UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Universalidade para medidas Stahl-Totik regulares

Hermes Alves Neto

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Hermes Alves Neto

Universalidade para medidas Stahl-Totik regulares

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Jordão

USP – São Carlos
Março de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A474u

Alves Neto, Hermes
Universalidade para medidas Stahl-Totik regulares / Hermes Alves Neto; orientadora Thaís Jordão. -- São Carlos, 2022.
61 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Universalidade. 2. Polinômios Ortogonais. 3. Medidas Stahl-Totik regulares. 4. Funções de Christoffel. I. Jordão, Thaís, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Hermes Alves Neto

Universality for Stahl-Totik regular measures

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Thaís Jordão

USP – São Carlos
March 2022

À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Estou muito feliz por estar terminando esse ciclo da minha carreira que com certeza não foi fácil, mas tive a sorte de conhecer e trabalhar com pessoas maravilhosas que tornaram o caminho até aqui mais leve. Este trabalho foi fruto não só de meu esforço, mas também da colaboração e amizade de todas as pessoas que fizeram parte da minha jornada até aqui.

Gostaria de agradecer minha orientadora Thaís Jordão, não só pela orientação profissional, mas também pelo acolhimento e paciência em momentos díficeis que passei no último ano. Sua dedicação com a pesquisa e educação matemática foram uma grande fonte de inspiração para mim, isso com certeza tornou o meu desenvolvimento mais agradável e eficiente. Foi um enorme prazer ter a oportunidade de trabalhar com a Thaís.

À minha família, que nesses anos de pandemia esteve mais presente que o de costume, não cabem palavras para expressar o quão grato sou. Agradeço meu pai e minha mãe por todo o apoio e incentivo à minha escolha de seguir a carreira acadêmica em tempos tão difíceis. À minha namorada por me escutar em momentos difíceis e pela enorme paciência de treinar praticamente todas as apresentações orais comigo, além das várias sugestões em meus trabalhos. Agradeço a todos amigos e amigas que tornaram esses útilmos anos mais divertidos, mesmo de longe. Em especial ao Victor pela amizade, pela frutífera discussão de exercícios ao longo do mestrado e por ter me incentivado a fazer o curso de verão do ICMC em 2020, que abriu as portas para mim na instituição. Natália, Leandro, Guilherme, Shigueru, João e Marcos, pelas conversas e finais de semana no discord.

Agradeço a USP por toda estrutura que dispõe a seus alunos e alunas e à todas as pessoas que trabalham para manter a excelência da universidade. Agradeço todos os professores e professoras da USP que contribuíram com a minha formação. Em especial, agradeço ao professor Guilherme Silva e seus alunos e alunas que me ensinaram sobre matrizes aleatórias e processos pontuais determinantes, contribuindo para o enriquecimento deste trabalho.

Se não fosse o programa de expansão da UFF para o interior, parte do programa Reuni, provavelmente não mudaria para o curso de matemática. Gostaria de agradecer à UFF como um todo e especialmente meus professores e professoras que me inspiraram a seguir carreira acadêmica.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento: PROEX-11733401/M.

RESUMO

NETO, H. A. **Universalidade para medidas Stahl-Totik regulares**. 2022. 61 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Em 2009, Lubinsky provou um limite de universalidade, antes conhecido em poucos casos, para uma grande família de medidas, as medidas Stahl-Totik regulares. Os polinômios ortogonais foram utilizados de forma original na obtenção de tal limite, através da localização das funções de Christoffel. O processo envolve aproximar núcleos reprodutores associados a medidas Stahl-Totik regulares ao núcleo reprodutor do peso de Legendre. Como o limite de universalidade é conhecido para o peso de Legendre, estas aproximações permitem a obtenção do resultado para a classe de medidas que trabalharemos. A universalidade a ser explorada neste trabalho tem como origem um modelo de matrizes aleatórias chamado de *Ensemble* Gaussiano Unitário, cuja distribuição de probabilidade pode ser escrita em termos do núcleo reprodutor associado aos polinômios de Hermite. De maneira geral, núcleos reprodutores associados a polinômios ortogonais definem um modelo estatístico chamado processo pontual determinante. É neste contexto geral que será explorado o limite de universalidade.

Palavras-chave: Universalidade, Polinômios Ortogonais, medidas Stahl-Totik regulares, Funções de Christoffel.

ABSTRACT

NETO, H. A. **Universality for Stahl-Totik regular measures**. 2022. 61 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

In 2009, Lubinsky proved an universality limit, before known only in a few cases, for a large class of measures, the Stahl-Totik regular measures. Orthogonal polynomials were used in a original way to obtain this limit, using localization properties of Christoffel Functions. The process involves approximating the reproducing kernels of Stahl-Totik regular measures to the Legendre weight reproducing Kernel. As the universality limit is known for the Legendre weight, the same goes for the measures that we are interested. The universality to be studied in this work has its origns in a random matrix model, the Gaussian Unitary Ensemble, which its probability distribution can be obtained in terms of the reproducing kernel associated to Hermite polynomials. In a general way, reproducing kernels of orthogonal polynomials define a stathistical model called determinantal point process. It is in this scenario that the universality limit will be explored in this work.

Keywords: Universality, Orthogonal Polynomials, Stahl-Totik regular measures, Christoffel Functions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 PRELÚDIO 17
2.1 Polinômios Ortogonais e núcleo de reprodução 17
2.2 Regularidade no sentindo de Stahl e Totik 19

3 PROCESSO PONTUAL DETERMINANTE E MATRIZES ALEATÓRIAS 27
3.1 O Ensemble Unitário (UE) 28
3.2 Processo pontual determinante 35

4 UNIVERSALIDADE 39
4.1 Funções de Christoffel 40
4.1.1 Localização *49*
4.1.2 Suavização *51*
4.1.3 Limite de Universalidade *55*

REFERÊNCIAS 59

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Limites de Universalidade, e suas fundamentações teóricas, de forma bastante generalista estão relacionados ao princípio básico de que sistemas suficientemente complexos (estocásticos) podem obedecer a uma lei universal. Em outras palavras, se uma propriedade é consequência de muitas fontes diferentes de aleatoriedade, então os detalhes dos mecanismos subjacentes não devem importar muito. Do ponto de vista físico, a complexidade de interação em um sistema de partículas pode obedecer uma lei universal, cujo comportamento não é influenciado pela interação entre as partículas a nível microscópico (DYSON, 1962; MEHTA, 1960; WIGNER, 1967). Esta universalidade, matematicamente, tem sido amplamente investigada e aplicada na obtenção de resultados do tipo do Teorema do Limite Central, veja (BAIK; SUIDAN, 2007; LYTOVA; PASTUR, 2009).

O estudo do limite de universalidade provada por Lubinsky (2009) tem início na década de 60, quando Wigner (1967) propôs modelar níveis de energia de sistemas de partículas estudados em física nuclear em termos de autovalores de matrizes aleatórias. Ele observou em seus estudos que estes sistemas apresentavam uma certa repulsão entre as partículas, comportamento que os autovalores também deveriam manifestar no modelo de matrizes aleatórias. E isto foi obtido por Dyson (1962) para o modelo Gaussiano Unitário de matrizes aleatórias. Em poucas palavras, Lubinsky provou que este comportamento universal é compartilhado por uma grande classe de medidas, as chamadas medidas Stahl-Totik regulares (STAHL; TOTIK, 1992).

Nosso objetivo é apresentar a universalidade para modelos nos quais a distribuição de probabilidade pode ser obtida através de núcleos reprodutores de polinômios ortogonais. Tais modelos são chamados de processos pontuais determinantes (BAIK; DEIFT; SUIDAN, 2016). Vamos explorar e provar o Limite de Universalidade

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n\left(x+\dfrac{a}{\omega(x)K_n(x,x)}, x+\dfrac{b}{\omega(x)K_n(x,x)}\right)}{K_n(x,x)} = \frac{\operatorname{sen}\pi(a-b)}{\pi(a-b)}, \tag{1.1}$$

para núcleos reprodutores K_n associados a μ, uma medida Stahl-Totik-regular, com derivada de

Radon-Nikodym $\omega := \mu'$. No limite acima x está em algum subconjunto compacto de $[-1,1]$ e a,b estão em algum intervalo fechado de $\mathbb{R}$. Para tanto a técnica adotada envolverá o estudo dos núcleos reprodutores dados por polinômios ortogonais associados à medida μ. Será necessário estudar o comportamento assintótico em relação a n desses núcleos e para isso, Lubinsky utiliza da comparação destes núcleos com as funções de Christoffel associadas à medida μ (NEVAI, 1986). Estas funções apresentam boas propriedades, como a monotonicidade com relação à medida, e possuem um comportamento assintótico muito bem conhecido (MáTé; NEVAI; TOTIK, 1991). Utilizando técnicas de localização associadas às funções de Christoffel e aproximando os núcleos reprodutores da medida inicial, utilizamos o Limite de Universalidade provado por Kuijlaars e Vanlessen (2002) para obter a universalidade para medidas Stahl-Totik regulares.

No capítulo 2 apresentamos brevemente algumas ferramentas, definições e notações a respeito de polinômios ortogonais que serão utilizadas ao longo do texto. Além disso, vamos definir regularidade no sentido de Stahl & Totik e apresentar um critério para verificar a regularidade, neste mesmo sentido, de uma medida no intervalo $[-1,1]$. No capítulo 3, abordaremos a conexão entre universalidade e polinômios ortogonais. Esta ponte se dará através da distribuição de probabilidade de processos pontuais determinantes, cuja distribuição é dada por núcleos reprodutores de polinômios ortogonais. Este é o caso do modelo Gaussiano Unitário de matrizes aleatórias, que será apresentado também neste capítulo com algumas demonstrações que consideramos relevantes para o bom entendimento da conexão entre ambos conceitos. No Capítulo 4, apresentamos e demonstramos o Limite de Universalidade provado por Lubinsky em 2009.

CAPÍTULO

2

PRELÚDIO

Este capítulo introdutório traz conceitos que serão utilizados posteriormente. Apresentaremos tais conceitos de forma sucinta e exploraremos algumas propriedades relacionadas. Ignorar este capítulo certamente não deverá comprometer o entendimento das demonstrações dos resultados principais apresentados por Lubinsky (2009), no entanto, é recomendado a sua leitura para que se tenha uma boa compreensão dos teoremas, entender a generalidade das medidas Stahl-Totik regulares e o contexto do limite de universalidade Vamos estabelecer a notação que será utilizada no decorrer do texto e explorar alguns exemplos. No que diz respeito as medidas regulares no sentido de Sathl e Totik utilizaremos a referência (STAHL; TOTIK, 1992). O conceito requer conhecimentos da teoria potencial que não será amplamente explorada aqui, uma vez que foge do escopo principal da dissertação, mas que pode ser encontrada na referência (SAFF; TOTIK, 1997).

2.1 Polinômios Ortogonais e núcleo de reprodução

Nesta sucinta seção apresentaremos parte do contexto em que trabalharemos, no caso da obtenção do limite de Universalidade, relacionando uma medida Boreliana à uma classe de Espaços de Hilbert de Reprodução (EHR).

Dada uma medida Boreliana finita μ em $\mathbb{R}$ podemos definir uma sequência de polinômios

$$p_n(x) = \gamma_n x^n + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

com o coeficiente líder $\gamma_n > 0$ e satisfazendo a condição de ortonormalidade

$$\int_{-1}^{1} p_n p_m d\mu = \delta_{n,m},$$

onde $\delta_{n,m}$ representa o delta de Kronecker (veja (TOTIK, 2005, p.73)). Na maior parte do texto vamos considerar μ uma medida Boreliana finita em $\mathbb{R}$ e com *suporte compacto*. O **suporte** de

uma medida μ (veja (FOLLAND, 1999, p. 215)) é definido como o menor fechado $F \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\mu(X \setminus F) = 0,$$

e o denotaremos por $S(\mu)$. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, definimos

$$K_n(x,y) := \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(y), \quad x,y \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

o n-ésimo **núcleo de Christoffel-Darboux**. Se a medida μ for absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue e ω for sua derivada de Radon-Nikodym (FOLLAND, 1999, p.89), então

$$d\mu(x) = \omega(x)dx,$$

e definimos o núcleo de Christoffel-Darboux normalizado por

$$\tilde{K}_n(x,y) := \sqrt{\omega(x)}\sqrt{\omega(y)} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(y), \quad x,y \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2.2}$$

A função definida em (2.1) é um *núcleo positivo definido*, ou seja, satisfaz a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i \bar{c}_j K(x_i, x_j) \geq 0,$$

para todo inteiro $n \geq 2$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{R}$. Para um núcleo $K : X \times X \to \mathbb{R}$ positivo definido e simétrico existe um único espaço de Hilbert de funções definidas em X a valores reais, que denotaremos por

$$\mathscr{H}_K := (\mathscr{H}_K(X), \langle \cdot, \cdot \rangle_K),$$

onde

$$\mathscr{H}_K = \overline{\operatorname{span}\{K(x, \cdot) : x \in \mathbb{R}\}}.$$

Tal espaço é dito ser o **espaço de Hilbert de Reprodução** (EHR) gerado pelo núcleo K. Neste caso, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_K : \mathscr{H}_K \times \mathscr{H}_K \to \mathbb{R}$ do EHR satisfaz:

R1. A função $K(x, \cdot)$ pertence a $\mathscr{H}_K$, $x \in \mathbb{R}$;

R2. (Propriedade de reprodução): $f(x) = \langle f, K(x, \cdot) \rangle_K$, $f \in \mathscr{H}_K$ e $x \in \mathbb{R}$.

Adicionalmente, o funcional linear

$$I_x(f) := f(x), \quad \forall f \in \mathscr{H}_K$$

é contínuo para todo $x \in \mathbb{R}$. O Teorema de Representação de Riesz permite-nos concluir que

$$f(x) = \langle f, K(x, \cdot) \rangle_K, \quad x \in X, \quad f \in \mathscr{H}_K.$$

Mais detalhes sobre EHRs e aplicações podem ser encontrados nas referências clássicas (ARONSZAJN, 1950; SAITOH, 1988).

Retornando ao contexto do início desta seção, vamos chamar o núcleo definido em (2.1) de núcleo reprodutor associado a μ ou simplesmente **núcleo reprodutor** quando a medida estiver claramente subentendida. Lembrando que K_n, $n = 1, 2 \ldots$, é um núcleo positivo definido e simétrico, o único EHR $\mathscr{H}_n$ gerado por K_n, é caracterizado por

$$\mathscr{H}_n = \overline{\operatorname{span}\{K_n(x,\cdot) : x \in [-1,1]\}} = \left\{ p = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k : \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \ldots \right\},$$

munido do produto interno dado por

$$\langle p, q \rangle_n := \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \beta_k, \quad p, q \in \mathscr{H}_n$$

com

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k \quad \text{e} \quad q = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k \in \mathscr{H}_n.$$

A norma induzida pelo produto interno acima será denotada por $\|\cdot\|_\mu$.

2.2 Regularidade no sentindo de Stahl e Totik

Como já comentado, a enorme contribuição de Lubinsky (2009) foi provar o limite de universalidade para uma grande família de medidas. Nesta seção apresentaremos esta classe e exploraremos algumas propriedades e exemplos. A principal referência aqui será o livro de Stahl e Totik (1992), onde eles fundamentam toda a teoria respeito das *medidas Stahl-Totik regulares*.

