UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Algumas aplicações de jogos topológicos à análise

Juan Luis Jaisuño Fuentes Maguiña

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Juan Luis Jaisuño Fuentes Maguiña

Algumas aplicações de jogos topológicos à análise

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
Maio de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

F954a Fuentes Maguiña, Juan Luis Jaisuño
Algumas aplicações de jogos topológicos à análise /
Juan Luis Jaisuño Fuentes Maguiña; orientador
Leandro Fiorini Aurichi. -- São Carlos, 2018.
107 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Jogos topológicos. 2. Conjuntos estritamente
pseudo-completos. 3. Espaços de diferenciabilidade
Gâteaux. 4. Espaços Asplund fracos. 5. Funções
aproximadamente contínuas. I. Fiorini Aurichi,
Leandro, orient. II. Título.

Juan Luis Jaisuño Fuentes Maguiña

Some applications of topological games to analysis

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
May 2018

*Para mis queridos padres,
Teodolfo e Isabel,
a quienes les debo todo.*

AGRADECIMENTOS

Honestamente não tenho palavras para expressar a gratidão que eu sinto pela minha família. Pelo carinho, os bons sentimentos e o apoio incondicional de todos eles (provavelmente recebi mais do que eu merecia). De maneira muito especial por meus pais, Teofolfo Fuentes e Isabel Maguiña, e a minha irmã Ericka. Muito obrigado por tudo.

Agradeço também ao meu orientador, o professor Leandro Aurichi, de quem eu aprendi muito sobre matemática. Obrigado pelas sugestões, pela paciência e, sobretudo, por não desistir de mim.

Eu fico muito agradecido com a vida, a Maestra Vida, por todas as coisas que eu aprendi além da matemática. Sobre tudo pelas pessoas que conheci aqui e que me ajudaram a redefinir o conceito de amizade em tão pouco tempo. Mesmo que alguns deles já foram embora e outros ainda fiquem aqui, eu prefiro não mencionar ninguém em particular. Só quero dizer que eu sempre vou lembrar de vocês, meus caros amigos.

Finalmente gostaria de agradecer ao ICMC pela oportunidade de fazer o mestrado e à CAPES pelo apoio financeiro.

*“Living is easy with eyes closed,
misunderstanding all you see.
It’s getting hard to be someone but it all works out,
it doesn’t matter much to me.”
(Strawberry fields forever, The Beatles)*

RESUMO

FUENTES, J. L. **Algumas aplicações de jogos topológicos à análise**. 2018. 107 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Neste trabalho apresentamos alguns jogos topológicos e suas aplicações à análise. Com esse fim, se fornece condições necessárias para que funções aproximadamente contínuas se tornem contínuas, se caracteriza os conjuntos estritamente pseudo-completos nos espaços de Banach e, assim também, se constrói um espaço de diferenciabilidade Gâteaux que não é Asplund fraco.

Palavras-chave: Jogos topológicos, funções aproximadamente contínuas, conjuntos estritamente pseudo-completos, espaço de diferenciabilidade Gâteaux, espaço Asplund fraco.

ABSTRACT

FUENTES, J. L. **Some applications of topological games to analysis**. 2018. 107 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

In this work we present some topological games and their applications to analysis. For this purpose, necessary conditions are given for nearly continuous functions to become continuous, we characterize the strictly pseudo-complete sets in the Banach spaces and we also construct a Gâteaux differentiability space that is not weak Asplund.

Keywords: Topological games, nearly continuous functions, strictly pseudo-complete sets, Gâteaux differentiability space, weak Asplund space.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\uplus$ — União disjunta de conjuntos

$\mathbb{N}$ — O conjunto dos números naturais

$\mathbb{N}_{>0}$ — O conjunto dos números inteiros positivos

$\mathbb{Q}$ — O conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$ — O conjunto dos números reais

$A^{<\omega}$ — O conjunto das sequências finitas de elementos de A

$p \wedge q = (a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_j)$, onde $p = (a_1, a_2, \dots, a_i)$ e $q = (b_1, b_2, \dots, b_j)$

$Var(\alpha)$ — A variação da função de variação limitada α

$\|\cdot\|_\infty$ — A norma do supremo

$\|\cdot\|_{var}$ — A norma da variação total

$f(x^+)$ — O limite lateral de f à direita de x

$f(x^-)$ — O limite lateral de f à esquerda de x

$\overline{A}$ — O fecho do conjunto A

$\overline{A}^Y$ — O fecho do conjunto A no subespaço Y

$int(A)$ — O interior do conjunto A

$C(X, Y)$ — O conjunto das funções contínuas de X a Y

$C(X)$ — O conjunto das funções contínuas de X a $\mathbb{R}$

$C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])$ — O conjunto das funções injetoras contínuas de $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ a $[0, 1]$

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
1 PRELIMINARES	21
1.1 Teoria dos conjuntos	21
1.2 Topologia geral	25
1.3 Categoria de Baire	33
1.4 Usco e usco minimal	38
1.5 Análise funcional	42
1.6 Diferenciabilidade Gâteaux	46
2 UMA VERSÃO TOPOLÓGICA DO TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO	51
2.1 O jogo de Banach-Mazur	51
2.2 Funções aproximadamente contínuas	53
3 UMA CARACTERIZAÇÃO DOS CONJUNTOS ESTRITAMENTE PSEUDO-COMPLETOS	57
3.1 Espaços pseudo-completos e o jogo de Choquet	57
3.2 Conjuntos pseudo-completos em espaços de Banach	61
4 UM ESPAÇO DE DIFERENCIABILIDADE GÂTEAUX QUE NÃO É ASPLUND FRACO	67
4.1 Espaços de diferenciabilidade Gâteaux e Asplund fracos	68
4.2 Espaços de Kalenda K_A	75
4.3 Uma caracterização do espaço dual de $C(K_A)$	81
4.4 Espaços aproximadamente Stegall e o jogo de Cantor	90
4.5 Um espaço quase Asplund fraco que não é Asplund fraco	95
REFERÊNCIAS	105
APÊNDICE A ALGUNS CARDINAIS	107

INTRODUÇÃO

De acordo com [Telgársky \(1987\)](#), o termo jogo topológico foi introduzido por Berge em 1957, mesmo que a ideia já tinha sido desenvolvida bem antes, e foi formalizado por Pears em 1965. Desde então os jogos topológicos são utilizados geralmente, como veremos mais adiante, para caracterizar de um modo mais simples alguns conceitos, definir novos espaços, etc.

Para fixar ideias, um *jogo topológico* é um jogo com infinitas rodadas entre dois participantes, o Jogador I e o Jogador II, desenvolvido num espaço topológico onde as regras e o critério de vitória envolvem propriedades topológicas. Uma *estratégia* é uma função que indica como deve jogar um jogador ante qualquer escolha do seu adversário. Mais ainda, se o jogador consegue sempre vencer com a dita estratégia, então dizemos que esta é uma *estratégia vencedora*. A importância ou utilidade dos jogos topológicos radica na existência ou não existência de uma estratégia vencedora para uns dos jogadores.

Existem diversos tipos de jogos topológicos, mas no presente trabalho apresentamos um tipo particular de jogo e apresentamos algumas de suas aplicações à análise. Enfatizamos o estudo daqueles jogos com informação perfeita (ou seja, cada jogador lembra as jogadas do outro) e rodadas enumeráveis. Com esse propósito, a dissertação está organizada do seguinte modo.

O Capítulo 1 reúne os conceitos e os resultados básicos que serão necessários para o desenvolvimento do presente trabalho. Abordamos alguns tópicos da teoria dos conjuntos, topologia geral, categoria de Baire, funções multi-avaliadas semicontínuas superiores, análise funcional e a diferenciabilidade Gâteaux.

