Vera Lúcia Carbone

Problemas Parabólicos em Materiais Compostos Unidimensionais. Propriedade de Morse Smale

Orientador: José Gaspar Ruas Filho

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC- USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Área de Matemática.

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Universidade de São Paulo

Fevereiro de 2003

São Carlos, SP

Dedico este trabalho àquela que me ensinou o que os livros não contam:
minha Mãe Madalena.

*Agradecimentos*¹

Porque és precioso a meus olhos, porque eu te aprecio e te amo,
permuto reinos por ti, entrego nações em troca de ti.
Fica, tranqüilo, pois estou contigo.

Isa 43, 4.5.

Agradeço a Deus, o Bom Pai, por tudo que fez, faz e fará em minha vida.

Ao Gaspar, pela paciência, preocupação, dedicação, disponibilidade e confiança. Neste período de convivência muito aprendi com você, obrigada por tudo.

À minha mãe Madalena todos os agradecimentos seriam poucos. À minha irmã Renata pelo afeto, carinho, pelas conversas que muito contribuíram para o nosso amadurecimento. Amo vocês!

Aos amigos Licinha, Yoshiko F. Akashi e Nelson Akashi, jamais esquecerei seus esforços para o meu ingresso na universidade, onde toda esta história começou. Aos professores da Unesp de Presidente Prudente, pelo carinho e incentivo.

Aos amigos Maria Alice, Luciana, Eliane, Márcio e José, não tenho palavras para dizer o quanto vocês são importantes para mim.

Ao grupo de oração São Francisco de Assis, um grupo pequeno, porém formado por grandes pessoas na fé, com as quais muito aprendi.

Aos amigos de curso German e Daniel Mancini pelo companheirismo, pelas discussões matemáticas que muito contribuíram.

Aos amigos Luciene, Andréa, Daniela, Dulcimar, Regilene, Tinho, Ana Cláudia, Gean, Fernando, Ana Paula e Claudemir Aniz pelas conversas e incentivo.

À Thelma, Peter, Fabiano, Daniela, Ezequiel e Gian, pessoas queridas com as quais compartilhei momentos agradáveis e muito me alegraram.

Aos amigos Liane, Humberto e Raimundo, pelo otimismo e positividade.

Aos professores e amigos Farid, Maria do Carmo e Ires, por todo o carinho, preocupação e presença nos momentos difíceis.

Aos professores e funcionários do ICMC-USP de São Carlos, pela dedicação, atenção e presteza que sempre tiveram comigo.

¹ O desenvolvimento desta tese teve o suporte financeiro da FAPESP.

Resumo

Neste trabalho estudamos problemas de reação difusão em domínios unidimensionais que surgem de materiais compostos e obtemos resultados comparando os fluxos do problema original e do problema limite quando a difusão fica muito grande em partes do domínio. Provamos que os autovalores e autofunções do operador linear ilimitado associado à equação limite têm a propriedade de Sturm Liouville e provamos que as soluções do problema de reação difusão têm a propriedade do decrescimento do número de zeros ao longo do tempo. Estes resultados são usados para provar que as variedades instável e estável de pontos de equilíbrios são genericamente transversais e que o fluxo no atrator para o problema de reação difusão é genericamente estruturalmente estável. Estes fatos permitem obter a equivalência topológica dos fluxos restritos aos atratores dos problemas original e seu problema limite.

Abstract

In this work we study some reaction-diffusion problems in one dimensional domains that arise from composite materials. We obtain some results comparing the flux of the original problem and the flux of the limit problem when the diffusion becomes large on parts of the physical domain. We prove that the eigenvalues and eigenfunctions of the linear unbounded operator associated with the equation have the Sturm Liouville property and also that the solutions of the reaction diffusion equation have the property that the zeros do not increase with time. These results are used to obtain that the stable and unstable manifolds of equilibrium points are generically transversal and that the flux on the attractor for the reaction diffusion problem is generically structurally stable. Using this we are able to prove the topological equivalence of the fluxes restricted to the attractors of the original and the limit problem.

Sumário

Introdução	1
1. Teoremas de Existência e Resultados Básicos	6
2. Resultados Preliminares	16
2.1 Propriedades de Sturm-Liouville	17
2.2 Decrescimento do Número de Componentes	29
3. Transversalidade das Variedades Estável e Instável	39
3.1 Comportamento Assintótico	39
3.2 Transversalidade	55
4. Variedades Invariantes	62
4.1 Teorema da Variedade Invariante	63
4.2 Convergência dos Autovalores e Autofunções do Operador A_ε	76
4.3 Existência da Variedade Invariante para os Problemas (P_ε) e (P_0) Truncados	85
5. Equivalência Topológica	93
5.1 C^0 -Proximidade das Variedades Invariantes	98
5.2 C^1 -Proximidade das Variedades Invariantes	102
Referências Bibliográficas	117

Introdução

Neste trabalho discutiremos problemas parabólicos de segunda ordem para os quais o coeficiente de difusão torna-se grande em um subconjunto que está no interior do domínio físico da equação diferencial. Esta situação pode ser encontrada, por exemplo, em materiais compostos onde as propriedades de difusão do calor podem mudar significativamente de uma parte da região, para a outra, isto é, o calor difunde-se mais rapidamente em algumas sub-regiões do que em outras.

Sejam $\Omega = (0, 1)$ aberto da reta, ε um parâmetro positivo. Nosso objetivo é estudar o comportamento, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ das soluções da equação diferencial parabólica

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = (p_\varepsilon(x)u_x^\varepsilon)_x + c(x)u^\varepsilon + f(u^\varepsilon), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x)u^\varepsilon = g(u^\varepsilon), & x \in \{0, 1\} \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

onde $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} = p_\varepsilon(x)\langle u_x^\varepsilon, \vec{n}_\varepsilon \rangle$. Os coeficientes de difusão p_ε , são funções regulares e limitadas em Ω satisfazendo

$$0 < m_0 \leq p_\varepsilon(x) \leq M_\varepsilon$$

para todo $x \in \Omega$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Sejam m um inteiro positivo, $\Omega_0 = \cup_{i=1}^m \Omega_{0,i}$ um subconjunto do interior de Ω , onde $\Omega_{0,i} = (a_i, b_i)$ é um subconjunto de Ω com $\bar{\Omega}_0 \subset (0, 1)$ e

$$\bar{\Omega}_{0,i} \cap \bar{\Omega}_{0,j} = \emptyset \quad \text{para } i \neq j.$$

Denote por $\Omega_1 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_0$. Assumimos que a difusão é muito grande em Ω_0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Mais precisamente vamos supor que

$$p_\varepsilon(x) \rightarrow \begin{cases} p(x) & \text{uniformemente sobre } \Omega_1 \\ \infty & \text{uniformemente em compactos de } \Omega_0 \end{cases} \quad (0.1)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde $p > 0$ e diferenciável em Ω_1 .

Obtemos a seguir a equação limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Uma vez que difusibilidade grande implica em uma rápida redistribuição das não-homogeneidades espaciais, para valores pequenos de ε , a solução do problema (P_ε) deverá ser aproximadamente espacialmente constante em Ω_0 . Por esta razão, suponha que u^ε converge para alguma função u , em algum sentido, e que assume, dependendo do tempo, um valor espacialmente constante sobre Ω_0 , que denotaremos por $u_{\Omega_0}(t)$.

Se, formalmente fizermos $\varepsilon \rightarrow 0$ na equação (P_ε) esperamos que em Ω_1 a função u satisfaça

$$\begin{cases} u_t = (p(x)u_x)_x + c(x)u + f(u), & x \in \Omega_1, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = g(u), & x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

A constante $u_{\Omega_0}(t)$, contudo não pode ser arbitrária. De fato integrando a equação (P_ε) em Ω_0 , obtemos para cada $i = 1, \dots, m$

$$\int_{a_i}^{b_i} u_t^\varepsilon(x, t) dx = \int_{a_i}^{b_i} (p_\varepsilon(x)u_x^\varepsilon(x, t))_x dx + \int_{a_i}^{b_i} c(x)u^\varepsilon(x, t) dx + \int_{a_i}^{b_i} f(u^\varepsilon(x, t)) dx$$

ou seja,

$$\int_{a_i}^{b_i} u_t^\varepsilon(x, t) dx = (p_\varepsilon(x)u_x^\varepsilon(x, t))|_{a_i}^{b_i} + \int_{a_i}^{b_i} c(x)u^\varepsilon(x, t) dx + \int_{a_i}^{b_i} f(u^\varepsilon(x, t)) dx.$$

Tomando o limite formalmente, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que

$$\int_{a_i}^{b_i} \dot{u}_{\Omega_0}(t) dx = p(b_i)u_x(b_i^+, t) - p(a_i)u_x(a_i^-, t) + \int_{a_i}^{b_i} c(x)dx u_{\Omega_0}(t) + \int_{a_i}^{b_i} f(u_{\Omega_0}(t)) dx,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\Omega_0}(t) &= \frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+, t) - p(a_i)u_x(a_i^-, t)] \\ &\quad + \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} c(x)dx u_{\Omega_0}(t) + f(u_{\Omega_0}(t)). \end{aligned}$$

Obtemos então o seguinte problema limite

$$\begin{cases} u_t = (p(x)u_x)_x + c(x)u + f(u), & x \in \Omega_1 \\ \dot{u}_{\Omega_0,i}(t) = \frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+, t) - p(a_i)u_x(a_i^-, t)] + \hat{c}_i u_{\Omega_0,i}(t) + f(u_{\Omega_0,i}(t)) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, m \\ \frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = g(u), & x \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (P_0)$$

onde $\hat{c}_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} c(x) dx$ e $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = p(x) \langle u_x, \vec{n} \rangle$.

Este tipo de equação foi estudada por Rodríguez-Bernal [11] e por Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal [3] no caso n -dimensional. Utilizaremos os resultados obtidos nestes artigos.

Henry [9] e Angenent [1] obtiveram o surpreendente resultado que para equações de reação-difusão unidimensional

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$$

$$\alpha u_x(0) + \beta u(0) = 0$$

$$\gamma u_x(1) + \delta u(1) = 0$$

as variedades estáveis e instáveis de pontos de equilíbrio hiperbólicos se intersectam transversalmente para toda função f . Este resultado depende de maneira crucial da propriedade de Sturm-Liouville que as equações linearizadas de equações unidimensionais têm. Na primeira parte de nosso trabalho estendemos o resultado de Henry para as equações do tipo limite acima. Como se deve esperar precisamos mostrar que estas equações também têm a propriedade de Sturm-Liouville.

No Capítulo 1, reunimos os teoremas obtidos por Rodríguez-Bernal [11] e por Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal [3] que garantem condições para a existência de soluções, globalmente definidas, existência de atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_0$ para os problemas (P_ε) e (P_0) respectivamente. Além disso um resultado de limitação uniforme sobre os atratores é enunciado. Enunciamos também alguns resultados da teoria geral de equações diferenciais parciais, cujas demonstrações se encontram em Henry [8, 9] que serão utilizados ao longo do trabalho.

No Capítulo 2, provamos que o problema limite (P_0) tem a propriedade de Sturm-Liouville. Também provamos que o decréscimo do número de componentes determinadas pelos zeros das soluções ao longo do tempo. Para provar este resultado precisamos provar um teorema do mínimo para equações do tipo (P_0) . A propriedade acima será fundamental para a prova da transversalidade das variedades estável e instável do problema limite (P_0) .

No Capítulo 3, caracterizamos as soluções da equação linear do problema limite (P_0) , assim como da sua equação adjunta; utilizando as soluções destas equações caracterizamos os espaços tangentes às variedades estável e instável. Com estes resultados juntamente com os resultados obtidos no Capítulo 2, provamos a transverso-

lidade das variedades estável e instável de soluções de equilíbrio do problema limite (P_0) .

Na segunda parte do nosso trabalho mostramos que as equações (4.31) e (4.39) estão C^1 -próximas. Em seguida utilizando que a equação (4.32) tem a propriedade de Morse-Smale mostramos que o fluxo nos atratores são topologicamente equivalentes. Sejam os operadores A_ε e A_0 determinados pelos problemas (P_ε) e (P_0) respectivamente, dados por

$$A_\varepsilon \phi = -(p_\varepsilon(x)\phi_x)_x - c(x)\phi.$$

e

$$A_0 \phi = -[(p(x)\phi_x)_x + c(x)\phi]\chi_{\Omega_1} - \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\phi_x(b_i^+) - p(a_i)\phi_x(a_i^-)] + \hat{c}_i \phi \right] \chi_{\Omega_{0,i}}.$$

No Capítulo 4, provamos o conhecido Teorema da Variedade Invariante, caracterizando uma variedade invariante, para o problema (P_ε) , como gráfico de uma aplicação $\sigma_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ que é ponto fixo de

$$G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon)(\eta) = \int_{-\infty}^0 e^{\hat{A}_\varepsilon s} f^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) ds$$

e $y_\varepsilon(s, \eta)$ é solução da equação

$$\begin{cases} \text{onde } \frac{dy}{dt} = -B^\varepsilon y + g^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y), y), & t < 0 \\ y(0) = \eta. \end{cases} \quad (0.2)$$

Analogamente, caracterizamos uma variedade invariante para o problema limite (P_0) , como gráfico de uma aplicação $\sigma_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow X$, que é ponto fixo de

$$G_0(\sigma_0)(\eta) = \int_{-\infty}^0 e^{\hat{A}_0 s} f^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) ds$$

e $y_0(s, \eta)$ é solução da equação

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -B^0 y + g^0(\sigma_0(y), y), & t < 0 \\ y(0) = \eta. \end{cases} \quad (0.3)$$

Para usarmos o Teorema da Variedade Invariante, precisamos mostrar a propriedade que geralmente é denominada de "gap", isto é para n suficientemente grande a diferença dos autovalores do operador A_ε , $\lambda_{n_1}^\varepsilon - \lambda_n^\varepsilon$ é suficientemente grande.

Considere o seguinte resultado de Rodríguez-Bernal [11]

Teorema 0.1

Sejam

$$\lambda_0^\varepsilon \leq \lambda_1^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_{n-1}^\varepsilon \leq \lambda_n^\varepsilon \leq \dots$$

os autovalores de A_ε e $\{\phi_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ as autofunções associadas. Considere

$$\lambda_0^0 \leq \lambda_1^0 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}^0 \leq \lambda_n^0 \leq \dots$$

os autovalores de A_0 e $\{\phi_n^0\}_{n=1}^\infty$ as autofunções associadas.

Então as seguintes conclusões são verdadeiras.

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n^\varepsilon \rightarrow \lambda_n^0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, e para cada seqüência convergindo para zero, que denotaremos $\varepsilon \rightarrow 0$, existe uma subseqüência ε_j tal que

$$\phi_n^{\varepsilon_j} \rightarrow \phi_n^0 \in H_{\Omega_0}^1(0, 1) \quad \text{quando} \quad j \rightarrow +\infty$$

fortemente em $H^1(0, 1)$ e $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} p_{\varepsilon_j} |D\phi_n^{\varepsilon_j}|^2 = 0$.

Utilizando este resultado provamos que os autovalores do operador A_0 também têm a propriedade do "gap".

Com estas informações mostramos a existência da variedade invariante para os sistemas determinados pelos problemas (P_ε) e (P_0) .

No Capítulo 5, utilizando a caracterização das variedades invariantes pelas funções σ_ε e σ_0 provamos que σ_ε e σ_0 estão C^1 -próximas. Com este resultado obtemos que para ε suficientemente pequeno o fluxo de (P_ε) , sobre o atrator $\mathcal{A}_\varepsilon$ e o fluxo de (P_0) sobre o atrator $\mathcal{A}_0$ são topologicamente equivalentes.

1

Teoremas de Existência e Resultados Básicos

Neste capítulo discutiremos condições para existência de soluções e também condições sob as quais as soluções dos problemas (P_ε) e (P_0) estejam globalmente definidas e os semigrupos associados à estes problemas possuam atratores globais. Também enunciaremos um resultado sobre a limitação uniforme dos atratores.

Equações do tipo (P_0) foram estudadas, no caso n -dimensional, por Rodríguez-Bernal [11] e por Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal [3]. Os resultados que enunciaremos a seguir e a notação que usaremos neste capítulo são destes artigos.

As seguintes hipóteses sobre as não linearidades f e g serão utilizadas nos enunciados dos teoremas.

(G) Condição de Crescimento

Se $X = L^2(0, 1)$ sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções localmente lipschitzianas, tais que

$$|j(u) - j(v)| \leq c(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})|u - v|$$

com $j = f$ ou $j = g$, e expoentes ρ_f e ρ_g , respectivamente, onde $\rho_g < 3$.

Se $X = H^1(0, 1)$ tomamos $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções localmente lipschitzianas.

(S) Condição de Sinal

Existem B_0, C_0 reais e $B_1, C_1 \geq 0$ tais que as desigualdades

$$uf(u) \leq -C_0u^2 + C_1|u|,$$

$$ug(u) \leq -B_0u^2 + B_1|u|.$$

se verificam para $u \in \mathbb{R}$.

(D_ε) Condição de Dissipatividade

(S) se verifica e com B_0 e C_0 da condição **(S)** o primeiro autovalor λ_1^ε seguinte problema é positivo

$$\begin{cases} -(p_\varepsilon(x)u_x)_x + (C_0 - c(x))u = \mu u, & \text{em } (0, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + (b(x) + B_0)u = 0, & \text{para } x = 0, 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Em particular, como o coeficiente de difusão p_ε satisfaz (0.1), de [11] obtemos que o primeiro autovalor λ_1^ε , de (1.1), converge para o primeiro autovalor, λ_1^0 do problema limite de autovalores

$$\begin{cases} -(p(x)u_x)_x + (C_0 - c(x))u = \mu u, & \text{em } \Omega_1 \\ \frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+) - p(a_i)u_x(a_i^-)] + (C_0 - \hat{c}_i)u_{\Omega_{0,i}} = \mu u_{\Omega_{0,i}}, & i = 1, \dots, m \\ \frac{\partial u}{\partial n} + (b(x) + B_0)u = 0, & \text{para } x = 0, 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\hat{c}_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} c(x) dx$.

Portanto, se $\lambda_1^0 > 0$ então, para ε suficientemente pequeno, teremos $\lambda_1^\varepsilon > 0$, o que motiva a seguinte condição.

(D₀) Condição de Dissipatividade

(S) se verifica e o primeiro autovalor, λ_1^0 , do problema (1.2) é positivo.

Os resultados que seguem são enunciados em [2] e as demonstrações podem ser encontradas em Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal [3].

Teorema 1.1

*Seja $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e suponha que f, g satisfaçam a condição de crescimento **(G)**. Então para qualquer $u_0 \in X$ existe localmente uma única solução fraca $u^\varepsilon(\cdot, u_0) \in C([0, \tau), X)$, do problema (P_ε) satisfazendo $u_\varepsilon(0, u_0) = u_0$ em X . Esta solução depende continuamente do valor inicial $u_0 \in X$ e é uma solução clássica para $t > 0$.*

Para que as soluções do problema (P_ε) estejam globalmente definidas iremos assumir a condição de sinal (S) sobre as não-linearidades f e g .

Teorema 1.2

Seja $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Suponha que as condições de crescimento **(G)** e a de sinal **(S)** estejam satisfeitas. Então, para qualquer $u_0 \in X$ a solução $u_\varepsilon(t, u_0)$ de (P_ε) começando em u_0 existe para todo $t \geq 0$. Portanto podemos definir em X o semigrupo $\{S_\varepsilon(t) : t \geq 0\}$ associado a (P_ε) por $S_\varepsilon(t)u_0 = u_\varepsilon(t, u_0)$, $t \geq 0$.

Para garantir a existência de atrator global para o problema (P_ε) iremos impor, juntamente com a condição de sinal **(S)**, a condição de dissipatividade **(D_ε)**.

Teorema 1.3

Seja $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e suponha que a condição de crescimento **(G)** e a condição de dissipatividade **(D_ε)** se verifiquem. Então o semigrupo $\{S_\varepsilon(t), t \geq 0\}$ associado a (P_ε) tem um atrator global, $\mathcal{A}_\varepsilon$, em X .

Com as condições **(G)** e **(D₀)** podemos estabelecer um limitação uniforme para as soluções no atrator.

Teorema 1.4

Suponha que a condição de crescimento **(G)** e a condição de dissipatividade **(D₀)** se verifiquem. Então, para ε suficientemente pequeno e para qualquer solução global $\{v(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A}^\varepsilon$ temos

1. $\|v\|_{C^0([0,1])} + \|v_t\|_{L^\infty(0,1)} \leq K_0$, onde $K_0 = K_0((0,1), \lambda_1^0, m_0, c, b, C_0, C_1, B_0, B_1)$.
2. $\|v\|_{H^1(0,1)} + \|v_t\|_{H^1(0,1)} \leq \tilde{K}_0$, onde $\tilde{K}_0 = \tilde{K}_0((0,1), \lambda_1^0, m_0, c, b, C_0, C_1, B_0, B_1)$.
3. Para $x_0 \in [0,1]$ e $\rho_0 > 0$, existe um $\nu \in (0,1)$ tal que

$$\sup_{v \in \mathcal{A}_\varepsilon} \{\|v\|_{C^\nu([0,1] \cap B(x_0, \rho_0))}\} \leq K_\nu^\varepsilon,$$

onde K_ν^ε depende de $(0,1), \lambda_1^0, m_0, c, b, C_0, C_1, B_0, B_1$ como K_0 e também de $\nu, M_\varepsilon^{\rho_0} = \sup\{p_\varepsilon(x) : x \in [0,1] \cup B(0, 2\rho_0)\}$, $\sup\{|f'(s)| : |s| \leq K_0\}$ e $\sup\{|g'(s)| : |s| \leq K_0\}$.

Para estudar o problema limite colocamos

$$L_{\Omega_0}^2(0,1) = \{u \in L^2(0,1) : u \text{ é constante em } \Omega_{0,i} \text{ } i = 1, \dots, m\}$$

e

$$H_{\Omega_0}^1(0, 1) = \{u \in H^1(0, 1) : u \text{ é constante sobre } \Omega_{0,i} \ i = 1, \dots, m\}.$$

Seja $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L_{\Omega_0}^2(0, 1) \rightarrow L_{\Omega_0}^2(0, 1)$ onde

$$\mathcal{D}(A_0) = \{\phi \in H_{\Omega_0}^1(0, 1) : (p(x)\phi_x)_x \in L_{\Omega_0}^2(0, 1) \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} + b(x)\phi = 0 \text{ em } \{0, 1\}\}$$

com

$$A_0\phi = -[(p(x)\phi_x)_x + c(x)\phi]\chi_{\Omega_1} - \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\phi_x(b_i^+) - p(a_i)\phi_x(a_i^-)] + \hat{c}_i\phi \right] \chi_{\Omega_{0,i}}$$

para $\phi \in \mathcal{D}(A_0)$, e $\hat{c}_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} c(x)dx$.

Escrevemos (P_0) na forma abstrata, no espaço dual,

$$u_t = -A_0u + h^0(u)$$

onde a não linearidade h^0 satisfaz

$$\langle h^0(u), \varphi \rangle = \int_0^1 f(u(x))\varphi(x)dx + g(u(0))\varphi(0) + g(u(1))\varphi(1)$$

para qualquer função suficientemente regular φ . Veja Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal [4] para detalhes.

Teorema 1.5

Para qualquer $u_0 \in L_{\Omega_0}^2(0, 1)$ existe uma única solução fraca, globalmente definida $u(\cdot, u_0) \in C([0, \infty), L_{\Omega_0}^2(0, 1)) \cap C((0, \infty), H_{\Omega_0}^1(0, 1))$ de

$$u_t = -A_0u + h^0(u)$$

começando em u_0 . Além disso esta solução depende continuamente da condição inicial e satisfaz $u, u_t \in C((0, \infty), X_0^\gamma)$, para qualquer $\gamma < 3/4$, onde $X_0 = L_{\Omega_0}^2(0, 1)$. Além disso, se u_0 está em um conjunto limitado de $L_{\Omega_0}^2(0, 1)$ então para $t > 0$ fixado, $u(t, u_0)$ está em um subconjunto limitado de X_0^γ para qualquer $\gamma < 3/4$. Se a condição inicial está em $H_{\Omega_0}^1(0, 1) = X_0^{1/2}$ então a solução também está em $C([0, \infty), H_{\Omega_0}^1(0, 1))$.

A condição (D_0) também assegura a existência de um atrator $\mathcal{A}_0$ para o problema limite (P_0) .

Teorema 1.6

Suponha que as não linearidades $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ são funções globalmente Lipschitz e que a condição $(\mathbf{D}_0)$ está satisfeita. Então (P_0) está bem-posto em $H_{\Omega_0}^1(0, 1)$ e tem um atrator $\mathcal{A}_0$. Além disso, $\mathcal{A}_0$ atrai conjuntos limitados de $L_{\Omega_0}^2(0, 1)$ na topologia de $H^1(0, 1)$ e está em um subconjunto limitado de $C^\alpha[0, 1]$ para algum positivo α .

Os próximos resultados da teoria geral de equações diferenciais parabólicas podem ser encontrados em Henry [8]. O primeiro deles caracteriza as variedades estável e instável de um ponto de equilíbrio.

Teorema 1.7

Sejam A um operador setorial em um espaço de Banach X e $f : U \rightarrow X$ onde U é uma vizinhança cilíndrica em $\mathbb{R} \times X^\alpha$, para algum $\alpha < 1$, de $(\tau, \infty) \times \{x_0\}$, onde x_0 é ponto de equilíbrio da equação

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(x, t), \quad t > t_0. \quad (1.3)$$

Suponha que $f(t, x_0 + z) = Ax_0 + Bz + g(t, z)$, onde $B \in \mathcal{L}(X^\alpha, X)$, $g(t, 0) = 0$ e $\|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| \leq k(\rho)\|z_1 - z_2\|_\alpha$ para $\|z_1\|_\alpha \leq \rho$, $\|z_2\|_\alpha \leq \sigma$ onde $k(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0^+$; podemos assumir $k(\cdot)$ não-decrescente.

Suponha também, que $L = A - B$ e $\sigma(L)$ é disjunto do eixo imaginário, e decompõe o espaço X , em $X = X_1 \oplus X_2$ correspondendo aos conjuntos espectrais $\sigma_1 = \sigma(L) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) < 0\}$ e $\sigma_2 = \sigma(L) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) > 0\}$. Sejam E_1 e E_2 as projeções sobre X_1 e X_2 , respectivamente.

Então existem $\rho > 0$ e $M \geq 1$ tais que

1. A variedade estável local $W^s = W^s(t_0, \rho)$ é

$$W^s = \{z_0; \|E_2 z_0\|_\alpha \leq \frac{\rho}{2M}, \|z(t : t_0, z_0)\|_\alpha \leq \rho \text{ para todo } t > t_0\},$$

e $E_2|_{W^s} : W^s \rightarrow B_{X_2^\alpha}(0, \frac{\rho}{2M})$ é um homeomorfismo. Além disso, W^s é tangente a X_2^α na origem e se $z_0 \in W^s$, $\|z(t; t_0, z_0)\|_\alpha \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

2. A variedade instável local $W^u = W^u(t_0, \rho)$ é

$$W^u = \{z_0; \|E_1 z_0\|_\alpha \leq \frac{\rho}{2M}, z(t : t_0, z_0) \text{ é uma solução sobre } (-\infty, t_0), \\ \|z(t : t_0, z_0)\|_\alpha \leq \rho \text{ para todo } t \leq t_0\},$$

e $E_1|_{W^u} : W^u \rightarrow B_{X_1^\alpha}(0, \frac{\rho}{2M})$ é um homeomorfismo. Além disso, W^u é tangente a X_1 na origem e se $z_0 \in W^u$, $z(t; t_0, z_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$.

3. Se $\|E_{1,2}\|_\alpha \leq \frac{\rho}{2M}$ e $\|z(t; t_0, z_0)\|_\alpha \leq \rho$ para qualquer $t \geq t_0$ ou $t \leq t_0$ então $z_0 \in W^s \cup W^u$.

Na prova deste teorema Henry [8] obtém as seguintes caracterização dos espaços tangentes às variedades estável e instável.

Considere a equação linearizada de (1.3) em torno de um equilíbrio $\bar{x}$,

$$\frac{dy}{dt} = (f_x(\bar{x}, t) - A)y. \quad (1.4)$$

Se $z_0 \in W^s$ então o espaço tangente à variedade estável é caracterizado por

$$\begin{aligned} T_{z_0}W^s(\bar{x}) = \{y(t_0, \cdot) : y \text{ resolve (1.4) sobre } t_0 < t < \infty \text{ e } \|y(t, \cdot)\|_{L^2} = O(e^{-\varepsilon t}) \\ \text{quando } t \rightarrow +\infty, \text{ para algum } \varepsilon > 0\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Se $z_0 \in W^u$ então o espaço tangente à variedade instável é caracterizado por

$$\begin{aligned} T_{z_0}W^u(\bar{x}) = \{y(t_0, \cdot) : y \text{ resolve (1.4) sobre } -\infty < t < 0 \text{ e } \|y(t, \cdot)\|_{L^2} = O(e^{\varepsilon t}) \\ \text{quando } t \rightarrow -\infty, \text{ para algum } \varepsilon > 0\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Os resultados que enunciamos a seguir foram obtidos por Henry [9]. São resultados de Análise Funcional e tratam do comportamento assintótico de soluções de especiais equações de diferença em espaços de Banach e seus corolários que são aplicações destes resultados ao estudo de equações diferenciais. Estes resultados serão utilizados, da mesma maneira que Henry, na demonstração da transversalidade das variedades estável e instável.

Teorema 1.8

Sejam X um espaço de Banach e $A_n, B_n : X \rightarrow X$ operadores lineares contínuos para $n = 0, 1, 2, \dots$, com

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_{n+1} - A_n\| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\| < \infty$$

e suponha que

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$$

tem um autovalor simples $\mu \neq 0$ e o restante do espectro de A é disjunto do círculo de centro em 0 e raio $|\mu|$. Para n suficientemente grande, existe um único autovalor simples μ_n de A_n próximo de μ ; para outros valores de n , seja $\mu_n = 1$. Seja v o autovalor de A , $Av = \mu v \neq 0$.

Então existe uma seqüência $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ em X , para algum n_0 , tal que

$$x_{n+1} = (A_n + B_n)x_n, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e

$$x_n = \prod_{0 \leq k \leq n} \mu_k(v + o(1)), \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

O valor de μ_k para $k \leq n_0$ não é importante.

Se A_n, B_n são seqüências de operadores para n negativo e $\sum_{n=-\infty}^{-1} \|A_{n+1} - A_n\| < \infty$, $\sum_{n=-\infty}^0 \|B_n\| < \infty$ e $A = \lim_{n \rightarrow -\infty} A_n$ obtemos a seqüência $\{x_n\}_{n \leq -n_0}$, para algum n_0 tal que

$$x_{n+1} = (A_n + B_n)x_n, \text{ para } n < -n_0$$

e

$$x_n = \prod_{n \leq k \leq 0} \mu_k^{-1}(v + o(1)), \text{ quando } n \rightarrow -\infty.$$

Como corolário obtemos a seguinte aplicação à semigrupos.

Corolário 1.9

Suponha que $L(t)$ é o gerador de um semigrupo para todo $t \geq 0$, $e^{L(n)} = A_n$ para inteiros n e $\|e^{sL(n)}\|$ é limitado para $n \geq 0$, $0 \leq s \leq 1$. Também suponha, se $\{x_n, n \geq n_0\}$ é a seqüência proveniente do Teorema 1.8, temos $x_n = x(n)$, para todo n , onde $x(t)$ é definida para todo real $t > t_0$ satisfazendo $\|x(t+s) - e^{sL(t)}x(t)\| = o(\|x(t)\|)$ quando $t \rightarrow +\infty$, uniformemente para $0 \leq s \leq 1$. Além disso, suponha que $L(t)$ tem um autovalor $\lambda(t)$ (para t grande) com $e^{\lambda(t)} \rightarrow \mu$ quando $t \rightarrow +\infty$ com a correspondente autofunção $v(t) \rightarrow v$, e suponha que

$$\int_0^\infty |\dot{\lambda}(t)| < \infty.$$

Então para alguma constante $c \neq 0$

$$x(t) = c \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(r) dr\right)[v + o(1)], \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

O mesmo resultado vale para $t \leq 0$. Suponha que $L(t)$ é o gerador de um semigrupo para todo $t \leq 0$, $\|e^{sL(n)}\|$ é limitado para $n \leq 0$, $0 \leq s \leq 1$. Seja $\{x_n, n \leq -n_0\}$ com $x_n = x(n)$ e $x(t)$ é definida para todo real $t < -t_0$, satisfazendo $\|x(t+s) - e^{sL(t)}x(t)\| = o(\|x(t)\|)$ quando $t \rightarrow -\infty$, uniformemente para $0 \leq s \leq 1$. Suponha também que $e^{\lambda(t)} \rightarrow \mu$ quando $t \rightarrow -\infty$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\lambda}(t)| < \infty.$$

Então para alguma constante $c \neq 0$

$$x(t) = c \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(r) dr\right)[v + o(1)], \text{ quando } t \rightarrow -\infty.$$

O próximo teorema faz uso da seqüência obtida no Teorema 1.8 e considera o caso em que o espectro do operador limite não intersecciona um anel no plano complexo.

Teorema 1.10

Sejam X espaço de Banach e $A : X \rightarrow X$ um operador linear contínuo cujo espectro é disjunto do anel $\{z : a \leq |z| \leq b\}$ para algum $0 < a \leq b$. Sejam $X = X_1 \oplus X_2$, $A = A_1 \oplus A_2$, de modo que $A_1 = A|_{X_1}$ tem espectro em $\{z : |z| > b\}$ e $A_2 = A|_{X_2}$ tem espectro em $\{z : |z| < a\}$. Seja $\{x_n, n \geq n_0\}$ uma seqüência em X tal que

$$\|x_{n+1} - Ax_n\| = o(\|x_n\|), \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

e $x_n \neq 0$ para todo n . Se $x_n^j, j = 1, 2$ é a componente de x_n em X_j e c satisfaz $a \leq c \leq b$, então ou

$$\frac{\|x_n^2\|}{\|x_n^1\|} \rightarrow 0 \quad e \quad \frac{\|x_n\|}{c^n} \rightarrow +\infty, \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

ou

$$\frac{\|x_n^2\|}{\|x_n^1\|} \rightarrow +\infty \quad e \quad \frac{\|x_n\|}{c^n} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Se $\{x_n, n \leq -n_0\}$ é uma seqüência em X tal que

$$\|x_{n+1} - Ax_n\| = o(\|x_n\|), \text{ quando } n \rightarrow -\infty$$

$x_n \neq 0$ para todo n , $x_n^j, j = 1, 2$ e c como acima, então ou

$$\frac{\|x_n^2\|}{\|x_n^1\|} \rightarrow 0 \quad e \quad \|x_n\|/c^n \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow -\infty$$

ou

$$\frac{\|x_n^2\|}{\|x_n^1\|} \rightarrow +\infty \text{ e } \|x_n\|/c^n \rightarrow +\infty, \text{ quando } n \rightarrow -\infty.$$

Corolário 1.11

Suponha que $\{e^{Lt}, t \geq 0\}$ é um C^0 -semigrupo em X e o espectro de e^L não intersecta o anel $\{z : e^\alpha \leq |z| \leq e^\beta\}$ para algum real $\alpha < \beta$. Sejam $X = X_1 \oplus X_2$, $L = L_1 \oplus L_2$ a correspondente decomposição de modo que $e^{L_1 t}$ tem espectro em $\{z : |z| > e^{\beta t}\}$ e $e^{L_2 t}$ tem espectro em $\{z : |z| < e^{\alpha t}\}$ quando $t > 0$. Suponha que $x(t) \in X$ para todo $t \geq t_0$, $x(t) \neq 0$ e

$$\|x(t+s) - e^{sL}x(t)\| = o(\|x(t)\|)$$

quando $t \rightarrow +\infty$, uniformemente para $0 \leq s \leq 1$. Então para qualquer $\alpha \leq \gamma \leq \beta$
ou

$$\frac{\|x^2(t)\|}{\|x^1(t)\|} \rightarrow 0 \text{ e } \|x(t)\|e^{-\gamma t} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty$$

ou

$$\frac{\|x^2(t)\|}{\|x^1(t)\|} \rightarrow +\infty \text{ e } \|x(t)\|e^{-\gamma t} \rightarrow +\infty, \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (1.7)$$

Suponha que $x(t) \in X$ para todo $t \leq -t_0$, $x(t) \neq 0$ e

$$\|x(t+s) - e^{sL}x(t)\| = o(\|x(t)\|)$$

quando $t \rightarrow -\infty$, uniformemente para $0 \leq s \leq 1$. Então para qualquer $\alpha \leq \gamma \leq \beta$
ou

$$\frac{\|x^2(t)\|}{\|x^1(t)\|} \rightarrow 0 \text{ e } \|x(t)\|e^{-\gamma t} \rightarrow +\infty, \text{ quando } t \rightarrow -\infty$$

ou

$$\frac{\|x^2(t)\|}{\|x^1(t)\|} \rightarrow +\infty \text{ e } \|x(t)\|e^{-\gamma t} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty.$$

No decorrer do trabalho utilizaremos o seguinte resultado de comparação de semi-grupos.

Corolário 1.12

Seja A o gerador de um C^0 -semigrupo satisfazendo $\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ne^{\omega t}$ para $t \geq 0$.