Dada uma medida μ Boreliana, finita e com suporte $S(\mu)$ compacto em $\mathbb{R}$ podemos definir uma sequência de polinômios ortonormais $\{p_n\}$, com relação a medida μ. Recordando a notação introduzida anteriormente, se γ_n denota o coeficiente líder de p_n, $n = 0, 1, \ldots$, então dizemos que a sequência $\{p_n\}$ tem comportamento assintótico da n-ésima raiz **regular** se vale a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^{1/n} = \frac{1}{\operatorname{cap}(S(\mu))}, \tag{2.3}$$

onde $\operatorname{cap}(S(\mu))$ representa a *capacidade logarítmica* de $S(\mu)$. A **capacidade logarítmica** definida para um subconjunto compacto $C \subset \mathbb{R}$, é dada por

$$\operatorname{cap}(C) := \mathrm{e}^{-V_C},$$

onde

$$V_C = \inf\left\{ \int_C \int_C \log \frac{1}{|z-t|} d\nu(z) d\nu(t) : \nu \text{ é uma medida de probabilidade em } C \right\}. \tag{2.4}$$

Observamos que o ínfimo na equação acima é atingido, veja (RANSFORD; SERIES; BRUCE, 1995, Teorema 3.3.2). Dizemos que a medida μ é uma **medida Stahl-Totik regular** se a sequência de polinômios ortonormais associados tem comportamento assintótico da n-ésima raiz regular, conforme a equação (2.3).

A classe de medidas regulares inclui uma grande família de medidas importantes em aplicações. Como veremos, pelo critério de Erdös-Turán, os polinômios ortogonais associados a medidas Stahl-Totik regulares generalizam o conceito de polinômios ortogonais clássicos como, por exemplo, os **polinômios de Jacobi** (veja (SZEGő, 1975)).

Calcular a capacidade logarítmica de um conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}$ não é uma tarefa simples, existem alguns exemplos canônicos (mas não necessariamente fáceis), como o caso que será de nosso interesse no próximo capítulo, o intervalo $[-1,1]$. Observamos que o exemplo a ser apresentado é fundamental para a definição de medida Stahl-Totik regular como a utilizada na principal referência (LUBINSKY, 2009). Mas antes reforçaremos e traremos alguns conceitos que utilizaremos.

Sabemos que, pelo Teorema de Representação de Riesz (RUDIN, 1987, p.130), o dual de $C([-1,1])$ (espaço das funções contínuas em $[-1,1]$) é o espaço $\mathscr{M}$ das medidas finitas em $[-1,1]$. Dizemos que uma sequência $\{\mu_n\}$ de $\mathscr{M}$ converge para para $\mu \in \mathscr{M}$ na **topologia fraca-*** (BREZIS, 2011, p. 62) se para toda $f \in C([-1,1])$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Precisaremos de dois teoremas da Teoria do Potencial.

Teorema 2.2.1 (Teorema da Seleção de Helly, (SAFF; TOTIK, 1997))**.** Se $\{\mu_n\}$ é uma sequência de medidas positivas em um conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ tal que $\mu_n(K) < \infty$ para todo $n = 1,2,\ldots$, então existe uma subsequência que converge fraco-*.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Frostman, (RANSFORD; SERIES; BRUCE, 1995))**.** Se $K \subset \mathbb{C}$ é um subconjunto compacto e ν é uma medida em K tal que

$$\int_K \int_K \log \frac{1}{|z-t|} d\nu(z) d\nu(t) = \inf \left\{ \int_K \int_K \log \frac{1}{|z-t|} d\mu(z) d\mu(t) : \mu(K) = 1 \right\},$$

então

$$\int_K \log \frac{1}{|z-t|} d\nu(t) \leq \int_K \int_K \log \frac{1}{|z-t|} d\nu(z) d\nu(t) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Vamos utilizar também o fato de que os polinômios mônicos de Chebyshev do primeiro tipo T_n (SZEGő, 1975, p. 29), $n = 0,1,\ldots$, são dois a dois ortogonais com relação ao peso

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Adicionalmente, a sequência $\{T_n\}$ resolve o seguinte problema de minimização (SAFF, 2010; RIVLIN, 1990, p. 175; p. 67),

$$t_n = \min_{p \in \mathscr{P}_{n-1}} \|x^n + p(x)\|_\infty, \tag{2.5}$$

aqui $\mathscr{P}_{n-1}$ é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $n-1$ definidos em $[-1,1]$ e $t_n = 2^{1-n}$, para $n = 1,2,\ldots$. A notação $\|\cdot\|_\infty$ representa a norma do supremo (máximo) em $C([-1,1])$. Neste contexto, a constante de Chebyshev do intervalo $[-1,1]$ é dada por

$$\operatorname{cheb}([-1,1]) := \lim_{n\to\infty} t_n^{1/n} = 1/2.$$

Mostraremos que $\operatorname{cap}([-1,1]) = \operatorname{cheb}([-1,1])$ e, como consequência, teremos

$$\operatorname{cap}([-1,1]) = 1/2.$$

Para tanto a seguinte proposição será importante:

Proposição 2.2.1. Vale a igualdade

$$\operatorname{cap}([-1,1]) = \lim_{n\to\infty} \left(\max_{x_1,\ldots,x_n \in [-1,1]} \prod_{i=1}^{n} \prod_{i<j}^{n} |x_i - x_j| \right)^{2/n(n-1)}.$$

Demonstração. Para provar a proposição, mostremos inicialmente que a sequência no enunciado

$$\delta_n := \left(\max_{x_1,\ldots,x_n \in [-1,1]} \prod_{i=1}^{n} \prod_{i<j}^{n} |x_i - x_j| \right)^{2/n(n-1)}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2.6}$$

é convergente.

Como $\prod_{i=1}^{n} \prod_{i<j}^{n} |x-y|$ é uma função contínua em qualquer $x,y \in [-1,1]$, podemos definir $\mathscr{F}_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ como o conjunto dos pontos de $[-1,1]$ em que o máximo em (2.6) é atingido. Definindo

$$\mathscr{E}_n := \min_{x_1,\ldots,x_n \in [-1,1]} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j}^{n} \log \frac{1}{|x_i - x_j|}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2.7}$$

temos,

$$\mathscr{E}_n = \frac{n(n-1)}{2} \log \frac{1}{\delta_n}, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{2.8}$$

Logo, $\mathscr{F}_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ é o conjunto dos pontos de $[-1,1]$ em que o máximo em (2.7) é atingido. Para cada $k = 1,2,\ldots,n$ podemos escrever

$$\mathscr{E}_n = \sum_{i\neq k}^{n} \log \frac{1}{|x_i^{(n)} - x_k^{(n)}|} + \sum_{i\neq k}^{n} \sum_{\substack{i<j \\ j\neq k}}^{n} \log \frac{1}{|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}|}.$$

Como os pontos de $\mathscr{F}_n$ são escolhidos dois a dois sem repetição,

$$\#\mathscr{F}_n = \binom{n}{2} = n(n-1)/2,$$

o segundo somatório acima tem $(n-1)(n-2)/2$ parcelas. Logo, pela definição de $\mathscr{E}_n$, temos

$$\mathscr{E}_n \geq \sum_{i\neq k}^{n} \log \frac{1}{|x_i^{(n)} - x_k^{(n)}|} + \mathscr{E}_{n-1}.$$

Manipulando algebricamente a soma de $k = 1,2,3\ldots,n$ da desigualdade acima, obtemos

$$\frac{\mathscr{E}_n}{n(n-1)} \geq \frac{\mathscr{E}_{n-1}}{(n-1)(n-2)}, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{2.9}$$

Por (2.8) e (2.9) concluímos que

$$0 \leq \delta_{n+1} \leq \delta_n. \tag{2.10}$$

Portanto, existe o limite

$$\tau := \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \left(\max_{x_1,\ldots,x_n\in[-1,1]} \prod_{i=1}^{n}\prod_{i<j}^{n} |x_i - x_j| \right)^{2/n(n-1)}. \tag{2.11}$$

Agora, consideremos a definição dada em (2.4):

$$V := V_{[-1,1]} = \inf_{\nu\in\mathscr{M}_1} \left\{ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \log \frac{1}{|z-t|} d\nu(z)d\nu(t) \right\}, \tag{2.12}$$

onde $\mathscr{M}_1$ representa o espaço das probabilidades de $[-1,1]$. Mostraremos que

$$V = \log \frac{1}{\operatorname{cap}([-1,1])} \geq \log \frac{1}{\tau}. \tag{2.13}$$

Seja $\mu \in \mathscr{M}_1$ a medida de probablidade onde o ínfimo em (2.12) é atingido. Pela definição de V, conforme equação (2.12),

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}^{n} \log \frac{1}{|x_i - x_j|} d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_k) = \frac{n(n+1)}{2}V.$$

Pela definição da sequência $\{\mathscr{E}_n\}$, conforme a equação (2.7) e pela igualdade acima, temos

$$\frac{n(n+1)}{2}V \geq \int_{-1}^{1} \mathscr{E}_n d^n\mu = \frac{n(n-1)}{2} \log \frac{1}{\delta_n},$$

onde a última igualdade se dá pela equação (2.8) e pelo fato de μ ser uma medida de probablidade. Logo,

$$V \geq \log 1/\delta_n$$

e, fazendo $n \to \infty$, obtemos a desigualdade (2.13).

Mostremos agora a desigualdade contrária de (2.13). Lembrando, $\mathscr{F}_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ é o conjunto dos pontos em que o mínimo em (2.7) é atingido. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, considere ν_n a soma normalizada das medidas de Dirac dos pontos de $\mathscr{F}_n$ ((FOLLAND, 1999) p. 25), ou seja,

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{x_i^{(n)}}.$$

Como ν_n é uma medida de probabilidade em $[-1,1]$, para todo $n = 1, 2, \ldots$, pelo Teorema de Seleção de Helly (Teorema 2.2.1), $\{\nu_n\}$ possui uma subsequência que converge fraco-* para uma probabilidade $\tilde{\mu}$ em $[-1,1]$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\nu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\mu}$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f d\nu_n = \int_{-1}^{1} f d\tilde{\mu}, \quad f \in C([-1,1]).$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona (FOLLAND, 1999, p.50) e pela convergência acima mencionada,

$$\begin{aligned} I(\tilde{\mu}) &:= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \log\frac{1}{|x-t|} d\tilde{\mu}(x) d\tilde{\mu}(t) \\ &= \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \min\left\{M, \log\frac{1}{|x-t|}\right\} d\nu_n(x) d\nu_n(t). \end{aligned}$$

Logo, podemos estimar $I(\tilde{\mu})$ como a seguir:

$$\begin{aligned} I(\tilde{\mu}) &= \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \log\frac{1}{|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}|} \\ &\leq \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\mathscr{E}_n + nM}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \log\frac{1}{\delta_n}. \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade acima combinada a (2.13) implica

$$V \leq I(\tilde{\mu}) \leq \lim_{n\to\infty} \log\frac{1}{\delta_n} = \log\frac{1}{\tau} \leq V,$$

de onde segue que $\tau = \mathrm{e}^{-V} = \mathrm{cap}([-1,1])$. □

Corolário 2.2.1. Temos

$$\mathrm{cheb}([-1,1]) = \mathrm{cap}([-1,1]) = 1/2.$$

Demonstração. Nas notações do enunciado e da prova da proposição anterior, vejamos que $\mathrm{cheb}([-1,1]) \leq \tau$. Relembrando que $\mathscr{F}_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ é o conjunto dos pontos em que o mínimo na equação (2.7) é atingido, temos

$$\begin{aligned} (\delta_{n+1})^{n(n+1)/2} &= \max_{x_1,\ldots,x_n\in[-1,1]} \prod_{i=1}^{n}\prod_{i<j}^{n} |x_i - x_j| \\ &\geq \prod_{k=1}^{n} |x - x_k^{(n)}| (\delta_n)^{n(n-1)/2} \\ &= |F(x)| (\delta_n)^{n(n-1)/2}, \end{aligned}$$

para $x \in [-1,1]$, onde $F(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k^{(n)})$. Tomando a norma em $C([-1,1])$ de F acima, seguida da raiz n-ésima em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\frac{(\delta_{n+1})^{(n+1)/2}}{(\delta_n)^{(n-1)/2}} = \left(\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right)^{n/2} (\delta_{n+1}\delta_n)^{1/2} \geq \|F\|_\infty^{1/n}.$$

Como a sequência $\{\delta_n\}$ (veja (2.10)) é decrescente, concluímos que

$$(\delta_{n+1}\delta_n)^{1/2} \geq \|F\|_\infty^{1/n}. \tag{2.14}$$

Uma vez que

$$\text{cheb}([-1,1]) = \lim_{n\to\infty} t_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}-1} = \inf_n t_n^{1/n}, \tag{2.15}$$

pela definição da sequência $\{t_n\}$ (equação (2.5)), e pela igualdade acima, obtemos

$$\|q\|_\infty \geq \text{cheb}([-1,1])^n,$$

para qualquer polinômio q mônico de grau n. Como F é polinômio mônico de grau n, segue que

$$(\delta_{n+1}\delta_n)^{1/2} \geq \|F\|_\infty^{1/n} \geq \text{cheb}([-1,1]),$$

onde a desigualdade à direita segue da equação (2.14). De acordo com a equação (2.11), fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, temos

$$\text{cap}([-1,1]) = \tau \geq \text{cheb}([-1,1]).$$

Para a desigualdade contrária, sejam $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$ os zeros do n-ésimo polinômio de Chebyshev, T_n, e seja

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a_k^{(n)}}.$$

onde $\delta_{a_k^{(n)}}$ é a medida de Dirac concentrada em $a_k^{(n)}$ para todo $k = 1,2,\ldots$. Pelo Teorema de Frostman (Teorema 2.2.2),

$$\int \log\frac{1}{|x-t|} d\mu(t) \leq V,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde μ é a probabilidade em que o ínfimo em (2.12) é atingido. Pelo Teorema de Fubini ((FOLLAND, 1999, p. 67)) e pela desigualdade acima, temos a estimativa

$$\begin{aligned}\inf_{x\in[-1,1]} \int \log\frac{1}{|x-t|} d\nu_n(t) &\leq \int\int \log\frac{1}{|x-t|} d\nu_n(t) d\tilde{\mu}(x) \\ &= \int\int \log\frac{1}{|x-t|} d\tilde{\mu}(x) d\nu_n(t) \leq V. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Contudo,

$$\inf_{x\in[-1,1]} \int \log \frac{1}{|x-t|} d\nu_n(t) = \inf_{x\in[-1,1]} \frac{1}{n} \log \frac{1}{|T_n(x)|} = \frac{1}{n} \log \frac{1}{t_n}, \tag{2.17}$$

e substituindo (2.17) em (2.16), obtemos

$$t_n^{1/n} \geq \mathrm{e}^{-V} = \mathrm{cap}([-1,1]) = \tau.$$

Tomando $n \to \infty$ acima, concluímos que $\mathrm{cheb}([-1,1]) \geq \mathrm{cap}([-1,1])$. Isso mostra que

$$\mathrm{cap}([-1,1]) = \frac{1}{2},$$

o que finaliza a prova do corolário. □

Vimos que a regularidade de uma medida é uma propriedade que está ligada diretamente com o seu suporte e, no caso de nosso interesse, a regularidade de medidas suportadas em $[-1,1]$ são caracterizadas também pelo último resultado. Vimos que calcular a capacidade não é uma tarefa simples até mesmo em casos canônicos. Em particular, no Teorema 4.1.2 do capítulo 4 precisaremos verificar a regularidade de uma medida suportada em $[-1,1]$ e para isso vamos recorrer a um dos critérios de regularidade apresentado no livro de Stahl e Totik (1992), o critério de Erdös-Turán.