No Capítulo 2 apresentamos uma aplicação do jogo de Banach-Mazur para caracterizar os conjuntos residuais. Fornecemos condições necessárias para que funções aproximadamente contínuas se tornem contínuas, como foi mostrado por [Moors \(2000\)](#), obtendo no final uma versão topológica do Teorema do gráfico fechado.

Estabelecemos no Capítulo 3 a equivalência entre os espaços de Choquet e Choquet forte com os espaços pseudo-completos e estritamente pseudo-completos, respectivamente. Baseado na noção de espaços pseudo-completos, [Noll \(1990\)](#) estendeu o conceito de pseudo-completude para os conjuntos convexos em espaços localmente convexos. Nós apresentamos uma redefinição de tal conceito utilizando a equivalência obtida com os espaços de Choquet. Utilizamos também um jogo topológico para caracterizar os conjuntos estritamente pseudo-completos e CS-fechados nos espaços de Banach, de acordo com [Noll \(1990\)](#), e assim obter de um modo mais simples

uma relação entre tais conjuntos.

Finalmente, no Capítulo 4, se constrói um espaço de diferenciabilidade Gâteaux que não é Asplund fraco por meio de um jogo topológico, chamado de jogo de Cantor, e outras ferramentas. Tal construção foi elaborada por [Moors e Somasundaram \(2006\)](#) e fornece uma resposta positiva à pergunta feita por [Larman e Phelps \(1979\)](#).

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos os conceitos e resultados básicos que serão necessários para o desenvolvimento do presente trabalho. Abordamos alguns tópicos da teoria dos conjuntos, topologia geral, categoria de Baire, funções multi-avaliadas semicontínuas superiores, análise funcional e a diferenciabilidade Gâteaux.

1.1 Teoria dos conjuntos

Introduzimos brevemente alguns conceitos da teoria dos conjuntos como os ordinais, cardinais e suas propriedades básicas. Assumimos o sistema axiomático ZFC durante todo o trabalho. Para uma leitura mais profunda e completa, o leitor pode consultar as referências [JECH](#) e [HRBACEK; JECH](#).

Definição 1.1.1. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos dele. Diz-se que $\mathcal{F}$ é um σ -ideal em X se $\emptyset \in \mathcal{F}$ e satisfaz as seguintes condições:

- Para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $B \subseteq A$ temos que $B \in \mathcal{F}$.
- Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

O σ -ideal gerado por $\mathcal{F}$, denotado por $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, é o menor σ -ideal que contém $\mathcal{F}$.

Proposição 1.1.2. Sejam $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X e $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ o σ -ideal gerado por $\mathcal{F}$. Se $T : X \rightarrow Y$ é uma função bijetora, então $\mathcal{B} = \{T(C) \mid C \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}\}$ é um σ -ideal em Y gerado por $T(\mathcal{F})$.

Demonstração. É claro que $\mathcal{B}$ é um σ -ideal em Y . Se $\mathcal{G}$ é um σ -ideal em Y que contém $T(\mathcal{F})$, então $\{T^{-1}(S) \mid S \in \mathcal{G}\}$ é um σ -ideal em X que contém $\mathcal{F}$. Logo $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \subseteq \{T^{-1}(S) \mid S \in \mathcal{G}\}$ e, em consequência, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Ou seja, $\mathcal{B}$ é o menor σ -ideal que contém $T(\mathcal{F})$. $\square$

Definição 1.1.3. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma família não vazia de subconjuntos dele. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **álgebra** se $\mathcal{F}$ é fechado por complemento e por uniões finitas. Uma **σ -álgebra** é uma álgebra que é fechada por uniões enumeráveis.

Definição 1.1.4. Sejam X um conjunto não vazio e $\leq$ uma relação nele. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem** em X se satisfaz as seguintes condições:

- i) $a \leq a$, para todo $a \in X$.
- ii) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.
- iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

Nesse caso, $(X, \leq)$ é chamado de **conjunto ordenado**. Ademais, dados $x, y \in X$, escreveremos $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$.

Definição 1.1.5. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que

- $(X, \leq)$ é **totalmente ordenado** se, para quaisquer $a, b \in X$, temos que $a \leq b$ ou $b \leq a$.
- $(X, \leq)$ é **bem ordenado** se todo subconjunto não vazio possui mínimo.

O seguinte teorema é uma reformulação do princípio da indução nos conjuntos bem ordenados.

Teorema 1.1.6. Sejam $(X, \leq)$ um conjunto bem ordenado e $A \subseteq X$. Se A satisfaz que, para todo $a \in X$, $\{x \in X \mid x < a\} \subseteq A$ implica $a \in A$, então $A = X$.

Demonstração. Sejam $a \in X$ e $I_a = \{x \in X \mid x < a\}$. Mostraremos que $I_a \subseteq A$. Suponhamos que $I_a \setminus A \neq \emptyset$. Existe $b \in I_a \setminus A$ tal que $b \leq w$ para todo $w \in I_a \setminus A$. Seja $t \in \{x \in X \mid x < b\}$. Se $t \notin A$, então $t \in I_a \setminus A$ e, por consequência, $b \leq t$, mas isso contradiz o fato que $t < b$. Então $t \in A$. Ou seja, $\{x \in X \mid x < b\} \subseteq A$. Logo, pela hipótese, temos que $b \in A$, mas isso é absurdo pois $b \in I_a \setminus A$. Então $I_a \subseteq A$ e, por consequência, $a \in A$. Portanto, $A = X$. $\square$

Definição 1.1.7. Um conjunto é dito **transitivo** se todo elemento dele é também um subconjunto dele. Um conjunto X é chamado de **ordinal** se X é transitivo e $(X, \in)$ é bem ordenado.

Denotaremos os ordinais pelas letras gregas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Proposição 1.1.8. Seja P uma propriedade. Se existe um ordinal β tal que vale $P(\beta)$, então existe o menor ordinal que satisfaz P .

Demonstração. Seja $A = \{\alpha \in \beta \mid \alpha \text{ satisfaz } P\}$. No caso que $A \neq \emptyset$, como $(\beta, \in)$ é bem ordenado e cada elemento dele é um ordinal, basta tomar o mínimo elemento de A . No caso que $A = \emptyset$, só tomar o próprio β . $\square$

Teorema 1.1.9. Todo conjunto bem ordenado é isomorfo a um único ordinal.

Demonstração. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [JECH](#) (Teorema 2.12 do Capítulo 2, página 20). $\square$

Definição 1.1.10. Seja W um conjunto bem ordenado. O **tipo da ordem** de W é o ordinal que é isomorfo a W .

Definição 1.1.11. Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A e B **possuem a mesma cardinalidade**, e denotamos por $\text{card}(A) = \text{card}(B)$, se existe uma função bijetora entre A e B .

Exemplo 1.1.12. $\mathbb{R}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ possuem a mesma cardinalidade.

Definição 1.1.13. Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que a **cardinalidade de A é menor ou igual à cardinalidade de B** , e denotamos por $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$, se existe uma função injetora $f: A \rightarrow B$. Mais ainda, escrevemos $\text{card}(A) < \text{card}(B)$ se $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ e $\text{card}(A) \neq \text{card}(B)$.

Teorema 1.1.14 (Teorema de Cantor-Bernstein). Sejam A e B dois conjuntos. Se existem funções injetoras $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$, então existe uma função bijetora entre A e B .

Demonstração. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [HRBACEK; JECH](#) (Teorema 1.6 da Seção 1 do Capítulo 4, página 66). $\square$

Definição 1.1.15. Seja α um ordinal. Dizemos que α é um **cardinal** se não existe $\beta < \alpha$ tal que $\text{card}(\beta) = \text{card}(\alpha)$.

Para qualquer conjunto X , denotaremos por $\text{card}(X)$ o cardinal de X .