Seja $B \in \mathcal{L}(X)$. Então,

$$\|e^{-(A+B)t} - e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ne^{\omega t}(e^{tN\|B\|_{\mathcal{L}(X)}} - 1) \text{ para } t \geq 0.$$

2

Resultados Preliminares

Neste capítulo provaremos que equações da forma

$$\begin{cases} [(p(x)u_x)_x + g(x, \lambda)u] \chi_{\Omega_1} \\ \quad + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+) - p(a_i)u_x(a_i^-)] + c_i(\lambda)u \right] \chi_{\Omega_{0,i}} = 0 \\ \alpha u(0) - u_x(0) = 0 \\ \beta u(1) + u_x(1) = 0. \end{cases}$$

têm as propriedades de Sturm-Liouville, onde g é uma função de classe C^1 , decrescente como função de λ , m um inteiro positivo, $\Omega_0 = \cup_{i=1}^m \Omega_{0,i}$ um subconjunto do interior de $\Omega = (0, 1)$, onde $\Omega_{0,i} = (a_i, b_i)$ são tais que $\bar{\Omega}_{0,i} \cap \bar{\Omega}_{0,j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Estaremos interessados nas soluções destas equações que são constantes em $\Omega_{0,i}$, para $i = 1, \dots, m$. No restante do capítulo, para facilitar a notação colocaremos $b_0 := 0$ e $a_{m+1} := 1 := b_{m+1}$.

Obtemos também uma caracterização dos zeros da soluções de equações da forma

$$\begin{aligned} w_t = & [p(x)w_{xx} + r(x)w_x + q(x, t)w] \chi_{\Omega_1} \\ & + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)w_x(b_i^+, t) - p(a_i)w_x(a_i^-, t)] + h_i(t)w \right] \chi_{\Omega_{0,i}}. \end{aligned}$$

Mostraremos que os zeros das soluções destas equações decrescem com o tempo. Esta propriedade será de fundamental importância na prova da transversalidade das variedades estável e instável que faremos no próximo capítulo.

2.1 Propriedades de Sturm-Liouville

Vamos resolver o problema de autovalor da linearização do problema (P_0) em torno de um ponto de equilíbrio.

Seja φ um equilíbrio do problema (P_0) . Então φ satisfaz

$$\begin{cases} (p(x)u_x)_x + c(x)u + f(u) = 0, & x \in \Omega_1 \\ \frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+) - p(a_i)u_x(a_i^-)] + \hat{c}_i u_{\Omega_{0,i}} + f(u_{\Omega_{0,i}}) = 0, & i = 1, \dots, m \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + b(x)u = g(u), & x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

onde $\hat{c}_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} c(x) dx$.

Como observamos na dedução do problema (P_0) , as soluções deste problema são constantes em cada intervalo $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, m$.

O problema de autovalor para a linearização de (P_0) em torno de φ é

$$\begin{cases} [(p(x)\psi_x)_x + (q(x) - \lambda)\psi(x)]\chi_{\Omega_1}(x) \\ \quad + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\psi_x(b_i^+) - p(a_i)\psi_x(a_i^-)] + (c_i - \lambda)\psi(x) \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x) = 0, \\ \psi_x(0) = \alpha\psi(0), \quad \psi_x(1) = -\beta\psi(1). \end{cases} \quad (2.1)$$

onde, para facilitar a notação, colocamos

$$\begin{aligned} q(x) &:= f'(\varphi(x)) + c(x) \quad \text{e} \quad c_i := f'(\varphi_{\Omega_{0,i}}) + \hat{c}_i, \\ \alpha &:= \frac{-1}{p(0)} [g'(\varphi(0)) - b(0)] \quad \text{e} \quad -\beta := \frac{1}{p(1)} [g'(\varphi(1)) - b(1)]. \end{aligned}$$

Definição 2.1 Seja φ uma função em $(0, 1)$ onde φ é constante em cada intervalo (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, m$. Diremos que z é um zero de φ se $z \in \Omega_1$ e $\varphi(z) = 0$ ou $z = [a_i, b_i]$, para algum $i \in \{1, \dots, m\}$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in [a_i, b_i]$.

Considere as seguintes equações

$$\begin{aligned} &[(p(x)u_x)_x - g_1(x)u]\chi_{\Omega_1}(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+) - p(a_i)u_x(a_i^-)] + c_i u \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

e

$$\begin{aligned} & [(p(x)v_x)_x - g_2(x)v]\chi_{\Omega_1}(x) \\ & + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)v_x(b_i^+) - p(a_i)v_x(a_i^-)] + d_i v \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

para $x \in (0, 1)$.

No próximo lema mostraremos que os zeros das soluções u e v , dos problemas (2.2) e (2.3), respectivamente, são alternados.

Lema 2.2

Sejam p, g_1, g_2 funções reais, com $g_1(x) \geq g_2(x)$ e contínuas em $(0, 1)$, $p > 0$ em $(0, 1)$, diferenciável sobre Ω_1 e $c_i \leq d_i$ constantes para $i = 1, \dots, m$. Sejam u e v soluções, respectivamente, de (2.2) e (2.3). Então em cada componente de $Q = \{x \in (0, 1) : u(x) \neq 0\}$ existe um zero de v .

Demonstração

Multiplicando (2.2) por v e (2.3) por u e usando a diferenciabilidade de p em Ω_1 , temos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{dx} [p(x)(u_x v - u v_x)] + (g_2(x) - g_1(x))uv \right] \chi_{\Omega_1}(x) \\ & + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+) - p(a_i)u_x(a_i^-)] v \right. \\ & \quad \left. - [p(b_i)v_x(b_i^+) - p(a_i)v_x(a_i^-)] u \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

para $x \in (0, 1)$.

Seja (z_1, z_2) uma componente conexa de Q , ou seja, $u(z_1) = u(z_2) = 0$ e $u(z) \neq 0$ para $x \in (z_1, z_2)$. Suponha que v não tenha nenhum zero em (z_1, z_2) . Vamos mostrar que isto leva a uma contradição.

Não há perda de generalidade em supor que u e v sejam positivas no intervalo (z_1, z_2) . Temos alguns casos a considerar.

Caso 1: $z_1 \in (b_{i-1}, a_i)$ e $z_2 \in (b_{j-1}, a_j)$ com $i < j$ ou $z_1, z_2 \in (b_{j-1}, a_j)$ para $i, j = \{1, \dots, m+1\}$.

Integrando (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} & p(z_2)u_x(z_2)v(z_2) - p(z_1)u_x(z_1)v(z_1) + \int_{z_1}^{z_2} (g_2(x) - g_1(x))uv\chi_{\Omega_1}(x)dx \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\frac{1}{b_k - a_k} [p(b_k)u_x(b_k^+) - p(a_k)u_x(a_k^-)]v - [p(b_k)v_x(b_k^+) - p(a_k)v_x(a_k^-)]u \right] \\ & \quad + (c_k - d_k)uv \Big] \chi_{\Omega_{0,k}}(x)dx = 0 \end{aligned}$$

Usando que u e v são soluções em (a_k, b_k) para $i \leq k \leq j-1$ temos

$$p(z_2)u_x(z_2)v(z_2) - p(z_1)u_x(z_1)v(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} (g_1 - g_2)uvdx \quad (2.5)$$

O lado direito de (2.5) é positivo. Como z_1 e z_2 são zeros consecutivos de u , temos $u_x(z_1) > 0$ e $u_x(z_2) < 0$ e o lado esquerdo de (2.5) é negativo; o que é uma contradição.

Caso 2: $z_1 = [a_i, b_i]$ e $z_2 = [a_j, b_j]$ para algum $i < j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Integrando (2.4) de z_1 até z_2 obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \frac{d}{dx} [p(x)(u_x v - uv_x)] \chi_{\Omega_1}(x)dx + \int_{z_1}^{z_2} (g_2 - g_1)uv\chi_{\Omega_1}(x)dx \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \sum_{k=i+1}^{j-1} \left[\frac{1}{b_k - a_k} [p(b_k)u_x(b_k^+) - p(a_k)u_x(a_k^-)]v - [p(b_k)v_x(b_k^+) - p(a_k)v_x(a_k^-)]u \right] \\ & \quad + (c_k - d_k)uv \Big] \chi_{\Omega_{0,k}}(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \frac{d}{dx} [p(x)(u_x v - uv_x)] \chi_{\Omega_1}(x)dx \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \sum_{k=i+1}^{j-1} \left[\frac{1}{b_k - a_k} [p(b_k)u_x(b_k^+) - p(a_k)u_x(a_k^-)]v - [p(b_k)v_x(b_k^+) - p(a_k)v_x(a_k^-)]u \right] \chi_{\Omega_{0,k}}(x)dx \\ & \quad = p(z_2)u_x(z_2)v(z_2) - p(z_1)u_x(z_1)v(z_1) \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} p(z_2)u_x(z_2)v(z_2) - p(z_1)u_x(z_1)v(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} (g_1 - g_2)uv\chi_{\Omega_1}(x)dx \\ & \quad + \int_{z_1}^{z_2} \sum_{k=i+1}^{j-1} (d_k - c_k)uv\chi_{\Omega_{0,k}}(x)dx. \end{aligned}$$

Usando as hipóteses sobre g_1, g_2, c_k, d_k segue que o lado direito é positivo. Como o lado esquerdo é negativo, temos uma contradição.

Caso 3: $z_1 = [a_i, b_i]$, para algum $i \in \{1, \dots, m\}$ e $z_2 \neq [a_j, b_j]$, para qualquer $j \in \{1, \dots, m\}$.

Este caso se resolve usando o mesmo procedimento usado no Caso 2.

□

A fórmula que obteremos no próximo lema será utilizada nos lemas seguintes. Considere as seguintes equações para $x \in (0, 1)$

$$\begin{cases} [(p_1(x)u_x)_x - g_1(x)u] \chi_{\Omega_1}(x) \\ \quad + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p_1(b_i)u_x(b_i^+) - p_1(a_i)u_x(a_i^-)] + c_i u \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x) = 0 \\ u(0) = \alpha_1, u_x(0) = \beta_1 \end{cases} \quad (2.6)$$

e

$$\begin{cases} [(p_2(x)v_x)_x - g_2(x)v] \chi_{\Omega_1}(x) \\ \quad + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p_2(b_i)v_x(b_i^+) - p_2(a_i)v_x(a_i^-)] + d_i v \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x) = 0 \\ v(0) = \alpha_2, v_x(0) = \beta_2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Lema 2.3

Sejam p_1, p_2, g_1, g_2 funções reais, g_1, g_2 são contínuas, p_1, p_2 positivas em $(0, 1)$. Sejam u e v soluções, respectivamente de (2.6) e (2.7). Então nos pontos onde $v \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} (p_1 u_x v - p_2 u v_x) \right) \chi_{\Omega_1}(x) \\ & + \sum_{i=1}^m \left[(c_i - d_i) u^2 + \frac{1}{b_i - a_i} [p_1(b_i)u_x(b_i^+) - p_1(a_i)u_x(a_i^-)] u \right. \\ & \quad \left. - [p_2(b_i)v_x(b_i^+) - p_2(a_i)v_x(a_i^-)] \frac{u^2}{v} \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x) \\ & = [(g_1 - g_2)u^2 + (p_1 - p_2)u_x^2 + p_2 \left(u_x - \frac{uv_x}{v} \right)^2] \chi_{\Omega_1}(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Demonstração

Usando o fato que u e v são soluções de (2.6) e (2.7), respectivamente obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} (p_1 u_x v - p_2 u v_x) \chi_{\Omega_1} \right) = \left(\frac{u}{v} \right)_x (p_1 u_x v - p_2 v_x u) \chi_{\Omega_1}(x) \\
& \quad + \frac{u}{v} \left[(p_1 u_x)_x v + p_1 u_x v_x - (p_2 v_x)_x u - p_2 v_x u_x \right] \chi_{\Omega_1} \\
& = \left(\frac{u_x v}{v^2} - \frac{u v_x}{v^2} \right) (p_1 u_x v - p_2 v_x u) \chi_{\Omega_1}(x) \\
& \quad + \frac{u}{v} \left[g_1 u v \chi_{\Omega_1} + \sum_{i=1}^m \left[-\frac{1}{b_i - a_i} [p_1(b_i) u_x(b_i^+) - p_1(a_i) u_x(a_i^-)] v - c_i u v \right] \chi_{\Omega_{0,i}} \right. \\
& \quad \left. + p_1 u_x v_x \chi_{\Omega_1} - g_2 u v \chi_{\Omega_1} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p_2(b_i) v_x(b_i^+) - p_2(a_i) v_x(a_i^-)] u + d_i u v \right] \chi_{\Omega_{0,i}} - p_2 u_x v_x \chi_{\Omega_1} \right] \\
& = [p_1 u_x^2 - p_1 u u_x \frac{v_x}{v} - p_2 u u_x \frac{v_x}{v} + p_2 u^2 \frac{v_x^2}{v^2} + g_1 u^2 - p_2 u_x^2 + p_2 u_x^2] \chi_{\Omega_1} \\
& \quad + \sum_{i=1}^m \left[-\frac{1}{b_i - a_i} [p_1(b_i) u_x(b_i^+) - p_1(a_i) u_x(a_i^-)] u + (d_i - c_i) u^2 \right] \chi_{\Omega_{0,i}} \\
& \quad + [p_1 u_x v_x \frac{u}{v} - g_2 u^2 - p_2 u_x u \frac{v_x}{v}] \chi_{\Omega_1} \\
& \quad + \sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - a_i} [p_2(b_i) v_x(b_i^+) - p_2(a_i) v_x(a_i^-)] \frac{u^2}{v} \chi_{\Omega_{0,i}} \\
& = \left[(g_1 - g_2) u^2 + (p_1 - p_2) u_x^2 + p_2 \left(u_x^2 - 2 u_x u \frac{v_x}{v} + u^2 \frac{v_x^2}{v^2} \right) \right] \chi_{\Omega_1} \\
& \quad + \sum_{i=1}^m \left[(d_i - c_i) u^2 + \frac{1}{b_i - a_i} [[p_2(b_i) v_x(b_i^+) - p_2(a_i) v_x(a_i^-)] \frac{u^2}{v} \right. \\
& \quad \left. - [p_1(b_i) u_x(b_i^+) - p_1(a_i) u_x(a_i^-)] u \right] \chi_{\Omega_{0,i}},
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. $\square$

O lema seguinte compara a distribuição dos zeros das soluções das equações (2.6) e (2.7).

Lema 2.4

Sejam p_1, p_2, g_1, g_2 funções reais, onde g_1, g_2 são contínuas, p_1, p_2 positivas em $(0, 1)$ com

$$p_1(x) \geq p_2(x) > 0, \quad g_1(x) \geq g_2(x), \quad d_i \geq c_i,$$

$i = 1, \dots, m$, onde c_i e d_i , são constantes arbitrárias. Suponha que

(i) $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ e $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$;

(ii) se $\alpha_1 \neq 0$, então

$$\frac{p_1(0)\beta_1}{\alpha_1} \geq \frac{p_2(0)\beta_2}{\alpha_2}$$

(o que implica que $\alpha_2 \neq 0$);

(iii) a identidade $g_1 \equiv g_2 \equiv 0$ não é satisfeita em qualquer subintervalo de $(0, 1)$.

Sejam u e v soluções de (2.6), (2.7) respectivamente. Se u tem n zeros no intervalo $0 < x \leq 1$, então $v(x)$ tem pelo menos n zeros no mesmo intervalo, e o i -ésimo zero de $v(x)$ é menor do que o i -ésimo zero de $u(x)$.

Demonstração

Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n$ os zeros de $u(x)$ que estão em $(0, 1]$, e suponha que

$$0 < z_1 < z_2 < \dots < z_n \leq 1.$$

O Lema 2.2, mostra que entre cada par de zeros consecutivos z_i e z_{i+1} existe pelo menos um zero de $v(x)$. Desta forma o resultado segue imediatamente se provamos que pelo menos um zero de $v(x)$ fica entre 0 e z_1 .

Se $u(0) = 0$, então $v(x)$ certamente tem um zero entre 0 e z_1 . Consideremos o caso em que $u(0) \neq 0$, ou seja, $\alpha_1 \neq 0$ e portanto $\alpha_2 = v(0) \neq 0$.

Suponha que v não tenha zeros em $(0, z_1)$. Os seguintes casos são possíveis.

Caso 1: $0 < z_1 < a_1$ ou $b_m < z_1 < 1$ ou $z_1 \in (b_{j-1}, a_j)$ para algum $j \in \{2, \dots, m\}$.

Integrando (2.8) de 0 até z_1 e usando que u e v são soluções em $\Omega_{0,i}, i = 2, \dots, m$ obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{u(0)}{v(0)}[p_1(0)u_x(0)v(0) - p_2(0)u(0)v_x(0)]\chi_{\Omega_1}(0) \\ & = \int_0^{z_1} [(g_1 - g_2)u^2 + (p_1 - p_2)u_x^2 + p_2(u_x - u\frac{v_x}{v})^2]\chi_{\Omega_1}(x) dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$-[p_1(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1} - p_2(0)\frac{\beta_2}{\alpha_2}]\alpha_1^2 = \int_0^{z_1} [(g_1 - g_2)u^2 + (p_1 - p_2)u_x^2 + p_2(u_x - u\frac{v_x}{v})^2]\chi_{\Omega_1}(x) dx$$

e como o lado direito da igualdade é estritamente positivo

$$-[p_1(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1} - p_2(0)\frac{\beta_2}{\alpha_2}] > 0$$

o que contradiz (ii).

Caso 2: $z_1 = [a_i, b_i]$ para algum $i \in \{1, \dots, m\}$.

Integrando (2.8) e usando o fato que

$$\begin{aligned} & \int_0^{a_i} \frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} (p_1 u_x v - p_2 u v_x) \right] \chi_{\Omega_1}(x) dx \\ & + \int_0^{a_i} \sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - a_i} \left[[p_1(b_i) u_x(b_i^+) - p(a_i) u_x(a_i^-)] u \right. \\ & \quad \left. - [p_2(b_i) v_x(b_i^+) - p_2(a_i) v_x(a_i^-)] \frac{u^2}{v} \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x) dx \\ & = p_2(0) u(0)^2 \frac{v_x(0)}{v(0)} - p_1(0) u(0) u_x(0), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} -\alpha_1^2 \left[p_1(0) \frac{\beta_1}{\alpha_1} - p_2(0) \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right] &= \sum_{i=1}^m \int_0^{a_i} (d_i - c_i) u^2 \chi_{\Omega_{0,i}}(x) dx \\ &+ \int_0^{a_i} \left[(g_1 - g_2) u^2 + (p_1 - p_2) u_x^2 + p_2 \left(u_x - u \frac{v_x}{v} \right)^2 \right] \chi_{\Omega_1}(x) dx, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois o lado direito é positivo e o lado esquerdo é negativo. $\square$

Lema 2.5

Sejam p_1, p_2, g_1, g_2 e (i) – (iii) como no Lema 2.4. Sejam u e v soluções de (2.6), (2.7) respectivamente. Seja d um ponto de $(0, 1]$, $d \notin \Omega_0$, que não é zero de $u(x)$ e não é zero de $v(x)$. Se d é tal que $u(x)$ e $v(x)$ têm o mesmo número de zeros no intervalo $0 < x < d$, então

$$p_1(d) \frac{u_x(d)}{u(d)} > p_2(d) \frac{v_x(d)}{v(d)}$$

Demonstração

Segue do Lema 2.4 que o número de zeros de v é maior do que o número de zeros de u . Seja l o número de zeros de $u(x)$ e $v(x)$ em $(0, d)$. Suponha que $l > 1$.

Seja z_l o maior zero de $u(x)$ menor que d . z_l não é zero de $v(x)$. Note que entre 0 e z_l existem exatamente l zeros de $v(x)$ e não existem zeros de v entre z_l e d .

Como $d \in \Omega_1$ então $d \in (b_j, a_{j+1})$ para algum $j = \{0, 1, \dots, m\}$. Consideremos os casos possíveis.

Caso 1: $z_l \in (b_j, d)$

Integrando (2.8) de z_l até d obtemos

$$[p_1(d) \frac{u_x(d)}{u(d)} - p_2(d) \frac{v_x(d)}{v(d)}] u(d)^2 = \int_{z_l}^d [(g_1 - g_2)u^2 + (p_1 - p_2)u_x^2 + p_2(u_x - u \frac{v_x}{v})^2] dx$$

Como o lado direito da última igualdade é positivo, segue que

$$p_1(d) \frac{u_x(d)}{u(d)} > p_2(d) \frac{v_x(d)}{v(d)}.$$

Caso 2: $z_l \in (b_i, a_{i+1}) \subset \Omega_1$ para algum $i \in \{0, \dots, m\}$, $i < j$.

Integrando (2.8) de x_l até d segue que

$$\begin{aligned} & \frac{u(d)}{v(d)} [p_1(d) u_x(d) v(d) - p_2(d) u(d) v_x(d)] \\ & + \sum_{k=i+1}^j \int_{z_l}^d \left[(c_k - d_k) u^2 + \frac{1}{b_k - a_k} [(p_1(b_k) u_x(b_k^+) - p_1(a_k) u_x(a_k^-)) u \right. \\ & \quad \left. - (p_2(b_k) v_x(b_k^+) - p_2(a_k) v_x(a_k^-)) \frac{u^2}{v}] \right] \chi_{\Omega_{0,k}}(x) dx \\ & = \int_{z_l}^d [(g_1 - g_2) u^2 + (p_1 - p_2) u_x^2 + p_2(u_x - u \frac{v_x}{v})^2] \chi_{\Omega_1}(x) dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & [p_1(d) \frac{u_x(d)}{u(d)} - p_2(d) \frac{v_x(d)}{v(d)}] u(d)^2 + \sum_{k=i+1}^j (c_k - d_k) \int_{\Omega_{0,k}} u^2 dx \\ & - \sum_{k=i+1}^j \int_{\Omega_{0,k}} c_k u^2 + \sum_{k=i+1}^j \int_{\Omega_{0,k}} d_k u^2 dx \\ & = \int_{z_l}^d [(g_1 - g_2) u^2 + (p_1 - p_2) u_x^2 + p_2(u_x - u \frac{v_x}{v})^2] \chi_{\Omega_1} dx \end{aligned}$$

Como o lado direito da igualdade acima é positivo, segue que

$$p_1(d) \frac{u_x(d)}{u(d)} > p_2(d) \frac{v_x(d)}{v(d)}.$$

Caso 3: Se $z_l = [a_i, b_i]$ para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, $i < j$ o mesmo raciocínio acima se aplica com as integrais calculadas de b_i até d .

Se u e v não têm zeros em $0 < x < d$, então usando que u e v são soluções em $\Omega_{0,i}$, $i = 1, \dots, m$, obtemos de (2.8) que

$$\begin{aligned} [p_1(d) \frac{u_x(d)}{u(d)} - p_2(d) \frac{v_x(d)}{v(d)}] u(d)^2 & = [p_1(0) \frac{\beta_1}{\alpha_1} - p_2(0) \frac{\beta_2}{\alpha_2}] \alpha_1^2 + \int_0^d [(g_1 - g_2) u^2 \\ & \quad + (p_1 - p_2) u_x^2 + p_2(u_x - u \frac{v_x}{v})^2] \chi_{\Omega_1} dx. \end{aligned}$$

Como antes obtemos

$$p_1(d) \frac{u_x(d)}{u(d)} > p_2(d) \frac{v_x(d)}{v(d)}.$$

□

Teorema 2.6

Considere, p como no Lema 2.2 e g uma função de classe C^1 como função de x e λ e decrescente em λ em $(-\infty, +\infty)$. Sejam

$$D = \sup_{x \in \bar{\Omega}_1} p(x) > 0, \quad d = \inf_{x \in \bar{\Omega}_1} p(x) > 0, \quad \eta(\lambda) = \inf_{x \in \bar{\Omega}_1} g(x, \lambda), \quad \xi(\lambda) = \sup_{x \in \bar{\Omega}_1} g(x, \lambda).$$

Considere a equação,

$$\begin{cases} [(p(x)u_x)_x + g(x, \lambda)u] \chi_{\Omega_1} + \\ \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+) - p(a_i)u_x(a_i^-)] + c_i(\lambda)u \right] \chi_{\Omega_{0,i}} = 0 \\ \alpha u(0) - u_x(0) = 0 \\ \beta u(1) + u_x(1) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $c_i(\lambda)$ é decrescente em $(-\infty, +\infty)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Suponha que

- (i) $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$;
- (ii) $\xi(\lambda) \rightarrow +\infty$ quando $\lambda \rightarrow -\infty$;
- (iii) $\eta(\lambda) \rightarrow -\infty$ quando $\lambda \rightarrow +\infty$;
- (iv) $c_i(\lambda) \rightarrow -\infty$ quando $\lambda \rightarrow +\infty$, $i = 1, \dots, m$.

Então existe uma seqüência infinita de números

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_j > \dots$$

tal que se φ_j , é a solução de (2.9) quando $\lambda = \lambda_j$ então φ_j tem exatamente j zeros no intervalo $(0, 1)$ para cada $j = 1, 2, \dots$

Demonstração

Fixe $j \geq 1$ e escolha $\bar{\lambda} \in (-\infty, +\infty)$ de modo que a solução da equação

$$\begin{cases} [v_{xx} + \frac{\xi(\bar{\lambda})}{D}v] \chi_{\Omega_1} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)v_x(b_i^+, \bar{\lambda}) - p(a_i)v_x(a_i^-, \bar{\lambda})] + c_i(\bar{\lambda})v \right] \chi_{\Omega_{0,i}} = 0 \\ v(0) = 1, \quad v_x(0) = \alpha \end{cases} \quad (2.10)$$

tenha j zeros. Segue do Lema 2.4 que a solução u de

$$\begin{cases} [(p(x)u_x)_x + g(x, \lambda)u] \chi_{\Omega_1} \\ \quad + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+) - p(a_i)u_x(a_i^-)] + c_i(\lambda)u \right] \chi_{\Omega_{0,i}} = 0 \\ u(0) = 1, \quad u_x(0) = \alpha \end{cases} \quad (2.11)$$

com $\lambda = \bar{\lambda}$, tem pelo menos j zeros.

Quando λ decresce, a partir de $\bar{\lambda}$ a função $\xi(\lambda)$ cresce e portanto a solução de (2.11) u , oscila mais rapidamente. Para um certo valor de λ , digamos μ_j , a solução adquire um zero adicional. Seja z este zero adicional. A condição $u(0) = 1$ impede que este zero apareça no ponto zero. Como $u \not\equiv 0$ não podemos ter $u(z) = 0 = u_x(z)$ e portanto $z \notin \Omega_1$. Também $z \notin \Omega_0$, pois se $z = [a_i, b_i]$, para algum $i \in \{1, \dots, m\}$ então $u_x(a_i^-) < 0$ e $u_x(b_i^+) > 0$ ou $u_x(a_i^-) > 0$ e $u_x(b_i^+) < 0$ e u não seria solução de (2.11) em (a_i, b_i) .

Portanto o zero adicional aparece no ponto 1, e então se move, com λ decrescendo, na direção de $x = 0$. Para um valor $\lambda = \mu_{j+1}$ outro zero aparece e assim sucessivamente. Logo, existe uma seqüência de números

$$\mu_j, \mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \dots$$

com a seguinte propriedade: quando $\mu_{m-1} < \lambda < \mu_{m-2}$ a equação (2.11), possui solução que tem exatamente $m - 1$ zeros e satisfaz $\alpha u(0, \lambda) - u_x(0, \lambda) = 0$.

Observe que a seqüência $\{\mu_j\}$ diverge para $-\infty$, pois caso a seqüência acumulasse em algum $\bar{\mu} \neq -\infty$, obteríamos uma contradição com Lema 2.4.

Para $\mu_{m-1} < \tau_1 < \tau_2 < \mu_{m-2}$, temos que $g(x, \tau_1) > g(x, \tau_2)$ e $c_i(\tau_1) > c_i(\tau_2)$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Considerando

$$\begin{cases} [(p(x)u_x)_x + g(x, \tau_1)u] \chi_{\Omega_1} + \\ \quad \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+) - p(a_i)u_x(a_i^-)] + c_i(\tau_1)u \right] \chi_{\Omega_{0,i}} = 0 \\ u(0) = 1, \quad u_x(0) = \alpha \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} [(p(x)u_x)_x + g(x, \tau_2)u] \chi_{\Omega_1} + \\ \quad \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+) - p(a_i)u_x(a_i^-)] + c_i(\tau_2)u \right] \chi_{\Omega_{0,i}} = 0 \\ u(0) = 1, \quad u_x(0) = \alpha \end{cases}$$

como 1 não é zero de u e u tem $m - 1$ zeros em $(0, 1)$, segue do Lema 2.5 que

$$p(1) \frac{u_x(1, \tau_1)}{u(1, \tau_1)} < p(1) \frac{u_x(1, \tau_2)}{u(1, \tau_2)}.$$

Conseqüentemente,

$$p(1) \frac{u_x(1, \lambda)}{u(1, \lambda)}$$

é uma função de λ monótona crescente para $\lambda \in (\mu_{m-1}, \mu_{m-2})$. E como $u(1, \mu_{m-2}) = 0 = u(1, \mu_{m-1})$ mas $u_x(1, \mu_{m-2}) \neq 0 \neq u_x(1, \mu_{m-1})$, ela cresce necessariamente de $-\infty$ para $+\infty$.

Segue do Teorema do Valor Intermediário que existe um único valor de λ , que chamaremos λ_m , tal que

$$p(1) \frac{u_x(1, \lambda)}{u(1, \lambda)} = -p(1)\beta$$

ou seja,

$$u_x(1, \lambda) + \beta u(1, \lambda) = 0.$$

Desta forma para $\lambda = \lambda_m$ a equação (2.9) possui solução φ_m com exatamente $m - 1$ zeros.

Vamos mostrar que, para λ suficientemente grande, a solução u de (2.9) não tem zeros.

Sejam α_1, α_2 reais positivos. Para cada $j = 1, \dots, m + 1$, seja $v^j(x, \lambda)$ a solução de

$$\begin{cases} [v_{xx} + \frac{\eta(\lambda)}{d}v]\chi_{\Omega_1}(x) + [\frac{1}{b_j - a_j}[p(b_j)v_x(b_j^+) - p(a_j)v_x(a_j^-)] + c_j(\lambda)v]\chi_{\Omega_{0,j}}(x) = 0 \\ v(b_{j-1}) = \alpha_1, \\ v_x(b_{j-1}) = \alpha_2. \end{cases} \quad (2.14_j)$$

definida em $x \in (b_{j-1}, b_j)$.

Como $\eta(\lambda) \rightarrow -\infty$ quando $\lambda \rightarrow +\infty$, para valores de λ suficientemente grande, colocamos $-\omega(\lambda)^2 := \frac{\eta(\lambda)}{d}$ e então a equação (2.14_j), fica da forma

$$\begin{cases} [v_{xx} - \omega(\lambda)^2 v]\chi_{\Omega_1}(x) + [\frac{1}{b_j - a_j}[p(b_j)v_x(b_j^+) - p(a_j)v_x(a_j^-)] + c_j(\lambda)v]\chi_{\Omega_{0,j}}(x) = 0 \\ v(b_{j-1}) = \alpha_1, \\ v_x(b_{j-1}) = \alpha_2. \end{cases}$$

Vamos mostrar que para valores de λ suficientemente grande, para cada j , a solução de (2.14_j) não tem zeros em (b_{j-1}, b_j) .

No intervalo (b_{j-1}, a_j) temos

$$\begin{cases} v_{xx} - \omega(\lambda)^2 v = 0 \\ v(b_{j-1}) = \alpha_1 \\ v_x(b_{j-1}) = \alpha_2. \end{cases}$$

Logo,

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\omega(\lambda)} \right) e^{\omega(\lambda)(x-b_j)} + \frac{1}{2} \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\omega(\lambda)} \right) e^{-\omega(\lambda)(x-b_j)}.$$

Quando $\lambda \rightarrow +\infty$, $\omega(\lambda) \rightarrow +\infty$ e $v(x, \lambda)$ fica C^1 -próxima de

$$\alpha_1 \frac{(e^{\omega(\lambda)(x-b_j)} + e^{-\omega(\lambda)(x-b_j)})}{2} = \alpha_1 \cosh(\omega(\lambda)(x-b_j))$$

em (b_{j-1}, a_j) , que não tem zeros.

Assim, para λ suficientemente grande $v^j(x, \lambda)$ não tem zeros em (b_{j-1}, b_j) , pois em $[a_j, b_j]$ $v^j(x, t)$ é constante.

Podemos agora mostrar que, para λ suficientemente grande, a solução u de (2.9) não tem zeros em $(0, 1)$. No intervalo $(0, b_1)$ u satisfaz

$$\begin{cases} [(p(x)u_x)_x + g(x, \lambda)u] \chi_{\Omega_1}(x) \\ \quad + \left[\frac{1}{b_1 - a_1} [p(b_1)u_x(b_1^+) - p(a_1)u_x(a_1^-)] + c_1(\lambda)u(x) \right] \chi_{\Omega_{0,1}}(x) = 0 \\ \alpha u(0) - u_x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Como esta equação é linear, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u(0) = 1$ e $u_x(0) = \alpha$. Considere (2.14₁), $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha$. Como $p(0)\alpha \geq d\alpha$ e $g(x, \lambda) \geq \eta(\lambda)$ para $x \in [0, a_1]$ as hipóteses do Lema 2.4 estão satisfeitas e $u(x, \lambda)$ não tem mais zeros do que $v^1(x, \lambda)$ para $x \in (0, b_1)$. Portanto $u(x, \lambda)$ não tem zeros em $[0, b_1)$.

Observe que $u(b_1) > 0$. Para $x \in (a_1, b_1)$ e λ suficientemente grande temos

$$u_x(b_1) = \frac{1}{p(b_1)} [p(a_1)u_x(a_1^-) - (b_1 - a_1)c_1(\lambda)u(b_1)] > 0$$

pois $-c_1(\lambda)$ é grande, para λ suficientemente grande.

No intervalo (b_1, b_2) , considere a equação (2.14₁) com $\alpha_1 = u(b_1)$ e $\alpha_2 = u_x(b_1)$. Logo $p(b_1)\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \geq d\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ e com isto as hipóteses do Lema 2.4 estão satisfeitas. Portanto $u(x, \lambda)$ não tem mais zeros do que $v^2(x, \lambda)$, para $x \in (b_1, b_2)$. Portanto u não tem zeros, também em $[b_1, b_2]$.

Continuando este processo obtemos que $u(x, \lambda)$ não tem zeros em $[0, 1)$.

Vamos provar agora que existe um real λ_1 em $(\mu_1, +\infty)$ tal que $u_x(1, \lambda_1) + \beta u(1, \lambda_1) = 0$. Note que $u(x, \mu_1)$ tem exatamente um zero. Para λ no intervalo $(\mu_1, +\infty)$, $u(x, \lambda)$ e $v^m(x, \lambda)$ não têm zeros em $(b_m, 1)$. Segue do Lema 2.5 que

$$p(1) \frac{u_x(1, \lambda)}{u(1, \lambda)} \geq d \frac{v_x^m(1, \lambda)}{v^m(1, \lambda)}.$$

Como p é positiva, e

$$\begin{aligned} \frac{v_x^m(1, \lambda)}{v^m(1, \lambda)} &= \frac{\frac{1}{2}(\alpha_1 \omega(\lambda) + \alpha_2) e^{\omega(\lambda)(1-b_m)} - \frac{1}{2}(\alpha_1 \omega(\lambda) - \alpha_2) e^{-\omega(\lambda)(1-b_m)}}{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\omega(\lambda)}) e^{\omega(\lambda)(1-b_m)} + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\omega(\lambda)}) e^{-\omega(\lambda)(1-b_m)}} \\ &= \frac{\alpha_1 \omega(\lambda) + \alpha_2 - (\alpha_1 \omega(\lambda) - \alpha_2) e^{-2\omega(\lambda)(1-b_m)}}{\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\omega(\lambda)} + (\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\omega(\lambda)}) e^{-2\omega(\lambda)(1-b_m)}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$, segue que

$$\frac{u_x(1, \lambda)}{u(1, \lambda)} \rightarrow +\infty$$

quando $\lambda \rightarrow +\infty$. Como $p(1) \frac{u_x(1, \lambda)}{u(1, \lambda)}$ cresce de $-\infty$ para $+\infty$, quando λ varia em $(\mu_1, +\infty)$ segue do Teorema do Valor Intermediário que existe um único valor $\lambda_1 \in (\mu_1, +\infty)$ tal que,

$$p(1) \frac{u_x(1, \lambda_1)}{u(1, \lambda_1)} = -p(1)\beta$$

e portanto $u_x(1, \lambda_1) + \beta u(1, \lambda_1) = 0$. □

2.2 Decrescimento do Número de Componentes

Nesta seção obtemos uma propriedade importante da equação diferencial (P_0) : o decrescimento do número de zeros da solução ao longo do tempo. Para obter este resultado precisamos provar um Princípio do Mínimo, para equações do tipo (P_0) . Usaremos os seguintes lemas.

Lema 2.7

Seja E uma região no plano $[0, 1] \times (0, +\infty)$. Considere u , constante em cada inter-

valores (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, m$, tal que $Su \leq 0$ onde o operador S é dado por

$$Su(x, t) = [p(x)u_{xx} + r(x)u_x + q(x, t)u]\chi_{\Omega_1}(x) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - a_i} \left[p(b_i)u_x(b_i^+, t) - p(a_i)u_x(a_i^-, t) + h_i(t)u \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x) - u_t$$

para (x, t) em E , onde $q(x, t) < 0$ e $h_i(t) < 0$, para $i = 1, \dots, m$. Sejam K um disco e ∂K a sua fronteira, de modo que K e ∂K estão contidos em E . Suponha que o mínimo de u em E é $M \leq 0$, $u > M$ no interior de K e $u = M$ em algum ponto P em ∂K . Então o tangente a K em P é paralelo ao eixo- x .

