MÉTODOS PARA A DETERMINAÇÃO DE FÓRMULAS EXPLÍCITAS DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES

Carlos Eduardo Nazare

Orientador: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - S.P.

1986

À Sonia

ABSTRACT

The main purpose of this work is to give explicit formulas of fundamental solutions for some linear partial differential operators with constant coefficients (including classical operators of mathematical physics and elasticity) based on the works of N. Ortner and P. Wagner.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO ZERO	
PRELIMINARES	1
CAPÍTULO I	
SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS ORDINÁRIOS LINEARES COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES	31
CAPÍTULO II	
SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DOS OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM EM $n \geq 2$ VARIÁVEIS REAIS COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES E DOS SEUS OPERADORES ITERADOS	41
CAPÍTULO III	
SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DOS OPERADORES CLÁSSICOS DA FÍSICA-MATEMÁTICA	55
CAPÍTULO IV	
SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM EM $n \geq 2$ VARIÁVEIS REAIS COM COEFICIENTES CONSTANTES	87
CAPÍTULO V	
SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES EM $n \geq 1$ VARIÁVEIS REAIS ITERADOS	97
CAPÍTULO VI	
O MÉTODO DA CONVOLUÇÃO PARA A DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PRODUTO DE DOIS OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES EM $n \geq 1$ VARIÁVEIS REAIS	123

CAPÍTULO VII

O MÉTODO DA CONVOLUÇÃO REGULARIZADA PARA A DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PRODUTO DE DOIS OPERADORES DIFE- RENCIAIS PARCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONS- TANTES EM $n \geq 1$ VARIÁVEIS REAIS	139
--	-----

CAPÍTULO VIII

O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO PARAMÉTRICA APLICADO AOS OPERADORES HIPERBÓLICOS, PARABÓLICOS E ELÍTICOS	167
--	-----

APÊNDICE

LEMAS ALGÉBRICOS	231
------------------------	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	235
----------------------------------	-----

INTRODUÇÃO

O objetivo principal desta dissertação é o de desenvolver técnicas para a obtenção de fórmulas explícitas de soluções fundamentais para um número significativo de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes em $n \geq 1$ variáveis reais, entre os quais incluem-se os operadores clássicos da física matemática e da elasticidade. (Devido à importância prática desses operadores foi dada ênfase para as fórmulas em dimensões um, dois e três).

A motivação para a elaboração deste trabalho nasceu quando da estada do Prof. Dr. Peter Wagner*, da Universität Innsbruck, (Austria), no Departamento de Matemática, da Universidade Federal de São Carlos, (UFSCar), em 1982. O Prof. Wagner desenvolveu uma série de conferências sobre métodos para a obtenção de soluções fundamentais, obtidos por ele próprio e pelo Prof. Dr. N. Ortner, (que foi o Orientador da sua Tese de Doutorado, em Innsbruck), conferências estas que estão registradas em uma publicação do Departamento de Matemática, da UFSCar, de 1983.

A preocupação do nosso trabalho foi então o de tornar acessível a um profissional, com os conhecimentos básicos de funções generalizadas e transformação de Fourier, toda a teoria desenvolvida por N. Ortner, em [8], e pelo trabalho conjunto de N. Ortner com P. Wagner, e todos os requisitos essenciais para a compreensão desta teoria e de suas aplicações, com ênfase para as dimensões um, dois e três.

* O Prof. P. Wagner esteve na UFSCar graças ao apoio financeiro da FAPESP.

Assim sendo, no Capítulo Zero recordamos os conceitos básicos sobre funções generalizadas e transformação de Fourier, e apresentamos o método clássico da descida além de uma fórmula muito útil para a obtenção de soluções fundamentais (v. teorema 0.6.4).

Com o auxílio do Capítulo I, podemos calcular explicitamente toda solução fundamental de um operador diferencial ordinário com coeficientes complexos constantes.

As fórmulas do Capítulo II explicitam pelo menos uma solução fundamental de qualquer operador diferencial parcial linear de primeira ordem com coeficientes complexos constantes.

O Capítulo III contém as fórmulas explícitas para as soluções fundamentais dos operadores de calor, de Schrödinger, de Laplace, de Helmholtz e das ondas n -dimensionais inclusive desses operadores generalizados (isto é, estes operadores com os termos de menor ordem).

O Capítulo IV, aliado ao teorema (0.6.4), calcula soluções fundamentais para os operadores diferenciais parciais lineares de segunda ordem em $n \geq 2$ variáveis reais.

O Capítulo V fornece fórmulas explícitas para as potências de qualquer operador de primeira ordem, do operador de calor e de Schrödinger n -dimensionais generalizadas, do operador de Laplace e das ondas n -dimensionais, com ênfase para $n=1$, $n=2$ e $n=3$ entre outros.

O Capítulo VI calcula soluções fundamentais de operadores produto, pelo método clássico da convolução, e o Capítulo VII, apresenta o método da convolução regularizada de N. Ortner, [8], para o cálculo de operadores produto com quatro aplicações

(uma delas, é um operador importante da teoria da elasticidade).

O Capítulo VIII contém o trabalho de P. Wagner, [15], sobre integração paramétrica, que permite a obtenção de fórmulas para o produto finito de operadores do calor e das ondas n-dimensionais entre outros (a fórmula explícita para o produto finito de operadores das ondas n-dimensional com ênfase para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ foi desenvolvido por N. Ortner, através de um manuseio engenhoso das relações da função hipergeométrica). Além disso, o Capítulo VIII contém a fórmula para a solução fundamental de qualquer operador em duas variáveis reais que é fatorado como produto de operadores de primeira ordem.

Finalmente, devemos ressaltar que em todo o trabalho a notação empregada é a usual. Além disso, procuramos sempre exemplificar em quantidade os métodos apresentados para melhor compreensão: só não fizemos mais devido à extensão do trabalho.

Queremos agradecer o excelente trabalho de datilografia da Srta. Maria Helena Derigi.

Este trabalho contou com o apoio financeiro das entidades: CNPq; CAPES; FINEP e FAPESP.

CAPÍTULO ZERO

PRELIMINARES

(0.1) Espaços de Funções

$C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é o espaço vetorial complexo constituído de todas as funções definidas em $\mathbb{R}^n$ com valores complexos que são infinitamente diferenciáveis em todos os pontos do $\mathbb{R}^n$.

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é o subespaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ constituído de todas as funções com suporte compacto.

$C_c^\infty(K; \mathbb{C})$, onde K é um compacto do $\mathbb{R}^n$, é o subespaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ constituído de todas as funções com suporte compacto contido em K .

O espaço vetorial complexo das funções rapidamente decrescentes no infinito, junto com as suas derivadas parciais, é o subespaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ constituído de todas as funções ψ com a propriedade: para cada $N = 0, 1, 2, \dots$,

$$q_N(\psi) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq N}} (1 + |x|^2)^N |\partial^\alpha \psi(x)|$$

é um número real finito.

O espaço vetorial complexo das funções lentamente crescentes no infinito, junto com as suas derivadas parciais, é o subespaço vetorial $O_M(\mathbb{R}^n)$ de $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ constituído de todas as funções ψ com a propriedade: para cada multi-índice α e

xistem uma constante real c_α positiva, dependente de α , e um nũmero inteiro positivo M_α , dependente de α , tal que

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leq c_\alpha (1 + |x|^2)^{M_\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é o espaço vetorial complexo das funções localmente integráveis do $\mathbb{R}^n$, isto é, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, se e somente se f é uma função mensurável e, para cada compacto K do $\mathbb{R}^n$, $0 \leq \int_K |f(x)| dx < +\infty$.

$D(\mathbb{R}^n)$ é o espaço vetorial complexo $C^\infty_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ com a noção de convergência: $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \psi$ em $D(\mathbb{R}^n)$ significa: existe um compacto K do $\mathbb{R}^n$ tal que:

- (i) para cada $j = 1, 2, \dots$, $\psi_j \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e $\text{supp} \psi_j \subset K$;
- (ii) para cada multi-índice α , $\lim_{j \rightarrow \infty} \partial^\alpha \psi_j(x) = \partial^\alpha \psi(x)$ uniformemente para x em $\mathbb{R}^n$ (convergência uniforme em relação aos multi-índices α não é assumida).

$D(K)$, onde K é um compacto do $\mathbb{R}^n$, é o espaço vetorial complexo $C^\infty_c(K; \mathbb{C})$ com a noção de convergência: $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \psi$ em $D(K)$ significa: para cada $N=0, 1, 2, \dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} p_{KN}(\psi_j - \psi) = 0$ em $\mathbb{R}$, onde $p_{KN}(\psi_j - \psi) = \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq N}} |\partial^\alpha (\psi_j - \psi)(x)|$

$E(\mathbb{R}^n)$ é o espaço vetorial complexo $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ com a noção de convergência: $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ em $E(\mathbb{R}^n)$ significa: para cada $N=0, 1, 2, \dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} p_N(f_j - f) = 0$ em $\mathbb{R}$, onde $p_N(f_j - f) = \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{|x| \leq N} |\partial^\alpha (f_j - f)(x)|$.

$S(\mathbb{R}^n)$ é o espaço vetorial complexo das funções rapidamente decrescentes no infinito, junto com as suas derivadas parciais, com a noção de convergência: $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \psi$ em $S(\mathbb{R}^n)$ significa: para cada $N=0,1,2,\dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} q_N(\psi_j - \psi) = 0$ em $\mathbb{R}$, onde

$$q_N(\psi_j - \psi) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq N}} (1 + |x|^2)^N |\partial^\alpha (\psi_j - \psi)(x)|.$$

Em linguagem mais técnica,

$D(K)$, onde K é compacto do $\mathbb{R}^n$, é o espaço vetorial complexo $C_c^\infty(K; \mathbb{C})$ com a topologia dada pela métrica proveniente da seqüência crescente de seminormas $(p_{KN})_{N=0,1,2,\dots}$.

$D(\mathbb{R}^n)$ é o espaço vetorial complexo $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ com a topologia limite indutivo dada pela família dos espaços $D(K)$ com K compacto do $\mathbb{R}^n$.

$E(\mathbb{R}^n)$ é o espaço vetorial complexo $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ com a topologia dada pela métrica proveniente da seqüência crescente de seminormas $(p_N)_{N=0,1,2,\dots}$.

$S(\mathbb{R}^n)$ é o espaço vetorial complexo das funções rapidamente decrescentes no infinito, junto com as suas derivadas parciais, com a topologia dada pela métrica proveniente da seqüência crescente de seminormas $(q_N)_{N=0,1,2,\dots}$.

Propriedade 0.1.1

(1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é denso em $E(\mathbb{R}^n)$ e é denso em $S(\mathbb{R}^n)$.

(0.2) Espaços de Funções Generalizadas ou Distribuições

O espaço $D'(R^n)$ das distribuições T do R^n é o espaço vetorial complexo constituído de todos os funcionais lineares definidos sobre o espaço vetorial complexo $C_c^\infty(R^n; C)$ que são contínuos em $D(R^n)$, isto é, $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \psi$ em $D(R^n)$ implica $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \psi_j \rangle = \langle T, \psi \rangle$ em C , com a noção de convergência: $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T$ em $D'(R^n)$ significa: para cada $\psi \in C_c^\infty(R^n; C)$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle$ em C .

O espaço $E'(R^n)$ das distribuições T de suporte compacto do R^n é o espaço vetorial complexo constituído de todos os funcionais lineares definidos sobre o espaço vetorial complexo $C^\infty(R^n; C)$ que são contínuos em $E(R^n)$, isto é, $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ em $E(R^n)$ implica $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, f_j \rangle = \langle T, f \rangle$ em C , com a noção de convergência: $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T$ em $E'(R^n)$ significa: para cada $f \in C^\infty(R^n; C)$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, f \rangle = \langle T, f \rangle$ em C .

O espaço $S'(R^n)$ das distribuições temperadas T do R^n é o espaço vetorial complexo constituído de todos os funcionais lineares definidos sobre o espaço vetorial complexo das funções rapidamente decrescentes no infinito, junto com as suas derivadas parciais, que são contínuas em $S(R^n)$, isto é, $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \psi$ em $S(R^n)$ implica $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \psi_j \rangle = \langle T, \psi \rangle$ em C , com a noção de convergência: $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T$ em $S'(R^n)$ significa: para cada $\psi \in S(R^n)$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle$ em C .

Exemplos 0.2.1

- (1) A distribuição T_f do $\mathbb{R}^n$, induzida por uma função localmente integrável f do $\mathbb{R}^n$, é a distribuição definida por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\langle T_f, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x) dx \quad (0.2.1)$$

(a partir do primeiro capítulo, a frase "a distribuição T do $\mathbb{R}^n$ é a função localmente integrável f do $\mathbb{R}^n$ " significa que T coincide com a distribuição T_f do $\mathbb{R}^n$, induzida pela função localmente integrável f do $\mathbb{R}^n$).

- (2) A distribuição temperada T_f do $\mathbb{R}^n$, induzida por uma função localmente integrável f do $\mathbb{R}^n$ satisfazendo a propriedade: existem $M > 0$, $R > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, tais que $|f(x)| \leq M|x|^k$, para $|x| > R$, é a distribuição temperada do $\mathbb{R}^n$ definida por: para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T_f, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x) dx \quad (0.2.2)$$

(a partir do primeiro capítulo, a frase "a distribuição temperada T do $\mathbb{R}^n$ é a função localmente integrável f do $\mathbb{R}^n$ " significa que T coincide com a distribuição temperada T_f do $\mathbb{R}^n$, induzida pela função localmente integrável f do $\mathbb{R}^n$: a propriedade colocada acima não é necessária para uma função localmente integrável do $\mathbb{R}^n$ induzir uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^n$ (v. [12], exercício 8, p. 171).

- (3) A distribuição delta de $\mathbb{R}^n$ é a distribuição temperada do $\mathbb{R}^n$ definida por: para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, $\langle \delta, \psi \rangle = \psi(0)$. (δ não coincide com T_f , $\forall f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.)
- (4) A distribuição temperada δ_{S_R} , $R > 0$, do $\mathbb{R}^n$ é a distribuição temperada do $\mathbb{R}^n$ definida por: para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \delta_{S_R}, \psi \rangle = \int_{|x|=R} \psi(x) dx.$$

(0.3) *Derivadas Parciais de uma Distribuição, Suporte e Suporte Singular de uma Distribuição, Produto de uma Função Por uma Distribuição, Produtos Tensorial e de Convolução de Duas Distribuições*

Definição 0.3.1

(Derivadas Parciais de uma Distribuição)

Para cada $j=1, \dots, n$ a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_j} T$ da distribuição T do $\mathbb{R}^n$ (resp., distribuição temperada do $\mathbb{R}^n$; resp., distribuição de suporte compacto do $\mathbb{R}^n$) é a distribuição do $\mathbb{R}^n$ (resp., distribuição temperada do $\mathbb{R}^n$; resp., distribuição de suporte compacto do $\mathbb{R}^n$) dada por: para cada $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ (resp., para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$; resp., para cada $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$)

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_j} T, \psi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rangle \quad (0.3.1)$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_j} \psi$ indica a derivada parcial usual de ψ em relação a x_j .

Propriedades 0.3.1

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} T = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} T ; \quad j, k = 1, \dots, n.$$

$$(2) \quad \langle \partial^\alpha T, \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \psi \rangle.$$

Exemplos 0.3.1

(1) A função de Heaviside

$$Y(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

tem a primeira derivada distribucional igual a δ e a função $x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{2}|x|$ tem a segunda derivada distribucional igual a δ .

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [Y(x)Y(y)] = \delta \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Definição 0.3.2

(Suporte e do Suporte Singular de uma Distribuição)

O suporte (resp., suporte singular) de uma distribuição $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ é o menor subconjunto fechado $\text{supp } T$ (resp., $\text{sing supp } T$), do $\mathbb{R}^n$ fora do qual T é nulo (resp., T coincide com a distribuição induzida por uma função pertencente a $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$). O significado de T ser nulo em um aberto não vazio U do $\mathbb{R}^n$ é o seguinte: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ com $\text{supp } \psi \subset U$, $\langle T, \psi \rangle = 0$.

Propriedade 0.3.2

- (1) Se $P(\partial)$ for um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes, então $\text{supp } P(\partial)T \subset \text{supp } T$ e $\text{singsupp } P(\partial)T \subset \text{singsupp } T$.

Definição 0.3.3

(Produto de uma Função por uma Distribuição)

- (1) O produto de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ por uma distribuição T do $\mathbb{R}^n$ (resp., distribuição de suporte compacto T do $\mathbb{R}^n$) é a distribuição fT do $\mathbb{R}^n$ (resp., distribuição de suporte compacto fT do $\mathbb{R}^n$) dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ (resp., para cada $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$),

$$\langle fT, \psi \rangle = \langle T, f\psi \rangle \quad (0.3.2)$$

- (2) O produto de uma função $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ por uma distribuição temperada T do $\mathbb{R}^n$ é a distribuição temperada fT do $\mathbb{R}^n$ dada por: para cada $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle fT, \psi \rangle = \langle T, f\psi \rangle \quad (0.3.3)$$

Propriedade 0.3.3

- (1) $\frac{\partial}{\partial x_j} (fT) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)T + f \frac{\partial}{\partial x_j} T$; $j=1, \dots, n$.

Definição 0.3.4

(Produto Tensorial de Duas Distribuições)

O produto tensorial $S \otimes T$ das distribuições S do $\mathbb{R}_x^n$ e T do $\mathbb{R}_y^m$ é a distribuição $S \otimes T$ do $\mathbb{R}^{n+m}$ dada por:

para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{C})$,

$$\langle S \otimes T, \psi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \psi(x, y) \rangle \rangle \quad (0.3.4)$$

Propriedades 0.3.4

- (1) $S \otimes T = T \otimes S$.
- (2) $\text{supp}[S \otimes T] = \text{supp } S \times \text{supp } T$.
- (3) $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta [S \otimes T] = \partial_x^\alpha S \otimes \partial_y^\beta T$.

Definição 0.3.5

(Produto de Convolução de Duas Distribuições)

O produto de convolução $S * T$ das distribuições S e T do $\mathbb{R}^n$ é a distribuição $S * T$ do $\mathbb{R}^n$ dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\langle S * T, \psi \rangle = \langle S \otimes T, \psi(x+y) \rangle \quad (0.3.5)$$

(desde que esta fórmula defina realmente uma distribuição do $\mathbb{R}^n$: a dificuldade toda está no fato de que, para cada $0 \neq \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, a função $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \psi(x+y)$ não tem suporte compacto).

Propriedades 0.3.5

- (1) Sejam S e T distribuições do $\mathbb{R}^n$ com $A = \text{supp } S$ e $B = \text{supp } T$.
 - (1.a) Se, para cada compacto H do $\mathbb{R}^n$, o conjunto $\{(x, y) \in A \times B : x+y \in H\}$ for limitado então o produto de convolução $S * T$ das distribuições S e T do $\mathbb{R}^n$ existirá e $S * T = T * S$.

(1.b) Se A ou B for limitado então o produto de convolução $S * T$ das distribuições S e T do $\mathbb{R}^n$ existirá e $S * T = T * S$. Exemplo: $\delta * T = T * \delta = T$, $\forall T \in D'(\mathbb{R}^n)$.

(1.c) Se $A \subset \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : t \geq 0\}$ e se $B \subset \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : |x| \leq ct, c > 0\}$ então o produto de convolução $S * T$ das distribuições S e T do $\mathbb{R}^n$ existirá e $S * T = T * S$.

(1.d) Se $A = [a, +\infty)$ e se $B = [b, +\infty)$, para $a, b \in \mathbb{R}$, então o produto de convolução $S * T$ das distribuições S e T de $\mathbb{R}$ existirá e $S * T = T * S$.

(2) O produto de convolução $\psi * T$ da distribuição induzida por $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e da distribuição T do $\mathbb{R}^n$ é a distribuição induzida pela função $\psi * T \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ definida por: $(\psi * T)(x) = \langle T, \psi(x - \cdot) \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, se T for induzida por uma função localmente integrável f do $\mathbb{R}^n$ então

$$(\psi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \psi(x-y) dy.$$

(3) O produto de convolução $T * f$ da distribuição T de suporte compacto do $\mathbb{R}^n$ e da distribuição induzida por $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é a distribuição induzida pela função $T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ definida por:

$$(T * f)(x) = \langle T, f(x - \cdot) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- (4) O produto de convolução $f * g$ das distribuições do $\mathbb{R}^n$ induzidas respectivamente pelas funções f e g localmente integráveis do $\mathbb{R}^n$ com $A = \text{supp } f$ e $B = \text{supp } g$ satisfazendo as condições expressas em (1.a) é a distribuição do $\mathbb{R}^n$ induzida pela função localmente integrável $f * g$ do $\mathbb{R}^n$ definida quase toda parte em $\mathbb{R}^n$ por:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

- (5) O produto de convolução $f * g$ das distribuições do $\mathbb{R}^n$ induzidas respectivamente pelas funções f e g integráveis do $\mathbb{R}^n$ é a distribuição do $\mathbb{R}^n$ induzida pela função $f * g$ integrável do $\mathbb{R}^n$ definida quase toda parte em $\mathbb{R}^n$ por:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

- (6) A existência de $S * T$ implica a existência, para cada multi-índice α , de $\partial^\alpha S * T$ e de $S * \partial^\alpha T$. Além disso, $\partial^\alpha (S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * (\partial^\alpha T)$.

- (7) A existência de $S_1 * T$ e de $S_2 * T$ implica a existência de $(aS_1 + bS_2) * T$ para cada par de números complexos a e b . Além disso, $a(S_1 * T) + b(S_2 * T) = (aS_1 + bS_2) * T$.

- (8) $\text{supp}[S * T] \subset \text{supp } S + \text{supp } T$, (o segundo membro é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$).

Observação

O produto de convolução das distribuições do $\mathbb{R}^2$ induzidas respectivamente pelas funções localmente integráveis f e g , do $\mathbb{R}^2$, onde $f(x,y) = (x+iy)^{-1}$ e $g(x,y) = (x-iy)^{-1}$, se $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$, não existe. Para maiores detalhes sobre isto e sobre produto de convolução, citamos, além dos livros constantes nas Referências Bibliográficas, os seguintes artigos:

- (1) Sur la convolution des distributions

Jean Horvath

Bull. Sc. Math., 98 (1974), p. 183 a 192

- (2) Sur quelques propriétés des espaces D'_{L^p} de L. Schwartz

Norbert Ortner & Peter Wagner

Bolletino UMI, (6) 2B (1983), p. 353 a 375

(0.4) Composição de uma Distribuição Com um Isomorfismo Linear

Definição 0.4.1

(Composição de uma Distribuição Com um Isomorfismo Linear)

A composição da distribuição T do $\mathbb{R}_y^n$ com o isomorfismo linear $A : \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_y^n$ é a distribuição $T \circ A$ do $\mathbb{R}^n$ definida por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\langle T \circ A, \psi \rangle = |\det A|^{-1} \langle T, \psi \circ A^{-1} \rangle \quad (0.4.1)$$

Teorema 0.4.1

Os diagramas abaixo são comutativos

$$\begin{array}{ccc}
 D'(R^n) & \xrightarrow{(POA)(\partial)} & D'(R^n) \\
 A^t \downarrow & & \downarrow A^t \\
 D'(R^n) & \xrightarrow{P(\partial)} & D'(R^n)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 D'(R^n) & \xrightarrow{P(\partial)} & D'(R^n) \\
 A^t \downarrow & & \downarrow A^t \\
 D'(R^n) & \xrightarrow{(POA^{-1})(\partial)} & D'(R^n)
 \end{array}$$

onde A^{-1} é o isomorfismo linear inverso do isomorfismo linear A , A^t é o isomorfismo linear do R^n , cuja matriz em relação a base canônica do R^n é a transposta da matriz do isomorfismo linear A em relação a mesma base, e $P(\partial)$ é um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes em n variáveis reais.

Definição 0.4.2

(Distribuição Invariante em Relação a um Isomorfismo Linear e de Distribuição Homogênea)

- (1) A distribuição T do R^n é invariante em relação a um isomorfismo linear A se e somente se $TOA = T$.
- (2) A distribuição T do R^n é homogênea de ordem m se e somente se, para cada homotetia linear H_λ de razão $\lambda > 0$ dada por $H_\lambda(x) = \lambda x$, $x \in R^n$, $TOH_\lambda = \lambda^m T$ (toda distribuição homogênea do R^n é uma distribuição temperada do R^n : [3], p. 154).

Exemplos 0.4.1

- (1) A distribuição delta de Dirac do R^n é homogênea de ordem $-n$ e é invariante por rotações do R^n (rotação ou transformação linear ortogonal do R^n é um isomorfismo

linear A do $\mathbb{R}^n$ tal q $A^t = A^{-1}$).

- (2) Se T for uma distribuição homogênea de ordem m então, para cada multi-índice α , $\partial^\alpha T$ é homogênea de ordem $m - |\alpha|$. Além disso, T é solução da equação de Euler

$$\sum_{j=1}^n \pi_j \frac{\partial}{\partial x_j} T = mT \quad (0.4.2)$$

onde, para cada $j=1, \dots, n$, π_j é a projeção linear do $\mathbb{R}^n$ definida por $\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$.

- (3) Se f for uma função homogênea de ordem s em $\mathbb{R}^n$, isto é, $f(tx) = t^s f(x)$, para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, e se f for uma função definida positiva em $\mathbb{R}^n$, isto é, $f(x) > 0$, para $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, então a distribuição T do $\mathbb{R}^n$ induzida pela função $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \ln[f(x)]$ será solução da equação

$$\sum_{j=1}^n \pi_j \frac{\partial}{\partial x_j} T = s \quad (0.4.3)$$

onde, para cada $j = 1, \dots, n$, π_j é como no exemplo anterior.

Teorema 0.4.2

(Caracterização das Distribuições com Suporte em um Ponto e da Caracterização das Distribuições Homogêneas e Invariantes por Rotações)

- (1) Toda distribuição do $\mathbb{R}^n$ cujo suporte é a origem do $\mathbb{R}^n$ é uma combinação linear finita, com coeficientes complexos constantes, da distribuição delta de Dirac do $\mathbb{R}^n$ e de suas derivadas parciais.

(2) Seja $T \in D'(R^n)$ uma distribuição homogênea de ordem k e invariante por rotações. Então T coincide em $R^n \setminus \{0\}$ com a função: $g(x) = c|x|^k$, para $0 \neq x \in R^n$, onde c é uma constante.

Prova

(v. [12], p. 77 e p. 386).

(0.5) *Transformação de Fourier*

Definição 0.5.1

(Transformação de Fourier de Funções em $S(R^n)$)

A transformada de Fourier de uma função $\psi \in S(R^n)$ é a função $F\psi \in S(R^n)$ definida por

$$(F\psi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp(-ixy) \psi(y) dy \quad (0.5.1)$$

e a transformada inversa de Fourier de uma função $\psi \in S(R^n)$ é a função $F^{-1}\psi \in S(R^n)$ definida por

$$(F^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp(ixy) \psi(y) dy \quad (0.5.2)$$

Propriedades 0.5.1

$$(1) F[F^{-1}\psi] = F^{-1}[F\psi] = \psi, \quad \psi \in S(R^n).$$

$$(2) \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \psi \text{ em } S(R^n) \text{ implica que } \lim_{j \rightarrow \infty} F\psi_j = F\psi \text{ em } S(R^n) \text{ e que } \lim_{j \rightarrow \infty} F^{-1}\psi_j = F^{-1}\psi \text{ em } S(R^n).$$

$$(3) \int_{R^n} (F\psi)(x)\psi(x)dx = \int_{R^n} \psi(x)(F\psi)(x)dx, \quad \psi, \psi \in S(R^n).$$

$$(4) F(\partial^\alpha \psi)(x) = i^{|\alpha|} x^\alpha (F\psi)(x) \\ F^{-1}(\partial^\alpha \psi)(x) = -i^{|\alpha|} x^\alpha (F\psi)(x) \quad \psi \in S(R^n).$$

Exemplo 0.5.1

$$(1) \text{ Se } \psi(x) = \exp(-\frac{|x|^2}{2}), \quad x \in R^n, \text{ então, } F\psi = F^{-1}\psi = \psi.$$

Definição 0.5.2

(Transformação Parcial de Fourier de Funções em $S(R^n)$)

A transformada parcial de Fourier, em relação a variável x , de uma função $\psi \in S(R_{xy}^{n+m})$ é a função $(F_x \psi) \in S(R_{xy}^{n+m})$ definida por

$$(F_x \psi)(x, y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp(-ixz) \psi(z, y) dz \quad (0.5.3)$$

e a transformada inversa parcial de Fourier, em relação a variável x , de uma função $\psi \in S(R_{xy}^{n+m})$ é a função $(F_x^{-1} \psi) \in S(R_{xy}^{n+m})$ definida por

$$(F_x^{-1} \psi)(x, y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp(ixz) \psi(z, y) dz \quad (0.5.4)$$

Teorema 0.5.1 (Paley-Wiener)

Seja K um subconjunto não vazio compacto e convexo do $\mathbb{R}^n$. Uma função inteira f em $\mathbb{C}^n$ é a transformada de Fourier de uma função pertencente a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ com suporte contido em K , se e somente se, para cada $N = 1, 2, \dots$, existe uma constante real positiva C_N tal que

$$|f(z)| \leq C_N (1 + |z|)^{-N} \exp[I_K(\operatorname{Im} z)] \quad (0.5.5)$$

onde I_K é a função indicadora de K , isto é, para $x \in \mathbb{R}^n$, $I_K(x) = \sup\{xy : y \in K\}$.

Prova

(v. [2], p. 17).

Definição 0.5.2

(Transformação de Fourier de Distribuições Temperadas)

A transformada de Fourier de uma distribuição temperada T do $\mathbb{R}^n$ é a distribuição temperada FT do $\mathbb{R}^n$ definida por: para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle FT, \psi \rangle = \langle T, F\psi \rangle \quad (0.5.6)$$

e a transformada inversa de Fourier de uma distribuição temperada T do $\mathbb{R}^n$ é a distribuição temperada $F^{-1}T$ do $\mathbb{R}^n$ definida por: para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle F^{-1}T, \psi \rangle = \langle T, F^{-1}\psi \rangle \quad (0.5.7)$$

Propriedades 0.5.2

$$(1) F[F^{-1}T] = F^{-1}[FT] = T, \quad T \in S'(R^n).$$

$$(2) \lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T \text{ em } S'(R^n) \text{ implica que } \lim_{j \rightarrow \infty} FT_j = FT \text{ em } S'(R^n) \text{ e que } \lim_{j \rightarrow \infty} F^{-1}T_j = F^{-1}T \text{ em } S'(R^n).$$

$$(3) F[\partial^\alpha T] = i|\alpha|_x \alpha_{FT} \quad T \in S'(R^n).$$

$$F^{-1}[\partial^\alpha T] = -i|\alpha|_x \alpha_{F^{-1}T}$$

$$(4) F[ToA] = |\det A|^{-1}[FT] \circ [A^{-1}]^t$$

onde $T \in S'(R^n)$ e A é um isomorfismo linear do R^n .

$$(5) \text{ Se } T \in S'(R^n) \text{ for homogênea de ordem } m \text{ então } FT \in S'(R^n) \text{ será homogênea de ordem } -m-n.$$

Definição 0.5.3

(Transformação Parcial de Fourier de Distribuições Temperadas)

A transformada parcial de Fourier, em relação a variável x , de uma distribuição temperada $T \in S'(R_{xy}^{n+m})$ é a distribuição temperada $F_x T \in S'(R_{xy}^{n+m})$ definida por: para cada $\psi \in S(R_{xy}^{n+m})$,

$$\langle F_x T, \psi \rangle = \langle T, F_x \psi \rangle \quad (0.5.8)$$

e a transformada inversa parcial de Fourier, em relação a variável x , de uma distribuição temperada $T \in S'(R_{xy}^{n+m})$ é a distribuição temperada $F_x^{-1}T \in S'(R_{xy}^{n+m})$ definida por: para cada $\psi \in S(R_{xy}^{n+m})$,

$$\langle F_x^{-1}T, \psi \rangle = \langle T, F_x^{-1}\psi \rangle \quad (0.5.9)$$

Exemplos 0.5.2

- (1) Se δ for a distribuição delta de Dirac em $R_{tx}^{n+1} = R_t \times R_x^n$, $F\delta = (2\pi)^{-(n+1)/2}$; $F_t\delta = (2\pi)^{-1/2} 1_t \otimes \delta_x$ e $F_x\delta = (2\pi)^{-n/2} \delta_t \otimes 1_x$.

- (2) Se $(Ax, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ for uma forma quadrática positiva definida em R^n

$$F^{-1}[\exp[-(Ax, x)]](x) = (2^n \det A)^{-1/2} \exp[-\frac{1}{4}(x, A^{-1}x)]$$

$$e \tag{0.5.10}$$

$$F^{-1}[\exp[i(Ax, x)]](x) = (2^n \det A)^{-1/2} \exp[-\frac{i}{4}(x, A^{-1}x)] \exp(\frac{in\pi}{4})$$

Teorema 0.5.2 (Paley-Wiener-Schwartz)

- (1) A transformada de Fourier de $T \in E'(R^n)$ é a função $FT \in \mathcal{O}_M(R^n)$ definida por

$$(FT)(x) = (2\pi)^{-n/2} \langle T, \exp(-ixy) \rangle \tag{0.5.11}$$

Além disso, FT admite a extensão inteira definida em C^n por

$$(FT)(z) = (2\pi)^{-n/2} \langle T, \exp(-izy) \rangle \tag{0.5.12}$$

- (2) A transformada inversa de Fourier de $T \in E'(R^n)$ é a função $F^{-1}T \in \mathcal{O}_M(R^n)$ definida por

$$(F^{-1}T)(x) = (2\pi)^{-n/2} \langle T, \eta(y) \exp(ixy) \rangle \tag{0.5.13}$$

onde $\eta \in C_c^\infty(R^n; C)$ e η é igual a função constante 1 em uma vizinhança aberta do suporte de T .

(3) (O teorema de Paley-Wiener-Schwartz propriamente dito).

Seja K um subconjunto não vazio compacto e convexo do $\mathbb{R}^n$. Uma função inteira f é a transformada de Fourier de uma distribuição $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ com $\text{supp } T \subset K$, se e somente se, existem constantes C real positiva e N inteira, tais que

$$|f(z)| \leq C(1+|z|)^N \exp[I_K(\text{Im}z)] \quad (0.5.14)$$

onde I_K é a função indicadora de K , isto é, para $x \in \mathbb{R}^n$, $I_K(x) = \sup\{xy : y \in K\}$.

Exemplos 0.5.3

- (1) Para $n = 1$, se $T = Y(R-|x|)$, onde Y é a função de Heaviside e $R > 0$, $(F^{-1}T)(x) = (2\pi)^{-1/2} 2 \frac{\text{sen}(Rx)}{x}$.
- (2) Para $n = 3$, $F^{-1}[\delta_{S_R}] = (2\pi)^{-3/2} 4\pi R \frac{\text{sen}R|x|}{|x|}$, $R > 0$.

(0.6) Soluções Fundamentais de um Operador Diferencial Parcial com Coeficientes Complexos Constantes em $n \geq 1$ Variáveis Reais

Sejam $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, um polinômio com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais $x_1, \dots, x_n$ de grau maior ou igual a um e $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ o operador diferencial parcial linear associado

ao polinômio P .

Definição 0.6.1

Uma distribuição E do R^n é uma solução fundamental de $P(\partial)$ se e somente se $P(\partial)E = \delta$, onde δ é a distribuição delta de Dirac do R^n .

Exemplos 0.6.1

- (1) A função de Heaviside Y é uma solução fundamental de $\frac{d}{dx}$ em R e a função $x \in R \mapsto |x|/2$ é de $\frac{d^2}{dx^2}$ em R .
- (2) A distribuição $Y(x) \otimes \delta(y)$ do R^2 é uma solução fundamental de $\frac{d}{dx}$ em R^2 e a distribuição $\frac{|x|}{2} \otimes \delta(y)$ do R^2 é uma solução fundamental de $\frac{d^2}{dx^2}$ em R^2 .
- (3) Em geral, se E for uma solução fundamental de $P(\partial)$ em R_x^n então $E \otimes \delta(y)$ será uma solução fundamental de $P(\partial)$ em R_{xy}^{n+m} . Exemplo: $Y(x_1) \otimes \dots \otimes Y(x_n) \otimes \delta(y)$ é uma solução fundamental de $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$ em R^{n+m} .
- (4) Se E for uma solução fundamental de $P(\partial)$ em R^n então, para cada distribuição H do R^n com $P(\partial)H = 0$, $E + H$ também será solução fundamental de $P(\partial)$.

Teorema 0.6.1 (Malgrange-Ehrenpreis)

Todo operador diferencial parcial linear não nulo com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais tem uma solução fundamental (Malgrange e Ehrenpreis, em 1953, independentemente um do outro obtiveram provas existenciais para o teorema; Hörmander ([6], p. 64 a 69) conseguiu uma demonstração

construtiva para o teorema em questão).

O objetivo principal desse trabalho é o de apresentar técnicas que calculem explicitamente as soluções fundamentais de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes complexos constantes. Além da importância intrínseca que é a de ter o conhecimento da fórmula explícita de uma solução fundamental, temos de considerar a importância qualitativa dos seguintes teoremas, os quais fornecem informações sobre o operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes a partir da fórmula explícita de sua solução fundamental.

Teorema 0.6.2

As afirmações são equivalentes:

- (1) O operador $P(\partial)$ é hipoelítico em $\mathbb{R}^n$.
(Isto é, $\text{singsupp}P(\partial)T = \text{singsupp}T$, $\forall T \in D'(\mathbb{R}^n)$).
- (2) O operador $P(\partial)$ admite uma solução fundamental, a qual coincide com uma função infinitamente diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com valores complexos.
- (3) O operador $P(\partial)$ admite uma parametriz (isto é, uma distribuição $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que $P(\partial)T - \delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$), a qual coincide com uma função infinitamente diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com valores complexos.

Prova

(v. [2], p. 39).

Teorema 0.6.3

As afirmações são equivalentes:

- (1) O operador $P(\partial)$ é analítico-hipoelítico em R^n . (isto é, dados um aberto não vazio U do R^n e uma distribuição T em U com $P(\partial)T$ coincidente com uma função analítica em U então T coincide com uma função analítica em U).
- (2) O operador $P(\partial)$ admite uma solução fundamental, a qual coincide com uma função analítica em todos os pontos de $R^n \setminus \{0\}$.

Prova

(v. [13], p. 23).

Teorema 0.6.4

(Solução Fundamental do Operador $(PoA)(\partial)$)

Uma solução fundamental do operador diferencial parcial linear $(PoA)(\partial)$ com coeficientes complexos constantes, onde A é um isomorfismo linear do R^n , é

$$|\det A|^{-1} [Eo(A^t)^{-1}] \quad (0.6.1)$$

onde E é uma solução fundamental de $P(\partial)$.

Prova

A prova é imediata.

Aplicação 0.6.1

Uma solução fundamental do operador

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^2; \quad \lambda > 0$$

é a função localmente integrável E_λ do R^4_{txyz} dada por

$$E_\lambda(t, x, y, z) = \frac{\lambda^{-3/2}}{8\pi} Y\left[t - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\lambda}\right)^{1/2}\right] \quad (0.6.2)$$

onde Y é a função de Heaviside, desde que saibamos que uma solu
ção fundamental do operador

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^2 \quad (0.6.3)$$

é a função localmente integrável E do R^4 dada por

$$E(t, x, y, z) = (8\pi)^{-1} Y[t - (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}] \quad (0.6.4)$$

$$(P(t, x, y, z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2; \quad A(t, x, y, z) = (t, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}y, \sqrt{\lambda}z);$$

$$(POA)(t, x, y, z) = t^2 - \lambda x^2 - \lambda y^2 - \lambda z^2).$$

Os teoremas e as definições abaixo constituem o chama-
do método da descida para obtenção de uma solução de equações
não homogêneas e, em particular, para a obtenção de uma solução
fundamental.

O Método da Descida

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ uma variável do R^n e
 $s = (s_1, \dots, s_m)$ uma variável do R^m e consideremos em R^{n+m} a

equação

$$L(\partial_x, \partial_s)T = \sum_{0 < |\alpha| \leq r} \partial_s^\alpha [P_\alpha(\partial_x)T] + \\ + P_0(\partial_x)T = \delta_s \otimes f_x \quad (0.6.5)$$

onde δ_s é a distribuição delta de Dirac do R_s^m , f_x é uma distribuição do R_x^n , $P_0(\partial_x)$ é um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes com derivadas parciais em relação as variáveis $x_1, \dots, x_n$ e o mesmo acontece com os operadores $P_\alpha(\partial_x)$, para $0 < |\alpha| \leq r$.

O método da descida fornece uma solução da equação

$$P_0(\partial_x)V = f \quad (0.6.6)$$

a partir de uma solução conhecida da equação (0.6.5) como será visto no teorema abaixo.