Teorema 1.1.16 (Teorema de Cantor). $\text{card}(X) < \text{card}(\mathcal{P}(X))$, para todo conjunto X .

Demonstração. Seja X um conjunto qualquer. Não é difícil ver que $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathcal{P}(X))$. Se $\text{card}(X) = \text{card}(\mathcal{P}(X))$, existe uma função bijetora $F: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Seja $D = \{x \in X \mid x \notin F(x)\}$. Logo existe $z \in X$ tal que $F(z) = D$. No caso $z \notin D$, temos que $z \in F(z) = D$, o que é absurdo. No caso $z \in D$, analogamente obtemos uma contradição. Portanto, $\text{card}(X) < \text{card}(\mathcal{P}(X))$. $\square$

Teorema 1.1.17. $\text{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\text{card}(X)}$, para todo conjunto X .

Demonstração. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [HRBACEK; JECH](#) (Teorema 1.9 da Seção 1 do Capítulo 5, página 96). $\square$

O cardinal de $\mathbb{N}$ será denotado por $\aleph_0$. Por consequência, o cardinal de $\mathbb{R}$ é $2^{\aleph_0}$.

Definição 1.1.18. $\lambda + \kappa = \text{card}(A \cup B)$, onde $\lambda = \text{card}(A)$, $\kappa = \text{card}(B)$ e $A \cap B = \emptyset$.

A seguinte proposição garante a boa definição da soma de números cardinais.

Proposição 1.1.19. Sejam A, A', B, B' conjuntos tais que $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$. Se $\text{card}(A) = \text{card}(A')$ e $\text{card}(B) = \text{card}(B')$, então $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A' \cup B')$.

Demonstração. Sabemos que existem funções bijetoras $f_1 : A \rightarrow A'$ e $f_2 : B \rightarrow B'$. Definimos a função $F : A \cup B \rightarrow A' \cup B'$ por $F(x) = f_1(x)$, se $x \in A$, e $F(x) = f_2(x)$ se $x \in B$. Note que F está bem definida e é bijetora. Então $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A' \cup B')$. $\square$

Proposição 1.1.20. A soma dos números cardinais satisfaz as seguintes propriedades

- a) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.
- b) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$.
- c) $\kappa \leq \kappa + \lambda$.
- d) Se $\kappa_1 \leq \kappa_2$ e $\lambda_1 \leq \lambda_2$, então $\kappa_1 + \lambda_1 \leq \kappa_2 + \lambda_2$.

Demonstração. Só usar a definição. $\square$

Definição 1.1.21. $\lambda \cdot \kappa = \text{card}(A \times B)$, onde $\lambda = \text{card}(A)$ e $\kappa = \text{card}(B)$.

A seguinte proposição garante a boa definição do produto de números cardinais.

Proposição 1.1.22. Sejam A, A', B, B' uns conjuntos. Se $\text{card}(A) = \text{card}(A')$ e $\text{card}(B) = \text{card}(B')$, então $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A' \times B')$.

Demonstração. Sabemos que existem funções bijetoras $f_1 : A \rightarrow A'$ e $f_2 : B \rightarrow B'$. Definimos a função $F : A \times B \rightarrow A' \times B'$ por $F(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$. Note que F está bem definida e é bijetora. Então $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A' \times B')$. $\square$

Proposição 1.1.23. O produto dos números cardinais satisfaz as seguintes propriedades

- a) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.
- b) $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$.
- c) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.
- d) Se $\kappa_1 \leq \kappa_2$ e $\lambda_1 \leq \lambda_2$, então $\kappa_1 \cdot \lambda_1 \leq \kappa_2 \cdot \lambda_2$.

Demonstração. Só usar a definição. $\square$

Definição 1.1.24. $\lambda^\kappa = \text{card}(A^B)$, onde $\lambda = \text{card}(A)$ e $\kappa = \text{card}(B)$.

A seguinte proposição garante a boa definição da potência entre números cardinais.

Proposição 1.1.25. Sejam A, A', B, B' uns conjuntos. Se $\text{card}(A) = \text{card}(A')$ e $\text{card}(B) = \text{card}(B')$, então $\text{card}(A^B) = \text{card}(A'^{B'})$.

Demonstração. Sabemos que existem funções bijetoras $f_1 : A \rightarrow A'$ e $f_2 : B \rightarrow B'$. Definimos a função $H : A^B \rightarrow A'^{B'}$ por $H(\varphi) = f_2 \circ \varphi \circ f_1^{-1}$. Note que H está bem definida e é bijetora. Então $\text{card}(A^B) = \text{card}(A'^{B'})$. $\square$

Proposição 1.1.26. A potência entre números cardinais satisfaz as seguintes propriedades

- a) Se $\kappa_1 \leq \kappa_2$ e $\lambda_1 \leq \lambda_2$, então $\kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$.
- b) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
- c) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)}$.
- d) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

Demonstração. Uma prova desta proposição pode ser encontrada em [HRBACEK; JECH](#) (Teorema 1.7 da Seção 1 do Capítulo 5, páginas 95-96). $\square$

1.2 Topologia geral

Nesta seção apresentamos as principais ferramentas da topologia geral. Assumimos certa familiaridade com os fatos usuais dos espaços métricos e alguns conceitos básicos da topologia como conjuntos abertos, conjuntos fechados, o fecho de um conjunto, o interior de um conjunto, topologia induzida, topologia produto, etc. Para uma leitura mais profunda e completa, o leitor pode consultar as referências [ENGELKING](#), [MUNKRES](#).

Definição 1.2.1. Uma **pseudo-métrica** ρ sobre um conjunto X é uma função $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz o seguinte

- i) Se $a = b$, então $\rho(a, b) = 0$.
- ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, para quaisquer $x, y \in X$.
- iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, para todos $x, y, z \in X$.

O ρ -**diâmetro** de um subconjunto A é $\rho\text{-diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}$. Dados $x \in X$ e $r > 0$, definimos a ρ -**bola aberta** de centro x e raio r como $B_\rho(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$.

Exemplo 1.2.2. Seja $\tilde{M}$ o conjunto das funções $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ não decrescentes tais que $\alpha(0) = 0$ e seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $(0, 1)$.

Definimos $\rho : \tilde{M} \times \tilde{M} \rightarrow [0, \infty)$ como $\rho(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(f-g)(a_n)|}{2^n}$. Vejamos primeiro que ρ está

bem definida. De fato, se $f, g \in \tilde{M}$, então $\rho(f, g) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(1) + g(1)}{2^n} = f(1) + g(1)$. É claro que ρ satisfaz (i) e (ii). Por último, sejam $f, g, h \in \tilde{M}$. Temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n \frac{|(f-g)(a_i)|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^n \frac{|(f-h)(a_i)|}{2^i} + \sum_{i=0}^n \frac{|(h-g)(a_i)|}{2^i} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|(f-h)(a_k)|}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|(h-g)(a_k)|}{2^k}.$$

Assim, $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$. Então ρ é uma pseudo-métrica em $\tilde{M}$.

Por outro lado, vejamos que ρ não é uma métrica. De fato, consideremos a função nula $\tilde{0}$ e a função $\tilde{f}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1). \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Assim temos que $\rho(\tilde{f}, \tilde{0}) = 0$, mas $\tilde{f} \neq \tilde{0}$.

O seguinte teorema fornece uma caracterização dos espaços métricos completos.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Cantor). Um espaço métrico (X, d) é completo se, e somente se, para cada sequência decrescente de conjuntos fechados $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(\text{diam}(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a zero, temos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ é um conjunto unitário.