Demonstração

Seja $K = K_R(\bar{x}, \bar{t})$, onde $(\bar{x}, \bar{t})$ é o centro do disco K e R o seu raio. Suponha que a tangente a K em P não seja paralelo ao eixo- x . Assuma que P é o único ponto na fronteira de K onde $u = M$, pois caso contrário poderíamos trocar K por K' , com $K' \subset K$ e $\partial K \cap \partial K' = \{P\}$.

Seja $P = (x_*, t_*)$. Temos dois casos a considerar: $x_* \in \Omega_1$ ou $x_* \in \Omega_0$.

Caso 1: $x_* \in \Omega_1$.

Não há perda de generalidade em supormos que se $(x, t) \in \partial K$ então x está no mesmo intervalo de Ω_1 que x_* .

Construa um disco K_1 com centro em P e raio R_1 suficientemente pequeno, de modo que $R_1 < |x_* - \bar{x}|$. Diminua R_1 suficientemente, de modo ∂K_1 tenha coordenada x neste mesmo intervalo de Ω_1 que x_* .

A fronteira de K_1 consiste de dois arcos,

$$C' := \partial K_1 \cap (K \cup \partial K);$$

$$C'' := \partial K_1 \setminus C'.$$

Como u é maior do que M sobre o arco fechado C' existe uma constante positiva η tal que $u \geq M + \eta$ sobre C' . Além disso, como $u \geq M$ sobre E , naturalmente $u \geq M$ sobre C'' .

Em $(0, 1) \times (0, \infty)$ considere a função

$$v(x, t) = e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2 + (t-\bar{t})^2]} - e^{-\alpha R^2},$$

onde α é uma constante positiva a ser escolhida convenientemente. A função v tem as seguintes propriedades

- (i) $v(x, t) > 0$, para $(x, t) \in K$;
- (ii) $v(x, t) = 0$, para $(x, t) \in \partial K$;
- (iii) $v(x, t) < 0$ para $(x, t) \in K^c$.

Escolha α suficientemente grande, de modo que

$$Sv(x, t) = \left[4\alpha^2 p(x)(x - \bar{x})^2 - 2\alpha p(x) - 2\alpha r(x)(x - \bar{x}) + q(x, t)[1 - e^{-\alpha(R^2 - (x - \bar{x})^2 - (t - \bar{t})^2)}] + 2\alpha(t - \bar{t}) \right] e^{-\alpha((x - \bar{x})^2 + (t - \bar{t})^2)} > 0$$

para $(x, t) \in K_1 \cup \partial K_1$, isto é possível pois $|x - \bar{x}| \geq |x_* - \bar{x}| - R_1 > 0$.

Considere $w = u - \varepsilon v$, onde ε é uma constante positiva a ser escolhida. Assim,

$$Sw(x, t) = Su(x, t) - \varepsilon Sv(x, t) < 0, \quad (2.14)$$

para (x, t) em $K_1 \cup \partial K_1$. Escolha ε suficientemente pequeno de modo que $w = u - \varepsilon v \geq M + \eta - \varepsilon v > M$ sobre C' . Também, $w = u - \varepsilon v \geq M - \varepsilon v > M$ sobre C'' . Portanto $w > M$ sobre $\partial K_1 = C' \cup C''$.

Como $w(x_*, t_*) = u(x_*, t_*) = M$, o mínimo de w em K_1 ocorre em um ponto interior de K_1 . Se (x', t') é este ponto então $w_x(x', t') = w_t(x', t') = 0$ e $w_{xx}(x', t') \geq 0$. Portanto $Sw(x', t') \geq 0$, o que é uma contradição com (2.14).

Caso 2: $x_* \in \Omega_0$, isto é, $x_* \in (a_j, b_j)$ para algum $j = 1, \dots, m$.

Neste caso o tangente a K em P é necessariamente paralelo ao eixo- x , pois caso contrário, como u é constante em (a_j, b_j) , teríamos $u(x', t_*) = M$ onde (x', t_*) é um ponto no interior de K .

Note que, se $x_* = a_j$ ou $x_* = b_j$, para algum $j = 1, \dots, m$, então como antes, podemos trocar o disco K por um disco $\tilde{K}$ de modo que $\tilde{K} \subset K$, $\partial \tilde{K} \subset (a_j, b_j)$ ou $\partial \tilde{K} \subset \Omega_1$ com $\partial K \cap \partial \tilde{K} = \{P\}$ e procedemos como no Caso 1 ou Caso 2. $\square$

Lema 2.8

Sejam E , S , u e M como no Lema 2.7. Suponha que $u > M$ em algum ponto interior (x_0, t_0) de E . Se l é um segmento horizontal no interior de E com (x_0, t_0) em l então $u > M$ sobre l .

Demonstração

Suponhamos que $u = M$ em algum ponto (x_1, t_0) no interior de E sobre l . Supon-

hemos $x_1 < x_0$. Mova x_1 para a direita, se necessário, de modo que $u > M$ para $x_1 < x \leq x_0$. Seja,

$$d_0 := \min\{x_0 - x_1, \min_{x_1 \leq x \leq x_0} \text{dist}((x, t_0), \partial E)\}.$$

Para $x_1 < x < x_1 + d_0$, definimos $d(x)$ como sendo a distância de (x, t_0) ao ponto mais próximo em E , onde $u = M$. Como $u(x_1, t_0) = M$, $d(x) \leq x - x_1$. Pelo Lema 2.7, o ponto mais próximo está imediatamente acima ou abaixo de (x, t_0) , isto é,

$$\text{ou } u(x, t_0 + d(x)) = M \quad \text{ou } u(x, t_0 - d(x)) = M.$$

Suponha, por absurdo, que $d(x) > 0$ e tome $0 < \delta < d(x)$. Então

$$\begin{aligned} d(x + \delta) &= |(x + \delta, t_0) - (x + \delta, t_0 \pm d(x))| = \\ &\sqrt{d(x)^2} \leq \sqrt{d(x)^2 + \delta^2} < d(x) + \frac{\delta^2}{2d(x)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Trocando x por $x + \delta$ e δ por $-\delta$, em (2.15) obtemos

$$d(x) \leq \sqrt{d(x + \delta)^2 + \delta^2} < d(x + \delta) + \frac{\delta^2}{2d(x + \delta)}.$$

Portanto $d(x + \delta)^2 \geq d(x)^2 - \delta^2$, ou seja,

$$d(x + \delta) \geq \sqrt{d(x)^2 - \delta^2}. \quad (2.16)$$

Subdividindo o intervalo $(x, x + \delta)$ em n partes iguais, segue de (2.15) e (2.16), que

$$\begin{aligned} d(x + \frac{j+1}{n}\delta) - d(x + \frac{j}{n}\delta) &\leq \frac{\delta^2}{2n^2 d(x + \frac{j}{n}\delta)} \leq \frac{\delta^2}{2n^2 \sqrt{d(x)^2 - (j/n)^2 \delta^2}} \\ &\leq \frac{\delta^2}{2\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \dots, n-1$. Com isto, obtemos

$$\begin{aligned} d(x + \delta) - d(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[d(x + \frac{j+1}{n}\delta) - d(x + \frac{j}{n}\delta) \right] \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^2}{2\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}} \frac{1}{n^2} = \frac{\delta^2}{2\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}} \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$, temos que $d(x + \delta) - d(x) \rightarrow 0$, ou seja,

$$d(x + \delta) \leq d(x), \text{ para } \delta > 0,$$

e $d(x)$ é uma função não-crescente de x . Como $d(x) \leq x - x_1$, obtemos $d(x) \equiv 0$ para $x_1 < x < x_1 + d_0$. Portanto, $u(x, t_0) = M$ para $x_1 < x < x_1 + d_0 < x_0$, o que contradiz o fato que $u > M$ para $x_1 < x \leq x_0$.

Se $x_1 > x_0$, o mesmo raciocínio se aplica. $\square$

Lema 2.9

Considere E e S como no Lema 2.7. Sejam u , constante em cada intervalo (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, m$, tal que $Su \leq 0$ e M o mínimo de u em E . Suponha que $u > M$ na faixa horizontal $\{(x, t) \in E : t_0 < t < t_1\}$ para t_0 e t_1 fixados. Então $u > M$ sobre todo os segmentos de reta $\{(x, t) \in E : t = t_1\}$.

Demonstração

Suponhamos que $P = (x_1, t_1)$, seja um ponto sobre o segmento de reta $t = t_1$, onde $u = M$. Construa um disco K com centro em P e raio suficientemente pequeno, de modo que a metade inferior de K esteja inteiramente contida na região de E onde $t > t_0$. Temos dois casos a considerar.

Caso 1: $x_1 \in \Omega_1$

Tome K de modo que se $(x, t) \in \partial K$ então x está no mesmo intervalo de Ω_1 que x_1 .

Em $(0, 1) \times (0, \infty)$ defina a função $v(x, t) = e^{-[(x-x_1)^2 + \alpha(t-t_1)]} - 1$, onde α é uma constante positiva, escolhida suficientemente grande, de modo que

$$Sv(x, t) = \left[4p(x)(x - x_1)^2 - 2p(x) - 2r(x)(x - x_1) + q(x, t)[1 - e^{(x-x_1)^2 + \alpha(t-t_1)}] + \alpha \right] e^{-[(x-x_1)^2 + \alpha(t-t_1)]} > 0$$

para (x, t) em K com $t \leq t_1$.

A parábola,

$$(x - x_1)^2 + \alpha(t - t_1) = 0. \quad (2.18)$$

é tangente ao segmento de reta $t = t_1$, no ponto $P = (x_1, t_1)$. Denote por C' o arco em ∂K , incluindo os pontos finais, que está abaixo da parábola (2.18) e por C'' o

arco da parábola localizada dentro do disco K . Seja D , a região entre C' e C'' . Por hipótese, $u > M$ sobre o arco fechado C' , então existe uma constante positiva $\eta > 0$ tal que $u \geq M + \eta$ sobre C' . Note que $v = 0$ sobre C'' .

Considere

$$w = u - \varepsilon v$$

onde ε é escolhido suficientemente pequeno, de modo que w tenha as seguintes propriedades

- (i) $Sw = Su - \varepsilon Sv < 0$, em D ;
- (ii) $w = u - \varepsilon v \geq M + \eta - \varepsilon v > M$, sobre C'' ;
- (iii) $w \geq M$, em $\bar{D}$.

Observe que $w = u \geq M$ sobre C'' .

A condição (i) mostra que w não atinge mínimo em D . Das condições (ii) e (iii) segue que (x_1, t_1) é ponto de mínimo de w em $\bar{D}$. Portanto $w_t(x_1, t_1) \leq 0$. Como, $v_t(x_1, t_1) = -\alpha < 0$, obtemos $u_t(x_1, t_1) = w_t(x_1, t_1) + \varepsilon v_t(x_1, t_1) = w_t(x_1, t_1) - \alpha\varepsilon < 0$.

Por outro lado, como $x = x_1$ é um ponto de mínimo de $u(\cdot, t_1)$ temos $u_x(x_1, t_1) = 0$ e $u_{xx}(x_1, t_1) \geq 0$. Então

$$Su(x_1, t_1) = p(x_1)u_{xx}(x_1, t_1) + r(x_1)u_x(x_1, t_1) + q(x_1, t_1)u(x_1, t_1) - u_t(x_1, t_1) > 0,$$

o que contradiz a hipótese que $Su \leq 0$.

Caso 2: $x_1 \in \Omega_0$, isto é, $x_1 \in (a_j, b_j)$ para algum $j = 1, \dots, m$.

Tome K de modo que se $(x, t) \in \partial K$ então $x \in (a_j, b_j)$.

Sejam $t_0 < t_2 < t_1$ de modo que o arco $C' = \{(x, t) \in \partial K : t \leq t_2\}$ esteja na fronteira de K , $C'' = \{(x, t) \in K \cup \partial K : t = t_1\} \cup \{(x, t) \in \partial K : t_1 < t < t_2\}$ e D a região entre C' e C'' .

Como $u > M$ sobre o arco fechado C' , existe uma constante positiva η tal que $u \geq M + \eta$ sobre C' .

Em $(0, 1) \times (0, \infty)$ defina a função $v(x, t) = e^{-\alpha(t-t_1)} - 1$, onde a constante positiva α é tomada suficientemente grande, de modo que

$$Sv(x, t) = (h_j(t)(1 - e^{\alpha(t-t_1)}) + \alpha) e^{-\alpha(t-t_1)} > 0$$

para (x, t) em $K \cup \partial K$ e $t \leq t_1$.

Considere $w = u - \varepsilon v$, onde $\varepsilon > 0$ é escolhido suficientemente pequeno de forma que w tenha as seguintes propriedades

- (i) $Sw = Su - \varepsilon Sv < 0$, em $K \cup \partial K$,
- (ii) $w = u - \varepsilon v \geq M + \eta - \varepsilon v > M$ em C' ,

Seja (x', t') ponto de mínimo de w em $D \cup C' \cup C''$, então (x', t') está em $I = \{(x, t) \in K \cup \partial K : t = t_1\}$ ou $I' = \{(x, t) \in K \cup \partial K : t_2 < t < t_1\}$.

Por w ser constante em (a_j, b_j) e (x', t') ser ponto de mínimo temos $w_x(a_j^-, t') \leq 0$, $w_x(b_j^+, t') \geq 0$, $w_t(x', t') \leq 0$ e $w(x', t') \leq M \leq 0$, então

$$Sw(x', t') = \frac{1}{b_j - a_j} [p(b_j)w_x(b_j^+, t') - p(a_j)w_x(a_j^-, t')] + h_j(t')M - w_t(x', t') \geq 0,$$

o que contradiz (i).

Se $x_1 = a_j$ ou $x_1 = b_j$, para algum $j = 1, \dots, m$ teremos $u(x, t_1) = M$ para todo $x \in [a_j, b_j]$. Neste caso consideramos $\tilde{x} \in (a_j, b_j)$ e repetimos o argumento acima para $P = (\tilde{x}, t_1)$. $\square$

Teorema 2.10

Considere a região E , o operador S como no Lema 2.7. Se o mínimo M de u é atingido em um ponto interior (x_*, t_*) de E e se $M \leq 0$ então $u \equiv M$ sobre todo o segmento horizontal $\{(x, t) \in E : t = \bar{t}\}$ para cada $\bar{t} < t_*$.

Demonstração

Suponhamos que existam $\bar{t} < t_*$ e $\bar{x} \in (0, 1)$ tais que $u(\bar{x}, \bar{t}) > M$. Então pelo Lema 2.8, $u(x_*, \bar{t}) > M$. Seja $\tau = \sup\{t < t_* : u(x_*, t) > M\}$. Por continuidade $u(x_*, \tau) = M$. Seja τ_1 tal que $u(x_*, t) > M$ no intervalo $\tau_1 < t < \tau$.

Como $u(x_*, t) > M$, para $\tau_1 < t < \tau$, segue do Lema 2.8 que $u(x, t) > M$ para $\tau_1 < t < \tau$. Do Lema 2.9, temos que $u(x, \tau) > M$ para (x, τ) em E ; em particular $u(x_*, \tau) > M$, o que é um absurdo. $\square$

No último resultado desta seção estabelecemos uma propriedade importante das soluções de (P_0) : o decrescimento do número de zeros da solução com o tempo.

Teorema 2.11

Sejam $r, p : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, r contínua em $(0, 1)$, $p > 0$ e diferenciável em Ω_1 , $h_i : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $q, w : [0, 1] \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, h_i , q limitada, w contínua, $w \not\equiv 0$, w_x contínua em $[0, 1] \times (t_0, t_1]$, w_t , w_{xx} contínuas em $(0, 1) \times (t_0, t_1]$ e $w(\cdot, t)$ constante em cada $\Omega_{0,i}$, $i = 1, \dots, m$, satisfaz

$$w_t = [p(x)w_{xx} + r(x)w_x + q(x, t)w]\chi_{\Omega_1} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)w_x(b_i^+, t) - p(a_i)w_x(a_i^-, t)] + h_i(t)w \right] \chi_{\Omega_{0,i}} \quad (2.19)$$

em $(0, 1) \times (t_0, t_1]$. Também suponha que $\beta_0(t)$ e $\beta_1(t)$ são contínuas em $[t_0, t_1]$ e

$$\begin{aligned} w(0, t)(p(0)w_x(0, t) + \beta_0(t)w(0, t)) &\geq 0 \\ w(1, t)(p(1)w_x(1, t) + \beta_1(t)w(1, t)) &\leq 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Então o número de componentes do conjunto $\{x \in (0, 1) : w(x, t) \neq 0\}$ decresce em $t_0 \leq t \leq t_1$.

Demonstração

Não há perda de generalidade em assumirmos que $q(x, t) < 0$, $h_i(t) < 0$, para $i = 1, \dots, m$, $\beta_0(t) = -1$ e $\beta_1(t) = 1$, pois caso contrário consideramos $\tilde{w}(x, t) = w(x, t)e^{\varphi(x, t) - \lambda t}$ onde $\lambda > 0$ é uma constante a ser escolhida e $\varphi(x, t)$ é suave e satisfaz $\varphi_x(0, t) \geq \frac{1}{p(0)}[\beta_0(t) + 1]$ e $\varphi_x(1, t) \leq \frac{1}{p(1)}[\beta_1(t) - 1]$. Então $\tilde{w}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t = & \left[p(x)\tilde{w}_{xx} + [r(x) - 2p(x)\varphi_x]\tilde{w}_x + \right. \\ & \left. [q(x, t) - p(x)\varphi_{xx} - r(x) + p(x)\varphi_x^2 + \varphi_t - \lambda]\tilde{w} \right] \chi_{\Omega_1} \\ & + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\tilde{w}_x(b_i^+, t) - p(a_i)\tilde{w}_x(a_i^-, t)] \right. \\ & \left. + \left[h_i(t) - \frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\varphi_x(b_i, t) - p(a_i)\varphi_x(a_i, t)] + \varphi_t - \lambda \right] \tilde{w} \right] \chi_{\Omega_{0,i}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{w}(0, t)(p(0)\tilde{w}_x(0, t) - \tilde{w}(0, t)) &\geq 0 \\ \tilde{w}(1, t)(p(1)\tilde{w}_x(1, t) + \tilde{w}(1, t)) &\leq 0. \end{aligned}$$

Podemos então escolher λ suficientemente grande de modo que

$$\tilde{q}(x, t) = q(x, t) - p(x)\varphi_{xx} - r(x) + p(x)\varphi_x^2 + \varphi_t - \lambda < 0$$

e

$$\tilde{h}(t) = h_i(t) - \frac{1}{b_i - a_i}[p(b_i)\varphi_x(b_i, t) - p(a_i)\varphi_x(a_i, t)] + \varphi_t - \lambda < 0.$$

Seja $Q(t) = \{x \in (0, 1) : w(x, t) \neq 0\}$, para $t_0 \leq t \leq t_1$. É suficiente mostrar que $Q(t_0)$ tem no mínimo tantas componentes quanto $Q(t_1)$.

Sejam σ uma componente de $Q(t_1)$ em $(0, 1)$ e S_σ a componente de

$$((0, 1) \times [t_0, t_1]) \cap \{(x, t) : w(x, t) \neq 0\}$$

contendo σ . Vamos provar que

$$(i) \quad S_\sigma \cap \{(x, t_0) : 0 < x < 1\} \neq \emptyset$$

$$(ii) \quad \text{Se } \sigma \text{ e } \sigma_1 \text{ são componentes disjuntas de } Q(t_1) \text{ em } (0, 1) \text{ então } S_\sigma \cap S_{\sigma_1} = \emptyset.$$

Provemos (i). Suponhamos que $S_\sigma \cap \{(x, t_0) : 0 < x < 1\} = \emptyset$. Como $w \neq 0$ sobre S_σ podemos assumir sem perda de generalidade que $w(x, t) > 0$ em S_σ , de modo que

$$M := \max\{w(x, t) : (x, t) \in \bar{S}_\sigma\} > 0.$$

Suponhamos que o máximo ocorra em $(x', t') \in \bar{S}_\sigma$. Seja

$$N_\varepsilon(x', t') = D_\varepsilon(x', t') \cap ((0, 1) \times [t_0, t_1]).$$

onde $D_\varepsilon(x', t')$ é o disco de centro em (x', t') e raio ε .

Então N_ε é convexo, N_ε intersecta S_σ e se ε é pequeno $w > 0$ em N_ε . Portanto $N_\varepsilon \subset S_\sigma$, para ε suficientemente pequeno.

Como $S_\sigma \cap \{(x, t_0) : 0 < x < 1\} = \emptyset$ temos $t' > t_0$.

Se $t_0 < t' \leq t_1$ e $0 < x' < 1$ então em (x', t') temos

$$w_x(x', t') = 0, \quad w_{xx}(x', t') \leq 0, \quad w_t(x', t') \geq 0, \quad \text{e} \quad w(x', t') = M > 0.$$

Assim na equação diferencial obtemos

(i) Se $x' \in \Omega_1$, então $w_t(x', t') = p(x')w_{xx}(x', t') + q(x', t')M$, o que é um absurdo, pois o primeiro membro é maior ou igual a zero e o segundo membro é estritamente negativo.

(ii) Se $x' \in \Omega_0$ então $x' \in (a_j, b_j)$ para algum $j = 1, \dots, m$. Portanto

$$w_t(x', t') = \frac{1}{b_j - a_j} [p(b_j)w_x(b_j^+, t') - p(a_j)w_x(a_j^-, t')] + h_j(t')M.$$

Como (x', t') é ponto de máximo, $w_x(a_j^-, t') \geq 0$ e $w_x(b_j^+, t') \leq 0$ e como em (i) obtemos uma contradição.

Se $t_0 < t' \leq t_1$, $x' = 0$, para $0 < x < \varepsilon$ $(x, t') \in N_\varepsilon(0, t')$. Logo $(x, t') \in S_\sigma$ para $x > 0$, e temos $w(0, t') = M > 0$. De (2.20), obtemos $w_x(0, t') \geq \frac{M}{p(0)} > 0$ e portanto M não seria máximo.

Se $t_0 < t' \leq t_1$, $x' = 1$, para $0 < 1 - x < \varepsilon$ $(x, t') \in N_\varepsilon(1, t')$. Logo $(x, t') \in S_\sigma$ para $1 - x > 0$, e $w(1, t') = M > 0$. De (2.20), obtemos que $w_x(1, t') \leq \frac{-M}{p(1)} < 0$ de forma que M não seria máximo.

Portanto temos que $S_\sigma \cap \{(x, t_0) : 0 < x < 1\} \neq \emptyset$.

Para provar (ii) sejam σ e σ_1 componentes disjuntas de $Q(t_1)$. Vamos provar que $S_\sigma \cap S_{\sigma_1} = \emptyset$. Suponhamos que $S_\sigma \cap S_{\sigma_1} \neq \emptyset$, ou seja, $S_\sigma = S_{\sigma_1}$.

Assumimos, como antes, que $w > 0$ sobre S_σ . O conjunto

$$S_\sigma \cap \{(x, t) : 0 < x < 1, t_0 < t < t_1\}$$

é aberto e conexo e portanto conexo por caminhos. Logo existe um caminho simples γ em $S_\sigma \cap \{(x, t) : 0 < x < 1, t_0 < t < t_1\}$ com um ponto inicial em $\sigma \cap \{t = t_1\}$ e um ponto final em $\sigma_1 \cap \{t = t_1\}$. Acrescentando um segmento de reta em $\{(x, t_1) : 0 < x < 1\}$ unindo os pontos inicial e final, obtemos uma curva fechada simples limitando uma região E .

Note que qualquer intervalo em $\{(x, t_1) : 0 < x < 1\}$ que intersecta σ e σ_1 tem $w(x, t_1) = 0$ em algum ponto $x \in (0, 1)$.

Sobre $\partial E \cap \{(x, t) : 0 < x < 1, t < t_1\}$ e nos pontos finais de

$$\partial E \cap \{(x, t_1) : 0 < x < 1\}$$

temos $w > 0$.

Segue do Teorema 2.10, aplicado para a região E , que $w > 0$ em $\bar{E}$, em particular $w(x, t_1) > 0$ sobre qualquer intervalo unindo σ e σ_1 o que é uma contradição.

□

3

Transversalidade das Variedades Estável e Instável

Neste capítulo mostraremos a transversalidade das variedades estável e instável do problema limite (P_0) . Iniciamos caracterizando as soluções da equação linearizada e adjunta do problema (P_0) : mostraremos que se $v(x, t)$ é uma solução da equação linearizada, então

$$v(x, t) = \exp \left(\int_0^t \lambda_j(s) ds \right) [c\psi_j^+(x) + o(1)],$$

quando $t \rightarrow +\infty$, onde $\lambda_j(t)$ é autovalor do operador determinado pela equação linear e ψ_j^+ é autofunção do operador limite. Obteremos um resultado análogo para a equação adjunta. Os resultados obtidos no Capítulo 1 serão bastante utilizados nestas caracterizações. Também neste capítulo consideraremos $b_0 := 0$ e $a_{m+1} = 1$.

Em seguida utilizando estas caracterizações e os Teoremas 2.11 e 3.5 obtemos a transversalidade das variedades estável e instável.

3.1 Comportamento Assintótico das Soluções

Sejam $p(x)$, $q(x, t)$, $h_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $\gamma_0(t)$ e $\gamma_1(t)$ funções reais. Suponha $p(x) > 0$ diferenciável em Ω_1 , $h_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $q(x, t)$, $\gamma_0(t)$ e $\gamma_1(t)$ funções limitadas e contínuas, com primeira derivada com relação a t limitada e contínua em $-\infty < t < \infty$.

∞ , $0 \leq x \leq 1$ e $\dot{\gamma}_0(t)$ e $\dot{\gamma}_1(t)$ são localmente Hölder contínuas. Seja

$$\mathcal{D}(L(t)) = \{u \in H_{\Omega_0}^1(0, 1) : (p(x)u_x)_x \in L_{\Omega_0}^2(0, 1) \text{ tal que } p(0)u_x(0) = \gamma_0(t)u(0), \\ p(1)u_x(1) = \gamma_1(t)u(1)\},$$

e defina $L(t) : \mathcal{D}(L(t)) \rightarrow L_{\Omega_0}^2(0, 1)$ por

$$(L(t)v)(x) = [(p(x)v_x(x))_x + q(x, t)v(x)]\chi_{\Omega_1}(x) \\ + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)v_x(b_i^+) - p(a_i)v_x(a_i^-)] + h_i(t)v(x) \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x). \quad (3.1)$$

Seja

$$\mathcal{D}(L_{\pm}) = \{u \in H_{\Omega_0}^1(0, 1) : (p(x)u_x)_x \in L_{\Omega_0}^2(0, 1) \text{ tal que } p(0)u_x(0) = \gamma_0^{\pm}u(0), \\ p(1)u_x(1) = \gamma_1^{\pm}u(1)\},$$

e defina $L_{\pm} : \mathcal{D}(L_{\pm}) \rightarrow L_{\Omega_0}^2(0, 1)$ por

$$(L_{\pm}v)(x) = [(p(x)v_x(x))_x + q_{\pm}(x)v(x)]\chi_{\Omega_1}(x) \\ + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)v_x(b_i^+) - p(a_i)v_x(a_i^-)] + h_{i\pm}(x)v(x) \right] \chi_{\Omega_{0,i}}(x), \quad (3.2)$$

onde $q_{\pm}(x) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} q(x, t)$, $h_{i\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} h_i(t)$ e $\gamma_0^{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_0(t)$ e $\gamma_1^{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_1(t)$.

Os operadores $L(t)$, para cada t fixo, e $L_{\pm}$ são setoriais. Seja $\lambda_j(t)$ o j -ésimo autovalor de $L(t)$, de modo que $\lambda_1(t) > \lambda_2(t) > \dots > \lambda_j(t)$ e seja $\lambda_j^{\pm}$ o j -ésimo autovalor de $L_{\pm}$. Note que $\lambda_j(t) \rightarrow \lambda_j^{\pm}$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. Seja $\psi_j^{\pm}$ a j -ésima autofunção de $L_{\pm}$.

Teorema 3.1

Suponha que as hipóteses acima sobre $p(x)$, $q(x, t)$, $h_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $\gamma_0(t)$ e $\gamma_1(t)$ estejam satisfeitas. Suponha também que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\sup_{0 \leq x \leq 1} (|q_t(x, t)|)^2 + \sum_{i=1}^m |\dot{h}_i(t)|^2 + \sup_{t \leq s \leq t+1} (|\dot{\gamma}_1(s)| + |\dot{\gamma}_0(s)|) \right] dt < \infty$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{n \leq s \leq n+1} (|\dot{\gamma}_1(s)| + |\dot{\gamma}_0(s)|) < \infty.$$

Então existem soluções clássicas $v_j^\pm(x, t)$ do problema

$$\begin{cases} v_t = (p(x)v_x)_x + q(x, t)v, & x \in \Omega_1, \quad t \in (-\infty, \infty) \\ \dot{v}_{\Omega_{0,i}}(t) = \frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)v_x(b_i^+, t) - p(a_i)v_x(a_i^-, t)] + h_i(t)v_{\Omega_{0,i}}(t), & i = 1, \dots, m \\ p(0)v_x(0, t) = \gamma_0(t)v(0, t) \\ p(1)v_x(1, t) = \gamma_1(t)v(1, t) \end{cases} \quad (3.3)$$

com v_j^- definida em $-\infty < t < \infty$ e v_j^+ definida para t maior do que algum t_j , tais que

$$v_j^+(x, t) = \exp\left(\int_0^t \lambda_j(s) ds\right) [\psi_j^+(x) + o(1)], \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty \quad (3.4)$$

e

$$v_j^-(x, t) = \exp\left(-\int_t^0 \lambda_j(s) ds\right) [\psi_j^-(x) + o(1)], \quad \text{quando } t \rightarrow -\infty, \quad (3.5)$$

com as convergências na norma de $C^1([b_i, a_{i+1}])$, para cada $i = 0, 1, \dots, m$.

Demonstração

Consideraremos o caso $t \rightarrow +\infty$; o caso $t \rightarrow -\infty$ pode ser feito de maneira análoga.

Inicialmente fazemos uma mudança de variável para que a condição de fronteira independa de t . Tome $\phi(\cdot, t) \in H_{\Omega_0}^1(0, 1)$,

$$\phi(x, t) = \phi_1(x)(\gamma_1(t) - \gamma_1^+) + \phi_0(x)(\gamma_0(t) - \gamma_0^+)$$

onde $\phi_1, \phi_0 \in H_{\Omega_0}^1(0, 1)$ são tais que $\phi_1'(0) = 0, \phi_1'(1) = 1, \phi_0'(0) = 1$ e $\phi_0'(1) = 0$.

Seja v solução de (3.3) e $v(x, t) = e^{\phi(x, t)}w(x, t)$. Então w satisfaz

$$\begin{aligned} w_t &= -\phi_t w + e^{-\phi(\cdot, t)} [(p(x)(e^{\phi(\cdot, t)}w)_x)_x + q(x, t)e^{\phi(\cdot, t)}w] \chi_{\Omega_1} \\ &\quad + e^{-\phi(\cdot, t)} \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)(e^{\phi(\cdot, t)}w)_x(b_i^+, t) \right. \\ &\quad \left. - p(a_i)(e^{\phi(\cdot, t)}w)_x(a_i^-, t)] + h_i(t)(e^{\phi}w)_{\Omega_{0,i}}(t) \right] \chi_{\Omega_{0,i}} \\ &= e^{-\phi(\cdot, t)} (L(t)(e^{\phi(\cdot, t)}w)) - \phi_t w, \end{aligned}$$

com as condições de fronteira independentes de t , $p(0)w_x(0) = \gamma_0^+ w(0)$ e $p(1)w_x(1) = \gamma_1^+ w(1)$.

Definindo $\Lambda(t)w := e^{-\phi(\cdot, t)}L(t)e^{\phi(\cdot, t)}w$ obtemos

$$w_t = (\Lambda(t) - \phi_t)w, \quad (3.6)$$

e $\Lambda(t)$ tem o mesmo espectro que $L(t)$. Note que $\phi(x, t) \rightarrow 0$ e $\Lambda(t)u \rightarrow L_+u$ quando $t \rightarrow +\infty$ para cada $u \in H_{\Omega_0}^1(0, 1)$.

Seja $\{T(t, s), t \geq s\}$ o operador de evolução da equação (3.6), no sentido do Teorema 7.1.3 em Henry [8], de modo que $w(t, \cdot) = T(t, s)w(s, \cdot)$ quando w resolve a equação no intervalo $[s, t]$.

Seja $X_0 = L_{\Omega_0}^2(0, 1)$, $X_{0,i} = L^2(b_i, a_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, m$ e tome $-L_+$ como operador setorial principal, de modo que as normas $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\alpha^{0,i}$, $i = 0, 1, \dots, m$ são definidas por

$$\begin{aligned} X_0^\alpha &= \mathcal{D}((c - L_+)^\alpha), \quad \|\psi\|_\alpha = \|(c - L_+)^\alpha \psi\|_{L_{\Omega_0}^2} \\ X_{0,i}^\alpha &= \mathcal{D}(((c - L_+)|_{\mathcal{D}(L_+) \cap L^2(b_i, a_{i+1})})^\alpha), \\ \|\psi\|_\alpha^{0,i} &= \|((c - L_+)|_{\mathcal{D}(L_+) \cap L^2(b_i, a_{i+1})})^\alpha \psi\|_{L^2(b_i, a_{i+1})} \end{aligned}$$

para alguma constante c suficientemente grande.

É fácil ver que $X_0^\alpha \hookrightarrow X_{0,i}^\alpha$, para cada $i = 0, 1, \dots, m$. Segue do Teorema 1.6.1 em Henry [8], que se $3/4 < \alpha \leq 1$ então $X_{0,i}^\alpha \subset C^1([b_i, a_{i+1}])$, para cada $i = 0, 1, \dots, m$ e portanto convergência em $\|\cdot\|_\alpha$ implica convergência em $C^1([b_i, a_{i+1}])$ para cada $i = 0, 1, \dots, m$.

Além disso $\|\cdot\|_{1/2}$ é equivalente a norma de $H_{\Omega_0}^1(0, 1)$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{1/2}^2 &= \|(c - L_+)^{1/2} \psi\|_{L_{\Omega_0}^2}^2 \\ &= \langle (c - L_+)^{1/2} \psi, (c - L_+)^{1/2} \psi \rangle_{L_{\Omega_0}^2} \\ &= \langle (c - L_+) \psi, \psi \rangle_{L_{\Omega_0}^2} \\ &= \int_0^1 ((c - L_+) \psi)(x) \psi(x) dx \\ &= \int_0^1 c \psi^2(x) dx - \int_0^1 [(p(x) \psi_x)_x + q_+(x) \psi(x)] \psi(x) \chi_{\Omega_1}(x) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \int_0^1 \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i) \psi_x(b_i^+) - p(a_i) \psi_x(a_i^-)] + h_{i+} \psi(x) \right] \psi(x) \chi_{\Omega_{0,i}}(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} p(x) \psi_x^2 dx + \int_0^1 \left[c - q_+(x) \chi_{\Omega_1}(x) - \sum_{i=1}^m h_{i+} \chi_{\Omega_{0,i}}(x) \right] \psi^2(x) dx \\ &\quad + \gamma_0^+ \psi^2(0) - \gamma_1^+ \psi^2(1). \end{aligned}$$

Como $H^1(0, 1) \hookrightarrow C^0([0, 1])$, segue que $\|\cdot\|_{1/2}$ é equivalente da norma em $H_{\Omega_0}^1(0, 1)$.

Do Teorema 7.1.3 em Henry [8], segue que

$$\|T(t, s) \psi\|_{L_{\Omega_0}^2} \leq k \|\psi\|_{L_{\Omega_0}^2}$$

e também

$$\|T(t, s)\psi\|_{1/2} \leq 2k(t-s)^{-1/2}\|\psi\|_{L^2_{\Omega_0}}, \quad \text{para } 0 < t-s \leq 1$$

onde k é uma constante que depende somente de $-L_+$ e de $(\sup_{0 \leq x \leq 1} |q(x, t)|)^2 + \sum_{i=1}^m |h_i(t)|^2$.

Da equivalência das normas $\|\cdot\|_{1/2}$ e $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_0)}$ existe constante $c_1 > 0$

$$\|T(t, s)\psi\|_{H^1_{\Omega_0}} \leq \frac{2k}{c_1}(t-s)^{-1/2}\|\psi\|_{L^2_{\Omega_0}}.$$

Seja $\bar{c} = \max\{k, \frac{2k}{c_1}\}$ então

$$\|T(t, s)\psi\|_{L^2_{\Omega_0}} \leq \bar{c}\|\psi\|_{L^2_{\Omega_0}} \quad (3.7)$$

$$\|T(t, s)\psi\|_{H^1_{\Omega_0}} \leq \bar{c}(t-s)^{-1/2}\|\psi\|_{L^2_{\Omega_0}} \quad (3.8)$$

para $0 < t-s \leq 1$.

