setminus \{F_\alpha\} \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

é um fibrado topológico localmente trivial, com ε e δ como no enunciado.

□

Observação 2.18. Neste caso observe que não é possível garantir a fibração para cada F_α , pois se trata de um conjunto subanalítico de dimensão 2. Sabemos pela seção anterior que é possível obter fibração somente sobre cada estrato.

Além disso é possível perceber que para obtermos fibração topológica localmente trivial sobre um subespaço analítico suave de dimensão p , $p \geq 1$ temos que retirar um subespaço de dimensão $p - 1$, onde esse subespaço de dimensão $p - 1$ é subanalítico. Isso se dá usando diretamente o Teorema do Complemento 1.36. E só teremos as fibrações para toda a decomposição do W no caso em que $\dim W = 2$ (Teorema 2.13), até o momento.

O próximo resultado é uma generalização do último teorema, a prova seguirá por indução.

Teorema 2.19. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ subanalíticos de dimensão m e n respectivamente com $m > n \geq p + 1$ e $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ um germe de aplicação subanalítico. Considere $0 \in W \subset Y$*

um subespaço analítico suave de dimensão p contido na imagem de f . Existe uma coleção finita de subespaços subanalíticos $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset W$ com $0 \in T_\alpha$, $\dim T_\alpha = p - 1$. Então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tais que

$$f| : f^{-1}(W \setminus \{T_\alpha\} \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \longrightarrow W \setminus \{T_\alpha\} \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n,$$

é um fibrado topológico localmente trivial.

Demonstração. Sabemos $0 \in W \subset Y$ subespaço analítico de dimensão p , podemos tomar $Y' = W \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$, onde $\mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$ denota um disco aberto de raio δ e centro na origem de Y .

Considere $f^{-1}(Y')$ um subespaço subanalítico definimos $A = f^{-1}(Y') \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m$, com $\mathbb{B}_\varepsilon^m$ bola fechada de raio ε suficientemente pequeno centrada na origem de X , então A é um subespaço subanalítico e pelo Teorema 2.4 admite uma estratificação de Whitney com a (w) -condição, $S = \{S_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$. É simples ver que $f| : A \longrightarrow Y'$ é própria.

Quando $p = 3$, essa situação é resolvida no Teorema 2.17.

Hipótese de Indução (H.I.): Vale para W subespaço analítico de dimensão $p - 1$.

Usando o Teorema 2.5, existe uma vizinhança $U \subset f(A) = Y'$ tal que $\bar{U} = Y'$, U é suave e subanalítico em Y' . Agora desenvolveremos a caracterização de U , de forma similar ao Teorema 2.17. Trabalharemos localmente em Y' , ou seja, para $x \in Y'$ considere uma vizinhança U de x tal que $U(x) = U \cap \mathbb{D}^n(x)$, onde $\mathbb{D}^n(x)$ é um disco suficientemente pequeno com centro em $x \in U$. Como $U(x)$ é subanalítico tem estrutura cônica ((SHIOTA, 1997), (COSTE, 1999) Thm 4.10), isto é, $U(x) \approx \text{Cone}(\partial U(x))$, onde $\partial U(x) = U(x) \cap \mathbb{S}^{n-1}(x)$. Assim o problema de encontrar $U(x)$ se resume da seguinte forma:

$$U(x) \text{ é denso e subanalítico em } \mathbb{D}^p(x) \Leftrightarrow \partial U(x) \text{ é denso e subanalítico em } \mathbb{S}^{p-1}.$$

Como Y' tem dimensão p então $\partial U(x)$ tem dimensão $p - 1$. Usando a hipótese de indução e a estrutura cônica de $U(x)$ concluímos que $U(x)$ é o complementar dos subespaços $T_\alpha(x)$ com $T_\alpha(x) \ni 0$ e $\dim T_\alpha(x) = p - 1$. Observe que esses subespaços de dimensão $p - 1$ são subanalíticos, pois o complementar de um conjunto subanalítico é subanalítico (Teorema 1.36). Defina $T_\alpha := \cup_{x \in Y'} T_\alpha(x)$.

Seja $\vec{v}$ um campo de vetores tangente a $Y' \setminus \{T_\alpha\}$. Usando a Proposição 2.6 podemos levantá-lo a um campo de vetores rugoso estratificado em S_β e portanto integrável pela Proposição 2.7 cujas curvas integráveis fornecem a trivialização de $f| : Y' \setminus \{T_\alpha\} \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \longrightarrow Y' \setminus \{T_\alpha\}$. Assim, temos um fibrado topológico trivial.

Logo,

$$f| : f^{-1}(W \setminus \{T_\alpha\} \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^m \longrightarrow W \setminus \{T_\alpha\} \cap \mathring{\mathbb{D}}_\delta^n$$

é um fibrado topológico localmente trivial, com ε e δ como no enunciado.

□

2.2 Fibrações para germe de aplicações subanalíticas com o domínio subanalítico

Considere U uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^m$. Sejam $X \subset U$ espaço subanalítico de dimensão n , onde $p < n \leq m$ e $(X, 0)$ um germe subanalítico definido em $\mathbb{R}^m$ e um germe de aplicação subanalítico $f : (X \subset U, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $n > p \geq 1$ tal que $\dim V > 0$, onde $V := f^{-1}(0)$. Equipamos U com uma estratificação de Whitney $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ com a (w)-condição adaptada a X e a V , ou seja, X e V são descritos pela união desses estratos e assumimos $\{0\}$ um estrato. Considere f de classe C^1 em cada estrato.

Usando Teorema 2.4 é possível garantir que essa estratificação $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tem seus estratos como variedades diferenciáveis analíticas e subespaços subanalíticos em U (Def. 1.31), o qual é a reunião desses estratos.

Agora definimos a noção de ponto crítico e valor crítico de aplicações subanalíticas. Considere Y um subespaço de $\mathbb{R}^p$.

Definição 2.20. Dizemos que $x \in X$ é um ponto regular de $f : X \longrightarrow Y$, com respeito à S se a restrição de f ao estrato $S_{\alpha(x)}$ que contém x é uma submersão em x , isto é, $f : S_{\alpha(x)} \longrightarrow Y$ é uma submersão.

Caso contrário, dizemos que x é um ponto crítico de f com respeito à S . Dizemos que f é uma aplicação regular com respeito à S se todo $x \in X$ é ponto regular de f com respeito à S .

No nosso caso tomaremos $Y = \mathbb{R}^p$.

Observação 2.21. A definição de f ser transversal a uma estratificação em (VERDIER, 1976) significa que para $f : X \longrightarrow Y$ toda restrição de f a um estrato de S , $f|_{S_\alpha} : S_\alpha \longrightarrow Y$ é uma submersão. Observe que quando temos a aplicação f regular então f é transversal à S .

Observe que se x é um ponto regular de f , então “localmente $f|_{S_{\alpha(x)}}$ é sobrejetiva”, ou seja, existe uma vizinhança U de x em $S_{\alpha(x)}$ tal que $f(U)$ é um aberto em Y . Por outro lado, se $\dim S_{\alpha(x)} < \dim Y$ então x é ponto crítico de f .

Denotamos por Σ_f o conjunto de todos os pontos críticos de f com respeito à S . Observe que Σ_f é um subconjunto subanalítico de X . A estratificação S de X induz uma estratificação com a (w)-condição de Σ_f , isto é, basta tomarmos os $S_\alpha \cap \Sigma_f = S'_\alpha$ como para os estratos iniciais já era satisfeita a (w)-condição para os menores, construídos pela interseção, segue naturalmente, observe que não perdemos essas propriedades restringindo os conjuntos pois elas são relacionadas por pares de estratos e avaliadas nos pontos. De maneira muito simples verifica-se a condição de fronteira. Dessa forma a estratificação de Σ_f é $S' = \{S'_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma estratificação subanalítica de Whitney com a (w)-condição.

Definição 2.22. Dizemos que um ponto $y \in \mathbb{R}^p$ é um valor crítico de f com respeito à S se existe $x \in \Sigma_f$ tal que $f(x) = y$. Dessa forma, o discriminante de f com respeito à S é definido da mesma maneira para aplicação de classe C^ℓ , $\ell \geq 1$ por $\Delta_f := f(\Sigma_f)$.

Observe que Δ_f é um subconjunto subanalítico de $\mathbb{R}^p$ e, portanto, pelo Teorema 2.4, existe uma estratificação de Whitney com a (w) -condição $P = \{P_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ de $\mathbb{R}^p$ tal que Δ_f é união de estratos.

Dizemos que $y \in \Delta_f$ é um valor crítico isolado de f com respeito à S se existe $\delta > 0$ tal que $\Delta_f \cap \mathbb{D}_\delta(y) = \{y\}$.

Observação 2.23. Em outras palavras, y é um valor crítico isolado de f com respeito à S se existe $\delta > 0$ tal que a restrição de f ao subespaço $f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta(y) \setminus \{y\}) \cap X$ é uma aplicação regular com respeito à estratificação S (ou ainda, usando (VERDIER, 1976) significa que f é transversal à estratificação S).

Definição 2.24. Seja f como acima, tem discriminante linear se para qualquer representante de f existe $\eta(f) > 0$ tal que a interseção do discriminante Δ_f de f com a bola $\mathbb{B}_\eta^p$ é uma união de segmentos de retas, isto é,

$$\Delta_f \cap \mathbb{B}_\eta^p = \text{Cone}(\Delta_f \cap \mathbb{S}_\eta^{p-1}).$$

Chamamos η um raio linear de Δ_f .

Segue de maneira similar a definição de discriminante linear de uma aplicação de classe C^ℓ , $\ell \geq 1$, Def. 1.75.

Pelo Teorema de Bertini-Sard (VERDIER, 1976) sabemos que se Z é um espaço analítico real então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno as esferas em $\mathbb{B}_\varepsilon^n$ centradas em $0 \in \mathbb{R}^n$ são transversais a todos os estratos de Z .

Observe que isso também vale para X subanalítico, segue consequentemente do Teorema 2.5 usando a função real da distância ao quadrado. Da mesma maneira para obter o Bertini-Sard para espaços analíticos.

O resultado a seguir foi mostrado por ((MILNOR, 1968) e (LÊ, 1977)) para aplicações holomorfas por ((PICHON; SEADE, 2003), (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2010) e (CISNEROS-MOLINA; SEADE; GRULHA, 2014)) para aplicações analíticas reais. Agora estendemos para aplicações subanalíticas reais.

Vamos inicialmente considerar o caso para germe de aplicações com valor crítico isolado.

Teorema 2.25. *Seja $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $n > p \geq 1$ o germe de uma aplicação subanalítica com valor crítico isolado, sendo a origem de $\mathbb{R}^p$ e com a propriedade de transversalidade. Para $\varepsilon \gg \delta > 0$ suficientemente pequeno, considere o tubo de Milnor $\tilde{N}(\varepsilon, \delta) = f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_\delta^p) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^n \cap X$, onde $\mathring{\mathbb{D}}_\delta^p$ é um disco em $\mathbb{R}^p$ de raio δ e centrado em $0 \in \mathbb{R}^p$, e $\mathbb{B}_\varepsilon^n$ é a bola fechada em U de*

raio ε centrada em $0 \in \mathbb{R}^n$. Definimos $\bar{N}(\varepsilon, \delta) := \tilde{N}(\varepsilon, \delta) \setminus f^{-1}(0)$. Então temos as fibrações localmente triviais em :

$$f : \bar{N}(\varepsilon, \delta) \rightarrow \mathbb{D}_\delta^* \cap \text{Im}f$$

e

$$f : \bar{N}(\varepsilon, \delta) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}_\delta^* \cap \text{Im}f,$$

onde $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \equiv \partial \mathbb{B}_\varepsilon^n$ e $\mathbb{D}_\delta^p \setminus \{0\} = \mathbb{D}_\delta^*$.

Demonstração. Sabemos que mesmo f sendo subanalítica $V = f^{-1}(0)$ tem localmente uma estrutura cônica na esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$, isto é, $V \cap \mathbb{D}_\varepsilon^n$ é homeomorfo ao $\text{Cone}(V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1})$, que se trata de todos os segmentos $tk + (1-t)x_0$, $0 \leq t \leq 1$ onde $k \in V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ e x_0 é o ponto base, neste caso o centro da esfera e do disco. Assim, todo estrato de V é transversal a $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$.

Como f tem a propriedade de transversalidade em cada estrato, garantimos que as fibras de $f^{-1}(\mathbb{D}_\delta^p \setminus \{0\})$ são transversais a $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ em cada estrato S_α . Denotaremos a partir de agora $\mathbb{D}_\delta^p \setminus \{0\} = \mathbb{D}_\delta^*$.

Usando a definição de ponto regular de f com respeito a estratificação $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $X \setminus V$ temos que f restrita a esses estratos são submersões em $\mathbb{R}^p$, agora os estratos de $\bar{N}(\varepsilon, \delta)$, um subespaço localmente fechado de X , utilizando o Teorema de Bertini-Sard junto com a propriedade de transversalidade da f , permanecemos com as submersões a cada novo estrato.

Assim tomando $Y = \mathbb{R}^p$ espaço analítico podemos aplicar a Proposição 2.6 e garantir o levantamento de um campo de vetores μ em $\mathbb{R}^p$ em particular tangentes a $\mathbb{D}_\delta^* \cap \text{Im}f$ gerando um campo de vetores rugoso v tangente a $\bar{N}(\varepsilon, \delta)$ com respeito a estratificação tal que

$$Tf(v(x)) = \mu(f(x)).$$

Daí usando a Proposição 2.7 temos a integrabilidade de v e portanto temos $f : \bar{N}(\varepsilon, \delta) \rightarrow \mathbb{D}_\delta^* \cap \text{Im}f$ é uma fibração localmente trivial.

No caso do tubo de Milnor restrito a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ segue de maneira análoga, pois sobrará somente os pontos onde $f^{-1}(\mathbb{D}_\delta^*)$ são transversais a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ e sabemos que f restrita a esses pontos, $\bar{N}(\varepsilon, \delta) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$, é estratificada e daí o resultado segue usando os mesmos resultados usados anteriormente. $\square$

Agora podemos estender o resultado anterior para germe de aplicações subanalíticas com valor crítico não isolado. Usaremos a estratificação subanalítica de Whitney com a (w) -condição adaptada a X e a $f^{-1}(\Delta_f)$, lembrando que os estratos são variedades diferenciáveis analíticas e conjuntos subanalíticos.

Teorema 2.26. *Considere $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $n > p \geq 1$ germe subanalítico com valor crítico não isolado, a estratificação descrita acima adaptada a X e $f^{-1}(\Delta_f)$ e f com a propriedade de transversalidade. Para $\varepsilon \gg \delta > 0$ suficientemente pequeno, seja $\tilde{N}(\varepsilon, \delta) =$*

$f^{-1}(\mathbb{D}_\delta^p) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^n \cap X$ do teorema anterior. Definimos $N(\varepsilon, \delta) := \tilde{N}(\varepsilon, \delta) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$. Então temos as seguintes fibrações localmente triviais:

$$f : N(\varepsilon, \delta) \rightarrow (\mathbb{D}_\delta^p \cap \text{Im}f) \setminus \Delta_f$$

e

$$f : N(\varepsilon, \delta) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \rightarrow (\mathbb{D}_\delta^p \cap \text{Im}f) \setminus \Delta_f,$$

onde $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \equiv \partial \mathbb{B}_\varepsilon^n$.

Demonstração. Segue análoga a demonstração do teorema anterior, basta usar a estratificação adaptada a $f^{-1}(\Delta_f)$ e observar que o tubo não contém esses pontos e continuamos com a transversalidade dos estratos e das esferas centradas em 0 contidas em $\mathbb{B}_\varepsilon^n$. Continuamos com Y sendo o espaço total $\mathbb{R}^p$ e usamos o campo de vetores tangente a $(\mathbb{D}_\delta^p \cap \text{Im}f) \setminus \Delta_f$. $\square$

Pela seção anterior desse capítulo sabemos que existe fibração sobre um subespaço subanalítico, neste caso sobre o discriminante, mas continuamos com a trivialização das fibras em cada estrato.

Observe que $\mathbb{D}_\delta^p \setminus \Delta_f$ pode ter várias componentes conexas, e neste caso o teorema não diz nada sobre a topologia das fibras sobre as diferentes componentes. Note também que a $\text{Im}f$ pode não cobrir todo o disco $\mathbb{D}_\delta^p$, independente de δ .

Exemplo 25. Considere a aplicação analítica real

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (xy + z^2, x). \end{aligned}$$

O conjunto de zeros de f é dado por $V = \{(0, t, 0); t \in \mathbb{R}\}$. E o conjunto dos pontos críticos é $\{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\}$ consequentemente $\Delta_f = \{(0, 0)\}$, ou seja, f tem com valor crítico isolado.

Observe que quando $x = 0$ tem-se $f(0, y, z) = (z^2, 0)$, ou seja, a imagem de f é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0); t < 0\}$, em particular não é localmente sobrejetora em torno $0 \in \mathbb{R}^2$.

Agora vamos verificar se a f tem a d -regularidade. Vamos usar a Lema 4 para verificar, considere a seguinte matriz

$$M = \begin{bmatrix} z^2 & -x^2 & -2xz \\ x & y & z \end{bmatrix}.$$

Tem rank estritamente menor que 2 em todo os pontos de V . Assim a aplicação é d -regular.

Contudo, a aplicação f não induz uma fibração na esfera. De fato, seja

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}_\varepsilon^2 \setminus V &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{f(x, y, z)}{\|f(x, y, z)\|}. \end{aligned}$$

$$\text{Assim } \Phi(x, y, z) = \left(\frac{xy + z^2}{\sqrt{x^2y^2 + 2xyz^2 + z^4 + x^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2y^2 + 2xyz^2 + z^4 + x^2}} \right).$$

A fibra $\Phi^{-1}(1,0)$ é a união de duas semirretas

$$\{(0,0,t); t > 0\} \text{ e } \{(0,0,t); t < 0\},$$

em particular não é conexo.