Demonstração. Suponhamos que (X, d) é completo. Seja $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de conjuntos fechados tal que $(\text{diam}(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a zero. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n \in B_n$. A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy dado que $(\text{diam}(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a zero. Logo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um ponto $a \in X$. Dado $m \in \mathbb{N}$, a subsequência $(a_{m+k})_{k \in \mathbb{N}}$ também converge para a . Logo $a \in B_m$. Isto é, $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Mais ainda, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{a\}$.

Reciprocamente, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x_{n_0}) < 1$ para todo $k \geq n_0$. Analogamente, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \geq n_0$ e $d(x_k, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ para todo $k \geq n_1$. Indutivamente, suponhamos que dado $m \in \mathbb{N}$, existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x_{n_m}) < \frac{1}{2^m}$ para todo $k \geq n_m$. Logo, existe $n_{m+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{m+1} \geq n_m$ e $d(x_k, x_{n_{m+1}}) < \frac{1}{2^{m+1}}$ para todo $k \geq n_{m+1}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $B_k = \overline{B(x_{n_0}, 1)} \cap \cdots \cap \overline{B(x_{n_k}, \frac{1}{2^k})}$. Logo existe $x_0 \in X$ tal que $\bigcap_{k=0}^{\infty} B_k = \{x_0\}$.

Pela construção, x_n converge a x_0 . □

Definição 1.2.4. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base** para (X, τ) se, para quaisquer $x \in X$ e $U \in \tau$ tais que $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Proposição 1.2.5. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisfaz as seguintes condições

- i) Para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
- ii) Dados $x \in X$ e $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Então $\tau = \{A = \bigcup B' \mid B' \subseteq \mathcal{B}\}$ é uma topologia sobre X e $\mathcal{B}$ é uma base para (X, τ) .

Demonstração. Não é difícil ver que $\emptyset, X \in \tau$, pelo item (i), e τ é fechado por uniões arbitrárias. Sejam $U_1, U_2 \in \tau$ e $x \in U_1 \cap U_2$. Existem $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_1 \subseteq U_1$ e $x \in B_2 \subseteq U_2$. Logo, devido ao item (ii), existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$. Então $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{x \in U_1 \cap U_2} B_x \in \tau$. Logo, por indução, τ é fechado por interseções finitas. Concluimos que τ é uma topologia sobre X e que $\mathcal{B}$ é uma base para (X, τ) . $\square$

Exemplo 1.2.6. Em $\mathbb{R}$ consideremos a família $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ com } a < b\}$, a qual satisfaz as condições da Proposição 1.2.5. A topologia gerada por $\mathcal{B}$ é chamada de topologia de Sorgenfrey.

Definição 1.2.7. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{S} \subseteq \tau$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é uma **sub-base** para (X, τ) se a família das interseções finitas dos elementos de $\mathcal{S}$ é uma base para (X, τ) .

Proposição 1.2.8. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se $X = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$, então $\tau = \{A = \bigcup B' \mid B' \subseteq \mathcal{S}\}$ é uma topologia sobre X , onde $\mathcal{B}$ é o conjunto das interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Demonstração. Basta ver que $\mathcal{B}$ satisfaz as condições da Proposição 1.2.5. $\square$

Exemplo 1.2.9. Seja A um subconjunto não vazio de $(0, 1)$. Para quaisquer aberto U de $\mathbb{R}$ e $x \in A \cup \{1\}$, definimos $S(x, U) = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid f(x) \in U\}$.

Em $\mathbb{R}^{[0,1]}$ consideremos a família $\mathcal{M} = \{S(x, U) \mid x \in A \cup \{1\} \text{ e } U \in \tau_d\}$, a qual satisfaz as condições da Proposição 1.2.8. A topologia gerada por $\mathcal{M}$ será denotada por τ_A .

Definição 1.2.10. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathcal{B}_x \subseteq \tau$ tal que $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{B}_x$. Dizemos que $\mathcal{B}_x$ é uma **base local** para x se, para todo $U \in \tau$ que contenha x , existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Proposição 1.2.11. Seja X um conjunto não vazio. Para cada $x \in X$, seja $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ satisfazendo as seguintes condições

- i) Para cada $x \in X$ temos que $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ e, para qualquer $D \in \mathcal{B}_x$, $x \in D$.
- ii) Dados $x \in X$ e $U \in \tau$ tais que $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq U$.
- iii) Para todo $x \in X$ temos que, dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Então $\tau = \{A = \bigcup B' \mid B' \subseteq \mathcal{B}\}$ é uma topologia sobre X , onde $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ é uma base para (X, τ) .

Demonstração. Basta ver que $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ satisfaz as condições da Proposição 1.2.5. $\square$

Definição 1.2.12. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função entre espaços topológicos. Diz-se que

- f é **contínua** se, para cada U aberto de Y , $f^{-1}(U)$ é um aberto de X .

- f é **aberta** se $f(A)$ é um aberto de Y , para todo aberto A de X .
- f é **fechada** se $f(E)$ é um fechado de Y , para todo fechado E de X .

Observação 1.2.13. Se $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua, então $f : X \rightarrow f(X)$ também é contínua. De fato, dado U um aberto de Y tal que $f(X) \cap U \neq \emptyset$, obtemos que $f^{-1}(f(X) \cap U) = f^{-1}(f(X)) \cap f^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ é um aberto de X .

Proposição 1.2.14. Sejam X, Y dois espaços topológicos e $A, B \subseteq X$ dois conjuntos fechados tais que $A \cup B = X$. Se $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ são funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A \cap B$, então a função $H : X \rightarrow Y$ definida por

$$H(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A. \\ g(x), & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Seja K um fechado de Y . Logo $H^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cup g^{-1}(K)$ é um fechado de X pois f e g são contínuas. Então H é contínua. $\square$

Definição 1.2.15. Uma função $f : X \rightarrow Y$, entre espaços topológicos, é um **homeomorfismo** se f é contínua, bijetora e f^{-1} é contínua. Nesse caso, dizemos que os espaços X e Y são **homeomorfos**.

Exemplo 1.2.16. Todo intervalo fechado da forma $I = [a, b]$, com $a < b$, é homeomorfo a $[0, 1]$.

Proposição 1.2.17. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função bijetora entre espaços topológicos. São equivalentes

- a) f é um homeomorfismo.
- b) f é contínua e aberta.
- c) f é contínua e fechada.
- d) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, para qualquer $A \subseteq X$.

Demonstração. Uma demonstração desta proposição pode ser encontrada em [MUNKRES](#) (Teorema 18.1 da Seção 18 do Capítulo 2, página 104). $\square$

Definição 1.2.18. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é **Hausdorff** ou T_2 se, dados $x, y \in X$ distintos, existem $U, V \in \tau$ disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$.

Definição 1.2.19. Um **espaço compacto** é um espaço topológico no qual toda cobertura aberta dele possui uma subcobertura finita. Um subconjunto de um espaço topológico é um **conjunto compacto** nele se como subespaço é um espaço compacto.

Proposição 1.2.20. Seja X um espaço topológico.

- a) $A \subseteq X$ é um conjunto compacto se, e só se, toda cobertura de A , formada por abertos de X , possui uma subcobertura finita.
- b) Todo conjunto fechado contido num conjunto compacto também é compacto.

Demonstração. O item (a) é trivial. Sejam F um conjunto fechado e K um conjunto compacto tais que $F \subseteq K$. Seja $\{A_t\}_{t \in L}$ uma cobertura aberta de F formada por abertos de X . Como $K \subseteq F^c \cup \bigcup_{t \in L} A_t$, existem $t_1, \dots, t_n \in L$ tais que $K \subseteq F^c \cup \bigcup_{i=1}^n A_{t_i}$. Logo $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{t_i}$. Portanto, F é compacto. $\square$

Proposição 1.2.21. Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff.