Definição 0.6.2

(Contração de uma Distribuição)

A contração de uma distribuição $T \in D'(R_{xs}^{m+n})$ ao R^n é a distribuição $\overset{\circ}{T} \in D'(R_x^n)$ definida por: para cada $\psi \in C_c^\infty(R^n; \mathbb{C})$,

$$\langle \overset{\circ}{T}, \psi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \psi \otimes \psi_j \rangle \quad (0.6.7)$$

desde que, para cada $\psi \in C_c^\infty(R^n; \mathbb{C})$ e para cada sequência $(\psi_j)_{j=1,2,\dots}$ de $C_c^\infty(R^n; \mathbb{C})$ convergente para 1 em R^m , exista o limite dado acima (a sequência $(\psi_j)_{j=1,2,\dots}$ de $C_c^\infty(R^n; \mathbb{C})$ é convergente para 1 em R^m se e somente se,

- (a) para cada $j=1,2,\dots$, $\psi_j(x) = 1$, para $|x| \leq j$;
- (b) para cada multi-índice α , existe uma constante real positiva c_α , dependente de α , tal que $|\partial^\alpha \psi_j(x)| \leq c_\alpha$ para $x \in \mathbb{R}^n$ e para $j = 1,2,\dots$).

Teorema 0.6.5

(Existência da Contração de uma Distribuição)

- (1) Seja $T \in D'(\mathbb{R}^{m+n})$ tal que T satisfaz a propriedade: para cada subconjunto compacto K do $\mathbb{R}^n$, o subconjunto $\text{supp} T \cap (\mathbb{R}^m \times K)$ é limitado. Então existe a contração $\overset{\circ}{T}$ de T ao $\mathbb{R}^n$.
- (2) Seja $V : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $V(\cdot, x)$ é uma função integrável do $\mathbb{R}^m$ e tal que a função $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |V(s, x)| ds$ é uma função localmente integrável do $\mathbb{R}^n$. Então V induz uma distribuição do $\mathbb{R}^{m+n}$ que admite contração ao $\mathbb{R}^n$ e esta contração é a função localmente integrável $\overset{\circ}{V}$ do $\mathbb{R}^n$ definida por:
- $$\overset{\circ}{V}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} V(s, x) ds.$$

Prova

(v. [12], p. 247).

A importância do conceito da contração de uma distribuição reside no seguinte teorema:

Teorema 0.6.6

Seja $T \in D'(R_{sx}^{m+n})$ uma solução da equação (0.6.5) tal que existe a contração $\overset{\circ}{T}$ de T ao R^n . Então,

$$P_o(\partial)\overset{\circ}{T} = f \quad (0.6.8)$$

Prova

(v. [12], p. 246).

Corolário 0.6.1

Seja E uma solução fundamental do operador L dado em (0.6.5) tal que existe a contração $\overset{\circ}{E}$ de E ao R^n . Então $\overset{\circ}{E}$ é uma solução fundamental do operador $P_o(\partial)$ em R^n .

Corolário 0.6.2

Seja $E \in L_{loc}^1(R_{sx}^{m+n})$ uma solução fundamental do operador L dado em (0.6.5) tal que a função $x \in R^n \rightarrow \int_{R^n} |E(s,x)| ds$ é uma função localmente integrável do R^n . Então a contração $\overset{\circ}{E}$ de E ao R^n existe, é uma função localmente integrável do R^n , dada por

$$\overset{\circ}{E}(x) = \int_{R^n} E(s,x) ds, \quad x \in R^n \quad (0.6.9)$$

e é solução fundamental do operador $P_o(\partial)$ em R^n .

Aplicação 0.6.2

(v. Capítulo III).

(0.7) O Teorema de Fubini

Teorema 0.7.1

(Sobre a Mudança na Ordem de Integração)

Sejam A um subconjunto mensurável do R^m , B um subconjunto mensurável do R^n e $f : A \times B \rightarrow C$ uma função mensurável. Se f for integrável em $A \times B$ ou se f assumir a penas valores reais positivos então

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f(x,y) d(x,y) &= \int_A \left[\int_B f(x,y) dy \right] dx = \\ &= \int_B \left[\int_A f(x,y) dx \right] dy \end{aligned} \quad (0.7.1)$$

(0.8) Função Gama e as Funções de Bessel

A função gama é a função Γ definida para $z \in C$, com $\text{Re } z > 0$ por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{z-1} dt \quad (0.8.1)$$

A função de Bessel de primeira espécie de ordem $\nu \in C$ é a função J_ν definida para $z \in C$ por

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{4^j j! \Gamma(\nu+j+1)} \quad (0.8.2)$$

Em particular,

$$J_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{4^j j! j!} \quad (0.8.3)$$

(para cada $v \in \mathbb{C}$, a função de Bessel J_v é uma solução da equação de Bessel: $z^2 \frac{d^2}{dz^2} w + z \frac{d}{dz} w + (z^2 - v^2) w = 0$).

As funções de Bessel modificadas I_v e K_v de ordem v são definidas para $z \in \mathbb{C}$ por

$$I_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{4^j j! \Gamma(v+j+1)} \quad (0.8.4)$$

$$K_v(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi v)} [I_{-v}(z) - I_v(z)]; \quad v \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$K_n(z) = \lim_{v \rightarrow n} K_v(z); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (0.8.5)$$

e são soluções da equação de Bessel modificada:

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} w + z \frac{d}{dz} w - (z^2 + v^2) w = 0.$$

Em particular,

$$I_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{4^j j! j!} \quad (0.8.6)$$

$$K_0(z) = -\log\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{4^j j! j!} \psi(j+1), \quad z \neq 0 \quad (0.8.7)$$

onde

$$\psi(j+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{j} - c_0 \quad (0.8.8)$$

$$c_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\sum_{p=1}^{j-1} \frac{1}{p} - \ln j \right] = 0,577215\dots \quad (0.8.9)$$

$$\begin{aligned}
K_n(z) &= (-1)^{n+1} \log\left(\frac{z}{2}\right) I_n(z) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (n-j-1)!}{4^j j!} z^{2j} + \\
&+ (-1)^{n+1} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} [\psi(j+1) - \psi(j+n+1)] \frac{z^{2j}}{4^j j! (n+j)!}, \quad z \neq 0
\end{aligned} \tag{0.8.10}$$

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z} \operatorname{sen} z \tag{0.8.11}$$

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z} \operatorname{sh} z \tag{0.8.12}$$

$$K_{1/2}(z) = K_{-1/2}(z) = \sqrt{\pi/2z} \exp(-z) \tag{0.8.13}$$

CAPÍTULO I

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS ORDINÁRIOS LINEARES COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES

Resumo do Capítulo

O primeiro capítulo está subdividido em três seções:

- (I.1) Soluções de sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem;
- (I.2) Soluções de equações diferenciais ordinárias lineares de ordem $m \geq 1$;
- (I.3) Soluções fundamentais de operadores diferenciais ordinários lineares de ordem $m \geq 1$ com coeficientes complexos constantes.

Nas duas primeiras seções, tratamos com equações diferenciais ordinárias lineares cujos coeficientes são funções infinitamente diferenciáveis em todos os pontos da reta real com valores complexos. A segunda parte é considerada como um caso especial da primeira. Na terceira seção, estão as fórmulas explícitas de todas as soluções fundamentais de um operador diferencial ordinário linear de ordem $m \geq 1$ com coeficientes complexos constantes.

(I.1) Soluções de Sistemas Lineares de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Consideremos o seguinte sistema linear não homogêneo de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem cuja matriz dos coeficientes $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\dots,m}$ tem ordem $m \geq 1$ e é constituída por funções infinitamente diferenciáveis em todos os pontos da reta real com valores complexos:

$$\frac{d}{dt}T = AT + F \quad (I.1.1)$$

onde $T = \text{col}[T_1, \dots, T_m]$, $F = \text{col}[F_1, \dots, F_m]$ e para cada $j = 1, \dots, m$, $T_j, F_j \in D'(R)$. O sistema linear homogêneo associado a (I.1.1) é

$$\frac{d}{dt}T = AT \quad (I.1.2)$$

Da teoria clássica das equações diferenciais ordinárias lineares, sabemos que (I.1.2) possui um sistema fundamental

$$X(t) = [X_1(t), \dots, X_m(t)] \quad (I.1.3)$$

de soluções

$$X_j(t) = \text{col}[X_{j1}(t), \dots, X_{jm}(t)] \quad j=1, \dots, m \quad (I.1.4)$$

cujos componentes são funções infinitamente diferenciáveis em todos os pontos da reta real, com valores complexos, com a propriedade de que

$$\Delta(t) = \det[X_{ij}(t)]_{i,j=1,\dots,m} \neq 0 \quad (I.1.5)$$

para cada t real e de que toda solução clássica de (I.1.2) é da forma

$$X(t)C \quad (I.1.6)$$

onde C é um vetor constante cujas coordenadas são números complexos. (No caso particular em que a matriz A dos coeficientes é uma matriz constante, um sistema fundamental $X(t)$ de soluções do sistema homogêneo é $\exp(tA)$ e qualquer outro sistema fundamental é o produto de $\exp(tA)$ por uma matriz constante com determinante não nulo.)

O que podemos mostrar é que toda solução $T = \text{col}[T_1, \dots, T_m]$ com $T_j \in D'(R)$ para $j = 1, \dots, m$ de (I.1.2) tem a forma dada em (I.1.6). De fato, se T for uma solução de (I.1.2) então $C = X^{-1}T$ será um vetor constante em virtude de que $\frac{d}{dt}C = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T &= \frac{d}{dt}(XC) = \left(\frac{d}{dt}X\right)C + X\frac{d}{dt}C = AXC + X\frac{d}{dt}C = \\ &= AT + X\frac{d}{dt}C \end{aligned} \quad (I.1.7)$$

o que implica que $X\frac{d}{dt}C = 0$ ou, equivalentemente, $\frac{d}{dt}C = 0$ pela multiplicação à esquerda pela inversa de X .

Para o sistema não homogêneo (I.1.1), procuramos uma solução pelo método clássico da variação dos parâmetros, isto é, pesquisamos uma solução de (I.1.1) da forma

$$T = XS \quad (I.1.8)$$

onde $S = \text{col}[S_1, \dots, S_m]$ e $S_j \in D'(R)$ para cada $j = 1, \dots, m$. Pela substituição da expressão (I.1.8) em (I.1.1), obtemos que

$$X \frac{d}{dt} S = F \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} S = X^{-1} F \quad (\text{I.1.9})$$

Concluimos que $T = XS$, onde S é uma primitiva de $X^{-1}F$, é uma solução de (I.1.1). Além disso, toda solução de (I.1.1) é dada pela seguinte fórmula (que na teoria clássica das equações diferenciais ordinárias é conhecida como fórmula da variação dos parâmetros):

$$XC + XS \quad (\text{I.1.10})$$

com C como em (I.1.6) e S como em (I.1.9). Esta fórmula é justificada pelo fato de que duas soluções do sistema não homogêneo (I.1.1) diferem por uma solução do sistema homogêneo associado (I.1.2).

O que queremos mostrar é que no caso em que F é constituída por funções contínuas em todos os pontos da reta real, toda solução de (I.1.1) é dada pela fórmula clássica da variação dos parâmetros:

$$X(\cdot)C + X(\cdot) \int_{t_0}^{\cdot} X^{-1}(s)F(s)ds \quad (\text{I.1.11})$$

com t_0 real e C como em (I.1.6), visto que cada primitiva de $X^{-1}F$ é uma função com derivada contínua em todos os pontos da reta real.

Quando a matriz A dos coeficientes for uma matriz constante e quando o produto de convolução de $Y \exp(\cdot A)$, onde Y é a função de Heaviside, com F fizer sentido, toda solução de (I.1.1) também poderá ser dada por

$$\exp(\cdot A)C + Y(\cdot)\exp(\cdot A) * F \quad (\text{I.1.12})$$

com C como em (I.1.6) pois a segunda parcela de (I.1.12) é solução de (I.1.1):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}[Y\exp(\cdot A) * F] - A[Y\exp(\cdot A) * F] = \\ & = \left\{ \frac{d}{dt}[Y\exp(\cdot A)] - A[Y\exp(\cdot A)] \right\} * F = \quad (\text{I.1.13}) \\ & = \delta I * F = F \quad (I \text{ é a matriz identidade de ordem } m) \end{aligned}$$

(I.2) Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Ordem $m \geq 1$

Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária linear não homogênea de ordem $m \geq 1$ cujos coeficientes são funções infinitamente diferenciáveis em todos os pontos da reta real com valores complexos:

$$\frac{d^m}{dt^m}u + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u + \dots + a_m u = f; \quad f \in D'(R) \quad (\text{I.2.1})$$

Como na teoria clássica das equações diferenciais ordinárias, temos que (I.2.1) é equivalente a um sistema linear não homogêneo como em (I.1.1), com

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & -a_{m-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = u ; \quad T_2 = \frac{d}{dt} u ; \quad \dots ; \quad T_m = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u$$

e

$$F_1 = 0 ; \quad F_2 = 0 ; \quad \dots ; \quad F_m = f$$

Também temos que a cada base ordenada $\{x_1, \dots, x_m\}$ do espaço vetorial complexo das soluções da equação diferencial linear homogênea associada a (I.2.1):

$$\frac{d^m}{dt^m} u + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u + \dots + a_m u = 0 \quad (\text{I.2.2})$$

corresponde um sistema fundamental de soluções do sistema linear homogêneo equivalente a (I.2.2):

$$X(t) = [X_1(t), \dots, X_m(t)] \quad (\text{I.2.3})$$

onde

$$X_j(t) = \text{col}[x_j(t), \frac{d}{dt} x_j(t), \dots, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_j(t)] \quad j=1, \dots, m \quad (\text{I.2.4})$$

e reciprocamente.

Como vimos em (I.1.10), toda solução do sistema linear não homogêneo equivalente a (I.2.1) tem a forma

$$XC + XS \quad (\text{I.2.5})$$

com C como em (I.1.6) e $S = \text{col}[S_1, \dots, S_m]$ como em (I.1.9), isto é, S satisfaz o seguinte sistema linear de equações

$$\begin{cases} \frac{d^j}{dt^j} x_1 \frac{d}{dt} S_1 + \frac{d^j}{dt^j} x_2 \frac{d}{dt} S_2 + \dots + \frac{d^j}{dt^j} x_m \frac{d}{dt} S_m = 0 & j=0, \dots, m-2 \\ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_1 \frac{d}{dt} S_1 + \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_2 \frac{d}{dt} S_2 + \dots + \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_m \frac{d}{dt} S_m = f \end{cases} \quad (\text{I.2.6})$$

cujas únicas soluções são dadas pela regra de Cramer, isto é, para cada $j = 1, \dots, m$

$$\frac{d}{dt} S_j = \frac{(-1)^{m+j}}{\Delta} \Delta_{mj} f \quad (\text{I.2.7})$$

onde Δ dado por (I.1.5) é conhecido como wronskiano de $\{x_1, \dots, x_m\}$ e Δ_{mj} é o determinante obtido da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} x_1 & \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} x_2 & \dots & \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} x_m \end{bmatrix}$$

pela omissão da primeira linha e da j -ésima coluna.

A primeira aplicação trivial do parágrafo anterior é de (I.1.11) é o caso em que f é uma função contínua em todos os pontos da reta real; as soluções de (I.2.1) são

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j(\cdot) + \int_0^\cdot e(\cdot, s) f(s) ds \quad (\text{I.2.8})$$

com $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ e

$$e(t,s) = \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{m+j}}{\Delta(s)} x_j(t) \Delta_{mj}(s) \quad (\text{I.2.9})$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{\Delta(s)} \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_m(t) \\ x_1(s) & x_2(s) & \dots & x_m(s) \\ \frac{dx_1}{ds}(s) & \frac{dx_2}{ds}(s) & \dots & \frac{dx_m}{ds}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{m-2}}{ds^{m-2}} x_1(s) & \frac{d^{m-2}}{ds^{m-2}} x_2(s) & \dots & \frac{d^{m-2}}{ds^{m-2}} x_m(s) \end{bmatrix}$$

A segunda aplicação é a situação em que o segundo membro de (I.2.1) é a distribuição de suporte compacto δ_a da reta com a real: as soluções de (I.2.1) são

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j(\cdot) + Y(\cdot - a) e(\cdot, a), \quad \text{com } c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C} \quad (\text{I.2.10})$$

De fato, de $\frac{d}{dt} S_j = \frac{(-1)^{m+j}}{\Delta} \Delta_{mj} \delta_a$ segue que

$$S_j = \frac{(-1)^{m+j}}{\Delta} \Delta_{mj} Y(\cdot - a) - \tilde{S}_j$$

onde $\tilde{S}_j$ é uma primitiva de $\frac{d}{dt} \left[\frac{(-1)^{m+j}}{\Delta} \Delta_{mj} \right] Y(\cdot - a)$ o que implica que

$$S_j = \frac{(-1)^{m+j}}{\Delta} \Delta_{mj} Y(\cdot - a)$$

(I.3) Soluções Fundamentais de Operadores Diferenciais Ordinários Lineares de Ordem $m \geq 1$ com Coeficientes Complexos Constantes

As soluções fundamentais do operador diferencial ordinário linear de ordem $m \geq 1$ com coeficientes complexos:

$$L = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{d}{dt} + a_m \quad (I.3.1)$$

são

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j + Y e(\cdot, 0), \quad \text{com } c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C} \quad (I.3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \exp(\lambda_1 t) \\ x_2(t) &= t \exp(\lambda_1 t) \\ &\dots \dots \dots \\ x_{m_1}(t) &= t^{m_1} \exp(\lambda_1 t) \\ \\ x_{m_1+1}(t) &= \exp(\lambda_2 t) \\ x_{m_1+2}(t) &= t \exp(\lambda_2 t) \\ &\dots \dots \dots \\ x_{m_1+m_2}(t) &= t^{m_2} \exp(\lambda_2 t) \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ x_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}(t) &= \exp(\lambda_r t) \\ x_{m_1+\dots+m_{r-1}+2}(t) &= t \exp(\lambda_r t) \\ &\dots \dots \dots \\ x_{m_1+\dots+m_r}(t) &= t^{m_r} \exp(\lambda_r t) \end{aligned} \quad (I.3.3)$$

constituem uma base ordenada do espaço vetorial complexo das soluções da equação homogênea $Lu = 0$;

$$m_1, m_2, \dots, m_r$$

são, respectivamente, as multiplicidades algébricas de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ como raízes da equação característica de (I.3.1):

$$\lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0 \quad (\text{I.3.4})$$

e $e(t, 0)$ dado em (I.2.9) é precisamente a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ \frac{d^j}{dt^j} u(0) = 0, \quad j=0, 1, \dots, m-2; \quad \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{I.3.5})$$

Por exemplo, uma solução fundamental do operador $\frac{d^2}{dt^2} - a \frac{d}{dt}$, $0 \neq a \in \mathbb{C}$, é a função contínua (não diferenciável) em $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)Y(t) .$$

CAPÍTULO II

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DOS OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM EM $n \geq 2$ VARIÁVEIS REAIS COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES E DOS SEUS OPERADORES ITERADOS

Resumo do Capítulo

O segundo capítulo está subdividido em quatro seções:

(II.1) Soluções fundamentais de operadores diferenciais parciais lineares de primeira ordem em $n \geq 2$ variáveis reais com coeficientes complexos constantes;

(II.2) Soluções fundamentais dos iterados de operadores diferenciais parciais lineares de primeira ordem em $n \geq 2$ variáveis reais com coeficientes complexos constantes;

(II.3) Soluções fundamentais do operador de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ e do operador anti Cauchy-Riemann}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad i^2 = -1;$$

(II.4) Soluções fundamentais de $P(\partial) = \frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b$
 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}.$

A primeira seção considera soluções fundamentais de $P(\partial) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b$, $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{C}$ e a segunda seção trata de soluções fundamentais de $P(\partial)^m = P(\partial) \dots P(\partial)$ ($m \geq 1$ vezes). As duas primeiras seções estão subdivididas em

duas partes: a primeira parte é relativa ao caso de $\text{Rea} = (\text{Rea}_1, \dots, \text{Rea}_n)$ e $\text{Ima} = (\text{Ima}_1, \dots, \text{Ima}_n)$ serem vetores linearmente dependentes do $\mathbb{R}^n$ e a segunda parte é relativa ao caso de Rea e Ima serem vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^n$. Na primeira parte, $P(\partial)$ é transformado, por uma mudança linear de variáveis, no operador $\frac{\partial}{\partial y_1}$ e na segunda parte, $P(\partial)$ é transformado, também por uma mudança linear de variáveis, no operador de Cauchy-Riemann. Os resultados da terceira seção, obtidos com a técnica da transformação parcial de Fourier, são utilizados na segunda parte da primeira seção. Os resultados da última seção, embora contidos na primeira parte da primeira seção, são de interesse por serem conseguidos também com a técnica da transformação parcial de Fourier.

(II.1) Soluções Fundamentais de Operadores Diferenciais Parciais Lineares de Primeira Ordem em $n \geq 2$ Variáveis Reais com Coeficientes Complexos Constantes

Consideremos os seguintes operadores diferenciais parciais lineares de primeira ordem em $n \geq 2$ variáveis reais $x_1, \dots, x_n$ com coeficientes complexos constantes $a_1, \dots, a_n$ não simultaneamente nulos

$$P(\partial) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b, \quad b \in \mathbb{C} \quad (\text{II.1.1})$$

$$P_o(\partial) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (\text{II.1.2})$$

A relação entre $P(\partial)$ e $P_o(\partial)$ abaixo:

$$P(\partial)[fT] = [P(\partial)f]T + f[P_o(\partial)T] \quad (\text{II.1.3})$$

válida para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ arbitrários implica que, para cada $T \in D'(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} P(\partial)[\exp(-\frac{b}{a_{j_o}}x_{j_o})T] &= \\ &= \exp(-\frac{b}{a_{j_o}}x_{j_o})[P_o(\partial)T] \end{aligned} \quad (\text{II.1.4})$$

onde a_{j_o} é qualquer um dos coeficientes $a_1, \dots, a_n$ que é diferente de zero.

Para cada isomorfismo linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por $y = Ax$, com matriz $[a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ em relação a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e para cada $T \in D'(\mathbb{R}^n)$,

$$P_o(\partial)[ToA] = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kj} a_j \frac{\partial}{\partial y_k} T \right) oA \quad (II.1.5)$$

Com estas considerações, estamos aptos a computar uma solução fundamental de $P(\partial)$ nos dois casos possíveis de $Rea = (Rea_1, \dots, Rea_n)$ e $Ima = Im(a_1, \dots, a_n)$ serem vetores linearmente dependentes ou independentes do R^n .

(II.1.a) Soluções fundamentais de $P(\partial)$ no caso em que Rea e Ima são vetores linearmente dependentes do R^n ;

$$(a_1, \dots, a_n) = \lambda (b_1, \dots, b_n) \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$$

$$b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

Nesta situação, escolhemos um isomorfismo linear A_1 do R^n tal que $A_1(b_1, \dots, b_n) = (1, 0, \dots, 0)$, isto é, tal que a matriz $[a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ de A_1 em relação a base canônica do R^n satisfaz

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} b_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} b_j = 0 \quad k = 2, \dots, n \quad (II.1.6)$$

(existem infinitos isomorfismos lineares nas condições descritas).

Então, tendo em vista (II.1.5) e (II.1.6),

$$P_o(\partial)[ToA_1] = \left(\lambda \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kj} b_j \frac{\partial}{\partial y_k} T \right) oA_1 = \left(\lambda \frac{\partial}{\partial y_1} T \right) oA_1 \quad (II.1.7)$$

e, considerando (II.1.4) e (II.1.7),

$$\begin{aligned}
 P(\partial)[\exp(-\frac{b}{a_{j_0}}x_{j_0})(ToA_1)] &= \\
 &= \lambda \exp(-\frac{b}{a_{j_0}}x_{j_0})(\frac{\partial}{\partial y_1} ToA_1)
 \end{aligned}
 \tag{II.1.8}$$

Conclusão

Para $n \geq 2$,

$$E_{1n} = \frac{|\det A_1|}{\lambda} \exp(-\frac{b}{\lambda b_{j_0}}x_{j_0})[(Y(y_1) \otimes \delta_{y_2 \dots y_n}) \circ A_1] \tag{II.1.9}$$

é uma solução fundamental de

$$\begin{aligned}
 P(\partial) &= \lambda(b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + b_n \frac{\partial}{\partial x_n}) + b & 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \\
 & & b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

lembrando que

$$Y(y_1) \otimes \delta_{y_2 \dots y_n} \text{ é uma solução fundamental de } \frac{\partial}{\partial y_1}$$

e que

$$\delta = |\det A_1| \delta \circ A_1$$

pela substituição da expressão de $E_{1,n}$ em (II.1.8). Além disso, para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\langle E_{1n}, \psi \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \exp(-\frac{b}{\lambda}t) \psi(b_1 t, \dots, b_n t) dt \tag{II.1.10}$$

(II.1.b) Soluções fundamentais de $P(\partial)$ no caso em que Rea e Ima são vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^n$

Nesta situação, escolhemos um isomorfismo linear A_2 do $\mathbb{R}^n$ tal que

$$A_2(\text{Rea}_1, \dots, \text{Rea}_n) = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right) \quad (\text{II.1.11})$$

$$A_2(\text{Ima}_1, \dots, \text{Ima}_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \dots, 0\right)$$

isto é, tal que a matriz $[a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ de A_2 em relação a base canônica do $\mathbb{R}^n$ satisfaz

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} \text{Rea}_j = \frac{1}{2} \quad (\text{II.1.12})$$

$$\sum_{j=1}^n a_{2j} \text{Ima}_j = \frac{1}{2}$$

(para $n \geq 3$, existem infinitos isomorfismos lineares nas condições descritas e, para $n = 2$, existe um único isomorfismo linear nestas condições).

Então, levando em conta (II.1.5) e (II.1.12),

$$P_o(\partial)[\text{ToA}_2] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} T + i \frac{\partial}{\partial y_2} T \right) \circ A_2 \quad (\text{II.1.13})$$

e, considerando (II.1.4) e (II.1.13),

$$\begin{aligned} P(\partial) \left[\exp\left(-\frac{b}{a_{j_o}} x_{j_o}\right) (\text{ToA}_2) \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{b}{a_{j_o}} x_{j_o}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} T + i \frac{\partial}{\partial y_2} T \right) \circ A_2 \end{aligned} \quad (\text{II.1.14})$$

Conclusão

Para $n \geq 3$,

$$E_{2n} = |\det A_2| \exp\left(-\frac{b}{a_{j_o}} x_{j_o}\right) \left[\left(\frac{1}{\pi(y_1 + iy_2)} \otimes \delta_{y_3 \dots y_n} \right) \circ A_2 \right] \quad (\text{II.1.15})$$

é uma solução fundamental de

$$P(\partial) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b \quad a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{C}$$

com a_{j_o} um dos coeficientes $a_1, \dots, a_n$ não nulo, no caso em que $\text{Re} a$ e $\text{Im} a$ são vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^n$, observando que (v. seção II.3)

$$\frac{1}{\pi(y_1 + iy_2)} \otimes \delta_{y_3 \dots y_n} \text{ é uma solução fundamental de } \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right)$$

e que

$$\delta = |\det A_2| \delta \circ A_2$$

pela substituição da expressão de E_{2n} em (II.1.14).

Para $n = 2$,

$$E_{22} = |\det A_2| \exp\left(-\frac{b}{a_{j_o}} x_{j_o}\right) \left[\frac{1}{\pi(y_1 + iy_2)} \circ A_2 \right] \quad (\text{II.1.16})$$

é uma solução fundamental de

$$P(\partial) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + b \quad a_1, a_2, b \in \mathbb{C}$$

com a_{j_o} um dos coeficientes a_1, a_2 não nulo, no caso em que $(\text{Re} a_1, \text{Re} a_2)$ e $(\text{Im} a_1, \text{Im} a_2)$ são vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^2$. Além disso, para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle E_{2n}, \psi \rangle &= \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy} \exp\left[-\frac{2b}{a_{j_0}}(x\text{Re}a_{j_0} + y\text{Im}a_{j_0})\right] \psi(2x\text{Re}a + 2y\text{Im}a) d(x,y) \end{aligned} \quad (\text{II.1.17})$$

(II.2) Soluções Fundamentais dos Iterados de Operadores Diferenciais Parciais Lineares de Primeira Ordem em $n \geq 2$ Variáveis Reais com Coeficientes Complexos Constantes

Teorema II.2.1

Suponhamos que E é uma solução fundamental de

$$P(\partial) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b, \quad a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{C}$$

Então

$$E_m = c_m Q^{m-1} E \quad (\text{II.2.1})$$

onde

$$(m-1)! |a|^{2(m-1)} c_m = 1 \quad (\text{II.2.2})$$

e

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \bar{a}_1 x_1 + \dots + \bar{a}_n x_n \quad (\text{II.2.3})$$

é uma solução fundamental de $P(\partial)^m$ para $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Prova (por indução)

O caso $m = 1$ é trivial. Suponhamos agora o teorema válido para $m > 1$, isto é,

$$P(\partial)^m E_m = \delta$$

Temos de provar que $P(\partial)^{m+1} E_{m+1} = \delta$. De fato, de

$$P(\partial)^{m+1} E_{m+1} = c_{m+1} P(\partial)^m [P(\partial)(Q^m E)]$$

$$P(\partial)[Q^m E] = m|a|^2 Q^{m-1} E + Q^m P(\partial) E = m|a|^2 Q^{m-1} E$$

segue que

$$P(\partial)^{m+1} E_{m+1} = mc_{m+1} |a|^2 P(\partial)^m [Q^{m-1} E] = P(\partial)^m E_m = \delta$$

o que prova o teorema.

(II.2.a) Soluções fundamentais de $P(\partial)^m$ no caso em que $Re a$ e $Im a$ são vetores linearmente dependentes do R^n :

$$(a_1, \dots, a_n) = \lambda(b_1, \dots, b_n) \quad \begin{array}{l} 0 \neq \lambda \in \mathbb{C} \\ b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} \end{array}$$

Pelo teorema anterior,

$$E_{lnm} = \frac{(|\lambda| |b|)^{-2(m-1)}}{(m-1)!} Q^{m-1} E_{ln} \quad (\text{II.2.4})$$

onde $Q(x_1, \dots, x_n) = \bar{\lambda}(b_1 x_1 + \dots + b_n x_n)$

é uma solução fundamental de $P(\partial)^m$ neste caso. Além disso, para cada $\psi \in C_c^\infty(R^n; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
\langle E_{1nm}, \psi \rangle &= \\
&= \frac{\lambda^{-m}}{(m-1)!} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{bt}{\lambda}\right) t^{m-1} \psi(b_1 t, \dots, b_n t) dt
\end{aligned}
\tag{II.2.5}$$

(II.2.b) Soluções fundamentais de $P(\partial)^m$ no caso em que Rea e Ima são vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^n$

Pelo teorema anterior,

$$E_{2nm} = c_m Q^{m-1} E_{2n} \tag{II.2.6}$$

com c_m como em (II.2.2) e Q como em (II.2.3), é uma solução fundamental de $P(\partial)^m$ neste caso. Além disso, para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
\langle E_{2nm}, \psi \rangle &= \\
&= \frac{2^{m-1} |a|^{-2(m-1)}}{\pi (m-1)!} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{2b}{a_{j_0}}(x \text{Rea}_{j_0} + y \text{Ima}_{j_0})}}{x + iy} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\psi(2x \text{Rea} + 2y \text{Ima})}{[(|\text{Rea}|^2 - i \text{Rea} \cdot \text{Ima})x + (\text{Rea} \cdot \text{Ima} - i |\text{Ima}|^2)y]^{1-m}} d(x, y)
\end{aligned}
\tag{II.2.7}$$

($a_{j_0} \neq 0$ é um dos coeficientes $a_1, \dots, a_n$)

(II.3) Soluções Fundamentais do Operador de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ e do Operador Anti Cauchy-Riemann}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad i^2 = -1$$

A equação $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} E = \delta$, $E \in S'(R^2)$, é equivalente, pela transformação parcial de Fourier F_y em relação a y , à equação

$$\frac{\partial}{\partial x} v - yv = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \delta_x \otimes 1_y, \quad v \in S'(R^2) \quad (\text{II.3.1})$$

cuja solução distribuição conhecida (v. teorema II.4.1) é a função

$$V(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp(xy) Y(x), \quad (\text{II.3.2})$$

onde Y é a função de Heaviside, que não é uma distribuição temperada do R^2 . Entretanto,

$$\tilde{V}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp(xy) [Y(x) - Y(y)] \quad (\text{II.3.3})$$

é uma distribuição temperada do R^2 e é uma solução distribuição de (II.3.1). (Na verdade, para cada $f \in L^1_{\text{loc}}(R)$,

$$V_f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp(xy) [Y(x) - f(y)]$$

é uma solução distribuição de (II.3.1) que nem sempre é uma distribuição temperada do R^2 : a escolha de $f = Y$ conduziu à expressão de V).

Concluimos então que $F_y^{-1} \tilde{V}$ é uma solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann e que

$$\begin{aligned}
 (F_y^{-1} \tilde{V})(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iy t) \tilde{V}(x, t) dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[(x+iy)t] [Y(x) - Y(t)] dt = \frac{1}{\pi(x+iy)}
 \end{aligned}$$

Conclusão

As soluções fundamentais do operador de Cauchy-Riemann são da forma

$$E + H$$

onde $E \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2) \cap S'(\mathbb{R}^2)$ é dada por

$$E(x, y) = \frac{1}{\pi(x+iy)} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad (\text{II.3.4})$$

e H é uma função analítica em todo o plano complexo $z = x+iy$. (Conseqüência dos seguintes fatos: duas soluções fundamentais do operador de Cauchy-Riemann diferem por uma solução da equação homogênea associada e toda solução de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} h = 0$ é uma função analítica no plano complexo $z = x+iy$).

As soluções fundamentais do operador anti Cauchy-Riemann são da forma

$$E + H$$

onde $E \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2) \cap S'(\mathbb{R}^2)$ é dada por

$$E(x, y) = \frac{1}{\pi(x-iy)} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad (\text{II.3.5})$$

e H é uma solução da equação $\frac{\partial}{\partial z} h = 0$. (Por analogia com o caso anterior ou pela utilização da fórmula II.1.17).

(II.4) Soluções Fundamentais de $P(\partial) = \frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b$
 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$

A equação $P(\partial)E = \delta_{ta}$, $E \in S'(\mathbb{R}_{tx}^{n+1})$ é equivalente, pela transformação parcial de Fourier F_x em relação a $x=(x_1, \dots, x_n)$, à equação

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_x E) + (ia_1 x_1 + \dots + ia_n x_n + b)(F_x E) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (1_x \otimes \delta_t)$$

cuja solução conhecida (v. teorema II.4.1) é

$$\begin{aligned} & \exp(-bt)Y(t) \otimes (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp(ia_1 x_1 + \dots + ia_n x_n) = \\ & = \exp(-bt)Y(t) \otimes F_x(\delta_{ta}), \quad a = (a_1, \dots, a_n) \\ & = F_x[\exp(-bt)Y(t) \otimes \delta_{ta}] \end{aligned}$$

Conclusão

Para $n \geq 1$,

$$E_{n+1} = \exp(-bt)Y(t) \otimes \delta_{ta} \quad (\text{II.4.1})$$

é uma solução fundamental de

$$P(\partial) = \frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$$

Teorema II.4.1

Suponhamos que os coeficientes da equação diferencial ordinária linear dependente do parâmetro $s \in \mathbb{R}^P$:

$$L_s u = \frac{\partial^m}{\partial t^m} u + a_1(s) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u + \dots + a_m(s) u = c(1_s \otimes \delta_t) \quad c \in \mathbb{C}$$

são funções contínuas em todos os pontos do $\mathbb{R}^P$. Então, uma so

lução desta equação é dada por:

$$v(t,s) = ce(t,s)Y(t)$$

onde $e(t,s)$ é a solução do problema de valor inicial $L_s u = 0$;
 $\frac{d^j}{dt^j} u(0) = 0, j = 0, \dots, m-2, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(0) = 1.$

Prova: [12], p. 263.

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DOS OPERADORES CLÁSSICOS DA FÍSICA-MATEMÁTICA

Resumo do Capítulo

O terceiro capítulo está subdividido em seções:

- (III.1) Soluções fundamentais do operador do calor n -dimensional;
- (III.2) Soluções fundamentais do operador do calor n -dimensional generalizado;
- (III.3) Soluções fundamentais do operador de Schrödinger n -dimensional;
- (III.4) Soluções fundamentais do operador de Schrödinger n -dimensional generalizado;
- (III.5) Soluções fundamentais do operador de Laplace n -dimensional:
 - (III.5.a) Obtenção de uma solução fundamental do operador de Laplace n -dimensional ($n \geq 3$) pelo método da descida aplicado ao operador do calor n -dimensional;
 - (III.5.b) Obtenção de uma solução fundamental do operador de Laplace n -dimensional ($n \geq 2$) pelo método da transformação total de Fourier;
 - (III.5.c) Obtenção de uma solução fundamental do operador de Laplace n -dimensional ($n \geq 2$) pela fórmula de Green;

- (III.6) Soluções fundamentais do operador de Laplace n -dimensional generalizado;
- (III.7) Soluções fundamentais do operador de Helmholtz n -dimensional;
- (III.8) Soluções fundamentais do operador das ondas n -dimensional:
- (III.8.a) Soluções fundamentais do operador das ondas unidimensional;
- (III.8.b) Soluções fundamentais do operador das ondas tridimensional;
- (III.8.c) Soluções fundamentais do operador das ondas bidimensional;
- (III.8.d) Soluções fundamentais do operador das ondas n -dimensional ($n \geq 4$ par);
- (III.8.e) Soluções fundamentais do operador das ondas n -dimensional ($n \geq 3$ ímpar);
- (III.8.f) Soluções fundamentais do operador das ondas n -dimensional generalizado.

(III.1) Soluções Fundamentais do Operador do Calor n-Dimensional

A equação

$$\frac{\partial}{\partial t} E - k \Delta_n E = \delta, \quad k > 0, \quad E \in S'(\mathbb{R}_{tx}^{n+1}) \quad (\text{III.1.1})$$

é equivalente, pela transformação parcial de Fourier F_x em relação a $x = (x_1, \dots, x_n)$, à equação

$$\frac{\partial}{\partial t} v + k |x|^2 v = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\delta_t \otimes 1_x) \quad (\text{III.1.2})$$

cujas soluções conhecidas (v. teorema II.4.1) são a função

$$v(t, x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} Y(t) \exp(-k |x|^2 t), \quad (\text{III.1.3})$$

onde Y é a função de Heaviside, que é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Conclusão

Uma solução fundamental do operador do calor n-dimensional é $E_n = F_x^{-1} v$, que é igual a

$$\begin{aligned} E_n(t, x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ixy) v(t, y) dy = \\ &= (4\pi kt)^{-\frac{n}{2}} Y(t) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4kt}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

pela utilização do item (a) da tabela anexa ao Capítulo III.

Propriedades de E_n :

- (1) E_n é invariante em relação às transformações lineares ortogonais do R_x^n ;
- (2) $|E_n(t, x)| \leq (4\pi k)^{-\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2}} \quad x \in R^n \quad t \geq t_0 > 0$;
- (3) $\text{supp} E_n = \{(t, x) \in R^{n+1} : t \geq 0\}$;
- (4) $\int_{R^n} E_n(t, x) dx = Y(t)$;
- (5) $E_n \in C^\infty(R^{n+1} \setminus \{0\}, R)$;
- (6) E_n não é analítica em $R^{n+1} \setminus \{0\}$;
- (7) $\lim_{t \rightarrow 0^+} E_n(t, x) = \delta \quad \text{em} \quad D'(R_x^n)$.

Em virtude das propriedades (5) e (6) de E_n , o operador do calor n -dimensional é um exemplo de um operador hipoelítico que não é analítico-hipoelítico.

Por um procedimento análogo ao acima, podemos mostrar que

$$E_n^-(t, x) = -(4\pi k t)^{-\frac{n}{2}} Y(-t) \exp\left(\frac{-|x|^2}{4kt}\right) \quad (\text{III.1.5})$$

é uma solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n$ com $k < 0$.

Pela unificação das fórmulas (III.1.4) e (III.1.5), concluimos que

$$E_n(t, x) = \text{sgn}k(4\pi k t)^{-\frac{n}{2}} Y(t \text{sgn}k) \exp\left(\frac{-|x|^2}{4kt}\right) \quad (\text{III.1.6})$$

é uma solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n$ com $0 \neq k \in R$.

Pelo princípio da continuação analítica (v.[11], p. 72) obtemos finalmente que a função localmente integrável do R^{n+1}

$$E_n(t, x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} k) (4\pi k t)^{-\frac{n}{2}} Y(t \operatorname{sgn} \operatorname{Re} k) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4k t}\right) \quad (\text{III.1.7})$$

é uma solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n$ com $k \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re} k \neq 0$.

(III.2) Soluções Fundamentais do Operador do Calor n -Dimensional Generalizado

$$P(\partial) = \frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b, \quad k \in \mathbb{C} \text{ com } \operatorname{Re} k \neq 0$$

$$a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1$$

A relação abaixo válida para $f \in C^\infty(R_{tx}^{n+1}, \mathbb{C})$ e $u \in D'(R^{n+1})$:

$$\begin{aligned} P(\partial)[\exp(f)u] &= \\ &= \exp(f) \left[\frac{\partial}{\partial t} u - k\Delta_n u + \sum_{j=1}^n (a_j - 2k \frac{\partial}{\partial x_j} f) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right] + \\ &+ \exp(f) \left[\frac{\partial}{\partial t} f + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} f - k \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right)^2 \right) + b \right] u \end{aligned}$$

conduz à fórmula de uma solução fundamental de $P(\partial)$.