Já as fibras $\Phi^{-1}(0,1)$ e $\Phi^{-1}(0,-1)$ são conexas. Todas as fibras estão ilustradas abaixo.

Figura 14 – Duas fibras que tem topologias diferentes

Em resumo, esse é um exemplo de uma aplicação analítica real com valor crítico isolado que é d -regular e não induz uma fibração na esfera. As fibras dessa aplicação arbitrariamente próximas da origem não são transversais as esferas e a aplicação não é localmente sobrejetora (Exemplo 26).

Até o momento obtemos somente a fibração de Milnor-Lê, no tubo de Milnor. Uma questão interessante que fica em aberto, é se existe a fibração de Milnor para esse germe de aplicação subanalítica e se as fibrações são equivalentes.

2.3 D-regularidade para aplicação subanalítica

Considere a mesma situação trabalhada acima, U uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^m$. Sejam $X \subset U$ espaço subanalítico de dimensão n tal que $p < n \leq m$ e $(X,0)$ um germe subanalítico definido em $\mathbb{R}^m$ e um germe de aplicação subanalítico $f : (X,0) \rightarrow (\mathbb{R}^p,0)$, $n > p \geq 1$ tal que $\dim V > 0$, onde $V := f^{-1}(0)$. Equipamos U com uma estratificação de Whitney $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ com a (w)-condição adaptada a X e a $f^{-1}(\Delta_f)$, ou seja, X e $f^{-1}(\Delta_f)$ são descritos pela união desses estratos e assumimos $\{0\}$ um estrato.

Vamos definir o pencil canônico da mesma forma que na Definição 1.2. Isto é, a família $\{X_L\}$ quando L varia em $\mathbb{RP}^{p-1}$,

$$X_L := \{x \in U; f(x) \in L\},$$

onde $\theta \in \mathbb{S}_\theta^{p-1}$ e L é a reta que passa pela origem e por θ . Como toda reta L intercepta a esfera em dois pontos, θ^- e θ^+ , podemos decompor a reta levando em consideração os pontos antípodos,

$$L = L^- \cup \{0\} \cup L^+$$

assim,

$$X_L = E_{\theta^-} \cup V \cup E_{\theta^+},$$

onde $E_{\theta^-} = \{x \in U; f(x) \in L^-\}$ e E_{θ^+} segue igualmente. Mas estamos interessados somente no domínio X , dessa forma temos que interseccionar o pencil canônico com os estratos S_α 's da estratificação de Whitney com a (w) -condição. Logo, renomearemos da seguinte maneira:

$$X_L := X_L \cap S_\alpha = (E_{\theta^-} \cup V \cup E_{\theta^+}) \cap S_\alpha,$$

para toda L em $\mathbb{RP}^{p-1}$ e todo estrato em S .

Observe que $X_L \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} = (E_{\theta^-} \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}) \cup K \cup (E_{\theta^+} \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}) \cap S_\alpha$.

O seguinte lema é uma consequência imediata de [(VERDIER, 1976), Remark (3.7)].

Lema 9. Seja $f : (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ uma aplicação subanalítica com uma estratificação de Whitney com a (w) -condição de X adaptada a $f^{-1}(\Delta_f)$, $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Então a interseção dos estratos de S com X_L determina uma estratificação de Whitney com a (w) -condição para cada $(X \cap X_L) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$.

Demonstração. Pela forma como definimos pontos críticos de uma aplicação subanalítica, temos que $f|_1$ é transversal à estratificação de $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ menos os estratos de $f^{-1}(\Delta_f)$. Agora considerando $Z = L^+ \subset \mathbb{R}^p$, sem perda de generalidade, sendo L^+ uma semirreta que começa no zero e passa por $\theta^+ \in \mathbb{S}_\delta^{p-1}$ mas que a origem não pertença a ela, pelo Remark, temos que $S \cap f^{-1}(L^+)$ é uma estratificação de Whitney com a (w) -condição de $(X \cap X_L) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$. $\square$

Por meio do lema anterior, sabemos existe uma estratificação de Whitney com a (w) -condição para $(X \cap X_L) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$. Isto é, $S_\alpha \cap X_L$.

Assim, estamos aptos para definir a D -regularidade para f considerada.

Observação 2.27. Seja $S = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma estratificação de Whitney com a (w) -condição adaptada a X e a $f^{-1}(\Delta_f)$. Como $f : (X \cap \mathbb{B}_\varepsilon^n) \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ é uma submersão em cada estrato diferenciável, então para cada estrato $S_\alpha \subset X \setminus f^{-1}(\Delta_f)$, a interseção $S_\alpha \cap X_L$ é uma variedade diferenciável de codimensão real 1 em $\{S_\alpha\}$, para cada α .

Definição 2.28. Seja $f : (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe subanalítico de classe C^ℓ , $\ell \geq 0$ com discriminante linear. Dizemos que f é D -regular em 0 se para qualquer representante de f existe $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $f(\mathbb{B}_{\varepsilon_0}^n) \subset \mathbb{D}_\eta^p$, onde η é o raio linear para Δ_f e considerando a estratificação de Whitney com a (w) -condição adaptada a X e $f^{-1}(\Delta_f)$ tal que para toda esfera em $\mathbb{S}_{\varepsilon_0}^{n-1}$ centrada em $0 \in \mathbb{R}^n$ encontra transversalmente $(X_L \cap S_\alpha)$ para todo $L \in \mathbb{R}^p \setminus \Delta_f$.

A d -regularidade é quando o discriminante de f é isolado, ou seja, somente a origem de $\mathbb{R}^p$.

Os dois próximos lemas são similares a resultados de (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2010), mas nosso caso trabalhando dentro de cada estrato, S_α , para todo $\alpha \in \Lambda$.

Lema 10. Considerando $f, X, f^{-1}(\Delta_f)$ como anteriormente, temos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- 1) f é D -regular em 0;
- 2) para cada esfera $\mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1}$ centrada em $0 \in \mathbb{R}^n$ de raio $\varepsilon' < \varepsilon$, a aplicação restrita de $\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F}_{\varepsilon'} : (X \cap \mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1}) \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{S}_{\varepsilon'}^{p-1}$$

é uma submersão em cada estrato de $(X \cap \mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1})$.

- 3) a aplicação $\mathfrak{F}$ é uma submersão em cada $x \in (X \cap \mathbb{B}_\varepsilon^n) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$.

- 4) a aplicação $\phi : (X \cap \mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1}) \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ é uma submersão para toda esfera $\mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1}$, $\varepsilon' < \varepsilon$.

Demonstração. (1) $\implies$ (2) Seja $x \in (\mathbb{B}_\varepsilon^n \cap X) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$ e $f(x) \in L$, assim $x \in X_L$ por definição. Por hipótese $(X_L \cap S_\alpha)$ é transversal a $\mathbb{S}_{||x||}^{n-1}$ de raio $||x||$. Recordando $X_L \cap S_\alpha = (E_{L-} \cup E_{L+}) \cap S_\alpha$, sem perda de generalidade assumimos que $x \in E_{L+} \cap S_\alpha$, então $(E_{L+} \cap S_\alpha) \cap \mathbb{S}_{||x||}^{n-1}$ é uma subvariedade de $\mathbb{S}_{||x||}^{n-1}$ de dimensão $n - p$ e é precisamente a fibra $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(x))$. Consequentemente, o espaço tangente de $\mathbb{S}_{||x||}^{n-1}$ em $x \in (\mathbb{S}_{||x||}^{n-1} \cap X) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$ se divide em uma soma direta, pensando em cada estrato,

$$T_x \mathbb{S}_{||x||}^{n-1} \cong T_x \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(x)) \oplus N_x \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(x)),$$

onde $N_x \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(x))$ é o espaço normal em $x \in \mathbb{S}_{||x||}^{n-1}$ que tem dimensão $p - 1$. Trabalhando dentro do estrato $S_\alpha \ni x$, $T_x \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(x)) = \text{Ker } d_x \mathfrak{F}$ então $N_x \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(x))$ é aplicado por $d_x \mathfrak{F}$ isomorficamente em $T_{\mathfrak{F}(x)} \mathbb{S}_{||x||}^{p-1}$. Assim a restrição $\mathfrak{F}_{||x||} : (X \cap \mathbb{S}_{||x||}^{n-1}) \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{S}_{||x||}^{p-1}$.

(2) $\iff$ (3) Considere $x \in (X \cap \mathbb{B}_\varepsilon^n) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$ e $v \in T_x(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon^n)$ tal que v é transversal a esfera $\mathbb{S}_{||x||}^{n-1}$. Como $\mathfrak{F}$ leva $\mathbb{S}_{||x||}^{n-1} \setminus f^{-1}(\Delta_f)$ e a fibra de $\mathfrak{F}$ que contém x está contida na esfera $\mathbb{S}_{||x||}^{n-1}$ então $d_x \mathfrak{F}(v)$ é um vetor não nulo em $T_x \mathbb{R}^p$ transversal a esfera $\mathbb{S}_{||x||}^{p-1}$. Portanto, $\mathfrak{F} : (X \cap \mathbb{B}_\varepsilon^n) \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ é uma submersão em x se e somente se $\mathfrak{F}_{||x||} : (X \cap \mathbb{S}_{||x||}^{n-1}) \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{S}_{||x||}^{p-1}$ é uma submersão em x .

(2) $\implies$ (4) É possível ver que

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{||f(x)||} = \frac{\mathfrak{F}(x)}{||\mathfrak{F}(x)||}.$$

A aplicação $\phi := \frac{f}{||f||} : (X \cap \mathbb{S}_\eta^{n-1}) \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \Delta_f$ é a restrição de aplicação Φ a $(X \cap \mathbb{S}_\eta^{n-1}) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$. Então $\phi = \frac{\mathfrak{F}_\eta}{||\mathfrak{F}_\eta||}$ e se trata da composição de $\mathfrak{F}_\eta : (X \cap \mathbb{S}_\eta^{n-1}) \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{S}_\eta^{p-1} \setminus \Delta_f$ com a projeção radial na esfera $\mathbb{S}_\eta^{p-1} \setminus \Delta_f$. Logo, se $\mathbb{F}_\eta$ é uma submersão, então ϕ também será, sendo a composição de uma submersão com um difeomorfismo.

(4) $\implies$ (1) Supondo que a aplicação $\Phi := \frac{f}{||f||} : (X \cap \mathbb{B}_\varepsilon^n) \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \Delta_f$ é uma submersão, como é a composição de f com a projeção radial de $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ na esfera unitária $\mathbb{S}^{p-1}$ e f é tem valor crítico não isolado.

A aplicação $\phi := \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus f^{-1}(\Delta_f) \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ é a restrição da aplicação Φ . Seja $x \in (X \cap \mathbb{S}_\eta^{n-1}) \setminus f^{-1}(\Delta_f)$ e suponhamos que $f(x) \in L$. Temos que $\Phi^{-1}(f(x)) \cap X = E_{L^+} \cap S_\alpha$ ou $\Phi^{-1}(f(x)) \cap X = E_{L^-} \cap S_\alpha$ depende da semirreta em que $f(x)$ está. Então $E_{L^\pm} \cap S_\alpha$ é uma subvariedade diferenciável de codimensão $p-1$, ou seja, de dimensão $n-p+1$. Como ϕ é uma submersão em x , assim o espaço tangente $T_x(X \cap \mathbb{S}_\eta^{n-1})$ de $\mathbb{S}_\eta^{n-1}$ em x intersecciona o Kernel da diferencial $d_x\Phi$, lembrando que estamos dentro de algum estrato $S_\alpha \ni x$, em um subespaço de dimensão $n-p$. Sabemos que $\text{Ker } d_x\Phi = T_x(E_{L^\pm} \cap S_\alpha)$ e

$$\begin{aligned} \dim((T_x E_{L^\pm} \cap S_\alpha) + T_x \mathbb{S}_\eta^{n-1}) &= \dim(T_x E_{L^\pm} \cap S_\alpha) + \dim T_x \mathbb{S}_\eta^{n-1} - \dim(T_x E_{L^\pm} \cap T_x \mathbb{S}_\eta^{n-1} \cap S_\alpha) \\ &\geq (n-p+1) + (n-1) - (n-p) \\ &= n. \end{aligned}$$

Portanto $E_{L^\pm} \cap X$ que equivale a escrever $E_{L^\pm} \cap S_\alpha$ é transversal a esfera $\mathbb{S}_\eta^{n-1}$ para qualquer $\eta < \varepsilon$, isto é, f é *D-regular* em 0.

□

CRITÉRIO PARA A PROPRIEDADE DE TRANSVERSALIDADE

Em (MENEGON; SEADE, 2017), (CHEN; SANTOS; TIBĂR, 2013), (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -) e (SANTOS; TIBĂR, 2010) entre outras referências, são exibidas condições necessárias para assegurar as fibrações no tubo de Milnor de um germe de aplicação de classe C^ℓ , $\ell > 1$. Isto é, garantem a transversalidade das fibras dos valores regulares de um germe de aplicação com a esfera de raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Uma das mais usuais é o germe de aplicação f ter $\Sigma_f \cap V \subset \{0\}$.

Nesse capítulo apresentamos uma condição necessária e suficiente para a propriedade de transversalidade para uma f de classe C^ℓ , $\ell \geq 1$ (Def. 1.78).

Através da proposição a seguir vamos caracterizar os pontos onde a fibra $f^{-1}(f(x))$ e a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ não são transversais, isto é, quando $T_x f^{-1}(f(x)) \subset T_x \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ onde $x \in f^{-1}(f(x)) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$. Isso não garante que a propriedade de transversalidade não é válida, já que a propriedade ocorre para cada $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, fixado existe um $\delta \ll \varepsilon$ tal que $t \in \mathbb{D}_\delta^p \setminus \Delta_f$ tem-se $f^{-1}(t)$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ transversais.

Proposição 3.1. *Considere $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $n > p \geq 1$ de classe C^ℓ , $\ell \geq 1$. Seja $x \in f^{-1}(f(x)) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ então $f^{-1}(f(x))$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ são transversais se e somente se os vetores $x, \nabla f_1(x), \nabla f_2(x), \dots, \nabla f_{p-1}(x), \nabla f_p(x)$ são linearmente independentes.*

Demonstração. A demonstração seguirá por contrapositiva. Considere $x \in f^{-1}(f(x))$, onde $f(x) \notin \Delta_f$ e $x \in f^{-1}(f(x)) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e suponhamos x como uma combinação linear de $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_p(x)$, ou seja,

$$x = \alpha_1 \nabla f_1(x) + \dots + \alpha_p \nabla f_p(x), \quad \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Para termos $f^{-1}(f(x))$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ transversais tem-se que

$$T_x f^{-1}(f(x)) + T_x \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} = \mathbb{R}^n$$

onde $T_x \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} = x^\perp$ de dimensão $n-1$ e $T_x f^{-1}(f(x)) = \text{Ker } df(x)$ de dimensão $n-2$. Para que a transversalidade não ocorra devemos ter $T_x f^{-1}(f(x)) \subset T_x \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$.

Seja $v \in T_x f^{-1}(f(x))$ então $\langle \nabla f_1(x), v \rangle = 0, \dots, \langle \nabla f_p(x), v \rangle = 0$, logo usando 3.1

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_1(x), v \rangle + \dots + \langle \nabla f_p(x), v \rangle &= 0 \\ \alpha_1 \langle \nabla f_1(x), v \rangle + \dots + \alpha_p \langle \nabla f_p(x), v \rangle &= 0 \\ \langle \alpha_1 \nabla f_1(x) + \dots + \alpha_p \nabla f_p(x), v \rangle &= 0 \\ \langle x, v \rangle &= 0 \Leftrightarrow v \in T_x \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $T_x f^{-1}(f(x)) \subset T_x \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ e podemos concluir que no ponto x as variedades $f^{-1}(f(x))$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ não são transversais. □

Observação 3.2. O conjunto tal que os vetores x e os gradientes de f no ponto x são linearmente dependentes, isto é, as fibras não são transversais a esfera é denotado por $\mathfrak{B}$ em (MASSEY, 2010), seção 4.

Resta agora a seguinte questão, quando essa tangência entre a fibra e a esfera pode ser contornada, ou seja, quando a f tem propriedade de transversalidade? Isto é, para um ε e um δ obtivemos a tangência mas e se diminuirmos o δ perdemos a tangência e conseguimos a transversalidade? A ideia para verificar isso é conseguirmos uma sequência de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que tem a tangência entre $T_{x_n} f^{-1}(f(x_n))$ e $T_{x_n} \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ que esta sobre a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \in V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$.

Vamos esclarecer essa situação no seguinte exemplo. Iremos tomar uma curva que satisfaz essa condição. O seguinte exemplo é da autoria de Jawad Snoussi.

Exemplo 26. Considere a aplicação analítica real

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (xy + z^2, x). \end{aligned}$$

O conjunto de zeros de f é dado por $V = \{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\}$. A matriz jacobiana é

$$Jf = \begin{bmatrix} y & x & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o conjunto dos pontos críticos é $\{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\}$ consequentemente $\Delta_f = \{(0, 0)\}$, ou seja, f tem valor crítico isolado.

Vamos agora verificar se f tem a propriedade de transversalidade.

Considere um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ da forma $p = (a, b, 0)$, com $a \neq 0$ assim $p \notin V$. O espaço tangente da fibra $f^{-1}(f(p))$ em p é dado pelas equações

$$\begin{cases} bx + ay = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

é a reta $\{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$.

O espaço tangente em p da esfera de $\mathbb{R}^3$ centrada na origem que contém p é dada pela equação

$$ax + by = 0.$$

Em particular no ponto p , a reta tangente a fibra de f está contida no espaço tangente da esfera, então eles não são transversais e como o ponto p tende V em $\mathbb{R}^3$. Considerando $C = (a, \sqrt{\varepsilon^2 - a^2}, 0)$ temos $C \subset \mathbb{S}_\varepsilon^2$ então $f(C) = (a\sqrt{\varepsilon^2 - a^2}, a)$. Se tomarmos $a \rightarrow 0$ teremos a curva C ainda na esfera de raio ε se aproximando de $V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^2$ tal que $f(C) \rightarrow 0$.