Teorema 2.2.3 ((STAHL; TOTIK, 1992))**.** Se $S(\mu) = [-1,1]$, então

$$\frac{d\mu(x)}{dx} > 0 \quad \text{quase sempre em } [-1,1]$$

implica na regularidade no sentido de Stahl-Totik da medida.

Para mais detalhes sobre este resultado, o artigo original de Erdös e Turán é (ERDöS; TURáN, 1940).

CAPÍTULO

3

PROCESSO PONTUAL DETERMINANTE E MATRIZES ALEATÓRIAS

O que universalidade e polinômios ortogonais têm em comum? Lubinsky (2009) utiliza técnicas da teoria de polinômios ortogonais para obter um limite de universalidade, mas qual a relação entre esses dois assuntos? Como e por que o encontro de dois objetos que, a princípio parecem não se relacionar, gerou um resultado tão relevante? Nesta seção vamos explorar um pouco desta conexão e buscar responder as questões levantadas. Em poucas palavras, veremos que o núcleo reprodutor (2.1) de polinômios ortogonais define um *processo pontual determinante* e, como exemplo, veremos uma classe de matrizes aleatórias que define um processo pontual determinante.

Vamos começar o capítulo com as matrizes aleatórias como exemplo de processo pontual determinante para depois definir e mostrar sua relação com polinômios ortogonais. A principal referência para matrizes aleatórias e polinômios ortogonais é o livro de autoria de Deift (1999). Para processo pontual determinante, Baik, Deift e Suidan (2016) fazem uma abordagem geral, e além disso, uma boa ideia deste objeto pode ser obtida nas notas de aula de Ferrari (2020).

Antes de entrarmos na discussão principal deste capítulo, vamos recapitular alguns conceitos de probabilidade que podem ser encontrados com mais detalhes no livro de Durrett (1996).

Seja $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que uma função real X definida em Ω é uma **variável aleatória** em $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ se X é uma função mensurável, isto é, $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ para todo conjunto boreliano $B \subset \mathbb{R}$. Uma variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{R}$ induz uma medida de probabilidade μ em $\mathbb{R}$ chamada **distribuição** de X dada por

$$\mu(B) = P(X^{-1}(B))$$

para todo boreliano $B \subset \mathbb{R}$. Alguns livros de probabilidade costumam denotar $P(X^{-1}(B))$ por

$P(X \in B)$ e $\mu = PX^{-1}$. Em alguns casos existe uma função $f \geq 0$ tal que

$$\mu(B) = \int_B f(x)dx$$

para todo boreliano $B \subset \mathbb{R}$. Nesses casos, chamamos a função f de **função densidade de probabilidade** de X (em análise costumamos chamar f de derivada de Radon-Nikodym, no entanto, são dois objetos diferentes, nem toda derivada de Radon-Nikodym é uma densidade de probabilidade). Por exemplo, uma variável aleatória com **distribuição normal padrão** tem densidade de probabilidade $f(x) = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ com $x \in \mathbb{R}$.

O **valor esperado** de uma variável aleatória X em $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ é definido por

$$\mathbb{E}[X] = \int X dP.$$

Pelo Teorema da mudança de variáveis que pode ser encontrado no livro de Durrett (1996), podemos escrever o valor esperado de X como

$$\mathbb{E}[X] = \int x d\mu(x).$$

Além disso, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\int g(x)dx < \infty$, temos pelo mesmo teorema,

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(X(\omega))dP(\omega) = \int g(x)d\mu(x).$$

Por último, o conceito de *indepêndencia* de variáveis aleatórias. Dizemos que duas variáveis aleatórias X, Y no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ são **independentes** quando

$$P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A))P(Y^{-1}(B))$$

para todos borelianos $A, B \subset \mathbb{R}$. A definição de independência entre $n = 1, 2, \ldots$ variáveis aleatórias é definida de maneira análoga. Uma condição suficiente para independência de $n = 1, 2, \ldots$ variáveis aleatórias, $X_1, \ldots, X_n$ com densidade de probablidade $f(x_1, \ldots, x_n)$ é que $f(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n)$ onde cada g_j, $j = 1, \ldots, n$ é não-negativa e mensurável.

3.1 O Ensemble Unitário (UE)

Seja $\mathbb{H}_n$ o espaço das matrizes hermitianas de ordem $n = 1, 2, \ldots$. Como $\mathbb{H}_n \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ e toda $M \in \mathbb{H}_n$ é tal que $M = M^*$, a medida dM induz uma medida de Lebesgue n^2-dimensional,

$$dM = \prod_{i=1}^{n} dM_{ii} \prod_{i<j}^{n} dM_{ij}^R dM_{ij}^I,$$

onde $M_{ij} = M_{ij}^R + \mathrm{i}M_{ij}^I$ e M_{ij}^R, M_{ij}^I são as partes real e imaginária, respectivamente. Como medidas de Lebesgue são invariantes por rotação, para toda matriz U unitária teremos

$$dM = d(UMU^*), \quad M \in \mathbb{H}_n. \tag{3.1}$$

O **Ensemble Unitário** (UE) é definido pela seguinte distribuição de probabilidade em $\mathbb{H}_n$:

$$P^{(n)}(M)dM = c \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(Q(M))}dM, \tag{3.2}$$

onde

$$Q(M) = \alpha_{2j}M^{2j} + \cdots + \alpha_0,$$

com $\alpha_{2j} > 0$, e c é a constante normalizadora tal que

$$c \cdot \int \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(Q(M))}dM = 1.$$

O Ensemble Unitário leva esse nome pois a distribuição (3.2) é invariante por transformações unitárias U. No caso particular em que

$$Q(M) = aM^2 + bM + c,$$

as n^2 entradas $\{M_{ii}, M_{ij}^R, M_{ij}^I\}$ são variáveis aleatórias independentes, com distribuição normal, a menos de uniformizações. De fato, para toda $M \in \mathbb{H}_n$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(Q(M))} &= \mathrm{e}^{-a\mathrm{tr}(M^2)-b\mathrm{tr}(M)-cn} \\
&= \mathrm{e}^{-a(\sum_i^n M_{ii}^2 + 2\sum_{i<j}^n((M_{ij}^R)^2+(M_{ij}^I)^2))}\mathrm{e}^{-b\sum_i^n M_{ii}}\mathrm{e}^{-cn} \\
&= \mathrm{e}^{-cn}\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-aM_{ii}^2-bM_{ii}}\prod_{i<j}^n \mathrm{e}^{-2a(M_{ij}^R)^2}\mathrm{e}^{-2a(M_{ij}^I)^2}.
\end{aligned}$$

Assim, a distribuição (3.2) pode ser escrita como

$$P^{(n)}(M)dM = \mathrm{e}^{-cn}\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-aM_{ii}^2-bM_{ii}}\prod_{i<j}^n \mathrm{e}^{-2a(M_{ij}^R)^2}\mathrm{e}^{-2a(M_{ij}^I)^2}dM_{ij}^R dM_{ij}^I. \tag{3.3}$$

Como a distribuição (3.2) é invariante por conjugação unitária, podemos fazer uma mudança de variáveis a fim de encontrar uma fórmula melhor para (3.2). Se U é a matriz unitária que diagonaliza M, considere a mudança de variável

$$M \mapsto \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), U\},$$

onde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ são os n autovalores reais de M. Para o cálculo do Jacobiano desta mudança de variáveis veja (DEIFT, 1999, p.94-99). Resumidamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1. A distribuição definida em (3.2) pode ser escrita como

$$P^{(n)}(M)dM = \frac{1}{Z_n} \cdot \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n Q(\lambda_i)}\prod_{i=1}^n\prod_{i<j}^n(\lambda_i - \lambda_j)^2 d^n\lambda, \tag{3.4}$$

onde Z_n é a constante de normalização e $Q(x) = \alpha_{2j}x^{2j} + \cdots + \alpha_0$ em $\mathbb{R}$ com $\alpha_{2j} > 0$.

Na fórmula acima, o determinante de Vandermonde

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{i<j}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)^2,$$

mostra que a probabilidade dos autovalores de elementos de $\mathbb{H}_n$ estarem *muito* próximos é pequena, uma vez que o determinante acima fica pequeno em regiões Além disso, podemos dizer que o UE é uma coleção de n pontos aleatórios em $\mathbb{R}$ (os n autovalores reais de M). Tendo isso em mente, é interessante obter estatísticas para estes autovalores como, por exemplo, a probabilidade de encontrar autovalores em subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$. Essas quantidades podem ser obtidas em termos das **funções de correlação** definidas a seguir no contexto do UE.

Definição 3.1.1 ((BAIK; DEIFT; SUIDAN, 2016))**.** A **k-ésima função de correlação** é definida por

$$R_k(x_1,\dots,x_k)=\frac{n!}{(n-k)!}\int_{\mathbb{R}^{n-k}}P^{(n)}(x_1,\dots,x_k,\lambda_{k+1},\dots,\lambda_n)d\lambda_{k+1}\cdots d\lambda_n, \tag{3.5}$$

para $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{R}$.

Uma das estatísticas a respeito dos autovalores de matrizes no UE que podem ser obtidas pela função de correlação é o *valor esperado* de k-uplas em algum intervalo da reta. Mais estatísticas são detalhadas por Deift (1999), Baik, Deift e Suidan (2016).

Lema 3.1.1 ((BAIK; DEIFT; SUIDAN, 2016))**.** Seja I um subonjunto mensurável de $\mathbb{R}$. Então,

$$\int_{I^k}R_k(x_1,\dots,x_k)dx_1\cdots dx_k=\mathbb{E}[\{\#\text{ de }k\text{-uplas de autovalores em }I\}]. \tag{3.6}$$

Em particular,

$$\int_I R_1(x_1)dx_1=\mathbb{E}[\{\#\text{ de autovalores em }I\}]. \tag{3.7}$$

Aqui as k-uplas são ordenadas, por exemplo, no caso $k=2$, se os autovalores λ_i e λ_j estão em I, então os pares ordenados (λ_i,λ_j) e (λ_j,λ_i) são contados em (3.6).

Demonstração. O valor esperado de encontrar k-uplas de autovalores em I é dado por

$$\mathbb{E}\left[\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in T_k}\prod_{j=1}^{k}\chi_I(\lambda_{i_j})\right]=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in T_k}\prod_{j=1}^{k}\chi_I(\lambda_{i_j})P^{(n)}(\lambda)d^n\lambda,$$

onde $T_k=\{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,n\}^k : i_1,\dots,i_k \text{ são distintos}\}$ e χ_I é a função característica de I ($\chi_I(x)=1$ se $x\in I$ e $\chi_I(x)=0$ caso contrário). Como estamos escolhendo k indíces diferentes de 1 a n contando como k-uplas ordenadas, temos $\#T_k=n!/(n-k)!$. Logo, como $P^{(n)}$ é uma

função simétrica, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in T_k}\prod_{j=1}^{k}\chi_I(\lambda_{i_j})\right] &= \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in T_k}\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\chi_I(\lambda_{i_j})P^{(n)}(\lambda)d^n\lambda \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\chi_I(\lambda_{i_j})P^{(n)}(\lambda)d^n\lambda \\ &= \int_{I^k}R_k(x_1,\cdots,x_k)dx_1\dots dx_k. \qquad \square\end{aligned}$$

A seguir vamos escrever a distribuição (3.4) e a função de correlação em termos do núcleo reprodutor associado aos polinômios de Hermite, ou seja, os polinômios ortogonais associados ao peso $\omega(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Antes disso, precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.1.2. Se $\tilde{K}_n$ é um núcleo reprodutor normalizado como definido em (2.2), então

$$\int_{\mathbb{R}}\tilde{K}_n(x,x)dx = n, \quad n = 1,2,3\dots \tag{3.8}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^{n-(k+1)}}\det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{n}dx_{k+1}\cdots dx_n = (n-k)!\det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{k}, \tag{3.9}$$

para $k = 0,1,\dots,n-1$ e $x_1,\dots,x_j \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Vamos começar por (3.8). Para todo n, temos

$$\int_{\mathbb{R}}\tilde{K}_n(x,x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\mathbb{R}}p_i(x)^2\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\|p_i\|^2 = n.$$

Para provar (3.9) vamos denotar $\tilde{K}_n(x_i,x_j)$ por K_{ij} e prosseguir por indução em k. O determinante de $[K_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\det[K_{ij}]_{i,j=1}^{n} &= \sum_{l=1}^{n}(-1)^{n+l}K_{nl}\det[K_{ij}]_{i\neq n,j\neq l}^{n-1} \\ &= K_{nn}\det[K_{ij}]_{i,j\neq n}^{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{n+l}K_{nl}\det[K_{ij}]_{i\neq n,j\neq l}^{n-1}, \quad n = 1,2,3\dots.\end{aligned}$$

Se $k = n-1$, então

$$\int_{\mathbb{R}}\det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{n}dx_n = \det[K_{ij}]_{i,j\neq n}^{n-1}\int_{\mathbb{R}}K_{nn}dx_n + \int_{\mathbb{R}}\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{n+l}K_{nl}\det[K_{ij}]_{\substack{i\neq n\\ j\neq l}}^{n-1}dx_n.$$

Por (3.8),

$$\int_{\mathbb{R}}\det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{n}dx_n = n\det[K_{ij}]_{i,j\neq n}^{n-1} + \int_{\mathbb{R}}\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{n+l}K_{nl}\det[K_{ij}]_{\substack{i\neq n\\ j\neq l}}^{n-1}dx_n. \tag{3.10}$$

Para a segunda parcela da soma usaremos a propriedade reprodutora de $\tilde{K}_n$. Temos,

$$K_{nl}\det[K_{ij}]_{i\neq n, j\neq l}^{n-1} = \det\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} & K_{nl} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} & K_{nl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{(n-1)1} & K_{(n-1)2} & \cdots & K_{(n-1)n} & K_{nl} \end{bmatrix}.$$

Pela propriedade reprodutora,

$$\int_{\mathbb{R}} K_{nl}\det[K_{ij}]_{\substack{i\neq n\\ j\neq l}}^{n-1} dx_n = \det\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} & K_{1l} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} & K_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{(n-1)1} & K_{(n-1)2} & \cdots & K_{(n-1)n} & K_{(n-1)l} \end{bmatrix}.$$

Movendo a coluna l até a posição correta, temos

$$\int_{\mathbb{R}} K_{nl}\det[K_{ij}]_{\substack{i\neq n\\ j\neq l}}^{n-1} dx_n = (-1)^{n-1-l}\det[K_{ij}]_{i,j=1}^{n-1}. \tag{3.11}$$

Juntando (3.10) com (3.11), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{n} dx_n &= n\det[K_{ij}]_{i,j\neq n}^{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{n+l}\int_{\mathbb{R}} K_{nl}\det[K_{ij}]_{\substack{i\neq n\\ j\neq l}}^{n-1} dx_n \\ &= n\det[K_{ij}]_{i,j\neq n}^{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{n+l}(-1)^{n-1-l}\det[K_{ij}]_{i,j=1}^{n-1} \\ &= \det[K_{ij}]_{i,j=1}^{n-1}.\end{aligned}$$

Agora, assumindo que nossa hipótese vale para $1 \leq k \leq n-1$, isto é,

$$\int\cdots\int \det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{n} dx_{k+1}\cdots dx_n = (n-k)!\det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{k},$$

vamos provar que vale para $k-1$. Observamos que,

$$\begin{aligned}\int\cdots\int \det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{n} dx_k\cdots dx_n &= \int (n-k)!\det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{k} dx_k \\ &= (n-k)!\int \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k+l}K_{kl}\det[K_{ij}]_{\substack{i\neq k\\ j\neq l}} dx_k. \end{aligned}\tag{3.12}$$

De maneira análoga ao caso $k = n-1$,

$$\begin{aligned}&\int \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k+l}K_{kl}\det[K_{ij}]_{\substack{i\neq k\\ j\neq l}} dx_k \\ &= \int K_{kk}\det[K_{ij}]_{i,j\neq k} dx_k + \int \sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k+l}K_{kl}\det[K_{ij}]_{\substack{i\neq k\\ j\neq l}} dx_k \\ &= (n-(k-1))\det[K_{ij}]_{i,j\neq k}.\end{aligned}$$

Juntando a última igualdade com (3.12) temos (3.9). □

Proposição 3.1.1. Seja

$$\tilde{K}_n(x,y) = \sqrt{\mathrm{e}^{-Q(x)}}\sqrt{\mathrm{e}^{-Q(y)}}\sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)p_i(y), \quad x,y \in \mathbb{R}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

o núcleo reprodutor normalizado dos polinômios ortogonais com relação ao peso $\mathrm{e}^{-Q(x)}$, onde $Q(x) = \alpha_{2j}x^{2j} + \cdots + \alpha_0$ com $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{2j} > 0$. Então,

$$\frac{1}{n!}\det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n = \frac{1}{Z_n}\cdot \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n Q(x_i)}\prod_{i=1}^n\prod_{i<j}^n (x_i - x_j)^2, \quad n = 1,2,\ldots \tag{3.13}$$

onde $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ e Z_n é a constante de normalização.