Conclusão

Uma solução fundamental de $P(\partial)$ é

$$F_n = \exp(f) E_n \quad (\text{III.2.1})$$

onde

$$f(t, x) = -bt - \frac{t}{4k} \sum_{j=1}^n a_j^2 + \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^n a_j x_j, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

e

$$E_n(t, x) \quad \text{dada pela fórmula (III.1.7)}$$

é uma solução fundamental do operador $\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n$, $\operatorname{Re} k \neq 0$.

(III.3) Soluções Fundamentais do Operador de Schrödinger n -Di mensional

A equação

$$\frac{\partial}{\partial t} E - ib\Delta_n E = \delta, \quad k > 0, \quad i^2 = -1, \quad E \in S'(\mathbb{R}_{tx}^{n+1}) \quad (\text{III.3.1})$$

é equivalente, pela transformação parcial de Fourier F_x em relação a $x = (x_1, \dots, x_n)$, à equação

$$\frac{\partial}{\partial t} v + ib|x|^2 v = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\delta_t \otimes 1_x) \quad (\text{III.3.2})$$

cuja solução conhecida (v. teorema II.4.1) é a função

$$V(t, x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} Y(t) \exp(-ib|x|^2 t), \quad (\text{III.3.3})$$

onde Y é a função de Heaviside, que é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Conclusão

Uma solução fundamental do operador de Schrödinger n -dimensional é $E_n = F_x^{-1}V$, que é uma distribuição temperada do R^{n+1} dada por: para cada $\psi \in S(R^{n+1})$,

$$\begin{aligned} \langle E_n, \psi \rangle &= \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^{n+1}} Y(t) \exp(-ib|x|^2 t) (F_x^{-1}\psi)(t, x) d(t, x) = \quad (\text{III.3.4}) \\ &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{8\pi b}} \right)^n \int_0^\infty \left[\int_{R^n} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{i|x|^2}{4bt}\right) \psi(t, x) dx \right] dt \end{aligned}$$

pela utilização do teorema de Fubini e do item (c) da tabela anexa ao Capítulo III.

Propriedades de E_n :

$$(1) E_1(t, x) = \frac{(1-i)}{\sqrt{8\pi b t}} Y(t) \exp\left(-\frac{ix^2}{4bt}\right) \text{ é uma função localmente integrável do } R^2 \text{ e é uma solução fundamental de } \frac{\partial}{\partial t} - ib \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (b > 0);$$

(2) Para cada $n \geq 2$, a função

$$(t, x) \in R^{n+1} \rightarrow \left(\frac{1-i}{\sqrt{8\pi b}} \right)^n Y(t) t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{i|x|^2}{4bt}\right) \in C$$

ainda que analítica em $\{(t, x) \in R^{n+1} : t \neq 0\}$ e invariante em relação às transformações lineares ortogonais do R_x^n não é uma função infinitamente diferenciável em vizinhança alguma de pontos da forma $(0, x)$ e,

o que é pior, não é uma função localmente integrável do R^{n+1} , o que a impede de ser identificada com a solução fundamental E_n do operador de Schrödinger n -dimensional.

Em virtude das propriedades (1) e (2) de E_n , o operador de Schrödinger n -dimensional é um exemplo de um operador não-hipoelítico.

Por um procedimento análogo ao do parágrafo anterior, podemos concluir que uma solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial t} - ib\Delta_n$, $0 \neq b \in R$ é a distribuição temperada E_n do R^{n+1} dada por: para cada $\psi \in S(R^{n+1})$,

$$\begin{aligned} \langle E_n, \psi \rangle &= \\ &= \left(\frac{1 - i \operatorname{sgn} b}{\sqrt{8\pi|b|}} \right)^n \int_0^\infty \left[\int_{R^n} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{i|x|^2}{4bt}\right) \psi(t, x) dx \right] dt \end{aligned} \quad (\text{III.3.5})$$

(III.4) Soluções Fundamentais do Operador de Schrödinger n -Dimensional Generalizado

$$P(\partial) = \frac{\partial}{\partial t} - ib\Delta_n + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c, \quad 0 \neq b \in R, i^2 = -1$$

$$a_1, \dots, a_n, c \in C, n \geq 1$$

A relação a seguir válida para $f \in C^\infty(R_{tx}^{n+1}; C)$ e $u \in D'(R_{tx}^{n+1})$:

$$\begin{aligned}
P(\partial)[\exp(f)u] &= \\
&= \exp(f)\left[\frac{\partial}{\partial t}u - ib\Delta_n u + \sum_{j=1}^n (a_j - 2ib\frac{\partial}{\partial x_j}f)\frac{\partial}{\partial x_j}u\right] + \\
&+ \exp(f)\left[\frac{\partial}{\partial t}f + \sum_{j=1}^n (a_j\frac{\partial}{\partial x_j}f - ib\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}f - ib(\frac{\partial}{\partial x_j}f)^2) + c\right]u
\end{aligned}$$

conduz à fórmula de uma solução fundamental de $P(\partial)$.

Conclusão

Uma solução fundamental de $P(\partial)$ é

$$F_n = \exp(f)E_n \quad (\text{III.4.1})$$

onde

$$f(t, x) = -ct + \frac{it}{4b} \sum_{j=1}^n a_j^2 - \frac{i}{2b} \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

e E_n é a solução fundamental do operador de Schrödinger n -dimensional dado em (III.3.5).

(III.5) Soluções Fundamentais do Operador de Laplace n -Dimensional

(III.5.a) Obtenção de uma solução fundamental do operador de Laplace n -dimensional ($n \geq 3$) pelo método da descida aplicado ao operador do calor n -dimensional

Os fatos

$$(1) E_n(t, x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} Y(t) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \quad (\text{III.5.1})$$

é uma função localmente integrável do R^{n+1} e é uma solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n$ (v. fórmula (III.1.4)) e

(2) a função

$$x \in R^n \rightarrow \overset{\circ}{E}_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_n(t, x) dt = \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} \quad (\text{III.5.2})$$

onde $\omega_n = \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ é a medida da esfera unitária em

R^n , apenas para $n \geq 3$,

implicam que a função-contração $\overset{\circ}{E}_n$ de E_n ao R^n da da por (III.5.2) é uma solução fundamental de $-\Delta_n$ (v. método da descida no Capítulo 0).

Conclusão

Para $n \geq 3$, uma solução fundamental do operador de Laplace n -dimensional é a função localmente integrável do R^n

$$E_n(x) = \frac{-|x|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} \quad (\text{III.5.3})$$

que é uma função analítica em $R^n \setminus \{0\}$.

(III.5.b) Obtenção de uma solução fundamental do operador de Laplace n -dimensional ($n \geq 2$) pelo método da transformada total de Fourier

A equação

$$\Delta_n E = \delta \quad (\text{III.5.4})$$

é transformada, pela transformação total de Fourier F , na equação

$$-|x|^2 F E = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}. \quad (\text{III.5.5})$$

Motivado por (III.5.5), consideremos a função

$$h_n(x) = -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{-2} \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{III.5.6})$$

que é uma função localmente integrável do $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$. (Para $n = 2$, h_2 é uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$). Portanto, podemos definir a distribuição temperada $\tilde{h}_2$ do $\mathbb{R}^2$ dada por: para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} -2\pi \langle \tilde{h}_2, \psi \rangle &= \\ &= \int_{|x| \leq 1} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x| > 1} \frac{\psi(x)}{|x|^2} dx \end{aligned} \quad (\text{III.5.7})$$

que é uma distribuição extensão da distribuição $h_2 \in D'(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ e que ainda satisfaz a equação $-2\pi |x|^2 \tilde{h}_2 = 1$ em $S'(\mathbb{R}^2)$; $\tilde{h}_2$ é chamada a parte finita de $-1/(2\pi |x|^2)$.

Conclusão

Para $n > 3$, $E_n = F^{-1}h_n$ é uma solução fundamental do operador de Laplace n -dimensional.

Para $n = 3$, $E_3(x) = (F^{-1}h_3)(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$, $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$ (v. tabela anexa ao Capítulo III) é uma solução fundamental de Δ_3 .

Para $n = 2$, $E_2(x) = (F^{-1}\tilde{h}_2)(x) = \frac{c}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\ln|x|$, $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$ e $c \in \mathbb{C}$ (v. tabela anexa ao Capítulo III) é uma solução fundamental de Δ_2 .

Cálculo de E_n ($n > 3$)

A distribuição temperada E_n é a transformada inversa de Fourier da função h_n localmente integrável do $\mathbb{R}^n$, a qual é homogênea de ordem -2 e dependente apenas de $|x|$. Assim, E_n é invariante em relação às transformações lineares ortogonais do $\mathbb{R}^n$ e é homogêneo de ordem $2-n$ (v. transformação de Fourier no Capítulo zero). Em consequência, a restrição da distribuição E_n a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é identificada com a função

$$g_n(x) = c_n |x|^{2-n} \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{III.5.8})$$

e $E_n - g_n$ é uma distribuição cujo suporte é a origem, isto é, $E_n - g_n$ é uma combinação linear finita com coeficientes complexos da distribuição de Dirac δ e de suas derivadas parciais $\partial^\alpha \delta$ (v. caracterização de distribuições homogêneas e invariantes por transformações lineares ortogonais e caracterização de distribuições com suporte em um ponto). Como a ordem de homoge-

neidade de δ é igual a $-n$ e da ordem de homogeneidade de $\partial^\alpha \delta$ é igual a $-n-|\alpha|$, temos que a tal combinação linear finita é a combinação linear nula. Portanto, $E_n = g_n$ e, para cada $\psi \in S(R^n)$,

$$\langle E_n, \psi \rangle = \langle g_n, \psi \rangle = \quad (III.5.9)$$

$$= c_n \int_{R^n} \psi(x) |x|^{2-n} dx$$

O cálculo da constante c_n é feito pela aplicação de E_n na função ψ_o , onde $\psi_o(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$, $x \in R^n$, é um ponto fixo da transformação de Fourier em $S(R^n)$: de fato, por um lado

$$\begin{aligned} \langle E_n, \psi_o \rangle &= c_n \int_{R^n} \exp(-\frac{1}{2}|x|^2) |x|^{2-n} dx = \\ &= c_n \omega_n \int_0^\infty r \exp(-\frac{1}{2}r^2) dr = c_n \omega_n \end{aligned} \quad (III.5.10)$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle E_n, \psi_o \rangle &= \langle E_n, F^{-1} \psi_o \rangle = \langle F^{-1} E_n, \psi_o \rangle = \\ &= -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} |x|^{-2} \exp(-\frac{1}{2}|x|^2) dx = \\ &= -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \omega_n \int_0^\infty r^{n-3} \exp(-\frac{1}{2}r^2) dr = -\frac{1}{(n-2)} \end{aligned} \quad (III.5.11)$$

A comparação de (III.5.10) e (III.5.11) mostra que

$$c_n = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \quad (III.5.12)$$

Conclusão

Para $n = 2$, uma solução fundamental de Δ_2 é a função localmente integrável do R^2

$$E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|, \quad 0 \neq x \in R^2$$

que é analítica em $R^2 \setminus \{0\}$.

Para $n \geq 3$, uma solução fundamental de Δ_n é a função localmente integrável do R^n

$$E_n(x) = - \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)\omega_n}, \quad 0 \neq x \in R^n,$$

que é analítica em $R^n \setminus \{0\}$.

Para $n = 1$, é imediato verificar que a função contínua $E_1(x) = \frac{1}{2}|x|$ é uma solução fundamental de $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (pelo Capítulo I, $x \rightarrow xY(x)$ é outra solução fundamental de Δ_1).

(III.5.c) Obtenção de uma solução fundamental do operador de Laplace n -dimensional ($n \geq 2$) pela fórmula de Green

Para $n \geq 2$, consideremos a função E_n localmente integrável de R^n definida para $0 \neq x \in R^n$ por:

$$E_n(x) = \begin{cases} - \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)\omega_n}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n = 2 \end{cases} \quad (\text{III.5.13})$$

(E_n é obtido como as soluções de $\Delta_n u = 0$ em $R^n \setminus \{0\}$ que são dependentes apenas de $|x|$.)

O teorema abaixo é consequência imediata da fórmula de Green (v. [12], p. 393).

Teorema III.5.1

Sejam Ω um subconjunto aberto não vazio conexo e limitado do $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) cuja fronteira satisfaz as hipóteses das fórmulas de Green e $u \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{C})$. Então, para cada $x \in \Omega$, a fórmula seguinte é válida:

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial N_y} E_n(x-y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial N_y} u E_n(x-y) dy + \\ & + \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta_n u(y) dy \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial}{\partial N_y}$ indica a derivada direcional ao longo da normal exterior à fronteira $\partial\Omega$ de Ω no ponto $y \in \partial\Omega$.

Para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, aplicamos o teorema anterior com Ω sendo a bola aberta de centro na origem do $\mathbb{R}^n$, suporte de ψ contido na bola e $x = 0$:

$$\begin{aligned} \langle \delta, \psi \rangle &= \psi(0) = \int_{\Omega} E_n(y) \Delta_n \psi(y) dy = \\ &= \langle E_n, \Delta_n \psi \rangle = \langle \Delta_n E_n, \psi \rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\Delta_n E_n = \delta \quad \text{em} \quad D'(\mathbb{R}^n).$$

Conclusão

Para $n \geq 2$, E_n como definida em (III.5.13), é uma solução fundamental de Δ_n .

Observação Final

Para $n \geq 1$, o operador de Laplace n -dimensional é analítico-hipoelítico, isto é, toda solução-distribuição da equação homogênea $\Delta_n u = 0$ em $\mathbb{R}^n$ é uma função analítica em $\mathbb{R}^n$ (na teoria clássica das equações diferenciais parciais, este resultado é conhecido como lema de Weyl). Isto é consequência de termos determinado uma solução fundamental de Δ_n analítica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(III.6) Soluções Fundamentais do Operador de Laplace n -Dimensional Generalizado:

$$\tilde{\Delta}_n = \Delta_n + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b ; \quad a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1$$

A equação

$$\Delta_n E - E = \delta \tag{III.6.1}$$

é transformada pela transformação inversa de Fourier F^{-1} em:

$$-(1 + |x|^2) F^{-1} E = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} . \tag{III.6.2}$$

Uma solução fundamental de $\Delta_n - 1$ é

$$-(2\pi)^{-\frac{n}{2}} F \left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right) = -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{1-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-1}(|x|),$$

$$0 \neq x \in \mathbb{R}^n$$

(v. item f da tabela anexa ao Capítulo III).

Conclusão

Uma solução fundamental de $\Delta_n - \lambda$, $\lambda > 0$ é

$$E_n(x) = -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{|x|} \right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda}|x|),$$

$$0 \neq x \in \mathbb{R}^n,$$
(III.6.3)

pela consideração da mudança linear de variáveis A do $\mathbb{R}^n$ dada por $Ax = \sqrt{\lambda}x$.

Pelo método da continuação analítica, uma solução fundamental de $\Delta_n - \lambda$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ é

$$E_n(x) = -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\lambda/|x|} \right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda}|x|),$$

$$0 \neq x \in \mathbb{R}^n,$$
(III.6.4)

onde $\sqrt{z}$ indica o valor principal da raiz quadrada do número complexo z .

A relação abaixo válida para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e $u \in D'(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_n [\exp(f)u] &= \\ &= \exp(f) [\Delta_n u + \sum_{j=1}^n (2 \frac{\partial}{\partial x_j} f + a_j) \frac{\partial}{\partial x_j} u] + \\ &+ \exp(f) [b + \sum_{j=1}^n (\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f + a_j \frac{\partial}{\partial x_j} f + (\frac{\partial}{\partial x_j} f)^2)] u \end{aligned}$$

conduz à fórmula de uma solução fundamental de $\tilde{\Delta}_n$.

Conclusão Final

Uma solução fundamental de $\tilde{\Delta}_n$ é

$$F_n = \exp(f) E_n \quad (\text{III.6.5})$$

onde

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

e E_n é a solução fundamental de $\Delta_n - \lambda$ dada por (III.6.4) se

$$\lambda = -b + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0$$

(se $\lambda = 0$, E_n é a solução fundamental de Δ_n dada em III.5).

(III.7) Soluções Fundamentais do Operador de Helmholtz n -Di
mensional

O operador de Helmholtz n -dimensional $\Delta_n + k^2$, com $k > 0$, foi considerado na seção anterior. O objetivo desta seção é o de computar soluções fundamentais do operador de Helmholtz n -dimensional para os casos $n = 1, 2$ e 3 diretamente.

Caso $n = 1$

Uma solução fundamental do operador de Helmholtz unidimensional $\frac{d^2}{dt^2} + k^2$ com $k > 0$ é a função contínua em todos os pontos da reta real:

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{Y(t)}{2ik} [\exp(ikt) - \exp(-ikt)] = \frac{Y(t)}{k} \operatorname{sen}(kt) \quad (\text{III.7.1})$$

(v. Capítulo I). Pela adição a (III.7.1) de uma solução conveniente da equação homogênea, podemos mostrar que

$$E_1^\pm(t) = \pm \frac{1}{2ik} \exp(\pm ik|t|) \quad (\text{III.7.2})$$

são soluções fundamentais do operador de Helmholtz unidimensional.

Caso $n = 3$

As soluções fundamentais do operador de Helmholtz tridimensional $\Delta_3 + k^2$, com $k > 0$, satisfazem a equação de Helmholtz homogênea em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. As soluções da equação de Helmholtz homogênea em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dependentes de $|x|$ apenas, isto é, as soluções da equação de Helmholtz homogênea em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ da forma $u(x) = v(|x|)$ são tais que v satisfaz a equação diferencial ordinária abaixo:

$$\frac{d^2}{dr^2} v + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} v + k^2 v = \frac{d^2}{dr^2} (rv) + k^2 (rv) = 0, \quad r > 0.$$

Conseqüentemente,

$$u(x) = \frac{a}{|x|} \exp(ik|x|) + \frac{b}{|x|} \exp(-ik|x|), \quad \text{para } x \neq 0,$$

com a e b constantes complexas. Em particular, para $a = -\frac{1}{4\pi}$, $b = 0$ e $a = 0$, $b = -\frac{1}{4\pi}$, obtemos

$$E_3^\pm(x) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x|} \exp(\pm ik|x|), \quad x \neq 0 \quad (\text{III.7.3})$$

que, como funções localmente integráveis do $\mathbb{R}^3$, são soluções

fundamentais do operador de Helmholtz tridimensional. De fato,

$$E_3^\pm(x) = E_3(x) + g_\pm(x) \quad (x \neq 0)$$

onde

$$E_3(x) = - \frac{1}{4\pi|x|} \quad (x \neq 0)$$

é uma solução fundamental do operador de Laplace tridimensional e

$$g_\pm(x) = - \frac{1}{4\pi|x|} [\exp(\pm ik|x|) - 1] \quad (x \neq 0)$$

O fato de que $\Delta_3 g_\pm = -k^2 E_3^\pm$ implica que

$$(\Delta_3 + k^2)E_3^\pm = \Delta_3(E_3 + g_\pm) + k^2 E_3^\pm = \delta.$$

Caso $n = 2$

A equação

$$\Delta_n E + k^2 E = \delta \quad (\text{III.7.4})$$

é equivalente, pela transformação total de Fourier F , à equação

$$(-|x|^2 + k^2)FE = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad (\text{III.7.5})$$

Uma solução fundamental do operador de Helmholtz bidimensional é

$$\begin{aligned} E_2(x) &= F^{-1} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(2\pi)^{-1}}{k^2 + i\varepsilon - |x|^2} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F^{-1} \left[\frac{(2\pi)^{-1}}{k^2 + i\varepsilon - |x|^2} \right] \end{aligned}$$

(pela continuidade da transformação de Fourier)

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y| \leq R} \frac{\exp(-ixy)}{k^2 + i\varepsilon - |y|^2} dy = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K_0(-i\sqrt{k^2 + i\varepsilon}|x|) = \quad \quad \quad (\text{III.7.6}) \\
 &= -\frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|)
 \end{aligned}$$

(v. tabela anexa ao Capítulo III), que é a mesma solução obtida na seção anterior.

(III.8) Soluções Fundamentais do Operador das Ondas n-Dimensional

(III.8.a) Soluções fundamentais do operador das ondas unidimensional ou o-
perador da corda vibrante

$$\square_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad c > 0$$

A mudança linear de variáveis $A : R_{tx}^2 \rightarrow R_{\xi\eta}^2$, dada por $A(t, x) = (t + \frac{x}{c}, t - \frac{x}{c})$, acarreta que, para cada $u \in D'(R^2)$,

$$\square_1(u \circ A) = (4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u) \circ A. \quad (\text{III.8.1})$$

Lembrando que $Y(\xi) \otimes Y(\eta)$, onde Y é a função de Heaviside, é uma solução fundamental de $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$ temos a seguinte

Conclusão

Uma solução fundamental do operador da corda vibrante

$\bar{c}$

$$\begin{aligned}
 E_1(t, x) &= \frac{1}{2c} [Y(\xi) \otimes Y(\eta)] \circ A(t, x) = \\
 &= \frac{1}{2c} Y\left(t + \frac{x}{c}\right) Y\left(t - \frac{x}{c}\right) = \quad \quad \quad (\text{III.8.2}) \\
 &= \frac{1}{2c} Y(ct - |x|)
 \end{aligned}$$

Propriedades de E_1

- (1) E_1 é uma função localmente integrável do $\mathbb{R}^2$ e é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^2$.
- (2) $\text{supp } E_1 = c\ell V_1$, $V_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |x| < ct\}$.
- (3) E_1 é homogênea de ordem zero.
- (4) E_1 é a única solução fundamental do operador da corda vibrante cujo suporte está contido no semiplano $\mathbb{R}_+^2 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$.

O operador da corda vibrante não é hipoelítico: com a mudança linear de variáveis A dada acima, podemos concluir que a solução clássica geral da equação da corda vibrante homogênea é da forma $F(x + ct) + G(x - ct)$, com $F, G \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (fórmula de D'Alembert).

(III.8.b) *Soluções fundamentais do operador das ondas tridimensional*

$$\square_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_3, \quad c > 0$$

A equação

$$\square_n E = \delta \quad (\text{III.8.3})$$

é equivalente, pela transformação parcial de Fourier F_x em relação a $x = (x_1, \dots, x_n)$, à equação

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v + c^2 |x|^2 v = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\delta_t \otimes 1_x) \quad (\text{III.8.4})$$

cuja solução conhecida (v. teorema II.4.1) é a função

$$V(t, x) = Y(t) W_t(x) \quad (\text{III.8.5})$$

onde Y é a função de Heaviside e

$$W_t(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\text{sen}(c|x|t)}{c|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{III.8.6})$$

Além disso, V define uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^n$.

Conclusão

Uma solução fundamental do operador das ondas tridimensional é

$$\begin{aligned} E_3(t, x) &= (F_x^{-1} V)(t, x) = \frac{Y(t)}{4\pi c^2 t} \delta_{S_{ct}}(x) = \\ &= \frac{Y(t)}{2\pi c} \delta(c^2 t^2 - |x|^2) \end{aligned} \quad (\text{III.8.7})$$

onde S_{ct} é a esfera de centro na origem e raio ct . (v. item e da tabela anexa ao Capítulo III.). Além disso, para cada $\psi \in S(R^4)$,

$$\begin{aligned} \langle E_3, \psi \rangle &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \langle \delta_{S_{ct}}, \psi(t, \cdot) \rangle dt = \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{|y|=ct} \psi(t, y) dy dt \end{aligned} \quad (\text{III.8.8})$$

A solução fundamental do operador da corda vibrante dada em (III.8.2) pode ser obtida de maneira análoga à obtenção de E_3 .

Propriedades de E_3

- (1) $\text{supp } E_3 = c\ell V_3$, $V_3 = \{(t, x) \in R^4 : |x| = ct\}$.
- (2) E_3 não é uma função localmente integrável do R^4 e é uma distribuição temperada do R^4 .
- (3) E_3 é homogênea de ordem -2 .
- (4) E_3 é a única solução fundamental do operador das ondas tridimensional cujo suporte está contido no semiespaço $R_+^4 = \{(t, x) \in R^4 : t \geq 0\}$.

O operador das ondas tridimensional não é hipoeelítico pois, entre as soluções clássicas de $\square_3 u = 0$, estão as soluções clássicas de $\square_1 u = 0$.

(III.8.c) Soluções fundamentais do operador das ondas bidimensional ou operador da membrana vibrante

$$\square_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2, \quad c > 0$$

O método da descida (v. Capítulo Zero) aplicado ao operador das ondas tridimensional calcula uma solução fundamental do operador da membrana vibrante: a contração $\overset{\circ}{E}_3$ de E_3 dada por (III.8.8) ao R^3_{txy} é uma solução fundamental do operador da membrana vibrante; para cada $\psi \in C_c^\infty(R^3; \mathbb{C})$,

$$\langle \overset{\circ}{E}_3, \psi \rangle = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{ct}} \psi(t, x, y) d(x, y) dt \quad (\text{III.8.9})$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{S_{ct}} \psi(t, x, y) d(x, y) &= \\ &= 2c \int_{x^2 + y^2 \leq c^2 t^2} \psi(t, x, y) t (c^2 t^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} d(x, y) \end{aligned}$$

temos que para cada $\psi \in C_c^\infty(R^3; \mathbb{C})$,

$$\langle \overset{\circ}{E}_3, \psi \rangle =$$

(III.8.10)

$$= \frac{1}{2\pi c} \int_{R^3} \frac{Y(ct - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} \psi(t, x, y) d(t, x, y)$$

Conclusão

Uma solução fundamental do operador da membrana vibrante é

$$E_2(t, x, y) = \frac{Y(ct - \sqrt{x^2 + y^2})}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} \quad (\text{III.8.11})$$

onde Y é a função de Heaviside.

Propriedades de E_2

- (1) $\text{supp } E_2 = c\ell V_2$, $V_2 = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < c^2 t^2\}$.
- (2) E_2 é uma função localmente integrável do $\mathbb{R}^3$.
- (3) E_2 é homogênea de ordem -1 .
- (4) E_2 é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^3$.
- (5) E_2 é a única solução fundamental do operador da membrana vibrante cujo suporte está contido no semiespaço $\mathbb{R}_+^3 = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : t \geq 0\}$.

O operador da membrana vibrante não é hipoeelítico pois, entre as soluções clássicas de $\square_2 u = 0$, estão as soluções clássicas de $\square_1 u = 0$.

(III.8.d) Soluções fundamentais do operador das ondas n-dimensional

$$\square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_n; \quad c > 0, \quad n = 2k \geq 4, \quad k = 2, 3, \dots$$

Teorema III.8.1

Seja $n = 2k$, $k=2,3,\dots$. Então uma solução fundamental E_n do operador das ondas n-dimensional é a distribuição do R^{n+1} dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(R^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle E_n, \psi \rangle &= \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi^k} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[\int_{R^n} \frac{\psi[(s+|x|^2)^{1/2}, cx]}{2(s+|x|^2)^{1/2}} dx \right] ds = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi^k c^{2k-1}} \int_{R^n} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y(ct-|x|)}{(c^2 t^2 - |x|^2)^{1/2}} \left(\frac{1}{2t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} \left[\frac{\psi(t, x)}{2t} \right] 2t dt \right] dx \end{aligned} \quad (\text{III.8.12})$$

Além disso,

- (a) E_n é a única solução fundamental do operador das ondas n-dimensional com suporte em $\{(t, x) \in R^{n+1} : t \geq 0\}$.
- (b) E_n é uma distribuição homogênea de ordem $1-n$.
- (c) E_n é uma distribuição temperada do R^{n+1} .
- (d) $\text{supp} E_n = \{(t, x) \in R^{n+1} : |x| \leq ct\}$.
- (e) Em $\{(t, x) \in R^{n+1} : |x| < ct\}$, E_n é a função definida por

$$\begin{aligned} E_n(t, x) &= (-1)^{k+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}{(2\pi)^k c} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{(c^2 t^2 - |x|^2)^{k-1/2}} \end{aligned} \quad (\text{III.8.13})$$

Prova

Prova da fórmula (III.8.12): [12], p. 478.

Prova de (a): Teorema VIII.1.2.

Prova de (b) e (c): Capítulo Zero.

Prova de (d): [12], p. 473 e p. 477.

Prova de (e):

Para cada $\psi \in C_c^\infty(R^{n+1}; \mathbb{C})$ com

$\text{supp} \psi \subset \{(t, x) \in R^{n+1} : |x| < ct\}$

$$\begin{aligned} \langle E_n, \psi \rangle &= (-1)^{k+1} \frac{1.3 \dots (2k-3)}{(2\pi)^k} \int_0^{+\infty} s^{-1/2(n-1)} \left[\int_{R^n} \frac{\psi[(s+|x|^2)^{1/2}, cx]}{2(s+|x|^2)^{1/2}} dx \right] ds = \\ &= (-1)^{k+1} \frac{1.3 \dots (2k-3)}{(2\pi)^k} \int_{R^{n+1}} \frac{\psi(t, x)}{(c^2 t^2 - |x|^2)^{1/2(n-1)}} d(t, x) \end{aligned}$$

(III.8.e) Soluções fundamentais do operador das ondas n-dimensional

$$\square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_n; \quad c > 0, \quad n = 2k+1 \geq 3, \quad k = 1, 2, \dots$$

Teorema III.8.2

Seja $n = 2k+1$, $k = 1, 2, \dots$. Então uma solução fundamental E_n do operador das ondas n-dimensional é a distribuição do R^{n+1} dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(R^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E_n, \psi \rangle = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi^k} \int_{R^n} \left[\left(\frac{1}{2t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} \left(-\frac{\psi(t, cx)}{2t} \right) \right]_{t=|x|} dx \quad (\text{III.8.14})$$

Além disso,

- (a) E_n é a única solução fundamental do operador das ondas n -dimensional com suporte em $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$.
- (b) E_n é uma distribuição homogênea de ordem $1-n$.
- (c) E_n é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^{n+1}$.
- (d) $\text{supp} E_n \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = ct\}$.

Prova

Prova de (a): Teorema VIII.1.2

Prova de (b) e (c): Capítulo Zero

Prova de (d): segue da fórmula III.8.14

Prova da Fórmula III.8.14

O método da descida, aplicado para $c = 1$, determina uma solução fundamental E_n do operador das ondas n -dimensional ($n = 2k+1$) a partir da solução fundamental E_{n+1} do operador das ondas $(n+1)$ -dimensional: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E_n, \psi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle E_{n+1}, \psi(t, x) \otimes \eta_j(x_{n+1}) \rangle$$

onde a sequência de funções $(\eta_j)_{j=1,2,\dots}$ é convergente para 1 em $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &= c_{2k+2} \int_{\mathbb{R}^{2k+1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y(t - |(x, x_{n+1})|)}{(t^2 - |x|^2 - x_{n+1}^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right]^{k-1} \left[\frac{\psi(t, x)}{2t} \right] dt \right] dx_{n+1} \right] dx = \\ &= \pi c_{2k+2} \int_{\mathbb{R}^{2k+1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(t - |x|) \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right]^{k-1} \left[\frac{\psi(t, x)}{2t} \right] dt \right] dx = \end{aligned}$$

$$= -\pi c_{2k+2} \int_{R^{2k+1}} \left[\left(\frac{1}{2t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} \left[\frac{\psi(t, x)}{2t} \right] \right]_{t=|x|} dx$$

observando que $c_{2k+2} = c_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{\pi^{k+1}}$ e que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y(t - |(x, x_{n+1})|)}{(t^2 - |x|^2 - x_{n+1}^2)^{1/2}} dx_{n+1} = \\ &= 2Y(t - |x|) \int_0^{(t^2 - |x|^2)^{1/2}} \frac{dx_{n+1}}{(t^2 - |x|^2 - x_{n+1}^2)^{1/2}} = \\ &= \pi Y(t - |x|) \end{aligned}$$

(III.8.f) Soluções fundamentais do operador das ondas n -dimensional generalizado

$$\tilde{\square}_n = \square_n + a \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b; \quad a, a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{C}$$

A relação seguinte válida para $f \in C^\infty(R_{tx}^{n+1}; \mathbb{C})$ e $u \in D'(R_{tx}^{n+1})$:

$$\begin{aligned} \tilde{\square}_n [\exp(f)u] &= \\ &= \exp(f) \left[\square_n u + \left(2 \frac{\partial}{\partial t} f + a \right) \frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{j=1}^n \left(a_j - 2c^2 \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right] + \\ &+ \exp(f) \left[b + a \frac{\partial}{\partial t} f + \left(\frac{\partial}{\partial t} f \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} f + \sum_{j=1}^n \left[a_j \frac{\partial}{\partial x_j} f - c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right)^2 - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f \right] \right] u \end{aligned}$$

conduz à fórmula de uma solução fundamental de $\tilde{\square}_n$.

Conclusão

Uma solução fundamental do operador das ondas n -dimensional generalizado é

$$F_n = \exp(f) E_n \quad (\text{III.8.15})$$

onde

$$f(t, x) = -\frac{at}{2} + \frac{1}{2c^2} \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

e E_n é uma solução fundamental de $\square_n - \lambda$.

TABELA DO CAPÍTULO III

(a) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{(\pm i\theta x - a|\theta|^2)} d\theta = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|x|^2/4a}, \quad x \in \mathbb{R}^n$ e
 $a > 0$ ([12], p. 153, ex. 8).

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}, \quad a > 0$ ([12], p. 61 e 62).

(c) Se $v(x) = e^{-ic|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$ e $c \neq 0 \in \mathbb{R}$, então
 $(F^{-1}v)(\xi) = \left(\frac{1-i\operatorname{sign}c}{2\sqrt{|c|}}\right)^n e^{i|\xi|^2/4c}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$ ([12],
 p. 208 a 210).

(d) (i) Se $h(x) = -(2\pi)^{-3/2}|x|^{-2}, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^3$, então
 $(F^{-1}h)(x) = -(4\pi|x|)^{-1}.$

(ii) Se $\tilde{h}[\psi] = -\frac{1}{2\pi} \left[\int_{|x| \leq 1} \frac{(\psi(x) - \psi(0))}{|x|^2} dx + \int_{|x| > 1} \frac{\psi(x)}{|x|^2} dx \right]$ então
 $\tilde{h} \in S'(\mathbb{R}^2)$ e $(F^{-1}\tilde{h})(x) = \frac{1}{2\pi}(c_0 + \ln|x|), \quad x \in \mathbb{R}^2$
 e c_0 uma constante ([12], p. 212 a 214).

(e) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $W_t(x) = (2\pi)^{-3/2} \frac{\operatorname{sen}(c|x|t)}{c|x|} \in S'(\mathbb{R}_x^3),$

$c > 0$ e

$(F^{-1}W_t)[\sigma] = (2\pi)^{-3/2} \sqrt{\pi/2} t \int_{|x|=1} \sigma(ctx) dx,$

$\sigma \in S(\mathbb{R}^3)$ ([12], p. 206 a 208).

(f) $F\left(\frac{1}{1+|x|^2}\right) = |x|^{1-n/2} K_{\frac{n}{2}-1}(|x|), \quad x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

([10], p. 260).

CAPÍTULO IV

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM EM $n \geq 2$ VARIÁVEIS REAIS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Resumo do Capítulo

O quarto capítulo está subdividido em duas seções:

(IV.1) Soluções fundamentais de operadores diferenciais parciais lineares de segunda ordem em duas variáveis reais:

$$P(\partial) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f ; \quad 0 < a, b, c \in \mathbb{R} \\ d, e, f \in \mathbb{C}$$

$$(IV.1.a) \text{ Caso hiperbólico} \quad \Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$(IV.1.b) \text{ Caso elítico} \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$(IV.1.c) \text{ Caso parabólico} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 0$$

(IV.2) Soluções fundamentais de operadores diferenciais parciais lineares de segunda ordem em $n \geq 2$ variáveis reais:

$$P_n(\partial) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \\ b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{C}$$

(IV.2.a) Caso hiperbólico

(IV.2.b) Caso elítico

(IV.2.c) Caso parabólico

(IV.1) Soluções Fundamentais de Operadores Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem em Duas Variáveis Reais:

$$P(\partial) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f ; 0 < a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$d, e, f \in \mathbb{C}$$

(IV.1.a) Caso hiperbólico $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

A mudança linear de variáveis $A : \mathbb{R}_{xy}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\xi\eta}^2$, dada por

$$\xi(x, y) = x / \sqrt{a}$$

$$(IV.1.1)$$

$$\eta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(-\frac{b}{\sqrt{a}} x + 2\sqrt{a} y \right)$$

acarreta que, para cada $u \in D'(\mathbb{R}^2)$ e para cada $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$, a relação seguinte é válida:

$$\begin{aligned} P(\partial)[(gu) \circ A] &= \\ &= \{g[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u] + [2\frac{\partial}{\partial \xi} g + \frac{d}{\sqrt{a}} g] \frac{\partial}{\partial \xi} u + \\ &+ [(\frac{2ae - bd}{\sqrt{a\Delta}}) g - 2\frac{\partial}{\partial \eta} g] \frac{\partial u}{\partial \eta} + \\ &+ [\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} g - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} g + \frac{d}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial \xi} g + (\frac{2ae - bd}{\sqrt{a\Delta}}) \frac{\partial}{\partial \eta} g + fg] u\} \circ A. \end{aligned}$$

Em particular, para

$$g(\xi, \eta) = \exp\left[-\frac{d}{2\sqrt{a}}\xi + \left(\frac{2ae - bd}{2\sqrt{a\Delta}}\right)\eta\right] \quad (\text{IV.1.2})$$

temos que

$$P(\partial)[(gu) \circ A] = \left[g\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}u - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}u - \lambda u\right)\right] \circ A$$

onde

$$\lambda = (a^2 - b^2)/4 - f \quad (\text{IV.1.3})$$

Conclusão

Uma solução fundamental de $P(\partial)$, no caso em que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, é

$$E = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}(gF_\lambda) \circ A \quad (\text{IV.1.4})$$

onde g é dado por (IV.1.2), λ é dado por (IV.1.3) e

$$F_\lambda(\xi, \eta) = \frac{1}{2}I_0(\sqrt{\lambda(\xi^2 - \eta^2)})Y(\xi - |\eta|) \quad (\text{IV.1.5})$$

é uma solução fundamental de $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \lambda$ (v. fórmula (V.3.9)).

(IV.1.b) Caso elíptico $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

A mudança linear de variáveis $A : R_{xy}^2 \rightarrow R_{\xi\eta}^2$, dada por:

$$\xi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \left(-\frac{b}{\sqrt{a}}x + 2\sqrt{a}y \right) \quad (\text{IV.1.6})$$

$$\eta(x, y) = \frac{x}{\sqrt{a}}$$

implica que, para cada $u \in D'(R^2)$, a relação seguinte é válida:

$$P(\partial)[(gu) \circ A] = [g(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u - \lambda u)] \circ A$$

onde

$$g(\xi, \eta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2ae - bd}{\sqrt{-a\Delta}}\right)\xi - \frac{d}{2\sqrt{a}}\eta\right] \quad (\text{IV.1.7})$$

e

$$\lambda = (a^2 + b^2)/4 - f \quad (\text{IV.1.8})$$

Conclusão

Uma solução fundamental de $P(\partial)$, no caso em que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, é

$$E = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} (gF_\lambda) \circ A \quad (\text{IV.1.9})$$

onde g é dado por (IV.1.7), λ é dado por (IV.1.8) e

$$F_\lambda(\xi, \eta) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2} & , \text{ se } \lambda = 0 \\ -\frac{1}{2\pi} K_0(\sqrt{\lambda(\xi^2 + \eta^2)}) & , \text{ se } \lambda \neq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.1.10})$$

é uma solução fundamental de $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \lambda$ (v. fórmula (V.3.5)).

(IV.1.c) Caso parabólico $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

A mudança linear de variáveis $A : R_{xy}^2 \rightarrow R_{\xi\eta}^2$, dada por

$$\xi(x,y) = -\frac{bx}{2a} + y \quad (IV.1.11)$$

$$\eta(x,y) = \frac{x}{\sqrt{a}}$$

implica que, para cada $u \in D'(R^2)$ e para cada $g \in C^\infty(R^2; \mathbb{C})$, a relação abaixo é válida:

$$\begin{aligned} P(\partial)[(gu) \circ A] &= \\ &= [g(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u - k \frac{\partial}{\partial \xi} u) + (2 \frac{\partial}{\partial \eta} g + \frac{d}{\sqrt{a}} g) \frac{\partial}{\partial \eta} u + (\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} g - k \frac{\partial}{\partial \xi} g + \frac{d}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial \eta} g + fg) u] \circ A \end{aligned}$$

com $k = bd/2a - e$.