Assim, para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno fixado é impossível encontrar um $0 < \delta \ll \varepsilon$ tal que tenhamos a transversalidade das fibras com a esfera.

Pelo Exemplo 25 a aplicação f tem a d -regularidade, é simples verificar pela Proposição 4, e não possui a a_f -propriedade de Thom.

Formalizando essa ideia o próximo teorema nos dá uma condição necessária e suficiente para a propriedade de transversalidade.

Teorema 3.3. *Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $n > p \geq 1$ de classe C^ℓ , $\ell \geq 1$. Existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ de pontos sobre a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ tais que $f^{-1}(f(x_n))$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ não sejam transversais, com ε suficientemente pequeno fixado, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ quando $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \in V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ se, e somente se, f não tem a propriedade de transversalidade.*

Demonstração. Assumimos que exista uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos sobre a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ tal que $f^{-1}(f(x_n))$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ não sejam transversais e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$, quando $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \in V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$.

Como $f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ então para todo $\rho = f(x_n) \in \mathbb{D}_\delta^p \setminus \Delta_f$, com $0 < \delta \ll \varepsilon$ tem-se $f^{-1}(\rho)$ não será transversal a $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ e sim tangente no ponto x_n . Logo não será possível tomar um $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(\rho)$, $\rho \in \mathbb{D}_\delta^p \setminus \Delta_f$, é transversal a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ pois $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, isto é, por menor que escolhermos o δ sempre teremos $\rho = f(x_n) \in \mathbb{D}_\delta^p \setminus \Delta_f$.

Figura 15 – A sequência que perde a propriedade de transversalidade da f

A recíproca vamos mostrar por absurdo. Suponhamos que não exista uma sequência de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tais que $f^{-1}(f(x_n))$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ não sejam transversais, que se aproxima de V e continua sobre a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno fixado. Então para o ponto x_n mais próximo de V que estiver sobre a esfera tal que $f^{-1}(f(x_n))$ seja tangente a $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ em x_n podemos tomar $0 < \delta < |f(x_n)|$. Logo para esse $\varepsilon > 0$ conseguimos um $\mathbb{D}_\delta^p$ tal que para todo $\rho \in \mathbb{D}_\delta^p \setminus \Delta_f$ tem-se $f^{-1}(\rho)$ transversal a $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$. Então f possui a propriedade de transversalidade por definição, um absurdo pois f não possui a propriedade de transversalidade por hipótese.

Figura 16 – Uma sequência que não está sobre a esfera e o tubo de Milnor que permite a f tem a propriedade de transversalidade

□

Observe que a sequência que pode ser tomada para verificar a propriedade de transversalidade é composta pelos pontos de tangências encontrados na Proposição 3.1.

Agora vamos ver um exemplo que também não tem a propriedade de transversalidade e nem a d -regularidade.

Exemplo 27. Seja

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2z + y^3, x). \end{aligned}$$

O conjunto crítico de g é $\{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$ então o discriminante é somente a origem. Note que $V = g^{-1}(0) = \Sigma_g$.

Vamos agora verificar a d -regularidade dessa aplicação. Seja

$$M = \begin{bmatrix} y^3 - x^2z & -3xy^2 & -x^3 \\ x & y & z \end{bmatrix},$$

a matriz definida no Lema 4, note que a reta $\{(x, 0, x); x \in \mathbb{R}\} \notin V$ e aplicada a matriz M tem rank estritamente menor que 2. Assim, concluímos que g não possui a d -regularidade. O exemplo 4.9 (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -) exibe um homeomorfismo cônico tal que g possua d_{h-1} -regularidade.

Em seguida exibiremos a curva que falha a propriedade de transversalidade da g . Considere a seguinte matriz, dada pela Proposição 3.1

$$\begin{bmatrix} 2xz & 3y^2 & x^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix},$$

observe que a curva $\{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\} \notin V$ é tangente a uma esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^2$. Definimos $C = (x, 0, \sqrt{\varepsilon^2 - x^2})$ que mora na esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^2$. Note que quando $x \rightarrow 0$ a curva continua na esfera e $g(C) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, pois $g(C) = (x^2 \sqrt{\varepsilon^2 - x^2}, x)$. Pelo Teorema 3.3 g não possui a propriedade de transversalidade.

Em seguida no próximo exemplo exibimos um germe de aplicação real h que tem a propriedade de transversalidade. Vamos mostrar que não é possível encontrar uma sequência de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $f^{-1}(f(x_n))$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ não são transversais em x_n e que esteja sobre a esfera e convirja para $V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$.

Exemplo 28. Considere

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, w) &\longmapsto (x^2 + y^2 + z^3 + zw^2, w^3 + wz^2). \end{aligned}$$

O conjunto crítico de h é $\{(x, y, 0, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$ então o discriminante $\{(x^2 + y^2, 0)\}$, valor crítico não isolado. Note que $V = h^{-1}(0) = \{(x, y, z, 0); x^2 + y^2 + z^3 = 0\}$.

Usando a Proposição 3.1 vamos encontrar os pontos tais que as fibras tem tangência com $\mathbb{S}_\varepsilon^3$. Seja

$$N = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 3z^2 + w^2 & 2wz \\ 0 & 0 & 2zw & 3w^2 + z^2 \\ x & y & z & w \end{bmatrix},$$

os pontos que tem tangência das fibras com a esfera são do tipo $(x, y, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}), (x, y, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (x, y, 0, 0)$ e $(0, 0, z, w)$ observe que os dois primeiros tipos não tem como se aproximar de V , o terceiro tipo é ponto crítico e o último quando se aproximam de V não tem como se manter na esfera de raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno fixado. Logo não é possível ter uma sequência da forma que o Teorema 3.3 exige para não ter a propriedade de transversalidade, logo h tem a propriedade de transversalidade.

É possível mostrar a propriedade de transversalidade verificando que $V \cap \Sigma_h = \{0\}$, por meio da Proposição 1.79.

Observação 3.4. A aplicação h acima pode ser vista nos complexos, considerando $z_1 = x + iy$, $z_2 = z + iw$, $x, y, z, w \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2^2 \bar{z}_2$ o exemplo mais simples da família estudada na segunda seção do próximo capítulo.

Exemplo 29. Seja

$$\begin{aligned} \tilde{h} : \quad \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, w, t, r) &\longmapsto (x^2 + y^2 - z^2 - w^2 + t^3 + tr^2, r^3 + rt^2). \end{aligned}$$

O $\Sigma_{\tilde{h}} = \{(x, y, z, w, 0, 0); x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ então $\Delta_{\tilde{h}} = \{(x^2 + y^2 - z^2 - w^2, 0)\}$, valor crítico não isolado. Note que $V = \tilde{h}^{-1}(0) = \{(x, y, z, w, t, 0); x^2 + y^2 - z^2 - w^2 + t^3 = 0\}$.

Através da Proposição 3.1 encontraremos os pontos tais que as fibras tem tangência com $\mathbb{S}_\varepsilon^5$. Seja

$$M = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z & -2w & 3t^2 + r^2 & 2tr \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2tr & 3r^2 + t^2 \\ x & y & z & w & t & r \end{bmatrix},$$

os pontos que tem tangência das fibras com a esfera são do tipo $(x, y, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$, $(x, y, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(0, 0, z, w, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$, $(0, 0, z, w, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$, $(x, y, z, w, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 0, t, r)$ observe que os quatro primeiros tipos não tem como se aproximar de V , pois a última coordenada é diferente de zero e fixa, o quinto tipo são pontos críticos e o último quando se aproximam de V não tem como se manter na esfera de raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno fixado. Logo não é possível ter uma sequência da forma que o Teorema 3.3 exige para não ter a propriedade de transversalidade, logo $\tilde{h}$ tem a propriedade de transversalidade.

Note que nesse exemplo não temos $V \cap \Sigma_{\tilde{h}} = \{0\}$, pois o ponto $(1, 1, 1, 1, 0, 0) \in V \cap \Sigma_{\tilde{h}}$. Logo pela Proposição 1.79 não é possível mostrar a propriedade de transversalidade.

FAMÍLIA DE POLINÔMIOS MISTOS

Neste capítulo apresentaremos resultados originais sobre a Fibrção de Milnor para família de polinômios homogêneos pesados mistos com ações radial e angular, funções não holomorfas, com valor crítico não isolado. Apresentaremos exemplos e estudaremos sua topologia.

4.1 Fibrção para a família de polinômios homogêneos pesados mistos com valor crítico não isolado

Nesta seção vamos estudar as fibrções de Milnor e Milnor-Lê para a seguinte família, dada por

$$\psi_{F,X}(z, \bar{z}) = \langle F(z), X(z) \rangle = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , $j = 1, \dots, n$ e k_j e t_j números complexos não nulos para $j = 1, \dots, n$. A partir de agora vamos denotar $\psi_{F,X}(z) = \psi(z, \bar{z})$.

Lema 11. A aplicação $\psi(z, \bar{z})$ pode ser vista como uma família de polinômios homogêneos pesados mistos com $\mathbb{R}^+$ -ação.

Demonstração. Usando a $\mathbb{R}^+$ -ação definida em Definição 1.94, dada por

$$t \cdot (z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = (t^{p_1} z_1, \dots, t^{p_n} z_n, t^{p_1} \bar{z}_1, \dots, t^{p_n} \bar{z}_n), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

sendo $P = (p_1, \dots, p_n)$ o vetor peso radial. Precisamos encontrar d_r tal que $\psi(t \cdot (z, \bar{z})) = t^{d_r} \psi(z, \bar{z})$,

$t \in \mathbb{R}^+$. Definimos $d_r = \text{mmc}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ e $p_j = \frac{d_r}{a_j + b_j} > 0$. Portanto, ψ tem ação radial. $\square$

Observação 4.1. Usando a definição da $\mathbb{S}^1$ -ação (Definição 1.94), ação angular, é possível notar que quando temos $a_j = b_j$ para algum j , $\psi(z, \bar{z})$ perde essa ação.

A família de polinômios que estamos trabalhando, $\psi(z, \bar{z})$, não se trata de uma aplicação holomorfa, pois o conjugado de z está em sua lei de formação, então vamos considera-lá nos reais, isto é, $\psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ e $j = 1, \dots, n$ com $\psi_1(z, \bar{z}) = \text{Re}(\psi(z, \bar{z}))$ e $\psi_2(z, \bar{z}) = \text{Im}(\psi(z, \bar{z}))$. Logo a família definida se torna uma aplicação analítica real.

Proposição 4.2. *Considere*

$$\psi(z, \bar{z}) = \langle F(z), X(z) \rangle = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , $j = 1, \dots, n$ e $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, números complexos não nulos para $j = 1, \dots, n$. Tal aplicação possui as seguintes duas possibilidades para o conjunto dos pontos críticos: supondo, sem perda de generalidade, que somente os índices j_1 e j_2 tem $a_{j_1} = b_{j_1}$ e $a_{j_2} = b_{j_2}$, então $\Sigma_\psi = \{(x_{j_1}, y_{j_1}, x_{j_2}, y_{j_2}, \dots, 0, 0)\}$ ou $\Sigma_\psi = \{(x_{j_1}, y_{j_1}, 0, 0, \dots, 0, 0)\} \cup \{(0, 0, x_{j_2}, y_{j_2}, \dots, 0, 0)\}$, onde $z_{j_l} = x_{j_l} + iy_{j_l}$, $l = 1, 2$.

Demonstração. Considere $\psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\psi_1(z, \bar{z}) = \text{Re}(\psi(z, \bar{z}))$ e $\psi_2(z, \bar{z}) = \text{Im}(\psi(z, \bar{z}))$. Sem perda de generalidade, sejam j_1 e j_2 os índices tais que $a_j = b_j$ e por $j_3, \dots, j_n$ os que tem $a_j \neq b_j$. Assim tem-se

$$\psi(z, \bar{z}) = k_{j_1} \bar{t}_{j_1} z_{j_1}^{a_{j_1}} \bar{z}_{j_1}^{a_{j_1}} + k_{j_2} \bar{t}_{j_2} z_{j_2}^{a_{j_2}} \bar{z}_{j_2}^{a_{j_2}} + k_{j_3} \bar{t}_{j_3} z_{j_3}^{a_{j_3}} \bar{z}_{j_3}^{b_{j_3}} + \dots + k_{j_n} \bar{t}_{j_n} z_{j_n}^{a_{j_n}} \bar{z}_{j_n}^{b_{j_n}}.$$

Agora substituindo $k_{j_l} \bar{t}_{j_l} = \alpha_{j_l} + i\beta_{j_l}$, $\alpha_{j_l}, \beta_{j_l} \in \mathbb{R}^*$, com $l = 1, 2$, assim

$$\psi_1(z, \bar{z}) = \text{Re}(\psi(z, \bar{z})) = \alpha_{j_1} |z_{j_1}|^{2a_{j_1}} + \alpha_{j_2} |z_{j_2}|^{2a_{j_2}} + \frac{1}{2} \sum_{j_3}^{j_n} (k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j} + \bar{k}_j t_j \bar{z}_j^{a_j} z_j^{b_j})$$

e

$$\psi_2(z, \bar{z}) = \text{Im}(\psi(z, \bar{z})) = \beta_{j_1} |z_{j_1}|^{2a_{j_1}} + \beta_{j_2} |z_{j_2}|^{2a_{j_2}} + \frac{1}{2} \sum_{j_3}^{j_n} (k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j} - \bar{k}_j t_j \bar{z}_j^{a_j} z_j^{b_j}).$$

Como já discutido em (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002) quando os expoentes são diferentes $z_j = 0$. Agora vamos verificar as matrizes 2×2 da jacobiana de (ψ_1, ψ_2) em relação as derivadas de z_j e $\bar{z}_j$, na parte em que os expoentes são iguais (estamos tomando j_1, j_2 sem perda de generalização), então temos

$$a_{j_1} a_{j_2} |z_{j_1}|^{2a_{j_1}-2} |z_{j_2}|^{2a_{j_2}-2} (\alpha_{j_1} \beta_{j_2} - \alpha_{j_2} \beta_{j_1})$$

e

$$a_{j_1} a_{j_2} |z_{j_1}|^{2a_{j_1}-2} |z_{j_2}|^{2a_{j_2}-2} (\alpha_{j_1} \beta_{j_2} - \alpha_{j_2} \beta_{j_1})$$

são nulas quando z_j 's são zeros ou $(\alpha_{j_1} \beta_{j_2} - \alpha_{j_2} \beta_{j_1}) = 0$, quando acontece a segunda afirmação então $\Sigma_\psi = \{(z_{j_1}, z_{j_2}, 0, \dots, 0)\}$ que pode ser visto também como $\Sigma_\psi = \{(x_{j_1}, y_{j_1}, x_{j_2}, y_{j_2}, \dots, 0, 0)\}$. Porém quando $(\alpha_{j_1} \beta_{j_2} - \alpha_{j_2} \beta_{j_1}) \neq 0$ temos $\Sigma_\psi = \{(z_{j_1}, 0, \dots, 0)\} \cup \{(0, z_{j_2}, 0, \dots, 0)\}$, isto é, $\Sigma_\psi = \{(x_{j_1}, y_{j_1}, 0, 0, \dots, 0, 0)\} \cup \{(0, 0, x_{j_2}, y_{j_2}, \dots, 0, 0)\}$. Essas são as duas possibilidades de pontos críticos de ψ geram valores críticos distintos, mas ambos não isolados. $\square$

Agora vamos ver o comportamento dos valores críticos de ψ .

Proposição 4.3. *Seja*

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , $j = 1, \dots, n$ e $k_j \bar{t}_j$ real puro ou imaginário puro para todo j com $a_j = b_j$. Então o discriminante de ψ é uma reta que contém a origem. Além disso, será um dos eixos de $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Suponhamos $k_j \bar{t}_j = \alpha_j$ (respectivamente, $k_j \bar{t}_j = i\beta_j$) para os índices com expoentes iguais de $\psi(z, \bar{z})$.

Quando os coeficientes dos fatores com expoentes iguais forem reais puros (respectivamente, imaginários puros), usamos a Proposição 4.2 e concluímos que o conjunto dos valores críticos tem $z_j \in \mathbb{R}$ para todos os j com $a_j = b_j$. Lembre que estamos desenvolvendo ψ nos reais, isto é, $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. Considerando os coeficientes $\alpha_j \in \mathbb{R}^*$ (respectivamente, $\beta_j \in \mathbb{R}^*$), temos que o discriminante será da forma

$$\Delta_\psi = \left(\sum \alpha_j (x_j^2 + y_j^2)^{a_j}, 0 \right), \quad (\text{respectivamente, } \Delta_\psi = (0, \sum \beta_j (x_j^2 + y_j^2)^{a_j})),$$

onde j varia entre os índices que tem mesmos expoentes, ou seja, $a_j = b_j$. Observe que a segunda coordenada do discriminante é nula (respectivamente, primeira coordenada). Portanto o discriminante de ψ será uma reta que contém a origem, mais ainda, será um dos eixos de $\mathbb{R}^2$. $\square$

O próximo resultado mostra que para um caso particular de ψ o discriminante se trata de uma semirreta partindo da origem de $\mathbb{R}^2$.

Proposição 4.4. *Seja*

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , $j = 1, \dots, n$ e $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}^*$, que satisfaz as seguintes condições:

- i) quando existe apenas um j , tal que $a_j = b_j$.
- ii) quando existe mais de um j tal que $a_j = b_j$. Temos que analisar os coeficientes desses índices, com expoentes iguais, dois a dois. Suponhamos $a_{j_1} = b_{j_1}$ e $a_{j_2} = b_{j_2}$, daí se

$$\alpha_{j_1} \beta_{j_2} = \alpha_{j_2} \beta_{j_1}$$

temos que ter sinais iguais dos α_j 's e a mesma coisa para os β_j 's.