Demonstração. Seja $\pi_j(x) = \gamma_j^{-1}p_j(x)$, onde $\gamma_j > 0$ é o coeficiente líder de $p_j(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e $j = 0,1,\ldots$. Então

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_i(x)\pi_j(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx = \frac{1}{\gamma_i\gamma_j}\delta_{ij}, \quad i,j = 0,1,\ldots.$$

Sabemos que o determinante da matriz de Vandermonde é dado por

$$\prod_{i=1}^n\prod_{i<j}^n (x_j - x_i) = \det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad x_i,x_j \in \mathbb{R} \quad n = 1,2,\ldots.$$

Se $\pi_j(x) = x^j + \sum_{k=0}^{j-1}\alpha_{jk}x^k$, $x \in \mathbb{R}$ e $j = 0,1,\ldots$, então fazendo operações elementares em cada coluna da matriz de Vandermonde, temos, para $x_i,x_j \in \mathbb{R}$ e $n = 1,2\ldots$,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n\prod_{i<j}^n (x_j - x_i) &= \det\begin{bmatrix} 1 & x_1+\alpha_{10} & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2+\alpha_{10} & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+\alpha_{10} & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} \pi_0(x_1) & \pi_1(x_1) & x_1^2+\alpha_{21}x_1+\alpha_{20} & \ldots & x_1^{n-1} \\ \pi_0(x_2) & \pi_1(x_2) & x_2^2+\alpha_{21}x_2+\alpha_{20} & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_0(x_n) & \pi_1(x_n) & x_n^2+\alpha_{21}x_n+\alpha_{20} & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} \pi_0(x_1) & \pi_1(x_1) & \pi_2(x_1) & \ldots & \pi_{n-1}(x_1) \\ \pi_0(x_2) & \pi_1(x_2) & \pi_2(x_2) & \ldots & \pi_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_0(x_n) & \pi_1(x_n) & \pi_2(x_n) & \ldots & \pi_{n-1}(x_n) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sucintamente,

$$\prod_{i=1}^n\prod_{i<j}^n (x_j - x_i) = \det[\pi_{j-1}(x_i)]_{i,j=1}^n, \quad x_i,x_j \in \mathbb{R} \quad n = 1,2,\ldots.$$

Multiplicando ambos os lados por $\prod_{i=1}^{n}\gamma_i\sqrt{\mathrm{e}^{-Q(x_i)}}$, $x_i\in\mathbb{R}$ e $n=1,2,\ldots$, e depois elevando ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\gamma_i^2\mathrm{e}^{-Q(x_i)}\prod_{i<j}^{n}(x_j-x_i)^2 &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{i<j}^{n}\left[\gamma_i\sqrt{\mathrm{e}^{-Q(x_i)}}(x_j-x_i)\right]^2\\ &= \left(\det\left[\sqrt{\mathrm{e}^{-Q(x_i)}}(\gamma_i\pi_{j-1}(x_i))\right]_{i,j=1}^{n}\right)^2\\ &= \left(\det\left[\sqrt{\mathrm{e}^{-Q(x_i)}}p_{j-1}(x_i)\right]_{i,j=1}^{n}\right)^2,\end{aligned}$$

para $x_i,x_j\in\mathbb{R}$ e $n=1,2,\ldots$. Se $A=\left[\sqrt{\mathrm{e}^{-Q(x_i)}}p_{i-1}(x_j)\right]_{i,j=1}^{n}$, com $x_i,x_j\in\mathbb{R}$ e $n=1,2,\ldots$, então

$$\begin{aligned}(\det A)^2 &= \det(AA^T)\\ &= \det\left[\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\mathrm{e}^{-Q(x_i)}}p_{k-1}(x_i)\sqrt{\mathrm{e}^{-Q(x_j)}}p_{k-1}(x_j)\right]_{i,j=1}^{n}\\ &= \det\left[\tilde{K}_n(x_i,x_j)\right]_{i,j=1}^{n}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\det\left[\tilde{K}_n(x_i,x_j)\right]_{i,j=1}^{n}=\left(\prod_{i=1}^{n}\gamma_i^2\right)\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}Q(x_i)}\prod_{i<j}^{n}(x_j-x_i)^2,\quad x_i,x_j\in[-1,1],\quad n=1,2\ldots. \tag{3.14}$$

Como,

$$\int_{\mathbb{H}_n}P^{(n)}(M)dM=\frac{1}{Z_n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}Q(x_i)}\prod_{i=1}^{n}\prod_{i<j}^{n}(x_i-x_j)^2d^nx=1,\quad n=1,2,\ldots,$$

então, por (3.9) e (3.14),

$$\begin{aligned}Z_n &= \left(\prod_{i=1}^{n}\gamma_i^{-2}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\det\left[\tilde{K}_n(x_i,x_j)\right]_{i,j=1}^{n}d^nx\\ &= n!\prod_{i=1}^{n}\gamma_i^{-2}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por (3.14) e (3.15) temos,

$$\frac{1}{Z_n}\cdot\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}Q(x_i)}\prod_{i=1}^{n}\prod_{i<j}^{n}(x_i-x_j)^2=\frac{1}{n!}\det\left[\tilde{K}_n(x_i,x_j)\right]_{i,j=1}^{n},$$

para $x_i,x_j\in\mathbb{R}$ e $n=1,2,\ldots$. □

Da proposição anterior segue direto que a distribuição do UE (3.2) é dada em termos do núcleo de reprodução dos polinômios ortogonais com relação ao peso $\mathrm{e}^{-Q(x)}$, isto é,

$$P^{(n)}(M)dM=\frac{1}{n!}\det[\tilde{K}_n(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{n}d^nx, \tag{3.16}$$

para $M \in \mathbb{H}_n$, $x_i, x_j \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \ldots$. Além disso, por (3.9) e (3.13), a função de correlação (3.5) é dada por

$$R_k(x_1, \ldots, x_k) = \det[\tilde{K}_n(x_i, x_j)]_{i,j=1}^k, \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n = 1, 2 \ldots. \tag{3.17}$$

3.2 Processo pontual determinante

A relação (3.17) entre a k-ésima função de correlação e o núcleo reprodutor K_n define um *processo pontual determinante*. Um **processo pontual** pode ser visto tanto como pontos distribuídos aleatoriamente em $\mathbb{R}$ quanto como a medida associada a esses pontos. Manteremos as mesmas notações e construções da seção acima.

Seja ξ uma medida em $\mathbb{R}$ tal que $\xi(B) < \infty$ para todo subconjunto mensurável e limitado $B \subset \mathbb{R}$ e seja $\mathscr{N}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas medidas desse tipo. Para cada uma dessas medidas ξ, podemos encontrar um conjunto de pontos $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\xi = \sum \delta_{x_i}$, onde δ_{x_i} é a medida de Dirac em x_i. Um **processo pontual** em $\mathbb{R}$ é um espaço de probabilidade

$$(\mathscr{N}(\mathbb{R}), \mathscr{F}_{\mathscr{N}(\mathbb{R})}, \mathbb{P}),$$

onde $\mathscr{F}_{\mathscr{N}(\mathbb{R})}$ é a menor σ-álgebra de $\mathscr{N}(\mathbb{R})$ que torna mensurável as funções $\xi \mapsto \xi(B)$, com $B \subset \mathbb{R}$ limitado e mensurável.

A definição de processo pontual dada acima pode ser encontrada em (BAIK; DEIFT; SUIDAN, 2016). Como dito anteriormente, um processo pontual pode ser entendido como um conjunto de pontos aleatórios em $\mathbb{R}$, o que pode ser visto em (FERRARI, 2020). Uma **configuração** de pontos $X = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ é dita **localmente finita** se

$$\#\{x_i \in B\} < \infty,$$

para todo subconjunto mensurável limitado $B \subset \mathbb{R}$. Seja Ω o conjunto de todas configurações localmente finitas. Assim, um processo pontual em $\mathbb{R}$ é um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ onde $\mathscr{F}$ é a menor σ-álgebra que torna mensurável as funções $X \mapsto \#\{X \cap B\} < \infty$, com $B \subset \mathbb{R}$ limitado e mensurável. Observe que essas funções (assim como as funções $\xi \mapsto \xi(B)$) são variáveis aleatórias que retorna o número de pontos do processo no conjunto B.

Da maneira como foi definido, um processo pontual permite a existência de uma configuração X que admita pontos repetidos. Dizemos que X (ou $\xi \in \mathscr{N}(\mathbb{R})$) é **simples** quando todos os pontos são distintos ($\xi(\{x\}) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Um processo pontual é **simples** quando $\mathbb{P}(X \text{ é simples}) = 1$. Dizemos que um processo pontual é um **processo pontual de n pontos** quando $\mathbb{P}(\#X = n) = 1$.

Uma densidade de probabilidade $P(x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ simétrica, isto é,

$$P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = P(x_1, \ldots, x_n),$$

para qualquer permutação σ de $\{1,\dots,n\}$, induz naturalmente um processo pontual de n pontos. Com isso em mente, podemos definir a k-ésima função de correlação para um processo pontual assim como na Definição 3.1.1,

$$R_k(x_1,\dots,x_k) = \frac{n!}{(n-k)!}\int_{\mathbb{R}^{n-k}} P(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)dx_{k+1}\cdots dx_n \tag{3.18}$$

com $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$. Quando $K : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz

$$R_k(x_1,\dots,x_k) = \det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^k,$$

para todo $x_i, x_j \in \mathbb{R}$, dizemos que o processo pontual associado a R_k é um **processo pontual determinante** com **núcleo de correlação** K. Logo, como vimos anteriormente em (3.17), o ensemble Gaussiano unitário é um processo pontual determinante.

No caso do GUE, o núcleo de correlação é um núcleo reprodutor associado aos polinômios de Hermite. O próximo teorema mostra que, na verdade, núcleos reprodutores de polinômios ortogonais arbitrários induzem processos pontuais determinantes.

Teorema 3.2.1. Suponha que $K : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um núcleo que satisfaz as seguintes condições:

a) $\int_{\mathbb{R}} K(x,x)dx = n$, $n = 1,2,\dots$;

b) $\det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n \geq 0$ para todos $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$;

c) K tem a propriedade reprodutora:

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}} K(x,t)K(t,y)dt, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$P(x_1,\dots,x_n) := \frac{1}{n!}\det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n, \quad x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}, \quad n = 1,2,\dots,$$

é uma densidade de probabilidade em $\mathbb{R}^n$ simétrica e consequentemente induz um processo pontual determinante em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiramente, usando as hipóteses a) e c) obtemos de maneira análoga a demonstração do Lema 3.1.2

$$\int_{\mathbb{R}^{n-(k+1)}} \det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n dx_{k+1}\cdots dx_n = (n-k)!\det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^k,$$

para $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}$. Logo, a k-ésima função de correlação associada ao processo pontual definido pela densidade P é dada por

$$\begin{aligned} R_k(x_1,\dots,x_k) &= \frac{n!}{(n-k)!}\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \frac{1}{n!}\det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n dx_{k+1}\cdots dx_n \\ &= \det[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^k. \end{aligned}$$

Por definição, o processo pontual P induz um processo pontual determinante. Aqui, a hipótese b) se faz necessária, já que a densidade de probabilidade é uma função não-negativa. □

O **limite de universalidade** para as m-ésimas funções de correlação é dado por

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tilde{K}_n(x,x)^m} R_m\left(x+\frac{\xi_1}{\tilde{K}_n(x,x)},\ldots,x+\frac{\xi_m}{\tilde{K}_n(x,x)}\right) = \det\left(\frac{\operatorname{sen}\pi(\xi_i-\xi_j)}{\pi(\xi_i-\xi_j)}\right)_{i,j=1}^m, \tag{3.19}$$

para x em algum subconjunto compacto de $[-1,1]$ e $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ em algum subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Como o limite acima vale para qualquer distribuição do tipo (3.2) (DEIFT, 1999), o chamamos de limite de universalidade. Se $m=1$, temos o caso mais simples de universalidade:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{K}_n\left(x+\frac{a}{\tilde{K}_n(x,x)},x+\frac{b}{\tilde{K}_n(x,x)}\right)}{\tilde{K}_n(x,x)} = \frac{\operatorname{sen}\pi(a-b)}{\pi(a-b)}. \tag{3.20}$$

Como as funções de correlação podem ser escritas conforme equação (3.16), é possível obter o limite de universalidade no caso geral (3.19) a partir do caso mais simples a partir do processo de passar o limite (3.20) para dentro do determinante na equação (3.16). No próximo cápitulo vamos nos dedicar a enfraquecer as hipóteses sobre as medidas para as quais o limite de universalidade é válido.

CAPÍTULO

4

UNIVERSALIDADE

Neste capítulo vamos entrar em detalhes nos resultados da referência principal deste trabalho (LUBINSKY, 2009). Nosso objetivo é provar o caso mais simples do limite de universalidade

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{K}_n\left(x+\frac{a}{\tilde{K}_n(x,x)}, x+\frac{b}{\tilde{K}_n(x,x)}\right)}{\tilde{K}_n(x,x)} = \frac{\operatorname{sen}\pi(a-b)}{\pi(a-b)}, \tag{4.1}$$

para núcleos reprodutores associados a uma medida μ Stahl-Totik regular com derivada de Radon-Nikodym $\mu' = \omega$, conforme definidos anteriormente e dados por (2.1).