- a) Dados um conjunto compacto K e $x_0 \in X$ tais que $x_0 \notin K$, existem $U, V \in \tau$ disjuntos tais que $x_0 \in V$ e $K \subseteq U$.
- b) Todo conjunto compacto é fechado.
- c) Se A, B são conjuntos compactos disjuntos, então existem $U, V \in \tau$ disjuntos tais que $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$.

Demonstração.

- a) Sejam K um conjunto compacto e $x_0 \in X$ tais que $x_0 \notin K$. Para cada $x \in K$, existem $U_x, V_x \in \tau$ disjuntos tais que $x \in U_x$ e $x_0 \in V_x$. Como K é compacto, existem $x_1, \dots, x_n \in K$ tais que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Fazendo $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ e $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$, obtemos que $U \cap V = \emptyset$, $x_0 \in V$ e $K \subseteq U$.
- b) Sejam K um conjunto compacto e $z \in \overline{K}$. Se $z \notin K$, então existem $U, V \in \tau$ disjuntos tais que $z \in V$ e $K \subseteq U$. Logo $V \cap K \neq \emptyset$, mas isso contradiz o fato que U e V são disjuntos. Então $z \in K$. Ou seja, $K = \overline{K}$.
- c) Sejam A, B dois conjuntos compactos disjuntos. Para cada $x \in B$, existem $U_x, V_x \in \tau$ disjuntos tais que $x \in V_x$ e $A \subseteq U_x$. Como B é compacto, existem $x_1, \dots, x_n \in B$ tais que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Fazendo $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ e $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$, obtemos que $U \cap V = \emptyset$, $B \subseteq V$ e $A \subseteq U$.

$\square$

Proposição 1.2.22. Sejam A e B dois conjuntos compactos de um espaço de Hausdorff. Se $A \not\subseteq B$, então existe um aberto U tal que $A \cap \overline{U} = \emptyset$ e $B \cap U \neq \emptyset$.

Demonstração. Dado $x_0 \in B \setminus A$, existem dois abertos disjuntos U, V tais que $x_0 \in U$ e $A \subseteq V$. Logo $A \cap \overline{U} = \emptyset$ e $B \cap U \neq \emptyset$. $\square$

Proposição 1.2.23. Seja X um espaço de Hausdorff. Se $\{X_t\}_{t \in \Lambda}$ é uma família de conjuntos compactos não vazios tal que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \Lambda$, $X_\alpha \subseteq X_\beta$ ou $X_\beta \subseteq X_\alpha$. Então $\bigcap_{t \in \Lambda} X_t$ é um compacto não vazio.

Demonstração. Basta provar que $\bigcap_{t \in \Lambda} X_t \neq \emptyset$. De fato, se $\bigcap_{t \in \Lambda} X_t = \emptyset$, então $\bigcup_{t \in \Lambda} X_t^c = X$. Fixando um X_a , e como ele é compacto, existem $t_1, \dots, t_k \in \Lambda$ tais que $X_a \subseteq \bigcup_{i=1}^k X_{t_i}^c$. Sem perda de generalidade, suponhamos que X_{t_1} seja o menor deles no sentido da inclusão. Logo $X_a \subseteq X_{t_1}^c$, mas isso contradiz o fato que $X_a \subseteq X_{t_1}$ ou $X_{t_1} \subseteq X_a$. Então $\bigcap_{t \in \Lambda} X_t \neq \emptyset$. $\square$

Proposição 1.2.24. Sejam X um espaço compacto, Y um espaço de Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Se f é contínua, então ela é fechada. Mais ainda, se f é contínua e bijetora, então f é um homeomorfismo.

Demonstração. Seja $A \subseteq X$ um conjunto fechado. Ele é compacto e, em consequência, $f(A)$ é compacto. Como Y é Hausdorff, $f(A)$ é fechado. Isto é, f é fechada. O resultado final é obtido a partir da Proposição 1.2.17. $\square$

Proposição 1.2.25. Sejam τ e τ' duas topologias sobre X tais (X, τ) é Hausdorff e $\tau \subseteq \tau'$. Se A é τ' -compacto, então as topologias relativas τ_A e τ'_A são iguais.

Demonstração. Basta provar que todo conjunto τ'_A -fechado é τ_A -fechado. Para isso, consideremos a função identidade $i : (A, \tau'_A) \rightarrow (A, \tau_A)$. O resultado é obtido em virtude da Proposição 1.2.24. $\square$

Definição 1.2.26. Seja $h : X \rightarrow Y$ uma função contínua entre espaços topológicos. Dizemos que h é uma **função perfeita** se ela é fechada, sobrejetora e, para cada $y \in Y$, $h^{-1}(y)$ é compacto.

Proposição 1.2.27. Seja $h : X \rightarrow Y$ uma função fechada entre espaços topológicos

- i) Para cada $D \subseteq Y$ e aberto $U \subseteq X$ com $h^{-1}(D) \subseteq U$, existe um aberto V de Y tal que $D \subseteq V$ e $h^{-1}(V) \subseteq U$.
- ii) Se h é perfeita, a pré-imagem de cada conjunto compacto é compacta.

Demonstração.

- i) Sejam $D \subseteq Y$ e U um aberto tais que $h^{-1}(D) \subseteq U$. Como $X \setminus U \subseteq h^{-1}(Y \setminus D)$, temos que $h(X \setminus U) \subseteq h(h^{-1}(Y \setminus D)) \subseteq Y \setminus D$. Logo, fazendo $V = Y \setminus h(X \setminus U)$, obtemos que $D \subseteq V$ e $h^{-1}(V) \subseteq U$.

- ii) Sejam $A \subseteq Y$ compacto e $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma cobertura aberta de $h^{-1}(A)$. Dado $y \in A$, como h é perfeita, vale que $h^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_y} A_\alpha$, onde $J_y \subseteq L$ é finito. Pelo item anterior, existe um aberto V_y tal que $\{y\} \subseteq V_y$ e $h^{-1}(V_y) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_y} A_\alpha$. Logo, pela compacidade de A , existem $y_1, \dots, y_m \in A$ tais que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^m V_{y_k}$. Em consequência $h^{-1}(A) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$, onde $J = \bigcup_{k=1}^m J_{y_k}$ é finito.

□

Definição 1.2.28. Um **conjunto** G_δ é uma interseção enumerável de conjuntos abertos e um **conjunto** F_σ é uma união enumerável de conjuntos fechados.

Do mesmo jeito, um **ponto** G_δ é aquele que como conjunto unitário é um conjunto G_δ .

Exemplo 1.2.29. Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$ uma topologia nele. O conjunto $\{a, b\}$ é um aberto e, em consequência, é um conjunto G_δ . Mas $a \in X$ não é um ponto G_δ .

Definição 1.2.30. Um espaço topológico (X, τ) é **metrizável** se existe uma métrica d tal que τ seja induzida por d . Mais ainda, se (X, d) é completo, então dizemos que (X, τ) é **completamente metrizável**.

Proposição 1.2.31. Cada ponto de um conjunto G_δ metrizável é um ponto G_δ .

Demonstração. Sejam (X, τ) um espaço topológico e A um conjunto G_δ metrizável. Existe uma sequência de conjuntos abertos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Seja d uma métrica que induz a topologia τ_A . Se $x \in A$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $E_n \in \tau$ tal que $B(x, \frac{1}{n+1}) = A \cap E_n$. Logo $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap E_n$. Ou seja, x é um ponto G_δ . □

Proposição 1.2.32. Seja $g : X \rightarrow Y$ uma função contínua, sobrejetora e aberta entre espaços regulares. Se X possui um subespaço D denso completamente metrizável, então D possui um subespaço Ω completamente metrizável tal que $g : \Omega \rightarrow g(\Omega)$ é um homeomorfismo e, mais ainda, $g(\Omega)$ é um subconjunto G_δ denso em Y .