Fixe τ , e considere t de forma que $0 < t-\tau \leq 1$. Escrevendo (3.6) como

$$\dot{w} = [\Lambda(\tau) + (\Lambda(t) - \Lambda(\tau) - \phi_t)]w$$

e usando a fórmula da variação das constantes obtemos

$$\begin{aligned} T(t, \tau)\psi &= e^{\Lambda(\tau)(t-\tau)}\psi + \int_{\tau}^t e^{\Lambda(\tau)(t-s)} (\Lambda(s) - \Lambda(\tau) - \phi_t(s, \cdot)) T(s, \tau)\psi ds \\ &= e^{\Lambda(\tau)(t-\tau)}\psi + \int_{\tau}^t e^{\Lambda(\tau)(t-s)} \left(\int_{\tau}^s \dot{\Lambda}(r) dr - \phi_t(s, \cdot) \right) T(s, \tau)\psi ds, \end{aligned}$$

onde

$$\dot{\Lambda}(r)u = [\tilde{q}_r(x, r)u(x) + \eta_r(x, r)u_x(x)]\chi_{\Omega_1}(x) + \sum_{i=1}^m \dot{\tilde{h}}_i(r)u(x)\chi_{\Omega_{0,i}}(x)$$

com,

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, t) &= q(x, t) + (p(x)\phi_x(x, t))_x + p(x)\phi_x^2(x, t) \\ \eta(x, t) &= 2p(x)\phi_x(x, t) \\ \tilde{h}_j(t) &= h_j(t) + \frac{1}{b_j - a_j} [p(b_j)\phi_x(b_j^+, t) - p(a_j)\phi_x(a_j^-, t)]. \end{aligned}$$

Se $0 \leq \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}
& \|T(t, \tau)\psi - e^{\Lambda(\tau)(t-\tau)}\psi\|_\alpha \\
&= \left\| \int_\tau^t (c - L_+)^{\alpha} e^{\Lambda(\tau)(t-s)} \left(\int_\tau^s \dot{\Lambda}(r) dr - \phi_t(s, \cdot) \right) T(s, \tau)\psi ds \right\|_{L_{\Omega_0}^2} \\
&\leq \int_\tau^t \|(c - L_+)^{\alpha} e^{\Lambda(\tau)(t-s)}\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2)} \left\| \int_\tau^s \dot{\Lambda}(r) dr \right\|_{\mathcal{L}(H_{\Omega_0}^1, L_{\Omega_0}^2)} \|T(s, \tau)\psi\|_{H_{\Omega_0}^1} ds \\
&\quad + \int_\tau^t \|(c - L_+)^{\alpha} e^{\Lambda(\tau)(t-s)}\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2)} \|\phi_t(s, \cdot) T(s, \tau)\psi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Como $0 < t - s \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|(c - L_+)^{\alpha} e^{\Lambda(\tau)(t-s)}\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2)} &= \|(c - L_+)^{\alpha} e^{-(c-L_+)(t-s)} e^{(c-L_++\Lambda(\tau))(t-s)}\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2)} \\
&\leq \|(c - L_+)^{\alpha} e^{-(c-L_+)(t-s)}\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2)} \|e^{(c-L_++\Lambda(\tau))(t-s)}\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2)} \\
&\leq c_{\alpha}(t-s)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\|\dot{\Lambda}(r)u\|_{L_{\Omega_0}^2}^2 &= \int_0^1 |[\tilde{q}_r(x, r)u(x) + \eta_r(x, r)u_x(x)]\chi_{\Omega_1}(x) + \sum_{i=1}^m \dot{h}_i(r)u(x)\chi_{\Omega_{0,i}}(x)|^2 dx \\
&\leq 2^2 \int_{\Omega_1} |\tilde{q}_r(x, r)|^2 |u(x)|^2 + |\eta_r(x, r)|^2 |u_x(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^m |\dot{h}_i(r)|^2 \int_{\Omega_{0,i}} |u(x)|^2 dx \\
&\leq (2m)^2 \left[\sup_{0 \leq x \leq 1} |\tilde{q}_r(x, r)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |\eta_r(x, r)| + \sum_{i=1}^m |\dot{h}_j(r)| \right]^2 \|u\|_{H_{\Omega_0}^1}^2 \\
&\leq K_1^2 \varepsilon_1(r)^2 \|u\|_{H^1}^2
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_1 &= 2m \max \left\{ 1, \sup_{0 \leq x \leq 1} |(p(x)\phi_1'(x))'| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |(p(x)\phi_0'(x))'| + \left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |2p(x)\phi_1'(x)| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sup_{0 \leq x \leq 1} |2p(x)\phi_0'(x)| \right) \left[\left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |\phi_0'(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |\phi_1'(x)| \right) \left(\sup_{\tau \leq r \leq \tau+1} |\gamma_1(r) - \gamma_1^+| \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sup_{\tau \leq r \leq \tau+1} |\gamma_0(r) - \gamma_0^+| \right) + 1 \right] + \sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - a_i} |p(b_i)\phi_1'(b_i^+) - p(a_i)\phi_1'(a_i)| \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - a_i} |p(b_i)\phi_0'(b_i^+) - p(a_i)\phi_0'(a_i)| \right\}
\end{aligned}$$

e,

$$\varepsilon_1(r) := \sup_{0 \leq x \leq 1} |q_r(x, r)| + \sum_{i=1}^m |\dot{h}_i(r)| + \sup_{r \leq s \leq r+1} (|\dot{\gamma}_1(s)| + |\dot{\gamma}_0(s)|).$$

Então

$$\left\| \int_{\tau}^s \dot{\Lambda}(r) dr \right\|_{\mathcal{L}(H_{\Omega_0}^1, L_{\Omega_0}^2)} \leq \int_{\tau}^t \|\dot{\Lambda}(r)\|_{\mathcal{L}(H_{\Omega_0}^1, L_{\Omega_0}^2)} dr \leq K_1 \int_{\tau}^t \varepsilon_1(r) dr$$

Da estimativa acima, juntamente com (3.7) e (3.8), segue que

$$\begin{aligned} \|T(t, \tau)\psi - e^{\Lambda(\tau)(t-\tau)}\psi\|_{\alpha} &\leq \bar{c}c_{\alpha}K_1 \int_{\tau}^t \varepsilon_1(r) dr \int_{\tau}^t (t-s)^{-\alpha}(s-\tau)^{-1/2} ds \|\psi\|_{L^2} \\ &\quad + \bar{c}c_{\alpha} \int_{\tau}^t (t-s)^{-\alpha} \sup_{x \in [0,1]} |\phi_t(x, s)| ds \|\psi\|_{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \bar{c}c_{\alpha}K_1 B(1/2, 1-\alpha) \int_{\tau}^t \varepsilon_1(r) dr (t-\tau)^{1/2-\alpha} \|\psi\|_{L^2} \\ &\quad + \bar{c}c_{\alpha}K_2 \frac{1}{1-\alpha} \sup_{\tau \leq s \leq \tau+1} (|\dot{\gamma}_1(s)| + |\dot{\gamma}_0(s)|) (t-\tau)^{1/2-\alpha} \|\psi\|_{L^2} \end{aligned}$$

onde $B(\cdot, \cdot)$ é a função beta e $K_2 = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\phi_1(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |\phi_0(x)|$. Se

$$c'_{\alpha} = \max \left\{ \bar{c}c_{\alpha}K_1 B(1/2, 1-\alpha), \bar{c}c_{\alpha}K_2 \frac{1}{1-\alpha} \right\},$$

então segue que

$$\begin{aligned} \|T(t, \tau)\psi - e^{\Lambda(\tau)(t-\tau)}\psi\|_{\alpha} &\leq c'_{\alpha} \left[\int_{\tau}^t \varepsilon_1(r) dr + \sup_{\tau \leq s \leq \tau+1} (|\dot{\gamma}_1(s)| + |\dot{\gamma}_0(s)|) \right] (t-\tau)^{1/2-\alpha} \|\psi\|_{L_{\Omega_0}^2} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Considerando os operadores lineares contínuos $A_n := e^{\Lambda(n)}$ e $B_n := T(n+1, n) - A_n$ onde $n \in \mathbb{Z}^+$, usando (3.9) obtemos

$$\begin{aligned} \|B_n\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2)} &= \|T(n+1, n) - A_n\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2)} \\ &= \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(n+1, n)v - e^{\Lambda(n)}v\| \\ &\leq \sup_{\|v\| \leq 1} c'_{\alpha} \left[\int_n^{n+1} \varepsilon_1(r) dr + \sup_{n \leq s \leq n+1} (|\dot{\gamma}_1(s)| + |\dot{\gamma}_0(s)|) \right] \|v\|_{L_{\Omega_0}^2} \\ &\leq c'_{\alpha} \left[\int_n^{n+1} \varepsilon_1(r) dr + \sup_{n \leq s \leq n+1} (|\dot{\gamma}_1(s)| + |\dot{\gamma}_0(s)|) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\| &\leq c'_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \varepsilon_1(r) dr + \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{n \leq s \leq n+1} (|\dot{\gamma}_1(s)| + |\dot{\gamma}_0(s)|) \\ &= c'_{\alpha} \int_0^{\infty} \varepsilon_1(r) dr + \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{n \leq s \leq n+1} (|\dot{\gamma}_1(s)| + |\dot{\gamma}_0(s)|) < \infty. \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{(1-s)\Lambda(n)} \left(\int_n^{n+1} \dot{\Lambda}(r) dr \right) e^{s\Lambda(n+1)} ds &= \int_0^1 e^{(1-s)\Lambda(n)} [\Lambda(n+1) - \Lambda(n)] e^{s\Lambda(n+1)} ds \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} [e^{s\Lambda(n+1)} e^{(1-s)\Lambda(n)}] ds \\ &= A_{n+1} - A_n. \end{aligned}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \|A_{n+1} - A_n\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2)} &= \left\| \int_0^1 e^{(1-s)\Lambda(n)} \left(\int_n^{n+1} \dot{\Lambda}(r) dr \right) e^{s\Lambda(n+1)} ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|e^{(1-s)\Lambda(n)}\| \left\| \int_n^{n+1} \dot{\Lambda}(r) dr \right\| \|e^{s\Lambda(n+1)}\| ds \\ &\leq c' \int_n^{n+1} \varepsilon_1(r) dr. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_{n+1} - A_n\|_{\mathcal{L}(L_{\Omega_0}^2(0,1))} \leq c' \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \varepsilon_1(r) dr = c' \int_0^{\infty} \varepsilon_1(r) dr < \infty.$$

Tomando $e^{L^+} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$, as condições do Teorema 1.8 estão satisfeitas. Se $\{w_n; n \geq n_0\}$ é a seqüência proveniente do Teorema 1.8, então $\frac{wn}{\|w_n\|} \rightarrow \psi_j^+$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $w_{n+1} = (A_n + B_n)w_n := T(n+1, n)w_n$ para $n \geq n_0$.

Defina, $w(t) := T(t, n_0)w_{n_0}$. Assim para $n \geq n_0$, temos $w(n) = w_n$. De fato, para $k = n_0$, é imediato; suponha que $T(k, n_0)w_{n_0} = w_k$ então $w(k+1) = T(k+1, k)T(k, n_0)w_{n_0} = w_{k+1}$.

Considerando $0 \leq s \leq 1$, $t \geq n_0$ e usando (3.9), com $\alpha = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|w(t+s) - e^{s\Lambda(t)}w(t)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)} &= \|T(t+s, n_0)w_{n_0} - e^{s\Lambda(t)}w(t)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)} \\ &= \|T(t+s, t)T(t, n_0)w_{n_0} - e^{s\Lambda(t)}w(t)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)} \\ &= \|T(t+s, t)w(t) - e^{s\Lambda(t)}w(t)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)} \\ &\leq c'_\alpha \left[\int_t^{t+s} \varepsilon_1(r) dr + \sup_{t \leq r \leq t+1} (|\dot{\gamma}_1(r)| + |\dot{\gamma}_0(r)|) \right] \|w(t)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)} \end{aligned}$$

isto implica que,

$$\frac{\|w(t+s) - e^{s\Lambda(t)}w(t)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)}}{\|w(t)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)}} \leq c'_\alpha \left[\int_t^{t+s} \varepsilon_1(r) dr + \sup_{t \leq r \leq t+1} (|\dot{\gamma}_1(r)| + |\dot{\gamma}_0(r)|) \right] \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow +\infty$.

Portanto, $\|w(t+s) - e^{s\Lambda(t)}w(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} = o(\|w(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)})$ quando $t \rightarrow +\infty$ uniformemente para $0 \leq s \leq 1$ e $t \geq n_0$.

Segue do Corolário 1.9 que para alguma constante $\hat{c} \neq 0$,

$$w(t) = \hat{c} \exp\left(\int_{n_0}^t \lambda_j(s) ds\right) [\psi_j^+ + o(1)] \text{ quando } t \rightarrow +\infty$$

ou seja,

$$w(t) = c \exp\left(\int_0^t \lambda_j(s) ds\right) [\psi_j^+ + o(1)] \text{ quando } t \rightarrow +\infty$$

onde $c := \hat{c} \exp(-\int_0^{n_0} \lambda_j(s) ds)$ e a convergência é em $L^2_{\Omega_0}(0,1)$.

Verifiquemos que a convergência ocorre na norma $\|\cdot\|_\alpha$ para qualquer $\alpha < 1$, o que assegurará a convergência em $C^1([b_i, a_{i+1}])$, para cada $i = 0, 1, \dots, m$. Para ver isto, seja

$$z(t) = \frac{1}{c} \exp\left(-\int_0^t \lambda_j(s) ds\right) w(t),$$

então $z(t) \rightarrow \psi_j^+$ em $L^2_{\Omega_0}(0,1)$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Seja $\psi_j(t)$ autofunção de $\Lambda(t)$ tal que $\psi_j(t) \rightarrow \psi_j^+$ quando $t \rightarrow +\infty$ em $H^1_{\Omega_0}(0,1)$. Logo $z(t) - \psi_j(t) \rightarrow 0$ em $L^2_{\Omega_0}(0,1)$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Como, $w(t+1) = T(t+1, n_0)w_{n_0} = T(t+1, t)T(t, n_0)w_{n_0} = T(t+1, t)w(t)$ segue que,

$$\begin{aligned} & \left\| \exp\left(\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds\right) z(t+1) - e^{\Lambda(t)} z(t) \right\|_\alpha \\ &= \left\| \frac{1}{c} \exp\left(-\int_0^t \lambda_j(s) ds\right) w(t+1) - e^{\Lambda(t)} z(t) \right\|_\alpha \\ &= \left\| \frac{1}{c} \exp\left(-\int_0^t \lambda_j(s) ds\right) T(t+1, t)w(t) - e^{\Lambda(t)} z(t) \right\|_\alpha \\ &= \|T(t+1, t)z(t) - e^{\Lambda(t)} z(t)\|_\alpha \\ &\leq c'_\alpha \left[\int_t^{t+1} \varepsilon_1(r) dr + \sup_{t \leq r \leq t+1} (|\dot{\gamma}_1(r)| + |\dot{\gamma}_0(r)|) \right] \|z(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto ,

$$\begin{aligned} & \exp\left(\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds\right) \|z(t+1) - \psi_j(t)\|_\alpha \\ &\leq \left\| \exp\left(\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds\right) z(t+1) - e^{\Lambda(t)} z(t) \right\|_\alpha + \|e^{\Lambda(t)} z(t) - e^{\Lambda(t)} \psi_j(t)\|_\alpha \\ &\quad + \|e^{\Lambda(t)} \psi_j(t) - \exp\left(\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds\right) \psi_j(t)\|_\alpha \\ &= o(1) + \|e^{\Lambda(t)}(z(t) - \psi_j(t))\|_\alpha + \|e^{\Lambda(t)} \psi_j(t) - \exp\left(\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds\right) \psi_j(t)\|_\alpha. \end{aligned}$$

Como $\lambda_j(t) \rightarrow \lambda_j^+$ quando $t \rightarrow +\infty$, segue que $\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds \rightarrow \lambda_j^+$ quando $t \rightarrow +\infty$, com isto obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{\Lambda(t)}\psi_j(t) - \exp\left(\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds\right)\psi_j(t)\|_\alpha &= \|e^{\lambda_j(t)}\psi_j(t) - \exp\left(\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds\right)\psi_j(t)\|_\alpha \\ &\leq |e^{\lambda_j(t)} - \exp\left(\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds\right)| \|\psi_j(t)\|_\alpha \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow +\infty$. Logo

$$\exp\left(\int_t^{t+1} \lambda_j(s) ds\right) \|z(t+1) - \psi_j(t)\|_\alpha \leq \|e^{\Lambda(t)}(z(t) - \psi_j(t))\|_\alpha + o(1).$$

Como,

$$\begin{aligned} \|e^{\Lambda(t)}(z(t) - \psi_j(t))\|_\alpha &= \|(c - L_+)^{\alpha} e^{\Lambda(t)}(z(t) - \psi_j(t))\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)} \\ &= \|(c - L_+)^{\alpha} e^{-(c-L_+)} e^{c-L_++\Lambda(t)}(z(t) - \psi_j(t))\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)} \\ &\leq \|(c - L_+)^{\alpha} e^{-(c-L_+)}\| \|e^{c-L_++\Lambda(t)}\| \|z(t) - \psi_j(t)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)} \\ &\leq d_\alpha \|e^{c-L_++\Lambda(t)}\| \|z(t) - \psi_j(t)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$\|z(t+1) - \psi_j(t)\|_\alpha \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Como $\|\psi_j(t) - \psi_j^+\|_\alpha \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, obtemos, $\|z(t) - \psi_j^+\|_\alpha \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$.

Isto completa a prova do teorema. $\square$

Observação 3.2 Em virtude da convergência em $C^1([b_i, a_{i+1}])$, para cada $i = 0, 1, \dots, m$ na igualdade (3.4), quando $t \rightarrow +\infty$ e em (3.5) quando $t \rightarrow -\infty$ e do fato de $\psi_j^\pm$ e $v_j^\pm$ serem soluções de (3.3) segue que $v_j^\pm(t, \cdot)$ tem exatamente $(j-1)$ zeros simples em $(0, 1)$, quando $\pm t$ é suficientemente grande.

Corolário 3.3

Suponha que as hipóteses do Teorema 3.1 estejam satisfeitas. Então a equação adjunta,

$$\begin{aligned} \eta_t + [(p(x)\eta_x)_x + q(x, t)\eta]\chi_{\Omega_1} \\ + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\eta_x(b_i^+, t) - p(a_i)\eta_x(a_i^-, t)] + h_i(t)\eta \right] \chi_{\Omega_{0,i}} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

com as condições de fronteira,

$$\begin{aligned} p(0)\eta_x(0, t) &= \gamma_0(t)\eta(0, t) \\ p(1)\eta_x(1, t) &= \gamma_1(t)\eta(1, t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

tem soluções clássicas $\eta_j^\pm(x, t)$, (η_j^- definida somente para $t < t_j^*$) onde

$$\begin{aligned} \eta_j^+(x, t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda_j(r)dr\right)[\psi_j^+(x) + o(1)] \text{ quando } t \rightarrow +\infty \\ \eta_j^-(x, t) &= \exp\left(\int_t^0 \lambda_j(r)dr\right)[\psi_j^-(x) + o(1)] \text{ quando } t \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

com convergência em $C^1([b_i, a_{i+1}])$, para cada $i = 0, 1, \dots, m$. Aqui $\psi_j^\pm$ indica a j -ésima autofunção dos operadores $L_\pm^* = L_\pm$.

Demonstração

De (3.10) temos que $\eta_t = -L(t)\eta$, onde $L(t)$ é o operador usado no Teorema 3.1. Considere $S(t) = -L(t)$. Seja $\lambda_j(t)$ o j -ésimo autovalor de $L(t)$ e $\psi_j(\cdot, t)$ a j -ésima autofunção associada, isto é, $L(t)\psi_j(\cdot, t) = \lambda_j(t)\psi_j(\cdot, t)$, logo $-\lambda_j(t)$ é o j -ésimo autovalor de $S(t)$ e $\psi_j(\cdot, t)$ é a j -ésima autofunção associada, o resultado segue do Teorema 3.1. $\square$

Observação 3.4 Se $\eta(t, x)$ resolve (3.10), com condição (3.11), e $v(t, x)$ resolve (3.3) sobre o intervalo $t_0 < t < t_1$, então

$$t \mapsto \int_0^1 \eta(t, x)v(t, x)dx \text{ é constante sobre este intervalo.}$$

Teorema 3.5

Com as mesmas hipóteses e notações do Teorema 3.1, seja $v(x, t)$ solução não identicamente nula para $t > t_0$ de (3.3).

Suponha que a aplicação

$$\left[\left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |q(x, t)| \right)^2 + \sum_{i=1}^m |h_i(t)|^2 \right]^{1/2}$$

esteja em $L^\infty(0, \infty) \cap L_{\Omega_0}^1(0, \infty)$. Então existem um inteiro $j \geq 1$ e constante $C \neq 0$, tais que

$$v(x, t) = \exp\left(\int_0^t \lambda_j(s) ds\right)[C\psi_j^+(x) + o(1)] \text{ quando } t \rightarrow +\infty$$

com convergência no sentido $C^1([b_i, a_{i+1}])$ para cada $i = 0, 1, \dots, m$. Na realidade, dada qualquer constante κ , se definimos m por $\lambda_{m+1}^+ < -\kappa \leq \lambda_m^+$ existem constantes $c_1, c_2, \dots, c_m$ tais que

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^m c_j v_j^+(x, t) + o(\exp(-\kappa t)) \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Demonstração

Como vimos na demonstração do Teorema 3.1, $\|v(t, \cdot)\| = O(e^{\omega t})$ quando $t \rightarrow +\infty$, para alguma constante ω . Logo

$$\mu := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log(\|v(t, \cdot)\|_{L_{\Omega_0}^2(0,1)}) \leq \omega < +\infty.$$

Vamos provar que $\mu > -\infty$ quando $v \neq 0$. Podemos escrever (3.3) como

$$v_t = B(t)v + C(t)v$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(B(t)) = \mathcal{D}(C(t)) = \{ \varphi \in H_{\Omega_0}^1(0, 1), (p(x)\varphi_x)_x \in L_{\Omega_0}^2(\Omega_1), p(0)u_x(0) = \gamma_0(t)u(0), \\ p(1)u_x(1) = \gamma_1(t)u(1) \}, \end{aligned}$$

$$B(t)v(x) = [(p(x)v_x)_x]\chi_{\Omega_1} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)v_x(b_i^+) - p(a_i)v_x(a_i^-)]\chi_{\Omega_{0,i}}$$

e

$$C(t)v(x) = q(x, t)v\chi_{\Omega_1} + \sum_{i=1}^m h_i(t)v\chi_{\Omega_{0,i}}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dv}{dt} - B(t)v \right\|_{L_{\Omega_0}^2}^2 &\leq \int_{\Omega_1} |q(x, t)|^2 |v|^2 dx + \sum_{i=1}^m |h_i(t)|^2 \int_{\Omega_{0,i}} |v|^2 dx \\ &\leq \left(\left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |q(x, t)| \right)^2 + \sum_{i=1}^m |h_i(t)|^2 \right) \|v\|_{L_{\Omega_0}^2}^2. \end{aligned}$$

Como $B(t)$ é simétrico e para cada $u \in \mathcal{D}(B(t))$ a função $t \mapsto \langle B(t)u, u \rangle$ é diferenciável e satisfaz

$$\frac{d}{dt} \langle B(t)u, u \rangle - 2 \langle B(t)u, \frac{du}{dt} \rangle \geq -\beta_1(t) \|u\|^2$$

onde β_1 é uma função escalar contínua e positiva em $[0, +\infty)$; com isso segue que as hipóteses da Proposição 2.1 em Agmon [5] são verificadas.

Logo existe constante $\sigma > 0$, dependendo de $v(t_0)$, tal que

$$\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} \geq \exp(-\sigma(t-t_0))\|v(t_0)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} \quad \text{para } t \geq t_0.$$

de onde segue que

$$\mu := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \log(\|v(t, \cdot)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)}) \right) \geq -\sigma > -\infty.$$

Fixemos $\lambda_0^+ = +\infty$ e escolha $j \geq 1$ tal que $\lambda_j^+ \leq \mu < \lambda_{j-1}^+$. Pela estimativa (3.9), da prova do Teorema 3.1, temos

$$\begin{aligned} & \|v(t+s) - e^{L+s}v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}} \\ & \leq \|T(t+s, t)v(\cdot, t) - e^{L(t)s}v(\cdot, t)\|_{L^2_{\Omega_0}} + \|e^{L(t)s} - e^{L+s}\| \|v(\cdot, t)\|_{L^2_{\Omega_0}} \\ & \leq c'_0 \left[\int_t^{t+s} \varepsilon_1(r) dr + \sup_{t \leq r \leq t+1} (|\dot{\gamma}_1(r)| + |\dot{\gamma}_0(r)|) + \|e^{L(t)s} - e^{L+s}\| \right] \|v(\cdot, t)\|_{L^2_{\Omega_0}} \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} \|(L(t) - L_+)v\|_{L^2_{\Omega_0}}^2 &= \int_{\Omega_1} |q(x, t) - q_+(x)|^2 |v|^2 dx + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{0,i}} |(h_i(t) - h_{i+})v|^2 dx \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |q(x, t) - q_+(x)| \right)^2 \int_0^1 |v|^2 dx + \sum_{i=1}^m |h_i(t) - h_{i+}|^2 \int_0^1 |v|^2 dx \end{aligned}$$

definindo,

$$\eta(t) := \left[\left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |q(x, t) - q_+(x)| \right)^2 + \sum_{i=1}^m |h_i(t) - h_{i+}|^2 \right]^{1/2}$$

obtemos

$$\|(L(t) - L_+)v\|_{L^2_{\Omega_0}} \leq \eta(t) \|v\|_{L^2_{\Omega_0}}$$

o que mostra a continuidade do operador $L(t) - L_+$, para cada t . Note que $\eta(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Usando o Corolário 1.12 temos

$$\|e^{L(t)s} - e^{L+s}\| \leq N e^\theta (e^{N\eta(t)} - 1) \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow +\infty$, uniformemente em $0 \leq s \leq 1$, para constantes N e θ .

Com isto obtemos que

$$\|v(t+s) - e^{L+s}v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} = o(\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)}) \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Escolha α e β tais que $\lambda_{j+1}^+ < \alpha < \beta < \lambda_j^+ \leq \mu$, então

$$\sigma(e^{L+}) \cap \{z \in \mathbb{C} : e^\alpha \leq |z| \leq e^\beta\} = \emptyset.$$

Defina

$$X^1 = [\psi_1^+, \dots, \psi_j^+], \quad X^2 = [\psi_{j+1}^+, \psi_{j+2}^+, \dots],$$

onde $[\psi_1^+, \dots, \psi_j^+]$ significa o espaço gerado pelas funções $\psi_1^+, \dots, \psi_j^+$.

Com isso, otemos

$$\begin{aligned} L_{\Omega_0}^2(0, 1) &= X^1 \oplus X^2, \quad L_+ = L_+^1 \oplus L_+^2, \\ \sigma(e^{L_+^1 t}) &= \{z \in \sigma(e^{L_+ t}) : |z| > e^{\beta t}\} \quad \text{e} \quad \sigma(e^{L_+^2 t}) = \{z \in \sigma(e^{L_+ t}) : |z| < e^{\alpha t}\}. \end{aligned}$$

Então para qualquer $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ pelo Corolário 1.11 temos

$$\frac{\|v^2(t)\|_{L_{\Omega_0}^2}}{\|v^1(t)\|_{L_{\Omega_0}^2}} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|v(t)\|_{L_{\Omega_0}^2} e^{-\gamma t} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty \quad (3.12)$$

ou

$$\frac{\|v^2(t)\|_{L_{\Omega_0}^2}}{\|v^1(t)\|_{L_{\Omega_0}^2}} \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad \|v(t)\|_{L_{\Omega_0}^2} e^{-\gamma t} \rightarrow +\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty \quad (3.13)$$

Como $\alpha < \mu$ e $\mu := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log(\|v(t)\|_{L_{\Omega_0}^2})$ segue que $\|v(t)\|$ não é $o(e^{\alpha t})$ quando $t \rightarrow +\infty$, então a condição (3.12) não está satisfeita com $\gamma = \alpha$ e portanto (3.13) se verifica. Assim $\|v^2(t)\| > \|v^1(t)\|$ para t suficientemente grande. Como $\|v(t)\| = \max(\|v^1(t)\|, \|v^2(t)\|)$, segue que a componente de $\|v(t)\|_{L_{\Omega_0}^2}$ em $[\psi_k^+, 1 \leq k \leq j]$ é pequena comparada à $\|v(t)\|_{L_{\Omega_0}^2}$.

Escolha agora, α e β tais que $\lambda_j^+ \leq \mu < \alpha < \beta < \lambda_{j-1}^+$ então

$$\sigma(e^{L+}) \cap \{z \in \mathbb{C} : e^\alpha \leq |z| \leq e^\beta\} = \emptyset.$$

Defina

$$X^1 = [\psi_1^+, \dots, \psi_{j-1}^+] \quad \text{e} \quad X^2 = [\psi_j^+, \psi_{j+1}^+, \dots]$$

com isso obtemos,

$$\begin{aligned} L_{\Omega_0}^2(0, 1) &= X^1 \oplus X^2, \quad L_+ = L_+^1 \oplus L_+^2, \\ \sigma(e^{L_+^1 t}) &= \{z \in \sigma(e^{L_+ t}) : |z| > e^{\beta t}\} \quad \text{e} \quad \sigma(e^{L_+^2 t}) = \{z \in \sigma(e^{L_+ t}) : |z| < e^{\alpha t}\}. \end{aligned}$$

Então para qualquer $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ pelo Corolário 1.11 temos

$$\frac{\|v^2(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}}{\|v^1(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}} \rightarrow 0 \text{ e } \|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}} e^{-\gamma t} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty \quad (3.14)$$

ou

$$\frac{\|v^2(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}}{\|v^1(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}} \rightarrow +\infty \text{ e } \|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}} e^{-\gamma t} \rightarrow +\infty, \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (3.15)$$

Como $\mu := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log(\|v(t, \cdot)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)})$ e $\mu < \beta$ segue que $\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} = o(e^{\beta t})$ quando $t \rightarrow +\infty$. Assim a condição (3.15) não se verifica com $\gamma = \beta$, conseqüentemente a condição (3.14) se verifica, ou seja

$$\frac{\|v^2(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}}{\|v^1(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Assim a componente de $\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)}$ independente de $[\psi_k^+ : 1 \leq k \leq j-1]$ é pequena comparada à $\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)}$.

Existem funções reais $\sigma(t)$ e $\alpha_k(t)$ tais que

$$\frac{\|v(t) - \sigma(t)\psi_j^+\|_{L^2_{\Omega_0}}}{\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}} \leq \frac{\|\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k(t)\psi_k^+\|_{L^2_{\Omega_0}}}{\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}} + \frac{\|\sum_{k=j+1}^{+\infty} \alpha_k(t)\psi_k^+\|_{L^2_{\Omega_0}}}{\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}}.$$

Segue das informações acima que

$$\frac{\|v(t) - \sigma(t)\psi_j^+\|_{L^2_{\Omega_0}}}{\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{|\sigma(t)|}{\|v(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}} \rightarrow 1, \quad (3.16)$$

quando $t \rightarrow +\infty$. Sejam

$$z(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_j(s) ds\right) v(t)$$

e

$$c(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_j(s) ds\right) \sigma(t).$$

Usando (3.16) obtemos

$$\frac{\|z(t) - c(t)\psi_j^+\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)}}{\|z(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{|c(t)|}{\|z(t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)}} \rightarrow 1, \quad (3.17)$$

quando $t \rightarrow +\infty$. Vamos mostrar que $c(t)$ converge para um limite diferente de zero quando $t \rightarrow +\infty$. Temos

$$\begin{aligned}
& \|z(t+s) \exp(\int_t^{t+s} \lambda_j(r) dr) - e^{sL(t)} z(t)\|_{L^2_{\Omega_0}} \\
&= \|\exp(-\int_0^t \lambda_j(r) dr) T(t+s, t) v(t) - e^{sL(t)} z(t)\|_{L^2_{\Omega_0}} \\
&= \|T(t+s, t) z(t) - e^{sL(t)} z(t)\|_{L^2_{\Omega_0}} \\
&\leq c'_0 \left[\int_t^{t+s} \varepsilon_1(r) dr + \sup_{t \leq r \leq t+1} (|\dot{\gamma}_1(r)| + |\dot{\gamma}_0(r)|) \right] \|z(t)\|_{L^2_{\Omega_0}}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

para $0 \leq s \leq 1$ e $\int_0^{+\infty} \varepsilon_1(r) dr + \sup_{-\infty \leq r \leq \infty} (|\dot{\gamma}_1(r)| + |\dot{\gamma}_0(r)|) < \infty$.

Isto implica que $|c(n+1) - c(n)| \leq \beta_n |c(n)|$ para $n = 1, \dots$ com $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n < \infty$. Assim temos que

$$\frac{|c(n+1)|}{|c(n)|} \leq 1 + \beta_n$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$ segue que $\prod_{n \geq n_0} (1 + \beta_n) < \infty$, e por comparação segue que $\prod_{n \geq n_0} \frac{c(n+1)}{c(n)}$ converge, de modo que $c(n) \rightarrow c^* \neq 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. A estimativa acima para z mostra que $c(t) \rightarrow c^*$ quando $t \rightarrow +\infty$ e portanto $z(t) \rightarrow c^* \psi_j^+$, o que prova a primeira parte do teorema.

Seja $\hat{v} = v - c^* \psi_j^+$, esta é uma solução tal que $\|\hat{v}(\cdot, t)\|_{L^2_{\Omega_0}} = o(\exp(\int_0^t \lambda_j))$ quando $t \rightarrow +\infty$. Segue que $\|\hat{v}(\cdot, t)\|_{L^2_{\Omega_0}} = o(\exp(t(\lambda_{j+1}^+ + \varepsilon)))$ quando $t \rightarrow +\infty$, para qualquer $\varepsilon > 0$, e por iteração produzimos a expansão $v(\cdot, t) = \sum_{j=1}^m c_j \psi_j^+(\cdot, t) + o(e^{-kt})$, para qualquer k .

Note que provamos somente convergência em $L^2(0, 1)$, mas usando o mesmo procedimento feito na demonstração do Teorema 3.1, podemos mostrar que isto implica convergência em $\|\cdot\|_{\alpha}$ para qualquer $\alpha < 1$ o que assegura a convergência em $C^1([b_i, a_{i+1}])$ para cada $i = 1, \dots, m$. $\square$

Teorema 3.6

Com as hipóteses e notação do Teorema 3.1, seja $v(x, t)$ uma solução de 3.3, tal que para algum real k , $\|v(\cdot, t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} = O(e^{-kt})$ quando $t \rightarrow -\infty$. Então se n é escolhido de modo que $\lambda_{n+1}^- < -k$, existem constantes $c_1, \dots, c_n$ tais que

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^n c_j v_j^-(x, t)$$

(Se $k < -\lambda_1^-, v \equiv 0$)

Demonstração

Aumente k ligeiramente, de modo que $\lambda_{n+1}^- < -k < \lambda_n^-$. Seja $\tilde{v}(x, t) = v(x, t)e^{kt}$, então $\tilde{v}$ é limitada, $\tilde{v}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t = [(p(x)\tilde{v}_x)_x + (q(x, t) + k)\tilde{v}]\chi_{\Omega_1} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\tilde{v}_x(b_i^+, t) - p(a_i)\tilde{v}_x(a_i^-, t)] \right. \\ \left. + (h_i(t) + k)\tilde{v} \right] \chi_{\Omega_{0,i}} \end{aligned}$$

e as mesmas condições de fronteira de (3.3) são satisfeitas para $\tilde{v}$.

Portanto é suficiente considerar o caso $k = 0$, com $\lambda_{n+1}^- < 0 < \lambda_n^-$. Para $t_0 > 0$ suficientemente grande, a teoria básica da variedade instável mostra que o espaço das soluções limitadas sobre $-\infty < t \leq t_0$ tem dimensão n . Claramente $v_1^-, \dots, v_n^-$ são linearmente independentes, já que do Teorema (3.1),

$$v_j^-(x, t) = \exp\left(-\int_t^0 \lambda_j(r) dr\right) [\psi_j^-(x) + o(1)] \text{ quando } t \rightarrow -\infty.$$

Assim $v_1^-, \dots, v_n^-$ formam uma base para este espaço, portanto existem constantes $c_1, \dots, c_n$ tais que

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^n c_j v_j^-(x, t).$$

Se $\lambda_1^- < 0$ tem-se $n = 0$ e portanto $v \equiv 0$. □

3.2 Transversalidade das Variedades Instável e Estável

Nesta seção mostraremos que as variedades instável e estável de pontos de equilíbrio de (P_0) se intersectam transversalmente. Seja $\bar{u} = \bar{u}(x, t)$ uma solução de (P_0) , definida em $-\infty < t < +\infty$, tal que os limites

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \bar{u}(x, t) = \varphi_{\pm}(x) \tag{3.19}$$

existem e são soluções de equilíbrio de (P_0) . Suponhamos também que os equilíbrios $\varphi_{\pm}$ são hiperbólicos e $\bar{u}$ não é independente do tempo.

Linearizando (P_0) em torno da solução $\bar{u}(\cdot, t)$ obtemos o problema

$$\begin{cases} v_t = (p(x)v_x)_x + q(x, t)v & x \in \Omega_1, \quad t \in (-\infty, \infty) \\ \dot{v}_{\Omega_{0,i}}(t) = \frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)v_x(b_i^+, t) - p(a_i)v_x(a_i^-, t)] + h_i(t)v_{\Omega_{0,i}}(t), & i = 1, \dots, m \\ p(\cdot)v_x(\cdot, t) = \gamma_0(t)v(\cdot, t) & \text{em } x = 0 \\ p(\cdot)v_x(\cdot, t) = \gamma_1(t)v(\cdot, t) & \text{em } x = 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

onde $q(x, t) = f'(\bar{u}(x, t)) + c(x)$ em Ω_1 , $h_i(t) = f'(\bar{u}_{\Omega_{0,i}}(t)) + \hat{c}_i$ para $i = 1, \dots, m$, onde $\hat{c}_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} c(x)dx$, $\gamma_0(t) = g'(\bar{u}(0, t)) - b(0)$ e $\gamma_1(t) = g'(\bar{u}(1, t)) - b(1)$.

Para aplicarmos o Teorema 3.5 supomos que

$$\left[\left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |q(x, t)| \right)^2 + \sum_{i=1}^m |h_i(t)|^2 \right]^{1/2}$$

esteja em $L^\infty(0, \infty) \cap L^1_{\Omega_0}(0, \infty)$.