A primeira seção é dedicada às *funções de Christoffel* e seu comportamento assintótico no caso de estarem associadas a uma medida Stahl-Totik regular. O resultado apresentado nesta seção será usado em todos os outros que o sucedem e é aqui que a hipótese da medida ser regular se faz extremamente necessária. Alguns resultados que não estão no artigo principal são apresentados antes do teorema com o intuito de esclarecer cálculos futuros.

Na segunda seção vamos apresentar o resultado de localização que, em poucas palavras, mostra que núcleos reprodutores associados à medidas Stahl-Totik regulares com derivadas iguais em algum subconjunto compacto de $[-1,1]$ têm o mesmo comportamento assintótico neste conjunto. Além disso, aqui será mostrada a desigualdade de Lubinsky (4.2) que é a grande ideia para obter o limite de universalidade a partir das assintóticas obtidas na primeira seção.

A contribuição de Kuijlaars e Vanlessen (2002) mostra que a universalidade vale para o caso do núcleo reprodutor de Legendre. Na terceira seção veremos um resultado que *suaviza* núcleos reprodutores regulares no sentido de que, assintoticamente, núcleos reprodutores associados à medidas Stahl-Totik regulares, localmente são iguais ao núcleo de Legendre. Tendo isso em mente, na última seção é provado o limite de universalidade para núcleos reprodutores associados à medidas Stahl-Totik regulares.

4.1 Funções de Christoffel

Neste texto as *funções de Christoffel* servirão como ferramenta para a prova do limite de universalidade a partir da seguinte desigualdade que será provada na próxima seção:

$$\frac{|K_n(x,y)-K_n^*(x,y)|}{K_n(x,x)} \leq \left(\frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n(y)}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1-\frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^*(x)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2}$$

que vale para $x,y \in [-1,1]$, quando $\mu \leq \mu^*$ em $[-1,1]$.

Definição 4.1.1. A n-ésima função de Christoffel associada à medida μ é definida por

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{K_n(x,x)}, \quad x \in [-1,1]$$

para $n = 1,2,\ldots$.

A n-ésima função de Christoffel associada ao peso de Legendre ($\omega = 1$ em $[-1,1]$) será denotada por λ_n^ℓ, e por λ_n^*, a função associada à medida μ^*. A próxima proposição mostra que a n-ésima função de Christoffel é solução de um problema de minimização no espaço de polinômios $\mathscr{H}_n$.

Proposição 4.1.1. A n-ésima função de Christoffel associada a μ, para todo $x \in [-1,1]$, é caracterizada por

$$\lambda_n(x) = \min\left\{\left(\frac{\|p\|_\mu}{p(x)}\right)^2 : p \in \mathscr{H}_n\right\}, \quad x \in [-1,1].$$

Demonstração. Sejam $x \in [-1,1]$ e $p = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k \in \mathscr{H}_n$, com $p(x) \neq 0$. Pela propriedade de reprodução (R2) e a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$\begin{aligned} |p(x)|^2 &= |\langle p, K_n(x,\cdot)\rangle_n|^2 \\ &\leq \|p\|_\mu^2 \|K_n(x,\cdot)\|_\mu^2 \\ &= K_n(x,x)\|p\|_\mu^2, \end{aligned}$$

uma vez que $\|K_n(x,\cdot)\|_\mu^2 = \langle K_n(x,\cdot), K_n(x,\cdot)\rangle = K_n(x,x)$. Finalmente, para $p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k$, com $\alpha_k = K^{-1/2}(x,x)p_k(x)$, $k = 0,1,\ldots$, obtemos a igualdade. □

Essa proposição nos fornece uma ferramenta importante para manipular as funções de Christoffel e que nos será útil futuramente: elas são monótonas com relação à medida, isto é, se μ e μ^* são medidas que satisfazem $\mu \leq \mu^*$, então

$$\|p\|_\mu \leq \|p\|_{\mu^*},$$

e, portanto, pela proposição anterior, para todo $x \in [-1,1]$,

$$\lambda_n(x) = \min\left\{\left(\frac{\|p\|_\mu}{p(x)}\right)^2 : p \in \mathscr{H}_n\right\} \leq \min\left\{\left(\frac{\|p\|_{\mu^*}}{p(x)}\right)^2 : p \in \mathscr{H}_n\right\} = \lambda_n^*(x). \tag{4.3}$$

No teorema principal desta seção assim como nas próximas seções será necessário definir uma função peso auxiliar $\omega^*(x)$ e para isso o lema a seguir será necessário. Além disso, para $x \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ definimos

$$I(x,\delta) := [x-\delta, x+\delta]. \tag{4.4}$$

Denotamos por $\operatorname{dist}(x,J)$ a distância de x até um subconjunto $J \subset \mathbb{R}$, e assim definimos

$$I(J,\delta) := \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(x,J) \leq \delta\}. \tag{4.5}$$

Lema 4.1.1. Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto, $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto aberto tal que $J \subset A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função. Se f contínua e positiva em J então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq \frac{f(x)}{f(y)} \leq (1+\varepsilon),\ x \in I(J,\delta),\ |x-y| < \delta. \tag{4.6}$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Dado $x_0 \in J$, pela continuidade de f em J e por $f|_J > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ de modo que:

- $f(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$;
- $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1 := \varepsilon f(x_0)$ sempre que $|x - x_0| < \delta_2$.

Seja $g(x) = (f(x)/f(x_0))^2$ para $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ onde $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dos dois itens acima temos

$$|g(x) - 1| = \left|\frac{f(x)}{f(x_0)} - 1\right| < \varepsilon_1/f(x_0) = \varepsilon.$$

sempre que $|x - x_0| < \delta_0$. Logo g é contínua em x_0, e portanto, g^{-1} é contínua em x_0. Assim, podemos concluir

$$\left|\left(\frac{f(x)}{f(x_0)}\right)^2 - 1\right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \left|\left(\frac{f(x_0)}{f(x)}\right)^2 - 1\right| < \varepsilon, \tag{4.7}$$

sempre que $|x - x_0| < \delta_0$. Como x_0 é arbitrário, temos uma cobertura de J:

$$J \subset \bigcup_{x_0 \in J} (x_0 - \delta_0/4, x_0 + \delta_0/4).$$

Pela compacidade de J, temos uma subcobertura finita

$$J \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m} (x_j - \delta_j/4, x_j + \delta_j/4).$$

onde para cada $x_j \in J$, $j = 1, \ldots, m$, o δ_j correspondente é dado pela mesma relação construída acima entre $x_0 \in J$ e δ_0.

Tome $\delta = \min\{\delta_j/4 : 1 \leq j \leq m\}$ e $x \in I(J, \delta)$. Assim, existe $x' \in J$ e $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ de modo que $|x - x'| < \delta$ e $|x' - x_j| < \delta_j/4$. Daí,

$$|x - x_j| \leq |x - x'| + |x' - x_j| < \delta + \frac{\delta_j}{4} < \frac{\delta_j}{2}.$$

Logo, por (4.7),

$$(1+\varepsilon)^{-1/2} \leq \frac{f(x)}{f(x_0)} \leq (1+\varepsilon)^{1/2}. \tag{4.8}$$

Agora seja y tal que $|x - y| < \delta$. Então

$$|y - x_j| \leq |y - x| + |x - x_j| < \delta + \frac{\delta_j}{2} < \frac{3\delta_j}{4}.$$

Daí,

$$(1+\varepsilon)^{-1/2} \leq \frac{f(x_0)}{f(y)} \leq (1+\varepsilon)^{1/2}. \tag{4.9}$$

Multiplicando (4.8) e (4.9), temos

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq \frac{f(x)}{f(y)} \leq (1+\varepsilon).$$

□

Para os resultados a seguir, utilizaremos fortemente o lema a seguir, que é consequência da regularidade da medida.

Lema 4.1.2 ((MáTé; NEVAI; TOTIK, 1991))**.** Suponha que μ é uma medida Stahl-Totik regular no compacto $S \subset \mathbb{R}$ e que a componente ilimitada do complementar de S é regular com relação ao problema de Dirchlet. Então para qualquer $\sigma > 1$ existe N natural de modo que para qualquer $n > N$ e qualquer polinômio P de grau no máximo n

$$\max_{x \in S} |P(x)|^2 \leq \sigma^n \int_S |P|^2 d\mu.$$

No lema a seguir será utilizado fortemente a regularidade da medida μ e do peso de Legendre ($\omega = 1$). A regularidade do peso de Legendre é consequência direta do Teorema 2.2.3. Na demonstração do próximo resultado utilizaremos as funções de Christoffel associadas ao peso de Legendre λ_n^ℓ (Definição 4.1.1).

Lema 4.1.3. Sejam μ uma medida Stahl-Totik regular em $[-1, 1]$, $J \subset (-1, 1)$ um subconjunto compacto e $x_0 \in J$. Suponha que μ é absolutamente contínua num aberto que contém J e que sua

derivada de Radon-Nikodym, $\mu' = \omega$, é positiva e contínua em J. Então, para quaisquer $\varepsilon, \eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda_n(x) \leq \omega(x_0)(1+\varepsilon)\lambda_m^{\ell}(x)(1+o(1)), \quad x \in I(x_0,\delta), \tag{4.10}$$

e

$$\lambda_n^{\ell}(x) \leq \omega(x_0)^{-1}(1+\varepsilon)\lambda_m(x)(1+o(1)), \quad x \in I(x_0,\delta), \tag{4.11}$$

onde $o(1)$ é independente de $x_0 \in J$ e $m = n - 2\lfloor n\eta/2 \rfloor$, com $\lfloor y \rfloor$ sendo o maior inteiro menor ou igual a y.

Demonstração. A prova desta estimativa envolve a construção de uma medida auxiliar. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ de modo que μ seja absolutamente contínua em $I(J,\delta) \subset (-1,1)$ e que satisfaça (4.6). Fixe $x_0 \in J$ e defina a medida μ^* como $\mu^* = \mu$ em $[-1,1] \setminus I(x_0,\delta)$, e

$$d\mu^*(x) = \omega^*(x)dx = \omega(x_0)(1+\varepsilon)dx, \quad x \in I(x_0,\delta).$$

Dado $x \in I(x_0,\delta)$, temos, por (4.6),

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\omega(x_0)}{\omega(x)},$$

pois $x_0 \in J$. Logo $\omega \leq \omega^*$ em $I(x_0,\delta)$ e, consequentemente, $\mu \leq \mu^*$ em $[-1,1]$. Como consequência de (4.3), se denotarmos por λ_n^* a n-ésima função de Christoffel (Definição 4.1.1) associada à medida μ^* e ao núcleo K_n^*, i.e.,

$$\lambda_n^*(x) = \frac{1}{K_n^*(x,x)}, \quad x \in [-1,1],$$

então $\lambda_n \leq \lambda_n^*$, para todo $n = 1,2,\ldots$.

Agora, observe que existe $r \in (0,1)$, dependendo somente de δ, de modo que

$$0 \leq 1 - \left(\frac{t-x}{2}\right)^2 \leq r, \quad x \in I(x_0,\delta), t \in [-1,1] \setminus I(x_0,\delta). \tag{4.12}$$

De fato, basta tomar $r = 1 - (\delta/4)^2$ e a desigualdade segue. Na sequência, consideremos $\eta \in (0,1/2)$ e $\sigma > 1$ (próximo o suficiente de 1) de modo que

$$\sigma^{1-\eta} < r^{-\eta/4}. \tag{4.13}$$

Note que, como $r^{-\eta/4} > 1$, basta considerar $\sigma < r^{-\eta/4}$ para que a desigualdade acima valha.

Dado $\eta \in (0,1/2)$, seja $m = m(n) := n - 2\lfloor \eta n/2 \rfloor$, onde $\lfloor y \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a y. Fixado $x \in I(x_0,\delta/2)$, pela Proposição 4.1.1 podemos escolher um polinômio P_m de grau menor ou igual a $m-1$ de modo que

$$\lambda_m^{\ell}(x) = \|P_m\|^2_{L^2(\ell)} = \int_{-1}^{1} P_m^2(x)dx \quad \text{e} \quad P_m^2(x) = 1. \tag{4.14}$$

Seja

$$S_n(t) := P_m(t)\left(1-\left(\frac{t-x}{2}\right)^2\right)^{\lfloor \eta n/2\rfloor}, \quad t\in[-1,1]. \tag{4.15}$$

Observe que S_n é um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$ e que $S_n(x)=1$. Daí, pela Proposição 4.1.1, temos

$$\lambda_n^*(x) \le \|S_n\|^2_{L^2(\mu^*)} = I_1 + I_2, \tag{4.16}$$

onde

$$I_1 := \int_{I(x_0,\delta)} |S_n(t)|^2 d\mu^*(t) \quad \text{e} \quad I_2 := \int_{[-1,1]\setminus I(x_0,\delta)} |S_n(t)|^2 d\mu^*(t).$$

Observe que para $x,t\in[-1,1]$, temos

$$\frac{1}{2} \le 1-\left(\frac{t-x}{2}\right)^2 \le 1,$$

logo, para $t\in I(x_0,\delta)$, temos $S_n(t)^2 \le P_m(t)^2$. Como $d\mu^*(x)=\omega(x_0)(1+\varepsilon)dx$ e $S_n^2 \le P_m^2$ em $I(x_0,\delta)$, temos

$$I_1 \le \omega(x_0)(1+\varepsilon)\int_{I(x_0,\delta)} |P_m(x)|^2 dx \le \omega(x_0)(1+\varepsilon)\lambda_m^\ell(x),$$

onde a última desigualdade segue direto de (4.14). Por fim, de (4.12), temos

$$I_2 \le \|P_m^2\|_\infty r^{2\lfloor \eta n/2\rfloor}\mu^*([-1,1]).$$

Pelo Lema 4.1.2, existe $m_0(\sigma)$ tal que para $m\ge m_0(\sigma)$,

$$\|P_m^2\|_\infty \le \sigma^m \|P_m\|^2_{L^2(\ell)} = \sigma^m \lambda_m^\ell(x).$$

Consequentemente, uniformemente para $x\in I(x_0,\delta/2)$ e para $n\ge n_0(x_0,\delta)$ vale

$$I_2 \le \sigma^m \lambda_m^\ell(x) r^{2\lfloor \eta n/2\rfloor}\mu^*([-1,1]).$$

Combinando as estimativas acima e a fórmula (4.16), segue que

$$\lambda_n^*(x) \le \Big(\omega(x_0)(1+\varepsilon)\lambda_m^\ell(x)\Big) + \Big(\sigma^m\lambda_m^\ell(x) r^{2\lfloor \eta n/2\rfloor}\mu^*([-1,1])\Big).$$

Colocando o primeiro termo da soma no lado direito da desigualdade acima em evidência, concluímos que

$$\begin{aligned}\lambda_n^*(x) &\le \omega(x_0)(1+\varepsilon)\lambda_m^\ell(x)\left(1+C\sigma^m r^{2\lfloor \eta n/2\rfloor}\right)\\ &\le \omega(x_0)(1+\varepsilon)\lambda_m^\ell(x)\left[1+C\left(\sigma^{1-\eta}r^{\eta/2}\right)^n\right],\end{aligned}$$

onde $C = \left(\omega(x_0)(1+\varepsilon)\lambda_m^\ell(x)\right)^{-1}$. Como decorre de (4.13) que $\sigma^{1-\eta}r^{\eta/2} < r < 1$, temos

$$\lambda_n^*(x) \leq \omega_\mu(x_0)(1+\varepsilon)\lambda_m^\ell(x)\,(1+o(1))\,,$$

onde $o(1)$ é independente de $x_0 \in J$ uma vez que ω é contínua no compacto J. Finalmente, como $\lambda_n \leq \lambda_n^*$ concluímos a prova de (4.10).