Em consequência, cada espaço regular Z que contenha Y , tal que Y seja denso em Z , contém um subespaço G_δ denso completamente metrizável.

Demonstração. Uma prova desta proposição pode ser encontrada em [FABIAN](#) (Proposição 2.1.4 da Seção 1 do Capítulo 2, página 39). □

Definição 1.2.33. Seja (X, τ) um espaço topológico. Se cada $x \in X$ possui uma base local enumerável, então X será chamado de **primeiro-contável**. Um espaço é **segundo-contável** se possui uma base enumerável.

Definição 1.2.34. Um **espaço de Lindelöf** é um espaço topológico no qual toda cobertura aberta dele possui uma subcobertura enumerável. Um **espaço hereditariamente de Lindelöf** é aquele onde cada subespaço é de Lindelöf.

Teorema 1.2.35. Se X é segundo-contável, então X é de Lindelöf e separável ¹.

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ uma base da topologia de X . Para cada $n \in \mathbb{N}$ selecionamos $a_n \in B_n$ e seja $D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se V é um aberto não vazio, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subseteq V$. Ou seja, $a_m \in V \cap D$. Então X é separável.

Por último, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X . Para cada $x \in X$, existem $U_x \in \mathcal{U}$ e $B_x \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_x$ e $B_x \subseteq U_x$. Dado que $\mathcal{B}$ é uma base enumerável, existe $A \subseteq X$ enumerável tal que $\{B_x \mid x \in X\} = \{B_a \mid a \in A\}$ e, em consequência, $\{U_x\}_{x \in A}$ é uma subcobertura enumerável de X . Portanto, X é de Lindelöf. $\square$

Corolário 1.2.36. Num espaço métrico X são equivalentes

- a) X é segundo-contável.
- b) X é de Lindelöf.
- c) X é separável.

Demonstração. Primeiro provaremos que (c) implica (a). Se X é separável, existe $D \subseteq X$ enumerável e denso. Seja $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in D \text{ e } r \in \mathbb{Q}\}$ uma família enumerável de abertos, vejamos que é uma base. Sejam $z \in X$ e W um aberto tais que $z \in W$. Existe $t > 0$ tal que $B(z, t) \subseteq W$. Logo existem $x_0 \in D$ e um racional $r_0 \in (d(x_0, z), \frac{t}{3})$ tais que $x_0 \in B(z, \frac{t}{3}) \cap D$ e $B(x_0, r_0) \subseteq B(z, t)$. Ou seja, $z \in B(x_0, r_0) \subseteq W$. Então X possui uma base enumerável.

Finalmente, pelo teorema anterior, só basta provar que (b) implica (a). Se X é de Lindelöf, fixemos $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ e consideremos $X = \bigcup_{x \in X} B(x, r)$. Logo existe $A_r \subseteq X$ enumerável tal que $X = \bigcup_{x \in A_r} B(x, r)$. Definamos uma família enumerável de abertos $\mathcal{F} = \{B(x, r) \mid x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q \text{ e } r \in \mathbb{Q}\}$. Sejam $x \in X$ e U um aberto tais que $x \in U$. Existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$. Tomemos um racional $q \in (0, \frac{r}{2})$, logo existe $a \in A_q$ tal que $x \in B(a, q)$ e, ademais, $B(a, q) \subseteq B(x, r) \subseteq U$. Isto é, $\mathcal{F}$ é uma base enumerável. $\square$

Proposição 1.2.37. Seja X um espaço topológico. Se cada subespaço aberto é de Lindelöf, então X é hereditariamente de Lindelöf.

Demonstração. Sejam A um subconjunto de X e $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de A . Se $V = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$, existe $M \subseteq L$ enumerável tal que $A \subseteq V = \bigcup_{\lambda \in M} U_\lambda$. Assim, A é um espaço de Lindelöf. $\square$

Proposição 1.2.38. Sejam Y um espaço topológico Hausdorff, X um conjunto não vazio e $\mathcal{F} \subseteq Y^X$. Para que $\mathcal{F}$ seja τ_p -compacto é necessário e suficiente que $\mathcal{F}$ seja τ_p -fechado e que, para cada $x \in X$, o conjunto $\pi_x(\mathcal{F}) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ seja compacto.

¹ Um espaço topológico é **separável** se possui um subconjunto denso enumerável.

Demonstração. Se $\mathcal{F}$ é τ_p -compacto, então $\mathcal{F}$ é τ_p -fechado, pois Y^X é de Hausdorff e $\pi_x(\mathcal{F})$ é compacto para qualquer $x \in X$. Reciprocamente, definimos $\mathcal{G} = \prod_{x \in X} \pi_x(\mathcal{F})$, o que é τ_p -compacto. Dado que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ é τ_p -fechado, obtemos que $\mathcal{F}$ é τ_p -compacto. $\square$

Proposição 1.2.39. Seja A um subespaço aberto-fechado de $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$. Se A é homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, então toda função contínua injetora $f: A \rightarrow [0, 1]$ possui uma extensão $F: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ contínua injetora.

Demonstração. Seja $f: A \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua injetora. Temos que A é compacto e, devido à Proposição 1.2.24, é homeomorfo a $f(A)$. Ademais, como $[0, 1]$ e $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ não são homeomorfos, f não é sobrejetora.

Se $(0, 1) \setminus f(A) = \emptyset$, então $(0, 1) \subseteq f(A)$. Logo $[0, 1] \subseteq \overline{f(A)} = f(A)$. Ou seja, $[0, 1] = f(A)$, o que é absurdo. Então $(0, 1) \setminus f(A) \neq \emptyset$. Por consequência, $(0, 1) \setminus f(A)$ contém um intervalo fechado da forma $I = [a, b]$ com $a < b$. Existe um homeomorfismo $h: [0, 1] \rightarrow [a, b]$. Logo $D = h(f(A))$ é homeomorfo a $f(A)$ e, por consequência, também é homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Por tal motivo, existe um homeomorfismo $g: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow D$. Definamos $F: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A. \\ g(x), & \text{se } x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus A. \end{cases}$$

Pela Proposição 1.2.14 obtemos que F é contínua. Além disso, F é injetora e estende f . $\square$

1.3 Categoria de Baire

Nesta seção estudamos os conjuntos de primeira e segunda categoria de Baire, os espaços de Baire e suas propriedades. Para uma leitura mais profunda e completa, o leitor pode consultar a referência [MUNKRES](#).

Definição 1.3.1. Um conjunto **raro** de um espaço topológico é aquele cujo interior do seu fecho é vazio. Se um subconjunto de um espaço topológico é uma reunião enumerável de conjuntos raros, então é chamado de **primeira categoria** ou **magro**, caso contrário, será chamado de **segunda categoria** ou **não magro**. Um conjunto **residual** é o complementar de um conjunto de primeira categoria.

Exemplo 1.3.2.

- Se F é um conjunto fechado, então $F \setminus \text{int}(F)$ é raro.
- $\mathbb{Q}$ é um conjunto magro, mas não é raro. Então $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é residual.

A seguinte proposição reúne algumas propriedades básicas dos conjuntos magros e não magros.

Proposição 1.3.3. Em todo espaço topológico vale o seguinte

- a) Um conjunto é raro se, e só se, o interior do seu complementar é denso.
- b) Todo subconjunto de um conjunto magro é magro.
- c) União enumerável de conjuntos magros é magro.
- d) Todo conjunto que contenha um conjunto de segunda categoria também é de segunda categoria.
- e) Um conjunto é residual se, e somente se, existe uma sequência de conjuntos abertos e densos tal que a interseção deles esteja contida nele.

Demonstração. Seja X um espaço topológico, notemos que todo subconjunto de um conjunto raro é raro.