1.^a Possibilidade: $k = 0$ ou $bd = 2ae$

Consideremos

$$g(\xi, \eta) = \exp(-\frac{d}{2\sqrt{a}}\eta) \quad (IV.1.12)$$

Então

$$P(\partial)[(gu) \circ A] = [g(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u - \lambda u)] \circ A$$

e

$$\lambda = d^2/4a - f \quad (IV.1.13)$$

Conclusão

Uma solução fundamental de $P(\partial)$, no caso em que

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad e \quad bd = 2ae, \quad \tilde{e}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{a}} (gF_\lambda) \circ A \quad (\text{IV.1.14})$$

onde g é dada por (IV.1.12), λ é dado por (IV.1.13) e

$$F_\lambda = \begin{cases} \delta_\xi \otimes \frac{|\eta|}{2} & , \text{ se } \lambda = 0 \\ \delta_\xi \otimes \frac{\exp(-\sqrt{\lambda} |\eta|)}{-2\sqrt{\lambda}} & , \text{ se } \lambda \neq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.1.15})$$

é uma solução fundamental de $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \lambda$.

2.^a Possibilidade: $k = bd/2a - e \neq 0$

Consideremos

$$g(\xi, \eta) = -\exp\left[\left(\frac{4af - d^2}{4ak}\right)\xi - \frac{d}{2\sqrt{a}}\eta\right] \quad (\text{IV.1.16})$$

Então

$$P(\partial)[(gu) \circ A] = [g(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u - k \frac{\partial}{\partial \xi} u)] \circ A$$

Conclusão

Uma solução fundamental de $P(\partial)$, no caso em que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ e $k = bd/2a - e \neq 0$, é

$$E = \frac{1}{k\sqrt{a}} (gF_k) \circ A \quad (\text{IV.1.17})$$

onde g é dado por (IV.1.16),

$$F_k = (1 + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)) \sqrt{|\operatorname{Im} k| / (8\pi)} \frac{Y(\xi)}{\sqrt{\xi}} \exp\left(-\frac{i \operatorname{Im} k}{4\xi} \eta^2\right)$$

se

(IV.1.18)

$$\operatorname{Re} k = 0$$

e

$$F_k(\xi, \eta) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} k) \sqrt{k / (4\pi\xi)} Y(\xi \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} k)) \exp\left(-\frac{k\eta^2}{4\xi}\right)$$

se

(IV.1.19)

$$\operatorname{Re} k \neq 0$$

(IV.2) *Soluções Fundamentais de Operadores Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem em $n \geq 2$ Variáveis Reais:*

$$P_n(\partial) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c; \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

$$b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{C}$$

Existe uma mudança linear de variáveis $T : \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_y^n$ que reduz $P_n(\partial)$ a sua forma canônica:

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \sum_{j=1}^n B_j \frac{\partial}{\partial y_j} + c; \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$$

$$B_1, \dots, B_n, c \in \mathbb{C}$$

(a matriz $[T_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ de T em relação a base canônica do $\mathbb{R}^n$ é o produto da matriz diagonal H pela matriz P , onde P é tal que:

$$P[a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} P^t = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

e

$$H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$$

onde, para cada $j = 1, \dots, n$,

$$h_j = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \lambda_j = 0 \\ |\lambda_j|^{-1/2} & , \text{ se } \lambda_j \neq 0 \end{cases}.$$

(IV.2.a) *Caso hiperbólico:* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = -1$ A relação abaixo é válida, para cada $u \in D'(R^n)$,

$$P_n(\partial)[(gu) \circ T] = [g(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u - \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} u - \lambda u)] \circ T$$

onde

$$4(\lambda + c) = B_1^2 - B_2^2 - \dots - B_n^2 \quad (\text{IV.2.1})$$

$$B_j = \sum_{k=1}^n T_{jk} b_k \quad j=1, \dots, n$$

$$g(y) = \exp[-\frac{B_1}{2} y_1 + \sum_{j=2}^n \frac{B_j}{2} y_j] \quad (\text{IV.2.2})$$

Conclusão

Uma solução fundamental de $P_n(\partial)$, no caso hiperbólico, é

$$E_n = |\det T| (g F_{\lambda,n}) \circ T \quad (\text{IV.2.3})$$

onde g é dado por (IV.2.2), λ é dado por (IV.2.1) e $F_{\lambda,n}$ é uma solução fundamental de $\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} - \lambda$.

(IV.2.b) Caso elíptico: $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$

A relação abaixo é válida, para cada $u \in D'(R^n)$,

$$P_n(\partial)[(gu) \circ T] = [g(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} u - \lambda u)] \circ T$$

onde

$$4(\lambda + c) = B_1^2 + \dots + B_n^2 \quad (\text{IV.2.4})$$

$$B_j = \sum_{k=1}^n T_{jk} b_k \quad j=1, \dots, n$$

$$g(y) = \exp(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n B_j y_j) \quad (\text{IV.2.5})$$

Conclusão

Uma solução fundamental de $P_n(\partial)$, no caso elíptico, é

$$E_n = |\det T| (g F_{\lambda,n}) \circ T \quad (\text{IV.2.6})$$

onde g é dado por (IV.2.5), λ é dado por (IV.2.4) e $F_{\lambda,n}$ é uma solução fundamental de $\Delta_n - \lambda$.

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.2.c) Caso parabólico:} \quad & \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1 \\
 & \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{p+q} = -1 \\
 & p+q < n
 \end{aligned}$$

A relação abaixo é válida, para cada $u \in D'(R^n)$,

$$\begin{aligned}
 P_n(\partial)[(gu) \circ T] &= \\
 &= [g(\sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} u - \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} u + \sum_{j=p+q+1}^n B_j \frac{\partial}{\partial y_j} u + \lambda u)] \circ T
 \end{aligned}$$

onde

$$4(c - \lambda) = B_1^2 + \dots + B_p^2 - B_{p+1}^2 - \dots - B_{p+q}^2 \quad (\text{IV.2.7})$$

$$B_j = \sum_{k=1}^n T_{jk} b_k \quad j=1, \dots, n$$

$$g(y) = \exp(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p B_j y_j + \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^{p+q} B_j y_j) \quad (\text{IV.2.8})$$

Conclusão

Uma solução fundamental de $P_n(\partial)$, no caso parabólico,

é

$$E_n = |\det T| (g F_{\lambda, n}) \circ T \quad (\text{IV.2.9})$$

onde g é dado por (IV.2.8), λ é dado por (IV.2.7) e $F_{\lambda, n}$ é uma solução fundamental de

$$\sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \sum_{j=p+q+1}^n B_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \lambda.$$

CAPÍTULO V

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES EM $n \geq 1$ VARIÁVEIS REAIS ITERADOS

Resumo do Capítulo

O capítulo cinco tem cinco seções:

- (V.1) Soluções fundamentais de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes complexos constantes em $n+1 \geq 2$ variáveis reais da forma

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + P(\partial_x) \right]^m; \quad m = 1, 2, \dots, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

- (V.2) Soluções fundamentais de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais da forma

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right]^m; \quad m = 1, 2, \dots;$$

- (V.3) Soluções fundamentais de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais da forma

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \lambda \right]^m; \quad m = 1, 2, \dots, \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C};$$

- (V.4) Solução fundamental do operador das ondas n -dimensional iterado

$$\square_n^m = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_n \right)^m; \quad n \geq 3, \quad m = 1, 2, \dots, \quad c > 0;$$

- (V.5) Soluções fundamentais do operador produto

$$\prod_{j=1}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j}; \quad \lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_r \in \mathbb{C}, \quad m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}.$$

(V.1) Soluções Fundamentais de Operadores Diferenciais Parciais Lineares com Coeficientes Complexos Constantes em $n+1 \geq 2$ Variáveis Reais da Forma

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + P(\partial_x) \right]^m \quad m=1,2,3,\dots; \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Teorema V.1.1

Suponhamos que $E \in D'(\mathbb{R}_{tx}^{n+1})$ é uma solução fundamental de

$$Q(\partial) = \frac{\partial}{\partial t} + P(\partial_x)$$

onde $P(\partial_x)$ é um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais $x_1, \dots, x_n$. Então, para cada $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} E \quad (V.1.1)$$

é uma solução fundamental de $Q(\partial)^m$.

Prova

O caso $m = 1$ é imediato. Suponhamos agora o teorema válido para $m > 1$, isto é,

$$Q(\partial)^m [t^{m-1} E] = (m-1)! \delta \quad \text{em} \quad D'(\mathbb{R}_{tx}^{n+1}).$$

Temos que provar que

$$Q(\partial)^{m+1} [t^m E] = m! \delta \quad \text{em} \quad D'(\mathbb{R}_{tx}^{n+1}).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 Q(\partial)^{m+1}[t^m E] &= \\
 = Q(\partial)^m[mt^{m-1}E + t^m \delta] &= m! \delta \quad \text{em } D'(R_{tx}^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Aplicação V.1.1.

Uma solução fundamental de

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b \right]^m & \quad m = 1, 2, 3, \dots \\
 k \in \mathbb{C} \quad \text{com } 0 \neq \operatorname{Re} k & \\
 a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{C} &
 \end{aligned}$$

é a função localmente integrável do R^{n+1} dada por

$$F_{nm}(t, x) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} F_n(t, x) \quad (\text{V.1.2})$$

onde F_n é dada por (III.2.1).

Aplicação V.1.2.

Uma solução fundamental de

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial t} - ib\Delta_n + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c \right]^m & \quad m = 1, 2, 3, \dots \\
 0 \neq b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 & \\
 a_1, \dots, a_n, c \in \mathbb{C} &
 \end{aligned}$$

é

$$F_{nm} = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} F_n \quad (\text{V.1.3})$$

onde F_n é dada por (III.4.1).

Aplicação V.1.3.

Uma solução fundamental de

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right]^m \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

é a função localmente integrável do R_{xy}^2 dada por

$$(0,0) \neq (x,y) \rightarrow \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{2\pi(x+iy)} \quad (V.1.4)$$

Uma solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann iterado

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^m = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]^m \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

é a função localmente integrável do R_{xy}^2 dada por

$$(0,0) \neq (x,y) \rightarrow \frac{(2x)^{m-1}}{\pi(m-1)!} \cdot \frac{1}{x+iy} \quad (V.1.5)$$

que é diferente da solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann iterado encontrada na seção II.2.b do Capítulo II: na seção II.2.b do Capítulo II, uma solução fundamental de $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^m$ é a função localmente integrável do R_{xy}^2 dada por

$$(0,0) \neq (x,y) \rightarrow \frac{(x-iy)^{m-1}}{(m-1)! \pi(x+iy)} \quad (V.1.6)$$

Aplicação V.1.4.

Uma solução fundamental de

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b \right]^m \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{C}$

é

$$\frac{x_1^{m-1}}{(m-1)!} E_n \quad (V.1.7)$$

onde E_n é uma solução fundamental de

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b$$

(v. fórmulas para E_n no Capítulo II).

(V.2) Soluções Fundamentais de Operadores Diferenciais Parciais Lineares com Coeficientes Complexos Constantes em $n \geq 1$ Variáveis Reais da Forma

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right]^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Teorema V.2.1

Suponhamos que $E \in D'(R^n)$ é uma solução fundamental de

$$P(\partial) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

(onde $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ é uma matriz complexa de ordem $n \geq 1$ simétrica e inversível) satisfazendo uma das seguintes condições:

Condição 1

E é uma distribuição homogênea de ordem r .

Condição 2

$E(x) = c \ln[f(x)]$, $x \in R^n$, onde c é uma constante complexa e f é uma função homogênea de ordem s definida positiva.

Então, para cada $m = 1, 2, 3, \dots$, uma solução fundamental de $P(\partial)^m$ é

$$c_{nm} Q_n^{m-1} E \quad (V.2.1)$$

desde que

$$\prod_{k=0}^{m-2} (2k + n + 2r) \neq 0$$

(por convenção, $r = 0$ no caso de E satisfazer a condição 2)

onde

$$c_{nm} = \frac{(2 \det A)^{1-m}}{(m-1)! \prod_{k=0}^{m-2} (2k + n + 2r)}$$

e

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j ; \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

com b_{ij} igual ao cofator do elemento a_{ij} da matriz A para cada $i, j = 1, \dots, n$.

Prova

A relação abaixo é válida para $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ e

$n, m = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} P(\partial)[Q_n^m T] &= 2m(2m+n-2)(\det A)Q_n^{m-1}T + \\ &+ 4m(\det A)Q_n^{m-1}\left(\sum_{j=1}^n \pi_j \frac{\partial}{\partial x_j} T\right) + Q_n^m P(\partial)[T] \end{aligned}$$

onde, para cada $j = 1, \dots, n$, $\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$.

Prova do Teorema V.2.1 com a Hipótese da Condição 1

Por hipótese, E é homogênea de ordem r . Isto implica que

$$\sum_{j=1}^n \pi_j \frac{\partial}{\partial x_j} E = rE$$

(v. Capítulo Zero). A relação anterior, neste caso, fica:

$$P(\partial)[Q_n^m E] = 2m(2m + 2r + n - 2)(\det A)Q_n^{m-1}E.$$

A prova segue por indução em m com a utilização da última relação dada.

Prova do Teorema V.2.1 com a Hipótese da Condição 2

Por hipótese, $E(x) = c \ln[f(x)]$, $x \in \mathbb{R}^n$. Isto implica que

$$\sum_{j=1}^n \pi_j \frac{\partial}{\partial x_j} E = cs$$

(v. Capítulo Zero). A relação anterior, neste caso, fica

$$\begin{aligned} P(\partial)[Q_n^m E] &= 2m(2m + n - 2)(\det A)Q_n^{m-1}E + \\ &+ 4mcs(\det A)Q_n^{m-1}. \end{aligned}$$

A prova segue por indução em m com a utilização da última relação dada.

Observações Complementares ao Teorema V.2.1

(a) Supondo válida a condição 1, $r = 2-n$ e o teorema V.2.1 pode sempre ser aplicado quando $n = 2$ ou n é um número natural ímpar. Além disso,

$$c_{2m} = (4\det A)^{1-m}[(m-1)!]^{-2} \quad ; \quad m=1,2,3,\dots$$

e

$$c_{3m} = \frac{(\det A)^{1-m}}{(2m-2)!} \quad ; \quad m=1,2,3,\dots$$

A conclusão do teorema V.2.1, supondo válida a condição 1, também é válida para n par e $m = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$.

(b) Supondo válida a condição 2, o teorema V.2.1 é válido para quaisquer valores dos números naturais n e m . Além disso,

$$c_{2m} = (4 \det A)^{1-m} [(m-1)!]^{-2} ; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

e

$$c_{3m} = \frac{(\det A)^{1-m}}{(2m-1)!} ; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

O teorema abaixo complementa o teorema V.2.1 (v. a parte (a) das observações complementares ao teorema V.2.1).

Teorema V.2.2

Suponhamos que $E \in D'(R^n)$, ($n \geq 2$, par) é uma solução fundamental de

$$[P(\partial)]^{n/2} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right]^{n/2}$$

(onde $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ é uma matriz complexa de ordem n simétrica e inversível) tal que E é homogênea (de ordem zero). Então, para cada $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\frac{(2 \det A)^{-m}}{m! \prod_{k=0}^{m-1} (2k+n)} Q_n^m E \tag{V.2.2}$$

é uma solução fundamental de $P(\partial)^{m+n/2}$, onde

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

com b_{ij} igual ao cofator do elemento a_{ij} da matriz A para cada $i, j = 1, \dots, n$.

Prova

Análoga à prova do teorema V.2.1.

Aplicação V.2.1.

Uma solução fundamental de

$$\left[a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^m \quad \begin{aligned} m &= 1, 2, 3, \dots \\ 0 &< a, b, c \in \mathbb{R} \\ b^2 - 4ac &< 0 \end{aligned}$$

é a função localmente integrável do $\mathbb{R}_{xy}^2$ dada por

$$\begin{aligned} (0,0) \neq (x,y) \rightarrow & \\ \rightarrow & \frac{(cx^2 - bxy + ay^2)^{m-1}}{2\pi(4ac - b^2)^{m-1/2} [(m-1)!]^2} \ln(cx^2 - bxy + ay^2) \end{aligned} \quad (V.2.3)$$

lembrando que

$$E(x,y) = \frac{\ln(cx^2 - bxy + ay^2)}{2\pi \sqrt{4ac - b^2}}, \quad (0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

é uma solução fundamental de $a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (v. fórmula (IV.1.9)).

Em particular, uma solução fundamental do operador de Laplace bi-dimensional iterado

$$\Delta_2^m = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

é

$$(0,0) \neq (x,y) \rightarrow \frac{(x^2 + y^2)^{m-1}}{4^m \pi [(m-1)!]^2} \ln(x^2 + y^2) \quad (V.2.4)$$

Aplicação V.2.2.

Uma solução fundamental do operador de Laplace n-dimensional ($n \geq 3$ ímpar) iterado

$$\Delta_n^m \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

é

$$E_{nm}(x) = \frac{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) |x|^{2m-n}}{2^m (m-1)! (\sqrt{\pi})^n \prod_{k=1}^m (2k-n)}, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{V.2.5})$$

lembrando que

$$E_n(x) = \frac{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) |x|^{2-n}}{(4-2n)(\sqrt{\pi})^n}, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$$

é uma solução fundamental do operador de Laplace n-dimensional ($n \geq 3$) (v. fórmula III.5.3).

Aplicação V.2.3.

Uma solução fundamental do operador da corda vibrante iterado

$$\square_1^m = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]^m \quad c > 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

é a função localmente integrável do $\mathbb{R}_{tx}^2$:

$$E_{1m}(t, x) = \frac{(2c)^{1-2m}}{[(m-1)!]^2} (c^2 t^2 - x^2)^{m-1} Y(ct - |x|) \quad (\text{V.2.6})$$

lembrando que

$$E_1(t, x) = \frac{1}{2c} Y(ct - |x|)$$

é uma solução fundamental do operador da corda vibrante (v. fórmula III.8.2).

Aplicação V.2.4.

Uma solução fundamental do operador da membrana vibrante iterado

$$\square_2^m = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^m \quad c > 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

é a função localmente integrável do R_{txy}^3 :

$$\begin{aligned} E_{2m}(t, x, y) &= \\ &= \frac{c^{1-2m}}{2\pi(2m-2)!} (c^2 t^2 - x^2 - y^2)^{m-3/2} Y(ct - \sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned} \quad (V.2.7)$$

(V.3) Soluções Fundamentais de Operadores Diferenciais Parciais Lineares com Coeficientes Complexos Constantes em $n \geq 1$ Variáveis Reais da Forma

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \lambda \right]^m \quad m=1, 2, 3, \dots; \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$$

Teorema V.3.1

Suponhamos que $E \in D'(R^n)$ é uma solução fundamental de

$$P(\partial) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

onde $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ é uma matriz complexa de ordem $n \geq 1$ simétrica e inversível, e que

$$E(x) = c \ln[f(x)], \quad c \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{V.3.1})$$

onde f é uma função homogênea de ordem s definida positiva. Então, para cada $m = 1, 2, 3, \dots$ e para cada $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$E_{\lambda nm} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) Q_n^{m-1}}{(m-1)!(4 \det A)^{m-1}} \sum_{j=0}^{\infty} f_j (E + \gamma_{jm}) \quad (\text{V.3.2})$$

$$f_j(x) = \frac{[\lambda Q_n(x)]^j}{j!(4 \det A)^j \Gamma(j+m+n/2-1)}; \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j=0, 1, 2, \dots,$$

é uma solução fundamental de $[P(\partial) - \lambda]^m$, onde

$$\gamma_{jm} = -cs \sum_{k=0}^{j+m-2} (k + \frac{n}{2})^{-1}$$

e

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

com b_{ij} igual ao cofator do elemento a_{ij} da matriz A para cada $i, j = 1, \dots, n$.

Prova

Para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, as séries

$$\sum_{j=0}^{\infty} \partial^{\alpha} f_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{jm} \partial^{\alpha} f_j$$

são uniformemente convergentes em subconjuntos compactos do $\mathbb{R}^n$. Isto implica que a fórmula (V.3.2) define um elemento de $D'(\mathbb{R}^n)$.

A prova é feita por indução em m , observando que

$$\sum_{j=1}^n \pi_j \frac{\partial}{\partial x_j} E = cs \quad \text{em} \quad D'(\mathbb{R}^n)$$

(v. Capítulo Zero).

Aplicação V.3.1.

Uma solução fundamental de

$$\left[a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda \right]^m \quad \begin{aligned} m &= 1, 2, 3, \dots \\ 0 &< a, b, c \in \mathbb{R}; 0 \neq \lambda \in \mathbb{C} \\ b^2 - 4ac &< 0 \end{aligned}$$

é

$$E_{\lambda m}(x, y) = \frac{(cx^2 - bxy + ay^2)^{m-1}}{(m-1)!(4ac - b^2)^{m-1}} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(E + \gamma_{jm}) \quad (\text{V.3.3})$$

onde

$$E(x, y) = \frac{\ln(cx^2 - bxy + ay^2)}{2\pi\sqrt{4ac - b^2}}, \quad (0, 0) \neq (x, y)$$

$$f_j(x, y) = \frac{[\lambda(cx^2 - bxy + ay^2)]^j}{j!(4ac - b^2)^j(j + m - 1)!}$$

$$\gamma_{jm} = \frac{-1}{\pi\sqrt{4ac - b^2}} \sum_{k=1}^{j+m-1} k^{-1}$$

Em particular, uma solução fundamental de

$$[\Delta_2 - \lambda]^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots; 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$$

é

$$\begin{aligned} E_{\lambda m}(x, y) &= \\ &= \frac{(x^2 + y^2)^{m-1}}{\pi 4^m (m-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(x^2 + y^2)]^j}{j! 4^j (j + m - 1)!} [\ln(x^2 + y^2) + 2 \sum_{k=1}^{j+m-1} k^{-1}] = \\ &= \frac{(-1)^m (\sqrt{x^2 + y^2})^{m-1}}{\pi 2^m (m-1)! (\sqrt{\lambda})^{m-1}} K_{m-1}(\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}) + H_m(x, y) \end{aligned} \quad (\text{V.3.4})$$

com $[\Delta_2 - \lambda]^m H_m = 0$. Outra solução fundamental de $[\Delta_2 - \lambda]^m$ é

$$F_{\lambda m}(x, y) = \frac{(-1)^m (\sqrt{x^2 + y^2})^{m-1}}{\pi 2^m (m-1)! (\sqrt{\lambda})^{m-1}} K_{m-1}(\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (V.3.5)$$

Teorema V.3.2

Suponhamos que $E \in D'(R^n)$ é uma solução fundamental de

$$P(\partial) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

onde $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ é uma matriz complexa de ordem $n \geq 3$ ímpar ou $n = 2$ simétrica e inversível, e que E é homogênea (de ordem $2-n$). Então, para cada $m = 1, 2, 3, \dots$ e para cada $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$E_{\lambda nm} = \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2}) Q_n^{m-1}}{(m-1)! (4 \det A)^{m-1}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} f_j E \quad (V.3.6)$$

$$f_j(x) = \frac{[\lambda (4 \det A)^{-1} Q_n(x)]^j}{j! \Gamma(j + m - \frac{n}{2} + 1)}; \quad x \in R^n, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

é uma solução fundamental de $[P(\partial) - \lambda]^m$, onde

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

com b_{ij} igual ao cofator do elemento a_{ij} da matriz A para cada $i, j = 1, \dots, n$.

Prova

Análoga à prova do teorema V.3.1, observando que

$$\sum_{j=1}^n \pi_j \frac{\partial}{\partial x_j} E = (2-n)E \quad \text{em } D'(R^n).$$

Observação Complementar ao Teorema V.3.2

Com a utilização da função clássica de Bessel I_ν ,

$$E_{\lambda nm} = \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(m-1)! 2^{m+n/2-2}} \left(\frac{Q_n}{\det A}\right)^{m-1} (\sqrt{\lambda Q_n / \det A})^{\frac{n}{2} - m} \cdot I_{m - \frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda Q_n / \det A}) E \quad (\text{V.3.7})$$

Aplicação V.3.1.

Uma solução fundamental do operador de Klein-Gordon unidimensional iterado

$$[\square_1 - \lambda]^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$$

é

$$E_{\lambda m}(t, x) = \frac{(c^2 t^2 - x^2)^{\frac{m-1}{2}}}{(m-1)! (2c)^m (\sqrt{\lambda})^{m-1}} \cdot I_{m-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c} \cdot \sqrt{c^2 t^2 - x^2}\right) Y(ct - |x|) \quad (\text{V.3.8})$$

onde Y é a função de Heaviside.

Em particular, uma solução fundamental do operador dos cabos telegráficos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \lambda$$

é a função localmente integrável do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E_{\lambda 1}(t, x) = (2c)^{-1} I_0 \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c} \cdot \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right) Y(ct - |x|) \quad (\text{V.3.9})$$

Aplicação V.3.2.

Uma solução fundamental do operador de Klein-Gordon bidimensional iterado

$$[\square_2 - \lambda]^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$$

é

$$E_{\lambda m}(t, x, y) = \frac{(c^2 t^2 - x^2 - y^2)^{(2m-3)/4}}{\sqrt{\pi} (m-1)! (2c)^{m+1/2} (\sqrt{\lambda})^{m-3/2}} \cdot I_{m-\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c} \cdot \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2} \right) Y(ct - \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (\text{V.3.10})$$

onde Y é a função de Heaviside

Em particular, uma solução fundamental do operador da membrana vibrante com amortecimento

$$\square_2 - \lambda$$

é

$$E_{\lambda 1}(t, x, y) = \frac{Y(ct - \sqrt{x^2 + y^2})}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} \text{ch} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c} \cdot \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2} \right) \quad (\text{V.3.11})$$

lembrando que

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \operatorname{ch}(z)$$

([4], página 967, fórmula 8.467).

Aplicação V.3.3.

Uma solução fundamental do operador de Helmholtz n-dimensional ($n \geq 3$, ímpar) iterado

$$[\Delta_n - \lambda]^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$$

é

$$\begin{aligned} E_{\lambda nm}(x) &= \\ &= \frac{(|x|/\sqrt{\lambda})^{m-\frac{n}{2}}}{(m-1)! 2^{m+n/2} \pi^{n/2-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)} I_{m-\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}|x|) = \quad (V.3.12) \\ &= \frac{(-1)^m (|x|/\sqrt{\lambda})^{m-\frac{n}{2}}}{(m-1)! 2^{m+n/2-1} \pi^{n/2}} K_{\frac{n}{2}-m}(\sqrt{\lambda}|x|) + H_m(x) \end{aligned}$$

onde $[\Delta_n - \lambda]^m H_m = 0$, com a utilização da função clássica de Bessel

$$K_\nu(z) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}(\pi\nu) [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)].$$

Outra solução fundamental mais usual de $(\Delta_n - \lambda)^m$ é

$$E_{\lambda nm}(x) =$$

(V.3.13)

$$= \frac{(-1)^m (|x|/\sqrt{\lambda})^{m - \frac{n}{2}}}{(m-1)! 2^{m+n/2-1} \pi^{n/2}} K_{\frac{n}{2} - m}(\sqrt{\lambda} |x|)$$

(esta fórmula define também uma solução fundamental de $[\Delta_n - \lambda]^m$ para $n \geq 2$ par).

(V.4) Solução Fundamental do Operador das Ondas n -Dimensional Iterado

$$\square_n^m = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_n \right)^m; \quad n \geq 3, \quad m = 1, 2, \dots, \quad c > 0$$

1.º Caso: $n = 2k \geq 4, \quad k = 2, 3, \dots$

O teorema V.2.1 com $\det A = c^{2n}, \quad r = 1-n,$

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{(2 \det A)^{1-m}}{(m-1)! \prod_{j=0}^m (2j+n+2r)} = \\ &= \frac{(2c^{2n})^{1-m}}{(m-1)! \prod_{j=2}^m (2j-n-1)} \end{aligned}$$

$$e \quad Q(t, x) = c^{2(n-1)} (c^2 t^2 - |x|^2), \quad (t, x) = (t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

garante que uma solução fundamental de $\square_n^m$ é

$$E_{nm} = c_{nm} Q_n^{m-1} E_n \quad (V.4.1)$$

onde E_n é uma solução fundamental do operador das ondas n -dimensional. Em particular, em $\{(t,x) \in R^{n+1} : |x| < ct\}$, E_{nm} é a função dada por

$$E_{nm}(t,x) = \frac{(-1)^{n/2+1} c^{1-2m} 1.3.5\dots(n-3)}{\pi^{n/2} 2^{m-1+n/2} (m-1)! \prod_{j=2}^m (2j-n-1)} (c^2 t^2 - |x|^2)^{m-(n+1)/2} \quad (V.4.2)$$

Conclusão

Para $m > n/2$ e $n \geq 4$ par, uma solução fundamental do operador das ondas n -dimensional iterado $\square_n^m$ é a função localmente integrável E_{nm} do R^{n+1} dada por

$$E_{nm}(t,x) = \frac{(-1)^{n/2+1} c^{1-2m} 1.3.5\dots(n-3)}{\pi^{n/2} 2^{m-1+n/2} (m-1)! \prod_{j=2}^m (2j-n-1)} \cdot (c^2 t^2 - |x|^2)^{m-(n+1)/2} Y(ct - |x|) \quad (V.4.3)$$

2.º Caso: $n = 2k-1 \geq 3$, $k = 2, 3, \dots$

O método da descida aplicado ao operador

$$\begin{aligned} \square_{2k}^m &= \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_{2k} \right]^m = \square_{2k-1}^m + \\ &+ \sum_{p=1}^m (-1)^p \binom{m}{p} c^{2p} \frac{\partial^{2p}}{\partial s^{2p}} \square_{2k-1}^{m-p} \end{aligned} \quad (V.4.4)$$

onde $x = (t,y)$, $y = (x_1, \dots, x_{2k-1})$ e $s = x_{2k}$, determina uma solução fundamental E_{nm} de $\square_{2k-1}^m$ a partir da solução fundamental E_{2km} dada pela fórmula (V.4.3) de $\square_{2k}^m$.

Em virtude da integral abaixo

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (c^2 t^2 - |y|^2 - s^2)^{m-(k+1/2)} Y[ct - (|y|^2 + s^2)^{1/2}] ds = \\ & = Y(t) Y(c^2 t^2 - |y|^2) \int_{-(c^2 t^2 - |y|^2)^{1/2}}^{+(c^2 t^2 - |y|^2)^{1/2}} (c^2 t^2 - |y|^2 - s^2)^{m-k-1/2} ds \end{aligned}$$

ser igual a

$$\text{para } m = k, \quad \pi Y(ct - |y|^2)$$

$$\text{para } m = k+1, \quad \frac{\pi}{2} Y(ct - |y|^2) (c^2 t^2 - |y|^2)$$

$$\text{para } m \geq k+2, \quad \frac{\pi(2m-2k-1)!!}{8^{m-k}(m-k)!} [4(c^2 t^2 - |y|^2)]^{m-k} Y(ct - |y|^2)$$

([5], p. 81, 2.260, fórmula 3: para n ímpar, $n!! = 1.3.5\dots n$)

obtemos a seguinte conclusão:

Conclusão

Para $n = 2k-1$ e $m \geq k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ uma solução fundamental do operador das ondas n -dimensional iterado $\square_n^m$ é a função localmente integrável E_{nm} do R^{n+1} dada por

$$E_{nm}(t, x) = \frac{(2c)^{1-2m} \pi^{-(n-1)/2}}{(m-1)! (m-n/2-1/2)!} \cdot$$

(V.4.5)

$$\cdot (c^2 t^2 - |x|^2)^{m-(n+1)/2} Y(ct - |x|)$$

(V.5) Soluções Fundamentais do Operador Produto

$$\prod_{j=1}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} ; \quad \lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_r \in \mathbb{C}, \quad m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$$

Teorema V.5.1

Seja $P(\partial)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais. Então uma solução fundamental do operador produto

$$\prod_{j=1}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} ; \quad \lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_r \in \mathbb{C}, \quad m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} \quad (\text{V.5.1})$$

é

$$E = \prod_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} E_{\lambda_j, k} \quad (\text{V.5.2})$$

onde, para cada $m=1,2,\dots$ e para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $E_{\lambda m}$ é uma solução fundamental de $[P(\partial) - \lambda]^m$ e os coeficientes c_{jk} , com $j=1,\dots,r$ e $k=1,\dots,m_j$, são dados pela decomposição em frações parciais (v. Apêndice):

$$\prod_{j=1}^r (z - \lambda_j)^{-m_j} = \prod_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} (z - \lambda_j)^{-k} \quad (\text{V.5.3})$$

Prova

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} E = \\ &= \prod_{j=2}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} [P(\partial) - \lambda_1]^{m_1} \left[\sum_{k=1}^{m_1} c_{1k} E_{\lambda_1, k} \right] + \\ &+ \prod_{j=2}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} [P(\partial) - \lambda_1]^{m_1} \left[\sum_{j=2}^r \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} E_{\lambda_j, k} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=2}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} \left[\prod_{k=1}^{m_1} c_{1k} [P(\partial) - \lambda_1]^{m_1 - k} (\delta) \right] + \\
&+ \prod_{j=2}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} [P(\partial) - \lambda_1]^{m_1} \left[\prod_{j=2}^r \prod_{k=1}^{m_j} c_{jk} E_{\lambda_j, k} \right] = \\
&= \prod_{j=3}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} \left[\prod_{k=1}^{m_1} c_{1k} [P(\partial) - \lambda_2]^{m_2} [P(\partial) - \lambda_1]^{m_1 - k} (\delta) \right] + \\
&+ \prod_{j=3}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} \left[\prod_{k=1}^{m_2} c_{2k} [P(\partial) - \lambda_2]^{m_2 - k} [P(\partial) - \lambda_1]^{m_1} (\delta) \right] + \\
&+ \prod_{j=3}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} \left[\prod_{j=3}^r \prod_{k=1}^{m_j} c_{jk} [P(\partial) - \lambda_1]^{m_1} [P(\partial) - \lambda_2]^{m_2} E_{\lambda_j, k} \right] = \\
&= \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^{m_j} c_{jks} \prod_{s \neq j} [P(\partial) - \lambda_s]^{m_s} [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j - k} (\delta)
\end{aligned}$$

após um número finito de passos.

A igualdade anterior garante que $\prod_{j=1}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} E$ é uma distribuição temperada do R^n . O teorema em questão fica demonstrado se for provado que $F[\prod_{j=1}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} E] = F[\delta]$. De facto,

$$\begin{aligned}
&F\left[\prod_{j=1}^r [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j} E\right] = \\
&= \prod_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} F\left[\prod_{s \neq j} [P(\partial) - \lambda_s]^{m_s} [P(\partial) - \lambda_j]^{m_j - k} (\delta)\right] = \\
&= \prod_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} c_{jks} \prod_{s \neq j} [P(ix) - \lambda_s]^{m_s} [P(ix) - \lambda_j]^{m_j - k} F[\delta] = \\
&= \left[\prod_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} [P(ix) - \lambda_j]^{-m_j} \prod_{s=1}^r [P(ix) - \lambda_s]^{m_s} \right] F[\delta] = F[\delta]
\end{aligned}$$

pela fórmula (V.5.3).

Corolário V.5.1

Seja $P(\partial)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais. Então uma solução fundamental de

$$[P(\partial) - a][P(\partial) - b]; \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq b \quad (\text{V.5.4})$$

é

$$E = (b-a)^{-1} [E_b - E_a] \quad (\text{V.5.5})$$

onde, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, E_λ é uma solução fundamental de $P(\partial) - \lambda$.

Aplicação V.5.1

Uma solução fundamental do operador

$$\Delta_2^2 + a = [\Delta_2 + i\sqrt{a}][\Delta_2 - i\sqrt{a}]; \quad 0 \neq a \in \mathbb{C}$$

é

$$E = \frac{1}{4\pi i \sqrt{a}} [K_0 [(-i\sqrt{a})^{1/2} (x^2 + y^2)^{1/2}] - K_0 [(i\sqrt{a})^{1/2} (x^2 + y^2)^{1/2}]] \quad (\text{V.5.6})$$

desde que uma solução fundamental de $\Delta_2 - \lambda$ para $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ é a função localmente integrável E_λ do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E_\lambda(x, y) = -(2\pi)^{-1} K_0 [\sqrt{\lambda} (x^2 + y^2)^{1/2}] \quad (\text{V.5.7})$$

(v. fórmula (III.6.4)).

Em particular, para $a > 0$, uma solução fundamental do operador da placa isotrópica sobre base elástica $\Delta_2^2 + a$ é

$$E = \frac{1}{4\pi i \sqrt{a}} [K_0 \left[\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt[4]{a} (x^2+y^2)^{1/2} \right] - (V.5.8)$$

$$- K_0 \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt[4]{a} (x^2+y^2)^{1/2} \right]]$$

Aplicação V.5.2

Uma solução fundamental do operador

$$\Delta_2 (\Delta_2 - a)^m; \quad 0 \neq a \in \mathbb{C}, \quad m = 1, 2, \dots$$

é

$$E_{am}(x, y) = \frac{(-1)^m}{2\pi a^m} \left[\frac{1}{2} \ell n(x^2+y^2) + \sum_{p=1}^m \frac{1}{(p-1)!} \cdot (V.5.9)$$

$$\cdot \left[\frac{\sqrt{a}(x^2+y^2)^{1/2}}{2} \right]^{p-1} K_{p-1} \left[\sqrt{\lambda} (x^2+y^2)^{1/2} \right] \right]$$

pela utilização das fórmulas das soluções fundamentais de Δ_2 e de $(\Delta_2 - a)^m$ dadas respectivamente pelas fórmulas (III.5.13) e (V.3.4) e da decomposição em frações parciais seguinte

$$\frac{1}{z(z-a)^m} = \frac{(-1)^m a^{-m}}{z} + \frac{(-1)^{m+1} a^{-m}}{z-a} +$$

$$+ \frac{(-1)^{m+2} a^{-m+1}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(-1)^{2m-1} a^{-1}}{(z-a)^m}$$

Em particular, para $a = i/2$ e $m = 1$, uma solução fundamental do operador da casca esférica rasa $\Delta_2(i/2 - \Delta_2)$ é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E(x, y) = - \frac{i}{\pi} \left[\frac{1}{2} \ell n(x^2+y^2) + (V.5.10)$$

$$+ K_0 \left[\left(\frac{1+i}{2} \right) (x^2+y^2)^{1/2} \right] \right]$$

Aplicação V.5.3

Uma solução fundamental do operador

$$\Delta_n (\Delta_n - a)^m; \quad 0 \neq a \in \mathbb{C}, \quad n \neq 2, \quad m = 1, 2, \dots$$

é

$$E_{amn}(x) = \frac{(-1)^m \pi^{-n/2}}{a^m} \left[\frac{\Gamma(n/2) |x|^{2-n}}{4-2n} + \frac{a^{n/4-1}}{2^{n/2-1} |x|^{n/2}} \cdot \sum_{p=1}^m \frac{(\sqrt{a} |x|)^p}{(p-1)! 2^p} K_{\frac{n}{2}-p}(\sqrt{a} |x|) \right] \quad (V.5.11)$$

pela utilização das fórmulas das soluções fundamentais de Δ_n e de $(\Delta_n - a)^m$ dadas respectivamente pelas fórmulas (III.5.13) e (V.3.13) e da decomposição em frações parciais da aplicação V.5.2.

Aplicação V.5.4

Uma solução fundamental do operador meta-harmônico

$$(\Delta_n - a^2)(\Delta_n - b^2); \quad 0 < a < b, \quad n \geq 2$$

é

$$E(x) = \frac{|x|^{1-n/2}}{(a^2 - b^2)(2\pi)^{n/2}} \left[b^{n/2-1} K_{\frac{n}{2}-1}(b|x|) - a^{n/2-1} K_{\frac{n}{2}-1}(a|x|) \right] \quad (V.5.12)$$

lembrando que, para cada $\lambda > 0$, uma solução fundamental de $\Delta_n - \lambda^2$ é

$$E_\lambda(x) = -(2\pi)^{-n/2} (\lambda / |x|)^{n/2-1} K_{n/2-1}(\lambda |x|) \quad (V.5.13)$$

(v. fórmula (III.6.4)).

CAPÍTULO VI

O MÉTODO DA CONVOLUÇÃO PARA A DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PRODUTO DE DOIS OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES EM $n \geq 1$ VARIÁVEIS REAIS

Resumo do Capítulo

O Capítulo VI está subdividido em seis seções:

(VI.1) O método da convolução;

(VI.2) Solução fundamental do produto de dois operadores do calor n -dimensional

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta_n\right]\left[\frac{\partial}{\partial t} - b\Delta_n\right]; \quad 0 < a < b, \quad n \geq 1;$$

(VI.3) Solução fundamental do produto de dois operadores de Schrödinger n -dimensional

$$\Delta_n^2 + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \lambda^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\lambda}\Delta_n\right]\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{\lambda}\Delta_n\right]; \quad 0 < \lambda, \quad n \geq 1;$$

(VI.4) Solução fundamental do produto de um operador de Laplace n -dimensional por um operador do calor n -dimensional

$$\Delta_n \left[\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n\right]; \quad 0 < k, \quad n \geq 1;$$

(VI.5) Solução fundamental do produto de um operador de Laplace tridimensional por um operador das ondas tridimensional

$$\Delta_3 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_3\right]; \quad c > 0;$$

(VI.6) Solução fundamental do produto de dois operadores das ondas n -dimensional

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_n\right]; \quad 0 < a < b, \quad n \geq 1.$$

(VI.1) O Método da Convolução

O método da convolução é um método clássico para a de terminação de soluções fundamentais do produto

$$P(\partial)Q(\partial) = Q(\partial)P(\partial) \quad (\text{VI.1.1})$$

de dois operadores diferenciais parciais lineares $P(\partial)$ e $Q(\partial)$ com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais.