Vamos provar que as variedades instável de φ_- e estável de φ_+ se intersectam transversalmente em $\bar{u}(\cdot, t)$ para cada t , isto é,

$$W^u(\varphi_-) \cap_{\bar{u}(\cdot, t)} W^s(\varphi_+).$$

Pela caracterização em (1.5) e (1.6) os espaços tangentes às variedades $W^s(\varphi_+)$ e $W^u(\varphi_-)$ em $\bar{u}(t_0, \cdot)$ são dados por

$$\begin{aligned} T_{\bar{u}(t_0, \cdot)} W^s(\varphi_+) &= \{v(t_0, \cdot) \in H^1_{\Omega_0} \text{ tal que } v(x, t) \text{ resolve (3.20) sobre } t_0 < t < +\infty \\ &\text{e } \|v(t, \cdot)\|_{L^2_{\Omega_0}} = O(e^{-\varepsilon t}) \text{ quando } t \rightarrow +\infty, \text{ para algum } \varepsilon > 0\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_{\bar{u}(t_0, \cdot)} W^u(\varphi_-) &= \{v(t_0, \cdot) \in H^1_{\Omega_0} \text{ tal que } v(x, t) \text{ resolve (3.20) para } -\infty < t < t_0 \text{ e} \\ &\|v(t, \cdot)\|_{L^2_{\Omega_0}} = O(e^{\varepsilon t}) \text{ quando } t \rightarrow -\infty, \text{ para algum } \varepsilon > 0\}. \end{aligned}$$

Como $\varphi_\pm$ são equilíbrios hiperbólicos $\bar{u}(\cdot, t) \rightarrow \varphi_\pm$ exponencialmente quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Na caracterização de $T_{\bar{u}(t_0, \cdot)} W^s(\varphi_+)$ e $T_{\bar{u}(t_0, \cdot)} W^u(\varphi_-)$ utilizaremos as soluções $\{v_j^-(x, t), j \geq 1\}$ obtidas no Teorema 3.1 e as soluções $\{\eta_k^+(x, t), k \geq 1\}$ obtidas no Corolário 3.3.

Teorema 3.7

Suponha que λ_m^+ é o m -ésimo autovalor da linearização de (P_0) em φ_+ com $\lambda_m^+ > 0 > \lambda_{m+1}^+$, e λ_n^- é o n -ésimo autovalor da linearização de (P_0) em φ_- com $\lambda_n^- > 0 > \lambda_{n+1}^-$.

Então

$$T_{\bar{u}(t_0, \cdot)} W^s(\varphi_+) = \{\psi \in H_{\Omega_0}^1(0, 1) : \int_0^1 \psi \eta_k^+(t_0, \cdot) = 0 \text{ para } 1 \leq k \leq m\}$$

e

$$T_{\bar{u}(t_0, \cdot)} W^u(\varphi_-) = \text{subespaço gerado por } \{v_j^-(t_0, \cdot) : 1 \leq j \leq n\}.$$

Demonstração

Chame

$$U := \{\psi \in H_{\Omega_0}^1(0, 1) : \int_0^1 \psi \eta_k^+(t_0, \cdot) = 0 \text{ para } 1 \leq k \leq m\}.$$

Se $\psi \in T_{\bar{u}(t_0, \cdot)} W^s(\varphi_+)$ então $\psi = v(t_0, \cdot)$ onde $v(\cdot, t)$ resolve (3.20) sobre $t_0 < t < +\infty$ e $\|v(t, \cdot)\|_{L_{\Omega_0}^2(0, 1)} = O(e^{-\varepsilon t})$ quando $t \rightarrow +\infty$ para algum $\varepsilon > 0$. Como $v(t, \cdot)$ resolve (3.20) sobre $t_0 < t < +\infty$ e $\|v(t, \cdot)\|_{L_{\Omega_0}^2} = O(e^{-\varepsilon t})$, segue do Teorema 3.5 que existem inteiro $j \geq 1, j > m$ e constante $c \neq 0$ tais que

$$v(x, t) = \exp\left(\int_0^t \lambda_j(r) dr\right) [c\psi_j^+(x) + o(1)] \text{ quando } t \rightarrow +\infty$$

ou seja, $\psi(x) = \exp\left(\int_0^{t_0} \lambda_j(r) dr\right) [c\psi_j^+(x) + o(1)]$ quando $t \rightarrow +\infty$. Segue do Corolário 3.10, que $\eta_k^+(\cdot, t_0) = \exp\left(-\int_0^{t_0} \lambda_k(r) dr\right) [\psi_k^+(x) + o(1)]$ quando $t \rightarrow +\infty, k = 1, \dots, m$.

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi(x) \eta_k^+(x, t_0) dx &= \int_0^1 \psi(x) \eta_k^+(x, t) dx \\ &= \exp\left(\int_0^t [\lambda_j(r) - \lambda_k(r)] dr\right) \left[c \int_0^1 \psi_j^+(x) \psi_k^+(x) dx + o(1) \right] \\ &= \exp\left(\int_0^t [\lambda_j(r) - \lambda_k(r)] dr\right) o(1,) \text{ quando } t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, m$. Passando o limite quando $t \rightarrow +\infty$ segue que

$$\int_0^1 \psi(x) \eta_k^+(t_0, x) dx = 0,$$

para $k = 1, \dots, m$.

Reciprocamente, se $\psi \in U$ seja $v(t, \cdot)$ solução de (3.20) com $t > t_0$ tal que $v(\cdot, t_0) = \psi$. Novamente usando o Teorema 3.5 e o Corolário 3.10 existem $j \in \mathbb{Z}$ e

constante $c \neq 0$ tais que para todo $k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \psi(x) \eta_k^+(x, t_0) dx \\ &= \int_0^1 \psi(x) \eta_k^+(x, t) dx \\ &= \exp\left(\int_0^t [\lambda_j(r) - \lambda_k(r)] dr\right) \left[c \int_0^1 \psi_j^+(x) \psi_k^+(x) dx + o(1)\right], \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Se $j \leq m$, para $k = j$ obtemos

$$0 = c + o(1), \text{ quando } t \rightarrow +\infty$$

quando $t \rightarrow \infty$, isto é um absurdo, pois $c \neq 0$. Portanto $j > m$, ou seja, $\lambda_j^+ < 0$.

Tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\varepsilon + \lambda_j^+ < 0$. Como $\lambda_j(t) \rightarrow \lambda_j^+$ quando $t \rightarrow +\infty$ segue que $\|v(\cdot, t)\| = O(e^{-\frac{\varepsilon}{2}t})$ quando $t \rightarrow +\infty$. Com isto obtemos a igualdade desejada.

Para caracterizar $T_{\bar{u}(\cdot, t_0)} W^u(\varphi_-)$. Seja $V := [v_j^-(t_0, \cdot) : 1 \leq j \leq n]$. Se, $\eta \in T_{\bar{u}(t_0, \cdot)} W^u(\varphi_-)$ então $\eta(\cdot) = v(t_0, \cdot)$ onde $v(x, t)$ resolve (3.20) em $-\infty < t < t_0$ e $\|v(\cdot, t)\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} = O(e^{\varepsilon t})$ para algum $\varepsilon > 0$ quando $t \rightarrow -\infty$. Então pelo Teorema 3.6, com $k = -\varepsilon$, existem constantes $c_1, \dots, c_n$ tais que

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^n c_j v_j^-(x, t).$$

Segue que η está no *espaço gerado por* $\{v_j^-(t_0, \cdot) : 1 \leq j \leq n\}$.

Reciprocamente, se η está no *espaço gerado por* $\{v_j^-(\cdot, t_0) : 1 \leq j \leq n\}$, então existem $\alpha_j \in \mathbb{R}$ de modo que $\eta(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j^-(x, t_0)$. Então $u(x, t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j^-(x, t)$ resolve (3.20) para $t < t_0$. Tome ε suficientemente pequeno de modo $\lambda_n^- - \frac{3}{2}\varepsilon > 0$ e T suficientemente grande negativo de modo que $\lambda_j^- - \lambda_j(r) < \varepsilon/2$ para $r \leq T$ e qualquer $j = 1, \dots, n$. Usando a expressão de v_j^- dada no Teorema 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\|u(\cdot, t)\|}{e^{\varepsilon t}} &= \sum_{j=1}^n e^{-\int_t^0 (\lambda_j(r) - \varepsilon) dr} [|\alpha_j| \|\psi_j^-(\cdot)\| + o(1)] \\ &= \sum_{j=1}^n e^{\int_T^0 (\varepsilon - \lambda_j(r) dr)} e^{\int_t^T (\varepsilon - \lambda_j(r)) dr} [|\alpha_j| + o(1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^n e^{\int_T^0 (\varepsilon - \lambda_j(r))dr} e^{\int_t^T (\varepsilon - \lambda_j^-)dr} e^{\int_t^T (\lambda_j^- - \lambda_j(r))dr} [|\alpha_j| + o(1)] \\
&\leq \sum_{j=1}^n e^{\int_T^0 (\varepsilon - \lambda_j(r))dr} e^{-(3/2\varepsilon - \lambda_j^-)(t-T)} [|\alpha_j| + o(1)] \leq M
\end{aligned}$$

para qualquer $M > 0$, quando $t \rightarrow -\infty$.

□

Nessa demonstração utilizamos o seguinte resultado de Análise Funcional. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ funcionais lineares sobre um espaço vetorial normado E e $x_1, \dots, x_m$ elementos de E . Se a soma do subespaço $[x_1, \dots, x_m]$ com o subespaço $\{x \in XE : \lambda_j(x) = 0 \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$ não é todo E , existe um funcional não nulo λ no subespaço gerado por $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ que anula todo x_j , $j = 1, \dots, m$.

Lema 3.8

Sejam n_- e m_+ o número de autovalores positivos da linearização em φ_- e φ_+ respectivamente. Se $n_- \geq m_+ \geq 0$ então

$$T_{\bar{u}(\cdot, t_0)} W^u(\varphi_-) \cap T_{\bar{u}(\cdot, t_0)} W^s(\varphi_+), \quad (3.21)$$

ou ainda a soma destes subespaços é o espaço inteiro $H_{\Omega_0}^1(0, 1)$.

Reciprocamente, $n_- \geq m_+$ é uma condição necessária para a transversalidade.

Demonstração

Suponha que (3.21) não ocorra, ou seja,

$$\begin{aligned}
&[v_j^-(t_0, \cdot) : 1 \leq j \leq n_-] \\
&+ \{\psi \in H_{\Omega_0}^1(0, 1) : \int_0^1 \eta_k^+(t_0, \cdot) \psi = 0, \ k = 1, \dots, m_+\} \neq H_{\Omega_0}^1(0, 1).
\end{aligned}$$

Considerando $\eta_k^+(t_0, \cdot)$ como funcionais lineares, da observação acima, segue que existem constantes, não todas nulas, $c_1, \dots, c_{m_+}$ de modo que

$$\eta(x, t) = \sum_{j=1}^{m_+} c_j \eta_j^+(x, t) \quad \text{e} \quad \langle \eta(x, t_0), v_j^-(x, t_0) \rangle_{L_{\Omega_0}^2} = 0, \ j = 1, \dots, n_-. \quad (3.22)$$

Existe k , $1 \leq k \leq m_+$, de modo que $c_j = 0$ para $j > k$ e $c_k \neq 0$. Segue do Corolário 3.3 que

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \sum_{j=1}^k c_j \exp\left(-\int_0^t \lambda_j(r) dr\right) [\psi_j^+(x) + o(1)] \\ &= \exp\left(-\int_0^t \lambda_k(r) dr\right) \left[\sum_{j=1}^{k-1} \exp\left(\int_0^t [\lambda_k(r) - \lambda_j(r)] dr\right) [c_j \psi_j^+(x) + o(1)] \right. \\ &\quad \left. + c_k \psi_k^+(x) + o(1) \right] \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow +\infty$. Mas,

$$\sum_{j=1}^{k-1} \exp\left(\int_0^t [\lambda_k(r) - \lambda_j(r)] dr\right) [c_j \psi_j^+(x) + o(1)] = o(1), \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Assim,

$$\eta(x, t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_k(r) dr\right) [c_k \psi_k^+(x) + o(1)], \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Como esta convergência é em $C^1([b_i, a_{i+1}])$, para cada $i = 0, 1, \dots, m$, $\eta(\cdot, t)$ se anula $(k-1)$ vezes em $(0, 1)$ para t positivo grande.

Pelo Teorema 2.11 aplicado à equação adjunta, com sinal de t trocado, para todo t , $\eta(\cdot, t)$ se anula não mais do que $(k-1)$ vezes em $(0, 1)$.

Pelo Teorema 3.5, novamente com o sinal de t trocado, existem constante $c \neq 0$ e inteiro $j \geq 1$ de modo que

$$\eta(x, t) = \exp\left(\int_t^0 \lambda_j(r) dr\right) [c \psi_j^-(x) + o(1)], \text{ quando } t \rightarrow -\infty.$$

Suponha que $j \leq n_-$, então de (3.22) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \eta(x, t_0), v_j^-(x, t_0) \rangle_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} \\ &= \int_0^1 \eta(x, t_0) v_j^-(x, t_0) dx \\ &= \int_0^1 \eta(x, t) v_j^-(x, t) dx \\ &= \int_0^1 \exp\left(\int_t^0 \lambda_j(r) dr\right) [c \psi_j^-(x) + o(1)] \exp\left(-\int_t^0 \lambda_j(r) dr\right) [\psi_j^-(x) + o(1)] dx \\ &= \int_0^1 [c \psi_j^-(x) + o(1)] [\psi_j^-(x) + o(1)] dx \end{aligned}$$

passando o limite quando $t \rightarrow -\infty$, como $\|\psi_j^-\|_{L^2_{\Omega_0}(0,1)} = 1$, obtemos

$$0 = c \int_0^1 \psi_j^-(x)^2 dx = c$$

o que é um absurdo.

Portanto $j > n_-$ e $\eta(\cdot, t)$ se anula $(j - 1)$ vezes para t suficientemente grande negativo. Mas como observado acima $j - 1 \leq k - 1$, isto é, $j \leq k$ e assim $n_- < j \leq k \leq m_+$, ou seja, $n_- < m_+$ o que contraria a hipótese.

Reciprocamente, para que ocorra a transversalidade é necessário que

$$\begin{aligned} & \dim([v_j^-(t_0, \cdot) : 1 \leq j \leq n_-]) \\ & \geq \text{codim}(\{\psi \in H^1_{\Omega_0}(0, 1); \int_0^1 \eta_k^+(t_0, \cdot) \psi(\cdot) = 0, \quad 1 \leq k \leq m_+\}), \end{aligned}$$

ou seja, $n_- \geq m_+$.

□

Neste capítulo mostraremos a existência da variedade invariante para o problema (P_ε) e para o problema limite (P_0) .

Sejam X e Y espaços de Banach, $-A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial tal que $\Re \sigma(-A) > 0$ e $B : \mathcal{D}(B) \subset Y \rightarrow Y$ é gerador de um C^0 -grupo de operadores lineares limitados $\{S(t) : t \geq 0\}$ sobre Y . Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ o semigrupo analítico de operadores lineares limitados gerado por A e denote por $(-A)^\alpha$ a α -potência fracionária de $-A$ e $X^\alpha = \mathcal{D}((-A)^\alpha)$ com a norma do gráfico.

Definição 4.1 Sejam $f : X^\alpha \times Y \rightarrow X$, $g : X^\alpha \times Y \rightarrow Y$ funções contínuas localmente Lipschitz. Um conjunto $S \subset X^\alpha \times Y$ é uma variedade invariante para uma equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y)\end{aligned}$$

se existe $\sigma : Y \rightarrow X^\alpha$ tal que $S = \{(x, y) \in X^\alpha \times Y : x = \sigma(y)\}$ e, para qualquer $(x_0, y_0) \in S$, existe uma solução $(x(\cdot), y(\cdot))$ da equação diferencial com $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$, tal que $(x(t), y(t))$ está em S , para todo $t \in \mathbb{R}$.

A variedade invariante S é exponencialmente atratora se existem constantes positivas γ e κ tais que

$$\|x(t) - \sigma(y(t))\|_{X^\alpha} \leq \kappa e^{-\gamma t} \|x(0) - \sigma(y(0))\|_{X^\alpha}$$

sempre que $(x(t), y(t))$ é uma solução da equação diferencial.

Este capítulo está dividido em três seções. Para facilitar a leitura do trabalho, nas duas primeiras seções enunciaremos e provaremos resultados conhecidos. Na primeira seção estabelecemos um Lema de Gronwall Generalizado e o Teorema de Variedade Invariante. Estes resultados podem ser encontrados, por exemplo, em Henry [8] e na forma que apresentamos em Bruschi [6]. Na segunda seção mostramos a convergência dos autovalores do operador A_ε , associado ao problema (P_ε) para os autovalores do operador A_0 , associado ao problema limite (P_0) ; este resultado é devido a Rodríguez-Bernal [11], também estudamos o comportamento assintótico dos autovalores do operador A_ε . Na última seção mostramos a existência da variedade invariante para os problemas (P_ε) e (P_0) truncados.

4.1 Teorema da Variedade Invariante

Estabelecemos inicialmente uma versão generalizada da Desigualdade Gronwall. Para obter a desigualdade estudamos a convergência das séries

$$E_\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k}}{\Gamma(k\beta + 1)} \quad \tilde{E}_\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k}}{\Gamma((k+1)\beta)}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função-gama,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

As funções E_β e $\tilde{E}_\beta$ são funções inteiras. Utilizaremos também os seguintes fatos demonstrados por Evgrafov em [7]: existe constante c tal que

$$E_\beta(z) \leq ce^z;$$

e se $d > 1$ existe $c' > 0$ tal que

$$\tilde{E}_\beta(z) \leq c'e^{dz}.$$

Teorema 4.2 (Desigualdade de Gronwall Generalizada)

Sejam $l \geq -\infty$, $\phi : [l, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua, $a : [l, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função localmente integrável, $b > 0$ e $0 < \beta \leq 1$. Assuma que

$$\phi(t) \leq a(t) + b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \phi(s) ds, \quad l \leq t \leq r. \quad (4.1)$$

Então,

$$\phi(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (B^k a)(t), \quad (4.2)$$

onde

$$B^k a(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)} (s-t)^{k\beta-1} a(s) ds.$$

Se $a(t) \equiv a$ é constante então

$$\phi(t) \leq a E_{\beta}((b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)) \leq a c e^{(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)}. \quad (4.3)$$

Se $\dot{a}(t) \leq 0$ e $\beta = 1$ então

$$\phi(t) \leq a(t) e^{b(r-t)}.$$

Se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(s-r)} ds$, $\rho > 0$, então

$$\phi(t) \leq \frac{c_0}{b} [E_{\beta}((b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)) - 1] \leq \frac{c_0}{b} [c e^{(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)} - 1] \quad (4.4)$$

e finalmente, se $\psi : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e

$$a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho s} \psi(s) ds,$$

com $\rho > 0$, então

$$\phi(t) \leq c_0 c' \Gamma(\beta) \int_t^r (s-t)^{\beta-1} e^{\rho s} e^{d(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(s-t)} \psi(s) ds. \quad (4.5)$$

Demonstração

Seja

$$(B\phi)(t) = b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \phi(s) ds.$$

Segue de (4.1) que

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq a(t) + (B\phi)(t) \leq a(t) + (Ba)(t) + (B^2\phi)(t) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (B^k a)(t) + (B^n \phi)(t). \end{aligned}$$

Suponha por indução que

$$(B^{n-1}\phi)(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} (s-t)^{(n-1)\beta-1} \phi(s) ds$$

então

$$\begin{aligned} B(B^{n-1}\phi) &= b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \left[\int_s^r \frac{(b\Gamma(\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} (\theta-s)^{(n-1)\beta-1} \phi(\theta) d\theta \right] ds \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) \left[\int_t^\theta (s-t)^{\beta-1} (\theta-s)^{(n-1)\beta-1} ds \right] d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) \left[\int_0^{\theta-t} u^{\beta-1} (\theta-t-u)^{(n-1)\beta-1} du \right] d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo $z = \frac{u}{\theta-t}$ temos

$$\begin{aligned} (B^n \phi) &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) (\theta-t)^{\beta} \left[\int_0^1 z^{\beta-1} (\theta-t)^{(n-1)\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz \right] d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) (\theta-t)^{n\beta-1} d\theta \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz = \mathcal{B}(\beta, (n-1)\beta) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma((n-1)\beta)}{\Gamma(n\beta)},$$

então

$$(B^n \phi)(t) = \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r \phi(\theta) (\theta-t)^{n\beta-1} d\theta.$$

Vamos estudar a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\beta)}.$$

Se $a_n = \Gamma(n\beta)^{-1}$ então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\Gamma(n\beta)}{\Gamma((n+1)\beta)} = \frac{\mathcal{B}(\beta, n\beta)}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{n\beta-1} dt.$$

e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Segue que $B^n \phi(t) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\phi(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t).$$

Se $a(t) \equiv a = \text{constante}$ então

$$\begin{aligned} (B^n a)(t) &= \int_t^r \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} (s-t)^{n\beta-1} a ds \\ &= \frac{ab^n \Gamma(\beta)^n}{n\beta \Gamma(n\beta)} (r-t)^{n\beta} = \frac{ab^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta+1)} (r-t)^{n\beta}. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq a E_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)) \\ &\leq a c e^{(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)}. \end{aligned}$$

Se $\dot{a}(t) \leq 0$ e $\beta = 1$ integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} (B^n a)(t) &= \frac{b^n}{\Gamma(n)} \left[\frac{1}{n} a(r)(r-t)^n - \frac{1}{n} \int_t^r (s-t)^n \dot{a}(s) ds \right] \\ &\leq \frac{b^n}{\Gamma(n)} \left[\frac{1}{n} a(r)(r-t)^n - \frac{1}{n} (r-t)^n \int_t^r \dot{a}(s) ds \right] \\ &= \frac{b^n}{n\Gamma(n)} (r-t)^n a(t). \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (B^n a)(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b(r-t))^n}{\Gamma(n+1)} a(t) = e^{b(r-t)} a(t).$$

e

$$\phi(t) \leq a(t) e^{b(r-t)}.$$

Se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(s-r)} ds$, com $\alpha = 1 - \beta$, então

$$\begin{aligned} (B^n a)(t) &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r (s-t)^{n\beta-1} \left[\int_s^r (\theta-s)^{-\alpha} e^{\rho(\theta-r)} d\theta \right] ds \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} \left[\int_t^\theta (s-t)^{n\beta-1} (\theta-s)^{-\alpha} ds \right] d\theta \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} \left[\int_0^{\theta-t} u^{n\beta-1} (\theta-t-u)^{-\alpha} du \right] d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo $v = \frac{u}{\theta-t}$ obtemos

$$\begin{aligned} B^n a(t) &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} \left[\int_0^1 v^{n\beta-1} (\theta-t)^{n\beta-1} (\theta-t)^{1-\alpha} (1-v)^{-1+\beta} dv \right] d\theta \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta \mathcal{B}(\beta, n\beta) \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta \\ &\leq c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_0^{r-t} s^{(n+1)\beta-1} ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t) &\leq c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_0^{r-t} s^{(n+1)\beta-1} ds \\
 &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1} (r-t)^{(n+1)\beta}}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \\
 &= \frac{c_0}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^{1/\beta} \Gamma(\beta)^{1/\beta} (r-t))^{(n+1)\beta}}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \\
 &= \frac{c_0}{b} [E_\beta(b^{1/\beta} \Gamma(\beta)^{1/\beta} (r-t)) - 1].
 \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &\leq \frac{c_0}{b} [E_\beta(b^{1/\beta} \Gamma(\beta)^{1/\beta} (r-t)) - 1] \\
 &\leq \frac{c_0 c}{b} [e^{b^{1/\beta} \Gamma(\beta)^{1/\beta} (r-t)} - 1].
 \end{aligned}$$

Se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho s} \psi(s) ds$ então

$$\begin{aligned}
 (B^n a)(t) &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r (s-t)^{n\beta-1} \left[\int_s^r (\theta-s)^{-\alpha} e^{\rho \theta} \psi(\theta) d\theta \right] ds \\
 &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho \theta} \psi(\theta) \left[\int_t^\theta (s-t)^{n\beta-1} (\theta-s)^{-\alpha} ds \right] d\theta \\
 &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} \mathcal{B}(\beta, n\beta) d\theta \\
 &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_t^r e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta.
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_t^r e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta \\
 &= c_0 \Gamma(\beta) \int_t^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^n (\theta-t)^{n\beta}}{\Gamma((n+1)\beta)} e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{\beta-1} d\theta \\
 &= c_0 \Gamma(\beta) \int_t^r \tilde{E}_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta} (\theta-t)) e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{\beta-1} d\theta \\
 &\leq c_0 c' \Gamma(\beta) \int_t^r e^{d(b\Gamma(\beta))^{1/\beta} (\theta-t)} e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{\beta-1} d\theta.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 4.3 (Teorema da Variedade Invariante)

Sejam X_n, Y_n uma seqüência de espaços de Banach, $A_n : \mathcal{D}(A_n) \subset X_n \rightarrow X_n$ uma seqüência de operadores setoriais e $B_n : \mathcal{D}(B_n) \subset Y_n \rightarrow Y_n$ uma seqüência de

geradores de C^0 -grupos de operadores lineares limitados. Seja $0 \leq \alpha < 1$. Suponha que $f_n : X_n^\alpha \times Y_n \rightarrow X_n$ e $g_n : X_n^\alpha \times Y_n \rightarrow Y_n$ são seqüência de funções satisfazendo

$$\begin{aligned} \|f_n(x, y) - f_n(z, w)\|_{X_n} &\leq L_f(\|x - z\|_{X_n^\alpha} + \|y - w\|_{Y_n}) \\ \|f_n(x, y)\|_{X_n} &\leq N_f \end{aligned}$$

para todo $(x, y), (z, w)$ em $X_n^\alpha \times Y_n^\alpha$, e

$$\begin{aligned} \|g_n(x, y) - g_n(z, w)\|_{Y_n} &\leq L_g(\|x - z\|_{X_n^\alpha} + \|y - w\|_{Y_n}) \\ \|g_n(x, y)\|_{Y_n} &\leq N_g \end{aligned}$$

para todo $(x, y), (z, w)$ em $X_n^\alpha \times Y_n$. Assuma que

- (i) $\|e^{-A_n t} w\|_{X_n^\alpha} \leq M_a e^{-\beta(n)t} \|w\|_{X_n^\alpha}, t \geq 0$
- (ii) $\|e^{-A_n t} w\|_{X_n^\alpha} \leq M_a t^{-\alpha} e^{-\beta(n)t} \|w\|_{X_n}, t > 0$
- (iii) $\|e^{-B_n t} z\|_{Y_n} = \|e^{B_n(-t)} z\|_{Y_n^\alpha} \leq M_b e^{-\rho(n)t} \|z\|_{Y_n}, t \leq 0$
- (iv) $\|e^{B_n t} z\|_{Y_n} \leq M_b (-t)^{-\alpha} e^{-\rho(n)t} \|z\|_{Y_n}, t < 0$

para qualquer $w \in X_n^\alpha$ e $z \in Y_n$.

Considere o sistema fracamente acoplado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -A_n x + f_n(x, y) \\ \dot{y} &= -B_n y + g_n(x, y). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Se $\beta(n) - \rho(n) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ então, para n suficientemente grande, existe uma variedade invariante exponencialmente atratora para (4.6)

$$S = \{(x, y) : x = \sigma_n(y), y \in Y_n\}$$

onde $\sigma_n : Y_n \rightarrow X_n^\alpha$ satisfaz

$$s(n) = \sup_{y \in Y_n^\alpha} \|\sigma_n(y)\|_{X_n^\alpha}$$

e

$$\|\sigma_n(y) - \sigma_n(z)\|_{X_n^\alpha} \leq l(n) \|y - z\|_{Y_n},$$

com $s(n), l(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Se f, g são suaves, então σ_n é suave e sua derivada $D\sigma_n$ satisfaz

$$\sup_{y \in Y_n} \|D\sigma_n(y)\|_{\mathcal{L}(Y_n, X_n^\alpha)} \leq l(n).$$

Demonstração

Iremos provar inicialmente a existência da variedade invariante. Se $D > 0$ e $\Delta > 0$, seja $\sigma_n : Y_n \rightarrow X_n^\alpha$ satisfazendo

$$\|\sigma_n\| := \sup_{y \in Y_n} \|\sigma_n(y)\|_{X_n^\alpha} \leq D, \quad \|\sigma_n(y) - \sigma_n(y')\|_{Y_n} \leq \Delta \|y - y'\|_{Y_n}. \quad (4.7)$$

Seja $y(t) = y(t, \tau, \eta, \sigma_n)$, definida para $t < \tau$, solução de

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -B_n y + g_n(\sigma_n(y), y) \\ y(\tau) &= \eta \end{aligned}$$

e defina

$$G(\sigma_n)(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-A_n(\tau-s)} f_n(\sigma_n(y(s)), y(s)) ds.$$

Note que,

$$\|G(\sigma_n)(\cdot)\|_{X_n^\alpha} \leq \int_{-\infty}^{\tau} N_f M_a(\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(\tau-s)} ds. \quad (4.8)$$

Seja n_0 tal que, para $n \geq n_0$ $\|G(\sigma_n)(\cdot)\|_{X_n^\alpha} \leq D$.

Sejam σ_n, σ'_n funções satisfazendo (4.7). Se $\eta, \eta' \in Y^\alpha$ sejam $y(t) = y(t, \tau, \eta, \sigma_n)$ como acima e $y'(t) = y(t, \tau, \eta', \sigma'_n)$, definida para $t < \tau$, solução de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -B_n y + g_n(\sigma'_n(y), y) \\ y(\tau) = \eta'. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} y(t) - y'(t) &= e^{-B_n(t-\tau)} \eta + \int_{\tau}^t e^{-B_n(t-s)} g_n(\sigma_n(y(s)), y(s)) ds \\ &\quad - e^{-B_n(t-\tau)} \eta' - \int_{\tau}^t e^{-B_n(t-s)} g_n(\sigma'_n(y'(s)), y'(s)) ds \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \|y_n(t) - y'_n(t)\|_{Y_n} &\leq \|e^{-B_n(t-\tau)}(\eta - \eta')\|_{Y_n} \\ &\quad + \int_t^{\tau} \|e^{-B_n(t-s)}[g_n(\sigma_n(y_n(s)), y_n(s)) - g_n(\sigma'_n(y'_n(s)), y'_n(s))]\|_{Y_n} ds \\ &\leq M_b e^{\rho(n)(\tau-t)} \|\eta - \eta'\|_{Y_n} \\ &\quad + M_b \int_t^{\tau} (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} \|g_n(\sigma_n(y_n(s)), y_n(s)) - g_n(\sigma'_n(y'_n(s)), y'_n(s))\|_{Y_n} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M_b e^{\rho(n)(\tau-t)} \|\eta - \eta'\|_{Y_n} \\
&\quad + M_b L_g \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} [\|\sigma_n(y_n(s)) - \sigma_n(y'_n(s))\|_{X_n^\alpha} \\
&\quad + \|\sigma_n(y'_n(s)) - \sigma'_n(y'_n(s))\|_{X_n^\alpha} + \|y_n(s) - y'_n(s)\|_{Y_n}] ds \\
&\leq M_b e^{\rho(n)(\tau-t)} \|\eta - \eta'\|_{Y_n} \\
&\quad + M_b L_g \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} ds \sup_{y'_n(s) \in Y_n^\alpha} \|\sigma_n(y'_n(s)) - \sigma'_n(y'_n(s))\|_{X_n^\alpha} \\
&\quad + M_b L_g (1 + \Delta) \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} \|y_n(s) - y'_n(s)\|_{Y_n} ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|y_n(t) - y'_n(t)\|_{Y_n} &\leq M_b e^{\rho(n)(\tau-t)} \|\eta - \eta'\|_{Y_n} \\
&\quad + M_b L_g (1 + \Delta) \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} \|y_n(s) - y'_n(s)\|_{Y_n} ds \\
&\quad + M_b L_g \|\sigma_n - \sigma'_n\| \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} ds.
\end{aligned}$$

Seja

$$\phi(t) = e^{\rho(n)(t-\tau)} \|y_n(t) - y'_n(t)\|_{Y_n}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq M_b [\|\eta - \eta'\|_{Y_n} + L_g \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-\tau)} ds \|\sigma_n - \sigma'_n\| \\
&\quad + M_b L_g (1 + \Delta) \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} \phi(s) ds].
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Gronwall generalizada, segue que

$$\phi(t) \leq [c_1 \|\eta - \eta'\|_{Y_n} + c_2 \|\sigma_n - \sigma'_n\|] e^{(M_b L_g (1+\Delta) \Gamma(1-\alpha))^{1/1-\alpha} (\tau-t)},$$

ou seja,

$$\|y_n(t) - y'_n(t)\|_{Y_n^\alpha} \leq [c_1 \|\eta - \eta'\|_{Y_n} + c_2 \|\sigma_n - \sigma'_n\|] e^{[\rho(n) + c_\Gamma](\tau-t)}$$

onde $c_\Gamma = (M_b L_g (1 + \Delta) \Gamma(1 - \alpha))^{1/1-\alpha}$.

Assim temos que

$$\begin{aligned}
& \|G(\sigma_n)(\eta) - G(\sigma'_n)(\eta')\|_{X_n^\alpha} \\
& \leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-A_n(\tau-s)}[f_n(\sigma_n(y(s)), y(s)) - f_n(\sigma'_n(y'(s)), y'(s))]\|_{X_n^\alpha} ds \\
& \leq M_a \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(\tau-s)} \|f_n(\sigma_n(y(s)), y(s)) - f_n(\sigma'_n(y'(s)), y'(s))\|_{X_n} ds \\
& \leq M_a \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(\tau-s)} L_f(\|\sigma_n(y(s)) - \sigma'_n(y'(s))\|_{X_n^\alpha} + \|y(s) - y'(s)\|_{Y_n^\alpha}) ds \\
& \leq M_a \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(\tau-s)} L_f((1+\Delta)\|y(s) - y'(s)\|_{Y_n} + \|\sigma_n - \sigma'_n\|) ds \\
& \leq M_a \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(\tau-s)} L_f[(1+\Delta)[c_1\|\eta - \eta'\|_{Y_n^\alpha} + c_2\|\sigma_n - \sigma'_n\|] e^{[\rho(n)+c_\Gamma](\tau-s)} \\
& \quad + \|\sigma_n - \sigma'_n\|] ds \\
& = M_a \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(\tau-s)} L_f[1 + c_2(1+\Delta)e^{[\rho(n)+c_\Gamma](\tau-s)}] ds \|\sigma_n - \sigma'_n\| \\
& \quad + c_1 M_a L_f(1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{\alpha} e^{-[\beta(n)-\rho(n)-c_\Gamma](\tau-s)} ds \|\eta - \eta'\|_{Y_n}.
\end{aligned}$$

Sejam

$$I_\sigma(n) = M_a L_f \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(\tau-s)} (1 + c_2(1+\Delta)e^{[\rho(n)+c_\Gamma](\tau-s)}) ds$$

e

$$I_\eta(n) = c_1 M_a L_f (1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-[\beta(n)-\rho(n)-c_\Gamma](\tau-s)} ds.$$

Se $\theta < 1$, existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ temos

$$I_\sigma(n) \leq \theta, \quad I_\eta(n) \leq \Delta \quad (4.9)$$

e

$$\|G(\sigma_n)(\eta) - G(\sigma'_n)(\eta')\|_{X_n^\alpha} \leq I_\eta(n)\|\eta - \eta'\|_{Y_n^\alpha} + I_\sigma(n)\|\sigma_n - \sigma'_n\|. \quad (4.10)$$

As desigualdades (4.8) e (4.10) implicam que G é uma contração da classe de funções que satisfazem (4.7) nela mesma.

Seja $\sigma_n^* = G(\sigma_n^*)$ o único ponto fixo de G nesta classe. Provaremos agora que

$$S = \{(\sigma_n^*(y), y) : y \in Y_n^\alpha\}$$

é uma variedade invariante para (4.6).

Seja $(x_0, y_0) \in S$, $x_0 = \sigma_n^*(y_0)$. Denote por $y_n^*(t)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -B_n y + g_n(\sigma_n^*(y), y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

e considere a curva $(\sigma_n^*(y_n^*(t)), y_n^*(t)) \in S$, $t \in \mathbb{R}$. Mas a única solução de

$$\dot{x} = -A_n x + f_n(\sigma_n^*(y_n^*(t)), y_n^*(t))$$

que permanece limitada quando $t \rightarrow -\infty$ é

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-A_n(t-s)} f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s)), y_n^*(s)) ds = G(\sigma_n^*)(y_n^*(t)) = \sigma_n^*(y_n^*(t)).$$

Portanto, $(\sigma_n^*(y_n^*(t)), y_n^*(t))$ é uma solução de (4.6) através de (x_0, y_0) e com isto provamos a invariância.