- iii) Considerando a mesma situação do item acima, mas quando

$$\alpha_{j_1} \beta_{j_2} \neq \alpha_{j_2} \beta_{j_1}.$$

Então o discriminante de ψ é uma semirreta partindo da origem de $\mathbb{R}^2$, que não desconecta $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes, quando existe somente um j tal que $a_j = b_j$ em $\psi(z, \bar{z})$ e quando existe mais de um índice com expoentes iguais.

Suponhamos que $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j$ seja o coeficiente de $z_j^{a_j} \bar{z}_j^{a_j}$, único fator com expoentes iguais. Assim os pontos críticos de ψ são da forma $\{(x_j, y_j, 0, \dots, 0)\}$, com $z_j = x_j + iy_j$. O que implica

$$\Delta_\psi = (\alpha_j(x_j^2 + y_j^2)^{a_j}, \beta_j(x_j^2 + y_j^2)^{a_j}).$$

Como $(x_j^2 + y_j^2)^{a_j}$ é sempre positivo então cada coordenada depende do sinal de α_j e β_j . Portanto os valores críticos nessa situação se trata de uma semirreta.

Agora no segundo caso, quando existe mais de um índice com expoentes iguais, pela Proposição 4.2 sabemos que temos duas possibilidades de conjunto crítico da aplicação. Continuamos supondo que os índices j_1, j_2 tem $a_{j_1} = b_{j_1}$ e $a_{j_2} = b_{j_2}$, quando $(\alpha_{j_1}\beta_{j_2} - \alpha_{j_2}\beta_{j_1}) = 0$ tem-se $\Sigma_\psi = \{(x_{j_1}, y_{j_1}, x_{j_2}, y_{j_2}, \dots, 0, 0)\}$, assim considerando os α 's e os β 's com mesmos sinais, obtemos

$$\alpha_{j_1}(x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} + \alpha_{j_2}(x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = a \quad (4.1)$$

e

$$\beta_{j_1}(x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} + \beta_{j_2}(x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = b \quad (4.2)$$

com 4.1 e 4.2 sempre positivas ou negativas. As equações acima são a primeira e segunda coordenada do discriminante respectivamente, assim pela observação dos coeficientes terem sinais iguais nas duas expressões acima temos que $a, b \leq 0$ ou $a, b \geq 0$. Tomando a, b sempre positivos não nulos temos as seguintes possibilidades para o discriminante nessa situação,

$$\Delta_\psi = (a, b) \text{ ou } (a, -b) \text{ ou } (-a, b) \text{ ou } (-a, -b).$$

Todos os casos se trata de semirretas que não desconectam o $\mathbb{R}^2$, pois estamos com fatores ao quadrado.

Figura 17 – Os quatro possíveis discriminantes

Quando $\alpha_{j_1}\beta_{j_2} - \alpha_{j_2}\beta_{j_1} \neq 0$ temos $\Sigma_\psi = \{(x_{j_1}, y_{j_1}, 0, 0, \dots, 0, 0)\} \cup \{(0, 0, x_{j_2}, y_{j_2}, \dots, 0, 0)\}$, neste caso teremos

$$\Delta_\psi = (\alpha_{j_1}(x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}}, \beta_{j_1}(x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}}) \text{ ou } \Delta_\psi = (\alpha_{j_2}(x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}}, \beta_{j_2}(x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}}).$$

Em ambos os casos, teremos novamente todas as opções de semirretas dos quatro quadrantes do $\mathbb{R}^2$, pois as coordenadas terão os sinais dos α 's e β 's. $\square$

O teorema a seguir é similar a uma parte da Proposição 3.4 de (CISNEROS-MOLINA, 2008). A diferença é que nesta situação a aplicação tem valor crítico não isolado.

Teorema 4.5. *A aplicação*

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , $j = 1, \dots, n$ e $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}^*$ é D -regular quando satisfaz as seguintes condições:

i) quando existe apenas um j , tal que $a_j = b_j$.

ii) quando existe mais de um j tal que $a_j = b_j$. Temos que analisar os coeficientes desses índices, com expoentes iguais, dois a dois. Suponhamos $a_{j_1} = b_{j_1}$ e $a_{j_2} = b_{j_2}$, daí se

$$\alpha_{j_1} \beta_{j_2} = \alpha_{j_2} \beta_{j_1}$$

ii.1) temos que ter sinais iguais dos α_j 's e a mesma coisa para os β_j 's, quando todos não nulos.

ii.2) tem $k_{j_l} \bar{t}_{j_l}$, $l = 1, 2$ reais puros ou imaginários puros.

iii) Considerando a mesma situação do item acima, mas quando

$$\alpha_{j_1} \beta_{j_2} \neq \alpha_{j_2} \beta_{j_1}.$$

Demonstração. Pelo Lema 11 ψ se trata de um polinômio homogêneo pesado misto com $\mathbb{R}^+$ -ação, i. e., tem somente ação radial. Note que $\|t \cdot (z, \bar{z})\|$ é estritamente crescente como função de t para qualquer $z \in \mathbb{C}^n$ e $z \neq 0$. Consequentemente, qualquer órbita dessa ação de qualquer $z \neq 0$ é transversal a todas as esferas em torno de 0.

Observe que pelas Proposições 4.3 e 4.4 temos que o discriminante é linear.

Seja $\pi(\mathcal{A}_\eta) = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\eta = \Delta_\psi \cap \mathbb{S}_\eta^{2n-1}$ projeção na esfera unitária. Considere $\rho \in \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{A} \subset \mathbb{C}^*$, valor regular de ψ , e R_ρ a semirreta em $\mathbb{C}$ dada por $t\rho$ com $t \in \mathbb{R}^+$. Como $t\rho$ se trata de valores regulares em $\mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{A}$ então $X_\rho := \psi^{-1}(t\rho)$ é uma subvariedade suave de codimensão complexa 1. Seja $z \in X_\rho$, como

$$\psi(t \cdot (z, \bar{z})) = t^{d_r} \psi(z, \bar{z}), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

onde d_r é o grau do vetor peso radial $(q_1, \dots, q_n)$ de ψ , então temos que toda órbita de z da $\mathbb{R}^+$ -ação está contida em X_ρ e portanto X_ρ é transversal a todas as esferas de centro em $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Como vimos anteriormente o discriminante de ψ é linear então garantimos que ψ é D -regular.

□

Assumiremos inicialmente os k_j 's=1 e t_j 's=1.

Observação 4.6. A família de polinômios mistos definida $\psi(z, \bar{z})$ com 1 como coeficientes dos termos $a_j = b_j$ tem o discriminante linear (Definição 1.75)

$$\Delta_\psi = \left(\sum ||z_j||^{2a_j}, 0 \right)$$

para os j 's que tem os expoentes iguais. Isso é garantido pela seção 2.a (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002). Observe que essa família não satisfaz a *condição de Milnor*.

O próximo resultado mostraremos a existência da fibração de Milnor para um caso particular de ψ .

Proposição 4.7. *Continuamos supondo $k_j's=1$ e $t_j's=1$ e mais, que a aplicação ψ tem somente um índice com expoentes iguais. A aplicação*

$$\phi = \frac{\psi}{||\psi||} : (\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus W) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{A}$$

onde $W = \psi^{-1}(\Delta_\psi^\eta)$, $\Delta_\psi^\eta = \Delta_\psi \cap \mathbb{B}_\eta^{2n-1}$ e $\pi(\mathcal{A}_\eta) = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\eta = \Delta_\psi \cap \mathbb{S}_\eta^{2n-1}$ projeção na esfera unitária, é uma fibração localmente trivial sobre a imagem.

Demonstração. Inicialmente vamos garantir que ϕ é uma projeção. Suponhamos $z \in (\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus W)$ um ponto crítico de ϕ , ou seja, a diferencial $d\phi(z) = 0$ tal que $\rho = \phi(z) = \frac{\psi}{||\psi||}(z)$. Assim temos que o espaço tangente $T_z \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ da esfera em z é um subespaço linear de $T_z X_\rho = \text{Ker } d_z \psi$, o espaço tangente ao pencil canônico em z , mas isso não ocorre dado que X_ρ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ são transversais (Teorema 4.5).

Por fim mostraremos que $\psi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $n \geq 2$ tem a propriedade de transversalidade (Definição 1.78), usando a Prop. 1.79. Assim precisamos garantir que $\Sigma_\psi \cap V$, $V = \psi^{-1}(0)$, está contido na origem de $\mathbb{R}^{2n}$.

Vamos escrever ψ como uma aplicação analítica real. Seja $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$,

$$\psi(z, \bar{z}) = \psi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \psi_1(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) + i\psi_2(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n).$$

Note que para o índice tal que $a_j = b_j$, temos

$$z_j^{a_j} \bar{z}_j^{a_j} = (x_j^2 + y_j^2)^{a_j}$$

como o coeficiente do expoente igual é 1 tem-se que $\psi_2(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ não tem fator desse índice, então supondo que só exista um índice j tal que $a_j = b_j$, tem-se

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) &= (x_j^2 + y_j^2)^{a_j} + \psi_{1'}(x_1, y_1, \dots, x_{j-1}, y_{j-1}, x_{j+1}, y_{j+1}, \dots, x_n, y_n) \\ \psi_2(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) &= \psi_{2'}(x_1, y_1, \dots, x_{j-1}, y_{j-1}, x_{j+1}, y_{j+1}, \dots, x_n, y_n) \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$V = \psi^{-1}(0) = \{(x_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}; \psi_1(x_1, \dots, y_n) = 0 \text{ e } \psi_2(x_1, \dots, y_n) = 0\}.$$

Queremos $V \cap \Sigma_\psi$, sabendo que $\Sigma_\psi = \{(0, \dots, 0, x_j, y_j, 0, \dots, 0); x_j, y_j \in \mathbb{R}\}$ por (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002), tem-se

$$\begin{aligned} \psi_1(0, \dots, 0, x_j, y_j, 0, \dots, 0) &= 0 \Leftrightarrow (x_j^2 + y_j^2)^{a_j} + \psi_{1'}(0, \dots, 0) = 0 \\ \psi_2(0, \dots, 0, x_j, y_j, 0, \dots, 0) &= 0 \Leftrightarrow \psi_{2'}(0, \dots, 0) = 0 \end{aligned}$$

logo $\Sigma_\psi \cap V = \{0\}$.

Portanto, ψ possui a propriedade de transversalidade.

Pela Proposição 4.5 mostramos que ψ quando $k_j \bar{t}_j = 1$ para o índice com expoente igual tem a D -regularidade.

Assim, para a ψ do enunciado provamos a D -regularidade e a propriedade de transversalidade, então pelo Teorema 1.82 provamos o desejado. $\square$

Esse exemplo é o mais simples da família de polinômios pesados mistos que satisfaz as condições da proposição acima.

Exemplo 30. Seja

$$f(z, \bar{z}) = z_1 \bar{z}_1 + z_2^2 \bar{z}_2$$

trabalhando com f nos reais, isto é, $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, temos

$$f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = \operatorname{Re}(f(z, \bar{z}))x_1^2 + y_1^2 + x_2(x_2^2 + y_2^2) \text{ e } f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = \operatorname{Im}(f(z, \bar{z})) = y_2(x_2^2 + y_2^2)$$

Note que neste caso $\Sigma_f = \{(x_1, y_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4\}$ e consequentemente $\Delta_f = (x_1^2 + y_1^2, 0)$, um semi-eixo do $\mathbb{R}^2$. Observe que nesta situação o discriminante não desconecta a meta e que realmente $\Sigma_f \cap V = \{(0, 0, 0, 0)\}$. De fato, aplicando os pontos críticos em V tem-se

$$x_1^2 + y_1^2 = 0$$

o que implica em $x_1 = y_1 = 0$. Logo, possui a propriedade de transversalidade. Podemos também aplicar facilmente a Proposição 4 para verificar a D -regularidade.

Observação 4.8. Como adotado até o momento, os coeficientes dos fatores com expoentes iguais são reais. Assim os pontos críticos são sempre os $z_j \in \mathbb{R}$ tais que $a_j = b_j$ então como exibimos na demonstração da proposição anterior, a $\Sigma_\psi \cap V$ é a soma de fatores com expoentes iguais,

$$\sum_j \alpha_j (x_j^2 + y_j^2)^{a_j} = 0, \text{ para os } j \text{ tais que } a_j = b_j.$$

Mas observe que quando não assumimos os $\alpha_j = k_j \bar{t}_j$'s são sempre positivos (na verdade todos os coeficientes dos fatores com expoentes iguais terem o mesmo sinal), podendo por exemplo ter um coeficiente negativo e outro positivos dos fatores com expoentes iguais temos a seguinte situação:

$$\alpha_j (x_j^2 + y_j^2)^{a_j} + \dots - \alpha_l (x_l^2 + y_l^2)^{a_l} = 0$$

assim não podemos garantir $\Sigma_\psi \cap V$ está contido na origem de $\mathbb{R}^{2n}$. Nesta situação não conseguimos confirmar a propriedade de transversalidade pela Proposição 1.79. Então conseguimos uma generalização do último resultado, com exatamente a mesma demonstração.

Teorema 4.9. *A aplicação*

$$\phi = \frac{\psi}{\|\psi\|} : (\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus W) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{A}$$

onde $W = \psi^{-1}(\Delta_\psi^\eta)$, $\Delta_\psi^\eta = \Delta_\psi \cap \mathbb{B}_\eta^2$ e $\pi(\mathcal{A}_\eta) = \mathcal{A}$ projeção na esfera unitária, é uma fibração localmente trivial sobre a imagem quando todos os $k_j \bar{t}_j \in \mathbb{R}^*$ tem todos o mesmo sinal para os j 's tais que $a_j = b_j$.

O resultado segue usando o Teorema 4.5 usando que ψ é D -regular. Para mostrarmos a propriedade de transversalidade basta usar a Observação 4.8 para garantir que $\Sigma_\psi \cap V = \{0\}$.

A partir de agora vamos usar a ψ definida originalmente, isto é,

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , $j = 1, \dots, n$ e $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}^*$. E exibir condições necessárias para satisfazer a Proposição 1.79, com a finalidade de obter a propriedade de transversalidade.

Teorema 4.10. *A aplicação*

$$\phi = \frac{\psi}{\|\psi\|} : (\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus W) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{A}$$

onde $W = \psi^{-1}(\Delta_\psi^\eta)$, $\Delta_\psi^\eta = \Delta_\psi \cap \mathbb{B}_\eta^2$ e $\pi(\mathcal{A}_\eta) = \mathcal{A}$ projeção na esfera unitária, é uma fibração localmente trivial sobre a imagem nas seguintes condições:

- i) quando existe apenas um j , tal que $a_j = b_j$.
- ii) quando existe mais de um j tal que $a_j = b_j$. Temos que analisar os coeficientes desses índices, com expoentes iguais, dois a dois. Suponhamos $a_{j_1} = b_{j_1}$ e $a_{j_2} = b_{j_2}$, daí se

$$\alpha_{j_1} \beta_{j_2} = \alpha_{j_2} \beta_{j_1}$$

temos que ter sinais iguais dos α_j 's e a mesma coisa para os β_j 's.

- iii) Considerando a mesma situação do item acima, mas quando

$$\alpha_{j_1} \beta_{j_2} \neq \alpha_{j_2} \beta_{j_1}.$$

Demonstração. A demonstração segue como a da Proposição 4.7. A aplicação ψ nesse caso é D -regular pelo Teorema 4.5. Nos resta provar que ψ possui a propriedade de transversalidade.

Assim usando o critério da Proposição 1.79 basta verificar se $\Sigma_\psi \cap V \subset \{0\}$.

Primeiramente suponhamos ψ com somente um índice tal que $a_j = b_j$, assim $\Sigma_\psi = \{(x_j, y_j, 0, \dots, 0)\}$, o que implica diretamente $\Sigma_\psi \cap V = \{0\}$, pois teremos $\alpha_j(x_j^2 + y_j^2)^{a_j} = 0 = \beta_j(x_j^2 + y_j^2)^{a_j}$, onde $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j$.

Considere agora mais de um índice com $a_j = b_j$, sem perda de generalidade desenvolveremos a análise com somente dois índices com expoentes iguais, para simplificar os cálculos. Através da Proposição 4.2 devemos analisar os seguintes casos:

Caso 1: se $(\alpha_{j_1}\beta_{j_2} - \alpha_{j_2}\beta_{j_1}) = 0$ então $\Sigma_\psi = \{(x_{j_1}, y_{j_1}, x_{j_2}, y_{j_2}, \dots, 0, 0)\}$, tem-se

$$\psi_1 = \alpha_{j_1}(x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} + \alpha_{j_2}(x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = 0 \quad (4.3)$$

e

$$\psi_2 = \beta_{j_1}(x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} + \beta_{j_2}(x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = 0. \quad (4.4)$$

Como $\alpha_{j_1}\beta_{j_2} = \alpha_{j_2}\beta_{j_1}$ existem as seguintes possibilidades:

a) Se α_{j_1} e α_{j_2} tiverem o mesmo sinal, como também β_{j_1} e β_{j_2} . E assim, concluímos através de (4.3) e (4.4) que ψ possui a propriedade de transversalidade.

b) Se α_{j_1} e α_{j_2} tiverem sinais distintos, como também β_{j_1} e β_{j_2} . E assim, concluímos através de (4.3) e (4.4) que ψ não satisfaz o critério $\Sigma_\psi \cap V = \{0\}$ da propriedade de transversalidade.

Caso 2: se $(\alpha_{j_1}\beta_{j_2} - \alpha_{j_2}\beta_{j_1}) \neq 0$ então $\Sigma_\psi = \{(x_{j_1}, y_{j_1}, 0, 0, \dots, 0, 0) \cup (0, 0, x_{j_2}, y_{j_2}, \dots, 0, 0)\}$, tem-se

$$\psi_1 = \alpha_{j_1}(x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} = 0 \text{ ou } \psi_1 = \alpha_{j_2}(x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = 0 \quad (4.5)$$

e

$$\psi_2 = \beta_{j_1}(x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} = 0 \text{ ou } \psi_2 = \beta_{j_2}(x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = 0. \quad (4.6)$$

Logo, quando $(\alpha_{j_1}\beta_{j_2} - \alpha_{j_2}\beta_{j_1}) \neq 0$ sempre temos a propriedade de transversalidade em ψ por (4.5) e (4.6).