- a) Bastar usar o fato que $X \setminus \text{int}(S) = \overline{X \setminus S}$, para qualquer $S \subseteq X$.
- b) Sejam E um conjunto magro e F um subconjunto dele. Existe uma sequência de conjuntos raros $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Logo $E_n \cap F$ é raro, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \cap F$ é magro.
- c) Se $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos magros, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência de conjuntos raros $(R_m^n)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $T_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} R_m^n$. Logo $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} R_m^n$ é magro.
- d) Sejam M um conjunto de segunda categoria e N um conjunto que contém o M . Se N fosse magro, então pelo item (b), M seria magro, o que é falso. Logo N é de segunda categoria.
- e) Se R é residual, então existe uma sequência de conjuntos raros $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $R^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Logo $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c$, onde $\text{int}(E_n^c)$ é denso, para cada $n \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, suponhamos que existe uma sequência de conjuntos abertos e densos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq R$. Então $R^c \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$, onde cada A_n^c é raro e, em consequência, R^c é magro. Isto é, R é residual.

□

Proposição 1.3.4. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Logo A é raro se, e só se, para cada aberto não vazio U , existe um aberto não vazio V tal que $V \subseteq U$ e $V \cap A = \emptyset$.

Demonstração. Seja U um aberto não vazio e definamos $V = U \cap \overline{A}^c$. Logo V é um aberto não vazio, pois A é raro, tal que $V \subseteq U$ e $V \cap A = \emptyset$.

Reciprocamente, se $\text{int}(\overline{A}) \neq \emptyset$, então, por hipóteses, existe um aberto não vazio T tal que $T \subseteq \text{int}(\overline{A})$ e $T \cap A = \emptyset$, mas isso contradiz o fato que $T \subseteq \overline{A}$. Portanto, A é raro. □

Proposição 1.3.5. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Se $E \subseteq A$ é magro em A , então E é magro em X .

Demonstração. Primeiramente provaremos o resultado para o caso particular que E seja raro em A . Se E não é raro em X , existe um aberto não vazio V tal que $V \subseteq \overline{E}$. Logo $V \cap A \subseteq \overline{E}^A$, o que é absurdo. Então E é raro em X . Para o caso geral, seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos raros de A tal que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Pelo fato anterior, cada E_n é raro em X . Portanto, E é magro em X . $\square$

Proposição 1.3.6. Seja A um subconjunto aberto ou denso de um espaço topológico X . Para qualquer $E \subseteq A$, E é magro em A se, e só se, E é magro em X .

Demonstração. Pela Proposição 1.3.5, basta provar a recíproca. Seja E um subconjunto de A . Primeiramente provaremos o resultado no caso que A seja aberto. Suponhamos que E é raro em X . Dado um aberto não vazio U de A , em virtude da Proposição 1.3.4, existe um aberto não vazio V de X tal que $V \subseteq U$ e $V \cap E = \emptyset$. Então E é raro em A .

Caso que E seja magro em X , existe $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos raros em X tal que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Pelo parágrafo anterior, temos que cada $E_n \cap A$ é raro em A . Portanto, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \cap A$ é magro em A .

Agora provaremos o resultado no caso que A seja denso. Suponhamos que E é raro em X . Dado um aberto não vazio U de A , existe um aberto W de X tal que $U = W \cap A$. Analogamente, devido à Proposição 1.3.4, existe um aberto não vazio V' de X tal que $V' \subseteq W$ e $V' \cap E = \emptyset$. Logo $\emptyset \neq V' \cap A \subseteq U$ e $(V' \cap A) \cap E = \emptyset$. Então E é raro em A .

Por último, caso que E seja magro em X , existe $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos raros em X tal que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Pelo parágrafo anterior, temos que cada $E_n \cap A$ é raro em A . Logo $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \cap A$ é magro em A . $\square$

Proposição 1.3.7. Sejam X um espaço topológico e $E \subseteq B$ dois abertos. Se A é residual em B , então $A \cap E$ é residual em E .

Demonstração. Sabemos que $B \setminus A$ é magro em B e, em consequência, magro em X . Logo $E \setminus A$ é magro em X e, assim, também é magro em E . Ou seja, $E \cap A$ é residual em E . $\square$

Proposição 1.3.8. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq B$ dois subconjuntos dele. Se B é residual em X e A é residual em B , então A é residual em X .

Demonstração. Sabemos que $B \setminus A$ é magro em B e, em consequência, também magro em X . Então $A^c = (B \setminus A) \cup (A^c \cap B^c)$ é magro em X . $\square$

Proposição 1.3.9. Sejam $h: X \rightarrow Y$ um homeomorfismo entre espaços topológicos e $A \subseteq X$. Logo A é magro se, e só se, $h(A)$ é magro.

Demonstração. Basta provar tal equivalência para o caso dos conjuntos raros. De fato, suponhamos que A é raro. Se $\text{int}(\overline{h(A)}) = \text{int}(h(\overline{A})) \neq \emptyset$, então $\emptyset \neq h^{-1}(\text{int}(h(\overline{A}))) \subseteq \overline{A}$, o qual não pode acontecer. Assim, $h(A)$ é raro. Reciprocamente, suponhamos que $h(A)$ é raro. Se $\text{int}(\overline{A}) \neq \emptyset$, então $\emptyset \neq h(\text{int}(\overline{A})) \subseteq h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$, obtendo novamente uma contradição. Então A é raro. $\square$

Definição 1.3.10. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Dizemos que A **possui a propriedade de Baire** em X se existe um aberto $U \subseteq X$ tal que $A \triangle U$ é magro.

Exemplo 1.3.11. Os conjuntos magros e os conjuntos abertos possuem a propriedade de Baire.

Teorema 1.3.12. A família dos conjuntos que possuem a propriedade de Baire é a menor σ -álgebra que contém a topologia e os conjuntos magros.

Demonstração. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{F} = \{E \subseteq X \mid E \text{ possui a propriedade de Baire em } X\}$. Note que $\mathcal{F}$ contém os conjuntos abertos e os conjuntos magros de X .

Se $E \in \mathcal{F}$, existe um aberto $U \subseteq X$ tal que $E \triangle U$ é magro. Considerando $V = \text{int}(U^c)$, temos que $E^c \triangle V^c \subseteq (E \triangle U) \cup (U^c \setminus \text{int}(U^c))$ é magro. Então $E^c \in \mathcal{F}$.

Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{F}$. Existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, um aberto $U_n \subseteq X$ tal que $A_n \triangle U_n$ é magro. Logo $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\right) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \triangle U_n)$ é magro. Ou seja, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Seja $\mathcal{M}$ uma σ -álgebra que contém a topologia e os conjuntos magros. Dado $P \in \mathcal{F}$, existe um aberto $W \subseteq X$ tal que $P \triangle W$ é magro. Logo $P = [(P \triangle W) \cup W] \setminus (W \setminus P) \in \mathcal{M}$. Portanto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$. $\square$

Definição 1.3.13. Um **espaço de Baire** é um espaço topológico onde para qualquer sequência de conjuntos abertos densos, a interseção deles é densa.

Proposição 1.3.14. Seja X um espaço topológico, são equivalentes

- a) X é um espaço de Baire.
- b) Todo aberto não vazio de X é de segunda categoria.

Demonstração. Uma prova desta proposição pode ser encontrada em [MUNKRES](#) (Lema 48.1 da Seção 48 do Capítulo 8, página 296) $\square$

Proposição 1.3.15. Sejam X um espaço de Baire e $A, B \subseteq X$. Se A e B são residuais, então $A \cap B \neq \emptyset$.

Demonstração. Suponhamos que $A \cap B = \emptyset$. Logo $X = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ é magro, mas isso contradiz o fato que X seja de Baire. Portanto, $A \cap B \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 1.3.16. Sejam (X, τ) um espaço topológico e A um subconjunto dele. Se A é de segunda categoria, então existe um aberto não vazio U tal que $A \setminus U$ é magro e $A \cap U$ é de segunda

categoria, para qualquer aberto não vazio $V \subseteq U$. Mais ainda, se X é de Baire, então $A \cap U$ é de Baire.