Segue imediatamente de (4.8) que $s(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ e de (4.10) que $l(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Mostraremos agora que, para n suficientemente grande, existem constantes positivas γ e κ tais que se $(x_n(t), y_n(t))$ é uma solução de (4.6) então

$$\|x_n(t) - \sigma_n^*(y_n(t))\|_{X_n^\alpha} \leq \kappa e^{-\gamma t} \|x_n(t_0) - \sigma_n^*(y_n(t_0))\|_{X_n^\alpha}.$$

ou seja, a variedade invariante S é exponencialmente atratora. Coloque $\xi(t) = x_n(t) - \sigma_n^*(y_n(t))$ e seja $y_n^*(s, t)$, $s \leq t$ solução de

$$\begin{cases} \frac{dy_n^*}{ds} = -B_n y_n^* + g_n(\sigma_n^*(y_n^*), y_n^*), & s \leq t \\ y_n^*(t, t) = y_n(t). \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \|y_n^*(s, t) - y_n(s)\|_{Y_n^\alpha} &\leq \|e^{-B_n(s-t)} y_n^*(t, t) - e^{-B_n(s-t)} y_n(t)\| \\ &\quad + \int_s^t \|e^{-B_n(s-\theta)} [g_n(\sigma_n^*(y_n^*(\theta, t)), y_n^*(\theta, t)) - g_n(x_n(\theta), y_n(\theta))]\|_{Y_n} d\theta \\ &\leq \int_s^t M_b(\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(n)(\theta-s)} \|g_n(\sigma_n^*(y_n^*(\theta, t)), y_n^*(\theta, t)) - g_n(x_n(\theta), y_n(\theta))\|_{Y_n} d\theta \\ &\leq M_b L_g \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(n)(\theta-s)} [\|\sigma_n^*(y_n(\theta, t)) - x_n(\theta)\|_{X_n^\alpha} \\ &\quad + (1 + \Delta) \|y_n^*(\theta, t) - y_n(\theta)\|_{Y_n}] d\theta \\ &= M_b L_g \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(n)(\theta-s)} [(1 + \Delta) \|y_n^*(\theta, t) - y_n(\theta)\|_{Y_n} + \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha}] d\theta \end{aligned}$$

Colocando $z(s) = e^{\rho(n)s} \|y_n^*(s, t) - y_n(s)\|_{Y_n}$ temos

$$z(s) \leq M_b L_g (1 + \Delta) \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} z(\theta) d\theta + M_b L_g \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(n)\theta} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} d\theta.$$

Pela Desigualdade de Gronwall generalizada, segue que

$$\|y_n^*(s, t) - y_n(t)\|_{Y_n} \leq c_3 \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{[\rho(n) + dc_\Gamma](\theta - s)} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} d\theta$$

onde $s \leq t$ e $c_\Gamma = (M_b L_g (1 + \Delta) \Gamma(\beta))^{1/\beta}$.

Seja $s \leq t_0 \leq t$. Vamos estimar $\|y_n^*(s, t) - y_n^*(s, t_0)\|_{Y_n}$. Temos

$$\begin{aligned} \|y_n^*(s, t) - y_n^*(s, t_0)\|_{Y_n^\alpha} &\leq \|e^{-B_n(s-t_0)} [y_n^*(t_0, t) - y_n(t_0)]\|_{Y_n} \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^s e^{-B_n(s-\theta)} [g_n(\sigma_n^*(y_n^*(\theta, t)), y_n^*(\theta, t)) - g_n(\sigma_n^*(y_n^*(\theta, t_0)), y_n^*(\theta, t_0))] d\theta \right\|_{Y_n} \\ &\leq c_3 M_b e^{\rho(n)(t_0-s)} \int_{t_0}^t (\theta - t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(n) + dc_\Gamma](\theta - t_0)} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} d\theta \\ &\quad + M_b L_g (1 + \Delta) \int_s^{t_0} (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(n)(\theta - s)} \|y_n^*(\theta, t) - y_n^*(\theta, t_0)\|_{Y_n} d\theta. \end{aligned}$$

Então pela Desigualdade de Gronwall generalizada, segue que

$$e^{\rho(n)s} \|y_n^*(s, t) - y_n^*(s, t_0)\|_{Y_n} \leq cc_3 M_b e^{-c_\Gamma s} \int_{t_0}^t (\theta - t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(n) + dc_\Gamma]\theta} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} d\theta,$$

ou seja,

$$\|y_n^*(s, t) - y_n^*(s, t_0)\|_{Y_n} \leq c_4 \int_{t_0}^t (\theta - t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(n) + dc_\Gamma](\theta - s)} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} d\theta.$$

Podemos agora obter uma estimativa para $\|\xi(t)\|_{X_n^\alpha}$.

$$\begin{aligned} \xi(t) - e^{-A_n(t-t_0)} \xi(t_0) &= x_n(t) - e^{-A_n(t-t_0)} x_n(t_0) - \sigma_n^*(y(t)) + e^{-A_n(t-t_0)} \sigma_n^*(y_n(t_0)) \\ &= \int_{t_0}^t e^{-A_n(t-s)} f_n(x_n(s), y_n(s)) ds - \sigma_n^*(y_n(t)) + e^{-A_n(t-t_0)} \sigma_n^*(y_n(t_0)) \\ &= \int_{t_0}^t e^{-A_n(t-s)} f_n(x_n(s), y_n(s)) ds - \int_{-\infty}^t e^{-A_n(t-s)} f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s, t)), y_n^*(s, t)) ds \\ &\quad + e^{-A_n(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-A_n(t_0-s)} f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s, t_0)), y_n^*(s, t_0)) ds \\ &= \int_{t_0}^t e^{-A_n(t-s)} [f_n(x_n(s), y_n(s)) - f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s, t)), y_n^*(s, t))] ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^{t_0} e^{-A_n(t-s)} [f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s, t)), y_n^*(s, t)) - f_n(\sigma_n^*(y_n^*(s, t_0)), y_n^*(s, t_0))] ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& \|\xi(t) - e^{-A_n(t-t_0)}\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} \\
& \leq M_a L_f \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-s)} (\|x_n(s) - \sigma_n^*(y_n^*(s, t))\|_{X_n^\alpha} + \|y_n(s) - y_n^*(s, t)\|_{Y_n^\alpha}) ds \\
& \quad + M_a L_f (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{t_0} (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-s)} \|y_n^*(s, t) - y_n^*(s, t_0)\|_{Y_n} ds \\
& \leq M_a L_f \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-s)} \|x_n(s) - \sigma_n^*(y_n^*(s, t))\|_{X_n^\alpha} ds \\
& \quad + c_3 M_a L_f \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-s)} \int_s^t (\theta-s)^{-\alpha} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-s)} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} d\theta ds \\
& \quad + c_4 M_a L_f (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{t_0} (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-s)} \int_{t_0}^t (\theta-t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-s)} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} d\theta ds \\
& \leq M_a L_f \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-s)} \|\xi(s)\|_{X_n^\alpha} ds \\
& \quad + c_5 \int_{t_0}^t (t-\theta)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-\theta)} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} \int_{t_0}^\theta (\theta-s)^{-\alpha} e^{-[\beta(n)-(\rho(n)+dc_\Gamma)](\theta-s)} ds d\theta \\
& \quad + c_6 \int_{t_0}^t (\theta-t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-t)} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-[\beta(n)-(\rho(n)+dc_\Gamma)](t-s)} ds d\theta \\
& \leq \left[M_a L_f + \frac{c_5 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]^{1-\alpha}} \right] \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-s)} \|\xi(s)\|_{X_n^\alpha} ds \\
& \quad + \frac{c_6 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]^{1-\alpha}} \int_{t_0}^t (\theta-t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](\theta-t)} \|\xi(\theta)\|_{X_n^\alpha} d\theta. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
\|\xi(t)\|_{X_n^\alpha} & \leq \|e^{-A_n(t-t_0)}\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} + \|\xi(t) - e^{-A_n(t-t_0)}\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} \\
& \leq M_a e^{-\beta(n)(t-t_0)} \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} + \|\xi(t) - e^{-A_n(t-t_0)}\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha}
\end{aligned}$$

segue de (4.11) que

$$\begin{aligned}
\|\xi(t)\|_{X_n^\alpha} & \leq M_a e^{-\beta(n)(t-t_0)} \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} \\
& \quad + \left[M_a L_f + \frac{c_5 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]^{1-\alpha}} \right] \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-s)} \|\xi(s)\|_{X_n^\alpha} ds \\
& \quad + \frac{c_6 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]^{1-\alpha}} \int_{t_0}^t (s-t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](s-t)} \|\xi(s)\|_{X_n^\alpha} ds.
\end{aligned}$$

Se $\omega(t) = \sup\{\|\xi(s)\|_{X_n^\alpha} : t_0 \leq s \leq t\}$ então

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\|_{X_n^\alpha} &\leq M_a e^{-\beta(n)(t-t_0)} \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} \\ &\quad + \left[M_a L_f + \frac{c_5 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]^{1-\alpha}} \right] \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(n)(t-s)} ds \omega(t) \\ &\quad + \frac{c_6 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]^{1-\alpha}} \int_{t_0}^t (s-t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(n)+dc_\Gamma](s-t)} ds \omega(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$e^{\beta(n)(t-t_0)} \|\xi(t)\|_{X_n^\alpha} \leq M_a \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} + \gamma(n) e^{\beta(n)(t-t_0)} \omega(t), \quad (4.12)$$

onde

$$\gamma(n) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\beta(n)^{1-\alpha}} \left[M_a L_f + \frac{c_5 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]^{1-\alpha}} \right] + \frac{c_6 \Gamma(1-\alpha) K}{[\beta(n) - (\rho(n) + dc_\Gamma)]^{1-\alpha}}$$

e

$$K = \sup_{\eta \geq 0} \left(\int_0^\eta u^{-\alpha} e^{(\rho(n)+dc_\Gamma)(u-\eta)} du \right).$$

Escolha $n_0 > 0$ tal que $\gamma(n) \leq 1/2$ para todo $n \geq n_0$. Trocando t por s em (4.12), temos

$$e^{\beta(n)(s-t_0)} \|\xi(s)\|_{X_n^\alpha} \leq M_a \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} + \gamma(n) e^{\beta(n)(s-t_0)} \omega(s),$$

para $n \geq n_0$, e então,

$$\sup_{t_0 \leq s \leq t} e^{\beta(n)(s-t_0)} \|\xi(s)\|_{X_n^\alpha} \leq M_a \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} + \gamma(n) e^{\beta(n)(t-t_0)} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \omega(s)$$

ou seja,

$$e^{\beta(n)(t-t_0)} \omega(t) \leq M_a \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} + \gamma(n) e^{\beta(n)(t-t_0)} \omega(t).$$

Assim para $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} e^{\beta(n)(t-t_0)} \|\xi(t)\|_{X_n^\alpha} &\leq e^{\beta(n)(t-t_0)} \omega(t) \leq M_a \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} + \gamma(n) e^{\beta(n)(t-t_0)} \omega(t) \\ &\leq M_a \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha} + \frac{1}{2} e^{\beta(n)(t-t_0)} \omega(t). \end{aligned}$$

Então

$$\|\xi(t)\|_{X_n^\alpha} \leq 2M_a e^{-\beta(n)(t-t_0)} \|\xi(t_0)\|_{X_n^\alpha},$$

e portanto

$$\|x_n(t) - \sigma_n^*(y_n(t))\|_{X_n^\alpha} \leq 2M_a e^{-\beta(n)(t-t_0)} \|x_n(t_0) - \sigma_n^*(y_n(t_0))\|_{X_n^\alpha},$$

e S é exponencialmente atratora.

A suavidade de σ_n^* é provada da mesma forma que em Henry [8].

□

4.2 Convergência dos Autovalores e Autofunções do Operador A_ε

Considere o operador, $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ onde

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \{\phi \in H^1(0, 1) : (p_\varepsilon(x)\phi_x)_x \in L^2(0, 1) \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x)\phi = 0 \text{ em } \{0, 1\}\}$$

e

$$A_\varepsilon \phi = -(p_\varepsilon(x)\phi_x)_x - c(x)\phi. \quad (4.13)$$

para $\phi \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$.

Seja $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L^2_{\Omega_0}(0, 1) \rightarrow L^2_{\Omega_0}(0, 1)$ onde

$$\mathcal{D}(A_0) = \{\phi \in H^1_{\Omega_0}(0, 1) : (p(x)\phi_x)_x \in L^2_{\Omega_0}(0, 1) \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} + b(x)\phi = 0 \text{ em } \{0, 1\}\}$$

com

$$A_0 \phi = -[(p(x)\phi_x)_x + c(x)\phi]\chi_{\Omega_1} - \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\phi_x(b_i^+) - p(a_i)\phi_x(a_i^-)] + \hat{c}_i \phi \right] \chi_{\Omega_{0,i}} \quad (4.14)$$

para $\phi \in \mathcal{D}(A_0)$, e $\hat{c}_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} c(x) dx$.

Os próximos dois teoremas estabelecem a convergência dos autovalores e autofunções associados aos operadores A_ε e A_0 . A demonstração destes resultados pode ser encontrada em Rodríguez Bernal [11].

Teorema 4.4

(i) *Suponha que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $u^\varepsilon \subset H^1(0, 1)$ são dadas tais que sejam limitadas em $L^2(0, 1)$ e $0 \leq \int_0^1 p_\varepsilon |u^\varepsilon_x|^2 dx \leq M$, para alguma constante independente de ε . Então, tomando subsequência se necessário, u^ε converge para $u \in H^1_{\Omega_0}(0, 1)$, fracamente em $H^1(0, 1)$ e fortemente em $L^2(0, 1)$.*

Além disso,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 p_\varepsilon |u^\varepsilon_x|^2 dx = \int_0^1 p(x) |u_x|^2 dx = \int_{\Omega_1} p(x) |u_x|^2$$

se, e somente se u^ε converge fortemente em $H^1(0, 1)$ para u e $\lim_{\varepsilon} \int_{\Omega_0} p_\varepsilon |u^\varepsilon_x|^2 = 0$.

(ii) Suponha que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\{h^\varepsilon\}_\varepsilon \subset H^{-1}(0,1)$ é limitada e converge fracamente para $h \in H^{-1}(0,1)$. Suponha que $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ é limitada em $L^2(0,1)$ e verifica

$$T_\varepsilon u^\varepsilon = ((p_\varepsilon u_x^\varepsilon)_x + cu^\varepsilon + b_\Gamma)u^\varepsilon = h^\varepsilon,$$

onde $b_\Gamma u^\varepsilon$ denota $b(0)u^\varepsilon(0)\varphi(0) + b(1)u^\varepsilon(1)\varphi(1)$ para $\varphi \in H^1(0,1)$. Então $0 \leq \int_0^1 p_\varepsilon |u_x^\varepsilon|^2 \leq M$, para alguma constante independente de ε , e tomando subsequência se necessário, u^ε converge, fracamente em $H^1(0,1)$, para $u \in H_{\Omega_0}^1(0,1)$. Além disso, $u \in H_{\Omega_0}^1(0,1)$ verifica

$$T_0 u = ((p(x)u_x)_x + cu + b_\Gamma)u = h|_{H_{\Omega_0}^1(0,1)} \text{ em } H_{\Omega_0}^{-1}(0,1).$$

Se a função u acima é única, então toda a família u^ε converge para u .

Finalmente, u^ε converge fortemente em $H^1(0,1)$ para u se e, somente se

$$\langle h^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_{-1,1} \rightarrow \langle h, u \rangle_{-1,1},$$

e isto acontece, por exemplo, se $h^\varepsilon \rightarrow h$ em $H^{-1}(0,1)$. Neste caso, também temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \tau_0(u, u)$$

onde

$$\tau_\varepsilon(u, v) = \int_0^1 p_\varepsilon(x) u_x v_x dx - \int_0^1 c(x) u v dx + b(1)u(1)v(1) + b(0)u(0)v(0)$$

e

$$\tau_0(u, v) = \int_0^1 p(x) u_x v_x dx - \int_0^1 c(x) u v dx + b(1)u(1)v(1) + b(0)u(0)v(0)$$

em particular $\int_{\Omega_0} p_\varepsilon |u_x^\varepsilon|^2 = 0$.

Usando o resultado acima, Rodríguez-Bernal [11] obtem o seguinte teorema.

Teorema 4.5

Sejam

$$\lambda_0^\varepsilon \leq \lambda_1^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_{n-1}^\varepsilon \leq \lambda_n^\varepsilon \leq \dots$$

os autovalores de A_ε e $\{\phi_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ as autofunções associadas. Considere

$$\lambda_0^0 \leq \lambda_1^0 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}^0 \leq \lambda_n^0 \leq \dots$$

os autovalores de A_0 e $\{\phi_n^0\}_{n=1}^\infty$ as autofunções associadas.

Então as seguintes conclusões são verdadeiras.

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n^\varepsilon \rightarrow \lambda_n^0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, e para cada seqüência convergindo para zero, que denotaremos $\varepsilon \rightarrow 0$, existe uma subseqüência ε_j tal que

$$\phi_n^{\varepsilon_j} \rightarrow \phi_n^0 \in H_{\Omega_0}^1(0, 1), \quad \text{quando } j \rightarrow +\infty$$

fortemente em $H^1(0, 1)$ e $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} p_{\varepsilon_j} |D\phi_n^{\varepsilon_j}|^2 = 0$.

Demonstração

Considere as formas bilineares

$$\tau_\varepsilon : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R},$$

e

$$\tau_0 : H_{\Omega_0}^1 \times H_{\Omega_0}^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R},$$

associadas aos operadores A_ε e A_0 respectivamente, dadas por

$$\tau_\varepsilon(u, v) = \int_0^1 p_\varepsilon(x) u_x v_x dx - \int_0^1 c(x) u v dx + b(1)u(1)v(1) + b(0)u(0)v(0)$$

e

$$\tau_0(u, v) = \int_0^1 p_0(x) u_x v_x dx - \int_0^1 c(x) u v dx + b(1)u(1)v(1) + b(0)u(0)v(0)$$

O primeiro autovalor de A_ε é dado por

$$\begin{aligned} \lambda_0^\varepsilon &= \inf_{\substack{u \in H_{\Omega_0}^1(0,1) \\ \|u\|=1}} \left[\int_0^1 p_\varepsilon(x) u_x^2 dx - \int_0^1 c(x) u^2 dx + b(1)u(1)^2 + b(0)u(0)^2 \right] \\ &= \inf_{\substack{u \in H_{\Omega_0}^1(0,1) \\ \|u\|=1}} \tau_\varepsilon(u, u), \end{aligned}$$

e o primeiro autovalor de A_0 dado por

$$\begin{aligned} \lambda_0^0 &= \inf_{\substack{u \in H_{\Omega_0}^1(0,1) \\ \|u\|=1}} \left[\int_0^1 p_0(x) u_x^2 dx - \int_0^1 c(x) u^2 dx + b(1)u(1)^2 + b(0)u(0)^2 \right] \\ &= \inf_{\substack{u \in H_{\Omega_0}^1(0,1) \\ \|u\|=1}} \tau_0(u, u), \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma de $L^2(0,1)$.

Se restringirmos u a $H_{\Omega_0}^1(0,1)$ com $\|u\| = 1$, da convergência de p_ε em (0.1), obtemos que

$$\lambda_0^\varepsilon = \inf_{\substack{u \in H^1(0,1) \\ \|u\|=1}} \tau_\varepsilon(u, u) \leq \tau_\varepsilon(u, u) \rightarrow \tau_0(u, u),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e em particular

$$\limsup_{\varepsilon} \lambda_0^\varepsilon \leq \lambda_0^0.$$

Por outro lado, tomando a família, em ε , da primeira autofunção $\{\phi_0^\varepsilon\}_\varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon(\phi_0^\varepsilon, \phi_0^\varepsilon) &= \int_0^1 p_\varepsilon(x)(\phi_0^\varepsilon)_x^2 dx - \int_0^1 c(x)(\phi_0^\varepsilon)_x^2 dx + b(1)\phi_0^\varepsilon(1)^2 + b(0)\phi_0^\varepsilon(0)^2 \\ &= \lambda_0^\varepsilon \leq M, \end{aligned}$$

para alguma constante M , independente de ε .

Segue do Teorema 4.4, tomando subsequência se necessário, que

$$\lambda_0^\varepsilon \rightarrow \mu^0$$

e

$$\phi_0^\varepsilon \rightarrow \phi \in H_{\Omega_0}^1(0,1),$$

onde $\|\phi\| = 1$ e a última convergência é fraca em $H^1(0,1)$ e forte em $L^2(0,1)$.

Mas $A_\varepsilon(\phi_0^\varepsilon) = \lambda_0^\varepsilon \phi_0^\varepsilon$ e como $\lambda_0^\varepsilon \phi_0^\varepsilon$ converge em $H^{-1}(0,1)$ para $\mu^0 \phi$, pelo Teorema 4.4, ϕ satisfaz $A_0(\phi) = \mu^0 \phi$, $\phi_0^\varepsilon \rightarrow \phi \in H_{\Omega_0}^1$ fortemente em $H^1(0,1)$, além disso $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} p_\varepsilon(x)(\phi_0^\varepsilon)_x^2 dx = 0$.

Conseqüentemente $\mu^0 = \tau_0(\phi, \phi) \geq \lambda_0^0$.

Como o argumento é independente da subsequência tomada, realmente provamos que

$$\liminf_{\varepsilon} \lambda_0^\varepsilon = \mu^0 = \tau_0(\phi, \phi) \geq \lambda_0^0,$$

ou seja

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_0^\varepsilon = \lambda_0^0$$

e a função ϕ acima, que pode depender da subsequência tomada, é a autofunção normalizada de λ_0^0 . Portanto o teorema está provado para o caso $n = 0$.

Assuma, por indução, que para os primeiros n autovalores, tenhamos $\lambda_j^\varepsilon \rightarrow \lambda_j^0$ e $\phi_j^\varepsilon \rightarrow \phi_j^0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $j = 0, \dots, n-1$.

Então da caracterização min-max dos autovalores temos que

$$\lambda_n^\varepsilon = \inf_{\substack{u \in H^1(0,1) \\ u \perp \{\phi_0^\varepsilon, \dots, \phi_{n-1}^\varepsilon\} \\ \|u\|=1}} \tau_\varepsilon(u, u).$$

Tomando qualquer seqüência convergindo para zero, que continuaremos denotando por $\varepsilon \rightarrow 0$, existe subsequência ε_j tal que para todo $i = 0, \dots, n-1$

$$\phi_i^{\varepsilon_j} \rightarrow \phi_i^0 \in H_{\Omega_0}^1(0, 1) \quad \text{quando} \quad j \rightarrow +\infty,$$

fortemente em $H^1(0, 1)$ e $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} p_{\varepsilon_j}(\phi_i^{\varepsilon_j})_x^2 dx = 0$, ϕ_i^0 é a autofunção associada a λ_i^0 onde ϕ_i^0 são mutuamente ortogonais e têm norma em $L^2(0, 1)$ igual a 1.

Com isto temos que

$$\lambda_n^0 = \inf_{\substack{u \in H^1(0,1) \\ u \perp \{\phi_0^0, \dots, \phi_{n-1}^0\} \\ \|u\|=1}} \tau_0(u, u).$$

Definimos em $L^2(0, 1)$ e $H^1(0, 1)$ as projeções

$$\begin{aligned} P_n^{\varepsilon_j} &= \sum_{i=0}^{n-1} \langle \phi_i^{\varepsilon_j}, \cdot \rangle \phi_i^{\varepsilon_j}, & Q_n^{\varepsilon_j} &= I - P_n^{\varepsilon_j} \\ P_n^0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \langle \phi_i^0, \cdot \rangle \phi_i^0, & Q_n^0 &= I - P_n^0. \end{aligned}$$

Da convergência forte de $\phi_i^{\varepsilon_j}$ em $H^1(0, 1)$ temos que

$$P_n^{\varepsilon_j} \rightarrow P_n^0 \quad \text{e} \quad Q_n^{\varepsilon_j} \rightarrow Q_n^0 \quad \text{quando} \quad j \rightarrow +\infty$$

em $\mathcal{L}(L^2(0, 1), H^1(0, 1))$.

Para um dado $u \in H_{\Omega_0}^1(0, 1)$, tome $u^{\varepsilon_j} = Q_n^{\varepsilon_j}(u)$. Como $\{u^{\varepsilon_j}\}$ é ortogonal em $L^2(0, 1)$ a $\phi_0^{\varepsilon_j}, \dots, \phi_{n-1}^{\varepsilon_j}$ e converge fortemente em $H^1(0, 1)$ para $u^0 = Q_n^0(u)$ mostraremos abaixo que

$$\lambda_n^{\varepsilon_j} \leq \frac{\tau_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}, u^{\varepsilon_j})}{\|u^{\varepsilon_j}\|^2} \rightarrow \frac{\tau_0(u^0, u^0)}{\|u^0\|^2}, \quad \text{quando} \quad j \rightarrow +\infty. \quad (4.15)$$

Como $u^0 \perp \{\phi_0^0, \dots, \phi_{n-1}^0\}$ é arbitrário, obtemos que

$$\limsup_j \lambda_n^{\varepsilon_j} \leq \limsup_j \frac{\tau_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}, u^{\varepsilon_j})}{\|u^{\varepsilon_j}\|^2} = \frac{\tau_0(u^0, u^0)}{\|u^0\|^2},$$

ou seja, $\limsup_j \lambda_n^{\varepsilon_j} \leq \lambda_n^0$.

Como este limitante superior é independente da sequência ε e da subsequência ε_j , obtemos

$$\limsup_\varepsilon \lambda_n^\varepsilon \leq \lambda_n^0.$$

Vamos provar a afirmativa acima.

A primeira desigualdade em (4.15) é imediata

$$\lambda_n^{\varepsilon_j} \leq \frac{\tau_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}, u^{\varepsilon_j})}{\|u^{\varepsilon_j}\|^2}.$$

Como $u^{\varepsilon_j} = Q_n^{\varepsilon_j}(u) = u - P_n^{\varepsilon_j}(u)$, temos que $\tau_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}, u^{\varepsilon_j}) = \tau_{\varepsilon_j}(u, u) - 2\tau_{\varepsilon_j}(u, P_n^{\varepsilon_j}(u)) + \tau_{\varepsilon_j}(P_n^{\varepsilon_j}(u), P_n^{\varepsilon_j}(u))$. Como u foi tomado em $H_{\Omega_0}^1(0, 1)$ temos

$$\tau_{\varepsilon_j}(u, u) \rightarrow \tau_0(u, u). \quad (4.16)$$

Também

$$\begin{aligned} \tau_{\varepsilon_j}(u, P_n^{\varepsilon_j}(u)) &= \int_0^1 p_{\varepsilon_j}(x) u_x (P_n^{\varepsilon_j}(u))_x dx - \int_0^1 c(x) u P_n^{\varepsilon_j}(u) dx + b(1) u(1) P_n^{\varepsilon_j}(u)(1) \\ &+ b(0) u(0) P_n^{\varepsilon_j}(u)(0) \rightarrow \int_0^1 p(x) u_x (P_n^0(u))_x dx - \int_0^1 c(x) u P_n^0(u) dx \\ &+ b(1) u(1) P_n(u)(1) + b(0) u(0) P_n(u)(0) = \tau_0(u, P_n^0(u)). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Finalmente,

$$\tau_{\varepsilon_j}(P_n^{\varepsilon_j}(u), P_n^{\varepsilon_j}(u)) = \sum_{i=0}^{n-1} |\langle \phi_i^{\varepsilon_j}, u \rangle|^2 \tau_{\varepsilon_j}(\phi_i^{\varepsilon_j}, \phi_i^{\varepsilon_j})$$

e do Teorema 4.4, sabemos que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \tau_{\varepsilon_j}(\phi_i^{\varepsilon_j}, \phi_i^{\varepsilon_j}) = \tau_0(\phi_i^0, \phi_i^0).$$

Logo

$$\begin{aligned} \tau_{\varepsilon_j}(P_n^{\varepsilon_j}(u), P_n^{\varepsilon_j}(u)) &= \sum_{i=0}^{n-1} |\langle \phi_i^{\varepsilon_j}, u \rangle|^2 \tau_{\varepsilon_j}(\phi_i^{\varepsilon_j}, \phi_i^{\varepsilon_j}) \rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} |\langle \phi_i^0, u \rangle|^2 \tau_0(\phi_i^0, \phi_i^0) \\ &= \tau_0(P_n^0(u), P_n^0(u)). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como $u^0 = Q_n^0(u) = (I - P_n^0)$, $\tau_0(u^0, u^0) = \tau_0(u, u) - 2\tau_0(u, P_n^0(u)) + \tau(P_n^0(u), P_n^0(u))$ e por (4.16), (4.17) e (4.18), segue que

$$\tau_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \rightarrow \tau_0(u^0, u^0).$$

Como consequência de (4.15), tomando a família de n -ésima autofunção $\{\phi_n^\varepsilon\}_\varepsilon$, temos

$$\tau_\varepsilon(\phi_n^\varepsilon, \phi_n^\varepsilon) = \lambda_n^\varepsilon \leq M$$

para alguma constante M , independente de ε . Portanto $\int_0^1 p_\varepsilon(x)(\phi_n^\varepsilon)_x^2 dx$ é limitada e segue do Teorema 4.4, tomando subsequência se necessário, que $\lambda_n^\varepsilon \rightarrow \mu^0$ e $\phi_n^\varepsilon \rightarrow \phi \in H_{\Omega_0}^1(0, 1)$, onde $\|\phi\| = 1$, a convergência é fraca em $H^1(0, 1)$ e forte em $L^2(0, 1)$.

Como $A_\varepsilon(\phi_n^\varepsilon) = \lambda_n^\varepsilon \phi_n^\varepsilon$ e como $\lambda_n^\varepsilon \phi_n^\varepsilon$ converge, em $H^{-1}(0, 1)$, para $\mu^0 \phi$, segue do Teorema 4.4 que ϕ satisfaz $A_0(\phi) = \mu^0 \phi$ e $\phi_n^\varepsilon \rightarrow \phi \in H_{\Omega_0}^1(0, 1)$ fortemente em $H^1(0, 1)$. Além disso, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} p_\varepsilon(x)(\phi_n^\varepsilon)_x^2 dx = 0$.

Como ϕ_n^ε e ϕ_j^ε são ortogonais $j = 0, \dots, n-1$ obtemos $\langle \phi, \phi_j^0 \rangle = 0$. Consequentemente, $\mu^0 = \tau_0(\phi, \phi) \geq \lambda_n^0$. Como o argumento é independente da subsequência tomada, provamos que

$$\liminf_{\varepsilon} \lambda_n^\varepsilon = \mu^0 = \tau(\phi, \phi) \geq \lambda_n^0.$$

Assim temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_n^\varepsilon = \lambda_n^0,$$

e ϕ , que pode depender da subsequência, é a autofunção normalizada associada a λ_n^0 . $\square$

Consideremos a família de equações diferenciais parabólicas

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = (p_\varepsilon(x)u_x^\varepsilon)_x + c(x)u^\varepsilon + f(u^\varepsilon), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + b(x)u^\varepsilon = g(u^\varepsilon), & x \in \{0, 1\} \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

Seja o operador A_ε dado em (4.13). O espectro de $-A_\varepsilon$ é formado pelos seus autovalores

$$\dots < \lambda_n^\varepsilon < \dots < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_0^\varepsilon$$

com as seguintes autofunções correspondentes

$$\phi_0^\varepsilon, \dots, \phi_{n-1}^\varepsilon, \phi_n^\varepsilon, \dots$$

Proposição 4.6

Os autovalores λ_n^ε do operador $-A_\varepsilon$ são da forma

$$\lambda_n^\varepsilon = -\frac{1}{l^2}n^2\pi^2 + o(n),$$

quando $n \rightarrow +\infty$, onde $l = \int_0^1 p_\varepsilon(s)^{-1/2} ds$.

Demonstração

Se λ^ε é autovalor de $-A_\varepsilon$, então

$$\begin{aligned} (p_\varepsilon(x)u_x(x))_x + c(x)u(x) - \lambda^\varepsilon u(x) &= 0, \quad x \in (0, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x)u &= 0, \quad \text{em } \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Seja u uma solução de (4.19). Considere a seguinte mudança de variável

$$v(t) = p_\varepsilon(x)^{1/4}u(x), \quad t = \int_0^x p_\varepsilon(s)^{-1/2} ds, \quad l = \int_0^1 p_\varepsilon(s)^{-1/2} ds.$$

Então

$$\begin{aligned} v''(t) - r_\varepsilon(t)v(t) - \lambda^\varepsilon v(t) &= 0, \quad 0 < t < l \\ v'(t) + \tilde{b}_\varepsilon(t)v(t) &= 0, \quad t \in \{0, l\} \end{aligned}$$

onde $r_\varepsilon(t) = \frac{\eta_\varepsilon''(t)}{\eta_\varepsilon(t)} - c(x)$, $\eta_\varepsilon(t) = p_\varepsilon(x)^{1/4}$ e

$$\begin{aligned} -\tilde{b}_0 &:= \tilde{b}_\varepsilon(0) = -\left[\frac{1}{4}p_\varepsilon'(0) + b(0)\right] p_\varepsilon(0)^{-1/2} \\ \tilde{b}_1 &:= \tilde{b}_\varepsilon(l) = \left[b(1) - \frac{1}{4}p_\varepsilon'(1)\right] p_\varepsilon(1)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Os autovalores λ^ε são caracterizados como ínfimos da forma bilinear $\tau : L^2(0, l) \times L^2(0, l) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tau(u, v) = -\left[\int_0^l u_x v_x + \int_0^l r_\varepsilon uv + \tilde{b}_0 u(0)v(0) + \tilde{b}_1 u(l)v(l)\right].$$

Para $v \in L^2(0, 1)$ com $\|v\|_{L^2(0,1)} = 1$, temos

$$\begin{aligned} \left|\tau(v, v) + \int_0^l v_x^2 dx + b(0)v(0)^2 + b(l)v(l)^2\right| &\leq \max_{0 \leq x \leq l} |r_\varepsilon(x)| \\ &\quad + |b(0) - \tilde{b}_0| + |b(l) - \tilde{b}_1| := r_M^\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\lambda_n^\varepsilon = \mu_n + O(1)$, quando $n \rightarrow +\infty$, onde μ_n são os autovalores do problema

$$\phi'' = \mu\phi \quad \text{tal que} \quad \phi'(0) = \tilde{b}_0\phi(0), \quad \phi'(l) = -\tilde{b}_1\phi(l) \quad (4.20)$$

para $\tilde{b}_0 > 0$ e $\tilde{b}_1 > 0$.

Se $\mu = -\omega^2 < 0$, das condições em 0 e l obtemos

$$(\tilde{b}_0\tilde{b}_1 - \omega^2) \sin(\omega l) = -\omega(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1) \cos(\omega l).$$

Para $\omega l = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}^*$, obtemos $\tilde{b}_0 = -\tilde{b}_1$ e $\mu_n = -\frac{\pi^2}{l^2}n^2$.

Para $\omega l \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}^*$, obtemos

$$\cot(\omega l) = \frac{1}{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1} \omega - \frac{\tilde{b}_0\tilde{b}_1}{(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1)} \frac{1}{\omega}.$$

Colocando $\xi = \omega l$, $\alpha = \frac{1}{(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1)l}$ e $\beta = \frac{\tilde{b}_0\tilde{b}_1 l}{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1}$, temos

$$\cot(\xi) = \alpha\xi - \beta\frac{1}{\xi}.$$

Em cada intervalo $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ a função $\cot(\xi)$ é decrescente e a função $y(\xi) = \alpha\xi - \beta/\xi$ é crescente. Logo para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ existe $\xi_n \in (n\pi, (n+1)\pi)$ tal que

$$\cot(\xi_n) = \alpha\xi_n - \beta\frac{1}{\xi_n}.$$

Então $\xi_{n+1} < \xi_n + \pi$. De fato, se $\xi_{n+1} \geq \xi_n + \pi$ então

$$\cot(\xi_{n+1}) \leq \cot(\xi_n + \pi) = \cot(\xi_n)$$

ou seja,

$$\alpha\xi_{n+1} - \beta\frac{1}{\xi_{n+1}} \leq \alpha\xi_n - \beta\frac{1}{\xi_n}. \quad (4.21)$$

Como $\xi_{n+1} > \xi_n$ então

$$\alpha\xi_{n+1} - \beta\frac{1}{\xi_{n+1}} > \alpha\xi_n - \beta\frac{1}{\xi_n}$$

o que contradiz (4.21).

Seja $\theta_n = \xi_n - n\pi$. Então $\theta_n \in (0, \pi)$ e

$$\theta_{n+1} = \xi_{n+1} - (n+1)\pi < \xi_n - n\pi = \theta_n.$$

Seja $\theta_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n$. Temos,

$$\cot(\theta_n) = \cot(n\pi + \theta_n) = \alpha(n\pi + \theta_n) - \beta \frac{1}{n\pi + \theta_n}$$

e portanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\pi} \cot(\theta_n) = \alpha \neq 0.$$

Então $\theta_0 = 0$, pois caso contrário

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cot(\theta_n)}{n\pi} = 0.$$

Portanto

$$\xi_n = n\pi + o(1),$$

logo

$$\mu_n = -\frac{1}{l^2} n^2 \pi^2 + o(n),$$

quando $n \rightarrow +\infty$ e portanto

$$\lambda_n^\varepsilon = -\frac{1}{l^2} n^2 \pi^2 + o(n),$$

quando $n \rightarrow +\infty$. □

4.3 Existência da Variedade Invariante para os Problemas (P_ε) e (P_0) Truncados

Considere a família de equações diferenciais parabólicas (P_ε) , onde as não-linearidades f, g são funções reais de classe C^2 satisfazendo as condições (G) , (D_ε) e (D_0) do Capítulo 1.