Analogamente a (4.14), podemos escolher um polinômio de grau menor ou igual a $m-1$ de modo que

$$\lambda_m(x) = \|P_m\|^2_{L^2(\ell)} = \int_{-1}^{1} P_m^2 d\mu \quad \text{e} \quad P_m^2(x) = 1.$$

Mantendo S_n definido como anteriormente e com cálculos análogos, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_n^\ell(x) &\leq \int_{I(x_0,\delta)} S_n^2 + \int_{[-1,1]\setminus I(x_0,\delta)} S_n^2 \\
&\leq \left[\omega(x_0)^{-1}(1+\varepsilon)\int_{I(x_0,\delta)} P_m^2 d\mu\right] + \left[\|P_m\|^2_{L^\infty([-1,1]\setminus I(x_0,\delta))} r^{2\lfloor \eta n/2\rfloor} \int_{[-1,1]\setminus I(x_0,\delta)} dx\right] \\
&\leq \left[\omega(x_0)^{-1}(1+\varepsilon)\lambda_m(x)\right] + \left[\|P_m\|^2_{L^\infty([-1,1])} r^{2\lfloor \eta n/2\rfloor} \int_{-1}^{1} dx\right].
\end{aligned}$$

Como μ é regular, podemos usar o Lema 4.1.2 para obter

$$\lambda_n^\ell(x) \leq \left[\omega(x_0)^{-1}(1+\varepsilon)\lambda_m(x)\right]\left\{1 + C[\sigma^{1-\eta}r^{\eta/2}]^n\right\}.$$

De modo análogo ao que foi feito para provar (4.10), obtém-se (4.11). □

O teorema a seguir nos ajudará a entender melhor o comportamento assintótico do lado direito da desigualdade de Lubinsky (4.2). Vamos utilizar a notação $A_n(t) \sim B_n(t)$ para

$$c_1 B_n(t) \leq A_n(t) \leq c_2 B_n(t),$$

com c_1 e c_2 constantes independentes de t e n.

Teorema 4.1.1. Sejam μ uma medida Stahl-Totik regular em $[-1,1]$, $J \subset (-1,1)$ um subconjunto compacto e $x_0 \in J$. Suponha que μ é absolutamente contínua num aberto que contém J e que sua derivada de Radon-Nikodym, $\mu' = \omega$, é positiva e contínua em J. Dado $A > 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n\left(x + \frac{a}{n}\right)\left[\lambda_n^\ell\left(x+\frac{a}{n}\right)\right]^{-1} = \omega(x) \tag{4.17}$$

uniformemente para $a \in [-A,A]$ e $x \in J$. Adicionalmente, existe um natural $n_A := n(A)$ tal que

$$\lambda_n\left(x+\frac{a}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \tag{4.18}$$

uniformemente para $n \geq n_A$, $x \in J$ e $a \in [-A,A]$,

Demonstração. A prova de (4.17) envolve uma aplicação do lema anterior e ideias desenvolvidas na demonstração. Logo, as notações e construções na prova do resultado serão reutilizadas aqui. Primeiramente, provaremos que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{|a|\le A, x\in J} \frac{\lambda_n(x+a/n)}{\lambda_n^\ell(x+a/n)\omega(x)} \le 1. \tag{4.19}$$

Dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in J$, sejam $\delta > 0$ e $\eta \in (0,1/2)$ como no Lema 4.1.3. Vamos obter uma cota superior para

$$\sup_{x\in I(x_0,\delta/2)} \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^\ell(x)}. \tag{4.20}$$

Um aplicação direta do Lema 4.1.3 implica

$$\sup_{x\in I(x_0,\delta/2)} \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^\ell(x)} \le \omega(x_0)(1+\varepsilon)(1+o(1)) \sup_{x\in I(x_0,\delta/2)} \frac{\lambda_m^\ell(x)}{\lambda_n^\ell(x)}. \tag{4.21}$$

Agora vamos estimar o quociente das funções de Christoffel associadas ao peso de Legendre na desigualdade acima. Se $p_k^\ell(x)$ é o k-ésimo polinômio de Legendre, $k = 0,1,\ldots$, então temos a seguinte limitação (NEVAI, 1979, p. 170)

$$|p_n^\ell(x)| \le C\left(1-x^2+\frac{1}{k^2}\right)^{1/4}, \quad x\in[-1,1],$$

onde $n = 1,2\ldots$ e $C > 0$ não depende de n e nem de x. Lembrando que $m = n - 2\lfloor n\eta/2\rfloor$, temos, uniformemente para $x \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned}
0 \le 1 - \frac{\lambda_n^\ell(x)}{\lambda_m^\ell(x)} &= \lambda_n^\ell(x)\sum_{k=m}^{n-1}\left(p_k^\ell(x)\right)^2 \\
&\le C\lambda_n^\ell(x)(n-m)\max_{n/2\le k\le n}\left(1-x^2+\frac{1}{k^2}\right)^{-1/2} \\
&\le C\eta n\lambda_n^\ell(x)\left(1-x^2+\frac{1}{k^2}\right)^{-1/2} \\
&\le C\eta,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde a última desigualdade decorre de (NEVAI, 1979, p. 108 Lema 5):

$$\lambda_n^\ell(x) \sim \frac{1}{n}, \tag{4.23}$$

para $x \in [-1,1]$. De (4.22), obtemos

$$0 \le \frac{\lambda_m^\ell(x)}{\lambda_n^\ell(x)} \le (1+C\eta)^{-1}, \quad x\in[-1,1]. \tag{4.24}$$

Segue direto da desigualdade acima que

$$\sup_{x\in[-1,1]} \frac{\lambda_m^\ell(x)}{\lambda_n^\ell(x)} \le (1+C\eta)^{-1}, \tag{4.25}$$

onde C não depende de x e nem de n. Desta maneira, por (4.21) e pela desigualdade (4.25), obtemos

$$\sup_{x\in I(x_0,\delta/2)} \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^\ell(x)} \leq \omega(x_0)(1+\varepsilon)(1+C\eta)^{-1},$$

uma cota superior para (4.20), como queríamos. Agora, por (4.6), existe $n_0(x_0,\delta)$, um número natural, tal que

$$\sup_{x\in I(x_0,\delta/2)} \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^\ell(x)\omega(x)} \leq (1+\varepsilon)^2(1+C\eta)^{-1}, \quad n \geq n_0(x_0,\delta).$$

Para finalmente obter (4.19), cobrimos J com um número finito de intervalos $I(x_0,\delta/2)$ a fim de obter, para $n \geq n_1(\varepsilon,\delta,J)$,

$$\sup_{x\in I(J,\delta/2)} \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^\ell(x)\omega(x)} \leq (1+\varepsilon)^2(1+C\eta)^{-1}. \tag{4.26}$$

Seja $A>0$ e tome $a\in[-A,A]$. Então existe $n_2 = n_2(A) \in \{1,2,\dots\}$ tal que, para $n \geq n_2$ e para todo $a\in[-A,A]$ e todo $x\in J$,

$$x+\frac{a}{n} \in I(J,\delta/2).$$

De fato como $|a|$ e $\delta/2$ são números reais positivos, existe $n\in\{1,2,\dots\}$ de modo que $|a|/n \leq \delta/2$, isto é,

$$\left|x-\left(x+\frac{a}{n}\right)\right| = \frac{|a|}{n} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Daí, trocando x por $x+a/n$ com $n\geq n_2$ em (4.20) e tomando o limite superior, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{|a|\leq A, x\in J} \frac{\lambda_n(x+a/n)}{\lambda_n^\ell(x+a/n)\omega(x)} \leq (1+\varepsilon)^2(1+C\eta)^{-1}.$$

Como ε e η são arbitrários, obtemos (4.19). De maneira análoga podemos obter

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{|a|\leq A, x\in J} \frac{\lambda_n^\ell(x+a/n)\omega(x)}{\lambda_n(x+a/n)} \leq 1. \tag{4.27}$$

De fato, mantendo a notação, por (4.11), temos

$$\lambda_n^\ell(x) \leq \omega(x_0)^{-1}(1+\varepsilon)\lambda_m(x)(1+o(1)),$$

para $x\in I(x_0,\delta)$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por

$$\frac{\lambda_m^\ell(x)}{\lambda_n^\ell(x)\lambda_m(x)}$$

e tomando o sup em $I(x_0,\delta)$, obtemos

$$\sup_{x\in I(x_0,\delta/2)} \frac{\lambda_m^\ell(x)}{\lambda_m(x)} \leq \omega(x_0)^{-1}(1+\varepsilon)\{1+o(1)\} \sup_{x\in I(x_0,\delta/2)} \frac{\lambda_m^\ell(x)}{\lambda_n^\ell(x)}.$$

Por (4.25),

$$\sup_{x\in I(x_0,\delta/2)} \frac{\lambda_m^\ell(x)}{\lambda_m(x)} \le \omega(x_0)^{-1}(1+\varepsilon)\{1+o(1)\}(1+C\eta)^{-1}.$$

Por (4.6),

$$\sup_{x\in I(x_0,\delta/2)} \frac{\lambda_m^\ell(x)\omega(x)}{\lambda_m(x)} \le (1+\varepsilon)^2\{1+o(1)\}(1+C\eta)^{-1}. \tag{4.28}$$

Como $m = n - 2\lfloor n\eta/2\rfloor$ e

$$m(n+1) - m(n) = 1 - 2\left(\lfloor (n+1)\eta/2\rfloor - \lfloor n\eta/2\rfloor\right) \le 1,$$

então, quando n percorre todos os naturais tendendo a infinito, o mesmo acontece com m. Assim tomando o limite superior em (4.28), obtemos (4.27). De (4.19) e (4.27) temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sup_{|a|\le A, x\in J} \frac{\lambda_n(x+a/n)}{\lambda_n^\ell(x+a/n)\omega(x)} &\le \left(\limsup_{n\to\infty} \sup_{|a|\le A, x\in J} \frac{\lambda_n^\ell(x+a/n)\omega(x)}{\lambda_n(x+a/n)}\right)^{-1} \\ &= \liminf_{n\to\infty} \sup_{|a|\le A, x\in J} \frac{\lambda_n(x+a/n)}{\lambda_n^\ell(x+a/n)\omega(x)}.\end{aligned}$$

Assim, uniformemente para $x \in J$ e $a \in [-A,A]$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n\left(x+\frac{a}{n}\right)\left[\lambda_n^\ell\left(x+\frac{a}{n}\right)\right]^{-1} = \omega(x).$$

Falta mostrar a estimativa (4.18). Sejam $x_0 \in J$ e $\varepsilon, \eta > 0$. Pela estimativa (4.10) do Lema 4.1.3, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^\ell(x)} \le \omega(x_0)(1+\varepsilon)\frac{\lambda_m^\ell(x)}{\lambda_n^\ell(x)}(1+o(1)), \quad x \in I(x_0,\delta),$$

com $m = n - 2\lfloor n\eta/2\rfloor$. Por (4.24),

$$\frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^\ell(x)} \le \omega(x_0)(1+\varepsilon)(1+C\eta)^{-1}(1+o(1)), \quad x \in I(x_0,\delta).$$

Cobrindo J por intervalos do tipo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ e tomando uma subcobertura finita

$$\{(x_i-\delta, x_i+\delta)\}_{i=1}^k,$$

temos, para $n = 1,2,\ldots,$

$$\lambda_n(x) \le C_1\lambda_n^\ell(x), \quad x \in J,$$

onde $C_1 > 0$ é uma constante tal que $\omega(x_i)(1+\varepsilon)(1+C\eta)^{-1} \le C_1$ para todo $i = 1,\ldots,k$. Como já vimos, dado $a \in [-A,A]$, temos $x + a/n \in J$ para $n \ge n_A$. Daí,

$$\lambda_n(x+a/n) \le C_1\lambda_n^\ell(x+a/n), \quad x \in J, \quad a \in [-A,A], \tag{4.29}$$

para $n \geq n_A$. Por (4.23), existe $M_1 > 0$ que não depende de n, x e A tal que

$$\lambda_n(x+a/n) \leq M_1/n, \quad x \in J, \quad a \in [-A,A], \tag{4.30}$$

para $n \geq n_A$. Usando a estimativa (4.11), obtemos de maneira análoga que existe M_2 que não depende de n, x e A tal que

$$M_2/n \leq \lambda_n(x+a/n), \quad x \in J, \quad a \in [-A,A], \tag{4.31}$$

para $n \geq n_A$. Pelas desigualdades (4.30) e (4.31) podemos concluir (4.18). □

4.1.1 Localização

Como dito no início deste capítulo, Kuijlaars e Vanlessen (2002) mostram que o limite de universalidade (4.1) vale para o peso de Legendre. Para estimar o limite de universalidade para medidas regulares quaisquer, utilizaremos as assintóticas obtidas no Teorema 4.1.1 e, por isso, a desigualdade a seguir é de grande importância.

Lema 4.1.4 (Desigualdade de Lubinsky)**.** Sejam μ e μ^* medidas em $[-1,1]$ tais que $\mu \leq \mu^*$ em $[-1,1]$. Então,

$$\frac{|K_n(x,y) - K_n^*(x,y)|}{K_n(x,x)} \leq \left(\frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n(y)}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^*(x)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.32}$$

para todo $x, y \in [-1,1]$ e $n = 1,2,\ldots$.

Demonstração. A ideia aqui é estimar a norma L^2 do polinômio dado pela relação

$$t \in [-1,1] \mapsto K_n(x,t) - K_n^*(x,t), \quad x \in [-1,1], \quad n = 1,2,\ldots,$$

para depois usar a desigualdade abaixo:

$$|P(y)| \leq K_n(y,y)^{1/2} \|P\|_2, \quad y \in [-1,1], \tag{4.33}$$

válida para um polinômio P de grau $n-1$. Esta desigualdade foi provada na demonstração da Proposição 4.1.1.

Utilizando a propriedade reprodutora de K_n, temos

$$\begin{aligned} \| (K_n(x,\cdot) - K_n^*(x,\cdot) \|_\mu^2 &= \|K_n(x,\cdot)\|_\mu^2 - 2\int_{-1}^{1} K_n(x,t)K_n^*(x,t)d\mu(t) + \|K_n^*(x,\cdot)\|_\mu^2 \\ &= K_n(x,x) - 2K_n^*(x,x) + \|K_n^*(x,\cdot)\|_\mu^2, \end{aligned}$$

para $x \in [-1,1]$ e $n = 1,2,\ldots$. Utilizando o fato de que $d\mu \leq d\mu^*$ em $[-1,1]$ e a propriedade reprodutora de K_n^*, obtemos

$$\|K_n^*(x,\cdot)\|_\mu^2 \leq \|K_n^*(x,\cdot)\|_{\mu^*}^2 = K_n^*(x,x)$$

e, assim,

$$\| (K_n(x,\cdot) - K_n^*(x,\cdot)) \|_\mu^2 \leq K_n(x,x) - K_n^*(x,x), \quad x \in [-1,1], \quad n = 1,2,\ldots. \tag{4.34}$$

Agora vamos usar a desigualdade (4.33) para estimar $|K_n(x,t) - K_n^*(x,t)|$, com $x,t \in [-1,1]$ e $n = 1,2,\ldots$. Tomando

$$P(y) = K_n(x,y) - K_n^*(x,y), \quad x,y \in [-1,1], \quad n = 1,2,\ldots.$$

em (4.33) e usando (4.34), temos

$$|K_n(x,y) - K_n^*(x,y)| \leq K_n(y,y)^{1/2} \left(K_n(x,x) - K_n^*(x,x)\right)^{1/2}.$$

Com isso, para todo $x,y \in [-1,1]$, dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $K_n(x,x)$, com $n = 1,2,\ldots$, concluímos

$$\begin{aligned} \frac{|K_n(x,y) - K_n^*(x,y)|}{K_n(x,x)} &\leq \frac{K_n(y,y)^{1/2}}{K_n(x,x)^{1/2}} \left[1 - \frac{K_n^*(x,x)}{K_n(x,x)}\right]^{1/2} \\ &= \frac{\lambda_n(x)^{1/2}}{\lambda_n(y)^{1/2}} \left[1 - \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^*(x)}\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

□

A Desigualdade de Lubinsky (4.32) revela que a medida que $n \to \infty$, o lado direito vai para 0 e ganha-se a convergência uniforme do lado esquerdo da desigualdade. O próximo teorema nos diz que o comportamento assintótico dos núcleos reprodutores de medidas que coincidem num compacto é o mesmo neste conjunto.