Portanto usando o Teorema 1.82 concluímos o desejado. □

O exemplo abaixo exhibe uma situação do caso 2, da demonstração do teorema anterior, em que $\alpha_{j_1}\beta_{j_2} \neq \alpha_{j_2}\beta_{j_1}$.

Exemplo 31. Seja

$$g(z, \bar{z}) = (1 + i)z_1\bar{z}_1 + (-2 - i)z_2^2\bar{z}_2^2 + iz_3^2\bar{z}_3.$$

Substituindo $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, tem-se

$$g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \operatorname{Re}(g(z, \bar{z})) = x_1^2 + y_1^2 - 2(x_2^2 + y_2^2)^2 - x_3^2 y_3 - y_3^3 \quad \text{e}$$

$$g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \operatorname{Im}(g(z, \bar{z})) = x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2)^2 + x_3^3 + x_3 y_3^2$$

e mais a matriz jacobiana da f

$$Jg = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & -8(x_2^2 + y_2^2)x_2 & -8(x_2^2 + y_2^2)y_2 & -2x_3y_3 & -x_3^2 - 3y_3^2 \\ 2x_1 & 2y_1 & -4(x_2^2 + y_2^2)x_2 & -4(x_2^2 + y_2^2)y_2 & 3x_3^2 + y_3^2 & 2x_3y_3 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma $\Sigma_g = \{(x_1, y_1, 0, 0, 0, 0) \cup (0, 0, x_2, y_2, 0, 0)\}$ assim respectivamente, $\Delta_g = \{(x_1^2 + y_1^2, x_1^2 + y_1^2) \cup (-2(x_2^2 + y_2^2)^2, -(x_2^2 + y_2^2)^2)\}$ ambas semirretas.

Note que essa situação satisfaz os argumentos da Proposição 4.7, pois g continua com $\mathbb{R}^+$ -ação e $\Sigma_g \cap V = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Exibimos agora uma situação que se assemelha ao caso 1 item b) da demonstração do teorema anterior. Observe que os sinais dos coeficientes são opostos, assim não conseguimos garantir a propriedade de transversalidade de h pela Proposição 1.79.

Exemplo 32. Dado

$$h(z, \bar{z}) = (1 + i)z_1\bar{z}_1 + (-2 - 2i)z_2^2\bar{z}_2^2 + iz_3^2\bar{z}_3,$$

vista como aplicação real, tem-se

$$h_1(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \operatorname{Re}(h(z, \bar{z})) = x_1^2 + y_1^2 - 2(x_2^2 + y_2^2)^2 - x_3^2y_3 - y_3^3 \quad \text{e}$$

$$h_2(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \operatorname{Im}(h(z, \bar{z})) = x_1^2 + y_1^2 - 2(x_2^2 + y_2^2)^2 + x_3^3 + x_3y_3^2$$

e mais a matriz jacobiana da f

$$Jh = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & -8(x_2^2 + y_2^2)x_2 & -8(x_2^2 + y_2^2)y_2 & -2x_3y_3 & -x_3^2 - 3y_3^2 \\ 2x_1 & 2y_1 & -8(x_2^2 + y_2^2)x_2 & -8(x_2^2 + y_2^2)y_2 & 3x_3^2 + y_3^2 & 2x_3y_3 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma $\Sigma_h = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, 0, 0)\}$ o que implica $\Delta_h = (x_1^2 + y_1^2 - 2(x_2^2 + y_2^2)^2, x_1^2 + y_1^2 - 2(x_2^2 + y_2^2)^2)$ uma reta passando pela origem. Observe que $\Sigma_h \cap V$ não está contido na origem de $\mathbb{R}^6$, o ponto $(1, 1, 1, 0, 0, 0) \in \Sigma_h \cap V$. Logo não é possível usar a Proposição 1.79 para concluir a propriedade de transversalidade. Nessa circunstância a prova da Proposição 4.7 não garante a fibração de Milnor desta h .

Observação 4.11. Quando exigimos a propriedade de transversalidade fazendo uso da condição $\Sigma_\psi \cap V \subset \{0\}$, concluímos que $\psi^{-1}(0)$ tem singularidade isolada.

O Teorema 1.83 garante a equivalência com as fibras no tubo de Milnor.

Teorema 4.12. *Seja $\psi(z, \bar{z})$ tal que tenha a fibração de Milnor na esfera com discriminante linear. Seja $\tilde{\pi} : \mathbb{B}_\delta^n \setminus \Delta_f^\eta \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \mathcal{A}$, então os fibrados*

$$\tilde{\psi} := \tilde{\pi} \circ \psi| : \mathbb{B}_\varepsilon^{2n} \cap \psi^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1 \setminus \Delta_\psi) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{A},$$

e

$$\phi = \frac{\psi}{\|\psi\|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus W \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{A}$$

são equivalentes.

Agora queremos mostrar que as fibras no tubo de Milnor dos valores críticos no caso da família de polinômios homogêneos pesados mistos com ação radial, que tem fibração de Milnor, são homeomorfas as fibras no tubo de Milnor nos valores regulares.

Definição 4.13. Considere um germe de aplicação $f = (f_1, \dots, f_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $n > p$. Dizemos que $f^{-1}(0)$ é uma interseção completa geométrica se a codimensão de $f^{-1}(0)$ é igual a p .

Vamos agora mostrar que $\psi^{-1}(0)$ é uma interseção completa. Garantindo assim que $V = \psi^{-1}(0)$ tem dimensão real $2n - 2$ e consequentemente por uma pequena translação obtemos que as imagens inversas dos valores críticos também tem dimensão real $2n - 2$.

Teorema 4.14. *Considere*

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , $j = 1, \dots, n$ e $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}^*$. A $\psi^{-1}(0)$ é uma interseção completa.

Demonstração. Mostraremos que $\psi^{-1}(0)$ é uma interseção completa, isto é, nesse caso comprovar que $V = \psi^{-1}(0)$ tem codimensão real 2.

Sabemos que $\psi(z, \bar{z})$ é gerado por $\psi_1(z, \bar{z})$ e $\psi_2(z, \bar{z})$, onde $\psi_1(z, \bar{z}) = \text{Re}(\psi(z, \bar{z}))$ e $\psi_2(z, \bar{z}) = \text{Im}(\psi(z, \bar{z}))$. Além disso, concluímos que $\psi^{-1}(0) = \psi_1^{-1}(0) \cap \psi_2^{-1}(0)$. Precisamos garantir que $\psi_1^{-1}(0)$ e $\psi_2^{-1}(0)$ são hipersuperfícies, ou seja, tem codimensão real 1, basta mostrarmos que ambas as variedades tem pontos fora a origem. Devemos mostrar também que $\psi_1^{-1}(0) \cap \psi_2^{-1}(0)$ fora dos pontos críticos de $\psi(z, \bar{z})$.

Vamos inicialmente mostrar que $\psi_1^{-1}(0)$ e $\psi_2^{-1}(0)$ tem mais pontos fora a origem. Como definimos $\psi(z, \bar{z})$ com ao menos um $a_j = b_j$ e um $a_j \neq b_j$ existiram esses fatores em $\psi(z, \bar{z})$:

$$\|z_j\|^{2a_j} = (x_j^2 + y_j^2)^{a_j} \quad \text{e} \quad z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j} = (x_j + iy_j)^{a_j} (x_j - iy_j)^{b_j}$$

a primeira equação se trata de um número real, assim se considerarmos $a_j = b_j$ para mais de um j podemos ter a situação em que $k_{j_1} \bar{t}_{j_1} = \alpha_{j_1} + i\beta_{j_1}$ e $k_{j_2} \bar{t}_{j_2} = \alpha_{j_2} + i\beta_{j_2}$ são os coeficientes que acompanham $(z_j \bar{z}_j)^{a_j}$ daí tem-se

i) α_{j_1} e α_{j_2} com sinais opostos e β_{j_1} e β_{j_2} com sinais opostos também, o que implica

$$\alpha_{j_1} (x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} - \alpha_{j_2} (x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = 0 \quad \text{e} \quad \beta_{j_1} (x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} - \beta_{j_2} (x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = 0$$

que a solução tem mais pontos fora a origem, pois os coeficientes tem sinais trocados. Logo, $\psi_1^{-1}(0)$ e $\psi_2^{-1}(0)$ são hipersuperfícies.

ii) α_{j_1} e α_{j_2} com sinais iguais e β_{j_1} e β_{j_2} com sinais opostos, assim para

$$\alpha_{j_1} (x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} + \alpha_{j_2} (x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = 0 \quad \text{e} \quad \beta_{j_1} (x_{j_1}^2 + y_{j_1}^2)^{a_{j_1}} - \beta_{j_2} (x_{j_2}^2 + y_{j_2}^2)^{a_{j_2}} = 0$$

a solução da primeira equação é $\{0\}$ e da segunda equação a solução tem mais pontos fora a origem, pois os coeficientes tem sinais trocados. Portanto, $\psi_2^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície.

iii) α_{j_1} e α_{j_2} com sinais opostos e β_{j_1} e β_{j_2} com sinais iguais, assim da mesma forma do item acima concluímos que $\psi_1^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície.

Para os dois últimos casos não conseguimos concluir que $\psi_i^{-1}(0), i = 1, 2$ é hipersuperfície sempre. Então iremos desenvolver o fator que tem os expoentes distintos, através do binômio de Newton tem-se

$$z_j^{a_j} = (x_j + iy_j)^{a_j} = \binom{a_j}{0} x_j^{a_j} (iy_j)^0 + \binom{a_j}{1} x_j^{a_j-1} (iy_j)^1 + \cdots + \binom{a_j}{a_j} x_j^0 (iy_j)^{a_j}$$

e

$$\bar{z}_j^{b_j} = (x_j - iy_j)^{b_j} = \binom{b_j}{0} x_j^{b_j} (-iy_j)^0 + \binom{b_j}{1} x_j^{b_j-1} (-iy_j)^1 + \cdots + \binom{b_j}{b_j} x_j^0 (-iy_j)^{b_j}.$$

Assim $z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}$ é a multiplicação de ambas as equações acima, é simples ver que $x_j^{a_j+b_j}$ sempre será real puro e $y_j^{a_j+b_j}$ dependerá para paridade do a_j e b_j . Note também que dependendo da paridade do expoente de (iy) temos fatores positivos e negativos. Dessa forma é possível concluir que $Re(z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j})$ e $Im(z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j})$ serão distintas para quaisquer $a_j \neq b_j$. Analisando $z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}$ dada pela multiplicação dessas duas equações vemos que ele nunca será dado somente por termos elevado a expoentes pares, isto é, teremos mais soluções fora a origem quando $Re(z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}) = 0$ e $Im(z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}) = 0$. Nesse caso os coeficientes não altera o raciocínio. Logo, $\psi_1^{-1}(0)$ e $\psi_2^{-1}(0)$ são hipersuperfícies.

Por fim vejamos que $\psi_1^{-1}(0)$ e $\psi_2^{-1}(0)$ são transversais fora de Σ_ψ , como os espaços tangentes das hipersuperfícies, nos pontos regulares das mesmas, são gerados por $\nabla \psi_1$ e $\nabla \psi_2$, respectivamente, e eles só serão linearmente dependentes em Σ_ψ . É fácil ver isso pela forma como se encontra os pontos críticos de ψ . Logo temos que a tangência entre eles só ocorrerá nos pontos críticos.

Portanto, $\psi^{-1}(0)$ tem codimensão 2 consequentemente é uma interseção completa. □

Em seguida considerando a ψ como no teorema acima, exibiremos a dimensão real de $\psi^{-1}(d)$ com $d \in \Delta_\psi$.

Lema 12. A variedade $\psi^{-1}(d), d \in \Delta_\psi$ tem dimensão real $2n - 2$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.14 vimos que $\psi^{-1}(0)$ é uma interseção completa, usando que essa propriedade é estável e como os valores críticos de ψ são dados por $d = (a, b), a, b \in \mathbb{R}$ podemos considerar $\psi_1 - a = \psi_1'$ e $\psi_2 - b = \psi_2'$ são as novas duas equações que geram $\psi^{-1}(d) = \psi_1'^{-1}(0) \cap \psi_2'^{-1}(0)$, assim $\psi^{-1}(d)$ tem codimensão real 2. □

No exemplo a seguir a $\tilde{f}^{-1}(0)$ tem interseção completa mas não tem singularidade isolada.

Exemplo 33. Seja

$$\tilde{f}(z, \bar{z}) = (-1 + i)z_1\bar{z}_1 + (2 - 2i)z_2^2\bar{z}_2^2 + iz_3^2\bar{z}_3,$$

substituindo $z_1 = x + iy$, $z_2 = z + iw$ e $z_3 = t + ir$, onde $x, y, z, w, t, r \in \mathbb{R}$, desenvolvendo $\tilde{f}$ nos reais tem-se

$$\tilde{f}_1(x, y, z, w, t, r) = \operatorname{Re}(\tilde{f}(z, \bar{z})) = -(x^2 + y^2) + 2(z^2 + w^2)^2 - t^2r - r^3 \text{ e}$$

$$\tilde{f}_2(x, y, z, w, t, r) = \operatorname{Im}(\tilde{f}(z, \bar{z})) = x^2 + y^2 - 2(z^2 + w^2)^2 + t^3 + tr^2,$$

como já desenvolvido no Teorema 4.10 o conjunto crítico de $\tilde{f}$ é $\{(x, y, z, w, 0, 0, 0)\}$, então é simples verificar que $\Sigma_{\tilde{f}} \cap V \not\subseteq \{0\}$. Logo $V = \tilde{f}^{-1}(0) = \tilde{f}_1^{-1}(0) \cap \tilde{f}_2^{-1}(0)$ não tem singularidade isolada.

Observe que os valores críticos de $\tilde{f}$ são $-(x^2 + y^2) + 2(z^2 + w^2)^2, x^2 + y^2 - 2(z^2 + w^2)^2$ não sendo uma semirreta.

Sabemos que V é gerado por $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ então usando o software Singular confirmamos que V tem codimensão real 2. Explicitamos também a codimensão do valor crítico $(0.1, -0.1)$.

Segue o algoritmo utilizado e as dimensões obtidas.

```
> ring k=0, (x,y,z,w,t,r), dp;
> LIB "sing.lib";
> ideal I= -x2-y2+2z4+4z2w2+2w4-t2r-r3, x2+y2-2z4-4z2w2-2w4+t3+tr2;
> dim(std(I));
4
> ideal J= -x2-y2+2z4+4z2w2+2w4-t2r-r3-1/10, x2+y2-2z4-4z2w2-2w4+t3+tr2+1/10;
> dim(std(J));
4
```

Proposição 4.15. *Seja*

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , $j = 1, \dots, n$ e $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}^*$. Então $\psi^{-1}(0)$ é uma interseção completa com singularidade isolada quando:

i) existe apenas um j , tal que $a_j = b_j$;

ii) existe mais de um j tal que $a_j = b_j$. Temos que analisar os coeficientes desses índices, com expoentes iguais, dois a dois. Suponhamos $a_{j_1} = b_{j_1}$ e $a_{j_2} = b_{j_2}$, daí se

$$\alpha_{j_1} \beta_{j_2} = \alpha_{j_2} \beta_{j_1}$$

temos que ter sinais iguais dos α_j 's e a mesma coisa para os β_j 's

iii) Considerando a mesma situação do item acima, mas quando

$$\alpha_{j_1}\beta_{j_2} \neq \alpha_{j_2}\beta_{j_1}.$$

Demonstração. Visto que $\psi^{-1}(0)$ é uma interseção completa (Teorema 4.14), só nos resta mostrar que $\psi^{-1}(0)$ tem singularidade isolada. Por hipótese tomamos as famílias de funções que satisfazem $\Sigma_\psi \cap \psi^{-1}(0) = \{0\}$, desenvolvido no Teorema 4.10, consequentemente provamos o desejado. $\square$

Apresentaremos um exemplo tal que $\psi^{-1}(0) = V$ tem codimensão real 2 e singularidade isolada, usando o software Singular.

Exemplo 34. Seja $\tilde{g}(z, \bar{z}) = (1+i)z_1\bar{z}_1 + (2+2i)z_2^2\bar{z}_2^2 + iz_3^2\bar{z}_3 + z_4^2\bar{z}_4$, substituindo $z_1 = x + iy, z_2 = z + iw, z_3 = t + ir$ e $z_4 = v + iu$, onde $x, y, z, w, t, r, v, u \in \mathbb{R}$, considerando $\tilde{g}$ nos reais tem-se

$$\tilde{g}_1(x, y, z, w, t, r, u, v) = \operatorname{Re}(\tilde{g}(z, \bar{z})) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + w^2)^2 - t^2r - r^3 + v^3 + vu^2$$

e

$$\tilde{g}_2(x, y, z, w, t, r, u, v) = \operatorname{Im}(\tilde{g}(z, \bar{z})) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + w^2)^2 + t^3 + tr^2 + v^2u + u^3,$$

como já desenvolvido no Teorema 4.10 o conjunto crítico de $\tilde{g}$ é $\{(x, y, z, w, 0, 0, 0, 0)\}$ então é simples verificar que $V \cap \Sigma_{\tilde{g}} = \{0\}$. Logo $V = \tilde{g}^{-1}(0) = \tilde{g}_1^{-1}(0) \cap \tilde{g}_2^{-1}(0)$ tem singularidade isolada.

Sabemos que V é dada como conjunto de zeros de $x^2 + y^2 + 2(z^2 + w^2)^2 - t^2r - r^3 + v^3 + vu^2$ e $x^2 + y^2 + 2(z^2 + w^2)^2 + t^3 + tr^2 + v^2u + u^3$ então usando o software Singular confirmamos que V tem codimensão real 2, isto é, dimensão real 6.