Suponha que para algum n o espectro de $-A_\varepsilon$, definido em (4.13), satisfaz

$$\dots \lambda_n^\varepsilon < 0 < \lambda_{n-1}^\varepsilon < \dots < \lambda_0^\varepsilon,$$

Segue do Teorema 1.4 que, para ε suficientemente pequeno e para qualquer solução $\{v(t); t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A}^\varepsilon$,

$$\|v\|_{C^0([0,1])} \leq \mathcal{N}$$

onde $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\lambda_1^0, m_0, c, b, C_0, C_1, B_0, B_1)$ e portanto

$$\mathcal{A}^\varepsilon \subset \{u \in C([0, 1]) : \|u\|_\infty \leq \mathcal{N}\} \subset \{u \in L^2(0, 1) : \|u\|_{L^2(0,1)} \leq \mathcal{N}\}. \quad (4.22)$$

Considere uma aplicação de classe C^∞ , $\xi : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaça $\xi(x) = 1$, se $0 \leq x \leq 1$ e $\xi(x) = 0$ se $x \geq 4$, defina a aplicação $\eta : L^2(0, 1) \rightarrow [0, 1]$ por

$$\eta(u) = \xi\left(\frac{\|u\|_{L^2(0,1)}^2}{\mathcal{N}^2}\right).$$

Considere a equação truncada de (P_ε)

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = (p_\varepsilon(x)u_x^\varepsilon)_x + c(x)u^\varepsilon + (\eta f)(u^\varepsilon) \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \bar{n}} + b(x)u^\varepsilon = (\eta g)(u) \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.23)$$

Como em Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal [4], vamos considerar (4.23) como um problema escrito na forma abstrata

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = -A_\varepsilon u^\varepsilon + h(u^\varepsilon) \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \end{cases} \quad (4.24)$$

onde $-A_\varepsilon$ é uma formalização conveniente do operador $(p_\varepsilon(x)u_x^\varepsilon)_x + c(x)u^\varepsilon$ com condição de fronteira $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \bar{n}} + b(x)u^\varepsilon = 0$, e a não linearidade h é definida por

$$\langle h(u), \phi \rangle = \int_0^1 \eta f(u(x))\phi(x)dx + \eta g(u(0))\phi(0) + \eta g(u(1))\phi(1)$$

para qualquer função suficientemente regular ϕ .

Considere

$$W_\varepsilon = [\phi_0^\varepsilon, \dots, \phi_{n-1}^\varepsilon] \quad \text{e} \quad W_\varepsilon^\perp = \{\phi \in L^2(0, 1) : \langle \phi, w \rangle = 0, \forall w \in W_\varepsilon\}. \quad (4.25)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno do $L^2(0, 1)$ e $\phi_0^\varepsilon, \dots, \phi_{n-1}^\varepsilon, \phi_n^\varepsilon, \dots$, são autofunções correspondentes aos autovalores do operador $-A_\varepsilon$.

Se $B^\varepsilon = A_\varepsilon|_{W_\varepsilon}$ e $\hat{A}_\varepsilon = A_\varepsilon|_{\mathcal{D}(A_\varepsilon) \cap W_\varepsilon^\perp}$, obtemos

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \hat{A}_\varepsilon & 0 \\ 0 & B^\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Como W_ε tem dimensão finita podemos escrever $-B^\varepsilon$ como a matriz diagonal

$$-B^\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda_0^\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^\varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1}^\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Seja $u^\varepsilon(x, t)$ uma solução de (4.24). Então para cada t podemos escrever

$$u^\varepsilon(x, t) = v_0^\varepsilon(t)\phi_0^\varepsilon(x) + v_1^\varepsilon(t)\phi_1^\varepsilon(x) + \dots + v_{n-1}^\varepsilon(t)\phi_{n-1}^\varepsilon(x) + w^\varepsilon(x, t)$$

onde

$$v_i^\varepsilon(t) = \int_0^1 u^\varepsilon(x, t)\phi_i^\varepsilon(x)dx, \text{ para } i = 0, \dots, n-1,$$

e

$$w^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(x, t) - \sum_{i=0}^{n-1} v_i^\varepsilon(t)\phi_i^\varepsilon(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \dot{v}_i^\varepsilon(t) &= \lambda_i^\varepsilon \int_0^1 \phi_i^\varepsilon(x)u^\varepsilon dx + \langle h(u^\varepsilon), \phi_i^\varepsilon \rangle \\ &= \lambda_i^\varepsilon v_i^\varepsilon(t) + \langle h(u^\varepsilon), \phi_i^\varepsilon \rangle \end{aligned} \quad (4.26)$$

para $i = 0, \dots, n-1$.

Também

$$\begin{aligned} w_t^\varepsilon + \hat{A}_\varepsilon w^\varepsilon &= u_t^\varepsilon - \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{n-1} v_i^\varepsilon(t)\phi_i^\varepsilon(x) - (p_\varepsilon(x)w_x^\varepsilon)_x - c(x)w^\varepsilon \\ &= u_t^\varepsilon + \hat{A}_\varepsilon u^\varepsilon - \sum_{i=0}^{n-1} \dot{v}_i^\varepsilon(t)\phi_i^\varepsilon(x) + \sum_{i=0}^{n-1} v_i^\varepsilon[-\hat{A}_\varepsilon \phi_i^\varepsilon(x)] \\ &= h(u^\varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \dot{v}_i^\varepsilon(t)\phi_i^\varepsilon(x) + \sum_{i=0}^{n-1} v_i^\varepsilon \lambda_i^\varepsilon \phi_i^\varepsilon(x) \\ &= h(u^\varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \langle h(u^\varepsilon), \phi_i^\varepsilon \rangle \phi_i^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Na última igualdade usamos (4.26).

Escrevendo $v^\varepsilon = (v_0^\varepsilon, \dots, v_{n-1}^\varepsilon)$ e $u^\varepsilon = (v^\varepsilon, w^\varepsilon)$ de (4.26) e (4.27) obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{v}^\varepsilon + B_n^\varepsilon v^\varepsilon &= g_n^\varepsilon(v^\varepsilon, w^\varepsilon) \\ w_t^\varepsilon + \hat{A}_\varepsilon w^\varepsilon &= f_n^\varepsilon(v^\varepsilon, w^\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde g_n^ε e f_n^ε são dadas por

$$g_n^\varepsilon(v^\varepsilon, w^\varepsilon) = (\langle h(u^\varepsilon), \phi_0^\varepsilon \rangle, \dots, \langle h(u^\varepsilon), \phi_{n-1}^\varepsilon \rangle)^\top \quad (4.29)$$

$$f_n^\varepsilon(v^\varepsilon, w^\varepsilon) = h(u^\varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \langle h(u^\varepsilon), \phi_i^\varepsilon \rangle \phi_i^\varepsilon. \quad (4.30)$$

Sejam $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_0$ os atratores dos problemas (P_ε) e (P_0) respectivamente. A existência desses atratores estão asseguradas pelos Teoremas 1.3 e 1.6.

Usaremos alguns resultados de Rodríguez-Bernal, [12], que asseguram que é suficiente provarmos a existência da variedade invariante para os sistemas truncados (4.28) e (4.36), já que isso implica a existência da variedade invariante para o sistema original.

Teorema 4.7 (Rodríguez-Bernal (1990))

Se $\mathcal{N} > 0$ e considere (4.24) (ou (4.33)), então

- (i) Seja $\mathcal{M}$ é uma variedade invariante para (4.24) (ou (4.33)) fechada em $L^2(0, 1)$ então $\mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{M}$ (ou $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{M}$).
- (ii) Suponha que $S_f^\varepsilon(t)$ ($S_f^0(t)$) é uniformemente limitado, isto é, $\cup_{t=0}^T S_f^\varepsilon(t)B$ é limitado em $L^2(0, 2)$, para todo $T > 0$ e todo $B \subset L^2(0, 1)$ limitado. Seja $\mathcal{M}_* \subset \mathcal{M}$ aberto em $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{M}_*$ (ou $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{M}_*$). Então para todo $B \subset L^2(0, 1)$ limitado, existe $c(B) \geq 0$ tal que

$$\text{dist}_{L^2(0,1)}(S_f^\varepsilon(t)B, \mathcal{M}_*) \leq c(B) \exp(-Mt), \quad t \geq 0.$$

Analogamente, para (4.33).

Teorema 4.8 (Rodríguez-Bernal (1990))

Suponha que S_f^ε é uniformemente limitado. Sejam $\mathcal{N} > 0$ e $\mathcal{M}$ uma variedade invariante, fechada em $L^2(0, 1)$, para $S_{\eta f}^\varepsilon$, tal que $S_{\eta f}^\varepsilon|_{\mathcal{M}}$ é aberto.

Se $B_0 \subset L^2(0, 1)$ aberto e limitado, tal que $\mathcal{A}_\varepsilon \subset B_0$, então B_0 é absorvente e $B_* = \cup_{t \geq 0} S_f^\varepsilon(t)B_0$ é absorvente e limitado. Além disso, suponha que tenhamos escolhido $\mathcal{N}$ tal que $B_* \subset \overline{B(\mathcal{N})}$, onde $\overline{B(\mathcal{N})}$ é a bola de raio $\mathcal{N}$ em $L^2(0, 1)$. Se denotamos por $\mathcal{M}_*$ (não vazio) interior (em $\mathcal{M}$) de $\mathcal{M} \cap B_*$, então $\mathcal{M}_*$ é uma variedade invariante para S_f^ε . Em particular se B_0 é positivamente invariante para S_f^ε então $B_* = B_0$ e $\mathcal{M}_* = \mathcal{M} \cap B_0$ é uma variedade invariante para S_f^ε .

Segue do Teorema 4.7 que $\mathcal{A}_\varepsilon \subset S_n^\varepsilon$ e $\mathcal{A}_0 \subset S_n^0$, onde S_n^ε e S_n^0 são as variedades

invariantes para os sistemas (4.28) e (4.36) respectivamente.

Utilizando o Teorema 4.3 obtemos o seguinte resultado para o sistema (4.28).

Teorema 4.9

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, suaves com derivadas limitadas. Então, se n é suficientemente grande existe uma variedade invariante suave exponencialmente atratora,

$$S_n^\varepsilon = \{(\sigma_\varepsilon(y), y) : y \in \mathbb{R}^n\}$$

para (4.28). O fluxo sobre S_n^ε é dado por $u_\varepsilon(x, t) = (v(t), \sigma_\varepsilon(v(t)))$ onde v é solução de

$$\dot{v} + B_n^\varepsilon v = g_n^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)). \quad (4.31)$$

Além disso, $s_\varepsilon(n) = ||| \sigma_n^\varepsilon ||| = \sup_{v \in W_\varepsilon} \|\sigma_\varepsilon(v)\|$ e a constante de Lipschitz, $l_\varepsilon(n)$ de σ_ε convergem para zero quando $n \rightarrow +\infty$.

Demonstração

Sejam $\beta(n) = -\lambda_n^\varepsilon$ e $\rho(n) = -\lambda_{n-1}^\varepsilon$. Segue da Proposição 4.6 que

$$\beta(n) - \rho(n) = 2n \frac{\pi^2}{l^2} - \frac{\pi^2}{l^2} + o(n).$$

Portanto $\beta(n) - \rho(n) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ e o resultado segue do Teorema 4.3, onde L_f e L_g são iguais a constante de Lipschitz de h , N_f e N_g são iguais a uma cota superior de h . $\square$

Consideremos agora o problema limite (P_0) e suponha que a condição (D_0) esteja satisfeita. Suponha que para algum n o espectro do operador $-A_0$ definido em (4.14), satisfaz

$$\dots \lambda_n^0 < 0 < \lambda_{n-1}^0 < \dots \lambda_0^0.$$

Segue do Teorema 1.6, que o problema (P_0) tem um atrator $\mathcal{A}_0$ e

$$\mathcal{A}_0 \subset \{u : \|u\|_{C^\alpha([0,1])} \leq \mathcal{N}_0\} \subset \{u \in L^2(0,1) : \|u\|_{L^2(0,1)} \leq \mathcal{N}_0\}$$

para algum α positivo e algum $\mathcal{N}_0 > 0$.

Considere a equação truncada de (P_0)

$$\begin{cases} u_t = [(p(x)\phi_x)_x + c(x)\phi]\chi_{\Omega_1} \\ \quad + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\phi_x(b_i^+) - p(a_i)\phi_x(a_i^-)] + \hat{c}_i\phi \right] \chi_{\Omega_{0,i}} + (\eta_0 f)(u) \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + b(x)u = (\eta_0 g)(u) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.32)$$

onde $\eta_0(u) = \xi \left(\frac{\|u\|_{L^2}^2}{N_0^2} \right)$.

Como antes escrevemos (4.32) na forma abstrata

$$\begin{cases} u_t = -A_0 u + h_0(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (4.33)$$

onde a não linearidade h_0 satisfaz

$$\langle h_0(u), \phi \rangle = \int_0^1 (\eta_0 f)(u(x)) \phi(x) dx + (\eta_0 g)(u(0)) \phi(0) + (\eta_0 g)(u(1)) \phi(1)$$

para qualquer função teste suficientemente regular ϕ .

Considere

$$W_0 = [\phi_0^0, \dots, \phi_{n-1}^0] \quad \text{e} \quad W_0^\perp = \{\phi \in L_{\Omega_0}^2(0, 1) : \langle \phi, w \rangle = 0, \forall w \in W_0\}.$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno do $L^2(0, 1)$ e $\phi_0^0, \dots, \phi_{n-1}^0, \phi_n^0, \dots$ são autofunções correspondentes aos autovalores do operador A_0 .

Sejam $B^0 = A_0|_{W_0}$ e $\hat{A}_0 = A_0|_{\mathcal{D}(A_0) \cap W_0^\perp}$, obtemos

$$A_0 = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ 0 & B^0 \end{bmatrix}.$$

Como W_0 tem dimensão finita podemos escrever $-B^0$ como a matriz diagonal

$$-B^0 = \begin{bmatrix} \lambda_0^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1}^0 \end{bmatrix}.$$

Seja $u^0(x, t)$ uma solução de (4.33). Então para cada t podemos escrever

$$u^0(x, t) = v_0^0(t)\phi_0^0(x) + v_1^0(t)\phi_1^0(x) + \dots + v_{n-1}^0(t)\phi_{n-1}^0(x) + w^0(x, t)$$

onde

$$v_i^0(t) = \int_0^1 u^0(x, t) \phi_i^0(x) dx \text{ para } i = 0, \dots, n-1$$

e

$$w^0(x, t) = u^0(x, t) - \sum_{i=0}^{n-1} v_i^0(t) \phi_i^0(x).$$

Portanto

$$\dot{v}_i^0(t) = \lambda_i^0 v_i^0(t) + \langle h_0(u^0), \phi_i^0 \rangle, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (4.34)$$

Também como acima obtemos

$$z_t^0 + \hat{A}_0 z^0 = h_0(u^0) - \sum_{i=0}^{n-1} \langle h_0(u^0), \phi_i^0 \rangle \phi_i^0. \quad (4.35)$$

Escrevendo $v^0 = (v_0^0, \dots, v_{n-1}^0)$ e $u^0 = (v^0, z^0)$ de (4.34) e (4.35) obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{v}^0 + B_n^0 v^0 &= g_n^0(v^0, z^0) \\ z_t^0 + \hat{A}_0 z^0 &= f_n^0(v^0, z^0) \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde g_n^0 e f_n^0 são dadas por

$$g_n^0(v^0, z^0) = (\langle h_0(u^0), \phi_0^0 \rangle, \dots, \langle h_0(u^0), \phi_{n-1}^0 \rangle)^\top \quad (4.37)$$

$$f_n^0(v^0, z^0) = h_0(u^0) - \sum_{i=0}^{n-1} \langle h_0(u^0), \phi_i^0 \rangle \phi_i^0. \quad (4.38)$$

Teorema 4.10

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, suaves com derivadas limitadas. Então, se n é suficientemente grande, existe uma variedade invariante suave exponencialmente atratora,

$$S_n^0 = \{(\sigma_0(y), y) : y \in \mathbb{R}^n\}$$

para (4.36). O fluxo sobre S_n^0 é dado por $u(x, t) = (v(t), \sigma_0(v(t)))$ onde v é solução de

$$\dot{v} + B_n^0 v = g_n^0(v, \sigma_0(v)). \quad (4.39)$$

Além disso, $s_0(n) = ||| \sigma_n^0 ||| = \sup_{v \in W^0} \|\sigma_0(v)\|$ e a constante de Lipschitz, $l_0(n)$ de σ_0 convergem para zero quando $n \rightarrow +\infty$.

Demonstração

Sejam $\beta(n) = -\lambda_n^0$ e $\rho(n) = -\lambda_{n-1}^0$. Da convergência dos autovalores obtida no Teorema 4.5 e do fato que $\lambda_{n-1}^\varepsilon - \lambda_n^\varepsilon \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, segue que $\beta(n) - \rho(n) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$. O resultado segue do Teorema 4.3 com L_f e L_g iguais a constante de Lipschitz de h_0 e N_f e N_g iguais a uma cota superior de h_0 . $\square$

5

Equivalência Topológica

Considere os problemas

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = (p_\varepsilon(x)u_x^\varepsilon)_x + c(x)u^\varepsilon + f(u^\varepsilon), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \bar{n}_\varepsilon} + b(x)u^\varepsilon = g(u^\varepsilon), & x \in \{0, 1\} \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

e

$$\begin{cases} u_t = (p(x)u_x)_x + c(x)u + f(u), & x \in \Omega_1 \\ \dot{u}_{\Omega_0,i}(t) = \frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)u_x(b_i^+, t) - p(a_i)u_x(a_i^-, t)] + \hat{c}_i u_{\Omega_0,i}(t) + f(u_{\Omega_0,i}(t)), & i = 1, \dots, m \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + b(x)u = g(u), & x \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (P_0)$$

onde $\hat{c}_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} c(x) dx$.

Neste capítulo provaremos que o fluxo de (P_ε) sobre o atrator $\mathcal{A}_\varepsilon$ e o fluxo do problema limite (P_0) sobre o atrator $\mathcal{A}_0$ são topologicamente equivalentes. Como vimos no Capítulo 4, basta verificarmos a equivalência topológica para os fluxos dos problemas truncados.

Em todo este capítulo consideraremos n suficientemente grande fixado, de modo que as conclusões dos Teoremas 4.9 e 4.10 se verifiquem.

Como o subespaço W^ε , definido em (4.25), é de dimensão finita consideraremos as funções definidas em W^ε como funções em $\mathbb{R}^n$. Também durante este capítulo denotaremos $X = W_\varepsilon^\perp$.

Com n fixado como acima, escrevemos problema (P_ε) na forma

$$\begin{aligned}\dot{v}^\varepsilon + B_n^\varepsilon v^\varepsilon &= g_n^\varepsilon(v^\varepsilon, w^\varepsilon) \\ w_t^\varepsilon + \hat{A}_\varepsilon w^\varepsilon &= f_n^\varepsilon(v^\varepsilon, w^\varepsilon)\end{aligned}$$

onde g_n^ε e f_n^ε são dadas por

$$\begin{aligned}g_n^\varepsilon(v^\varepsilon, w^\varepsilon) &= (\langle h(u^\varepsilon), \phi_0^\varepsilon \rangle, \dots, \langle h(u^\varepsilon), \phi_{n-1}^\varepsilon \rangle)^\top \\ f_n^\varepsilon(v^\varepsilon, w^\varepsilon) &= h(u^\varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \langle h(u^\varepsilon), \phi_i^\varepsilon \rangle \phi_i^\varepsilon.\end{aligned}$$

Analogamente escrevemos (P_0) como

$$\begin{aligned}\dot{v}^0 + B_n^0 v^0 &= g_n^0(v^0, z^0) \\ z_t^0 + \hat{A}_0 z^0 &= f_n^0(v^0, z^0)\end{aligned}$$

onde g_n^0 e f_n^0 são dadas por

$$\begin{aligned}g_n^0(v^0, z^0) &= (\langle h_0(u^0), \phi_0^0 \rangle, \dots, \langle h_0(u^0), \phi_{n-1}^0 \rangle)^\top \\ f_n^0(v^0, z^0) &= h_0(u^0) - \sum_{i=0}^{n-1} \langle h_0(u^0), \phi_i^0 \rangle \phi_i^0.\end{aligned}$$

Segue da demonstração do Teorema 4.3 que a variedade invariante do problema (P_ε) é gráfico de uma função $\sigma_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow X$, ponto fixo da aplicação

$$G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon)(\eta) = \int_{-\infty}^0 e^{\hat{A}_\varepsilon s} f^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) ds \quad (5.1)$$

onde $y_\varepsilon(s, \eta)$ é solução da equação

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -B^\varepsilon y + g^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y), y), & t < 0 \\ y(0) = \eta. \end{cases} \quad (5.2)$$

Analogamente, a variedade invariante do problema (P_0) é gráfico de uma função $\sigma_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow X$, ponto fixo da aplicação

$$G_0(\sigma_0)(\eta) = \int_{-\infty}^0 e^{\hat{A}_0 s} f^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) ds \quad (5.3)$$

onde $y_0(s, \eta)$ é solução da equação

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -B^0 y + g^0(\sigma_0(y), y), & t < 0 \\ y(0) = \eta. \end{cases} \quad (5.4)$$

Seja κ_ε a constante de contração de G_ε . Para $\eta \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned}\|\sigma_\varepsilon(\eta) - \sigma_0(\eta)\|_X &= \|G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon)(\eta) - G_0(\sigma_0)(\eta)\|_X \\ &\leq \kappa_\varepsilon \|\sigma_\varepsilon(\eta) - \sigma_0(\eta)\| + \|G_\varepsilon(\sigma_0)(\eta) - G_0(\sigma_0)(\eta)\|.\end{aligned}$$

Então

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon(\eta) - \sigma_0(\eta)\|_X \leq \frac{1}{1 - \kappa_\varepsilon} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|G_\varepsilon(\sigma_0)(\eta) - G_0(\sigma_0)(\eta)\|_X.$$

No que segue iremos estimar $\|G_\varepsilon(\sigma_0)(\eta) - G_0(\sigma_0)(\eta)\|_X$. Considere o operador, $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ onde

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \{\phi \in H^1(0, 1) : (p_\varepsilon(x)\phi_x)_x \in L^2(0, 1) \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x)\phi = 0 \text{ em } \{0, 1\}\}$$

e

$$A_\varepsilon \phi = -(p_\varepsilon(x)\phi_x)_x - c(x)\phi. \quad (4.13)$$

para $\phi \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$.

Seja $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L^2_{\Omega_0}(0, 1) \rightarrow L^2_{\Omega_0}(0, 1)$ onde

$$\mathcal{D}(A_0) = \{\phi \in H^1_{\Omega_0}(0, 1) : (p(x)\phi_x)_x \in L^2_{\Omega_0}(0, 1) \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} + b(x)\phi = 0 \text{ em } \{0, 1\}\}$$

com

$$A_0 \phi = -[(p(x)\phi_x)_x + c(x)\phi]\chi_{\Omega_1} - \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{b_i - a_i} [p(b_i)\phi_x(b_i^+) - p(a_i)\phi_x(a_i^-)] + \hat{c}_i \phi \right] \chi_{\Omega_{0,i}} \quad (4.14)$$

para $\phi \in \mathcal{D}(A_0)$, e $\hat{c}_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} c(x) dx$.

O próximo lema será utilizado nas demonstrações dos próximos resultados.

Lema 5.1

Considere os operadores $\hat{A}_\varepsilon = A_\varepsilon|_{\mathcal{D}(A_\varepsilon) \cap W_\varepsilon^\perp}$ e $\hat{A}_0 = A_0|_{\mathcal{D}(A_0) \cap W_0^\perp}$. Então existe $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$\|e^{-\hat{A}_\varepsilon t} u - e^{-\hat{A}_0 t} u\|_{L^2} \leq \theta(\varepsilon) t^{-\beta} e^{-at} \|u\|_{L^2}, \quad t > 0, \quad u \in L^2(0, 1), \quad (5.5)$$

onde $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração

Fixe $\beta \in (0, 1)$ e escolha a tal que $\lambda_n^0 < -a < 0$. Podemos escolher uma constante c , independente de ε , de modo que

$$\|e^{-\hat{A}_\varepsilon t} u\|_{L^2} \leq ce^{-at} \|u\|_{L^2}, \quad t \geq 0.$$

e

$$\|e^{-\hat{A}_0 t} u\|_{L^2} \leq ce^{-at} \|u\|_{L^2}, \quad t \geq 0.$$

Seja $\eta > 0$ um parâmetro pequeno. Se $t \in (0, \eta]$.

$$\begin{aligned} \|e^{-\hat{A}_\varepsilon t} u - e^{-\hat{A}_0 t} u\|_{L^2} &\leq \|e^{-\hat{A}_\varepsilon t} u\|_{L^2} + \|e^{-\hat{A}_0 t} u\|_{L^2} \\ &\leq 2c\eta^\beta t^{-\beta} e^{-at} \|u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Se $t > \eta$. Podemos escolher um número positivo $l = l(\eta)$ tal que se $z \geq l$ então $e^{-2zt} \leq \eta t^{-\beta} e^{-at}$, para $t \geq 0$. Como $\lambda_n^\varepsilon \rightarrow \lambda_n^0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $-\lambda_n^0 \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, existe $N = N(\eta)$ tal que $-\lambda_n^\varepsilon \geq l(\eta)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $n \geq N(\eta)$.

Da decomposição espectral de semigrupos lineares obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{-\hat{A}_\varepsilon t} u - e^{-\hat{A}_0 t} u\|_{L^2} &\leq \left\| \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^\varepsilon t} \langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^0 t} \langle u, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0 \right\|_{L^2} \\ &\quad + \left\| \sum_{k=N(\eta)+1}^{\infty} e^{\lambda_k^\varepsilon t} \langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{L^2} + \left\| \sum_{k=N(\eta)+1}^{\infty} e^{\lambda_k^0 t} \langle u, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0 \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N(\eta)+1}^{\infty} e^{\lambda_k^\varepsilon t} \langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{L^2} &\leq \sum_{k=N(\eta)+1}^{\infty} e^{2\lambda_k^\varepsilon t} |\langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle|^2 \\ &\leq \eta t^{-\beta} e^{-at} \|u\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

e analogamente,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N(\eta)+1}^{\infty} e^{\lambda_k^0 t} \langle u, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0 \right\|_{L^2} &\leq \sum_{k=N(\eta)+1}^{\infty} e^{2\lambda_k^0 t} |\langle u, \phi_k^0 \rangle|^2 \\ &\leq \eta t^{-\beta} e^{-at} \|u\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^\varepsilon t} \langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^0 t} \langle u, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0 \right\|_{L^2} &\leq \left\| \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^\varepsilon t} \langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - e^{-\lambda_k^0 t} \langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{L^2} \\
&\quad + \left\| \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^0 t} \langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^0 t} \langle u, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0 \right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{k=n}^{N(\eta)} |e^{\lambda_k^\varepsilon t} - e^{\lambda_k^0 t}| |\langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle| + \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^0 t} \|\langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - \langle u, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0\|.
\end{aligned}$$

Para cada $k = 1, \dots, N(\eta)$, existe $\xi_k \in (\lambda_k^\varepsilon, \lambda_k^0)$ tal que $|e^{\lambda_k^\varepsilon t} - e^{\lambda_k^0 t}| \leq t e^{\xi_k t} |\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0|$.

Logo

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^\varepsilon t} \langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{\lambda_k^0 t} \langle u, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0 \right\|_{L^2} &\leq \sum_{k=n}^{N(\eta)} t e^{\xi_k t} |\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0| \|u\|_{L^2} \\
&\quad + \sum_{k=n}^{N(\eta)} e^{-\lambda_k^0 t} (\|\langle u, \phi_k^\varepsilon \rangle (\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0)\| + \|\langle u, \phi_k^\varepsilon - \phi_k^0 \rangle \phi_k^0\|) \\
&\leq \sum_{k=n}^{N(\eta)} t e^{\lambda_k^0 t} |\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0| \|u\|_{L^2} + \sum_{k=n}^{N(\eta)} 2 e^{\lambda_k^0 t} \|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\| \|u\|_{L^2} \\
&\leq \eta t^{-\beta} e^{-at} \left(\sum_{k=n}^{N(\eta)} |\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0| + \sum_{k=n}^{N(\eta)} \|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\| \right) \|u\|_{L^2}. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Segue de (5.6), (5.7) e (5.8) que

$$\|e^{\hat{A}_\varepsilon t} u - e^{\hat{A}_0 t} u\|_{L^2} \leq \eta t^{-\beta} e^{-at} \tilde{\theta}(\varepsilon) + 2\eta t^{-\beta} e^{-at} \|u\|_{L^2}, \quad t > \eta,$$

$$\text{onde } \tilde{\theta}(\varepsilon) = \sum_{k=n}^{N(\eta)} |\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0| + \sum_{k=n}^{N(\eta)} \|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\|.$$

Portanto,

$$\|e^{-\hat{A}_\varepsilon t} u - e^{-\hat{A}_0 t} u\|_{L^2} \leq \theta(\varepsilon) t^{-\beta} e^{-at} \|u\|_{L^2}, \quad t > 0,$$

onde

$$\theta(\varepsilon) = \max\{2c\eta^\beta, 2\eta + \tilde{\theta}(\varepsilon)\} \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

5.1 C^0 -Proximidade das Variedades Invariantes

Nesta seção mostraremos a C^0 -proximidade das variedades invariantes dos problemas (P_ε) e (P_0) truncados. Portanto as funções f e g são limitadas e satisfazem uma condição de Lipschitz em todo o espaço.

Teorema 5.2

Seja $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Suponha que $f^\varepsilon, g^\varepsilon : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow L^2(0, 1)$ são funções satisfazendo

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon(x, y) - f^\varepsilon(z, w)\|_{L^2} &\leq L_{f^\varepsilon}(\|x - y\|_X + \|y - w\|_{\mathbb{R}^n}), \\ \|f^\varepsilon(x, y)\|_{L^2} &\leq N_{f^\varepsilon}, \\ \|g^\varepsilon(x, y) - g^\varepsilon(z, w)\|_{L^2} &\leq L_{g^\varepsilon}(\|x - y\|_{L^2} + \|y - w\|_{\mathbb{R}^n}), \\ \|g^\varepsilon(x, y)\|_{L^2} &\leq N_{g^\varepsilon}, \end{aligned}$$

para todo $(x, y), (z, w)$ em $X \times \mathbb{R}^n$.

Então $\sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon(\eta) - \sigma_0(\eta)\| \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração

Da demonstração do Teorema da variedade invariante, sabemos que fixados D, Δ, D_0 e Δ_0 as funções $\sigma_\varepsilon, \sigma_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ satisfazem

$$\begin{aligned} \|\sigma_\varepsilon\| &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon(y)\|_X \leq D, & \|\sigma_\varepsilon(y) - \sigma_\varepsilon(y')\|_X &\leq \Delta \|y - y'\|_{\mathbb{R}^n} \\ \|\sigma_0\| &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_0(y)\|_X \leq D_0, & \|\sigma_0(y) - \sigma_0(y')\|_X &\leq \Delta_0 \|y - y'\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \|G_\varepsilon(\sigma_0)(\eta) - G_0(\sigma_0)(\eta)\|_{L^2} &\leq \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} - e^{\hat{A}_0 s}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|f^\varepsilon(\sigma_0(y_\varepsilon(s)), y_\varepsilon(s))\|_{L^2} ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_0 s}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|f^\varepsilon(\sigma_0(y_\varepsilon(s)), y_\varepsilon(s)) - f^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2} ds \\ &\leq N_{f^\varepsilon} \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} - e^{\hat{A}_0 s}\|_{\mathcal{L}(L^2)} ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_0 s}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|f^\varepsilon(\sigma_0(y_\varepsilon(s)), y_\varepsilon(s)) - f^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2} ds. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Vamos estimar cada uma das integrais em (5.9). Segue do Lema 5.1 que

$$\int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} - e^{\hat{A}_0 s}\|_{\mathcal{L}(L^2)} ds \leq \theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 (-s)^{-\beta} e^{as} ds = \theta(\varepsilon) a^{\beta-1} \Gamma(1-\beta), \quad (5.10)$$

onde $\beta \in (0, 1)$, $\lambda_n^0 < -a < 0$ e $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Da definição para f^ε , f^0 , g^ε e g^0 em (4.29), (4.30), (4.37) e (4.38) temos

$$\|f^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s)) - f^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\| \leq 2L \sum_{j=0}^{n-1} \|\phi_j^\varepsilon - \phi_j^0\|_X,$$

e

$$\|g^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s)) - g^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\| \leq L \sum_{j=0}^{n-1} \|\phi_j^\varepsilon - \phi_j^0\|_X.$$

para alguma constante $L > 0$.

Então

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_0 s}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|f^\varepsilon(\sigma_0(y_\varepsilon(s)), y_\varepsilon(s)) - f^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2} ds \\ & \leq c_0 \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} [\|f^\varepsilon(\sigma_0(y_\varepsilon(s)), y_\varepsilon(s)) - f^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2} \\ & \quad + \|(f^\varepsilon - f^0)(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2}] ds \\ & \leq c_0 L_{f^\varepsilon} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} [\|\sigma_0(y_\varepsilon(s)) - \sigma_0(y_0(s))\|_X + \|y_\varepsilon(s) - y_0(s)\|_{\mathbb{R}^n}] ds \\ & \quad + c_0 \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \|f^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s)) - f^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2} ds \\ & \leq c_0 L_{f^\varepsilon} (1 + \Delta_0) \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \|y_\varepsilon(s) - y_0(s)\|_{\mathbb{R}^n} ds + \frac{2L}{-\lambda_n^0} c_0 \sum_{j=0}^{n-1} \|\phi_j^\varepsilon - \phi_j^0\|_X. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Usando a fórmula da variação das constantes, obtemos

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon(t) - y_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} & \leq \|(e^{-B^\varepsilon t} - e^{-B^0 t})\eta\|_{\mathbb{R}^n} \\ & \quad + \int_t^0 \|e^{-B^\varepsilon(t-s)} - e^{-B^0(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|g^\varepsilon(\sigma_0(y_\varepsilon(s)), y_\varepsilon(s))\|_{L^2} ds \\ & \quad + \int_t^0 \|e^{-B^0(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|g^\varepsilon(\sigma_0(y_\varepsilon(s)), y_\varepsilon(s)) - g^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2} ds \\ & \quad + \int_t^0 \|e^{-B^0(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|g^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s)) - g^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_X ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|y_\varepsilon(t) - y_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq M \sum_{j=0}^{n-1} |e^{\lambda_j^\varepsilon t} - e^{\lambda_j^0 t}| \|\eta\| + MN_{g^\varepsilon} \int_t^0 \sum_{j=0}^{n-1} |e^{\lambda_j^\varepsilon(t-s)} - e^{\lambda_j^0(t-s)}| ds \\
&\quad + M \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \|g^\varepsilon(\sigma_0(y_\varepsilon(s)), y_\varepsilon(s)) - g^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2} ds \\
&\quad + M \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \|g^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s)) - g^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2} ds \\
&\leq M \sum_{j=0}^{n-1} |e^{\lambda_j^\varepsilon t} - e^{\lambda_j^0 t}| \|\eta\| + MN_{g^\varepsilon} \int_t^0 \sum_{j=0}^{n-1} |e^{\lambda_j^\varepsilon(t-s)} - e^{\lambda_j^0(t-s)}| ds \\
&\quad + ML_{g^\varepsilon}(1 + \Delta_0) \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \|y_\varepsilon(s) - y_0(s)\| ds \\
&\quad + M \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \|g^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s)) - g^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_{L^2} ds,
\end{aligned}$$

Para cada $j = 0, \dots, n-1$ existe $\xi_j^\varepsilon \in (\lambda_j^\varepsilon, \lambda_j^0)$ tal que

$$|e^{\lambda_j^\varepsilon t} - e^{\lambda_j^0 t}| \leq |t| e^{\xi_j^\varepsilon t} |\lambda_j^\varepsilon - \lambda_j^0|.$$

Seja $\delta > 0$ tal que $\lambda_{n-1}^0 - \delta < 0 < \lambda_{n-1}^0 - \delta/2$. Como $\lambda_j^\varepsilon \rightarrow \lambda_j^0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\xi_j^\varepsilon \in (\lambda_j^0 - \delta/2, \lambda_j^0 + \delta/2),$$

para $j = 0, \dots, n-1$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$. De agora em diante estaremos considerando este intervalo.