Este método consiste em: conhecidas uma solução fundamental E de $P(\partial)$ e uma solução fundamental de F de $Q(\partial)$, determinar ou uma solução fundamental V_+ de $Q(\partial) + P(\partial)$ ou uma solução fundamental V_- de $Q(\partial) - P(\partial)$ com a propriedade de que o produto de convolução T_+ de $E+F$ por V_+ ou o produto de convolução T_- de $E-F$ por V_- existe (no Capítulo Ze ro, estão apresentadas condições para a existência do produto de convolução de duas distribuições). Então

$$T_{\pm} = [E \pm F] * V_{\pm} \quad (\text{VI.1.2})$$

é uma solução fundamental de $P(\partial)Q(\partial)$. De fato,

$$\begin{aligned} P(\partial)Q(\partial)T_{\pm} &= P(\partial)Q(\partial)[(E \pm F) * V_{\pm}] = \\ &= Q(\partial)[P(\partial)(E \pm F) * V_{\pm}] = \\ &= Q(\partial)[\delta * V_{\pm}] \pm P(\partial)[\delta * V_{\pm}] = \\ &= [Q(\partial) \pm P(\partial)]V_{\pm} = \\ &= \delta \end{aligned}$$

(VI.2) Solução Fundamental do Produto de Dois Operadores do Calor n -Dimensional

$$[\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta_n][\frac{\partial}{\partial t} - b\Delta_n]; \quad 0 < a < b, \quad n \geq 1$$

Uma solução fundamental de

$$\lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n; \quad \lambda > 0, \quad n \geq 1$$

é a função localmente integrável $E_{\lambda n}$ do R_{tx}^{n+1} dada por

$$E_{\lambda n}(t, x) = \frac{\lambda^{1-n/2}}{(4\pi t)^{n/2}} Y(t) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\lambda t}\right)$$

(v. fórmula (III.1.4)).

Uma solução fundamental de

$$[a^{-1} - b^{-1}]\frac{\partial}{\partial t} = [a^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n] - [b^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n]$$

é

$$V_{ab} = [a^{-1} - b^{-1}]^{-1} Y(t) \otimes \delta_x$$

(v. Capítulo Zero).

Portanto, uma solução fundamental de

$$[\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta_n][\frac{\partial}{\partial t} - b\Delta_n]; \quad 0 < a < b, \quad n \geq 1$$

é

$$\begin{aligned}
 T_{abn} &= \frac{1}{ab[a^{-1}-b^{-1}]}[E_{an} - E_{bn}] * [Y(t) \otimes \delta(x)] = \\
 &= (b-a)^{-1}[E_{an} - E_{bn}] * [Y(t) \otimes \delta(x)]
 \end{aligned}
 \tag{VI.2.1}$$

Além disso, para cada $\psi \in C_c^\infty(R^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
 (b-a) \langle T_{abn}, \psi \rangle &= \\
 &= \langle E_{an} - E_{bn}, \langle Y(t) \otimes \delta(y), \psi(s+t, x+y) \rangle \rangle = \\
 &= \int_{R^{n+1}} [E_{an}(s, x) - E_{bn}(s, x)] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(t-s) \psi(t, x) dt \right] d(s, x) = \\
 &= \int_{R^{n+1}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [E_{an}(s, x) - E_{bn}(s, x)] Y(t-s) ds \right\} \psi(t, x) d(t, x)
 \end{aligned}
 \tag{VI.2.2}$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero).

Conclusão

Uma solução fundamental de

$$[\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta_n][\frac{\partial}{\partial t} - b\Delta_n]; \quad 0 < a < b, \quad n \geq 1$$

é a função localmente integrável T_{abn} do R_{tx}^{n+1} dada por

$$\begin{aligned}
 T_{abn}(t, x) &= (b-a)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} [E_{an}(s, x) - E_{bn}(s, x)] Y(t-s) ds = \\
 &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{Y(t)}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^t s^{-n/2} \left[a^{1-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4as}\right) - b^{1-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4bs}\right) \right] ds = \\
 &= \frac{Y(t)}{(4\pi)^{n/2}(a-b)} \int_{1/t}^{+\infty} s^{n/2-2} \left[a^{1-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2 s}{4a}\right) - b^{1-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2 s}{4b}\right) \right] ds
 \end{aligned}
 \tag{VI.2.3}$$

(VI.3) Solução Fundamental do Produto de Dois Operadores de Schrödinger n -Dimensional

$$\Delta_n^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \lambda^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\lambda} \Delta_n \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{\lambda} \Delta_n \right]; \quad 0 < \lambda, \quad n \geq 1$$

Uma solução fundamental de

$$\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{i}{\lambda} \Delta_n; \quad \lambda > 0, \quad n \geq 1$$

é a distribuição temperada $E_{\mp \lambda n}$ do R_{tx}^{n+1} dada por:

para cada $\psi \in S(R^{n+1})$,

$$\begin{aligned} \langle E_{\mp \lambda n}, \psi \rangle &= \\ &= [(1 \pm i) \sqrt{\lambda / (8\pi)}]^n \int_0^{+\infty} t^{-n/2} \left[\int_{R^n} \exp(\mp \frac{i\lambda |x|^2}{4t}) \psi(t, x) dx \right] dt \end{aligned}$$

(v. fórmula (III.3.5)).

Uma solução fundamental de

$$2 \frac{\partial}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\lambda} \Delta_n \right] + \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{\lambda} \Delta_n \right]$$

é

$$v = \frac{1}{2} Y(t) \otimes \delta(x)$$

(v. Capítulo Zero).

Portanto, uma solução fundamental de

$$\Delta_n^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \lambda > 0, \quad n \geq 1$$

é

$$T_{\lambda n} = \frac{1}{2\lambda} [E_{+\lambda n} + E_{-\lambda n}] * [Y(t) \otimes \delta(x)] \quad (\text{VI.3.1})$$

Além disso, para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 \langle T_{\lambda n}, \psi \rangle &= \langle E_{+\lambda n} + E_{-\lambda n}, \langle Y(t) \otimes \delta(y), \psi(s+t, x+y) \rangle \rangle = \\ &= \langle E_{+\lambda n} + E_{-\lambda n}, \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t-s) \psi(t, x) dt \rangle = [(1-i) \sqrt{\lambda/(8\pi)}]^n \cdot \\ &\cdot \int_0^{+\infty} t^{-n/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} [(1+i^n) \cos(\frac{\lambda|x|^2}{4t}) + i(1-i^n) \text{sen}(\frac{\lambda|x|^2}{4t})] \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(t-s) \psi(t, x) dt \right] dx \right\} ds \end{aligned} \quad (\text{VI.3.2})$$

Para $n = 1, 2, 3$ é permitida a mudança da ordem de integração na expressão de $\langle T_{\lambda n}, \psi \rangle$

Conclusão

Para $n = 1$, uma solução fundamental do operador da viga vibrante

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

é a função localmente integrável $T_{\lambda 1}$ do $\mathbb{R}_{tx}^2$ dada por

$$\begin{aligned} T_{\lambda 1}(t, x) &= \\ &= \frac{Y(t)}{2\sqrt{\pi}} \lambda^{-3/2} \int_0^t s^{-1/2} \text{sen}\left(\frac{\lambda x^2}{4s} + \frac{\pi}{4}\right) ds \end{aligned} \quad (\text{VI.3.3})$$

Para $n = 2$, uma solução fundamental do operador da placa isotrópica vibrante

$$\Delta_2^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

é a função localmente integrável $T_{\lambda 2}$ do R_{txy}^3 dada por

$$T_{\lambda 2}(t, x, y) = \frac{Y(t)}{4\pi\lambda} \int_0^t \frac{1}{s} \operatorname{sen}\left[\frac{\lambda}{4s}(x^2 + y^2)\right] ds \quad (\text{VI.3.4})$$

Para $n = 3$, uma solução fundamental de $\Delta_3^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ é a função localmente integrável $T_{\lambda 3}$ do R_{txyz}^4 dada por

$$\begin{aligned} T_{\lambda 3}(t, x, y, z) &= \\ &= \frac{Y(t)}{8\pi(\lambda\pi)^{1/2}} \int_0^t s^{-3/2} \operatorname{sen}\left[\frac{\lambda}{4s}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{\pi}{4}\right] ds \end{aligned} \quad (\text{VI.3.5})$$

Observação

Para $n \geq 4$, não é permitida a mudança da ordem de integração na expressão de $\langle T_{\lambda n}, \psi \rangle$ pelo fato de obtermos uma integral do tipo $\int_a^{+\infty} s^r \operatorname{sen}(s+b) ds$, com $r \geq 0$, a qual é divergente. Portanto, para $n \geq 4$, $T_{\lambda n}$ não é identificada com uma função localmente integrável do R^{n+1} .

(VI.4) Solução Fundamental do Produto de um Operador de Laplace n -Dimensional por um Operador do Calor n -Dimensional

$$\Delta_n \left[\frac{\partial}{\partial t} - k \Delta_n \right]; \quad 0 < k, \quad n \geq 1$$

Uma solução fundamental de

$$k^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n; \quad k > 0, \quad n \geq 1$$

é a função localmente integrável E_{kn} do R_{tx}^{n+1} dada por

$$E_{kn}(t, x) = \frac{k^{1-n/2}}{(4\pi t)^{n/2}} Y(t) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4kt}\right)$$

(v. fórmula (III.1.4)).

Uma solução fundamental de

$$\Delta_n \quad (\text{em } R_{tx}^{n+1})$$

é

$$F_n = \delta(t) \otimes E_n \quad (\text{em } R_{tx}^{n+1})$$

onde

$$E_n(x) = \begin{cases} |x|/2 & n = 1 \\ (2\pi)^{-1} \ell_n |x| & n = 2, \\ \frac{\Gamma(n/2) |x|^{2-n}}{(4-2n)\pi^{n/2}} & n \geq 3 \end{cases} \quad x \in R^n$$

(v. fórmula (III.5.13) e Capítulo Zero).

Uma solução fundamental de

$$k^{-1} \frac{\partial}{\partial t} = [k^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n] + \Delta_n$$

é

$$V_k = kY(t) \otimes \delta(x)$$

(v. Capítulo Zero).

Portanto, uma solução fundamental de

$$\Delta_n \left[\frac{\partial}{\partial t} - k \Delta_n \right]; \quad k > 0, \quad n \geq 1$$

é

$$T_{kn} = [E_{kn} + F_n] * [Y(t) \otimes \delta(x)] \quad (\text{VI.4.1})$$

Além disso, para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle T_{kn}, \psi \rangle &= \langle E_{kn} + F_n, \langle Y(t) \otimes \delta(y), \psi(s+t, x+y) \rangle \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \psi(t, x) dt \right] dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_{kn}(s, x) Y(t-s) ds \right] \psi(t, x) d(t, x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[E_n(x) Y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} E_{kn}(s, x) Y(t-s) ds \right] \psi(t, x) d(t, x) \end{aligned}$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero).

Conclusão

Uma solução fundamental de

$$\Delta_n \left[\frac{\partial}{\partial t} - k \Delta_n \right]; \quad k > 0, \quad n \geq 1$$

é a função localmente integrável T_{kn} do $\mathbb{R}_{tx}^{n+1}$ dada por

$$\begin{aligned} T_{kn}(t, x) &= E_n(x) Y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} E_{kn}(s, x) Y(t-s) ds = \\ &= Y(t) \left[E_n(x) + \frac{k^{1-n/2}}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^t s^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4ks}\right) ds \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.4.2})$$

(VI.5) Solução Fundamental do Produto de um Operador de Laplace Tridimensional por um Operador das Ondas Tridimensional

$$\Delta_3 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_3 \right]; \quad c > 0$$

Uma solução fundamental de

$$\Delta_3 \quad (\text{em } R_{tx}^4)$$

é

$$E = -(4\pi |x|)^{-1} \otimes \delta_t$$

(v. fórmula (III.5.13) e Capítulo Zero).

Uma solução fundamental de

$$c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_3; \quad c > 0$$

é a distribuição temperada F do R_{tx}^4 dada por: para cada $\psi \in S(R^4)$,

$$\langle F, \psi \rangle = (4\pi)^{-1} \int_0^\infty t^{-1} \int_{|y|=ct} \psi(t, y) dy dt =$$

(VI.5.1)

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} |x|^{-1} \psi\left(\frac{|x|}{c}, x\right) dx$$

(v. fórmula (III.8.8)).

Uma solução fundamental de

$$c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left[c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_3 \right] + \Delta_3$$

é

$$v_c = c^2 tY(t) \otimes \delta(x)$$

(v. Capítulo Zero).

Portanto, uma solução fundamental de

$$\Delta_3 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_3 \right]; \quad c > 0$$

é

$$T = [E + F] * [tY(t) \otimes \delta(x)] \quad (\text{VI.5.2})$$

Além disso, para cada $\psi \in C_c^\infty(R^4; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle T, \psi \rangle &= \langle E+F, \langle tY(t) \otimes \delta(x), \psi(s+t, x+y) \rangle \rangle = \\ &= \langle E+F, \int_{-\infty}^{+\infty} (t-s)Y(t-s)\psi(t, x) dt \rangle = \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{1}{|x|} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} tY(t)\psi(t, x) dt \right] dx + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{1}{|x|} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \frac{|x|}{c}\right) Y\left(t - \frac{|x|}{c}\right) \psi(t, x) dt \right] dx = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{R^4} \frac{1}{|x|} \left[\left(t - \frac{|x|}{c}\right) Y\left(t - \frac{|x|}{c}\right) - tY(t) \right] \psi(t, x) d(t, x) \end{aligned}$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero).

Conclusão

Uma solução fundamental de

$$\Delta_3 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_3 \right]; \quad c > 0$$

é a função localmente integrável T do R_{tx}^4 dada por

$$T(t, x) = \frac{1}{4\pi|x|} \left[\left(t - \frac{|x|}{c} \right) Y\left(t - \frac{|x|}{c} \right) - tY(t) \right] \quad (\text{VI.5.3})$$

(VI.6) Solução Fundamental do Produto de Dois Operadores das Ondas n -Dimensional

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_n \right]; \quad 0 < a < b, \quad n \geq 1$$

Indicando por $E_{\lambda n}$ uma solução fundamental de

$$\lambda^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n; \quad \lambda > 0, \quad n \geq 1$$

temos a seguinte relação para cada distribuição V do R^n tal que o produto de convolução de $E_{an} - E_{bn}$ por V existe:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_n \right] [(E_{an} - E_{bn}) * V] = (a^2 - b^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} V.$$

Como

$$V_{ab} = (a^2 - b^2)^{-1} tY(t) \otimes \delta(x)$$

tem a propriedade acima e é uma solução fundamental de

$$(a^2 - b^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

(v. Capítulo Zero), concluímos que

$$T_{abn} = [E_{an} - E_{bn}] * V_{ab} \quad (\text{VI.6.1})$$

é uma solução fundamental de

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n\right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_n\right]; \quad 0 < a < b, \quad n \geq 1$$

Para $n = 1$,

$$E_{\lambda 1}(t, x) = \frac{\lambda}{2} Y(\lambda t - |x|)$$

(v. fórmula (III.8.2)). Portanto, para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2) \langle T_{ab1}, \psi \rangle &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [E_{an}(s, x) - E_{bn}(s, x)] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (t-s) Y(t-s) \psi(t, x) dt \right] d(s, x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [E_{an}(s, x) - E_{bn}(s, x)] (t-s) Y(t-s) ds \right] \psi(t, x) d(t, x) \end{aligned}$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero).

Conclusão

Uma solução fundamental de

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]; \quad 0 < a < b$$

é a função localmente integrável T_{ab1} do $\mathbb{R}_{tx}^2$ dada por

$$\begin{aligned} T_{ab1}(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [E_{an}(s, x) - E_{bn}(s, x)] (t-s) Y(t-s) ds = \\ &= \frac{1}{4(a^2 - b^2)} \left[a \left(t - \frac{|x|}{a} \right)^2 Y \left(t - \frac{|x|}{a} \right) - b \left(t - \frac{|x|}{b} \right)^2 Y \left(t - \frac{|x|}{b} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.6.2})$$

Para $n = 2$,

$$E_{\lambda 2}(t, x, y) = \frac{\lambda Y(c^2 t^2 - x^2 - y^2)}{2\pi(c^2 t^2 - x^2 - y^2)^{1/2}}$$

(v. fórmula (III.8.11)). Portanto, para cada $\psi \in C_c^\infty(R^3; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2) \langle T_{ab2}, \psi \rangle &= \\ &= \int_{R^3} [E_{a2}(s, x, y) - E_{b2}(s, x, y)] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (t-s) Y(t-s) \psi(t, x, y) dt \right] d(s, x, y) = \\ &= \int_{R^3} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [E_{a2}(s, x, y) - E_{b2}(s, x, y)] (t-s) Y(t-s) ds \right] \psi(t, x, y) d(t, x, y) \end{aligned}$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero).

Conclusão

Uma solução fundamental do operador das ondas em meios e lásticos isotrópicos do R^2

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \right]; \quad 0 < a < b$$

é a função localmente integrável T_{ab2} do R_{txy}^3 dada por

$$\begin{aligned} T_{ab2}(t, x, y) &= \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [E_{a2}(s, x, y) - E_{b2}(s, x, y)] (t-s) Y(t-s) ds = \\ &= \frac{(2\pi)^{-1}}{a^2 - b^2} \left[\operatorname{targch}\left(\frac{at}{r}\right) - \left(t^2 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \right] Y(at - r) - \\ &- \frac{(2\pi)^{-1}}{a^2 - b^2} \left[\operatorname{targch}\left(\frac{bt}{r}\right) - \left(t^2 - \frac{r^2}{b^2}\right)^{1/2} \right] Y(bt - r) \end{aligned} \quad (\text{VI.6.3})$$

onde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Para $n = 3$, para cada $\psi \in S(R^4)$,

$$\langle E_{\lambda 3}, \psi \rangle = (4\pi)^{-1} \int_{R^3} r^{-1} \psi(\lambda^{-1} r, x, y, z) d(x, y, z)$$

onde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ (v. fórmula (VI.5.1)).

Com considerações análogas aos casos $n = 1$ e $n = 2$, temos a seguinte

Conclusão

Uma solução fundamental do operador das ondas em meios elásticos isotrópicos do R^3

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_3 \right]; \quad 0 < a < b$$

é a função localmente integrável T_{ab3} do R^4_{txyz} dada por

$$T_{ab3}(t, x, y, z) =$$

(VI.6.4)

$$= \frac{(4\pi r)^{-1}}{a^2 - b^2} \left[\left(t - \frac{r}{a} \right) Y(at - r) - \left(t - \frac{r}{b} \right) Y(bt - r) \right]$$

onde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

CAPÍTULO VII

O MÉTODO DA CONVOLUÇÃO REGULARIZADA PARA A DETERMINAÇÃO
DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PRODUTO DE DOIS OPERADORES
DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES COMPLEXOS
CONSTANTES EM $n \geq 1$ VARIÁVEIS REAIS

Resumo do Capítulo

O Capítulo VII está subdividido em seis seções:

(VII.1) Motivação para o método da convolução regularizada: uma
solução fundamental do operador de Laplace bidimensional;

(VII.2) O método da convolução regularizada;

(VII.3) Solução fundamental do operador $\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial y^4}$;

(VII.4) Solução fundamental do operador

$$P_{\lambda\mu}(\partial) = [\Delta_2 - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x}][\Delta_2 - 2\mu \frac{\partial}{\partial x}]; (\lambda - \mu)(\operatorname{Re}\lambda)(\operatorname{Re}\mu) \neq 0$$

(VII.5) Solução fundamental do operador

$$P_{\lambda\mu}(\partial) = [\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}][\frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}]; (\lambda - \mu)(\operatorname{Im}\lambda)(\operatorname{Im}\mu) \neq 0$$

(VII.6) Solução fundamental do operador da placa ortotrópica

$$D_\varepsilon(\partial) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(1 - 2\varepsilon^2)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}; 0 < \varepsilon < 1/\sqrt{2}.$$

(VII.1) *Motivação Para o Método da Convolução Regularizada: Uma Solução Fundamental do Operador de Laplace Bidimensional*

$$\Delta_2 = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Uma solução fundamental do operador de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

é a função localmente integrável E_+ do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E_+(x,y) = [\pi(x+iy)]^{-1},$$

e uma solução fundamental do operador anti Cauchy-Riemann é a função localmente integrável E_- do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E_-(x,y) = [\pi(x-iy)]^{-1}$$

(v. fórmulas (II.3.4) e (II.3.5)).

Caso existisse, o produto de convolução de E_+ por E_- seria uma solução fundamental de $\frac{1}{4}\Delta_2$. O problema é que tal produto de convolução não faz sentido (v. Capítulo Zero). Para contornar o problema, consideremos, para cada $N = 1, 2, 3, \dots$ a função localmente integrável do $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\chi_N(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x^2 + y^2 \leq N^2 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 > N^2 \end{cases}$$

e calculemos o produto de convolução H_N de $\frac{\chi_N(x,y)}{\pi(x+iy)}$ por

$$\frac{1}{\pi(x-iy)}:$$

$$\begin{aligned}
H_N(s,t) &= \int_{R^2} \frac{\chi_N(x,y)}{[x+iy][(s-x)-i(t-y)]} d(x,y) = \\
&= - \int_{x^2+y^2 \leq N^2} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\text{Log}[(s-x)-i(t-y)]] d(x,y) = \\
&= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{R_{N\epsilon}} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \text{Log}(\overline{z_0 - z}) d(x,y)
\end{aligned}$$

onde $z_0 = s+it$ e, para cada $\epsilon > 0$, $R_{N\epsilon}$ é a região da figura abaixo: (estamos supondo, sem perda de generalidade, que $\epsilon < |z_0| < N$ pois iremos, adiante, fazer $N \rightarrow +\infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$).

$$= \frac{i}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial R_{N\epsilon}} \frac{1}{z} \text{Log}|z_0 - z|^2 dz$$

pela forma complexa do teorema de Green no plano.

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} \int_{|z|=N} z^{-1} \text{Log}|z_0 - z|^2 dz - \frac{i}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|z|=\epsilon} z^{-1} \text{Log}|z_0 - z|^2 dz = \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} \ell n(s^2 + t^2) - \ell n N \right]
\end{aligned} \tag{VII.1.1}$$

Como $\lim_{N \rightarrow \infty} \chi_N = 1$ em $D'(R^2)$, caso existisse, $\lim_{N \rightarrow \infty} H_N$ em $D'(R^2)$ seria uma solução fundamental de $\frac{1}{4} \Delta_2$. Em virtude deste limite não existir, pela presença da parcela $(-\frac{2}{\pi} \ell n N)$ em (VII.1.1), fazemos o seguinte artifício: para cada $N = 1, 2, 3, \dots$ de finimos

$$R_N(x,y) = \frac{2}{\pi} \ell n N, \quad (x,y) \in R^2$$

que satisfaz a equação $\Delta_2 R_N = 0$ e calculamos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [H_N + R_N] = \pi^{-1} \ell_n(x^2 + y^2) \quad \text{em } D'(R^2)$$

para obtermos a função localmente integrável T dada por

$$T(x, y) = \pi^{-1} \ell_n(x^2 + y^2) \quad (0, 0) \neq (x, y) \in R^2$$

que é uma solução fundamental de $\frac{1}{4}\Delta_2$ (v. fórmula (III.5.13)).

O artifício empregado constitui a essência da definição da convolução regularizada da seção seguinte e é a origem do método da convolução regularizada descrito na próxima seção.

(VII.2) O Método da Convolução Regularizada

Definição da Convolução Regularizada de Duas Distribuições em R^n em Relação a um Operador Diferencial Parcial Linear com Coeficientes Complexos Constantes em $n \geq 1$ Variáveis Reais

Consideremos duas distribuições S e T em R^n e um operador diferencial parcial linear $P(\partial)$ com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Para cada $N = 1, 2, 3, \dots$, S_N é uma distribuição de su porte compacto em R^n tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S \quad \text{em } D'(R^n)$$

(a existência de uma seqüência $(S_N)_{N=1,2,3,\dots}$ com as propriedades acima descritas é garantida pelo fato de que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é denso em $D'(\mathbb{R}^n)$).

(ii) Para cada $N = 1, 2, 3, \dots$, R_N é uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\partial) R_N = 0 \quad \text{em } D'(\mathbb{R}^n)$$

(em particular, esta condição é satisfeita sempre que $P(\partial) R_N = 0$, $N = 1, 2, 3, \dots$).

Uma convolução regularizada de S e T , nesta ordem, em relação a $P(\partial)$ é definida pelo limite abaixo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N * T + R_N) \quad \text{em } D'(\mathbb{R}^n)$$

quando o limite existir em $D'(\mathbb{R}^n)$ (o produto de convolução de S_N por T sempre existe pelo fato de S_N ser uma distribuição de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ (v. Capítulo Zero)) e é indicada por:

$$\text{Reg}[S * T : P]$$

(a notação adotada é ambígua por não envolver explicitamente as seqüências $(S_N)_{N=1,2,3,\dots}$ e $(R_N)_{N=1,2,3,\dots}$ de distribuições em $\mathbb{R}^n$ consideradas; por este motivo, ao utilizarmos esta notação, procuraremos deixar explicitadas as seqüências $(S_N)_{N=1,2,3,\dots}$ e $(R_N)_{N=1,2,3,\dots}$).

Observações Complementares a Definição

- (1) A expressão "uma convolução regularizada de S e T em relação a $P(\partial)$ ", que consta no texto da definição dada, salienta o fato de que a convolução regularizada de S e T em relação a $P(\partial)$ não é única pois, em geral, não são univocamente determinadas as seqüências $(S_N)_{N=1,2,3,\dots}$ e $(R_N)_{N=1,2,3,\dots}$ com as propriedades (i) e (ii) da definição.
- (2) A convolução regularizada de S e T em relação a $P(\partial)$ é uma generalização do conceito de produto de convolução entre S e T : caso o produto de convolução $S*T$ de S por T exista, uma convolução regularizada de S e T em relação a $P(\partial)$, definida por uma seqüência $(S_N)_{N=1,2,3,\dots}$ qualquer satisfazendo a primeira condição da definição e por $R_N = 0, N=1,2,3,\dots$, também existe e é igual a $S*T$, pela continuidade do produto de convolução (v. Capítulo Zero).

O teorema abaixo enunciado mostra a utilidade da convolução regularizada no cômputo de soluções fundamentais.

Teorema VII.2.1 (da Convolução Regularizada)

Suponhamos que $P(\partial)$ e $Q(\partial)$ são dois operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais e que as distribuições E e F do R^n têm as seguintes propriedades:

$$Q(\partial)E = \delta$$

$$P(\partial)F = Q(\partial)\delta$$

Então, uma convolução regularizada de E e F em relação a $P(\partial)$ (quando existir) é uma solução fundamental de $P(\partial)$.

Prova

Por hipótese, existem uma seqüência $(E_N)_{N=1,2,3,\dots}$ de distribuições de suporte compacto em R^n tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = E \quad \text{em } D'(R^n),$$

e uma seqüência $(R_N)_{N=1,2,3,\dots}$ de distribuições em R^n de tal modo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\partial)R_N = 0 \quad \text{em } D'(R^n).$$

Além disso, por hipótese, o limite a seguir existe:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (E_N * F + R_N) \quad \text{em } D'(R^n).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(\partial)[\lim_{N \rightarrow \infty} (E_N * F + R_N)] &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [P(\partial)(E_N * F + R_N)] \end{aligned}$$

(pela continuidade do operador diferencial parcial linear $P(\partial)$)

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} [E_N * P(\partial)F]$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} [E_N * Q(\partial)\delta]$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} Q(\partial)(E_N * \delta)$$

$$= Q(\partial)[\lim_{N \rightarrow \infty} E_N]$$

(pela continuidade do operador diferencial parcial linear $Q(\partial)$)

$$= Q(\partial)E$$

$$= \delta$$

o que encerra a prova do teorema da convolução regularizada.

Descrição do Método da Convolução Regularizada

O método da convolução regularizada é um método para a determinação de soluções fundamentais do produto

$$P(\partial)Q(\partial) = Q(\partial)P(\partial) \quad (\text{VII.2.1})$$

de dois operadores diferenciais parciais lineares $P(\partial)$ e $Q(\partial)$ com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais.

Este método é baseado no teorema da convolução regularizada e consiste basicamente em: conhecida uma solução fundamental F de $P(\partial)$, uma solução fundamental G de $Q(\partial)$ e uma solução fundamental E de $D(\partial) = Q(\partial)P(\partial)$, considerar uma convolução regularizada de E e $(F-G)$ nesta ordem em relação a $P(\partial)Q(\partial)$ (quando ela existir): a identidade

$$P(\partial)Q(\partial)[F-G] = D(\partial)\delta \quad (\text{VII.2.2})$$

mostra que (pelo teorema da convolução regularizada) a convolução regularizada considerada de E e $(F-G)$ é uma solução fundamental de $P(\partial)Q(\partial)$.

(VII.3) Solução Fundamental do Operador

$$P(\partial) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]$$

Uma solução fundamental de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

é a função localmente integrável do R^2 dada por

$$(x,y) \in R^2 \rightarrow \frac{1}{2}Y(x - |y|)$$

(v. fórmula (III.8.2)) e uma solução fundamental de

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

é a função localmente integrável do R^2 dada por

$$(0,0) \neq (x,y) \in R^2 \rightarrow (4\pi)^{-1} \ln(x^2 + y^2)$$

(v. fórmula (III.5.13)).

A função localmente integrável F do R^2 definida por

$$F(x,y) = \frac{1}{2}Y(x - |y|) + \frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \quad (\text{VII.3.1})$$

satisfaz a equação $P(\partial)F = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta$

e uma solução fundamental de $2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ é

$$E = \frac{xy(x)}{2} \otimes \delta(y) \quad (\text{VII.3.2})$$

(v. Capítulo Zero).

O teorema da convolução regularizada garante que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}Y(x - |y|) * E + \\ &+ \text{Reg}[E * (4\pi)^{-1}\ell_n(x^2+y^2) : P] \end{aligned} \quad (\text{VII.3.3})$$

é uma solução fundamental de $P(\partial)$ desde que o segundo membro de (VII.3.3) faça sentido.

Cálculo de $\text{Reg}[E * (4\pi)^{-1}\ell_n(x^2+y^2) : P]$

$$\begin{aligned} &\text{Reg}[E * (4\pi)^{-1}\ell_n(x^2+y^2) : P] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left[\frac{x}{2}\chi_N(x) \otimes \delta(y) \right] * \left[(4\pi)^{-1}\ell_n(x^2+y^2) \right] + R_N \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x-s)\chi_N(x-s)\ell_n(s^2+y^2)ds + R_N \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{8\pi} \int_{x-N}^x (x-s)\ell_n(s^2+y^2)ds + R_N \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x^2-y^2}{16\pi} \right) \ell_n(x^2+y^2) + \frac{xy}{4\pi} \text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy}{4\pi} \text{arctg}\left(\frac{x-N}{y}\right) - \frac{N^2}{16\pi} - \frac{Nx}{8\pi} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{N^2+y^2-x^2}{16\pi} \right) \ell_n[(N-x)^2+y^2] + R_N \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x^2-y^2}{16\pi} \right) \ell_n(x^2+y^2) + \frac{xy}{4\pi} \text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy}{4\pi} \text{arctg}\left(\frac{x-N}{y}\right) + \frac{Nx}{8\pi} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{N^2+y^2-x^2}{16\pi} \right) (\ell_n[(N-x)^2+y^2] + \ell_n N^2) \right] \end{aligned}$$

definindo para cada $N = 1, 2, 3, \dots$

$$R_N(x, y) = \frac{N^2}{16\pi} + \frac{Nx}{4\pi} - \left(\frac{N^2 + y^2 - x^2}{16\pi} \right) \ln N^2 \quad (\text{VII.3.4})$$

que satisfaz a equação $P(\partial)R_N = 0$

$$= \left(\frac{x^2 - y^2}{16\pi} \right) \ln(x^2 + y^2) + \frac{xy}{4\pi} \arctg\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x|y|}{8} + \frac{x^2 + y^2}{16\pi} + \frac{x^2}{8\pi}$$

pela observação dos seguintes limites:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{xy}{4\pi} \arctg\left(\frac{x-N}{y}\right) = - \frac{x|y|}{8} \quad \text{em } D'(R^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{N^2 + y^2 - x^2}{16\pi} \right) \ln\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{N^2} - \frac{2x}{N}\right) + \frac{Nx}{8\pi} \right] = \\ = \frac{x^2 + y^2}{16\pi} - \frac{x^2}{8\pi} \quad \text{em } D'(R^2). \end{aligned}$$

Conclusão

Uma solução fundamental de

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

é a função localmente integrável T do R^2 dada por

$$\begin{aligned} T(x, y) = \frac{(x - |y|)^2}{8} Y(x - |y|) + \left(\frac{x^2 - y^2}{16\pi} \right) \ln(x^2 + y^2) + \\ + \frac{xy}{4\pi} \arctg\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x|y|}{8} \end{aligned} \quad (\text{VII.3.5})$$

lembrando que

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} Y(x - |y|) \right] * \left[\frac{xY(x)}{2} \otimes \delta(y) \right] = \\
& = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-s) Y(s - |y|) Y(x-s) ds = \quad (\text{VII.3.6}) \\
& = \frac{(x - |y|)^2}{8} Y(x - |y|)
\end{aligned}$$

(VII.4) Solução Fundamental do Operador

$$P_{\lambda\mu}(\partial) = [\Delta_2 - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x}] [\Delta_2 - 2\mu \frac{\partial}{\partial x}]; \quad (\lambda - \mu)(\operatorname{Re}\lambda)(\operatorname{Re}\mu) \neq 0$$

Uma solução fundamental de

$$\Delta_2 - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x}; \quad \operatorname{Re}\lambda \neq 0$$

é a função localmente integrável do R^2 dada por

$$(x, y) \rightarrow -(2\pi)^{-1} \exp(\lambda x) K_0[\lambda(x^2 + y^2)^{1/2}]$$

(v. fórmula (III.6.5)).

A função localmente integrável $F_{\lambda\mu}$ do R^2 dada por

$$\begin{aligned}
F_{\lambda\mu}(x, y) = & -(2\pi)^{-1} [\exp(\lambda x) K_0[\lambda \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\lambda) (x^2 + y^2)^{1/2}] - \\
& - \exp(\mu x) K_0[\mu \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\mu) (x^2 + y^2)^{1/2}]] \quad (\text{VII.4.1})
\end{aligned}$$

satisfaz

$$P_{\lambda\mu}(\partial) F_{\lambda\mu} = 2(\lambda - \mu) \frac{\partial}{\partial x} \delta,$$

e uma solução fundamental de $2(\lambda - \mu) \frac{\partial}{\partial x}$ é

$$E_{\lambda\mu} = [2(\lambda-\mu)]^{-1} Y(x) \otimes \delta_y \quad (\text{VII.4.2})$$

(v. Capítulo Zero).

O método da convolução regularizada (com uma pequena modificação) garante que, caso exista,

$$T_{\lambda\mu} = \text{Reg}[E_{\lambda\mu} * F_{\lambda\mu} : P_{\lambda\mu}] \quad (\text{VII.4.3})$$

é uma solução fundamental de $P_{\lambda\mu}(\partial)$.

Cálculo de $T_{\lambda\mu}$

Para o cálculo de $T_{\lambda\mu}$, precisamos da seguinte fórmula, válida para $x \in \mathbb{R}$, $N = 1, 2, 3, \dots$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_{-x}^N \sqrt{-\pi/2\lambda s} \, ds = \sqrt{-2\pi N/\lambda} - \sqrt{2\pi x/\lambda} \quad (\text{VII.4.4})$$

Esta fórmula conduz à escolha apropriada de R_N para cada $N = 1, 2, 3, \dots$:

$$R_N(x, y) = \frac{1}{4\pi(\lambda-\mu)} [\sqrt{-2\pi N/\lambda} Y(-\text{Re}\lambda) - \sqrt{-2\pi N/\mu} Y(-\text{Re}\mu)] \quad (\text{VII.4.5})$$

$$\text{Então: } 4\pi(\lambda-\mu)T_{\lambda\mu} = 4\pi(\lambda-\mu)\text{Reg}[E_{\lambda\mu} * F_{\lambda\mu} : P_{\lambda\mu}] =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} [8[\chi_N(x) \otimes \delta(y)] * F_{\lambda\mu} + R_N] =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_N(x-s) F_{\lambda\mu}(s, y) ds + R_N \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[- \int_{-x}^{N-x} \exp(-\lambda s) K_0 [\lambda \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \lambda) (s^2 + y^2)^{1/2}] ds + \right. \\
&+ \sqrt{-2\pi N / \lambda} Y(-\operatorname{Re} \lambda) + \\
&+ \int_{-x}^{N-x} \exp(-\mu s) K_0 [\mu \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \mu) (s^2 + y^2)^{1/2}] ds - \\
&- \sqrt{-2\pi N / \mu} Y(-\operatorname{Re} \mu)] = \\
&= - \int_{-x}^{+\infty} [\exp(-\lambda s) K_0 [\lambda \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \lambda) (s^2 + y^2)^{1/2}] - \\
&- \sqrt{-\pi / 2 \lambda s} Y(-\operatorname{Re} \lambda)] ds + \sqrt{2\pi x / \lambda} Y(-\operatorname{Re} \lambda) + \\
&+ \int_{-x}^{+\infty} [\exp(-\mu s) K_0 [\mu \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \mu) (s^2 + y^2)^{1/2}] + \\
&+ \sqrt{-\pi / 2 \mu s} Y(-\operatorname{Re} \mu)] ds - \sqrt{2\pi x / \mu} Y(-\operatorname{Re} \mu) \quad (\text{VII.4.6})
\end{aligned}$$

Conclusão

Uma solução fundamental de

$$[\Delta_2 - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x}][\Delta_2 - 2\mu \frac{\partial}{\partial x}]; \quad (\lambda - \mu) \operatorname{Re} \lambda \operatorname{Re} \mu \neq 0$$

é:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu}(x,y) = & \\
= & -\frac{1}{4\pi(\lambda-\mu)} \left[\int_{-x}^{+\infty} [\exp(-\lambda s) K_0[\lambda \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\lambda)(s^2+y^2)^{1/2}] - \right. \\
& - \sqrt{-\pi/2\lambda s} Y(-\operatorname{Re}\lambda)] ds - \int_{-x}^{+\infty} [\exp(-\mu s) K_0[\mu \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\mu)(s^2+y^2)^{1/2}] - \\
& - \sqrt{-\pi/2\mu s} Y(-\operatorname{Re}\mu)] ds - \sqrt{2\pi x/\lambda} Y(-\operatorname{Re}\lambda) + \\
& + \sqrt{2\pi x/\mu} Y(-\operatorname{Re}\mu)] \quad (\text{VII.4.7})
\end{aligned}$$

Em particular, uma solução fundamental do operador da placa tracionada

$$[\Delta_2^2 - 4\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}] = [\Delta_2 - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x}][\Delta_2 + 2\lambda \frac{\partial}{\partial x}]; \quad \lambda > 0$$

é

$$\begin{aligned}
T_\lambda(x,y) = & \frac{1}{4\pi\lambda} \int_{-x}^{+\infty} [\operatorname{sh}(\lambda s) K_0[\lambda(s^2+y^2)^{1/2}] - \\
& - \frac{1}{2} \sqrt{\pi/2\lambda s}] ds - \frac{1}{2} \sqrt{-2\pi x/\lambda} \quad (\text{VII.4.8})
\end{aligned}$$

(VII.5) Solução Fundamental do Operador

$$P_{\lambda\mu}(\partial) = \left[\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \right]; \quad (\lambda-\mu) \operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im}\mu \neq 0$$

Uma solução fundamental de

$$\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}; \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0$$

é a função localmente integrável F_λ do R^2 dada por

$$F_\lambda(x, y) = \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \lambda)}{2\pi i (y - \lambda x)} \quad (\text{VII.5.1})$$

(v. fórmula (II.1.15)).

A identidade

$$(\lambda - \mu) \frac{\partial}{\partial x} \delta = P_{\lambda\mu}(\partial) [\lambda F_\lambda - \mu F_\mu]$$

e o teorema da convolução regularizada mostram que

$$T_{\lambda\mu} = \operatorname{Reg}[E_{\lambda\mu} * (\lambda F_\lambda - \mu F_\mu) : P_{\lambda\mu}] \quad (\text{VII.5.2})$$

é uma solução fundamental de $P_{\lambda\mu}(\partial)$, onde

$$E_{\lambda\mu} = (\lambda - \mu)^{-1} Y(x) \otimes \delta(y) \quad (\text{VII.5.3})$$

é uma solução fundamental de $(\lambda - \mu) \frac{\partial}{\partial x}$ (v. Capítulo Zero).