Observe que o discriminante de $\tilde{g}$ é o conjunto $\{(t, t), t \in \mathbb{R}^+\}$. Vamos também exibir a dimensão de $\tilde{g}^{-1}(0.1, 0.1)$.

Segue o algoritmo utilizado e as dimensões obtidas.

```
> ring k=0, (x,y,z,w,t,r,v,u), dp;
> LIB "sing.lib";
> ideal I= x2+y2+2z4+4z2w2+2w4-t2r-r3+v3+vu2, x2+y2+2z4+4z2w2+2w4+t3+tr2+v2u+u3;
> dim(std(I));
6
> ideal J= x2+y2+2z4+4z2w2+2w4-t2r-r3+v3+vu2-1/10,
x2+y2+2z4+4z2w2+2w4+t3+tr2+v2u+u3-1/10;
> dim(std(J));
6
```

Esse exemplo satisfaz a condição ii) da proposição anterior.

Exemplo 35. Seja $\bar{g}(z, \bar{z}) = z_1 \bar{z}_1 + (-1 + i)z_2 \bar{z}_2 + z_3^2 \bar{z}_3^4 + iz_4^2 \bar{z}_4^3$, substituindo $z_1 = x + iy, z_2 = z + iw, z_3 = t + ir$ e $z_4 = v + iu$, onde $x, y, z, w, t, r, v, u \in \mathbb{R}$, assim considerando $\bar{g}$ nos reais tem-se

$$\bar{g}_1(x, y, z, w, t, r, u, v) = \operatorname{Re}(\bar{g}(z, \bar{z})) = x^2 + y^2 - z^2 - w^2 + t^6 + t^4 r^2 - t^2 r^4 - r^6 - uv^6 - 2v^2 u^3 - u^5$$

e

$$\bar{g}_2(x, y, z, w, t, r, u, v) = \operatorname{Im}(\bar{g}(z, \bar{z})) = z^2 + w^2 - 4r^3 t^3 - 2t^5 r - 2tr^5 + v^5 + 2v^3 u^2 + u^4 v,$$

como já desenvolvido no Teorema 4.10 o conjunto crítico de $\bar{g}$ é $\{(x, y, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cup (0, 0, z, w, 0, 0, 0, 0)\}$ então é simples verificar que $V \cap \Sigma_{\bar{g}} = \{0\}$. Assim $V = \bar{g}^{-1}(0) = \bar{g}_1^{-1}(0) \cap \bar{g}_2^{-1}(0)$ tem singularidade isolada. Os valores críticos de $\bar{g}$ são da forma $\{(x^2 + y^2, 0) \cup (-(z^2 + w^2), z^2 + w^2)\}$.

Sabemos que V é gerado por $x^2 + y^2 - z^2 - w^2 + t^6 + t^4 r^2 - t^2 r^4 - r^6 - uv^6 - 2v^2 u^3 - u^5$ e $z^2 + w^2 - 4r^3 t^3 - 2t^5 r - 2tr^5 + v^5 + 2v^3 u^2 + u^4 v$ então usando o software Singular confirmamos que V tem codimensão real 2, isto é, dimensão real 6.

Segue o algoritmo utilizado e as dimensões obtidas.

```
> ring k=0, (x,y,z,w,t,r,v,u), dp;
> LIB "sing.lib";
> ideal I= x2+y2-z2-w2+t6+t4r2-t2r4-r6-uv6-2v2u3-u5,
z2+w2-4r3t3-2t5r-2tr5+v5+2v3u2+u4v;
> dim(std(I));
6
> ideal J= x2+y2-z2-w2+t6+t4r2-t2r4-r6-uv6-2v2u3-u5-1/10,
z2+w2-4r3t3-2t5r-2tr5+v5+2v3u2+u4v;
> dim(std(J));
6
> ideal G= x2+y2-z2-w2+t6+t4r2-t2r4-r6-uv6-2v2u3-u5+1/10,
z2+w2-4r3t3-2t5r-2tr5+v5+2v3u2+u4v-1/10;
> dim(std(J));
6
```

Observe que esse caso se encaixa no item iii) da proposição anterior.

Pelo Teorema 2.9 mostramos que quando o discriminante se trata de uma semirreta existem ambas fibrações para ele. Nesse próximo lema vamos certificar a suavidade das fibras dos valores críticos de ψ , isto é, mostrar que imagem inversa pela ψ de um valor crítico é uma variedade regular.

Lema 13. A variedade definida por $\psi^{-1}(d)$, onde $d \in \Delta_\psi$ é uma variedade regular.

Demonstração. Faremos a demonstração em dois casos, quando os coeficientes são reais e quando são complexos. Sem perda de generalidade, vamos reescrever $\psi(z, \bar{z})$ da seguinte forma:

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^r k_j \bar{t}_j \|z_j\|^{2a_j} + \sum_{j=r+1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j},$$

com r sendo o número de índices com expoentes iguais, assim, $1 \leq r \leq n-1$.

Caso 1: Quando estamos com $k_j \bar{t}_j = \alpha_j \in \mathbb{R}^*$ dos $a_j = b_j$ temos que os pontos críticos de ψ são da forma $\Sigma_\psi = (z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0)$. Pela proposição acima, conhecemos os valores críticos de ψ , que serão $(c, 0)$ ou $(-c, 0)$ com $c \geq 0$. Como os coeficientes dos fatores com expoentes iguais são reais já vimos que quando ψ é visto nos reais, a parte imaginária de ψ não tem fatores dos índices de $a_j = b_j$, isto é, considerando $\psi_1(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \text{Re}(\psi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n))$ é dada pela seguinte expressão

$$\alpha_1 (x_1^2 + y_1^2)^{a_1} + \dots + \alpha_r (x_r^2 + y_r^2)^{a_r} + \frac{1}{2} \sum_{j=r+1}^n (\alpha_j (x_j + iy_j)^{a_j} \overline{(x_j + iy_j)^{b_j}} + \overline{\alpha_j} \overline{(x_j + iy_j)^{a_j}} (x_j + iy_j)^{b_j})$$

e $\psi_2(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \text{Im}(\psi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n))$ é

$$\frac{1}{2} \sum_{j=r+1}^n (\alpha_j (x_j + iy_j)^{a_j} \overline{(x_j + iy_j)^{b_j}} - \overline{\alpha_j} \overline{(x_j + iy_j)^{a_j}} (x_j + iy_j)^{b_j}).$$

Dessa forma $\psi^{-1}(c, 0) = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}; \psi_1(x_1, \dots, y_n) = c \text{ e } \psi_2(x_1, \dots, y_n) = 0\}$, como os pontos críticos dessa variedade são os pontos críticos da ψ que satisfazem $\psi_1 = c$ e $\psi_2 = 0$ então basta fazermos $\Sigma_\psi \cap \psi^{-1}(c, 0)$, ou seja, analisamos $\psi_1(\Sigma_\psi)$ e $\psi_2(\Sigma_\psi)$, assim

$$\psi_1(x_1, y_1, \dots, x_r, y_r, 0, \dots, 0) = k_1 \bar{t}_1 (x_1^2 + y_1^2)^{a_1} + \dots + k_r \bar{t}_r (x_r^2 + y_r^2)^{a_r} = c$$

e

$$\psi_2(x_1, y_1, \dots, x_r, y_r, 0, \dots, 0) = 0 = 0.$$

Assim os pontos críticos de ψ moram num espaço suave, logo $\psi^{-1}(d)$ com d valor crítico se trata de uma variedade regular.

Caso 2: Quando estamos com $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j, \beta_j \neq 0$, existem dois tipos de conjuntos críticos. Continuaremos fazendo o estudo para somente dois índices com expoentes iguais sem perda de generalidade, pois a análise se mantém a mesma e para buscar os pontos críticos é necessário trabalhar com as matrizes 2×2 . Supondo então $j = 1, 2$ com $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ e os demais índices com expoentes distintos. Dessa forma reescrevendo ψ nos reais, como parte real e parte imaginária tem-se ψ_1 igual a

$$\alpha_1 (x_1^2 + y_1^2)^{a_1} + \alpha_2 (x_2^2 + y_2^2)^{a_2} + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^n (k_j \bar{t}_j (x_j + iy_j)^{a_j} \overline{(x_j + iy_j)^{b_j}} + \overline{k_j \bar{t}_j} \overline{(x_j + iy_j)^{a_j}} (x_j + iy_j)^{b_j})$$

e ψ_2

$$\beta_1(x_1^2 + y_1^2)^{a_1} + \beta_2(x_2^2 + y_2^2)^{a_2} + \frac{1}{2} \sum_{j=r+1}^n (k_j \bar{t}_j (x_j + iy_j)^{a_j} \overline{(x_j + iy_j)^{b_j}} - \overline{k_j t_j} (x_j + iy_j)^{a_j} (x_j + iy_j)^{b_j}).$$

Pela Proposição 4.10 sabemos que quando $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$ para termos fibração exigimos α_1 e α_2 tenham os mesmos sinais e β_1 e β_2 também tenham os mesmos sinais e o conjunto de pontos críticos de ψ é $\{(x_1, y_1, x_2, y_2, 0, \dots, 0)\}$ assim,

$$\Delta_\psi = (\alpha_1(x_1^2 + y_1^2)^{a_1} + \alpha_2(x_2^2 + y_2^2)^{a_2}, \beta_1(x_1^2 + y_1^2)^{a_1} + \beta_2(x_2^2 + y_2^2)^{a_2}).$$

Usando a proposição anterior sabemos que nesse caso o discriminante se trata de semirretas que podem estar nos quatro quadrantes, ou seja, $\Delta_\psi = (a, b)$ com $a \leq 0$ ou $a \geq 0$ e $b \leq 0$ ou $b \geq 0$. Assim a variedade definida pela imagem inversa dos pontos críticos vai ser definida por $\psi^{-1} = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}; \psi_1 = a \text{ e } \psi_2 = b\}$ e seus pontos críticos são os pontos críticos de ψ que satisfazem $\psi_1 = a$ e $\psi_2 = b$. Logo,

$$\psi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, 0, \dots, 0) = \alpha_1(x_1^2 + y_1^2)^{a_1} + \alpha_2(x_2^2 + y_2^2)^{a_2} = a$$

e

$$\psi_2(x_1, y_1, x_2, y_2, 0, \dots, 0) = \beta_1(x_1^2 + y_1^2)^{a_1} + \beta_2(x_2^2 + y_2^2)^{a_2} = b.$$

Portanto os pontos críticos de $\psi^{-1}(d)$ estão em lugares suaves, assim nessa situação temos que $\psi^{-1}(d)$, onde $d \in \Delta_\psi$ é uma variedade regular.

Resta estudar o caso no qual $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$, nesse contexto temos $\Sigma_\psi = \{(x_1, y_1, 0, 0, 0, \dots, 0) \cup (0, 0, x_2, y_2, 0, \dots, 0)\}$ então o discriminante tem duas opções:

$$\Delta_\psi = (\alpha_1(x_1^2 + y_1^2)^{a_1}, \beta_1(x_1^2 + y_1^2)^{a_1}) \text{ ou } \Delta_\psi = (\alpha_2(x_2^2 + y_2^2)^{a_2}, \beta_2(x_2^2 + y_2^2)^{a_2}).$$

Procedendo da mesma maneira que nas outras duas situações concluímos que os pontos críticos de $\psi^{-1}(d)$, $d \in \Delta_\psi$ mora em um lugar suave de $\mathbb{R}^{2n-2}$. $\square$

Assim agora apresentaremos um resultado que mostra que as fibras dos valores regulares são localmente homeomorfas as fibras dos valores críticos de ψ . Lembrando que pelo Corolário 2.11 garantimos que Δ_ψ tem fibração na esfera de Milnor.

Proposição 4.16. *Seja*

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n k_j \bar{t}_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{b_j}, \quad a_j, b_j \geq 0$$

com $a_j = b_j$ para pelo menos um j e $a_j \neq b_j$ para ao menos um j , $j = 1, \dots, n$ e $k_j \bar{t}_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}^*$.

As fibras dos valores críticos de ψ são localmente homeomorfas as fibras dos valores regulares que estão contidos na reta que contém a semirreta dos valores críticos de ψ .

Demonstração. Como mostramos no lema anterior a variedade dada pela imagem inversa de valores críticos se trata de uma variedade regular, como as fibras dos valores regulares são também variedades regulares, sabemos que ambas podem ser vistas localmente como gráfico de uma aplicação.

Considerando $X_d = \psi^{-1}(d)$ uma fibra de um valor crítico e $X_{-d} = \psi^{-1}(-d)$ a fibra do valor regular oposto do valor crítico. Sabemos que existe ϕ_d e ϕ_{-d} homeomorfismo dados pelo fato delas serem localmente gráfico de aplicações. Note que podemos restringir ambos homeomorfismo ao disco aberto $\mathbb{D}_{\varepsilon'}^{2n-2}$ com centro na origem e $\varepsilon' > ||d||$, tal que

$$\phi_d|_1 \text{ é um homeomorfismo entre } \mathbb{D}_{\varepsilon'}^{2n-2} \text{ e } X_d$$

e

$$\phi_{-d}|_1 \text{ é um homeomorfismo entre } \mathbb{D}_{\varepsilon'}^{2n-2} \text{ e } X_{-d}.$$

Além disso é possível definir duas projeções

$$\pi_1 : X_d \longrightarrow \mathbb{D}_{\varepsilon'}^{2n-2} \text{ e } \pi_2 : X_{-d} \longrightarrow \mathbb{D}_{\varepsilon'}^{2n-2},$$

ambas são definidas, projetando nas $2n - 2$ primeiras coordenadas, ou seja, $\pi_1(z, g(z)) = z$ e $\pi_2(z', h(z')) = z'$, onde g, h são as aplicações que as descrevem como gráfico de aplicações numa vizinhança de $z \in X_d$ e $z' \in X_{-d}$.

Logo obtemos o seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} X_d & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{D}_{\varepsilon'}^{2n-2} \\ \phi_d|_1 \uparrow & & \downarrow \phi_{-d}|_1 \\ \mathbb{D}_{\varepsilon'}^{2n-2} & \xleftarrow{\pi_2} & X_{-d} \end{array}$$

Nessa situação a projeção π_1 se trata de um homeomorfismo, logo exibimos um homeomorfismo entre X_d e X_{-d} . $\square$

O seguinte exemplo, já visto (exemplo 30), apesar de ser o mais simples desse tipo de função motivou o último resultado.

Exemplo 36. Considere $f(z, \bar{z}) = z_1 \bar{z}_1 + z_2^2 \bar{z}_2$ considerando f em $\mathbb{R}^2$, temos

$$f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = \operatorname{Re}(f(z, \bar{z})) = x_1^2 + y_1^2 + x_2(x_2^2 + y_2^2) \text{ e } f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = \operatorname{Im}(f(z, \bar{z})) = y_2(x_2^2 + y_2^2)$$

Note que neste caso $\Sigma_f = \{(x_1, y_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4\}$ e consequentemente $\Delta_f = (x_1^2 + y_1^2, 0) = (c, 0), c \in \mathbb{R}^+$, um semi-eixo do $\mathbb{R}^2$.

Pelo Teorema 2.9 sabemos que o discriminante de f possui fibração, assim tomando $c \in \mathbb{R}^+$ tem-se

$$\begin{aligned} f^{-1}(c, 0) &= \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + y_1^2 + x_2(x_2^2 + y_2^2) = c \text{ e } y_2(x_2^2 + y_2^2) = 0\} \\ &= \{(x_1, y_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + y_1^2 + x_2^3 = c\}, \\ f^{-1}(0, 0) &= \{(x_1, y_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + y_1^2 + x_2^3 = 0\} \text{ e} \\ f^{-1}(-c, 0) &= \{(x_1, y_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + y_1^2 + x_2^3 = -c\} \end{aligned}$$

ambas fibrações no tubo de Milnor, a primeira do discriminantes, a segunda a fibra especial e por fim a fibra de uma valor regular oposto ao valor crítico usado. Através da imagem abaixo, considerando $\mathbb{R}^4$ com o corte $y_2 = 0$, é possível ver as três variedades descritas acima.

Figura 18 – As três fibras homeomorfas

Das duas Proposições 4.9 e 4.10 temos o seguinte corolário.

Por meio da D-regularidade definida no capítulo anterior, alguns resultados em (CISNEROS-MOLINA *et al.*, -) e o Corolário 5.5 em (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2010) tem-se o resultado equivalente para esse nova regularidade.

Corolário 4.17. *Dado $\psi : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ como nas condições acima, a seguinte fibração*

$$\phi = \frac{\psi}{\|\psi\|} : (\mathbb{S}_{\varepsilon}^{2n-1} \setminus W) \longrightarrow \mathbb{S}^{p-1} \setminus \mathcal{A}$$

tem a união do link K e a fibra de ϕ sobre o ponto de $\mathbb{S}^{p-1}$ correspondente da semirreta L^+ , por exemplo, é o link da variedade analítica real E_{L^+} .

Recordando que E_{θ} compõe o pencil canônico e pela Observação 1.76 sabemos que admite outras notações.

O Exemplo 29 é um caso particular das ψ , isto é,

$$\tilde{h}(z, \bar{z}) = \psi(z, \bar{z}) = z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2 + z_3^2 \bar{z}_3,$$

onde $z_1 = x + iy$, $z_2 = z + iw$, $z_3 = t + ir$, $x, y, z, w, t, r \in \mathbb{R}$. Para esse tipo de ψ não mostramos a existência das fibrações. Usando o critério de propriedade de transversalidade produzido no terceiro capítulo dessa tese, Teorema 3.3, vamos mostrar o seguinte resultado.