Se $\lambda(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n-1} |\lambda_j^\varepsilon - \lambda_j^0|$, para $t < 0$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} |e^{\lambda_j^\varepsilon t} - e^{\lambda_j^0 t}| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |t| e^{\xi_j^\varepsilon t} |\lambda_j^\varepsilon - \lambda_j^0| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |t| e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta/2)t} |\lambda_j^\varepsilon - \lambda_j^0| \\
&\leq c_1 e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta)t} \lambda(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{5.12}$$

e

$$\int_t^0 \sum_{j=0}^{n-1} |e^{\lambda_j^\varepsilon(t-s)} - e^{\lambda_j^0(t-s)}| ds \leq c_1 \frac{e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta)t}}{\delta - \lambda_{n-1}^0} \lambda(\varepsilon).$$

Com isto obtemos

$$\begin{aligned}
\|y_\varepsilon(t) - y_0(t)\| &\leq c_1 M \|\eta\| e^{\lambda_{n-1}^0 t} e^{-\delta t} \lambda(\varepsilon) + c_1 M N_{g^\varepsilon} \frac{1}{\delta - \lambda_{n-1}^0} e^{\lambda_{n-1}^0 t} e^{-\delta t} \lambda(\varepsilon) \\
&\quad + ML \sum_{j=0}^{n-1} \|\phi_j^\varepsilon - \phi_j^0\| \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} ds + ML_{g^\varepsilon} (1 + \Delta_0) \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \|y_\varepsilon(s) - y_0(s)\| ds \\
&\leq c_1 M \|\eta\| e^{\lambda_{n-1}^0 t} e^{-\delta t} \lambda(\varepsilon) + \frac{c_1 M N_{g^\varepsilon}}{\delta - \lambda_{n-1}^0} e^{\lambda_{n-1}^0 t} e^{-\delta t} \lambda(\varepsilon) \\
&\quad + \frac{ML}{\delta - \lambda_{n-1}^0} \sum_{j=0}^{n-1} \|\phi_j^\varepsilon - \phi_j^0\| e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta)t} + ML_{g^\varepsilon} (1 + \Delta_0) \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \|y_\varepsilon(s) - y_0(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$e^{-\lambda_{n-1}^0 t} \|y_\varepsilon(t) - y_0(t)\| \leq a(\varepsilon) e^{-\delta t} + ML_{g^\varepsilon} (1 + \Delta_0) \int_t^0 e^{-\lambda_{n-1}^0 s} \|y_\varepsilon(s) - y_0(s)\| ds,$$

onde,

$$a(\varepsilon) := c_1 M \left(1 + \frac{N_{g^\varepsilon}}{\delta - \lambda_{n-1}^0} \right) \lambda(\varepsilon) + \frac{ML}{\delta - \lambda_{n-1}^0} \sum_{j=0}^{n-1} \|\phi_j^\varepsilon - \phi_j^0\|.$$

Segue da Desigualdade de Gronwall Generalizada que

$$\|y_\varepsilon(t, \eta) - y_0(t, \eta)\| \leq a(\varepsilon) e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta - ML_{g^\varepsilon}(1+\Delta_0))t}, \quad (5.13)$$

para $t < 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \|y_\varepsilon(s) - y_0(s)\| ds &\leq a(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - \delta - ML_{g^\varepsilon}(1+\Delta_0))s} ds \\
&= a(\varepsilon) \frac{1}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - \delta - ML_{g^\varepsilon}(1 + \Delta_0)}. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Substituindo (5.14) em (5.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_0 s}\|_{\mathcal{L}(X)} \|f^\varepsilon(\sigma_0(y_\varepsilon(s)), y_\varepsilon(s)) - f^0(\sigma_0(y_0(s)), y_0(s))\|_X ds &\leq \\
&\frac{L_{f^\varepsilon}(1 + \Delta_0) a(\varepsilon) c_0}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - \delta - ML_{g^\varepsilon}(1 + \Delta_0)} + \frac{2Lc_0}{-\lambda_n^0} \sum_{j=0}^{n-1} \|\phi_j^\varepsilon - \phi_j^0\|. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Com as estimativas obtidas em (5.15) e (5.10) temos

$$\begin{aligned}
\|G_\varepsilon(\sigma_0)(\eta) - G_0(\sigma_0)(\eta)\| &\leq N_{f^\varepsilon} a^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta) \theta(\varepsilon) + \frac{L_{f^\varepsilon}(1 + \Delta_0) a(\varepsilon) c_0}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - \delta - ML_{g^\varepsilon}(1 + \Delta_0)} \\
&\quad + \frac{2Lc_0}{-\lambda_n^0} \sum_{j=0}^{n-1} \|\phi_j^\varepsilon - \phi_j^0\|_X.
\end{aligned}$$

Usando a convergência das autofunções e o fato que $a(\varepsilon) \rightarrow 0$ e $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, segue que

$$\sup_{\eta \in B} \|G_\varepsilon(\sigma_0)(\eta) - G_0(\sigma_0)(\eta)\| \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

5.2 C^1 -Proximidade das Variedades Invariantes

Para mostrar a C^1 -proximidade das variedades invariantes considere o operador $\tilde{G}_\varepsilon : (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X))$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\varepsilon(\psi)(\eta) &= \int_{-\infty}^0 e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \psi(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) ds, \end{aligned}$$

onde $\sigma_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ é ponto fixo de (5.1) e $y_\varepsilon(s, \eta)$ é solução de (5.2).

Como no Teorema da Variedade Invariante pode-se mostrar que $\tilde{G}_\varepsilon$ é uma contração e o seu único ponto fixo é $D\sigma_\varepsilon(\eta)$.

Também o operador $\tilde{G}_0 : (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X))$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\psi)(\eta) &= \int_{-\infty}^0 e^{\hat{A}_0 s} f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 e^{\hat{A}_0 s} f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \psi(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) ds, \end{aligned}$$

onde $\sigma_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ é ponto fixo de (5.3) e $y_0(s, \eta)$ é solução de (5.4). Pode-se mostrar que $\tilde{G}_0$ é uma contração e o seu único ponto fixo é $D\sigma_0(\eta)$.

Seja $\tilde{\kappa}_\varepsilon$ a constante de contração de $\tilde{G}_\varepsilon$. Para $\eta \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)} \\ &\leq \left\| \tilde{G}_\varepsilon \left(\frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta} \right) (\eta) - \tilde{G}_\varepsilon \left(\frac{d\sigma_0}{d\eta} \right) (\eta) \right\| + \left\| \tilde{G}_\varepsilon \left(\frac{d\sigma_0}{d\eta} \right) (\eta) - \tilde{G}_0 \left(\frac{d\sigma_0}{d\eta} \right) (\eta) \right\| \\ &\leq \tilde{\kappa}_\varepsilon \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\| + \left\| \tilde{G}_\varepsilon \left(\frac{d\sigma_0}{d\eta} \right) (\eta) - \tilde{G}_0 \left(\frac{d\sigma_0}{d\eta} \right) (\eta) \right\|. \end{aligned}$$

Então,

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)} \leq \frac{1}{1 - \tilde{\kappa}_\varepsilon} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\| \tilde{G}_\varepsilon \left(\frac{d\sigma_0}{d\eta} \right) (\eta) - \tilde{G}_0 \left(\frac{d\sigma_0}{d\eta} \right) (\eta) \right\|.$$

Para obter a C^1 -proximidade de σ_ε e σ_0 basta mostrarmos que $\tilde{G}_\varepsilon$ e $\tilde{G}_0$ estão próximas.

Teorema 5.3

Seja $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Suponha que $f^\varepsilon, f^0, g^\varepsilon, g^0 : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow L^2(0, 1)$ são funções satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{aligned} \|f_x^\varepsilon(x, y) - f_x^\varepsilon(z, w)\|_{\mathcal{L}(X, L^2)} &\leq L_{f_x^\varepsilon}(\|x - z\|_X + \|y - w\|_{\mathbb{R}^n}), \\ \|f_x^\varepsilon(x, y)\|_{\mathcal{L}(X, L^2)} &\leq N_{f_x^\varepsilon}, \\ \|f_y^\varepsilon(x, y) - f_y^\varepsilon(z, w)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2)} &\leq L_{f_y^\varepsilon}(\|x - y\|_X + \|y - w\|_{\mathbb{R}^n}), \\ \|f_y^\varepsilon(x, y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2)} &\leq N_{f_y^\varepsilon}, \\ \|g_x^\varepsilon(x, y) - g_x^\varepsilon(z, w)\|_{\mathcal{L}(X, L^2)} &\leq L_{g_x^\varepsilon}(\|x - z\|_X + \|y - w\|_{\mathbb{R}^n}), \\ \|g_x^\varepsilon(x, y)\|_{\mathcal{L}(X, L^2)} &\leq N_{g_x^\varepsilon}, \\ \|g_y^\varepsilon(x, y) - g_y^\varepsilon(z, w)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2)} &\leq L_{g_y^\varepsilon}(\|x - y\|_X + \|y - w\|_{\mathbb{R}^n}), \\ \|g_y^\varepsilon(x, y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2)} &\leq N_{g_y^\varepsilon}, \\ \|f_x^0(x, y)\|_{\mathcal{L}(X, L^2)} &\leq N_{f_x^0}, \\ \|f_y^0(x, y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2)} &\leq N_{f_y^0}, \\ \|g_x^0(x, y)\|_{\mathcal{L}(X, L^2)} &\leq N_{g_x^0}, \\ \|g_y^0(x, y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2)} &\leq N_{g_y^0}. \end{aligned}$$

Suponha que $f^\varepsilon \rightarrow f^0$ e $g^\varepsilon \rightarrow g^0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, com convergência na norma $C^1(X \times \mathbb{R}^n, L^2(0, 1))$.

Então, $\sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|D\sigma_\varepsilon(\eta) - D\sigma_0(\eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)} \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração

Pela observação acima basta estimarmos $\|\tilde{G}_\varepsilon(D\sigma_0)(\eta) - \tilde{G}_0(D\sigma_0)(\eta)\|$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Como na demonstração do Teorema 4.3 podemos supor que existem $\tilde{D}$, $\tilde{\Delta}$, $\tilde{D}_0$ e $\tilde{\Delta}_0$ tais que

$$\begin{aligned} \|D\sigma_\varepsilon(\eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)} &\leq \tilde{D}, \quad \|D\sigma_\varepsilon(\eta_1) - D\sigma_\varepsilon(\eta_2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)} \leq \tilde{\Delta}\|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathbb{R}^n} \\ \|D\sigma_0(\eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)} &\leq \tilde{D}_0, \quad \|D\sigma_0(\eta_1) - D\sigma_0(\eta_2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)} \leq \tilde{\Delta}_0\|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{G}_\varepsilon(D\sigma_0)(\eta) - \tilde{G}_0(D\sigma_0)(\eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)} \leq \\
& \int_{-\infty}^0 \left\| e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right. \\
& \quad \left. - e^{\hat{A}_0 s} f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& + \int_{-\infty}^0 \left\| e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) D\sigma_0(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right. \\
& \quad \left. - e^{\hat{A}_0 s} f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) D\sigma_0(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Vamos estimar cada uma das integrais em (5.16).

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 \left\| e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right. \\
& \quad \left. - e^{\hat{A}_0 s} f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \leq \int_{-\infty}^0 \left\| e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right. \\
& \quad \left. - e^{\hat{A}_0 s} f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \quad + \int_{-\infty}^0 \left\| e^{\hat{A}_0 s} \left\| f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| \right\| ds \\
& \leq \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} - e^{\hat{A}_0 s}\| \left\| f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \quad + \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_0 s}\| \left\| f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right. \\
& \quad \left. - f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \leq N_{f_y^\varepsilon} \theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 (-s)^{-\beta} e^{as} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \quad + c_0 \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \left[\left\| f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - f_y^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| \right. \\
& \quad \left. + \left\| f_y^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) - f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \right\| \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| \right] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right) \| \Big] ds \\
& \leq N_{f_y^\varepsilon} \theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 (-s)^{-\beta} e^{as} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \quad + c_0 L_{f_y^\varepsilon} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \left[(1 + \Delta) \|y_\varepsilon(s, \eta) - y_0(s, \eta)\| \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)(y_0(s, \eta))\| \right] \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \quad + c_0 \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \|f_y^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \\
& \quad \quad \quad - f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta))\| \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \quad + c_0 N_{f_y^0} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Para concluirmos a estimativa acima precisamos estimar

$$\left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\|.$$

Como $y_\varepsilon(s, \eta)$ é solução de (5.2), segue que $\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta)$ satisfaz,

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial y}(t, y_\varepsilon(t, 0, \eta))z \\ \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(0, \eta) = I \end{cases}$$

onde $F^\varepsilon(t, y(t, \eta)) = -B^\varepsilon y + g^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y(t, \eta)), y(t, \eta))$. Segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(t, \eta) \right\| & \leq \|e^{-B^\varepsilon t}\| + \int_t^0 \|e^{-B^\varepsilon(t-s)}\| \left[\|g_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta))\| \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \right\| \right. \\
& \quad \left. + \|g_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta))\| \right] \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \leq M e^{\lambda_{n-1}^\varepsilon t} + M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}) \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^\varepsilon(t-s)} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds
\end{aligned}$$

Segue da Desigualdade de Gronwall Generalizada que

$$\left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(t, \eta) \right\| \leq M e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))t}. \tag{5.18}$$

Analogamente, como $y_0(s, \eta)$ é solução de (5.4) $\frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)$ satisfaz

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{\partial F^0}{\partial y}(t, y_0(t, \eta))z \\ \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(0, \eta) = I \end{cases}$$

onde $F^0(t, y(t, \eta)) = -B^0 y + g^0(\sigma_0(y(t, \eta)), y(t, \eta))$ e portanto

$$\left\| \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(t, \eta) \right\| \leq M e^{(\lambda_{n-1}^0 - M(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0}))t}. \tag{5.19}$$

Também temos,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(t, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(t, \eta) \right\| &\leq \| (e^{-B^\varepsilon t} - e^{-B^0 t}) \| \\
&+ \int_t^0 \| e^{-B^\varepsilon(t-s)} g_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(s, \eta) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - e^{-B^0(t-s)} g_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \| ds \\
&+ \int_t^0 \| e^{-B^\varepsilon(t-s)} g_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - e^{-B^0(t-s)} g_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \| ds. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Vamos estimar cada uma das integrais em (5.20). Temos

$$\begin{aligned}
&\int_t^0 \| e^{-B^\varepsilon(t-s)} g_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(s, \eta) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - e^{-B^0(t-s)} g_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \| ds \\
&\leq \int_t^0 \| e^{-B^\varepsilon(t-s)} g_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - e^{-B^0(t-s)} g_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \| ds \\
&+ \int_t^0 e^{-B^0(t-s)} \| g_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - g_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \| ds \\
&+ \int_t^0 e^{-B^0(t-s)} \| g_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - g_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \| ds \\
&+ \int_t^0 e^{-B^0(t-s)} \| g_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - g_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \| ds \\
&+ \int_t^0 e^{-B^0(t-s)} \| g_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - g_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \| ds \\
&+ \int_t^0 e^{-B^0(t-s)} \| g_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - g_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} \int_t^0 \sum_{j=0}^{n-1} |e^{\lambda_j^\varepsilon(t-s)} - e^{\lambda_j^0(t-s)}| \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| \\
&\quad + M\tilde{D}L_{g_x^\varepsilon} \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} [(1 + \Delta) \|y_\varepsilon(s, \eta) - y_0(s, \eta)\| \\
&\quad \quad \quad + \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)(y_0(s, \eta))\|] \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
&\quad + M\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
&\quad + MN_{g_x^\varepsilon} \tilde{\Delta} \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \|y_\varepsilon(s, \eta) - y_0(s, \eta)\| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
&\quad + MN_{g_x^\varepsilon} \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(y_0(s, \eta)) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \right\| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
&\quad + M\tilde{D}_0 \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \|g_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \\
&\quad \quad \quad - g_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta))\| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Para a segunda integral em (5.20) temos

$$\begin{aligned}
&\int_t^0 \|e^{-B^\varepsilon(t-s)} g_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - e^{-B^0(t-s)} g_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)\| ds \\
&\leq \int_t^0 \left[\|e^{-B^\varepsilon(t-s)} g_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right. \\
&\quad - e^{-B^0(t-s)} g_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta)\| \\
&\quad + \|e^{-B^0(t-s)} g_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - e^{-B^0(t-s)} g_y^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta)\| \\
&\quad + \|e^{-B^0(t-s)} g_y^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - e^{-B^0(t-s)} g_y^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)\| \\
&\quad + \|e^{-B^0(t-s)} g_y^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad \quad \quad - e^{-B^0(t-s)} g_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)\| \Big] ds \\
&\leq MN_{g_y^\varepsilon} \int_t^0 \sum_{j=0}^{n-1} |e^{\lambda_j^\varepsilon(t-s)} - e^{\lambda_j^0(t-s)}| \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ML_{g_y^\varepsilon} \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} [(1+\Delta) \|y_\varepsilon(s, \eta) - y_0(s, \eta)\| \\
& \quad + \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)(y_0(s, \eta))\|] \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& + MN_{g_y^\varepsilon} \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& + M \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \|g_y^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \\
& \quad - g_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta))\| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas (5.12), (5.13), (5.18) e (5.19) nas estimativas acima obtemos

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(t, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(t, \eta) \right\| \leq c_1 M e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta)t} \lambda(\varepsilon) \\
& + M^2 (\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon}) c_1 \lambda(\varepsilon) \int_t^0 e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta)(t-s)} e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& + M^2 (\tilde{D}L_{g_x^\varepsilon} + L_{g_y^\varepsilon}) (1+\Delta) a(\varepsilon) \times \\
& \quad \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta - ML_{g_x^\varepsilon}(1+\Delta))s} e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& + M^2 (\tilde{D}L_{g_x^\varepsilon} + L_{g_y^\varepsilon}) \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon(\psi) - \sigma_0(\psi)\| \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& + M^2 N_{g_x^\varepsilon} \tilde{\Delta} a(\varepsilon) \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta - ML_{g_x^\varepsilon}(1+\Delta))s} e^{(\lambda_{n-1}^0 - M(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0}))s} ds \\
& + M^2 N_{g_x^\varepsilon} \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\psi) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\psi) \right\| \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} e^{(\lambda_{n-1}^0 - M(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0}))s} ds \\
& + M^2 \tilde{D}_0 \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(g_x^\varepsilon - g_x^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} e^{(\lambda_{n-1}^0 - M(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0}))s} ds \\
& + M^2 \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(g_y^\varepsilon - g_y^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} e^{(\lambda_{n-1}^0 - M(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0}))s} ds \\
& + M (\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon}) \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Como $\lambda_{n-1}^0 - \delta < 0$, segue da convergência dos autovalores que para ε pequeno temos

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(t, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(t, \eta) \right\| \leq e^{\lambda_{n-1}^0 t} M c_1 e^{-\delta t} \lambda(\varepsilon) \\
& + M^2 (\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon}) c_1 \lambda(\varepsilon) e^{\lambda_{n-1}^0 t} \frac{e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - \delta - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))t}}{\delta - \lambda_{n-1}^\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M^2(\tilde{D}L_{g_x^\varepsilon} + L_{g_y^\varepsilon})(1 + \Delta)a(\varepsilon)e^{\lambda_{n-1}^0 t} \frac{e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - \delta - M(L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))t}}{\delta - \lambda_{n-1}^\varepsilon + M(L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))} \\
& + M^2(\tilde{D}L_{g_x^\varepsilon} + L_{g_y^\varepsilon})e^{\lambda_{n-1}^0 t} \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)\psi\| \frac{e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - \lambda_{n-1}^0 - M(N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))t}}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_{n-1}^\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))} \\
& + M^2N_{g_x^\varepsilon}\tilde{\Delta}a(\varepsilon)e^{\lambda_{n-1}^0 t} \frac{e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta - M(L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}))t}}{\delta - \lambda_{n-1}^0 + M(L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}))} \\
& + \frac{MN_{g_x^\varepsilon}e^{\lambda_{n-1}^0 t}}{N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}} \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\psi) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\psi) \right\| e^{-M(N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0})t} \\
& + M \left[\tilde{D}_0 \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(g_x^\varepsilon - g_x^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \right. \\
& \quad \left. + \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(g_y^\varepsilon - g_y^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \right] e^{\lambda_{n-1}^0 t} \frac{e^{-M(N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0})t}}{N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}} \\
& + M(\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon}) \int_t^0 e^{\lambda_{n-1}^0(t-s)} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Com esta estimativa obtemos

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda_{n-1}^0 t} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(t, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(t, \eta) \right\| & \leq M \left[\frac{Mc_1(\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon})\lambda(\varepsilon)}{\delta - \lambda_{n-1}^\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))} \right. \\
& + \frac{M(1 + \Delta)a(\varepsilon)(\tilde{D}L_{g_x^\varepsilon} + L_{g_y^\varepsilon})}{\delta - \lambda_{n-1}^\varepsilon + M(L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))} \\
& + M \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)\psi\| \frac{\tilde{D}L_{g_x^\varepsilon} + L_{g_y^\varepsilon}}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_{n-1}^\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))} \Big] \times \\
& \quad e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - 2\delta - M(L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))t} \\
& + \left[M \left[c_1\lambda(\varepsilon) + \frac{N_{g_x^\varepsilon}M\tilde{\Delta}a(\varepsilon)}{\delta - \lambda_{n-1}^0 + M(L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}))} \right. \right. \\
& + \frac{1}{N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}} \left(\tilde{D}_0 \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(g_x^\varepsilon - g_x^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \right. \\
& \quad \left. \left. + \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(g_y^\varepsilon - g_y^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \right) \right] \\
& + \frac{MN_{g_x^\varepsilon}}{N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\| \Big] e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta - M(L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}))t} \\
& + (\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon})M \int_t^0 e^{-\lambda_{n-1}^0 s} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_{n-1}^0 t} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(t, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(t, \eta) \right\| \\ \leq \tilde{\alpha}(\varepsilon) e^{-M_\varepsilon t} + (\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon})M \int_t^0 e^{-\lambda_{n-1}^0 s} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\alpha}(\varepsilon) = b(\varepsilon) + c(\varepsilon) + \frac{MN_{g_x^\varepsilon}}{N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\| \quad (5.21)$$

e as funções $b(\varepsilon)$ e $c(\varepsilon)$ são dadas por

$$\begin{aligned} b(\varepsilon) = M \left[\frac{Mc_1(\tilde{D}N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon})\lambda(\varepsilon)}{\delta - \lambda_{n-1}^\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon})} \right. \\ + \frac{M(1 + \Delta)(\tilde{D}L_{g_x^\varepsilon} + L_{g_y^\varepsilon})a(\varepsilon)}{\delta - \lambda_{n-1}^\varepsilon + M(L_{g_x^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon})} \\ \left. + \frac{M\tilde{D}L_{g_x^\varepsilon} + L_{g_y^\varepsilon}}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_{n-1}^\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon})} \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)\psi\| \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) = M \left[c_1\lambda(\varepsilon) + \frac{N_{g_x^\varepsilon}M\tilde{\Delta}a(\varepsilon)}{\delta - \lambda_{n-1}^0 + M(L_{g_x^\varepsilon}(1 + \Delta) + N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0})} \right. \\ \left. + \frac{1}{N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}} \left(\tilde{D}_0 \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(g_x^\varepsilon - g_x^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| + \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(g_y^\varepsilon - g_y^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \right) \right] \end{aligned}$$

e

$$M_\varepsilon = \frac{3\delta}{2} + ML_{g_x^\varepsilon}(1 + \Delta) + M \max \left\{ N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}, N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0} \right\}.$$

Segue da Desigualdade de Gronwall Generalizada que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(t, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(t, \eta) \right\| \\ \leq \left[b(\varepsilon) + c(\varepsilon) + \frac{MN_{g_x^\varepsilon}}{N_{g_x^0}\tilde{D}_0 + N_{g_y^0}} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\| \right] e^{(\lambda_{n-1}^0 - (M_\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon}\tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon})))t} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Utilizando as estimativas (5.18) e (5.22) a desigualdade (5.17) toma a seguinte

forma

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
& \quad - e^{\hat{A}_0 s} f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)\| ds \\
& \leq MN_{f_y^\varepsilon} \theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 (-s)^{-\beta} e^{as} e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& \quad + Mc_0 L_{f_y^\varepsilon} (1 + \Delta) a(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} e^{(\lambda_{n-1}^0 - \delta - ML_{g^\varepsilon}(1 + \Delta))s} e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& \quad + Mc_0 L_{f_y^\varepsilon} \int_{-\infty}^0 \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)y_0(s, \eta)\| e^{-\lambda_n^0 s} e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& \quad + Mc_0 \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(f_y^\varepsilon - f_y^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& \quad + c_0 N_{f_y^0} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& \leq MN_{f_y^\varepsilon} \theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 (-s)^{-\beta} e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon + a - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& \quad + Mc_0 L_{f_y^\varepsilon} (1 + \Delta) a(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 + \lambda_{n-1}^\varepsilon - \delta - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon} + L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta)))s} ds \\
& \quad + Mc_0 \left[L_{f_y^\varepsilon} \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)\psi\| + \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(f_y^\varepsilon - f_y^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \right] \times \\
& \quad \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - \lambda_n^0 - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& \quad + c_0 N_{f_y^0} \left[b(\varepsilon) + c(\varepsilon) + \frac{N_{g_x^\varepsilon}}{N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0}} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\| \right] \times \\
& \quad \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - (M_\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon})))s} ds.
\end{aligned}$$

Aumentando n , se necessário, de modo que $\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0$ seja suficientemente grande para que as integrais acima sejam convergentes, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_y^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{dy_\varepsilon}{d\eta}(s, \eta) \\
& \quad - e^{\hat{A}_0 s} f_y^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{dy_0}{d\eta}(s, \eta)\| ds \\
& \leq H_1(\varepsilon) + \frac{Mc_0 N_{f_y^0} N_{g_x^\varepsilon}}{(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0})(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - (M_\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon})))} \times \\
& \quad \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\|.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
H_1(\varepsilon) &= MN_{f_y^\varepsilon} \Gamma(1 - \beta) (\lambda_{n-1}^\beta - \lambda_n^0 - (M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}) - (a + \lambda_n^0)))^{\beta-1} \theta(\varepsilon) \\
&+ \frac{Mc_0 L_{f_y^\varepsilon} (1 + \Delta) a(\varepsilon)}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - \delta/2 - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon} + L_{g^\varepsilon} (1 + \Delta))} \\
&+ Mc_0 \left[L_{f_y^\varepsilon} \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)(\psi)\| + \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(f_y^\varepsilon - f_y^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \right] \times \\
&\quad \frac{1}{\lambda_{n-1}^\varepsilon - \lambda_n^0 - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon})} \\
&+ \frac{c_0 N_{f_y^0} [b(\varepsilon) + c(\varepsilon)]}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - (M_\varepsilon + M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))}.
\end{aligned}$$

Para a segunda integral em (5.16), temos

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - e^{\hat{A}_0 s} f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} - e^{\hat{A}_0 s}\| \|f_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta))\| \left\| \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \right\| \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_0 s}\| \|f_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - f_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta)\| ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_0 s}\| \|f_x^\varepsilon(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta)\| ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_0 s}\| \|f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)\| ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_0 s}\| \|f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \\
&\quad - f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)\| ds \\
&\leq \tilde{D}_0 N_{f_x^\varepsilon} \theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 (-s)^{-\beta} e^{as} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
&\quad + c_0 \tilde{D}_0 L_{f_x^\varepsilon} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} [(1 + \Delta) \|y_\varepsilon(s, \eta) - y_0(s, \eta)\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)(y_0(s, \eta))\| \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& + c_0 \tilde{D}_0 \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \|(f_x^\varepsilon - f_x^0)(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta))\| \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& + c_0 \tilde{D}_0 N_{f_x^0} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) - \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds \\
& + c_0 N_{f_x^0} \tilde{\Delta}_0 \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_n^0 s} \|y_\varepsilon(s, \eta) - y_0(s, \eta)\| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas encontradas em (5.13), (5.18), (5.19), e (5.22) obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
& \quad - e^{\hat{A}_0 s} f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)\| ds \\
& \leq M \tilde{D}_0 N_{f_x^\varepsilon} \theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 (-s)^{-\beta} e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon + a - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& \quad + M c_0 \tilde{D}_0 L_{f_x^\varepsilon} (1 + \Delta) a(\varepsilon) \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 + \lambda_{n-1}^\varepsilon - \delta - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon} + L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta)))s} ds \\
& \quad + M c_0 \tilde{D}_0 \left[L_{f_x^\varepsilon} \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)(\psi)\| + \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(f_x^\varepsilon - f_x^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \right] \times \\
& \quad \quad \quad \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda_{n-1}^\varepsilon - \lambda_n^0 - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}))s} ds \\
& \quad + c_0 \tilde{D}_0 N_{f_x^0} \int_{-\infty}^0 \tilde{\alpha}(\varepsilon) e^{(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - (M_\varepsilon + M(\tilde{D} N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon})))s} ds \\
& \quad + M c_0 \tilde{\Delta}_0 a(\varepsilon) N_{f_x^0} \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 + \lambda_{n-1}^0 - \delta - M(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0} + L_{g^\varepsilon}(1 + \Delta)))s} ds.
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\alpha}(\varepsilon) = b(\varepsilon) + c(\varepsilon) + \frac{M N_{g_x^\varepsilon}}{N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0}} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\|.$$

Calculando as integrais obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 \|e^{\hat{A}_\varepsilon s} f_x^\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon(s, \eta)), y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_\varepsilon(s, \eta)) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \eta}(s, \eta) \\
& \quad - e^{\hat{A}_0 s} f_x^0(\sigma_0(y_0(s, \eta)), y_0(s, \eta)) \frac{d\sigma_0}{d\eta}(y_0(s, \eta)) \frac{\partial y_0}{\partial \eta}(s, \eta)\| ds \\
& \leq H_2(\varepsilon) + \frac{c_0 \tilde{D}_0 N_{f_x^0} N_{g_x^\varepsilon} M}{(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0})(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - (M_\varepsilon + M(\tilde{D} N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon})))} \times \\
& \quad \quad \quad \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta) \right\|, \quad (5.24)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
H_2(\varepsilon) = & M\tilde{D}_0 N_{f_x^\varepsilon} \Gamma(1-\beta)(\lambda_{n-1}^\varepsilon - \lambda_n^0 - (M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon}) - (a + \lambda_n^0)))^{\beta-1} \theta(\varepsilon) \\
& + \frac{c_0 \tilde{D}_0 L_{f_x^\varepsilon} (1 + \Delta) a(\varepsilon)}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - \delta/2 - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon} + L_{g^\varepsilon} (1 + \Delta))} \\
& + M c_0 \tilde{D}_0 \left[L_{f_x^\varepsilon} \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(\sigma_\varepsilon - \sigma_0)(\psi)\| + \sup_{\psi \in \mathbb{R}^n} \|(f_x^\varepsilon - f_x^0)(\sigma_0(\psi), \psi)\| \right] \times \\
& \quad \frac{1}{\lambda_{n-1}^\varepsilon - \lambda_n^0 - M(N_{g_x^\varepsilon} \tilde{D} + N_{g_y^\varepsilon})} \\
& + \frac{c_0 \tilde{D}_0 N_{f_x^0} [b(\varepsilon) + c(\varepsilon)]}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - (M_\varepsilon + M(\tilde{D} N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon}))} \\
& + \frac{M c_0 \tilde{\Delta} a(\varepsilon) N_{f_x^0}}{\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - \delta/2 - M(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0} + L_{g^\varepsilon} (1 + \Delta))}.
\end{aligned}$$

Substituindo (5.23) e (5.24) em (5.16) obtemos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{G}_\varepsilon(\frac{d\sigma_0}{d\eta})(\eta) - \tilde{G}_0(\frac{d\sigma_0}{d\eta})(\eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)} & \leq H_1(\varepsilon) + H_2(\varepsilon) \\
& + \frac{c_0 N_{g_x^\varepsilon} (N_{f_y^0} + \tilde{D}_0 N_{f_x^0}) M}{(N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0})(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - (M_\varepsilon + M(\tilde{D} N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon})))} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|\frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta)\|.
\end{aligned}$$

Como

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|\frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta)\| \leq \frac{1}{1 - \tilde{\kappa}_\varepsilon} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{G}_\varepsilon(\frac{d\sigma_0}{d\eta})(\eta) - \tilde{G}_0(\frac{d\sigma_0}{d\eta})(\eta)\|,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|\frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta)\| \\
& \leq \left[1 - \frac{c_0 N_{g_x^\varepsilon} (N_{f_x^0} + \tilde{D}_0 N_{f_y^0}) M}{(1 - \tilde{\kappa}_\varepsilon)(\lambda_{n-1}^0 - \lambda_n^0 - (M_\varepsilon + M(\tilde{D} N_{g_x^\varepsilon} + N_{g_y^\varepsilon}))) (N_{g_x^0} \tilde{D}_0 + N_{g_y^0})} \right]^{-1} \times \\
& \quad \frac{1}{1 - \tilde{\kappa}_\varepsilon} (H_1(\varepsilon) + H_2(\varepsilon)), \tag{5.25}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\sup_{\eta \in B} \|\frac{d\sigma_\varepsilon}{d\eta}(\eta) - \frac{d\sigma_0}{d\eta}(\eta)\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \tag{5.26}$$

□

Isto nos permite mostrar a C^1 -proximidade dos campos vetoriais das equações (4.23) e (4.32) sobre as variedades invariantes.

Lema 5.4

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suaves, limitadas com derivadas limitadas. Para ε suficientemente pequeno, os campos vetoriais de (P_ε) e (P_0) , sobre S_n^ε e S_n^0 estão C^1 -próximos.

Demonstração

Basta verificarmos que $g^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v))$ e $g^0(v, \sigma_0(v))$ estão C^1 -próximas. Temos

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) - g^0(v, \sigma_0(v))\| &\leq \|g^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) - g^\varepsilon(v, \sigma_0(v))\| \\ &\quad + \|g^\varepsilon(v, \sigma_0(v)) - g^0(v, \sigma_0(v))\| \\ &\leq L_{g^\varepsilon} \|\sigma_\varepsilon(v) - \sigma_0(v)\| + \|(g^\varepsilon - g^0)(v, \sigma_0(v))\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|g_x^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) - g_x^0(v, \sigma_0(v))\| &\leq \|g_x^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) - g_x^\varepsilon(v, \sigma_0(v))\| \\ &\quad + \|g_x^\varepsilon(v, \sigma_0(v)) - g_x^0(v, \sigma_0(v))\| \\ &\leq \|g_x^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) - g_x^\varepsilon(v, \sigma_0(v))\| + L_{g_x^0} \|\sigma_\varepsilon(v) - \sigma_0(v)\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Também,

$$\begin{aligned} &\|g_y^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{dv}(v) - g_y^0(v, \sigma_0(v)) \frac{d\sigma_0}{dv}(v)\| \\ &\leq \|g_y^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) \frac{d\sigma_\varepsilon}{dv}(v) - g_y^\varepsilon(v, \sigma_0(v)) \frac{d\sigma_0}{dv}(v)\| \\ &\quad + \|g_y^\varepsilon(v, \sigma_0(v)) \frac{d\sigma_0}{dv}(v) - g_y^0(v, \sigma_0(v)) \frac{d\sigma_0}{dv}(v)\| \\ &\leq \|g_y^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v))\| \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{dv}(v) - \frac{d\sigma_0}{dv}(v) \right\| + \|g_y^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) - g_y^0(v, \sigma_0(v))\| \left\| \frac{d\sigma_0}{dv}(v) \right\| \\ &\leq N_{g_y^\varepsilon} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{dv}(v) - \frac{d\sigma_0}{dv}(v) \right\| \\ &\quad + [\|g_y^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) - g_y^0(v, \sigma_\varepsilon(v))\| + \|g_y^0(v, \sigma_\varepsilon(v)) - g_y^0(v, \sigma_0(v))\|] \left\| \frac{d\sigma_0}{dv}(v) \right\| \\ &\leq N_{g_y^\varepsilon} \left\| \frac{d\sigma_\varepsilon}{dv}(v) - \frac{d\sigma_0}{dv}(v) \right\| \\ &\quad + \left[\|g_y^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) - g_y^0(v, \sigma_\varepsilon(v))\| + L_{g_y^0} \|\sigma_\varepsilon(v) - \sigma_0(v)\| \right] \left\| \frac{d\sigma_0}{dv}(v) \right\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. □

No teorema seguinte obtemos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 5.5

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suaves, limitadas com derivadas limitadas. Para ε suficientemente pequeno o fluxo de (P_ε) sobre o atrator $\mathcal{A}_\varepsilon$ e o fluxo de (P_0) sobre o atrator $\mathcal{A}_0$ são topologicamente equivalentes.

Demonstração

Da existência da variedade invariante segue que o fluxo sobre o atrator $\mathcal{A}_\varepsilon$ é determinado pela equação diferencial ordinária

$$\dot{v} + B_n^\varepsilon v = g_n^\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon(v)) \quad (5.27)$$

e o fluxo sobre o atrator $\mathcal{A}_0$ é determinado pela equação diferencial ordinária

$$\dot{v} + B_n^0 v = g_n^0(v, \sigma_0(v)). \quad (5.28)$$

Como consequência do Lema 5.4 os fluxos gerado pelas equações (5.27) e (5.28) estão C^1 -próximos, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. No Lema 3.8 mostramos que as variedades estável e instável de equilíbrios são transversais. Logo (4.32) é Morse-Smale e a equivalência topológica segue de resultados de dimensão finita. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] S. B. ANGENENT, *The Morse-Smale Property for a Semi-linear Parabolic Equations*, Journal of Differential Equations, **62**, 427-442 (1986).
- [2] J. M. ARRIETA, A. N. CARVALHO AND A. RODRÍGUEZ-BERNAL, *Upper Semicontinuity for Attractors of Parabolic Problems with Localized Large Diffusion and nonlinear Boundary Conditions*, Journal Differential Equations, **168**, 33-59, 2000.
- [3] J. M. ARRIETA, A. N. CARVALHO AND A. RODRÍGUEZ-BERNAL, *Attractors of Parabolic Problems with Nonlinear: Boundary Conditions. Uniform Bounds*, Commun. in Partial Differential Equations, **25** (1&2), 1-37, 2000.
- [4] J. M. ARRIETA, A. N. CARVALHO AND A. RODRÍGUEZ-BERNAL, *Parabolic Problems with Nonlinear Boundary Conditions and Critical Nonlinearities*, Journal of Differential Equations, **156**, 376-406, 1999.
- [5] S. AGMON, *Unicité et Convexité dans les Problèmes Differentielles*, Univ. of Montreal Press, Montreal, 1966.
- [6] S. M. BRUSCHI, *Discretização de Problemas Semilineares Dissipativos Parabólicos e Hiperbólicos em Domínios Unidimensionais*, Tese de Doutorado, ICMC-USP, Julho de 2000.
- [7] M.A. EVGRAFOV, *Asymptotic Estimates and Entire functions*, 1961, Gordon and Breach, New York.
- [8] D. HENRY, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **vol. 840**, 1980, Springer Verlag, Berlin.

-
- [9] D. HENRY, *Some Infinite-Dimensional Morse-Smale Systems Defined by Parabolic Partial Differential Equations*, Journal Differential Equations, **59**, 165-205, 1985.
 - [10] E. L. INCE, *Ordinary Differential Equation*, Dover Publications, 1956.
 - [11] A. RODRÍGUEZ-BERNAL, *Localized Spatial Homogenizations and Large Diffusion*, SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), 1361-1380.
 - [12] A. RODRÍGUEZ-BERNAL, *Inertial Manifolds for Dissipative Semiflows in Banach Spaces*, Appl. Anal. **37** (1990), 95-141.
 - [13] M. H. PROTTER AND H. F. WEINBERGER, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, New York, 1967.