Cálculo de $T_{\lambda\mu}$

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) T_{\lambda\mu} &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \{ [\chi_N(x) \otimes \delta(y)] * [\lambda F_\lambda - \mu F_\mu] + R_N \} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_N(x-s) [\lambda F_\lambda(s, y) - \mu F_\mu(s, y)] ds + R_N \right\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{x-N}^x \left[\frac{\lambda \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \lambda)}{y - \lambda s} - \frac{\mu \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \mu)}{y - \mu s} \right] ds + R_N \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \operatorname{iarctg} \left[\frac{|\lambda|^2 x - (\operatorname{Re} \lambda) y}{|\operatorname{Im} \lambda| y} \right] - \operatorname{iarctg} \left[\frac{|\mu|^2 x - (\operatorname{Re} \mu) y}{|\operatorname{Im} \mu| y} \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\lambda)}{2} \ell n[|\lambda|^2 x^2 - 2\operatorname{Re}\lambda xy + y^2] + \\
& + \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\mu)}{2} \ell n[|\mu|^2 x^2 - 2\operatorname{Re}\mu xy + y^2] - \\
& - i \operatorname{arctg}\left[\frac{|\lambda|^2(x-N) - (\operatorname{Re}\lambda)y}{|\operatorname{Im}\lambda|y}\right] + \\
& + i \operatorname{arctg}\left[\frac{|\mu|^2(x-N) - (\operatorname{Re}\mu)y}{|\operatorname{Im}\mu|y}\right] + \\
& + \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\lambda)}{2} \ell n[|\lambda|^2(x-N)^2 - 2\operatorname{Re}\lambda y(x-N) + y^2] - \\
& - \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\mu)}{2} \ell n[|\mu|^2(x-N)^2 - 2\operatorname{Re}\mu y(x-N) + y^2] + R_N \} = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \left[i \operatorname{arctg}\left[\frac{|\lambda|^2 x - (\operatorname{Re}\lambda)y}{|\operatorname{Im}\lambda|y}\right] - \right. \\
& - i \operatorname{arctg}\left[\frac{|\mu|^2 x - (\operatorname{Re}\mu)y}{|\operatorname{Im}\mu|y}\right] - \\
& - \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\lambda)}{2} \ell n[|\lambda|^2 x^2 - 2\operatorname{Re}\lambda xy + y^2] + \\
& + \left. \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\mu)}{2} \ell n[|\mu|^2 x^2 - 2\operatorname{Re}\mu xy + y^2] \right] \quad (\text{VII.5.4})
\end{aligned}$$

pela definição, para cada $N = 1, 2, 3, \dots$ de

$$\begin{aligned}
R_N(x, y) &= \\
&= \frac{1}{2\pi i(\lambda - \mu)} [\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\mu) \ell n(|\mu|N) - \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\lambda) \ell n(|\lambda|N)] \quad (\text{VII.5.5})
\end{aligned}$$

que satisfaz a equação $P_{\lambda\mu}(\partial)R_N = 0$ e pela observação dos se-

guintes limites

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \left[\frac{|\lambda|^2 (x-N) - (\operatorname{Re} \lambda) y}{|\operatorname{Im} \lambda| y} \right] = - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y) \quad \text{em } D'(R^2)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\operatorname{arctg} \left[\frac{|\mu|^2 (x-N) - (\operatorname{Re} \mu) y}{|\operatorname{Im} \mu| y} \right] - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \left[\frac{|\lambda|^2 (x-N) - (\operatorname{Re} \lambda) y}{|\operatorname{Im} \lambda| y} \right] \right] = 0 \quad \text{em } D'(R^2)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [\ell_n [|\lambda|^2 (x-N)^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda y (x-N) + y^2] -$$

$$- \ell_n [|\lambda|^2 N^2]] = 0 \quad \text{em } D'(R^2)$$

Conclusão

Uma solução fundamental de

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \right]; \quad (\lambda - \mu) \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im} \mu \neq 0$$

é a função localmente integrável $T_{\lambda\mu}$ do R^2 dada por

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu}(x, y) &= \\ &= \frac{(2\pi i)^{-1}}{\lambda - \mu} \left[i \operatorname{arctg} \left[\frac{|\lambda|^2 x - (\operatorname{Re} \lambda) y}{|\operatorname{Im} \lambda| y} \right] - \right. \\ &- i \operatorname{arctg} \left[\frac{|\mu|^2 x - (\operatorname{Re} \mu) y}{|\operatorname{Im} \mu| y} \right] - \\ &- \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \lambda)}{2} \ell_n [|\lambda|^2 x^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda x y + y^2] + \\ &+ \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \mu)}{2} \ell_n [|\mu|^2 x^2 - 2 \operatorname{Re} \mu x y + y^2] \end{aligned} \quad (\text{VII.5.6})$$

Em particular, uma solução fundamental de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} ; \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{Im} \lambda \neq 0$$

é a função localmente integrável T_λ do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} T_\lambda(x, y) &= \\ &= \frac{(4\pi)^{-1}}{\text{Im} \lambda - i \text{Re} \lambda} \left\{ i \arctg \left[\frac{2 \text{Re} \lambda |\text{Im} \lambda| y^2}{|\lambda|^4 x^2 + [(\text{Im} \lambda)^2 - (\text{Re} \lambda)^2] y^2} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\text{sgn}(\text{Im} \lambda)}{2} \ln [|\lambda|^4 x^4 + 2 x^2 y^2 [(\text{Im} \lambda)^2 - (\text{Re} \lambda)^2] + y^4] \right\} \quad (\text{VII.5.7}) \end{aligned}$$

(VII.6) Solução Fundamental do Operador da Placa Ortotrópica

$$\begin{aligned} D_\epsilon(\partial) &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(1-2\epsilon^2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]; \quad 0 < \epsilon < 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Uma solução fundamental de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \pm 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ; \quad 0 < \epsilon < 1/\sqrt{2}$$

é a função localmente integrável $E_{\pm\epsilon}$ do $\mathbb{R}^2$ definida por

$$E_{\pm\epsilon}(x, y) = \frac{\ln[x^2 \pm 2\epsilon xy + y^2]}{4\pi(1-\epsilon^2)^{1/2}} \quad (\text{VII.6.1})$$

(v. fórmula (IV.1.9)).

O teorema da convolução regularizada pode ser aplicado agora com

$$F_{\epsilon} = E_{-\epsilon} - E_{+\epsilon} \quad (\text{VII.6.2})$$

$$E_{\epsilon} = (4\epsilon)^{-1} [Y(x) \otimes Y(y)] \quad (\text{VII.6.3})$$

pois E_{ϵ} é uma solução fundamental de $Q_{\epsilon}(\partial) = 4\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ e $D_{\epsilon}(\partial)F_{\epsilon} = Q_{\epsilon}(\partial)\delta$; uma solução fundamental de $D_{\epsilon}(\partial)$ é

$$\text{Reg}[E_{\epsilon} * F_{\epsilon} : D_{\epsilon}]. \quad (\text{VII.6.4})$$

A fim de evitar expressões excessivamente longas, vamos aplicar o mesmo teorema só que em duas etapas: a primeira etapa consiste do cálculo de

$$G_{\epsilon} = \text{Reg}[(Y(x) \otimes \delta(y)) * (4\epsilon)^{-1} F_{\epsilon} : D_{\epsilon}] \quad (\text{VII.6.5})$$

que satisfaz a equação $D_{\epsilon}(\partial)G_{\epsilon} = \frac{\partial}{\partial y}\delta$ e a segunda etapa consiste no cálculo de

$$T_{\epsilon} = \text{Reg}[(\delta(x) \otimes Y(y)) * G_{\epsilon} : D_{\epsilon}] \quad (\text{VII.6.6})$$

que é uma solução fundamental de $D_{\epsilon}(\partial)$.

Cálculo de G_ε

$$\begin{aligned}
 G_\varepsilon &= \text{Reg}[(Y(x) \otimes \delta(y)) * (4\varepsilon)^{-1}(E_{-\varepsilon} - E_{+\varepsilon}) : D_\varepsilon] = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} [(\chi_N(x) \otimes \delta(y)) * (4\varepsilon)^{-1}(E_{-\varepsilon} - E_{+\varepsilon}) + R_N] = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_N(x-s) [E_{-\varepsilon}(s, y) - E_{+\varepsilon}(s, y)] ds + R_N \right] = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1-\varepsilon^2)^{-1/2}}{16\pi\varepsilon} \int_{x-N}^x [\ln(s^2 + 2\varepsilon s y + y^2) - \ln(s^2 - 2\varepsilon s y + y^2)] ds + R_N \right\} = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1-\varepsilon^2)^{-1/2}}{16\pi\varepsilon} \left[N \ln \left[\frac{(N-x-\varepsilon y)^2 + (1-\varepsilon^2)y^2}{(N-x+\varepsilon y)^2 + (1-\varepsilon^2)y^2} \right] + \right. \right. \\
 &\quad + (x-\varepsilon y) \ln[(N-x+\varepsilon y)^2 + (1-\varepsilon^2)y^2] - \\
 &\quad - (x+\varepsilon y) \ln[(N-x-\varepsilon y)^2 + (1-\varepsilon^2)y^2] + \\
 &\quad + 2(1-\varepsilon^2)^{1/2} y \left[\arctg\left(\frac{N-x-\varepsilon y}{(1-\varepsilon^2)^{1/2} y}\right) - \arctg\left(\frac{N-x+\varepsilon y}{(1-\varepsilon^2)^{1/2} y}\right) \right] + \\
 &\quad + (x+\varepsilon y) \ln[x^2 + 2\varepsilon x y + y^2] - (x-\varepsilon y) \ln[x^2 - 2\varepsilon x y + y^2] + \\
 &\quad + 2(1-\varepsilon^2)^{1/2} y \left[\arctg\left(\frac{x+\varepsilon y}{(1-\varepsilon^2)^{1/2} y}\right) - \arctg\left(\frac{x-\varepsilon y}{(1-\varepsilon^2)^{1/2} y}\right) \right] \left. \right] + R_N \Big\} = \\
 &= \frac{(1-\varepsilon^2)^{-1/2}}{16\pi\varepsilon} [(x+\varepsilon y) \ln[x^2 + 2\varepsilon x y + y^2] - (x-\varepsilon y) \ln[x^2 - 2\varepsilon x y + y^2]] + \\
 &\quad + \frac{y}{8\pi\varepsilon} \arctg \left[\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2} y^2}{x^2 + (1-2\varepsilon^2)y^2} \right] \tag{VII.6.7}
 \end{aligned}$$

pela definição, para cada $N = 1, 2, 3, \dots$ de

$$R_N(x, y) = \frac{(1 + \ell_n N)y}{4\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}},$$

que satisfaz a equação $D_\varepsilon(\partial)R_N = 0$, e pela observação dos seguintes limites:

$$\text{LIM 1} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [N \ell_n[(N-x)^2 + y^2] - N \ell_n N^2 + 2x] = 0 \quad \text{em } D'(R^2)$$

$$\text{LIM 2} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [\ell_n[(N-x)^2 + y^2] - \ell_n N^2] = 0 \quad \text{em } D'(R^2)$$

$$\text{LIM 3} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [y \arctg\left(\frac{N-x}{y}\right) - \frac{\pi}{2}|y|] = 0 \quad \text{em } D'(R^2)$$

e pela igualdade

$$\begin{aligned} & 2(1-\varepsilon^2)^{1/2} y \left[\arctg\left[\frac{x + \varepsilon y}{(1-\varepsilon^2)^{1/2} y}\right] - \right. \\ & \left. - \arctg\left[\frac{x - \varepsilon y}{(1-\varepsilon^2)^{1/2} y}\right] \right] = \\ & = \frac{y}{8\pi\varepsilon} \arctg\left[\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2} y^2}{x^2 + (1-2\varepsilon^2)y^2}\right]. \end{aligned}$$

Cálculo de T_ϵ

$$\begin{aligned}
T_\epsilon &= \text{Reg}[(\delta(x) \otimes Y(y)) * G_\epsilon : D_\epsilon] = \lim_{N \rightarrow \infty} [(\delta(x) \otimes \chi_N(y)) * G_\epsilon + R_N] = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1-\epsilon^2)^{-1/2}}{16\pi\epsilon} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x+\epsilon s) \chi_N(y-s) \ln[x^2 + 2\epsilon x s + s^2] ds - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\epsilon s) \chi_N(y-s) \ln[x^2 - 2\epsilon x s + s^2] ds \right] + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{8\pi\epsilon} \chi_N(y-s) \arctg\left[\frac{2\epsilon(1-\epsilon^2)^{1/2}s^2}{x^2 + (1-2\epsilon^2)s^2}\right] ds + R_N \right\} = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1-\epsilon^2)^{-1/2}}{16\pi\epsilon} \int_{y-N}^y (x+\epsilon s) \ln[x^2 + 2\epsilon x s + s^2] ds - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1-\epsilon^2)^{-1/2}}{16\pi\epsilon} \int_{y-N}^y (x-\epsilon s) \ln[x^2 - 2\epsilon x s + s^2] ds + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8\pi\epsilon} \int_{y-N}^y y \arctg\left[\frac{2\epsilon(1-\epsilon^2)^{1/2}s^2}{x^2 + (1-2\epsilon^2)s^2}\right] ds + R_N \right\} = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1-\epsilon^2)^{-1/2}}{16\pi\epsilon} \left[-(\epsilon^3 - \frac{3\epsilon}{2})x^2 + xy + \frac{\epsilon}{2}y^2 \right] \ln[x^2 + 2\epsilon xy + y^2] + \right. \\
&\quad \left. + 2(1-\epsilon^2)^{3/2}x^2 \arctg\left[\frac{\epsilon x + y}{(1-\epsilon^2)^{1/2}x}\right] + \right. \\
&\quad \left. + (x+\epsilon y)N \ln[(N-y-\epsilon x)^2 + (1-\epsilon^2)x^2] + \right. \\
&\quad \left. + [(\epsilon^3 - \frac{3\epsilon}{2})x^2 - xy - \frac{\epsilon}{2}y^2] \ln[(N-y-\epsilon x)^2 + (1-\epsilon^2)x^2] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\epsilon}{2}N^2 \ln[(N-y-\epsilon x)^2 + (1-\epsilon^2)x^2] + \frac{\epsilon}{2}N^2 + (\epsilon^2x - 2x - \epsilon y)N + \right. \\
&\quad \left. + 2(1-\epsilon^2)^{3/2}x^2 \arctg\left[\frac{N-y-\epsilon x}{(1-\epsilon^2)^{1/2}x}\right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\left(\epsilon^3 - \frac{3\epsilon}{2} \right) x^2 + xy - \frac{\epsilon}{2} y^2 \right] \ln[x^2 - 2\epsilon xy + y^2] - \\
& - 2(1-\epsilon^2)^{3/2} x^2 \operatorname{arctg} \left[\frac{-\epsilon x + y}{(1-\epsilon^2)^{1/2} x} \right] - \\
& - (x-\epsilon y) N \ln[(N-y+\epsilon x)^2 + (1-\epsilon^2)x^2] - \\
& - \left[-\left(\epsilon^3 - \frac{3\epsilon}{2} \right) x^2 - xy + \frac{\epsilon}{2} y^2 \right] \ln[(N-y+\epsilon x)^2 + (1-\epsilon^2)x^2] - \\
& - \frac{\epsilon}{2} N^2 \ln[(N-y+\epsilon x)^2 + (1-\epsilon^2)x^2] - \\
& - 2(1-\epsilon^2)^{3/2} x^2 \operatorname{arctg} \left[\frac{N-y+\epsilon x}{(1-\epsilon^2)^{1/2} x} \right] + \\
& + \frac{\epsilon}{2} N^2 - (\epsilon^2 x - 2x + \epsilon y) N \} + \\
& + \frac{1}{8\pi\epsilon} \left[\frac{y^2}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{2\epsilon(1-\epsilon^2)^{1/2} y^2}{x^2 + (1-2\epsilon^2)y^2} \right] + \frac{(1-2\epsilon^2)}{2} x^2 \operatorname{arctg} \left[\frac{(1-2\epsilon^2)x^2 + y^2}{2\epsilon(1-\epsilon^2)^{1/2} x^2} \right] - \right. \\
& - \frac{\epsilon}{2} (1-\epsilon^2)^{1/2} x^2 \ln[(x^2 + 2\epsilon xy + y^2)(x^2 - 2\epsilon xy + y^2)] + \\
& + \frac{\epsilon}{2} (1-\epsilon^2)^{1/2} x^2 \ln[(N-y)^4 + 2(1-2\epsilon^2)x^2(N-y)^2 + x^4] - \\
& - \frac{(1-2\epsilon^2)}{2} x^2 \operatorname{arctg} \left[\frac{(1-2\epsilon^2)x^2 + (N-y)^2}{2\epsilon(1-\epsilon^2)^{1/2} x^2} \right] - \\
& - \frac{(N-y)^2}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{2\epsilon(1-\epsilon^2)^{1/2} (N-y)^2}{x^2 + (1-2\epsilon^2)(N-y)^2} \right] + R_N \} = \\
& = \frac{1}{32\pi(1-\epsilon^2)^{1/2}} \left[(x^2 + \frac{2}{\epsilon} xy + y^2) \ln[x^2 + 2\epsilon xy + y^2] + \right. \\
& + (x^2 - \frac{2}{\epsilon} xy + y^2) \ln[x^2 - 2\epsilon xy + y^2] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}x^2}{16\pi\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \left[\operatorname{arctg}\left[\frac{\varepsilon x + y}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}x}\right] - \operatorname{arctg}\left[\frac{-\varepsilon x + y}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}x}\right] \right] + \\
& + \frac{(1-2\varepsilon^2)x^2}{16\pi\varepsilon} \operatorname{arctg}\left[\frac{(1-2\varepsilon^2)x^2+y^2}{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}x^2}\right] + \\
& + \frac{y^2}{16\pi\varepsilon} \operatorname{arctg}\left[\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}y^2}{x^2 + (1-2\varepsilon^2)y^2}\right] \quad (\text{VII.6.8})
\end{aligned}$$

(após desprezar todas as soluções da equação homogênea $D_\varepsilon(\partial)u=0$)

pela definição, para cada $N = 1, 2, 3, \dots$ de

$$\begin{aligned}
R_N(x, y) = & - \frac{(1-\varepsilon^2)^{-1/2}}{16\pi\varepsilon} [2\varepsilon y N \ell_N N^2 + \varepsilon N^2 - \varepsilon N^2 \ell_N N^2 - \\
& - 4\varepsilon(x^2 + y^2) + [(2\varepsilon^3 - 3\varepsilon)x^2 - \varepsilon y^2] \ell_N N^2] \\
& - \frac{1}{8\pi\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}x^2}{2} \ell_N N^4 - \left[(1-2\varepsilon^2)\frac{\pi}{4} - \varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2} \right] x^2 - \right. \\
& \left. - \frac{(N-y)^2}{2} \operatorname{arctg}\left[\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{1-2\varepsilon^2}\right] \right]
\end{aligned}$$

que satisfaz a equação $D_\varepsilon(\partial)R_N = 0$, e pela observação dos limites anteriores e dos seguintes limites:

$$\text{LIM 4} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [N^2 \ell_N [(N-x)^2 + y^2] - N^2 \ell_N N^2 + 2xN] = y^2 - x^2 \quad \text{em } D'(R^2)$$

$$\text{LIM 5} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}\left[\frac{N-x}{y}\right] = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y) \quad \text{em } D'(R^2)$$

$$\text{LIM 6} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \ell_N [(N-y)^4 + 2(1-2\varepsilon^2)x^2(N-y)^2 + x^4] - \ell_N N^4 \} = 0 \quad \text{em } D'(R^2)$$

$$\text{LIM 7} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \arctg \left[\frac{(N-y)^2 + (1-2\varepsilon^2)x^2}{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}x^2} \right] = \frac{\pi}{2} \quad \text{em } D'(R^2)$$

$$\begin{aligned} \text{LIM 8} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [(N-y)^2 \arctg \left[\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}(N-y)^2}{x^2 + (1-2\varepsilon^2)(N-y)^2} \right] - \\ - (N-y)^2 \arctg \left[\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{1-2\varepsilon^2} \right] + \\ + 2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}x^2] = 0 \quad \text{em } D'(R^2) \end{aligned}$$

Conclusão

Uma solução fundamental do operador da placa ortotrópica

$$D_\varepsilon(\partial) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(1-2\varepsilon^2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad 0 < \varepsilon < 1/\sqrt{2}$$

é a função localmente integrável T_ε do R^2 definida por

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(x, y) = \\ = \frac{(1-\varepsilon^2)^{-1/2}}{32\pi} [[x^2 + \frac{2}{\varepsilon}xy + y^2] \ell n [x^2 + 2\varepsilon xy + y^2] + \\ + [x^2 - \frac{2}{\varepsilon}xy + y^2] \ell n [x^2 - 2\varepsilon xy + y^2]] + \\ + \frac{1}{16\pi\varepsilon} [x^2 \arctg \left[\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}x^2}{(1-2\varepsilon^2)x^2 + y^2} \right] + \\ + y^2 \arctg \left[\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}y^2}{x^2 + (1-2\varepsilon^2)y^2} \right]] \end{aligned} \quad (\text{VII.6.9})$$

após simplificação de (VII.6.8) e omissão dos termos que são soluções da equação homogênea $D_\varepsilon(\partial)u = 0$.

Em particular, uma solução fundamental de

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

é a função localmente integrável T do R^2 definida por

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32\pi} [[x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2] \ln[x^2 + \sqrt{2}xy + y^2] + \\ &+ [x^2 - 2\sqrt{2}xy + y^2] \ln[x^2 - \sqrt{2}xy + y^2] + \\ &+ 2(x^2 - y^2) \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)] \end{aligned} \quad (\text{VII.6.10})$$

em vista de que a fórmula para T_ϵ também é válida para $\epsilon = \sqrt{1/2}$.

O operador da placa ortotrópica $D_\epsilon(\partial)$ é hipoelítico para $0 < \epsilon < 1/\sqrt{2}$: $T_\epsilon \in C^\infty(R^2 \setminus \{(0,0)\}; R)$; também é hipoelítico para $1/\sqrt{2} \leq \epsilon < 1$, como veremos no próximo capítulo. Isto mostra, em particular, que toda solução em $D'(R^2)$ da equação $D_\epsilon(\partial)u = 0$ está no espaço $C^\infty(R^2; C)$.

Observação

Para a obtenção da fórmula explícita de T_ϵ , empregamos o conhecimento de oito limites em $D'(R^2)$: abaixo segue a prova de um destes limites.

Prova do LIM 1: $\lim_{N \rightarrow \infty} \{N \ln[(N-x)^2 + y^2] - N \ln N^2 + 2x\} = 0$ em $D'(R^2)$

Para cada $N = 1, 2, 3, \dots$ consideremos a função localmente integrável F_N do R^2 dada por

$$\begin{aligned} F_N(x, y) &= N \ln[(N-x)^2 + y^2] - N \ln N^2 + 2x = \\ &= N \ln \left[1 + \frac{x^2 + y^2}{N^2} - \frac{2x}{N} \right] + 2x = \\ &= 2x + N \left[\frac{x^2 + y^2}{N^2} - \frac{2x}{N} \right] - \frac{N}{2} \left[\frac{x^2 + y^2}{N^2} - \frac{2x}{N} \right]^2 + \dots \end{aligned}$$

desde que $\left| \frac{x^2 + y^2}{N^2} - \frac{2x}{N} \right| < 1$, o que prova a convergência uniforme da seqüência $(f_N)_{N=1, 2, 3, \dots}$ em compactos do R^2 e, conseqüentemente, o LIM 1.

CAPÍTULO VIII

O MÉTODO DA INTEGRAÇÃO PARAMÉTRICA APLICADO AOS OPERADORES HIPERBÓLICOS, PARABÓLICOS E ELÍTICOS

Resumo do Capítulo

O capítulo oito tem cinco seções:

- (VIII.1) Soluções fundamentais de operadores diferenciais parciais lineares em $n \geq 1$ variáveis reais com coeficientes complexos constantes hiperbólicos e parabólicos em relação a uma das variáveis;
- (VIII.2) Motivação para o método da integração paramétrica;
- (VIII.3) O método da integração paramétrica aplicado aos operadores hiperbólicos;
- (VIII.4) O método da integração paramétrica aplicado aos operadores elíticos;
- (VIII.5) Soluções fundamentais do operador produto $\prod_{j=1}^m (\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y})$; $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq \dots \neq a_m$;

(VIII.1) *Soluções Fundamentais de Operadores Diferenciais Parciais Lineares em $n \geq 1$ Variáveis Reais com Coeficientes Complexos Constantes Hiperbólicos e Parabólicos em Relação a Uma das Variáveis*

Consideremos um polinômio P de grau $\text{gr}P \geq 1$ com coeficientes complexos constantes em $(n+1)$ variáveis reais (t, x) , $x = (x_1, \dots, x_n)$, e indiquemos por P_{pr} a parte principal de P , isto é, o polinômio obtido de P pela somatória de todos os monômios de P cujos graus igualam o grau de P .

Definição VIII.1.1

O operador diferencial parcial linear $P(\partial_t, \partial_x)$ com coeficientes complexos constantes em $(n+1)$ variáveis reais (t, x) , $x = (x_1, \dots, x_n)$, associado ao polinômios $P(t, x)$ é

(1) hiperbólico em relação a variável t se e somente se

(a) $P_{\text{pr}}(1, 0) \neq 0$.

(b) Existe um número real s_0 tal que

$$P(it-s, ix) \neq 0 \text{ para } s < s_0 \text{ e } (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

(2) parabólico em relação a variável t se e somente se

(a) $P(\partial_t, \partial_x)$ é hipoelítico.

(b) Existe um número real s_0 tal que

$$P(it-s, ix) \neq 0 \text{ para } s < s_0 \text{ e } (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Exemplos VIII.1.1

- (1) O operador das ondas n -dimensional: $\square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_n$,
 $n \geq 1$ e $c > 0$, é hiperbólico em relação a variável
 t : $P(t,x) = P_{pr}(t,x) = t^2 - c^2 |x|^2$ e $s_0 = 0$.
- (2) O operador $\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x}$ em $\mathbb{R}^2$ é hiperbólico em relação
a variável t para cada valor real de
 λ : $P(t,x) = P_{pr}(t,x) = t + \lambda x$ e $s_0 = 0$.
- (3) O operador do calor n -dimensional $\frac{\partial}{\partial t} - k \Delta_n$, $n \geq 1$ e
 $k > 0$, é parabólico em relação a variável t :
 $P(t,x) = t - k |x|^2$ e $s_0 = 0$ (a hipoeliticidade do operador
do calor n -dimensional está no Capítulo III).
- (4) O operador de Schrödinger n -dimensional $\frac{\partial}{\partial t} - ib \Delta_n$,
 $n \geq 1$ e $b > 0$, não é nem parabólico nem hiperbólico
em relação a variável t .

Definição VIII.1.2

Uma aplicação $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma escada de Hörmander
para o polinômio P em $(n+1)$ variáveis reais (t,x) , $x =$
 $= (x_1, \dots, x_n)$, com coeficientes complexos constantes se e somen
te se:

- (a) A função s é limitada, isto é, existe um número
real $M > 0$ tal que $|s(x)| \leq M$ para $x \in \mathbb{R}^n$.
- (b) Existe um número real $c > 0$ tal que
 $|P(it-s(x), ix)| \geq c$ para $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplos VIII.1.2

(1) Quando $P(\partial_t, \partial_x)$ for hiperbólico em relação a variável t , a aplicação constante $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $s(x) = \tilde{s}_0 < s_0$, onde s_0 é como na definição anterior, será uma escada de Hörmander para o polinômio P : de fato, caso s não for uma escada de Hörmander para P , existirá para cada $j = 1, 2, \dots$, $(t_j, x_j) \in \mathbb{R}^{n+1}$ com a propriedade: $|P(it_j - \tilde{s}_0, ix_j)| < \frac{1}{j}$; como existe $R > 0$ tal que $|P(it - \tilde{s}_0, ix)| > 1$ para $|t|, |x| > R$, então, para cada $j = 1, 2, \dots$, $|t_j|, |x_j| \leq R$ e, assim, podemos supor sem perda de generalidade que $\lim_{j \rightarrow \infty} (t_j, x_j) = (t_0, x_0)$; por continuidade, $P(it_0 - \tilde{s}_0, ix_0) = 0$ o que contradiz a definição anterior.

(2) Quando P estiver na forma normal, isto é, quando P for da forma

$$P(t, x) = at^m + Q_{m-1}(x)t^{m-1} + \dots + Q_1(x)t + Q_0(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

onde $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $m = \text{gr} P \geq 1$ e, para cada $j=0, 1, \dots, (m-1)$, Q_j é um polinômio em x com coeficientes complexos constantes, sempre existirá uma escada de Hörmander para P ([11], p. 177). Além disso, todo polinômio em $(n+1)$ variáveis reais com coeficientes complexos constantes pode ser colocado na forma normal, após uma rotação em $\mathbb{R}^{n+1}$ ([11], p. 175).

(3) Quando s for uma escada de Hörmander para os polinômios P e Q simultaneamente, s será uma escada de Hörmander para o produto PQ dos polinômios P e Q . Em particular, quando s for uma escada de Hörmander para P , então, para cada $m = 1, 2, \dots$, s será uma escada de Hörmander para P^m .

(4) Para cada ε , $0 < \varepsilon < 1$, a aplicação $s_\varepsilon : \mathbb{R}_{yz}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $s_\varepsilon(y, z) = Y(\varepsilon^2 - y^2 - z^2)$, onde Y é a função de Heaviside, é uma escada de Hörmander para o polinômio $P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, cujo operador diferencial parcial linear associado é o operador de Laplace tridimensional: de fato,

$$\text{para } y^2 + z^2 \geq \varepsilon^2,$$

$$|P(ix - s_\varepsilon(y, z), iy, iz)| = x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2 + \varepsilon^2 \geq \varepsilon^2$$

$$\text{para } y^2 + z^2 < \varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned} |P(ix - s_\varepsilon(y, z), iy, iz)| &= [(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + 4x^2]^{1/2} = \\ &= [(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 4(y^2 + z^2)]^{1/2} \geq \\ &\geq [(1 + y^2 + z^2)^2 - 4(y^2 + z^2)]^{1/2} = \\ &= 1 - y^2 - z^2 \geq \\ &\geq 1 - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

e, portanto, $|P(ix - s_\varepsilon(y, z), iy, iz)| \geq \min\{\varepsilon^2, 1 - \varepsilon^2\}$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(5) Não existe uma escada de Hörmander para o polinômio $P(t, x) = tx$: de fato, $|P(it - s(x), ix)| = |x| [t^2 + s(x)^2]^{1/2} \geq c$

implica, para $t = 0$ e $x \neq 0$, que $|s(x)| \geq c|x|^{-1}$ o que mostra que s não é uma função limitada.

Definição VIII.1.3

Uma aplicação $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma escada de Hörmander para a família de polinômios $\{P_\lambda : \lambda \in I\}$ em $(n+1)$ variáveis reais (t, x) , $x = (x_1, \dots, x_n)$, com coeficientes complexos constantes se e somente se

- (a) Para cada $\lambda \in I$, s é uma escada de Hörmander para P_λ .
- (b) Existe um número real $c > 0$, independente de λ , de tal modo que

$$|P_\lambda(it-s(x), ix)| \geq c \quad \text{para} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Exemplos VIII.1.3

- (1) A função $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $s(x) = 1$ é uma escada de Hörmander para a família de polinômios $\{P_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ onde $P_\lambda(t, x) = t + \lambda x$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.
- (2) A família de polinômios $\{P_\lambda : -1 \leq \lambda \leq 1\}$, onde $P_\lambda(t, x) = t + i\lambda x$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, não admite uma escada de Hörmander: de fato, a desigualdade para $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ e $|\lambda| \leq 1$

$$|P_\lambda(it-s(x), ix)|^2 = [s(x) + \lambda x]^2 + t^2 \geq c^2 > 0$$

implica que, para $t = 0$ e $\lambda = \pm 1$, $|s(x)| \geq c + |x|$ o que mostra que s não é uma função limitada.

- (3) Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, existe uma escada de Hörmander para o polinômio $P_\lambda(t, x) = t + \lambda x$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$: exemplo VIII.1.2, (2).

Teorema VIII.1.1

(Soluções Fundamentais para Operadores Diferenciais Parciais Lineares com Escada de Hörmander)

Seja $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma escada de Hormander para o polinômio P em $(n+1)$ variáveis reais (t, x) , $x = (x_1, \dots, x_n)$, com coeficientes complexos constantes. Então a distribuição E do $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E, \psi \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(t+is(x), x)}{P(it-s(x), ix)} d(t, x) \quad (\text{VIII.1.1})$$

é uma solução fundamental para o operador diferencial parcial linear $P(\partial_t, \partial_x)$ associado ao polinômio $P(t, x)$.

Prova

([16], p. 42).

Corolário VIII.1.1

(Soluções Fundamentais para Operadores Hiperbólicos em Relação a Uma das Variáveis)

Seja $P(\partial_t, \partial_x)$ um operador hiperbólico em relação a variável real t e seja s um número real tal que $s < s_0$, onde s_0 é como na definição VIII.1.1. Então a distribuição E do $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E, \psi \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(t+is, x)}{P(it-s, ix)} d(t, x) \quad (\text{VIII.1.2})$$

$\tilde{e}$ é independente do número real $s \in (-\infty, s_0)$ e $\tilde{e}$ é uma solução fundamental de $P(\partial_t, \partial_x)$.

Prova

Imediata pela observação do exemplo VIII.1.2, (1).

Mais geralmente, temos ainda o seguinte resultado.

Teorema VIII.1.2

Seja

$$P(t, x) = at^m + Q_{m-1}(x)t^{m-1} + \dots + Q_1(x)t + Q_0(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

onde, $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $1 \leq m \leq \text{gr} P$ e, para cada $j = 0, 1, \dots, (m-1)$, Q_j é um polinômio em x com coeficientes complexos constantes, com a seguinte propriedade: "existe um número real s_0 tal que $P(it-s, ix) \neq 0$ para $s < s_0$ e $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ". Então a distribuição E do $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E, \psi \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(t+is, x)}{P(it-s, ix)} d(t, x) \quad (\text{VIII.1.3})$$

$\tilde{e}$ é independente do número real $s \in (-\infty, s_0)$ e $\tilde{e}$ é a única solução fundamental do operador $P(\partial_t, \partial_x)$ associado ao polinômio P satisfazendo às seguintes condições:

(a) $\text{supp } E \subset \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$.

(b) Existe um número real $\alpha \geq 0$ tal que $\exp(-\alpha t)E$ é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Prova

([16], p. 42).

Corolário VIII.1.2

(Soluções Fundamentais para Operadores Parabólicos em Relação a Uma das Variáveis)

Seja $P(\partial_t, \partial_x)$ um operador parabólico em relação a variável real t e seja s um número real tal que $s < s_0$, onde s_0 é como na definição VIII.1.1. Então a distribuição E do R^{n+1} dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(R^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E, \psi \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{R^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(t+is, x)}{P(it-s, ix)} d(t, x) \quad (\text{VIII.1.4})$$

é independente do número real $s \in (-\infty, s_0)$ e é uma solução fundamental de $P(\partial_t, \partial_x)$ satisfazendo $\text{supp } E = \{(t, x) \in R^{n+1} : t \geq 0\}$.

Prova

Prova análoga a do teorema anterior ([6], p. 152, teorema 5.8.2).

Corolário VIII.1.3

(Soluções Fundamentais para Operadores Hiperbólicos em Relação a Uma das Variáveis)

Seja $P(\partial_t, \partial_x)$ um operador hiperbólico em relação a variável real t e seja s um número real tal que $s < s_0$, onde s_0 é como na definição VIII.1.1. Então a distribuição E do R^{n+1} dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(R^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E, \psi \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{R^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(t+is, x)}{P(it-s, ix)} d(t, x) \quad (\text{VIII.1.5})$$

é independente do número real $s \in (-\infty, s_0)$ e é a única solução

fundamental de $P(\partial_t, \partial_x)$ com as seguintes propriedades:

- (a) $\text{supp } E \subset \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$.
- (b) Existe um número real $\alpha \geq 0$ tal que $\exp(-\alpha t)E$ é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Prova

Imediata pela observação da definição VIII.1.1.

Aplicação VIII.1.1.

Solução Fundamental do Operador do Calor n-Dimensional

$$\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n; \quad n \geq 1, \quad k > 0$$

Uma solução fundamental E_n do operador do calor n -dimensional ($n \geq 1$), parabólico em relação a t , com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ é dada pelo corolário VIII.1.2: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle E_n, \psi \rangle &= (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(\tau + is, x)}{-s + k|x|^2 + i\tau} d(\tau, x) = \quad (s < 0) \\ &= (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(\tau, x)}{-s + k|x|^2 + i\tau} d(\tau, x) \end{aligned}$$

onde $\psi(t, x) = \exp(-st)\psi(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$= (2\pi)^{-(n+1)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{e^{i(xy + t\tau)} \psi(t, y)}{-s + k|x|^2 + i\tau} d(t, y) \right] d(\tau, x)$$

pela definição da transformada inversa F^{-1} de Fourier de ψ

$$= (2\pi)^{-(n+1)+1/2} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} [(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty-s+k|x|^2+it}^{+\infty} \frac{e^{it\tau}}{d\tau}] e^{ixy} \psi(t,y) d(t,x,y)$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero).

$$= (2\pi)^{-(n+1)+1/2} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} [Y(t) \exp(-kt|x|^2) e^{ixy} \exp(st) \psi(t,y)] d(t,x,y)$$

lembrando que a transformada de Fourier de

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow Y(t) \exp[-kt|x|^2 + st]$$

é

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow [k|x|^2 - s + it]^{-1},$$

$$= (2\pi)^{-(n+1)+1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} \psi(t,y) dy \right] \exp(-kt|x|^2) dx \right] dt$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero).

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-kt|x|^2) \hat{\psi}(t,x) dx \right] dt$$

onde $\hat{\psi}$ indica a transformada parcial de Fourier de ψ em relação a segunda variável

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \left[\int_{\mathbb{R}^n} (4\pi kt)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4kt}\right) \psi(t,y) dy \right] dt$$

lembrando que a transformada inversa parcial de Fourier de

$(t,x) \rightarrow \exp(-kt|x|^2)$ em relação a segunda variável é

$$(t,x) \rightarrow (2kt)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4kt}\right).$$

Conclusão

Uma solução fundamental do operador do calor n -dimensional

$$\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n ; \quad n \geq 1, \quad k > 0$$

com suporte em $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ é a função localmente integrável E_n do $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$E_n(t,x) = (4\pi kt)^{-n/2} Y(t) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4kt}\right), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (\text{VIII.1.6})$$

Aplicação VIII.1.2

Solução Fundamental do Operador de Schrödinger n -dimensional

$$\frac{\partial}{\partial t} - ib\Delta_n ; \quad n \geq 1, \quad b > 0$$

Pelo teorema VIII.1.2, a única solução fundamental E_n do operador de Schrödinger n -dimensional ($n \geq 1$), com suporte em $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ e tal que existe $\alpha \geq 0$ com $\exp(-\alpha t)E$ uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^{n+1}$, é dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle E_n, \psi \rangle &= (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(\tau+is, x)}{-s+i(\tau+b|x|^2)} d(\tau, x) \quad (s < 0) \\ &= (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(\tau, x)}{-s+i(\tau+b|x|^2)} d(\tau, x) \end{aligned}$$

onde $\psi(t,x) = \exp(-st)\psi(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$= (2\pi)^{-(n+1)+1/2} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} [(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\tau}}{-s+ib|x|^2+it} d\tau] e^{ixy} \psi(t,y) d(t,x,y)$$

de maneira análoga à aplicação anterior

$$= (2\pi)^{-(n+1)+1/2} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} [Y(t) \exp(-ibt|x|^2) e^{ixy} \exp(st) \psi(t,y)] d(t,x,y)$$

lembrando que a transformada de Fourier de

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow Y(t) \exp(-ibt|x|^2)$$

é

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow [-s+ib|x|^2 + it]^{-1}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ibt|x|^2) \hat{\psi}(t,x) dx \right] dt$$

de maneira análoga à aplicação anterior, onde $\hat{\psi}$ indica a transformação parcial de Fourier de ψ em relação a segunda variável

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \left[\int_{\mathbb{R}^n} (2ibt)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4ibt}\right) \psi(t,x) dx \right] dt$$

lembrando que a transformada inversa parcial de Fourier de $(t,x) \rightarrow \exp(-ibt|x|^2)$ em relação a segunda variável é $(t,x) \rightarrow (2ibt)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4ibt}\right)$.

Conclusão

A única solução fundamental E_n do operador de Schrödinger n -dimensional

$$\frac{\partial}{\partial t} - ib\Delta_n; \quad n \geq 1, \quad b > 0$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ e com a propriedade: "existe $\alpha \geq 0$ tal que $\exp(-\alpha t)E_n$ é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^{n+1}$ " é dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E_n, \psi \rangle = \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} (4\pi bt)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4ibt} + in\frac{\pi}{4}\right) \psi(t, x) dx \right] dt \quad (\text{VIII.1.7})$$

lembrando que $i^{-n/2} = \exp(-in\frac{\pi}{4})$. (Como vimos no Capítulo III, para $n = 1$, E_1 é uma função localmente integrável do $\mathbb{R}^2$.)