Teorema 4.1.2. Sejam μ e μ^* medidas Stahl-Totik regulares em $[-1,1]$ que sejam absolutamente contínuas num aberto que contém um compacto $J \subset (-1,1)$. Suponha que $\omega = \mu'$ é positiva e contínua em J e $d\mu = d\mu^*$ em J. Se $A > 0$, então

$$\sup_{\substack{x \in J \\ a,b \in [-A,A]}} \left| (K_n - K_n^*) \left(x + \frac{a}{n}, x + \frac{b}{n}\right) \right| / n = o(1), \quad n \to \infty. \tag{4.35}$$

Demonstração. Inicialmente vamos supor que $d\mu \leq d\mu^*$ em $[-1,1]$ e utilizar a desigualdade de Lubinsky (4.32) e as assintóticas para as funções de Christoffel λ_n e λ_n^* obtidas no Teorema 4.1.1 para obter (4.35).

Sejam $x = x_0 + a/n$ e $y = x_0 + b/n$ onde $a,b \in [-A,A]$, $n = 1,2,\ldots$ e $x_0 \in J$. Pelo Teorema 4.1.1, mais especificamente por (4.18), temos, para n suficientemente grande,

$$\frac{\lambda_n(x,x)^{1/2}}{\lambda_n(y,y)^{1/2}} \sim 1 \quad \text{e} \quad \frac{|K_n(x,y) - K_n(x,y)|}{K_n(x,x)} \sim \frac{|K_n(x,y) - K_n(x,y)|}{n}. \tag{4.36}$$

Assim, pela desigualdade de Lubinsky (4.32) e por (4.36),

$$\begin{aligned}\frac{|K_n(x,y)-K_n(x,y)|}{n} &\leq C\frac{|K_n(x,y)-K_n(x,y)|}{K_n(x,x)}\\ &\leq C\left|\frac{\lambda_n(x)^{1/2}}{\lambda_n(y)^{1/2}}\left[1-\frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^*(x)}\right]^{1/2}\right|\\ &\leq C\left[1-\frac{\lambda_n(x,x)}{\lambda_n^*(x,x)}\right]^{1/2}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

onde $C>0$ é uma constante que não depende n e x_0. Novamente, pelo Teorema 4.1.1, mais especificamente por (4.17),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(x)}{\lambda_n^\ell(x)}=\omega(x) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^*(x)}{\lambda_n^\ell(x)}=\omega^*(x).$$

Como $d\mu = d\mu^*$ em J, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_(x)}{\lambda_n^*(x)}=\frac{\omega(x)}{\omega^*(x)}=1 \tag{4.38}$$

uniformemente em J. Assim, por (4.38) e (4.37), temos

$$\sup_{\substack{x_0\in J\\ a,b\in[-A,A]}}\left|(K_n-K_n^*)\left(x_0+\frac{a}{n},x_0+\frac{b}{n}\right)\right|/n=o(1).$$

Isso prova o teorema para o caso em que $d\mu \leq d\mu^*$. Para provar o caso geral, defina a medida ν por $\nu=\mu$ em J e

$$d\nu(x)=\max\{\operatorname{dist}(x,J),\omega(x),\omega^*(x)\}dx+d\mu_s(x)+d\mu_s^*(x)$$

em $[-1,1]\setminus J$, onde μ_s e μ_s^* são as partes singulares de μ e μ^*, respectivamente. Como $\operatorname{dist}(x,J)>0$ para todo $x\notin J$, temos $d\nu(x)>0$ para todo $x\in[-1,1]\setminus J$. Logo, como $d\mu_s$ e $d\mu^*$ são positivas, a parte absolutamente contínua de ν é positiva em $[-1,1]$. Pelo critério de Erdös-Turán (Teorema 2.2.3), ν é Stahl-Totik regular. Além disso, $\nu'=\omega=\omega^*$ em J, $d\mu\leq\nu$ e $d\mu^*\leq\nu$. Aplicando o que foi obtido para μ e ν e depois para μ^* e ν, os núcleos reprodutores de μ e μ^* têm o mesmo comportamento assintótico que ν, logo ambos possuem o mesmo comportamento assintótico. □

4.1.2 Suavização

Nesta seção, vamos aproximar o núcleo reprodutor K_n associado a uma medida Stahl-Totik regular μ do núcleo reprodutor do peso de Legendre ($\omega=1$), K_n^L, obtendo uma suavização de K_n.

Teorema 4.1.3. Seja μ uma medida Boreliana e Stahl-Totik regular em $[-1,1]$. Suponha que μ é absolutamente contínua num conjunto aberto contendo o compacto J e que $\mu'=\omega$ é positiva e

contínua em J. Dados $A > 0$, $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ de modo que (4.6) seja válido para ω. Se $x_0 \in J$, então existem $C > 0$ e $n_0 \in \{1,2,3,\dots\}$ de modo que, para $n \geq n_0$,

$$\sup_{\substack{a,b\in[-A,A]\\ x\in I(x_0,\delta/2)\cap J}} \left|\tilde{K}_n - K_n^L\left(x+\frac{a}{n}, x+\frac{b}{n}\right)\right| / n \leq C\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.39}$$

Demonstração. Fixe $x_0 \in J$ e seja

$$\omega^{\#}(x) = \omega(x_0), \quad x \in [-1,1].$$

A ideia aqui é aproximar μ pelo peso $\omega^{\#}$ numa vizinhança compacta de algum $x_0 \in J$ utilizando o Teorema 4.1.2. Depois vamos mostrar que o peso $\omega^{\#}$ e o peso de Legendre têm o mesmo comportamento assintótico no sentido do Teorema 4.1.2, o que implicará na suavização, ou seja (4.39), de $\tilde{K}_n$.

Seja $K_n^{\#}$ o n-ésimo núcleo reprodutor associado ao peso $\omega^{\#}$, $n = 1,2,\dots$. Neste caso, para todo $n = 1,2,\dots$ e $x,y \in [-1,1]$, as propriedades reprodutoras de $K_n^{\#}$ e K_n^L, respectivamente, implicam

$$K_n^{\#}(x,y) = \int_{-1}^{1} K_n^{\#}(x,t)K_n^L(x,t)dt = \frac{1}{\omega(x_0)}K_n^L(x,y). \tag{4.40}$$

Agora, mostremos que K_n e $K_n^{\#}$ têm o mesmo comportamento assintótico, no sentido do Teorema 4.1.2. Defimos

$$d\mu^*(t) = \begin{cases} \omega(t)dt, & t \in I(x_0,\delta) \\ \omega^{\#}(t)dt, & t \in [-1,1]\setminus I(x_0,\delta), \end{cases} \tag{4.41}$$

onde $I(x_0,\delta)$ é o compacto definido em (4.4). As medidas μ^* e μ são Stahl-Totik regulares e satisfazem as hipóteses do Teorema 4.1.2 para $I(x_0,\delta)$. Isto significa que, localmente, os núcleos reprodutores K_n e K_n^* possuem o mesmo comportamento assintótico. Por isso, podemos considerar $\omega = \omega^*$ e assim o faremos até o fim da demonstração.

Pela desigualdade (4.6), temos

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\omega}{\omega^{\#}} \leq (1+\varepsilon) \quad \text{em} \quad [-1,1]. \tag{4.42}$$

Agora, de maneira análoga à demonstração do Lema 4.1.4, vamos estimar

$$|K_n(x,y) - K_n^{\#}(x,y)|, \quad x,y \in [-1,1], \quad n = 1,2,\dots$$

e em seguida, estimar a norma L^2 do polinômio

$$t \in [-1,1] \mapsto K_n(x,t) - K_n^{\#}(x,t), \quad x \in [-1,1], \quad n = 1,2,\dots.$$

Novamente, pela propriedade reprodutora de K_n e $K_n^{\#}$, obtemos

$$\begin{aligned}\|K_n(x,\cdot)-K_n^{\#}(x,\cdot)\|_{\omega^{\#}}^2 &= \|K_n(x,\cdot)\|_{\omega^{\#}}^2 - 2\int_{-1}^{1} K_n(x,t)K_n^{\#}(x,t)\omega^{\#}(t)dt + \|K_n^{\#}(x,\cdot)\|_{\omega^{\#}}^2 \\ &= \|K_n(x,t)\|_{\omega^{\#}}^2 - \left(2K_n(x,x)-K_n^{\#}(x,x)\right),\end{aligned}$$

.com $x\in[-1,1]$ e $n=1,2,\ldots$ Como

$$\omega^{\#}(t)=\omega(t)+(\omega^{\#}(t)-\omega(t))\chi_{I(x_0,\delta)}(t), \quad t\in[-1,1]$$

onde $\chi_{I(x_0,\delta)}(t)$ é a função característica de $I(x_0,\delta)$, temos

$$\begin{aligned}\|K_n(x,\cdot)-K_n^{\#}(x,\cdot)\|_{\omega^{\#}}^2 &= \|K_n(x,\cdot)\|_{\omega}^2 + \int_{I(x_0,\delta)} K_n(x,t)^2(\omega^{\#}-\omega)(t)dt - \left(2K_n(x,x)-K_n^{\#}(x,x)\right) \\ &= K_n^{\#}(x,x)-K_n(x,x)+\int_{I(x_0,\delta)} K_n(x,t)^2(\omega^{\#}-\omega)(t)dt,\end{aligned}$$

para $x\in[-1,1]$ e $n=1,2,\ldots$. Por (4.42), temos $(\omega^{\#}-\omega)(t)\le\omega(t)\varepsilon$ em $[-1,1]$. Logo,

$$\begin{aligned}\|K_n(x,\cdot)-K_n^{\#}(x,\cdot)\|_{\omega^{\#}}^2 &\le K_n^{\#}(x,x)-K_n(x,x)+\varepsilon\int_{I(x_0,\delta)} K_n(x,t)^2\omega(t)dt \\ &\le K_n^{\#}(x,x)-(1-\varepsilon)K_n(x,x),\end{aligned} \tag{4.43}$$

para $x\in[-1,1]$ e $n=1,2,\ldots$, onde a última desigualdade segue pela propriedade reprodutora de K_n. Agora que estimamos a norma L^2 de $t\in[-1,1]\mapsto K_n(x,t)-K_n^{\#}(x,t)$, com $x\in[-1,1]$ fixo, vamos seguir de modo análogo ao que foi feito no Lema 4.1.4. Tomando

$$P(y)=K_n(x,y)-K_n^{\#}(x,y), \quad x,y\in[-1,1], \quad n=1,2,\ldots,$$

em (4.33), temos

$$\left|K_n(x,y)-K_n^{\#}(x,y)\right| \le K_n^{\#}(y,y)^{1/2}\|K_n(x,\cdot)-K_n^{\#}(x,\cdot)\|_{\omega^{\#}}.$$

Por (4.43), a desigualdade acima pode ser estimada como a seguir:

$$\left|K_n(x,y)-K_n^{\#}(x,y)\right| \le K_n^{\#}(y,y)^{\frac{1}{2}}\left[K_n^{\#}(x,x)-(1-\varepsilon)K_n(x,x)\right]^{\frac{1}{2}},$$

para todo $x,y\in[-1,1]$ e $n=1,2,\ldots$ e assim

$$\frac{\left|K_n(x,y)-K_n^{\#}(x,y)\right|}{K_n^{\#}(x,x)} \le \left(\frac{K_n^{\#}(y,y)}{K_n^{\#}(x,x)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-(1-\varepsilon)\frac{K_n(x,x)}{K_n^{\#}(x,x)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.44}$$

Por (4.42) e pela Proposição 4.1.1,

$$(1+\varepsilon)^{-1}\lambda_n(x)\le\lambda_n^{\#}(x), \quad x\in[-1,1], \quad n=1,2,\ldots,$$

logo,

$$\frac{K_n(x,x)}{K_n^{\#}(x,x)}=\frac{\lambda_n^{\#}(x)}{\lambda_n(x)}\ge(1+\varepsilon)^{-1}.$$

Usando (4.40) e a desigualdade acima em (4.44), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\left|K_n(x,y)-K_n^{\#}(x,y)\right|}{K_n^{\#}(x,x)} &\leq \left(\frac{K_n^{\#}(y,y)}{K_n^{\#}(x,x)}\right)^{1/2}\left[1-\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)}\right]^{1/2}\\ &\leq \left(\frac{K_n^{L}(y,y)}{K_n^{L}(x,x)}\right)^{1/2}\left[\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\right]^{1/2},\end{aligned}$$

para $x,y\in[-1,1]$ e $n=1,2,\dots$. Pela Definição 4.1.1,

$$\frac{\left|K_n(x,y)-K_n^{\#}(x,y)\right|}{K_n^{\#}(x,x)} \leq \left(\frac{\lambda_n^{\ell}(x)}{\lambda_n^{\ell}(y)}\right)^{1/2}\sqrt{2\varepsilon}, \quad x,y\in[-1,1], \quad n=1,2,\dots. \tag{4.45}$$

Seja $x_1\in J$ e $a,b\in[-A,A]$ para algum $A>0$. Pelo Teorema 4.1.1, mais especificamente por (4.18), temos, para n suficientemente grande,

$$\frac{\lambda_n^{\ell}(x_1+a/n)}{\lambda_n^{\ell}(x_1+b/n)}\sim 1 \quad \text{e} \quad \lambda_n^{\#}(x_1+a/n)=\frac{1}{K_n^{\#}(x_1+a/n,x_1+a/n)}\sim\frac{\omega(x_0)}{n},$$

onde a constante implícita em $\sim$ não depende de ε, δ e x_1. Por (4.40), $\lambda_n^{\#}(x)=\omega(x_0)\lambda_n^{\ell}(x)$, $x\in[-1,1]$. Então, existem C e $n_0\in\{1,2,3,\dots\}$ dependendo somente de A e J de modo que, para $n\geq n_0$,

$$\omega(x_0)\frac{\left|K_n\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)-K_n^{\#}\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)\right|}{n}\leq C\sqrt{\varepsilon},$$

e o lado esquerdo da desigualdade acima, por (4.40), pode ser reescrito como

$$\frac{\left|\omega(x_0)K_n\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)-K_n^{\ell}\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)\right|}{n}.$$