Proposição 4.18. *Considere,*

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^{n-1} K_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{a_j} + K_n z_n^2 \bar{z}_n^2, \quad a_j = 1, 2, 3 \quad (4.7)$$

ou

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^{n-1} K_j z_j^{a_j} \bar{z}_j^{a_j} + K_n z_n \bar{z}_n^2, \quad a_j = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

com K_n real ou imaginário puro e os $K_j \in \mathbb{R}^*$ com sinais opostos para, pelo menos, dois j 's, $j = 1, \dots, n-1$. Tomando $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{n-1} K_j (x_j^2 + y_j^2)^{a_j} + K_n x_n (x_n^2 + y_n^2) \quad e \quad \psi_2 = K_n y_n (x_n^2 + y_n^2)$$

ou

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{n-1} K_j (x_j^2 + y_j^2)^{a_j} + K_n x_n (x_n^2 + y_n^2) \quad e \quad \psi_2 = -K_n y_n (x_n^2 + y_n^2).$$

A aplicação

$$\phi = \frac{\psi}{\|\psi\|} : (\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus W) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{A}$$

é uma fibração localmente trivial, onde $W = \psi^{-1}(\Delta_\psi^\eta)$, $\Delta_\psi^\eta = \Delta_\psi \cap \mathbb{B}_\eta^2$ e $\pi(\mathcal{A}_\eta) = \mathcal{A}$ projeção na esfera unitária, com $\mathcal{A}_\eta := \Delta_\psi^\eta \cap \mathbb{S}_\eta^1$.

Demonstração. A demonstração segue como a prova do Teorema 4.10.

Já mostramos que a aplicação é D -regular pelo Teorema 4.8 e nos resta exibir a propriedade de transversalidade.

Diferente dos outros teoremas vamos assegurar a propriedade de transversalidade pelo Teorema 3.3.

Faremos a demonstração para ψ descrita em (4.7), para ψ apresentada em (4.8) a demonstração segue análoga.

É simples ver que

$$V = \psi^{-1}(0) = \{(x_1, y_1, \dots, y_{n-1}, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{2n}; \sum_{j=1}^{n-1} K_j (x_j^2 + y_j^2)^{a_j} + K_n x_n x_n^2 = 0\}$$

ou

$$V = \psi^{-1}(0) = \{(x_1, y_1, \dots, y_{n-1}, 0, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}; \sum_{j=1}^{n-1} K_j (x_j^2 + y_j^2)^{a_j} + K_n y_n y_n^2 = 0\},$$

quando $K_n = \alpha_n$, $\alpha_n \neq 0$ ou $K_n = i\beta_n$, $\beta_n \neq 0$, respectivamente. Observe que para K_n imaginário puro segue de maneira similar ao K_n real. Basta usar as observações feitas para y_n para x_n , já que no segundo caso $x_n = 0$ em $\psi^{-1}(0)$.

Por meio da Proposição 3.1 vamos descobrir as sequências de pontos $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pontos de tangência entre $\psi^{-1}(\psi(p_n))$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$.

Vamos analisar as possíveis sequências de pontos da matriz M que tem rank 2,

$$M = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & \cdots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & \cdots & x_n & y_n \end{bmatrix},$$

onde $a_{1,1} = 2K_1a_1x_1(x_1^2 + y_1^2)^{a_1-1}$, $a_{1,2} = 2K_1a_1y_1(x_1^2 + y_1^2)^{a_1-1}$, $a_{1,3} = 2K_2a_2x_2(x_2^2 + y_2^2)^{a_2-1}$, $a_{1,4} = 2K_2a_2y_2(x_2^2 + y_2^2)^{a_2-1}$, $a_{1,5} = 2K_3a_3x_3(x_3^2 + y_3^2)^{a_3-1}$, $a_{1,6} = 2K_3a_3y_3(x_3^2 + y_3^2)^{a_3-1}$, $a_{1,2n-1} = 3K_nx_n^2 + K_ny_n^2$, $a_{1,2n} = 2K_nx_ny_n$, $a_{2,2n-1} = 2K_nx_ny_n$ e $a_{2,2n} = 3K_ny_n^2 + k_nx_n^2$, onde $a_j - 1 = 0, 1, 2$.

Vamos denotar K_1 , K_2 e K_3 os coeficientes com sinais opostos, sem perda de generalidade. Observe também que como a matriz M é $3 \times 2n$ e o ψ_2 só tem termos não nulo de x_n e y_n , só será interessante os menores 3×3 de M que possua ao menos uma coluna sendo a penúltima ou a última coluna de M , ou seja, sem perda de generalidade, as aplicações descritas abaixo descrevem de maneira resumida as situações que devemos desenvolver e estudar.

A partir de agora faremos o estudo considerando $K_j = 1$ ou -1 .

$$z_1\bar{z}_1 + z_2^2\bar{z}_2^2 - z_3^3\bar{z}_3^3 + (-1)^\ell z_4^2\bar{z}_4^2 \quad \text{e} \quad z_1\bar{z}_1 - z_2^2\bar{z}_2^2 + z_3^3\bar{z}_3^3 + (-1)^\ell z_4^2\bar{z}_4^2$$

e

$$-z_1\bar{z}_1 + z_2^2\bar{z}_2^2 + z_3^3\bar{z}_3^3 + (-1)^\ell z_4^2\bar{z}_4^2 \quad \text{e} \quad z_1\bar{z}_1 - z_2^2\bar{z}_2^2 - z_3^3\bar{z}_3^3 + (-1)^\ell z_4^2\bar{z}_4^2$$

e

$$-z_1\bar{z}_1 + z_2^2\bar{z}_2^2 - z_3^3\bar{z}_3^3 + (-1)^\ell z_4^2\bar{z}_4^2 \quad \text{e} \quad -z_1\bar{z}_1 - z_2^2\bar{z}_2^2 + z_3^3\bar{z}_3^3 + (-1)^\ell z_4^2\bar{z}_4^2,$$

onde $\ell = 1$ ou -1 .

Calculando os menores 3×3 , usando a Proposição 3.1 para obter a sequência de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\psi^{-1}(\psi(p_n))$ e $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ são tangentes, utilizamos o software Singular para encontrar os conjuntos de pontos que satisfazem essa condição. Assim temos as seguintes possibilidades de conjuntos:

1º caso: $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, 0, 0)$ pertencem ao Σ_ψ .

2º caso: $(x_1, y_1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $(0, 0, x_2, y_2, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, x_3, y_3, \dots, 0, 0)$, $\dots, (0, 0, 0, 0, \dots, x_n, y_n)$ esses pontos quando se aproximam de V não permanecem sobre a esfera $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$, pois precisamos satisfazer $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ e $x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2 = \varepsilon^2$.

3º caso: $(x_1, y_1, 0, 0, 0, 0, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(x_1, y_1, 0, 0, 0, 0, \dots, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $(x_1, y_1, 0, 0, 0, 0, \dots, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(x_1, y_1, 0, 0, 0, 0, \dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ observe que esses pontos de fato permitem a tangência entre as fibras e a esfera mas eles não se aproximam de V , como exigido no Teorema 3.3 e se mantêm na esfera, pois a última coordenada é fixa e diferente de zero.

4º caso: $(0, 0, x_2, y_2, 0, 0, \dots, x_n, y_n)$ tal que

$$-3(x_n^2 + y_n^2) + 4x_n(x_2^2 + y_2^2)^2 = 0 \quad (4.9)$$

ou

$$3(x_n^2 + y_n^2) + 4x_n(x_2^2 + y_n^2)^2 = 0 \quad (4.10)$$

essas duas equações ocorrem quando $z_2^2 \bar{z}_2^2$ tem sinal positivo e negativo, respectivamente.

Agora vamos investigar se existe uma sequência que satisfaz o Teorema 3.3. Desenvolveremos somente a equação (4.9), a outra segue de maneira análoga. Atráves das condições do critério utilizado para verificar a propriedade de transversalidade sabemos que a sequência deve pertencer a esfera, $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$, então $x_2^2 + y_2^2 + x_n^2 + y_n^2 = \varepsilon^2$ e mais como olhamos as fibras próximas de V então

$$y_n = 0 \text{ e } (x_2^2 + y_2^2)^2 + x_n^3 = 0 \quad (4.11)$$

Consequentemente, manipulando todas as três informações anteriores, obtemos um absurdo. Consideramos $x_2^2 + y_2^2 = \varepsilon^2 - x_n^2$ e substituindo nas equações (4.9) e (4.11) concluímos que $x_2^2 + y_2^2 = \frac{-1}{2}$. Uma contradição, afinal $x_2^2 + y_2^2$ é sempre positivo.

5º caso: $(0, 0, 0, 0, x_3, y_3 \cdots, x_n, y_n)$ tal que

$$-(x_n^2 + y_n^2) + 2x_n(x_2^2 + y_n^2)^2 = 0 \quad (4.12)$$

ou

$$(x_n^2 + y_n^2) + 2x_n(x_2^2 + y_n^2)^2 = 0 \quad (4.13)$$

essas duas equações surgem quando $z_3^3 \bar{z}_3^3$ possui sinal positivo e negativo, respectivamente.

Vamos certificar se há uma sequência que está nas condições do Teorema 3.3 e logo ψ não possui a propriedade de transversalidade.

Trabalharemos apenas com a equação (4.12), a outra equação segue similar. Assumimos a sequência na esfera, assim $x_3^2 + y_3^2 + x_n^2 + y_n^2 = \varepsilon^2$ e mais, se aproximando de V , neste caso

$$y_n = 0 \text{ e } (x_3^2 + y_3^2)^3 + x_n^3 = 0 \quad (4.14)$$

Portanto por meio das informações observadas obtemos um absurdo. Tome $x_3^2 + y_3^2 = \varepsilon^2 - x_n^2$, em consequência substituindo na equação (4.12) concluímos $x_n > 1$ e na equação (4.14 c) onclui-se $x_n = 0$ ou $\frac{1}{2}$, produzindo uma contradição.

6º caso:

$$(0, 0, x_2, 0, 0, 0, \cdots, x_n, y_n) \text{ e } (x_n^2 + y_n^2) + 2x_n x_2^4 = 0 \quad (4.15)$$

ou

$$(0, 0, 0, y_2, 0, 0, \cdots, x_n, y_n) \text{ e } (x_n^2 + y_n^2) + 4x_n y_2^4 = 0 \quad (4.16)$$

Verificaremos se próximo a V as fibras das imagens desses pontos são transversais a esfera, $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-2}$.

Novamente desenvolveremos somente a equação (4.15), a outra segue similar. Suponhamos a sequência na esfera, então $x_2^2 + x_n^2 + y_n^2 = \varepsilon^2$. Como a sequência está se aproximando de V tem-se

$$y_n = 0 \text{ e } (x_2^2)^2 + x_n^3 = 0 \quad (4.17)$$

Por conseguinte seja $x_2^2 = \varepsilon^2 - x_n^2$ e substituindo nas equações (4.15) e (4.17) conclui-se que $x_n = 0$ o que implica pela equação (4.17) que $x_2 = 0$. Gerando um absurdo.

Logo não existe uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que as fibras da imagem desses pontos seja tangente a esfera e essa sequência convirja para $p \in V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$, como exigido no Teorema 3.3 para não ter a propriedade de transversalidade, assim ψ , descrita em (4.7) e (4.8) tem a propriedade de transversalidade.

Assim concluímos que ψ é D -regular e possui a propriedade de transversalidade, logo pelo Teorema 1.82 provamos o desejado. $\square$

Observação 4.19. 1) Para encontrar os conjuntos formados pelos pontos tais que as fibras das imagens desses pontos e a esfera são tangentes utilizamos o software Singular.

No software Singular é necessário usar as bibliotecas "sing.lib" e "homolog.lib". Defina o anel $k = 0$, as variáveis (x, y, z, w, t, r) e a matriz M definida como na Proposição 3.1. Continuando, encontre o ideal $I = \text{minor}(M, 3)$, pois buscamos as sentenças que geram os menores 3×3 de M e posteriormente escrevemos $\text{primdecGTZ}(I)$, descobrimos as soluções das sentenças encontradas em I iguais a zero.

Para obter todas as possibilidades de soluções basta usar as seguintes aplicações, lembre-se que é preciso redefinir os z'_i s, com x, y, z, w, t, r ,

$$z_1 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_2}^2 + (-1)^\ell z_3 \overline{z_3} \text{ e } z_1^2 \overline{z_1}^2 - z_2^3 \overline{z_2}^3 + (-1)^\ell z_3^2 \overline{z_3} \text{ e } z_1^3 \overline{z_1}^3 - z_2 \overline{z_2} + (-1)^\ell z_3^2 \overline{z_3},$$

onde $\ell = 1$ ou 2 .

Usamos somente as 6 variáveis pois quando usamos 8 o computador utilizado não gerou as soluções.

2) Para a ψ descrita em (4.7 e 4.8) temos o discriminante sendo $(\sum_{j=1}^{n-1} K_j(x_j^2 + y_j^2)^{a_j}, 0)$ o eixo x em $\mathbb{R}^2$. Diferente da Proposição 4.4.

Assim sabemos também pelo Corolário 2.11 que o discriminante de ψ especificada em (4.7) tem fibração de Milnor no tubo e na esfera.

Sabemos também que as $\psi^{-1}(d)$, $d \in \Delta_\psi$ tem dimensão $2n - 2$, pois $\psi^{-1}(0)$ é uma interseção completa (Teorema 4.14) e como no Lema 12. Usando também o Lema 13 temos que $\psi^{-1}(d)$ são variedades regulares para todo $d \in \Delta_\psi$.

REFERÊNCIAS

- BEZERRA, V. M. R. **Teoria de estratificação e condições de regularidade**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo - Campus São Carlos, São Carlos, 2007. Citado nas páginas [26](#), [27](#), [30](#) e [32](#).
- BIERSTONE, E.; MILMAN, P. D. Semianalytic and subanalytic sets. **Mathématiques de l'I.H.É.S.**, v. 67, p. 5–42, 1988. Citado nas páginas [19](#), [26](#), [27](#), [28](#), [29](#), [30](#) e [32](#).
- BRODERSEN, H.; TROTMAN, D. Whitney (b)-regularity is weaker than kuo's ratio test for real algebraic stratifications. **Mathematica Scandinavica**, v. 45, p. 27–34, 1979. Citado na página [34](#).
- CHEN, Y.; SANTOS, R. N. A. dos; TIBĂR, M. Singular open book structures from real mappings. **Cent. Eur. J. Math.**, v. 11(5), p. 817–828, 2013. Citado na página [79](#).
- CHURCH, P. T.; LAMOTKE, K. Non-trivial polynomial isolated singularities. **Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 78=Indag. Math.**, v. 37, p. 149–154, 1975. Citado nas páginas [18](#) e [39](#).
- CISNEROS-MOLINA, J. L. Join theorem for polar weighted homogeneous singularities. In: **Singularities II**. [S.l.]: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. p. 43–59. Citado nas páginas [18](#), [19](#), [40](#) e [89](#).
- CISNEROS-MOLINA, J. L.; MENEGON, A.; SEADE, J.; SNOUSSI, J. Fibration theorems and d -regularity for differentiable map-germs with non-isolated critical value. **Preprint**, -, p. –, –, Citado nas páginas [20](#), [40](#), [45](#), [46](#), [47](#), [50](#), [59](#), [61](#), [62](#), [66](#), [79](#), [82](#) e [103](#).
- CISNEROS-MOLINA, J. L.; ROMANO-VELÁZQUEZ, A. n. Classification of isolated polar weighted homogeneous singularities. In: **Singularities in geometry, topology, foliations and dynamics**. [S.l.]: Birkhäuser/Springer, Cham, 2017. p. 77–104. Citado na página [52](#).
- CISNEROS-MOLINA, J. L.; SEADE, J.; GRULHA, N. de G. J. On the topology of real analytic maps. **Int. J. Math.**, v. 25, p. 1–30, 2014. Citado na página [71](#).
- CISNEROS-MOLINA, J. L.; SEADE, J.; SNOUSSI, J. Refinements of Milnor's fibration theorem for complex singularities. **Advances in Mathematics**, v. 222, p. 937–970, 2009. Citado nas páginas [18](#), [20](#), [40](#), [44](#), [45](#), [47](#), [56](#) e [57](#).
- _____. Milnor fibrations and d -regularity for real analytic singularities. **International Journal of Mathematics**, v. 21, p. 419–434, 2010. Citado nas páginas [18](#), [20](#), [40](#), [43](#), [71](#), [76](#) e [103](#).
- _____. Milnor fibration and the concept of d -regularity for analytic map germs. In: **Real and complex singularities**. [S.l.]: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012. p. 1–28. Citado nas páginas [20](#), [40](#) e [42](#).
- COSTE, M. **An introduction to o-minimal geometry**. [S.l.], 1999. Citado nas páginas [31](#), [63](#), [67](#) e [69](#).