Aplicação VIII.1.3

Solução Fundamental do Operador de Ondas n -Dimensional

$$\square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_n; \quad n \geq 1, \quad c > 0$$

Pelo corolário VIII.1.3, a única solução fundamental E_n do operador das ondas n -dimensional ($n \geq 1$), com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ e tal que existe $\alpha \geq 0$ com $\exp(-\alpha t)E_n$ uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^{n+1}$, é dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E_n, \psi \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int \frac{(F^{-1}\psi)(\tau + is, x)}{(i\tau - s)^2 + c^2|x|^2} d(\tau, x) \quad (s < 0)$$

$$= (2\pi)^{-(n+1)/2} \int \frac{(F^{-1}\psi)(\tau, x)}{(i\tau - s)^2 + c^2|x|^2} d(\tau, x) \quad (\text{integração em } \mathbb{R}^{n+1})$$

onde $\psi(t, x) = \exp(+st)\psi(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$= (2\pi)^{-(n+1)} \int_{R^{2n+1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\tau}}{(i\tau-s)^2 + c^2 |x|^2} d\tau \right] e^{ixy} \psi(t,y) d(t,x,y)$$

pela definição da transformada inversa F^{-1} de Fourier de ψ e pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero)

$$= (2\pi)^{-n} \int_{R^{2n+1}} Y(t) \frac{\text{sen}(ct|x|)}{c|x|} e^{ixy} \exp(-st) \psi(t,y) d(t,x,y)$$

pelo teorema dos resíduos:

para $t \geq 0$, considerando-se a curva em C constituída do segmento de reta unindo $-N$ a $+N$ e da semicircunferência com centro na origem e raio N do semiplano $\{z \in C : \text{Im}z \geq 0\}$ e fazendo-se $N \rightarrow \infty$, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\tau}}{(i\tau-s)^2 + c^2 |x|^2} d\tau = 2\pi \exp(-st) \frac{\text{sen}(ct|x|)}{c|x|}$$

e para $t < 0$, considerando-se a curva simétrica da curva acima em relação ao eixo real, temos que a integral em questão é zero.

$$= (2\pi)^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \left[\int_{R^n} \left[\int_{R^n} e^{ixy} \psi(t,y) dy \right] \frac{\text{sen}(ct|x|)}{c|x|} dx \right] dt$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero)

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \left[\int_{R^n} \hat{\psi}(t,-x) \frac{\text{sen}(ct|x|)}{c|x|} dx \right] dt$$

onde $\hat{\psi}$ indica a transformada parcial de Fourier de ψ em relação a segunda variável

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_0^{+\infty} \langle E_t, \psi(t, \cdot) \rangle dt$$

onde, para cada $t > 0$, E_t é a transformada de Fourier de

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \frac{\text{sen}(ct|x|)}{c|x|}.$$

Conclusão

A única solução fundamental E_n do operador das ondas n -dimensional

$$\square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_n; \quad n \geq 1, \quad c > 0$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ e com a propriedade: "existe $\alpha \geq 0$ tal que $\exp(-\alpha t)E_n$ é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^{n+1}$ ", é dada por:

para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E_n, \psi \rangle = \int_0^{+\infty} \langle E_t, \psi(t, \cdot) \rangle dt \quad (\text{VIII.1.8})$$

onde, para cada $t > 0$, E_t é a transformada de Fourier de:

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \frac{\text{sen}(ct|x|)}{c|x|}.$$

Em particular, para $n = 3$,

$$\langle E_3, \psi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi c^2 t} \langle \delta_{S_{ct}}, \psi(t, \cdot) \rangle dt \quad (\text{VIII.1.9})$$

onde, para cada $t > 0$, S_{ct} indica a esfera de centro na origem e raio ct .

Aplicação VIII.1.4

Solução Fundamental do Operador de Laplace 3-Dimensional

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Pelo teorema VIII.1.1, em virtude de para cada $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, $s_\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $s_\epsilon(y, z) = Y(\epsilon^2 - y^2 - z^2)$, onde Y é a função de Heaviside, ser uma escada de Hörmander para o polinômio $P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, uma solução fundamental $E_{3\epsilon}$ do operador de Laplace tridimensional é dada por:

para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{3/2} \langle E_{3\epsilon}, \psi \rangle &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(F^{-1}\psi)(x + i s_\epsilon(y, z), y, z)}{P(ix - s_\epsilon(y, z), iy, iz)} d(x, y, z) = \\ &= - \int_{y^2 + z^2 > \epsilon^2} \frac{(F^{-1}\psi)(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z) + \\ &+ \int_{y^2 + z^2 < \epsilon^2} \frac{(F^{-1}\psi)(x + i, y, z)}{(ix - 1)^2 - y^2 - z^2} d(x, y, z) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F^{-1}\psi)(x + i, y, z)}{(ix - 1)^2 - y^2 - z^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F^{-1}\psi)(x + i, y, z)}{-(x + i)^2 - y^2 - z^2} dx = \\ &= \int_{i - \infty}^{i + \infty} \frac{(F^{-1}\psi)(\lambda, y, z)}{-\lambda^2 - y^2 - z^2} d\lambda = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F^{-1}\psi)(x,y,z)}{-x^2-y^2-z^2} dx - 2\pi i \text{Res} \left[\frac{(F^{-1}\psi)(\lambda,y,z)}{-\lambda^2-y^2-z^2}; i(y^2+z^2)^{1/2} \right] = \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F^{-1}\psi)(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} dx + \\
&+ \pi (y^2+z^2)^{-1/2} (F^{-1}\psi)(i(y^2+z^2)^{1/2}, y, z)
\end{aligned}$$

pelo teorema do resíduo,

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{3/2} \langle E_{3\epsilon}, \psi \rangle &= - \int_{R^3} \frac{(F^{-1}\psi)(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} d(x,y,z) + \\
&+ \pi \iint_{y^2+z^2 < \epsilon^2} \frac{(F^{-1}\psi)(i(y^2+z^2)^{1/2}, y, z)}{(y^2+z^2)^{1/2}} d(y,z)
\end{aligned}$$

$$\text{Cálculo de } - \int_{R^3} \frac{(F^{-1}\psi)(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} d(x,y,z) .$$

$$\begin{aligned}
&- \int_{R^3} \frac{(F^{-1}\psi)(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} d(x,y,z) = \\
&= \langle -(x^2+y^2+z^2)^{-1}, (F^{-1}\psi)(x,y,z) \rangle = \\
&= \langle -F^{-1}[(x^2+y^2+z^2)^{-1}], \psi(x,y,z) \rangle
\end{aligned}$$

e $T = -F^{-1}[(x^2+y^2+z^2)^{-1}]$ satisfaz a equação

$$-(x^2+y^2+z^2)FT = 1 \quad \text{ou} \quad \Delta_3 T = (2\pi)^{3/2} \delta,$$

o que mostra que $(2\pi)^{-3/2} T$ é uma solução fundamental do opera

dor de Laplace tridimensional e que

$$(2\pi)^{-3/2} T + (4\pi)^{-1} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

é uma solução da equação homogênea $\Delta_3 u = 0$ em R^3 , que só pode ser a solução nula.

Portanto,

$$\begin{aligned} & - \int_{R^3} \frac{(F^{-1}\phi)(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z) = \\ & = \frac{(2\pi)^{3/2}}{4\pi} \langle -(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, \phi(x, y, z) \rangle. \end{aligned}$$

Cálculo de
$$I_\epsilon = \pi \iint_{y^2 + z^2 < \epsilon^2} \frac{(F^{-1}\phi)(i(y^2 + z^2)^{1/2}, y, z)}{(y^2 + z^2)^{1/2}} d(y, z),$$

$0 < \epsilon < 1$

$$I_\epsilon = (8\pi)^{-1/2} \iint \frac{\chi_\epsilon(y, z)}{(y^2 + z^2)^{1/2}} \left[\iiint \phi(x, u, v) \exp[-x(y^2 + z^2)^{1/2} + iuy + ivz] d(x, u, v) \right] d(y, z)$$

onde, para cada ϵ , $0 < \epsilon < 1$,

$$\chi_\epsilon(y, z) = \begin{cases} 1, & y^2 + z^2 < \epsilon^2 \\ 0, & y^2 + z^2 > \epsilon^2 \end{cases}$$

$$= (1/2)(2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\iint_{R^2} \chi_\epsilon(y, z) \frac{e^{-x(y^2 + z^2)^{1/2}}}{(y^2 + z^2)^{1/2}} F_{yz}^{-1} \phi(x, y, z) d(y, z) \right] dx$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero)

$$\begin{aligned}
&= (1/2)(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F_{yz}^{-1} [\chi_{\varepsilon}(y,z) \frac{e^{-x(y^2+z^2)^{1/2}}}{(y^2+z^2)^{1/2}}], \psi(x,y,z) \rangle dx \\
&= (2\pi)^{3/2} \langle \frac{1}{4\pi} \int_0^{\varepsilon} \exp(-tx) J_0[t(y^2+z^2)^{1/2}] dt, \psi(x,y,z) \rangle.
\end{aligned}$$

(v. [3], p. 203).

Conclusão

Para cada ε , $0 < \varepsilon < 1$, uma solução fundamental do operador de Laplace tridimensional é a função localmente integrável $E_{3\varepsilon}$ do R^3 definida por

$$\begin{aligned}
E_{3\varepsilon}(x,y,z) &= -(4\pi)^{-1} (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \\
&+ (4\pi)^{-1} \int_0^{\varepsilon} \exp(-tx) J_0[t(y^2+z^2)^{1/2}] dt
\end{aligned}
\tag{VIII.1.9}$$

(VIII.2) Motivação para o Método da Integração Paramétrica

Consideremos dois números reais a e b distintos e dois operadores diferenciais parciais lineares $P(\partial)$ e $Q(\partial)$ com coeficientes constantes complexos em $n \geq 1$ variáveis reais.

Para cada $\lambda \in R$, dada uma solução fundamental E_{λ} do operador iterado $[P(\partial) + \lambda Q(\partial)]^2$ (v. fórmulas explícitas de soluções fundamentais para operadores iterados no Capítulo V) o problema é encontrar uma solução fundamental E de

$$[P(\partial) + aQ(\partial)][P(\partial) + bQ(\partial)] \tag{VIII.2.1}$$

o que é equivalente, pela transformação F de Fourier, a encon-

trar uma solução da equação

$$(2\pi)^{-n/2} = [P(ix)+aQ(ix)][P(ix)+bQ(ix)]FE \quad (\text{VIII.2.2})$$

A identidade

$$[(u+av)(u+bv)]^{-1} = (b-a)^{-1} \int_a^b (u+\lambda v)^{-2} d\lambda \quad (\text{VIII.2.3})$$

sugere que formalmente

$$\begin{aligned} FE &= (2\pi)^{-n/2} [P(ix)+aQ(ix)]^{-1} [P(ix)+bQ(ix)]^{-1} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} (b-a)^{-1} \int_a^b [P(ix)+\lambda Q(ix)]^{-2} d\lambda = \\ &= (b-a)^{-1} \int_a^b FE_\lambda d\lambda \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.4})$$

e que

$$E = (b-a)^{-1} \int_a^b E_\lambda d\lambda. \quad (\text{VIII.2.5})$$

Portanto, o desenvolvimento formal assim descrito conduz a uma solução fundamental de $[P(\partial)+aQ(\partial)][P(\partial)+bQ(\partial)]$ em termos da solução fundamental E_λ de $[P(\partial)+\lambda Q(\partial)]^2$. Esta é a essência do método da integração paramétrica exposto nas seções subseqüentes.

A fórmula VIII.2.5, contém uma integral curvilínea de uma distribuição. O significado deste e de outros conceitos necessários para o entendimento do método da integração paramétrica é dado agora.

Definição VIII.2.1

Seja U um aberto não vazio do R^n ($n \geq 1$).

- (a) A aplicação $F : U \rightarrow D'(R^n)$ é contínua em U se e somente se, para cada $\psi \in C_c^\infty(R^n; C)$, a aplicação de U em C dada por $x \rightarrow \langle F(x), \psi \rangle$ é contínua em todos os pontos de U .
- (b) A aplicação $F : U \rightarrow D'(R^n)$ é de classe C^k em U , $k = 1, 2, \dots$, se e somente se, para cada $\psi \in C_c^\infty(R^n; C)$, a aplicação de U em C dada por $x \rightarrow \langle F(x), \psi \rangle$ tem todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a k contínuas em todos os pontos de U .
- (c) A aplicação $F : U \rightarrow D'(R^n)$ é de classe C^∞ em U , se e somente se, esta aplicação é de classe C^k em U para cada $k = 1, 2, \dots$.

Definição VIII.2.2

Seja γ uma curva retificável e compacta em R^p , $p \geq 1$. A aplicação F definida em γ com valores em $D'(R^n)$ é integrável sobre γ se e somente se existe $T \in D'(R^n)$ de tal modo que para cada $\psi \in C_c^\infty(R^n; C)$,

- (a) a aplicação $\lambda \in \gamma \rightarrow \langle F(\lambda), \psi \rangle$ é integrável sobre γ ;

$$(b) \int_{\gamma} \langle F(\lambda), \psi \rangle d\lambda = \langle T, \psi \rangle.$$

Nestas condições, escrevemos $T = \int_{\gamma} F(\lambda) d\lambda$.

Exemplo VIII.2.1

A aplicação $F : \mathbb{R} \rightarrow D'(\mathbb{R})$ dada por $F(\lambda) = \delta_\lambda$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ e, para $a < b$, F é integrável sobre $[a, b]$. Além disso,

$$\int_a^b F(\lambda) d\lambda = \int_a^b \delta_\lambda d\lambda = Y(x-a)Y(b-x)$$

onde Y é a função de Heaviside.

O lema seguinte, cuja demonstração é uma fácil aplicação do teorema de Fubini, tem grande utilidade prática por mostrar uma condição sob a qual a integração sobre γ é reduzida à integração usual.

Lema VIII.2.1

Sejam γ uma curva retificável e compacta em $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ e g uma função localmente integrável do produto cartesiano $\gamma \times \mathbb{R}^n$. Então

- (a) a aplicação $F : \gamma \rightarrow D'(\mathbb{R}^n)$ definida por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\langle F(\lambda), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) g(\lambda, x) dx$$

é definida quase toda parte em γ ;

- (b) F é integrável sobre γ e $\int_\gamma F(\lambda) d\lambda$ é uma função localmente integrável do $\mathbb{R}^n$ definida por

$$x \mapsto \int_\gamma g(\lambda, x) d\lambda.$$

Exemplo VIII.2.2

Seja $F : U \rightarrow D'(R^n)$, onde U é um aberto não vazio de R^p , $p \geq 1$, dada por $F(\lambda) = P_\lambda$ onde P_λ é um polinômio de grau menor ou igual a m ($m \geq 1$) definido por

$$P_\lambda(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\lambda) x^\alpha \quad \text{onde } a_\alpha : U \rightarrow C \text{ para } |\alpha| \leq m.$$

Então, para cada curva γ retificável em U , as afirmações são equivalentes:

- (1) F é integrável sobre γ ;
- (2) para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, a_α é integrável sobre γ .

Além disso, quando uma das afirmações acima é válida

$$\int_\gamma F(\lambda) d\lambda = \sum_{|\alpha| \leq m} x^\alpha \int_\gamma a_\alpha(\lambda) d\lambda.$$

(VIII.3) *O Método da Integração Paramétrica Aplicado aos Operadores Hiperbólicos*

O método da integração paramétrica aplicado aos operadores hiperbólicos fornece uma fórmula para a única solução fundamental do operador hiperbólico em relação a variável t

$$\prod_{j=1}^m [P(\partial_t, \partial_x) + a_j Q(\partial_t, \partial_x)] \quad a_1 < a_2 < \dots < a_m, \quad m \geq 2$$

com suporte em $\{(t, x) : t \geq 0\}$ em termos da única solução funda

mental de

$$[P(\partial_t, \partial_x) + \lambda Q(\partial_t, \partial_x)]^m$$

com suporte em $\{(t, x) : t \geq 0\}$, desde que estejam satisfeitas todas as hipóteses do teorema abaixo.

Teorema VIII.3.1

(Integração Paramétrica Aplicada aos Operadores Hiperbólicos)

Seja $P(\partial_t, \partial_x) + \lambda Q(\partial_t, \partial_x)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes em $(n+1)$ variáveis (t, x) , $x = (x_1, \dots, x_n)$, dependente do parâmetro real $\lambda \in [a, b]$ com $a < b$, tal que:

- (a) o grau do polinômio $P + \lambda Q$ é independente do valor de λ e é maior ou igual a 1;
- (b) para cada $\lambda \in [a, b]$, $P(\partial_t, \partial_x) + \lambda Q(\partial_t, \partial_x)$ é hiperbólico em relação a variável t ;
- (c) $\inf\{s_0(\lambda) : \lambda \in [a, b]\} > -\infty$ onde, para cada $\lambda \in [a, b]$, $s_0(\lambda)$ é o número real constante na definição VIII.1.1, correspondente a $P(\partial_t, \partial_x) + \lambda Q(\partial_t, \partial_x)$.

Para cada $\lambda \in [a, b]$ e para cada $m = 1, 2, \dots$, seja $E_{\lambda m}$ a única solução fundamental do operador $[P(\partial_t, \partial_x) + \lambda Q(\partial_t, \partial_x)]^m$ hiperbólico em relação a variável t com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\langle E_{\lambda m}, \psi \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int \frac{(F^{-1}\psi)(t+is, x)}{[P(it-s, ix) + \lambda Q(it-s, ix)]^m} d(t, x) \quad (\text{VIII.3.1})$$

Então,

- (1) para cada $m = 1, 2, \dots$, a aplicação $\lambda \in [a, b] \rightarrow E_{\lambda m} \in D'(R^{n+1})$ é contínua em $[a, b]$, isto é, a aplicação em questão é contínua em (a, b) e, para cada $\psi \in C_c^\infty(R^{n+1}; C)$,

$$\langle E_{am}, \psi \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow a^+} \langle E_{\lambda m}, \psi \rangle$$

$$\langle E_{bm}, \psi \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow b^-} \langle E_{\lambda m}, \psi \rangle;$$

- (2) a única solução fundamental do operador hiperbólico em relação à variável t :

$$\prod_{j=1}^m [P(\partial_t, \partial_x) + a_j Q(\partial_t, \partial_x)]; \quad m \geq 2, \quad a \leq a_1 < \dots < a_m \leq b$$

com suporte em $\{(t, x) \in R^{n+1} : t \geq 0\}$ é

$$E = (m-1) \prod_{j=1}^m c_j \int_{a_0}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} E_{\lambda m} d\lambda \quad (\text{VIII.3.2})$$

onde $a_0 \in [a, b]$ é, para cada $j = 1, \dots, m$,

$$c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1};$$

- (3) em particular, a única solução fundamental do operador hiperbólico em relação à variável t :

$$[P(\partial_t, \partial_x) + aQ(\partial_t, \partial_x)][P(\partial_t, \partial_x) + bQ(\partial_t, \partial_x)]$$

com suporte em $\{(t, x) \in R^{n+1} : t \geq 0\}$ é

$$E = (b-a)^{-1} \int_a^b E_{\lambda 2} d\lambda. \quad (\text{VIII.3.3})$$

Prova

Pelo corolário VIII.1.3, a única solução fundamental do operador hiperbólico em relação a variável t

$$\prod_{j=1}^m [P(\partial_t, \partial_x) + a_j Q(\partial_t, \partial_x)], \quad m \geq 2, \quad a \leq a_1 < \dots < a_m \leq b$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ é a distribuição E do $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle E, \psi \rangle &= (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(t+is, x)}{\prod_{j=1}^m [P(it-s, ix) + a_j Q(it-s, ix)]} d(t, x) = \\ &= (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (F^{-1}\psi)(t+is, x) [(m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{m-2}}{[P(it-s, ix) + \lambda Q(it-s, ix)]^m} d\lambda] d(t, x) \end{aligned}$$

pelo terceiro lema do Apêndice .

$$= (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_0}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} [(2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{(F^{-1}\psi)(t+is, x)}{[P(it-s, ix) + \lambda Q(it-s, ix)]^m} d(t, x)] d\lambda$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero)

$$= (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_0}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} \langle E_{\lambda m}, \psi \rangle d\lambda$$

desde que $s < \inf\{s_0(\lambda) : a \leq \lambda \leq b\}$.

Aplicação VIII.3.1

Solução Fundamental do Produto Finito de Operadores da Onda n-Dimensionais:

$$\prod_{j=1}^m \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta_n \right]; \quad m \geq 2, \quad n \geq 1, \quad m \geq n/2, \quad 0 < a_1 < \dots < a_m$$

A única solução fundamental do operador hiperbólico em relação a variável t

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \lambda \Delta_n \right]^m, \quad \lambda > 0, \quad m \geq n/2, \quad n \geq 1$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ é a função localmente integrável do $\mathbb{R}_{tx}^{n+1}$ dada por

$$E_{\lambda mn}(t, x) = A_{mn} \lambda^{1/2-m} (\lambda t^2 - |x|^2)^{m-(n+1)/2} Y(\sqrt{\lambda} t - |x|)$$

onde $A_{\lambda mn}^{-1} = 2^{2m-1} \pi^{(n-1)/2} \Gamma(m) \Gamma(m+(1-n)/2)$

(v. Capítulo V).

Pelo teorema da integração paramétrica aplicada aos operadores hiperbólicos, a única solução fundamental do operador hiperbólico em relação a variável t :

$$\prod_{j=1}^m \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta_n \right]; \quad m \geq 2, \quad n \geq 1, \quad m \geq n/2, \quad 0 < a_1 < \dots < a_m$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ é

$$E = (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_0^{a_j^2} (a_j^2 - \lambda)^{m-2} E_{\lambda mn} d\lambda$$

onde, para cada $j = 1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j^2 - a_k^2)^{-1}$. Pelo lema

VIII.2.1, em vista de que $(\lambda, t, x) \rightarrow E_{\lambda mn}(t, x)$ é uma função localmente integrável do produto cartesiano $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} E &= (m-1)A_{mn} \sum_{j=1}^m c_j \int_0^{a_j^2} (a_j^2 - \lambda)^{m-2} \lambda^{1/2-m} (\lambda t^2 - |x|^2)^{m-(n+1)/2} Y(\sqrt{\lambda} t - |x|) d\lambda = \\ &= (m-1)A_{mn} \sum_{j=1}^m c_j Y(a_j t - |x|) \int_{|x|^2/t^2}^{a_j^2} (a_j^2 - \lambda)^{m-2} \lambda^{1/2-m} (\lambda t^2 - |x|^2)^{m-(n+1)/2} d\lambda = \\ &= (m-1)A_{mn} \sum_{j=1}^m c_j t Y(a_j t - |x|) \int_0^{(a_j t)^2 - |x|^2} (a_j^2 t^2 - |x|^2 - s)^{m-2} (s + |x|^2)^{1/2-m} s^{m-(n+1)/2} ds \end{aligned}$$

pela mudança de variável $s = \lambda t^2 - |x|^2$

$$\begin{aligned} &= (m-1)A_{mn} \sum_{j=1}^m c_j t Y(a_j t - |x|) |x|^{1-2m} (a_j^2 t^2 - |x|^2)^{2m-(n+3)/2} \cdot \\ &\cdot B(m-1, m-(n-1)/2) F(m-1/2, m-(n-1)/2, 2m-(n+1)/2, 1 - a_j^2 t^2 / |x|^2) \end{aligned}$$

onde B é a função beta definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x > 0, y > 0$$

e F é a função hipergeométrica definida por

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{\Gamma(c+j)} \cdot \frac{z^j}{j!}, \quad |z| < 1$$

(v. [5], p. 287, 3.197 - fórmula 8)

$$= \frac{t|x|^{1-2m}}{2^{2m-1} \pi^{(n-1)/2} \Gamma(2m-(n+1)/2)} \sum_{j=1}^m c_j Y(a_j t - |x|) (a_j^2 t^2 - |x|^2)^{2m-(n+3)/2} \cdot$$

$$\cdot F(m-1/2, m-(n-1)/2, 2m-(n+1)/2, 1-a_j^2 t^2/|x|^2) \quad (\text{VIII.3.4})$$

pela fórmula da função beta B em termos da função gama Γ .

Conclusão

Para $n = 1$, a única solução fundamental do operador produto finito de operadores das ondas unidimensionais

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad 0 < a_1 < \dots < a_m, \quad m \geq 2,$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$ é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}_{tx}^2$ dada por

$$E(t, x) = \frac{1}{2(2m-2)!} \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{a_j} (a_j t - |x|)^{2m-2} Y(a_j t - |x|) \quad (\text{VIII.3.5})$$

onde Y é a função de Heaviside, lembrando que

$$F(m-1/2, m, 2m-1, 1-a_j^2 t^2/|x|^2) = 2^{2m-2} \frac{|x|^{2m-1}}{a_j t} (a_j t + |x|)^{2-2m}$$

([7], p. 39, a segunda fórmula com $a = m-1/2$).

Para $n = 3$, a única solução fundamental do operador produto finito de operadores das ondas tridimensionais

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta_3 \right), \quad 0 < a_1 < \dots < a_m, \quad m \geq 2,$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\}$ é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}_{tx}^4$ dada por:

$$E(t, x) = \frac{1}{4\pi|x|(2m-3)!} \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{a_j} (a_j t - |x|)^{2m-3} Y(a_j t - |x|) \quad (\text{VIII.3.6})$$

onde Y é a função de Heaviside, lembrando que

$$F(m-1/2, m-1, 2m-2, 1-a_j^2 t^2/|x|^2) = 2^{2m-3} \frac{|x|^{2m-2}}{a_j t} (a_j t + |x|)^{3-2m}$$

([7], p. 39, a primeira fórmula com $a = m-3/2$).

Em geral, para $n = 2k+1$, $k \geq 1$, a única solução fundamental do operador produto finito de operadores das ondas n -dimensionais:

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta_n \right), \quad 0 < a_1 < \dots < a_m, \quad m \geq k+1$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}_{tx}^{n+1}$ dada por

$$\begin{aligned} E &= \frac{t^{2m-2k-2}}{2\pi^k (2m-2)!} \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{a_j} a_j^{2m-2k-3} Y(a_j t - |x|) \frac{d^k}{dz^k} [(1-\sqrt{1-z})^{2m-2}]_{z=1-|x|^2/t^2 a_j^2} = \\ &= \frac{1}{2^{k+1} \pi^k (2m-2)!} \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{a_j} Y(a_j t - |x|) \left(-\frac{1}{|x|} \cdot \frac{\partial}{\partial |x|} \right)^k [(a_j t - |x|)^{2m-2}] \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.7})$$

lembrando que

$$F(m-1, m-1/2, 2m-1, z) = 2^{2m-2} (1 + \sqrt{1-z})^{2-2m}$$

([7], p. 39) e

$$\begin{aligned} F(a, b, c-k, z) &= \\ &= \frac{z^{k+1-c}}{(c-k)(c-k+1)\dots(c-1)} \cdot \frac{d^k}{dz^k} [z^{c-1} F(a, b, c, z)] \end{aligned}$$

([7], p. 41).

Para $n = 2k$, $k \geq 1$, a fórmula da única solução fundamental do operador produto finito de operadores das ondas n -dimensionais

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta_n \right), \quad 0 < a_1 < \dots < a_m, \quad m \geq 2,$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ é obtida através de um engenhoso manuseio de diversas relações da função hipergeométrica. A título de ilustração, para $n = 2$, a única solução fundamental de

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta_2 \right), \quad 0 < a_1 < \dots < a_m, \quad m \geq 2,$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^3 : t \geq 0\}$ é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}_{txy}^3$ dada por

$$\begin{aligned} 2\pi[(2m-3)!]^2 E = \\ = \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{a_j} (a_j^2 t^2 - r^2)^{2m-5/2} Y(a_j t - r) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right)^{m-2} \{ r^{2m-4} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right)^{m-2} \cdot \\ \cdot \left[\frac{a_j t}{(a_j^2 t^2 - r^2)^{3/2}} \ln \left(\frac{a_j t + (a_j^2 t^2 - r^2)^{1/2}}{r} \right) - (a_j^2 t^2 - r^2)^{-1} \right] \} \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.8})$$

com $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

(v. [9], p. 14, para a demonstração desta fórmula, outra prova está em [15], p. 21; fórmulas explícitas para $n = 2k$, $k \geq 2$, estão demonstradas em [9]).

Também a título de informação, apresentamos abaixo a fórmula de vida a G. Herglotz, para a única solução fundamental E de

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta_n \right), \quad 0 < a_1 < \dots < a_m, \quad 2m > n \geq 2,$$

com suporte em $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$:

$$E(t, x) = \frac{\Gamma(n/2) |x|^{2m-n-1}}{2\pi^{n/2} (2m-n-1)! (n-2)!} \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{a_j} Y(a_j t - |x|) \cdot \int_1^{a_j t / |x|} (s^2 - 1)^{(n-3)/2} \left(\frac{a_j t}{|x|} - s \right)^{2m-n-1} ds \quad (\text{VIII.3.9})$$

(a obtenção desta fórmula consiste também no manuseio de relações da função hipergeométrica: [9], p. 17 a 19).

Aplicação VIII.3.2

Solução Fundamental do Operador Produto

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - a_j^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right); 0 < a_1 < \dots < a_m, m \geq 2, c > 0$$

A única solução fundamental do operador iterado do operador das ondas tridimensional

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_3 \right)^m; c > 0, m \geq 2,$$

com suporte em $\{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\}$ é a função localmente integrável do $\mathbb{R}^4$ dada por

$$(t, x, y, z) \rightarrow \frac{(c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{m-2}}{\pi(2c)^{2m-1} (m-1)! (m-2)!} Y[ct - (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}]$$

(v. fórmula (V.4.5)).

A única solução fundamental do operador hiperbólico em relação a variável t

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^m; c > 0, \lambda > 0, m \geq 2,$$

com suporte em $\{(t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\}$ é a função localmente integrável $E_{\lambda m}$ do $\mathbb{R}^4$ dada por

$$E_{\lambda m}(t,x,y,z) = \frac{(c^2 t^2 - x^2 - y^2 - c^2 z^2 / \lambda)^{m-2}}{\sqrt{\lambda} 2^{2m-1} c^{2m-2} (m-1)! (m-2)!} Y[ct - (x^2 + y^2 + c^2 z^2 / \lambda)^{1/2}]$$

(esta fórmula é obtida da fórmula anterior).

A desigualdade

$$|E_{\lambda}(t,x,y,z)| \leq \frac{|t^2 - x^2 - y^2|^{m-2}}{\sqrt{\lambda} 2^{2m-1} c^{2m-2} (m-1)! (m-2)!} ; \quad \lambda > 0, \quad (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$$

mostra que E_{λ} é uma função localmente integrável do produto cartesiano $[0, \infty) \times \mathbb{R}^4$.

Pelo teorema de integração paramétrica e pelo lema VIII.2.1, temos a seguinte conclusão.

Conclusão

A única solução fundamental do operador produto

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - a_j^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right); \quad 0 < a_1 < \dots < a_m, \quad m \geq 2, \quad c > 0,$$

com suporte em $\{(t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\}$ é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}^4$ dada por:

$$E(t, x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{\pi 2^{2m-1} c^{2m-2} [(m-2)!]^2} \sum_{j=1}^m c_j Y[ct - (x^2 + y^2 + c^2 z^2 / a_j^2)^{1/2}] \cdot \int_{\frac{c^2 z^2}{c^2 t - x^2 - y^2}}^{a_j^2} (a_j^2 - \lambda)^{m-2} \lambda^{3/2-m} [\lambda(c^2 t - x^2 - y^2) - c^2 z^2]^{m-2} d\lambda = \quad (\text{VIII.3.10})$$

$$= \frac{[c^2 t - x^2 - y^2]^{-1/2}}{4\pi c^{2m-2} (2m-3)!} \sum_{j=1}^m c_j [a_j (c^2 t - x^2 - y^2)^{1/2} - c|z|]^{2m-3} Y[ct - (x^2 + y^2 + c^2 z^2 / a_j^2)^{1/2}]$$

com a mudança de variável $s = [\lambda(c^2 t - x^2 - y^2)]^{1/2}$ e a fórmula

$$\int_a^x s^{4-2m} (s^2 - a^2)^{m-2} (x^2 - a^2)^{m-2} ds = 2^{2m-4} \frac{[(m-2)!]^2}{(2m-3)!} (x-a)^{2m-3}$$

([15], p. 20 e 28).

O teorema da integração paramétrica aplicada aos operadores hiperbólicos admite a seguinte generalização.

Teorema VIII.3.2

(Integração Paramétrica)

Seja $P(\partial) + \lambda Q(\partial)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais dependente do parâmetro complexo $\lambda \in \gamma$, onde γ é uma curva compacta e retificável em $\mathbb{C}$, de tal maneira que existe uma escada de Hörmander para a família de polinômios $\{P + \lambda Q : \lambda \in \gamma\}$.

Para cada $\lambda \in \gamma$ e para cada $m = 1, 2, \dots$, seja $E_{\lambda m}$ uma solução fundamental de $[P(\partial) + \lambda Q(\partial)]^m$. Então:

(1) para cada $m = 1, 2, \dots$, a aplicação $\lambda \in \gamma \rightarrow E_{\lambda m} \in D'(R^n)$ é contínua em γ , isto é, para cada $\psi \in C_c^\infty(R^n; C)$, a aplicação $\lambda \in \gamma \rightarrow \langle E_{\lambda m}, \psi \rangle \in C$ é contínua em todos os pontos de γ ;

(2) uma solução fundamental de

$$\prod_{j=1}^m [P(\partial) + a_j Q(\partial)]; \quad a_1, \dots, a_m \in \gamma, \quad a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_m \quad \bar{e}$$

$$E = (m-1)! \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_0}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} E_{\lambda m} d\lambda \quad (\text{VIII.3.11})$$

$$\text{onde } a_0 \in \gamma \quad \text{e, para cada } j=1, \dots, m, \quad c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1};$$

(3) em particular, uma solução fundamental de

$$[P(\partial) + aQ(\partial)][P(\partial) + bQ(\partial)]; \quad a, b \in \gamma, \quad a \neq b \quad \bar{e}$$

$$E = (b-a)^{-1} \int_a^b E_{\lambda m} d\lambda. \quad (\text{VIII.3.12})$$

Aplicação VIII.3.3

Solução Fundamental para o Operador Produto Finito de Operadores do Calor n-Dimensional:

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - k_j \Delta_n \right); \quad n \geq 1, \quad 0 < k_1 < \dots < k_m, \quad m \geq 2$$

A função $s : R^n \rightarrow R$, definida por $s(x) = -1$, é uma escada de Hörmander para a família de polinômios $\{t - \lambda|x|^2 : \lambda \geq 0\}$.

Uma solução fundamental de $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \Delta_n \right)^m; \quad \lambda \geq 0, \quad \bar{e}$

$$E_{\lambda m}(t, x) = \frac{(2\sqrt{\pi\lambda})^{-n}}{(m-1)!} t^{m-1-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\lambda t}\right) Y(t); (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \lambda > 0$$

$$E_{om} = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} Y(t) \otimes \delta(x), \lambda = 0$$

que é uma função localmente integrável do produto cartesiano $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{n+1}$ (v. fórmula V.1.2).

Pelo teorema da integração paramétrica e pelo lema VIII.2.1, temos a seguinte conclusão.

Conclusão

Uma solução fundamental de

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - k_j \Delta_n \right); \quad n \geq 1, \quad 0 < k_1 < \dots < k_m, \quad m \geq 2 \quad \text{é}$$

$$\begin{aligned} E(t, x) &= (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_0^{k_j} (k_j - \lambda)^{m-2} \frac{(2\sqrt{\pi\lambda})^{-n}}{(m-1)!} t^{m-1-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\lambda t}\right) Y(t) d\lambda = \\ &= \frac{(2\sqrt{\pi})^{-n}}{(m-2)!} t^{m-1-n/2} Y(t) \sum_{j=1}^m c_j k_j^{m-1-n/2} \int_1^\infty s^{n/2-m} (s-1)^{m-2} \exp\left(-\frac{s|x|^2}{4tk_j}\right) ds \end{aligned}$$

(VIII.3.13)

pela mudança de variável $\lambda = k_j/s$

$$= \frac{t^{m-1-n/4}}{(2\pi|x|)^{n/2}} Y(t) \sum_{j=1}^m c_j k_j^{m-1-n/4} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8tk_j}\right) W_{\frac{n}{4}-m+1, \frac{1}{2}-\frac{n}{4}}\left(\frac{|x|^2}{4tk_j}\right)$$

([5], p. 319, fórmula 4), onde $W_{\lambda, \mu}(z)$ é a função de Whittaker (para a definição e propriedades da função de Whittaker: [5], p. 1059 a 1063 e [7], p. 295 a 323).

Em particular, para $m = 2$ e $n = 4$, uma solução fundamental de $(\frac{\partial}{\partial t} - k_1 \Delta_4)(\frac{\partial}{\partial t} - k_2 \Delta_4)$, $0 < k_1 < k_2$, é a função localmente integrável E do R^5 dada por

$$E(t, x) = \frac{Y(t)}{4\pi^2(k_1 - k_2)|x|^2} \left[\exp\left(-\frac{|x|^2}{4tk_1}\right) - \exp\left(-\frac{|x|^2}{4tk_2}\right) \right] \quad (\text{VIII.3.14})$$

(que é a mesma solução fundamental obtida no Capítulo VI, pelo método da convolução), lembrando que

$$W_{0, -1/2}(z) = W_{0, 1/2}(z) = \exp(-z/2) \quad ([7], \text{ p. } 305).$$

Aplicação VIII.3.4

Contra Exemplo para o Operador de Laplace Bidimensional:

$$\Delta_2 = \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

A distribuição $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 E_{\lambda 2} d\lambda$ não é uma solução fundamental de Δ_2 , onde para cada $\lambda \in R \setminus \{0\}$,

$$E_{\lambda 2}(x, y) = \frac{\text{sgn}(\lambda)}{2\pi i(1+\lambda^2)} \cdot \frac{x - \lambda i y}{y - \lambda i x} = \quad (\text{VIII.3.15})$$

$$= -\frac{\lambda \text{sgn} \lambda}{2\pi(1+\lambda^2)} + \frac{\text{sgn}(\lambda)x}{2\pi i(y - \lambda i x)}; \quad (0, 0) \neq (x, y) \in R^2$$

é uma solução fundamental de $(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda i \frac{\partial}{\partial y})^2$

(v. teorema V.1.1). De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{-1}^1 E_{\lambda^2} d\lambda &= -\frac{\lambda \operatorname{sgn}(\lambda)}{2\pi(1+\lambda^2)} + \frac{x}{4\pi i} \left[\int_0^1 \frac{d\lambda}{(y-\lambda ix)} - \int_{-1}^0 \frac{d\lambda}{y-i\lambda x} \right] = \\
&= -\frac{\ell n 2}{4\pi} + \frac{x}{4\pi ix} \left[\log\left(\frac{y-ix}{y}\right) - \log\left(\frac{y}{y+ix}\right) \right] = \\
&= -\frac{\ell n 2}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \ell n(x^2+y^2) - \frac{1}{2\pi} \ell n|y|
\end{aligned}
\tag{VIII.3.16}$$

(O lema VIII.2.1 foi aplicado porque a função

$$(\lambda, x, y) \rightarrow \frac{\operatorname{sgn}(\lambda)x}{2\pi i(y - \lambda ix)}$$

é uma função localmente integrável do produto cartesiano $[-1, 1] \times \mathbb{R}^2$).

(VIII.4) O Método da Integração Paramétrica Aplicado aos Operadores Elípticos

Definição VIII.4.1

O operador diferencial parcial linear $P(\partial)$ com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais é elíptico, se e somente se, $P_{\text{pr}}(x) \neq 0$, para $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, onde P_{pr} é a parte principal do polinômio P associado a $P(\partial)$.

Definição VIII.4.2

Seja P um polinômio com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis e homogêneo de grau r , isto é, $P(\lambda x) = \lambda^r P(x)$, para $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $P(x) \neq 0$ para $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. A parte finita de P^{-1} , indicada por $\text{Pf}(\frac{1}{P})$, é a

distribuição do $\mathbb{R}^n$ definida por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\langle Pf(\frac{1}{P}), \psi \rangle = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)}{P(x)} dx, & n > r \\ \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{P(x)} [\psi(x) - \sum_{|\alpha| \leq r-n} \frac{\partial^\alpha \psi(0) x^\alpha}{\alpha!}] dx + \int_{|x| > 1} \frac{\psi(x)}{P(x)} dx, & n \leq r \end{cases} \quad (\text{VIII.4.1})$$

Observação

As integrais constantes na definição de parte finita de P^{-1} são convergentes. Além disso, a parte finita de P^{-1} é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^n$ que nada mais é que a extensão da distribuição P^{-1} de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\mathbb{R}^n$. Além disso, a multiplicação da função polinomial P pela distribuição temperada $Pf(\frac{1}{P})$ é igual a distribuição temperada definida pela função constante 1.

Teorema VIII.4.1

(Solução Fundamental dos Operadores Elípticos Homogêneos)

Seja $P(\partial)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais, de tal modo que: $P(\partial)$ é elítico e o polinômio P é homogêneo de grau r . Então

(1) $E_0 = (2\pi)^{-n/2} F^{-1} [Pf(\frac{1}{P(ix)})]$ é uma distribuição temperada do $\mathbb{R}^n$ e é uma solução fundamental de $P(\partial)$;

(2) $E_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C})$;

$$(3) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (1 + |x|^2)^{-(r-n+1)/2} E_o(x) = 0;$$

(4) para cada solução fundamental E de $P(\partial)$ com a propriedade (3), existe um polinômio Q de grau menor ou igual a $r-n$ de tal maneira que $E = E_o + Q$.