Assim,

$$\sup_{\substack{a,b\in[-A,A]\\ x_1\in I(x_0,\delta/2)\cap J}}\left|\omega(x_0)K_n\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)-K_n^{\ell}\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)\right|/n\leq C\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.46}$$

Agora, por (4.6), temos

$$(1+\varepsilon)^{-1}\leq\frac{\omega(x_1+a/n)}{\omega(t)}\leq(1+\varepsilon) \quad \text{e} \quad (1+\varepsilon)^{-1}\leq\frac{\omega(x_1+b/n)}{\omega(t)}\leq(1+\varepsilon),$$

para todo $t\in I(x_0,\delta/2)$. De onde segue que

$$(1+\varepsilon)^{-1}\leq\frac{\omega(x_1+a/n)^{1/2}\omega(x_1+a/n)^{1/2}}{\omega(t)}\leq(1+\varepsilon). \tag{4.47}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\frac{\left|\tilde{K}_n\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)-K_n^{\ell}\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)\right|}{n}\\ &\qquad\leq\frac{\left|\omega(x_0)(1+\varepsilon)K_n\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)-K_n^{\ell}\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)\right|}{n}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{\left|\tilde{K}_n\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)-K_n^{\ell}\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)\right|}{n} \leq \frac{\left|\omega(x_0)K_n\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)-K_n^{\ell}\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)\right|}{n}.$$

Finalmente, por (4.40) e pela desigualdade acima, obtemos

$$\frac{\left|\tilde{K}_n\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)-K_n^{\ell}\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)\right|}{n} \leq \frac{\omega(x_0)}{n}\left|K_n\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)-K_n^{\#}\left(x_1+\frac{a}{n},x_1+\frac{b}{n}\right)\right|.$$

Portanto, por (4.46), concluímos que

$$\sup_{\substack{a,b\in[-A,A]\\ x_1\in I(x_0,\delta/2)\cap J}} \left|\tilde{K}_n(x,y)-K_n^L(x,y)\right|/n \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

para $n \geq n_0$. □

4.1.3 Limite de Universalidade

Finalmente, utilizando o resultado de suavização e o fato de que o limite de universalidade vale para o peso de Legendre (KUIJLAARS; VANLESSEN, 2002), vamos demonstrar o limite de universalidade para o caso geral de medidas Stahl-Totik regulares. Pelo critério de Erdös-Turán (Teorema 2.2.3), polinômios ortogonais associados a medidas Stahl-Totik regulares generalizam os polinômios ortogonais com relação aos pesos $\mathrm{e}^{-Q(x)}$ em $[-1,1]$, onde

$$Q(x)=\alpha_{2j}x^{2j}+\cdots+\alpha_0 \quad \alpha_{2j}>0,$$

além dos polinômios ortogonais clássicos, como, por exemplo os polinômios de Jacobi. Isso mostra a generalidade do resultado de Lubinsky. Antes, o limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{K}_n\left(x+a/\tilde{K}_n(x,x),x+b/\tilde{K}_n(x,x)\right)}{\tilde{K}_n(x,x)}=\frac{\operatorname{sen}\pi(a-b)}{\pi(a-b)},$$

foi provado apenas para medidas específicas, como por exemplo para os pesos $\mathrm{e}^{-Q(x)}$ com Q um polinômio como definido acima (DEIFT, 1999; DEIFT *et al.*, 1999; KUIJLAARS; VANLESSEN, 2002).

Teorema 4.1.4. Seja μ uma medida Stahl-Totik regular em $[-1,1]$. Seja $J\subset(-1,1)$ um subconjunto compacto suponha que μ é absolutamente contínua num aberto que contem J e que $\omega=\mu'$ é positiva e contínua em J. Então, uniformemente para $x\in J$ e a,b em algum subconjunto compacto de $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{K}_n\left(x+a/\tilde{K}_n(x,x),x+b/\tilde{K}_n(x,x)\right)}{\tilde{K}_n(x,x)}=\frac{\operatorname{sen}\pi(a-b)}{\pi(a-b)}.$$

Demonstração. A ideia aqui é cobrir o compacto J com subintervalos do tipo

$$I(x_0,\delta/2)=\{x:|x-x_0|\leq\delta/2\},$$

com $x_0\in J$, e utilizar a suavização obtida no Teorema 4.1.3 em cada $I(x_0,\delta/2)$ para em seguida obter a suavização em todo J. A suavização em J e a universalidade para o peso de Legendre implicam na universalidade para μ.

Dados $A,\varepsilon>0$ arbitrários, seja $\delta>0$ como no teorema anterior. Como J é compacto podemos cobri-lo por intervalos $I(x_0,\delta/2)$, isto é,

$$J\subset\bigcup_{j=1}^{M}I(x_j,\delta/2),$$

para algum $M\in\{1,2,\dots\}$. Pelo Teorema 4.1.3, para cada $j=1,2,\dots,M$, existe $n_0(j)\in\{1,2,\dots\}$ tal que

$$\sup_{\substack{a,b\in[-A,A]\\ x\in I(x_j,\delta/2)\cap J}}\left|\tilde{K}_n-K_n^L\left(x+\frac{a}{n},x+\frac{b}{n}\right)\right|/n\leq C\sqrt{\varepsilon},$$

para $n\geq n_0(j)$. Denotando por n_1 o maior desses $n_0(j)$'s, temos

$$\sup_{\substack{x\in J\\ a,b\in[-A,A]}}\left|(\tilde{K}_n-K_n^L)\left(x+\frac{a}{n},x+\frac{b}{n}\right)\right|/n\leq C\sqrt{\varepsilon},$$

para $n\geq n_1$. Como $\varepsilon>0$ é arbitrário e $C>0$ não depende de n e nem de ε,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\substack{x\in J\\ a,b\in[-A,A]}}\left|(\tilde{K}_n-K_n^L)\left(x+\frac{a}{n},x+\frac{b}{n}\right)\right|/n\right)=0. \tag{4.48}$$

A universalidade para o peso de Legendre (KUIJLAARS; VANLESSEN, 2002) nos dá

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\sqrt{1-x^2}}{n}K_n^L\left(x+\frac{u\pi\sqrt{1-x^2}}{n},x+\frac{v\pi\sqrt{1-x^2}}{n}\right)=\frac{\operatorname{sen}\pi(u-v)}{\pi(u-v)}$$

localmente uniforme para $u,v\in\mathbb{R}$ e uniformemente para x em subconjuntos compactos de $(-1,1)$. Tomando $a=u\pi\sqrt{1-x^2}$ e $b=v\pi\sqrt{1-x^2}$ em (4.48) e usando o limite anterior, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\sqrt{1-x^2}}{n}\tilde{K}_n\left(x+\frac{a}{n},x+\frac{b}{n}\right)=\frac{\operatorname{sen}\pi(a-b)}{\pi(a-b)}.$$

Pelo Teorema 4.1.1 e pela fórmula (46) em (MáTé; NEVAI; TOTIK, 1991), temos, para $x\in J$,

$$\frac{\lambda_n(x)}{\omega(x)}=\frac{1}{\tilde{K}_n(x,x)}=\frac{1}{K^L(x,x)}(1+o(1))=\frac{\pi\sqrt{1-x^2}}{n}(1+o(1)),$$

quando $n\to\infty$. Além disso, $1/n\sim\lambda_n(x)=1/K_n(x,x)$ para todo $x\in[-1,1]$ e todo $n=1,2,\dots$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{K}_n\left(x+u/\tilde{K}_n(x,x),x+v/\tilde{K}_n(x,x)\right)}{\tilde{K}_n(x,x)}=\frac{\operatorname{sen}\pi(a-b)}{\pi(a-b)}$$

uniforme para $x\in J$ e u,v em compactos de $\mathbb{R}$. □

Totik (2009), utilizando técnicas exploradas por Geronimo e Assche (1988), além de obter resultados em espaçamentos de zeros de polinômios ortogonais, generalizou o limite de universalidade de Lubinsky para compactos gerais da reta, não se limitando somente ao caso do intervalo $[-1,1]$. Mais adiante, Kroó e Lubinsky (2013) obtiveram novos resultados de universalidade e funções de Christoffel, dessa vez em $\mathbb{R}^n$. Com isso abre-se um leque de possibilidades a ser explorado por este trabalho.

REFERÊNCIAS

ARONSZAJN, N. Theory of reproducing kernels. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 68, p. 337–404, 1950. ISSN 0002-9947. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1990404>. Citado na página 19.

BAIK, J.; DEIFT, P.; SUIDAN, T. **Combinatorics and random matrix theory**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. v. 172. xi+461 p. (Graduate Studies in Mathematics, v. 172). ISBN 978-0-8218-4841-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/gsm/172>. Citado nas páginas 15, 27, 30 e 35.

BAIK, J.; SUIDAN, T. M. Random matrix central limit theorems for nonintersecting random walks. **Ann. Probab.**, v. 35, n. 5, p. 1807–1834, 2007. ISSN 0091-1798. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/009117906000001105>. Citado na página 15.

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. [S.l.]: Springer, New York, 2011. xiv+599 p. (Universitext). ISBN 978-0-387-70913-0. Citado na página 20.

DEIFT, P.; KRIECHERBAUER, T.; MCLAUGHLIN, K. T.-R.; VENAKIDES, S.; ZHOU, X. Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 52, n. 11, p. 1335–1425, 1999. ISSN 0010-3640. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0312(199911)52:11<1335::AID-CPA1>3.0.CO;2-1>. Citado na página 55.

DEIFT, P. A. **Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach**. [S.l.]: New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. v. 3. viii+273 p. (Courant Lecture Notes in Mathematics, v. 3). ISBN 0-9658703-2-4; 0-8218-2695-6. Citado nas páginas 27, 29, 30, 37 e 55.

DURRETT, R. **Probability: theory and examples**. Second. [S.l.]: Duxbury Press, Belmont, CA, 1996. xiii+503 p. ISBN 0-534-24318-5. Citado nas páginas 27 e 28.

DYSON, F. J. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. **Journal of Mathematical Physics**, v. 3, n. 1, p. 140–156, 1962. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1703773>. Citado na página 15.

ERDöS, P.; TURáN, P. On interpolation. III. Interpolatory theory of polynomials. **Ann. of Math. (2)**, v. 41, p. 510–553, 1940. ISSN 0003-486X. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1968733>. Citado na página 25.

FERRARI, P. L. **Lecture notes on Introduction to Integrable Probability**. [S.l.]: University of Bonn, 2020. <h>ttps://wt.iam.uni-bonn.de/ferrari/teaching/lectures-homepages/advtopicsws19. [Accessado em janeiro-2022]. Citado nas páginas 27 e 35.

FOLLAND, G. B. **Real analysis**. Second. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. xvi+386 p. (Pure and Applied Mathematics (New York)). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-31716-0. Citado nas páginas 18, 23 e 24.

GERONIMO, J. S.; ASSCHE, W. V. Orthogonal polynomials on several intervals via a polynomial mapping. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 308, n. 2, p. 559–581, 1988. ISSN 0002-9947. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2001092>. Citado na página 57.

KROó, A.; LUBINSKY, D. S. Christoffel functions and universality in the bulk for multivariate orthogonal polynomials. **Canad. J. Math.**, v. 65, n. 3, p. 600–620, 2013. ISSN 0008-414X. Disponível em: <https://doi.org/10.4153/CJM-2012-016-x>. Citado na página 57.

KUIJLAARS, A. B. J.; VANLESSEN, M. Universality for eigenvalue correlations from the modified Jacobi unitary ensemble. **Int. Math. Res. Not.**, n. 30, p. 1575–1600, 2002. ISSN 1073-7928. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/S1073792802203116>. Citado nas páginas 16, 39, 49, 55 e 56.

LUBINSKY, D. S. A new approach to universality limits involving orthogonal polynomials. **Ann. of Math. (2)**, v. 170, n. 2, p. 915–939, 2009. ISSN 0003-486X. Disponível em: <https://doi.org/10.4007/annals.2009.170.915>. Citado nas páginas 15, 17, 19, 20, 27 e 39.

LYTOVA, A.; PASTUR, L. Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of random matrices with independent entries. **Ann. Probab.**, v. 37, n. 5, p. 1778–1840, 2009. ISSN 0091-1798. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/09-AOP452>. Citado na página 15.

MáTé, A.; NEVAI, P.; TOTIK, V. Szego's extremum problem on the unit circle. **Ann. of Math. (2)**, v. 134, n. 2, p. 433–453, 1991. ISSN 0003-486X. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2944352>. Citado nas páginas 16, 42 e 56.

MEHTA, M. L. On the statistical properties of the level-spacings in nuclear spectra. **Nuclear Physics**, Elsevier, v. 18, p. 395–419, 1960. Citado na página 15.

NEVAI, P. Géza Freud, orthogonal polynomials and Christoffel functions. A case study. **J. Approx. Theory**, v. 48, n. 1, p. 3–167, 1986. ISSN 0021-9045. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0021-9045(86)90016-X>. Citado na página 16.

NEVAI, P. G. Orthogonal polynomials. **Mem. Amer. Math. Soc.**, v. 18, n. 213, p. v+185, 1979. ISSN 0065-9266. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/memo/0213>. Citado na página 46.

RANSFORD, T.; SERIES, C.; BRUCE, J. **Potential Theory in the Complex Plane**. Cambridge University Press, 1995. (London Mathematical Society Student Texts). ISBN 9780521466547. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=bukn-Rs-t3sC>. Citado na página 20.

RIVLIN, T. J. **Chebyshev polynomials**. Second. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. xvi+249 p. (Pure and Applied Mathematics (New York)). From approximation theory to algebra and number theory. ISBN 0-471-62896-4. Citado na página 21.

RUDIN, W. **Real and complex analysis**. Third. [S.l.]: McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. xiv+416 p. ISBN 0-07-054234-1. Citado na página 20.

SAFF, E. B. Logarithmic potential theory with applications to approximation theory. **Surv. Approx. Theory**, v. 5, p. 165–200, 2010. Citado na página 21.

SAFF, E. B.; TOTIK, V. **Logarithmic potentials with external fields**. Springer-Verlag, Berlin, 1997. v. 316. xvi+505 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], v. 316). Appendix B by Thomas Bloom. ISBN 3-540-57078-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03329-6>. Citado nas páginas 17 e 20.

SAITOH, S. **Theory of reproducing kernels and its applications**. [S.l.]: Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. v. 189. x+157 p. (Pitman Research Notes in Mathematics Series, v. 189). ISBN 0-582-03564-3. Citado na página 19.

STAHL, H.; TOTIK, V. **General orthogonal polynomials**. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. v. 43. xii+250 p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 43). ISBN 0-521-41534-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511759420>. Citado nas páginas 15, 17, 19 e 25.

SZEGő, G. **Orthogonal polynomials**. Fourth. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975. xiii+432 p. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXIII). Citado na página 20.

TOTIK, V. Orthogonal polynomials. **Surv. Approx. Theory**, v. 1, p. 70–125, 2005. Citado na página 17.

____. Universality and fine zero spacing on general sets. **Ark. Mat.**, v. 47, n. 2, p. 361–391, 2009. ISSN 0004-2080. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11512-008-0071-3>. Citado na página 57.

WIGNER, E. P. Random matrices in physics. **SIAM review**, SIAM, v. 9, n. 1, p. 1–23, 1967. Citado na página 15.

ICMC USP
SÃO CARLOS