- GIBSON, C. G.; K.WIRTHMÜLLER; PLESSIS, A. du; LOOIJENGA, E. **Topological Stability of Smooth Mappings**. New York: Springer-Verlag Berlin.Heidelberg, 1976. Citado na página 38.
- HIRONAKA, H. **Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps**. [S.l.]: Istituto Matematico “L. Tonelli” dell’Università di Pisa, Pisa, 1973. Citado na página 19.
- _____. Subanalytic sets. Kinokuniya, Tokyo, p. 453–493, 1973. Citado na página 19.
- _____. Stratification and flatness. In: **Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, (1976))**. [S.l.]: Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977. p. 199–265. Citado nas páginas 17 e 39.
- JACQUEMARD, A. Fibrations de milnor pour des applications réelles. **Boll. Un. Mat. Ital. B** (7), v. 3, p. 591–600, 1989. Citado nas páginas 18 e 39.
- LÊ, D. T. Some remarks on relative monodromy. In: **Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, (1976))**. [S.l.]: Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977. p. 397–403. Citado nas páginas 17, 39 e 71.
- LIMA, V. M. de. **Teorema da Fibrção de Milnor**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011. Citado na página 34.
- LOJASIEWICZ, S. Sur le problème de la division. **Studia Math.**, v. 18, p. 87–136, 1959. Citado na página 19.
- _____. Triangulation of semi-analytic sets. **Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa** (3), v. 18, p. 449–474, 1964. Citado na página 19.
- LOOIJENGA, E. A note on polynomial isolated singularities. **Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 74=Indag. Math.**, v. 33, p. 418–421, 1971. Citado nas páginas 18 e 39.
- MASSEY, D. B. Real analytic milnor fibrations and a strong lojasiewicz inequality. In: **Real and complex singularities**. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010. v. 380, p. 268–292. Citado nas páginas 19 e 80.
- MEDRANO, S. L. Singularities of homogeneous quadratic mappings. **R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM**, v. 108, p. 95–112, 2014. Citado na página 66.
- MENEGON, A.; SEADE, J. On the l^e -milnor fibration for real analytic maps. **Math. Nachr.**, v. 2–3, p. 382–392, 2017. Citado na página 79.
- MILNOR, J. On isolated singularities of hypersurfaces. **Preprint.**, 1966. Citado na página 38.
- _____. **Singular points of complex hypersurfaces**. Tokyo: Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968. Citado nas páginas 17, 18, 23, 34, 35, 36, 38, 39, 40 e 71.
- OKA, M. Topology of polar weighted homogeneous hypersurfaces. **Kodai Math. J.**, v. 31, p. 163–182, 2008. Citado na página 19.
- _____. Non-degenerate mixed functions. **Kodai Math. J.**, v. 33, p. 1–62, 2010. Citado nas páginas 18 e 19.

- _____. On mixed Brieskorn variety. In: **Topology of algebraic varieties and singularities**. [S.l.]: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011. p. 389–399. Citado nas páginas 52 e 54.
- PARAMESWARAN, A.; TIBĂR, M. Thom irregularity and milnor tube fibrations. **ArXiv: 1606.09008 v5**, 2017. Citado nas páginas 19 e 46.
- PICHON, A.; SEADE, J. Real singularities and open-book decompositions of the 3-sphere. **nn. Fac. Sci. Toulouse Math.** (6), v. 12, p. 245–265, 2003. Citado nas páginas 18, 19, 39 e 71.
- RUAS, M. A. S.; SANTOS, R. N. A. dos. Real Milnor fibrations and (c)-regularity. **Manuscripta Math.**, v. 117, p. 207–218, 2005. Citado na página 18.
- RUAS, M. A. S.; SEADE, J.; VERJOVSKY, A. On real singularities with a milnor fibration. In: **Trends in singularities**. [S.l.]: Birkhäuser, Basel, 2002. p. 191–213. Citado nas páginas 18, 19, 39, 52, 53, 54, 86, 90 e 91.
- SANTOS, R. N. A. dos; HOHLENWERGER, M. A. B.; SAEKI, O.; SOUZA, T. O. New examples of Neuwirth-Stallings pairs and non-trivial real Milnor fibrations. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, v. 66, p. 83–104, 2016. Citado nas páginas 18 e 39.
- SANTOS, R. N. A. dos; TIBĂR, M. Real map germs and higher open book structures. **Geom. Dedicata**, v. 147, p. 177–185, 2010. Citado nas páginas 43 e 79.
- SANTOS, R. N. Araújo dos. Equivalence of real Milnor fibrations for quasi-homogeneous singularities. **Rocky Mountain J. Math.**, v. 42, p. 439–449, 2012. Citado na página 40.
- SEADE, J. Open book decompositions associated to holomorphic vector fields. **Bol. Soc. Mat. Mexicana** (3), v. 3, p. 323–335, 1997. Citado nas páginas 18 e 39.
- SHIOTA, M. **Geometry of Subanalytic and Semialgebraic Sets**. New York: Springer Science Business Media, New York, 1997. Citado nas páginas 19, 26, 27, 30, 31, 32, 56, 63, 67 e 69.
- TEISSIER, B. Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney. In: **Algebraic geometry (La Rábida, 1981)**. [S.l.]: Springer, Berlin, 1982. v. 961, p. 314–491. Citado na página 34.
- TROTMAN, D. Lectures on real stratification theory. In: **Singularity theory**. [S.l.]: World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007. p. 139–155. Citado nas páginas 31 e 34.
- VALÁZQUEZ, F. A. R. **Singularidades Casi Homogéneas polares**. Monografía (Licenciatura em Matemáticas) — Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 2011. Citado na página 113.
- VERDIER, J.-L. Stratification de whitney et théorème de bertini-sard. **Invent. Math.**, v. 36, p. 295–312, 1976. Citado nas páginas 20, 31, 32, 33, 34, 56, 57, 70, 71 e 75.

EXEMPLO CLÁSSICO DE FIBRAÇÃO DE MILNOR

A.1 Um exemplo das fibrações: polinômio de Pham-Brieskorn

Seguindo (VALÁZQUEZ, 2011) iremos desenvolver um exemplo clássico e muito conhecido, o polinômio de Pham-Bierkorn. Exibiremos explicitamente as duas fibrações e daremos sua equivalência. Esse famoso polinômio é definido nos complexos, apesar do enfoque da tese ser o caso real, optamos por colocar esse exemplo no apêndice para explicitar melhor o estudo das fibras e sua equivalência.

Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n} \end{aligned}$$

o polinômio de Pham-Brieskorn, então f é uma função polinomial diferenciável e seu gradiente é

$$\nabla f(z) = (a_1 z_1^{a_1-1}, \dots, a_n z_n^{a_n-1}), \quad a_i \geq 2.$$

Note que $\nabla f(z) = 0$ se e somente se $z = 0$, assim a origem é o único ponto crítico. Consequentemente para todo $z \in \mathbb{C}^*$, $V_z = f^{-1}(z)$ é uma variedade diferenciável. Além disso, $V = f^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada na origem de $\mathbb{C}^n$.

Afim de conhecer as estruturas de V e V_z , enunciaremos alguns resultados.

Proposição A.1. *Seja $d = \text{mmc}(a_1, \dots, a_n)$ e $d_i = \frac{d}{a_i}$, definimos a seguinte função*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \lambda \cdot (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (\lambda^{d_1} z_1, \dots, \lambda^{d_n} z_n) \end{aligned}$$

é uma ação.

Observação A.2. Podemos obter um fluxo real determinado pela restrição da ação definida acima pelos números reais positivos, $\mathbb{R}^+$. Além disso, para $t \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{C}^n$, temos que $t \cdot z = (t^{p_1} z_1, \dots, t^{p_n} z_n)$ e como cada $p_i \in \mathbb{N}$, então quando $t \rightarrow 0$, $t \cdot z \rightarrow 0$ e quando $t \rightarrow \infty$, $t \cdot z \rightarrow \infty$. Dessa maneira as órbitas desse fluxo são arcos os quais se aproximam do 0.

Lema 14. Seja $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Então a função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|t \cdot z\| \end{aligned}$$

é crescente.

Lema 15. Se $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, então a função

$$\begin{aligned} \alpha_z : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\longmapsto t \cdot z \end{aligned}$$

é uma imersão injetiva.

Temos que $\{t \cdot z; t \in \mathbb{R}^+\}$ é uma variedade diferenciável em $\mathbb{C}^n$. Pensando na ação que está definida acima, e o fato de ser crescente quando t cresce, podemos ver geometricamente como uma ação “radial”, ou seja, seu crescimento segue a direção do raio, que é transversal a esfera. Assim tem-se:

Proposição A.3. Se $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, então $\{t \cdot z; t \in \mathbb{R}^+\}$ é transversal a $\mathbb{S}_\varepsilon$.

Observe que $t \cdot z$ com $z \in V$ está contido em V . Assim V é a união de órbitas. Podemos ver algumas consequências desses resultados:

Proposição A.4. A variedade V intercepta transversalmente a $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ e se denotarmos por $K_\varepsilon = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$, então K_ε como subvariedad de $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ tem codimensão real 2.

Observar a Figura 3.

Até o momento o link K da singularidade é determinado pela esfera de raio ε , mas o resultado a seguir mostra que na verdade independe do raio da esfera.

Proposição A.5. Existe um difeomorfismo entre os pares $(\mathbb{S}_1^{2n-1}, K_1)$ e $(\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}, K_\varepsilon)$.

Assim K se trata de um invariante associado a uma singularidade. Com todas estas propriedades já estamos em condições de provar a existência das três fibras.

A.1.1 Fibrações

Apresentaremos a existência de três fibrações associadas aos polinômios de Pham-Brieskorn e mostraremos a equivalência entre elas.

Analogamente a prova da Proposição A.3, podemos restringir a ação a uma circunferência unitária e desta maneira obtemos a seguinte igualdade

$$f(e^{i\theta} \cdot z) = e^{id\theta} \cdot f(z). \quad (\text{A.1})$$

Tomamos $z \in \mathbb{C}^n$, consideremos $w = f(z)$ e se multiplicamos por algum $e^{i\theta}$, então pela igualdade acima, a fibra $f^{-1}(w)$ é levada sobre a fibra de $e^{i\theta}w$ e desta maneira sabemos que as fibras sobre o círculo são difeomorfas.

Uma propriedade importante que usaremos mais adiante é a seguinte: se $z \in \mathbb{C}^n \setminus V$, então para qualquer $t \in \mathbb{R}^+$, o argumento de $f(t \cdot z)$ é constante.

Fibra no tubo

Temos que 0 é o único valor crítico de f , por isso $z \neq 0$, então $f^{-1}(z)$ é uma variedade suave. Por outro lado pela igualdade (A.1), para alguma constante $\delta > 0$ as variedades $f^{-1}(z)$ são difeomorfas, com $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = \delta$.

Desta maneira podemos provar que a restrição

$$f : f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1) \longrightarrow \mathbb{S}_\delta^1,$$

é um fibrado.

De fato, seja U um aberto de $\mathbb{S}_\delta^1$ e $z_0 \in \mathbb{S}_\delta^1$ fixo, de forma que $f^{-1}(z_0)$ será uma fibra. Definimos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \phi : U \times f^{-1}(z_0) &\longrightarrow f^{-1}(U) \\ (z, w) &\longmapsto e^{\frac{i\theta_z}{d}} \cdot w \end{aligned}$$

onde $e^{i\theta_z} \cdot z_0 = z$. Esta aplicação é diferenciável.

Por outro lado, definimos

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : f^{-1}(U) &\longrightarrow U \times f^{-1}(z_0) \\ z &\longmapsto (f(z), e^{\frac{-i\theta_z}{d}}) \end{aligned}$$

onde $z_0 = e^{-i\theta_z} f(z)$. Temos que se $(z, w) \in U \times f^{-1}(z_0)$, então

$$\phi^{-1}(\phi(z, w)) = \phi^{-1}(e^{\frac{i\theta_z}{d}} \cdot w) = (z, w).$$

Além disso, se $z \in f^{-1}(U)$, então

$$\phi(\phi^{-1}(z)) = \phi(f(z), e^{\frac{-\theta_z}{d}} \cdot z) = z.$$

Dessa forma concluímos que vale o axioma da trivialidade local, portanto f é um fibrado.

Note também que é possível obter essa prova usando o Teorema de fibração de Ehresmann.

Fibra no global

Agora consideremos $f : \mathbb{C}^n \setminus V \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Vamos provar que f é uma fibração. Para isso seja $U = \mathbb{C}^* \setminus \{-1\}$ e $W = \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ abertos de $\mathbb{C}^*$ tal que a união cubra o espaço todo.

Seja $f^{-1}(1)$ uma fibra e provaremos que existe um difeomorfismo entre $U \times f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(U)$. Se $z \in f^{-1}(U)$, então $f(z) \in U$ e se considerarmos as coordenadas polares, temos que $f(z) = te^{i\theta}$, $t \neq 0$ (genérico).

Dessa maneira definimos as seguintes aplicações diferenciáveis

$$\begin{aligned} \phi : f^{-1}(U) &\longrightarrow U \times f^{-1}(1) \\ z &\longmapsto (f(z), t^{\frac{-1}{d}} e^{\frac{-i\theta}{d}} z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : U \times f^{-1}(1) &\longrightarrow f^{-1}(U) \\ (te^{i\theta}, w) &\longmapsto (te^{i\theta})^{\frac{1}{d}} w \end{aligned}$$

Note que ϕ e ϕ^{-1} são inversas e ambas difeomorfismos, como desejados. Para W é equivalente.

Fibra na esfera

É possível mostrar que se $z \in \mathbb{C}^n$ e $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ então $\|e^{i\theta} \cdot z\| = \|z\|$ (*).

Considerando a função

$$\phi := \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}^{2n-1} \setminus K \longrightarrow \mathbb{S}^1,$$

queremos provar que se trata de um fibrado.

Primeiramente mostraremos que ϕ é uma submersão, para tal, se $z \in (\mathbb{S}^{2n-1} \setminus K)$ então temos que $e^{i\theta} \cdot z \in (\mathbb{S}^{2n-1} \setminus K)$.

Agora consideramos a curva $p(t) = e^{\frac{it}{d}} \cdot z$, assim

$$\frac{d\phi(p(t))}{dt} = \frac{\left(\frac{e^{it} f(z)}{\|f(z)\|} \right)}{dt} = ie^{it} \phi(z) \neq 0.$$

Logo, ϕ é uma submersão.

Sejam $z_0 \in \mathbb{S}^1$ e U um aberto em $\mathbb{S}^1$ tal que $z_0 \in U$, consideremos $\phi^{-1}(z_0)$ como uma fibra. Se $z \in \phi^{-1}(U)$ e $e^{i\theta_z} \in \mathbb{S}^1$ tal que $e^{i\theta_z} \phi(z) = z_0$. Então por (*) temos $\phi(e^{\frac{i\theta_z}{d}}) = z_0$, portanto podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \phi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \phi^{-1}(1) \\ z &\longmapsto (\phi(z), e^{\frac{-i\theta_z}{d}} \cdot z) \end{aligned}$$

que é diferenciável. Agora para $(z, w) \in U \times \phi^{-1}(z_0)$, então $\phi(w) = z_0$ e portanto existe $e^{i\theta_w} \in \mathbb{S}^1$ tal que $\phi(e^{i\theta_w} \cdot w) = z$. Assim, definimos

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : U \times \phi^{-1}(z_0) &\longrightarrow \phi^{-1}(U) \\ (z, w) &\longmapsto e^{i\theta_w} \cdot w \end{aligned}$$

Assim obtemos o difeomorfismo procurado e satisfaz o axioma de trivialidade local.

Para finalizar o seguinte resultado mostra a fibra do tubo e a fibra da esfera são equivalentes. Ressaltamos que a tubo nesta situação não é limitado.

Proposição A.6. *A fibração $f : f^{-1}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{S}^1$ é equivalente a fibra na esfera $\phi = \frac{f}{\|f\|} : (\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus K) \longrightarrow \mathbb{S}^1$.*

Demonstração. A equivalência é determinada pelo seguinte difeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : f^{-1}(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus K \\ z &\longmapsto t(z) \cdot z \end{aligned}$$

onde $t(z)$ é o único número positivo tal que $t(z) \cdot z \in \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$.

E a inversa é

$$\psi_\varepsilon^{-1}(z) = \left(\frac{1}{f(z)}\right)^{\frac{1}{d}} \cdot z.$$

Para ver que essa última aplicação é efetivamente a inversa, seja $z \in f^{-1}(\mathbb{S}^1)$ e notamos que

$$(\psi_\varepsilon^{-1} \circ \psi_\varepsilon)(z) = \psi_\varepsilon^{-1}(t(z) \cdot z) = \left(\frac{1}{t(z)^d |f(z)|}\right)^{\frac{1}{d}} \cdot t(z) \cdot z = \frac{1}{t(z)} \left(\frac{1}{f(z)}\right)^{\frac{1}{d}} \cdot t(z) \cdot z = \left(\frac{1}{|f(z)|}\right)^{\frac{1}{d}} \cdot z = z.$$

Por outro lado, tomando $z \in (\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus K)$, tem-se

$$(\psi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon^{-1})(z) = \psi_\varepsilon\left(\left(\frac{1}{|f(z)|}\right)^{\frac{1}{d}} \cdot z\right) = |f(z)|^{\frac{1}{d}} \cdot \left(\frac{1}{|f(z)|}\right)^{\frac{1}{d}} \cdot z = z$$

.

Portanto as fibrações são equivalentes. □

Observação A.7. Outro exemplo de fibrações que é possível dar suas fibrações e a equivalências entre as mesmas são as aplicações polinômiais homogêneas pesadas reais.

- (a)-regularidade, 33
- (b)-regularidade, 33
- (w)-regularidade, 34
- D -regularidade, 46
- D_h -regularidade, 51
- a_f -condição de Thom, 38
- d_h -regular, 49
- ação angular, 52
- ação polar, 52
- ação radial, 52
- aplicação
 - esferificação, 43
 - estratificada, 55
 - rugosa, 56
 - semialgébrica, 27
 - semianalítica, 29
 - subanalítica, 30
- aplicações
 - compatíveis, 49
- condição de fronteira, 32
- condição de trivialidade, 35
- conjunto
 - algébrico, 23
 - analítico, 28
 - semialgébrico, 27
 - semianalítico, 28
 - subanalítico, 29
- d -regularidade, 42
- D -regularidade para aplicações
 - subanalíticas, 75
- dimensão
 - da estratificação, 32
- discriminante linear
 - para aplicações de classe C^ℓ , 45
 - para aplicações subanalíticas, 71
- estratificação, 31
- estratificação de Whitney, 33
- estrutura cônica, 26
- f transversal à S , 56
- fibra de Milnor, 36
- fibração, 35
- fibrado vetorial rugoso, 56
- função
 - rugosa, 56
 - semialgébrica, 27
 - semianalítica, 29
 - subanalítica, 30
- homeomorfismo cônico, 48
- interseção completa, 95
- linearização de f , 51
- link da singularidade, 25
- pencil canônico, 41
- polinômio homogêneo pesado
 - polar, 52
- ponto
 - crítico, 24
 - regular, 24, 70
- propriedade de transversalidade, 46
- raio linear, 45
- valor crítico da aplicação, 70
- variedade paralelizável, 36