Prova

Prova de (1):

$$\begin{aligned} P(\partial)E_o &= (2\pi)^{-n/2} P(\partial)F^{-1}\left[\text{Pf}\left(\frac{1}{P(ix)}\right)\right] = \\ &= (2\pi)^{-n/2} F^{-1}\left[P(ix)\text{Pf}\left(\frac{1}{P(ix)}\right)\right] = \\ &= (2\pi)^{-n/2} F^{-1}(1) = \\ &= \delta \end{aligned}$$

Prova de (2):

É consequência do fato de que todo operador elítico é hipoelítico (v. [6], p. 99, teor. 4.1.3, IIa).

Prova de (3):

Para $n > r$,

$$E_o = (2\pi)^{-n/2} F^{-1}\left[\text{Pf}\left(\frac{1}{P(ix)}\right)\right]$$

é uma distribuição homogênea de grau $r-n$ e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^{-(r-n+1)/2} E_o(x) =$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^{-(r-n+1)/2} |x|^{r-n} E_o\left(\frac{x}{|x|}\right) = 0$$

Para $n \leq r$, seja $\lambda > 1$ e $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \lambda^{n-r} \langle \text{Pf}(\frac{1}{P(ix)}), \psi(\lambda x) \rangle &= \int_{|x| \leq \lambda} \frac{1}{P(ix)} [\psi(x) - \sum_{|\alpha| \leq r-n} \frac{\partial^\alpha \psi(0)}{\alpha!} x^\alpha] dx + \\ &+ \int_{|x| > \lambda} \frac{\psi(x)}{P(ix)} dx = \langle \text{Pf}(\frac{1}{P(ix)}), \psi \rangle - \int_{1 \leq |x| \leq \lambda} \sum_{|\alpha| \leq r-n} \frac{\partial^\alpha \psi(0)}{\alpha!} \cdot \frac{x^\alpha}{P(ix)} dx = \\ &= \langle \text{Pf}(\frac{1}{P(ix)}), \psi \rangle - \sum_{|\alpha| \leq r-n} c_\alpha(\lambda) \langle \partial^\alpha \delta, \psi \rangle \end{aligned} \quad (\text{VIII.4.2})$$

onde

$$\begin{aligned} |c_\alpha(\lambda)| &= \left| \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{1 \leq |x| \leq \lambda} \frac{x^\alpha}{P(ix)} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha!} \int_{1 \leq |x| \leq \lambda} \frac{|x|^\alpha}{|P(ix)|} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha!} \int_{1 \leq |x| \leq \lambda} \frac{|x|^{|\alpha|}}{m_1 |x|^r} dx \end{aligned}$$

onde $m_1 = \min\{|P(ix/|x|)| : 0 \neq x \in \mathbb{R}^n\} > 0$

$$= K \int_1^\lambda \rho^{|\alpha| - r + n - 1} d\rho$$

para alguma constante $K > 0$ (pela utilização de coordenadas polares em $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} &\leq K \cdot \frac{\lambda^{|\alpha| - r + n} - 1}{|\alpha| - r + n} \quad \text{se } |\alpha| - r + n < 0 \\ &\ell n \lambda \quad \text{se } |\alpha| - r + n = 0 \end{aligned}$$

$$\leq K \ell n \lambda$$

$$< K \lambda^\theta, \quad \text{para algum } \theta, \quad 0 < \theta < 1,$$

assim, para cada $\lambda > 1$ e $\psi \in C_c^\infty(R^n \setminus \{0\}; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle E_0(\lambda x), \psi \rangle &= \lambda^{-n} \langle E_0, \psi(\lambda^{-1} x) \rangle = \\ &= \lambda^{-n} (2\pi)^{-n/2} \langle Pf\left(-\frac{1}{P(ix)}\right), (F^{-1}\psi)\left(\frac{x}{\lambda}\right) \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \langle Pf\left(-\frac{1}{P(ix)}\right), (F^{-1}\psi)(\lambda x) \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \lambda^{r-n} [\langle Pf\left(-\frac{1}{P(ix)}\right), F^{-1}\psi \rangle - \sum_{|\alpha| \leq r-n} c_\alpha(\lambda) \langle \partial^\alpha \delta, F^{-1}\psi \rangle] \end{aligned}$$

pela substituição da fórmula (VIII.4.2)

$$= \lambda^{r-n} [\langle E_0, \psi \rangle - (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \leq r-n} (-i)^{|\alpha|} c_\alpha(\lambda) \langle x^\alpha, \psi \rangle]$$

isto é, para $\lambda > 1$ e $0 \neq x \in R^n$,

$$E_0(\lambda x) = \lambda^{r-n} [E_0(x) - (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \leq r-n} (-i)^{|\alpha|} c_\alpha(\lambda) x^\alpha]$$

e, portanto, para $0 \neq x \in R^n$

$$\begin{aligned} |E_0(x)| &= |E_0(|x| \frac{x}{|x|})| \leq \\ &\leq |x|^{r-n} [|E_0\left(\frac{x}{|x|}\right)| + (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \leq r-n} |c_\alpha(|x|)| \left(\frac{|x|}{|x|}\right)^\alpha] \leq \\ &\leq M_1 |x|^{r-n} + \sum_{|\alpha| \leq r-n} K |x|^\theta \end{aligned}$$

onde $M_1 = \max\{|E(x)| : x \in R^n, |x| = 1\} > 0$

$$\leq M|x|^{r-n+\theta}$$

o que implica que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^{-(r-n+1)/2} E_0(x) = 0.$$

Prova de (4)

Seja E uma solução fundamental de $P(\partial)$ satisfazendo

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^{-(r-n+1)/2} E(x) = 0.$$

Isto acarreta que E é uma distribuição temperada do R^n (v. Capítulo Zero). Como $P(\partial)[E-E_0] = 0$, $P(ix)F(E-E_0) = 0$ e, assim, $\text{supp} F(E-E_0) \subset \{0\}$ (lembrando que $P(\partial)$ é elítico). Portanto, existe um número natural m e, para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, existe um número complexo a_α de tal maneira que

$$F(E-E_0) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta$$

o que é equivalente a dizer que

$$E-E_0 = (2\pi)^{-n/2} \sum_{|\alpha| \leq m} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha x^\alpha.$$

O polinômio $Q(x) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{|\alpha| \leq m} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha x^\alpha$, $x \in R^n$, tem grau menor ou igual a $r-n$, pois

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^{-(r-n+1)/2} Q(x) = 0$$

desde que $Q(x) = E(x) - E_0(x)$ para $0 \neq x \in R^n$ e E e E_0 tem esta propriedade.

Teorema VIII.4.2

(Integração Paramétrica Aplicada aos Operadores Elíticos)

Seja $P(\partial) + \lambda Q(\partial)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes complexos constantes em $n \geq 1$ variáveis reais dependente do parâmetro $\lambda \in \gamma$, onde γ é uma curva retificável e compacta em $\mathbb{C}$, tal que

- (a) para cada $\lambda \in \gamma$, $P(\partial) + \lambda Q(\partial)$ é um operador elítico;
- (b) para cada $\lambda \in \gamma$, $P + \lambda Q$ é um polinômio homogêneo cujo grau de homogeneidade r é independente de λ .

Para cada $\lambda \in \gamma$ e para cada $m = 1, 2, \dots$, seja $E_{\lambda m}$ uma solução fundamental de $[P(\partial) + \lambda Q(\partial)]^m$ com a propriedade de que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^{-(mr-n+1)/2} E_{\lambda m}(x) = 0$. Então, para os valores de m para os quais a aplicação $\lambda \in \gamma \rightarrow E_{\lambda m} \in S'(\mathbb{R}^n)$ é contínua em γ (isto é, para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, a aplicação $\lambda \in \gamma \rightarrow \langle E_{\lambda m}, \psi \rangle \in \mathbb{C}$ é contínua em todos os pontos de γ), uma solução fundamental do operador elítico

$$\prod_{j=1}^m [P(\partial) + a_j Q(\partial)]; \quad a_1, \dots, a_m \in \gamma, \quad a_1 \neq \dots \neq a_m$$

é

$$E = (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_0}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} E_{\lambda m} d\lambda \quad (\text{VIII.4.3})$$

onde $a_0 \in \gamma$ e, para cada $j=1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1}$. Além disso, E também tem a propriedade de que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^{-(mr-n+1)/2} E(x) = 0 \quad (\text{VIII.4.4})$$

Prova

Pelo teorema VIII.4.1, para cada $m = 1, 2, \dots$, existe um polinômio

$$Q_m(x) = \sum_{|\alpha| \leq mr-n} b_{\alpha m} x^\alpha$$

de grau menor ou igual a $mr-n$ de tal modo que

$$E_{\lambda m} = (2\pi)^{-n/2} F^{-1} \left[\text{Pf} \left(\frac{1}{[P(ix)]^m} \right) \right] + Q_m$$

Também, pelo teorema VIII.4.1, uma solução fundamental de

$$\prod_{j=1}^m [P(\partial) + a_j Q(\partial)]; \quad a_1, \dots, a_m \in \gamma, \quad a_1 \neq \dots \neq a_m$$

é

$$E_o = (2\pi)^{-n/2} F^{-1} \left[\text{Pf} \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^m [P(ix) + a_j Q(ix)]} \right) \right]$$

que tem a propriedade de que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^{-(mr-n+1)/2} E_o(x) = 0$$

A prova deste teorema consiste em mostrar a existência de um polinômio Q de grau menor ou igual a $mr-n$ satisfazendo

$$E - E_o = Q$$

onde E é como na tese do teorema. Para tanto, basta garantir que: para cada $\psi \in C_c^\infty(R^n; \mathbb{C})$ com $\partial^\alpha \psi(0) = 0$, $|\alpha| \leq mr - n$, $\langle FE - FE_o, \psi \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
FE - FE_o &= (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_o}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} FE_{\lambda m} d\lambda - FE_o = \\
&= (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_o}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} (2\pi)^{-n/2} Pf\left(\frac{1}{[P(ix) + \lambda Q(ix)]^m}\right) d\lambda + \\
&+ (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_o}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} \left[\sum_{|\alpha| \leq mr-n} b_{\alpha m} i^{|\alpha|} (2\pi)^{n/2} \partial^\alpha \delta \right] d\lambda - \\
&- (2\pi)^{-n/2} Pf\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^m [P(ix) + a_j Q(ix)]}\right)
\end{aligned}$$

e para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, com $\partial^\alpha \psi(0) = 0$, $|\alpha| \leq mr-n$, obtemos

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2} \langle FE - FE_o, \psi \rangle &= (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_o}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)}{[P(ix) + \lambda Q(ix)]^m} dx \right] d\lambda - \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)}{\prod_{j=1}^m [P(ix) + a_j Q(ix)]} dx = \\
&= (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{a_o}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{m-2}}{[P(ix) + \lambda Q(ix)]^m} d\lambda \right] \psi(x) dx - \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)}{\prod_{j=1}^m [P(ix) + a_j Q(ix)]} dx
\end{aligned}$$

pelo teorema de Fubini sobre a mudança na ordem de integração (v. Capítulo Zero).

= zero

pelo terceiro lema do Apêndice .

Aplicação VIII.4.1.

Uma Solução Fundamental E_ϵ do Operador da Placa Orto-
trópica

$$\begin{aligned} D_\epsilon(\partial) &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(1-2\epsilon^2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]; \quad 0 < \epsilon < 1, \end{aligned}$$

Com a Propriedade: $\lim_{(x^2+y^2)^{1/2} \rightarrow \infty} (1+x^2+y^2)^{-3/2} E_\epsilon(x,y) = 0.$

Uma solução fundamental do operador

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad -\epsilon \leq \lambda \leq \epsilon$$

é a função localmente integrável E_λ do R^2 definida por

$$E_\lambda(x,y) = \frac{(x^2+2\lambda xy+y^2) \ln(x^2+2\lambda xy+y^2)}{16\pi(1-\lambda^2)^{3/2}} \quad , \quad \text{(VIII.4.5)}$$

(v. fórmula (IV.1.9)).

O teorema da integração paramétrica aplicada aos operadores elípticos garante que uma solução fundamental do operador da placa ortotrópica $D_\epsilon(\partial)$, para cada ϵ ; $0 < \epsilon < 1$ é

$$\begin{aligned} E_\epsilon(x,y) &= \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{(x^2+2\lambda xy+y^2) \ln(x^2+2\lambda xy+y^2)}{16\pi(1-\lambda^2)^{3/2}} d\lambda = \\ &= \frac{1}{32\pi\epsilon} \left[\frac{(\lambda x^2+2\lambda xy+y^2)}{(1-\lambda^2)^{1/2}} \ln(x^2+2\lambda xy+y^2) \right]_{\lambda=-\epsilon}^{\lambda=\epsilon} - \\ &- \frac{2xy}{32\pi\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\lambda x^2+2xy+\lambda y^2}{x^2+2\lambda xy+y^2} (1-\lambda^2)^{-1/2} d\lambda \end{aligned}$$

após uma integração por partes. Como

$$\begin{aligned}
 & - \frac{xy}{16\pi\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\lambda x^2 + 2xy + \lambda y^2}{x^2 + 2\lambda xy + y^2} (1 - \lambda^2)^{-1/2} d\lambda = \\
 & = - \frac{xy}{16\pi\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \lambda (1 - \lambda^2)^{-1/2} d\lambda - \frac{x^2 y^2}{8\pi\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{(1 - \lambda^2)^{1/2}}{x^2 + 2\lambda xy + y^2} d\lambda
 \end{aligned}$$

(após somar e subtrair no denominador a parcela $2\lambda^2 xy$)

$$= - \frac{xy}{16\pi\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{(1 - \lambda^2)^{1/2}}{\lambda + \frac{x^2 + y^2}{2xy}} d\lambda$$

(a primeira integral é igual a zero pois o integrando é uma função ímpar no intervalo de integração)

$$\begin{aligned}
 & = - \frac{xy}{16\pi\epsilon} \left[\frac{x^2 + y^2}{2xy} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{(1 - \lambda^2)^{1/2}}{\left(\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right)^2 - \lambda^2} d\lambda - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\lambda (1 - \lambda^2)^{1/2}}{\left(\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right)^2 - \lambda^2} d\lambda \right] = \\
 & = - \frac{(x^2 + y^2)}{16\pi\epsilon} \int_0^{\epsilon} \frac{(1 - \lambda^2)^{1/2}}{\left(\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right)^2 - \lambda^2} d\lambda
 \end{aligned}$$

(a segunda integral é zero e a primeira integral é a integral de uma função par no intervalo de integração)

$$\begin{aligned}
 & = - \frac{(x^2 + y^2)}{16\pi\epsilon} \left[\left(1 - \left(\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right)^2\right) \int_0^{\epsilon} \frac{(1 - \lambda^2)^{-1/2}}{\left(\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right)^2 - \lambda^2} d\lambda + \int_0^{\epsilon} (1 - \lambda^2)^{-1/2} d\lambda \right] = \\
 & = - \frac{(x^2 + y^2)}{16\pi\epsilon} \left[\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} \left[\frac{\epsilon(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)(1 - \epsilon^2)^{1/2}} \right] + \operatorname{arcsen} \epsilon \right]
 \end{aligned}$$

([5], p. 89 e 90, fórmula 2.284), temos a seguinte conclusão.

Conclusão

Para cada ε , $0 < \varepsilon < 1$, uma solução fundamental E_ε do operador da placa ortotrópica

$$D_\varepsilon(\partial) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(1-2\varepsilon^2)\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

é a função $E_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ definida por

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(x, y) = & \frac{(1-\varepsilon^2)^{-1/2}}{32\pi} \left[(x^2 + \frac{2}{\varepsilon}xy + y^2) \ln(x^2 + 2\varepsilon xy + y^2) + (x^2 - \frac{2}{\varepsilon}xy + y^2) \ln(x^2 - 2\varepsilon xy + y^2) \right] + \\ & + \frac{(x^2 - y^2)}{16\pi\varepsilon} \operatorname{arctg} \left[\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII.4.6})$$

que tem a propriedade

$$\lim_{(x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow +\infty} (1 + x^2 + y^2)^{-3/2} E_\varepsilon(x, y) = 0 \quad (\text{VIII.4.7})$$

Aplicação VIII.4.2

Uma Solução Fundamental E_a do Operador Produto

$$\Delta_3 \left[a\Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]; \quad 0 < a \neq 1$$

$$\text{Com a Propriedade:} \quad \lim_{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow +\infty} (1 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1} E_a(x, y, z) = 0$$

Uma solução fundamental do operador

$$\left[\lambda \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^2; \quad a \leq \lambda \leq 1 \quad \text{ou} \quad 1 \leq \lambda \leq a$$

é a distribuição temperada E_λ do $\mathbb{R}^3$:

$$E_{\lambda} = - \frac{(x^2 + y^2 + \lambda z^2)^{1/2}}{8\pi\lambda^{3/2}} \quad (\text{VIII.4.8})$$

(esta fórmula foi obtida através da solução fundamental de Δ_3^2 : v. Capítulo V).

Pelo teorema da integração paramétrica aplicada aos operadores elípticos, uma solução fundamental de

$$\Delta_3[a\Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}]; \quad 0 < a \neq 1$$

é

$$\begin{aligned} E_a(x, y, z) &= - \frac{1}{(a-1)8\pi} \int_1^a \lambda^{-3/2} (x^2 + y^2 + \lambda z^2)^{1/2} d\lambda = \\ &= \frac{1}{8\pi(1-a)} [-2\lambda^{-1/2} (x^2 + y^2 + \lambda z^2)^{1/2} \Big|_{\lambda=1}^{\lambda=a} + \\ &+ z^2 \int_1^a [\lambda(x^2 + y^2) + \lambda^2 z^2]^{-1/2} d\lambda] \end{aligned}$$

após uma integração por partes. Como

$$\begin{aligned} &\int [\lambda(x^2 + y^2) + \lambda^2 z^2]^{-1/2} d\lambda = \\ &= |z|^{-1} \ln[2|z| [\lambda(x^2 + y^2) + \lambda^2 z^2]^{1/2} + 2\lambda z^2 + x^2 + y^2] \end{aligned}$$

([5], p. 81, 2.261 - 1.^a fórmula), temos a seguinte conclusão:

Conclusão

Para cada a , $0 < a \neq 1$, uma solução fundamental E_a do operador produto

$$\Delta_3[a\Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}]$$

é a função $E_a \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ definida por

$$E_a(x, y, z) = \frac{1}{4\pi(1-a)} [(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{a}} (x^2 + y^2 + az^2)^{1/2}] +$$

$$+ \frac{|z|}{8\pi(1-a)} \ln \left[\frac{2|z|[a(x^2 + y^2) + az^2]^{1/2} + 2az^2 + x^2 + y^2}{2|z|[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} + 2z^2 + x^2 + y^2} \right] \quad (\text{VIII.4.9})$$

que tem a propriedade

$$\lim_{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow +\infty} (1 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1} E_a(x, y, z) = 0$$

(VIII.5) Soluções Fundamentais do Operador Produto

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}, \quad a_1 \neq \dots \neq a_m$$

1.º Caso: $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}, \quad a_1 < \dots < a_m$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, o operador $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}$ é hiperbólico em relação a variável x e a única solução fundamental E_λ do operador iterado $(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y})^m$ com suporte no semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ é dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$,

$$\langle E_\lambda, \psi \rangle = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty t^{m-1} \psi(t, \lambda t) dt \quad (\text{VIII.5.1})$$

(v. fórmula (V.1.7)).

O teorema da integração paramétrica aplicada aos operadores hiperbólicos garante que a única solução fundamental E do operador produto

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad a_1 < \dots < a_m,$$

é dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle E, \psi \rangle &= \frac{1}{(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j \int_0^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-2} \left[\int_0^{+\infty} t^{m-1} \psi(t, \lambda t) dt \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j \iint_{[0, a_j] \times [0, \infty)} (a_j - \lambda)^{m-2} t^{m-1} \psi(t, \lambda t) d(t, \lambda) \end{aligned}$$

pelo teorema de Fubini (v. Capítulo Zero)

$$= \frac{1}{(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j \iint_{B_j} (a_j x - y)^{m-2} \psi(x, y) d(x, y)$$

pela mudança de variável $t = x$ e $\lambda = y/x$, onde para cada $j=1, \dots, m$, $B_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq a_j x\}$ se $a_j > 0$ e $B_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, a_j x \leq y \leq 0\}$, se $a_j < 0$

$$= \frac{1}{(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_j}(x, y) (a_j x - y)^{m-2} \psi(x, y) d(x, y)$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$, χ_{B_j} é a função característica de B_j .

Conclusão

A única solução fundamental do operador hiperbólico em relação a variável x

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad a_1 < a_2 < \dots < a_m$$

com suporte no semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}^2$ definida por

$$E(x, y) = \frac{1}{(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j (a_j x - y)^{m-2} \chi_{B_j}(x, y) \quad (\text{VIII.5.2})$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1}$ e χ_{B_j} é a função característica do conjunto B_j descrito acima.

2.º Caso: $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, $\text{Im} a_1 > \text{Im} a_2 > \dots > \text{Im} a_m > 0$

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\text{Im} \lambda \neq 0$, o operador $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}$ é elítico e uma solução fundamental do operador iterado $(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y})^m$ é a função localmente integrável E_λ do $\mathbb{R}^2$ definida por

$$E_\lambda(x, y) = \frac{\text{sgn}(\text{Im} \lambda)}{2\pi i (m-1)!} \cdot \frac{x^{m-1}}{y - \lambda x} \quad (\text{VIII.5.3})$$

(v. fórmula (V.1.7)).

O teorema da integração paramétrica aplicada aos operadores elíticos garante que uma solução fundamental do operador produto

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}, \quad \text{Im} a_1 > \dots > \text{Im} a_m > 0$$

é dada por

$$E = \frac{1}{(2\pi i)(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j x^{m-1} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{m-2}}{y - \lambda x} d\lambda$$

onde a_0 é um número complexo fixo com $\text{Im} a_0 > 0$.

Cálculo de $I_m(x, y) = x^{m-1} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{m-2}}{y - \lambda x} d\lambda, m = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} I_m(x, y) &= x^{m-1} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{m-2}}{y - \lambda x} d\lambda = \\ &= x^{m-2} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{m-3}}{y - \lambda x} (y - \lambda x + a_j x - y) d\lambda = \\ &= x^{m-2} \int_{a_0}^{a_j} (a_j - \lambda)^{m-3} d\lambda + x^{m-2} (a_j x - y) \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{m-3}}{y - \lambda x} d\lambda \end{aligned}$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, chegamos que

$$\begin{aligned} I_m(x, y) &= \rho(x, y) + (a_j x - y)^{m-2} \int_{a_0}^{a_j} x(y - \lambda x)^{-1} d\lambda = \\ &= \rho(x, y) - (a_j x - y)^{m-2} [\log(y - a_j x) - \log(y - a_0 x)] \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.4})$$

onde ρ é um polinômio em x e y de grau menor ou igual a $m-2$ e, portanto, solução da equação homogênea.

Conclusão

Uma solução fundamental do operador

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}, \quad \text{Im} a_1 > \dots > \text{Im} a_m > 0$$

é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E(x, y) = \frac{-1}{(2\pi i)(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j (a_j x - y)^{m-2} \log(y - a_j x) \quad (\text{VIII.5.5})$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1}$, pela observação de que o fato

$$\sum_{j=1}^m c_j a_j^{\ell} = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, m-2 \quad (\text{VIII.5.6})$$

implica que

$$\sum_{j=1}^m c_j (a_j x - y)^{m-2} \log(y - a_0 x) = 0 \quad (\text{VIII.5.7})$$

3.º Caso: $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, $\text{Im} a_1 < \dots < \text{Im} a_m < 0$

Analogamente, temos a seguinte conclusão.

Conclusão

Uma solução fundamental do operador

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}, \quad \text{Im} a_1 < \dots < \text{Im} a_m < 0$$

é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E(x, y) = \frac{+1}{(2\pi i)(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j (a_j x - y)^{m-2} \log(y - a_j x) \quad (\text{VIII.5.8})$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1}$.

4.º Caso: $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $a_1 \neq \dots \neq a_m$

Em virtude dos casos anteriores, vamos definir

$$E = \frac{-1}{(2\pi i)(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j E_j$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1}$ e E_j é a função localmente integrável do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E_j(x, y) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} a_j) (a_j x - y)^{m-2} \log(y - a_j x)$$

a qual tem a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right) E_j &= \\ &= \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} a_j) (a_j x - y)^{m-2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right) \log(y - a_j x) = \\ &= (-1)^{m-1} 2\pi i \delta(x) \otimes y^{m-2} Y(-y) \end{aligned}$$

e vamos provar que E é uma solução fundamental de

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad a_1 \neq \dots \neq a_m$$

apenas para $m = 3$ (a prova para o caso geral é a mesma):

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_3 \frac{\partial}{\partial y} \right) E &= \\ &= c_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_3 \frac{\partial}{\partial y} \right) [\delta(x) \otimes y Y(-y)] + \\ &+ c_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_3 \frac{\partial}{\partial y} \right) [\delta(x) \otimes y Y(-y)] + \\ &+ c_3 \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) [\delta(x) \otimes y Y(-y)] = \\ &= \{ [c_1 + c_2 + c_3] \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [c_1(a_2 + a_3) + c_2(a_1 + a_3) + c_3(a_1 + a_2)] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \\ &+ [c_1 a_2 a_3 + c_2 a_1 a_3 + c_3 a_1 a_2] \frac{\partial^2}{\partial y^2} \} [\delta(x) \otimes y Y(-y)] = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\delta(x) \otimes y Y(-y)] = \delta \end{aligned}$$

desde que, as fórmulas (VIII.5.6) para $m = 3$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3; \quad c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^3 = 1,$$

implicam que

$$\begin{aligned}
 0 &= c_1(a_2+a_3)+c_2(a_1+a_3)+c_3(a_1+a_2) = \\
 &= (c_1+c_2+c_3)(a_1+a_2+a_3) - c_1a_1 - c_2a_2 - c_3a_3 \\
 1 &= c_1a_2a_3 + c_2a_1a_3 + c_3a_1a_2 = \\
 &= (c_1+c_2+c_3)(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3) - \\
 &\quad - (c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3)(a_1+a_2+a_3) + \\
 &\quad + c_1a_1^2 + c_2a_2^2 + c_3a_3^2
 \end{aligned}$$

Conclusão

Uma solução fundamental do operador

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad a_1 \neq \dots \neq a_m$$

é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E(x, y) = \frac{-1}{(2\pi i)(m-2)!} \sum_{j=1}^m c_j E_j(x, y) \quad (\text{VIII.5.9})$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1}$ e E_j é a função localmente integrável do $\mathbb{R}^2$ definida por

$$E_j(x, y) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} a_j) (a_j x - y)^{m-2} \log(y - a_j x) \quad (\text{VIII.5.10})$$

5.º Caso: $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \quad a_{p+1}, \dots, a_m \in \mathbb{R}; \quad a_1 \neq \dots \neq a_m$

Analogamente, temos a seguinte conclusão.

Conclusão

Uma solução fundamental do operador

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad a_{p+1}, \dots, a_m \in \mathbb{R}, \quad a_1 \neq \dots \neq a_m$$

é a função localmente integrável E do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} E(x, y) = & \frac{-1}{(2\pi i)(m-2)!} \sum_{j=1}^p c_j \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} a_j) (a_j x - y)^{m-2} \log(y - a_j x) + \\ & + \frac{i\pi}{(2\pi i)(m-2)!} \sum_{j=p+1}^m c_j (a_j x - y)^{m-2} \operatorname{sgn}(x) Y(a_j x - y) \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.11})$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1}$ levando-se em conta que, para cada $j = p+1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log[y - (a_j \pm i\varepsilon)x] = \\ = \ln|y - a_j x| \mp i\pi \operatorname{sgn}(x) Y(a_j x - y) \end{aligned}$$

em $D'(\mathbb{R}^2)$, conforme a observação a seguir.

Observação

Para cada $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, a função $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \log(y - \lambda x)$, onde para $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,

$$\log z = \ln|z| + i[\operatorname{arctg}\left(-\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + \pi \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) Y(-\operatorname{Re} z)] \quad (\text{VIII.5.12})$$

(com a convenção de que $\operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\pi/2$), é uma função localmente integrável do $\mathbb{R}^2$.

Além disso, a aplicação $F : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow D'(\mathbb{R}^2)$ dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$,

$$\langle F(\lambda), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) \log(y - \lambda x) d(x, y) \quad (\text{VIII.5.13})$$

é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, isto é, para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ a aplicação $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \langle F(\lambda), \psi \rangle \in \mathbb{C}$ é holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: de fato, se $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) \left[\frac{\log(y - \lambda x) - \log(y - \lambda_0 x)}{\lambda - \lambda_0} \right] d(x, y) &= \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) \log \left[1 - \frac{(\lambda - \lambda_0)x}{y - \lambda_0 x} \right] d(x, y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) \left[\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{-1} \log \left[1 - \frac{(\lambda - \lambda_0)x}{y - \lambda_0 x} \right] \right] d(x, y) = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) x (y - \lambda_0 x)^{-1} d(x, y) \end{aligned}$$

Além do mais, para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ e para cada $\lambda_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \text{Im} \lambda > 0}} \langle \log(y - \lambda x), \psi \rangle = \langle \log^+(y - \lambda_0 x), \psi \rangle \quad (\text{VIII.5.14})$$

onde $\log^+(y - \lambda_0 x) = \ln|y - \lambda_0 x| - i\pi \text{sgn}(x)Y(\lambda_0 x - y)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \text{Im} \lambda < 0}} \langle \log(y - \lambda x), \psi \rangle = \langle \log^-(y - \lambda_0 x), \psi \rangle \quad (\text{VIII.5.15})$$

onde $\log^-(y - \lambda_0 x) = \ln|y - \lambda_0 x| + i\pi \text{sgn}(x)Y(\lambda_0 x - y)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Portanto, $F^+ : \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda > 0\} \rightarrow D'(\mathbb{R}^2)$ dada por:
para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$, $\langle F^+(\lambda), \psi \rangle = \langle F(\lambda), \psi \rangle$ admite uma ex-
tensão contínua $\bar{F}^+$ a $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda \geq 0\}$: para $\lambda \in \mathbb{R}$,
 $\langle \bar{F}^+(\lambda), \psi \rangle = \langle \log^+(y-\lambda x), \psi \rangle$. De maneira análoga,
 $F^- : \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda < 0\} \rightarrow D'(\mathbb{R}^2)$ dada por: para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$,
 $\langle F^-(\lambda), \psi \rangle = \langle F(\lambda), \psi \rangle$ admite uma extensão contínua $\bar{F}^-$ a
 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda < 0\}$: para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \bar{F}^-(\lambda), \psi \rangle = \langle \log^-(y-\lambda x), \psi \rangle$.

Aplicação VIII.5.1

Solução Fundamental do Operador

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} = \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} + \bar{a} \frac{\partial}{\partial y} \right]; \quad a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Pela fórmula (VIII.5.11) com $c_1 = 1/3$, $c_2 = a/3$ e
 $c_3 = \bar{a}/3$, uma solução fundamental de $\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial y^3}$ é a função
localmente integrável E do $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} E_3(x, y) &= -\frac{1}{6\pi i} [i\pi(y-x)\text{sgn}(x)Y(x-y) + a(ax-y)\log(y-ax) - \bar{a}(\bar{a}x-y)\log(y-\bar{a}x)] = \\ &= (-1/6)(y-x)\text{sgn}(x)Y(x-y) + (12\pi)^{-1}\sqrt{3}(x+y)[\log(y-ax) + \log(y-\bar{a}x)] + \\ &+ (12\pi i)^{-1}(x-y)[\log(y-ax) - \log(y-\bar{a}x)] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12\pi}(x+y)\ln(x^2+xy+y^2) + \frac{1}{16\pi}(y-x)\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{x+2y}\right) + \frac{1}{6}(x-y)\text{sgn}(x)[Y(x-y) - Y(x-2y)] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12\pi}(x+y)\ln(x^2+xy+y^2) + \frac{1}{16\pi}(y-x)\text{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}(x+y)}{x-y}\right] + \\ &+ \frac{(x-y)}{6}[\text{sgn}(x)Y(x-y) - \text{sgn}(x)Y(-x-2y) - Y(\frac{x+2y}{x-y})] \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.16})$$

pela utilização das seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} \log(y-ax) - \log(y-\bar{a}x) &= 2i\operatorname{Im}[\log(y-ax)] = \\ &= -2i\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{x+2y}\right) - 2\pi i\operatorname{sgn}(x)Y(-x-2y) \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.17})$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{x+2y}\right) &= \\ &= -\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}(x+y)}{x-y}\right] + \pi Y\left(\frac{x+2y}{x-y}\right) \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.18})$$

([5], p. 49, 1.625, fórmula 8).

Conclusão

Uma solução fundamental de $\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial y^3}$ é a função localmente integrável E do R^2 dada por

$$\begin{aligned} E(x,y) &= \frac{\sqrt{3}}{12\pi}(x+y)\ln(x^2+xy+y^2) + \\ &+ \frac{1}{6\pi}(x-y)\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}(x+y)}{x-y}\right] + \\ &+ \frac{(x-y)}{6}[\operatorname{sgn}(x)Y(x-y) - \operatorname{sgn}(x)Y(-x-2y) - Y\left(\frac{x+2y}{x-y}\right)] . \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.19})$$

Aplicação VIII.5.2

Solução Fundamental do Operador

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \left[\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x} + \bar{a}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x} - \bar{a}\frac{\partial}{\partial y}\right]; \quad a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Pela fórmula (VIII.5.9) com $c_1 = -i\bar{a}/4$, $c_2 = -c_1$, $c_3 = \bar{c}_1$ e $c_4 = -\bar{c}_1$, uma solução fundamental de $\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ é

a função localmente integrável E do R^2 dada por

$$\begin{aligned}
 16\pi E(x,y) &= \bar{a}(ax-y)^2 \log(y-ax) + \\
 &+ a(\bar{a}x-y)^2 \log(y-\bar{a}x) + \bar{a}(ax+y)^2 \log(y+ax) + \\
 &+ a(\bar{a}x+y)^2 \log(y+\bar{a}x) = 2(Ref)(x,y) + \\
 &+ 2(Reg)(x,y)
 \end{aligned}
 \tag{VIII.5.20}$$

onde

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= \bar{a}(ax-y)^2 \log(y-ax) \\
 g(x,y) &= \bar{a}(ax+y)^2 \log(y+ax)
 \end{aligned}
 \tag{VIII.5.21}$$

Calculando a parte real de f e de g , temos a seguinte conclusão.

Conclusão

Uma solução fundamental de $\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ é a função localmente integrável E do R^2 dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{32\pi}{\sqrt{2}} E(x,y) &= (x^2 - 2\sqrt{2}xy + y^2) \ln(x^2 - \sqrt{2}xy + y^2) + \\
 &+ (x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2) \ln(x^2 + \sqrt{2}xy + y^2) + \\
 &+ 2(x^2 - y^2) \arctg(x^2/y^2)
 \end{aligned}
 \tag{VIII.5.22}$$

que é a mesma fórmula encontrada no Capítulo VII.

APÊNDICE

LEMAS ALGÉBRICOS

Lema 1

(Decomposição em Frações Parciais com Raízes Simples)

Sejam $m = 2, 3, \dots$ e $a_0, a_1, \dots, a_m$ números complexos tais que $a_1, \dots, a_m$ são distintos entre si. Então,

$$\begin{aligned} & \frac{(z - a_0)^{m-1}}{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_m)} = \\ & = \sum_{j=1}^m c_j \frac{(a_j - a_0)^{m-1}}{z - a_j}, \quad z \neq a_1, \dots, a_m \end{aligned} \tag{A1.1}$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1}$.

Prova

O lema 1 é caso particular do lema seguinte.

Lema 2

(Decomposição em Frações Parciais com Raízes Múltiplas)

Sejam $m = 2, 3, \dots$ e $a_1, \dots, a_m$ números complexos tais que $a_1, \dots, a_m$ são distintos entre si. Então, para $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(z-a_1)^{r_1} (z-a_2)^{r_2} \dots (z-a_m)^{r_m}} =$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \frac{c_{jp}}{(z-a_j)^p}, \quad z \neq a_1, \dots, a_m \quad (\text{A1.2})$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$ e para $p=1, \dots, r_j$,

$$c_{jp} = \frac{1}{(r_j - p)!} \cdot \frac{d^{r_j - p}}{dz^{r_j - p}} \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(z-a_k)^{r_k}} \right]_{z=a_j} \quad (\text{A1.3})$$

Prova

Consideremos a igualdade (A1.2). Para a determinação de c_{1r_1} , multipliquemos ambos os membros de (A1.2) por $(z-a_1)^{r_1}$:

$$\frac{1}{(z-a_2)^{r_2} \dots (z-a_m)^{r_m}} = c_{1r_1} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{r_1-1} c_{jp} (z-a_1)^{r_1-p} + \sum_{j=2}^m \sum_{p=1}^{r_j} \frac{c_{jp} (z-a_1)^{r_1}}{(z-a_j)^p}$$

Para $z = a_1$, esta expressão fornece $c_{1r_1} = \prod_{j=2}^m (z-a_j)^{-r_j}$. Para a determinação de c_{1r_1-1} , calculamos a derivada da última expressão em a_1 :

$$c_{1r_1-1} = \frac{d}{dz} \left[\prod_{k=2}^m (z-a_k)^{-r_k} \right]_{z=a_1}$$

E, assim, sucessivamente, calculamos $c_{1r_1-2}, \dots, c_{11}$, respectivamente, como a segunda e a (r_1-1) -ésima derivada da expressão

em questão em a_1 .

Lema 3

(Integração Paramétrica)

Sejam $m = 2, 3, \dots$ e $u, v, a_0, a_1, \dots, a_m$ números complexos tais que $a_1, \dots, a_m$ são distintos entre si e, para cada $j=1, \dots, m$, $u+a_j v \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(u+a_1 v) \dots (u+a_m v)} = \\ & = (m-1) \sum_{j=1}^m c_j \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - z)^{m-2}}{(u+zv)^m} dz \end{aligned} \quad (A1.4)$$

onde, para cada $j=1, \dots, m$, $c_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (a_j - a_k)^{-1}$ e o número complexo $-u/v$ não pertence à curva de integração cujo ponto inicial é a_0 e cujo ponto final é a_j .

Prova

Para $v \neq 0$, o lema 1 com $z = -u/v$ garante que

$$\begin{aligned} & \frac{(u+a_0 v)^{m-1}}{(u+a_1 v) \dots (u+a_m v)} = \\ & = \sum_{j=1}^m c_j \frac{(a_j - a_0)^{m-1}}{u+a_j v} \end{aligned} \quad (A1.5)$$

Como

$$\int_a^b \frac{(b-z)^{m-2}}{(u+zv)^m} dz =$$

$$= (u+bv)^{-1} \int_0^{\frac{b-a}{u+av}} w^{m-2} dw ; w = \frac{b-z}{u+zv} \quad (A1.6)$$

$$= \frac{1}{(m-1)(u+bv)} \left(\frac{b-a}{u+av} \right)^{m-1}$$

A substituição de (A1.6) com $a = a_0$ e $b = a_j$ em (A1.5) prova o lema para $v \neq 0$.

O caso $v = 0$ é imediato.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - J. Barros Neto - An Introduction to the Theory of Distributions. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
- [2] - J. Chazarain & A. Piriou - Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations. North-Holland, 1982.
- [3] - W.F. Donoghue, Jr. - Distributions and Fourier Transforms. Academic Press, New York, 1969.
- [4] - I.M. Gelfand & G.E. Shilov - Generalized Functions, Vol. 1. Academic Press, 1964.
- [5] - I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik - Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, 1980.
- [6] - L. Hörmander - Linear Partial Differential Operators. Springer-Verlag, 1976.
- [7] - W. Magnus; F. Oberhettinger & R.P. Soni - Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Springer-Verlag, 1966.
- [8] - N. Ortner - Regularisierte faltung von distributionen. Teil 1: zur berechnung von fundamentallösungen. ZAMP, Vol. 31, p. 133 a 173, 1980.
- [9] - N. Ortner - Die Fundamentallösungen von Produkten Hiperbolisher Operatoren. (Notas da Universidade de Innsbruck), 1983.
- [10] - L. Schwartz - Théorie des Distributions. Hermann, Paris, 1966.
- [11] - G.E. Shilov - Generalized Functions and Partial Differential Equations. Gordon and Breach, 1968.
- [12] - Z. Szmydt - Fourier Transformation and Linear Differential Equations. D. Reidel Publishing Company, 1980.

- [13] - F. Trèves - Basic Linear Partial Differential Equations. Academic Press, 1975. .
- [14] - V.S. Vladimirov - Equations of Mathematical Physics. Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.
- [15] - P. Wagner - Parameterintegration zur berechnung von fundamentallösungen. Dissertationes Mathematicae, CCXXX, 1984.
- [16] - P. Wagner - Soluções Fundamentais de Operadores Diferenciais Parciais com Coeficientes Constantes. (Notas do Departamento de Matemática, da Universidade Federal de São Carlos), 1983.