Demonstração. Sejam $\mathcal{W} = \{W \in \tau \mid A \cap W \text{ é magro}\}$ e $\mathcal{G} = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{W} \mid \text{se } U_1, U_2 \in \mathcal{F} \text{ são diferentes, então } U_1 \cap U_2 = \emptyset\}$. Não é difícil ver que $(\mathcal{G}, \subseteq)$ é parcialmente ordenado e que toda cadeia é limitada superiormente. Em virtude do Lema de Zorn, sejam $\{W_y \mid y \in \Gamma\}$ o elemento de maximal de $\mathcal{G}$ e $\Omega_0 = \bigcup_{y \in \Gamma} W_y$. Mostraremos que $\Omega_0 \in \mathcal{W}$.

Para cada $y \in \Gamma$, existe uma $(N_n^y)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de conjuntos raros tal que $A \cap W_y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n^y$. Provaremos que o conjunto $M_n = \bigcup_{y \in \Gamma} N_n^y$ é raro, para todo $n \in \mathbb{N}$, por meio da Proposição 1.3.4. Dado $I \in \tau$ tal que $I \cap M_n \neq \emptyset$, existe $y_0 \in \Gamma$ tal que $I \cap N_{n_0}^{y_0} \neq \emptyset$. Logo existe um aberto não vazio O tal que $O \subseteq I \cap W_{y_0}$ e $O \cap N_{n_0}^{y_0} = \emptyset$. Como $(I \cap W_{y_0}) \setminus N_{n_0}^{y_0} \subseteq I \setminus M_n$, temos que $O \subseteq I \setminus M_n$. Ou seja, M_n é raro. Logo $A \cap \Omega_0 = \bigcup_{y \in \Gamma} A \cap W_y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ é magro.

Sejam $\Omega = \bigcup_{P \in \mathcal{W}} P$ e $U = \overline{\Omega}^c$. Se existe $G \in \tau$ não vazio tal que $G \subseteq \overline{\Omega \setminus \Omega_0}$, então $G \cap \Omega \neq \emptyset$ e $G \subseteq \Omega_0^c$. Existe $W_0 \in \mathcal{W}$ tal que $G \cap W_0 \neq \emptyset$. Logo $G \cap W_0 \in \mathcal{W}$ e $(G \cap W_0) \cap \Omega_0 = \emptyset$, mas isso contradiz a maximalidade de $\{W_y \mid y \in \Gamma\}$. Então $\text{int}(\overline{\Omega \setminus \Omega_0}) = \emptyset$. Ou seja, $\Omega \setminus \Omega_0$ é raro. Em consequência, $A \cap \Omega \subseteq (\Omega \setminus \Omega_0) \cup (A \cap \Omega_0)$ é magro.

Portanto $A \setminus U = A \cap \overline{\Omega} \subseteq (A \cap \Omega) \cup (\overline{\Omega \setminus \Omega_0})$ é magro. Note que U é não vazio e $V \cap A$ é de segunda categoria, para qualquer aberto não vazio $V \subseteq U$.

Por outro lado, vejamos que $U \subseteq \overline{A \cap U}$. De fato, seja $x \in U$. Dado $R \in \tau$ tal que $x \in R$, temos que $R \cap (A \cap U) = A \cap (R \cap U) \neq \emptyset$ pois ele é de segunda categoria pelo parágrafo anterior. Assim, $x \in \overline{A \cap U}$.

No caso que X seja de Baire, mostraremos que $A \cap U$ é de Baire. Seja $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos abertos densos de $A \cap U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um aberto $H_n \subseteq U$ tal que $G_n = A \cap H_n$. Ademais $U \subseteq \overline{A \cap U} \subseteq \overline{G_n} \subseteq \overline{H_n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Logo $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$ é residual em U pois U é de Baire. Ou seja, $U \setminus M$ é magro.

Afirmamos que $A \cap U \subseteq \overline{A \cap M}$. Seja $x \in A \cap U$ e seja $T \in \tau$ tal que $x \in T$. Se $T \cap (A \cap M) = \emptyset$, então $(A \cap M) \cap (T \cap U) = \emptyset$. Logo $A \cap (T \cap U) \subseteq (T \cap U) \setminus M \subseteq U \setminus M$ é magro, mas isso não pode acontecer pois $T \cap U \subseteq U$. Então $T \cap (A \cap M) \neq \emptyset$. Ou seja, $x \in \overline{A \cap M}$. Portanto, $A \cap U \subseteq \overline{A \cap M} = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n}$.

Ou seja, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ é denso em $A \cap U$. Isto é, $A \cap U$ é de Baire. $\square$

Teorema 1.3.17. Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.

Demonstração. Seja X um espaço métrico completo e seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos abertos densos dele. Se U é um aberto não vazio, existem $a_0 \in U \cap A_0$ e $r_0 > 0$ tais que $\overline{B(a_0, r_0)} \subseteq U \cap A_0$. Analogamente, pela densidade de A_1 , existe $a_1 \in B(a_0, \frac{r_0}{2}) \cap A_1$. Logo existe $r_1 > 0$ tal que $\overline{B(a_1, r_1)} \subseteq B(a_0, \frac{r_0}{2}) \cap A_1$, onde $r_1 \leq \frac{r_0}{2}$ pois $\text{diam}(B(a_1, r_1)) \leq \text{diam}(B(a_0, \frac{r_0}{2}))$. Suponhamos que temos $a_n \in B(a_{n-1}, \frac{r_{n-1}}{2}) \cap A_n$ e $r_{n-1} \leq \frac{r_0}{2^{n-1}}$ tais que $\overline{B(a_n, r_n)} \subseteq B(a_{n-1}, \frac{r_{n-1}}{2}) \cap A_n$. Do mesmo jeito, existem $a_{n+1} \in B(a_n, \frac{r_n}{2}) \cap A_{n+1}$ e $r_{n+1} > 0$ tais que

$\overline{B(a_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq \overline{B(a_n, \frac{r_n}{2})} \cap A_{n+1} \subseteq U \cap A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}$ e $r_{n+1} \leq \frac{r_0}{2^{n+1}}$. Assim obtemos uma sequência decrescente de fechados $(\overline{B(a_n, r_n)})_{n \in \mathbb{N}}$, no sentido da inclusão, tais que seus diâmetros convergem a zero. Em consequência, existe $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B(a_n, r_n)} \subseteq U \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Portanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é denso. $\square$

Proposição 1.3.18. Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma cobertura fechada dele. Se $U_n = \text{int}(M_n)$, então $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ é denso.

Demonstração. Devido ao Teorema 1.3.17 temos que M é um espaço de Baire e, em consequência, U é não vazio. Dado A um aberto não vazio de M , existe um aberto não vazio V tal que $\overline{V} \subseteq A$. Como $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \cap V$ é de segunda categoria, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\emptyset \neq \text{int}(\overline{M_{n_0} \cap V}) \subseteq \text{int}(M_{n_0} \cap \overline{V}) = U_{n_0} \cap \text{int}(\overline{V})$. Concluimos que $A \cap U \neq \emptyset$. $\square$

Definição 1.3.19. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Se para cada aberto não vazio U temos que $A \cap U$ é de segunda categoria, então A é chamado de **segunda categoria em toda parte**.

Observação 1.3.20. É claro que todo conjunto de segunda categoria em toda parte é, em particular, de segunda categoria e denso.

Proposição 1.3.21. Em um espaço de Baire, todo conjunto residual é de segunda categoria em toda parte.

Demonstração. Sejam X um espaço de Baire e $R \subseteq X$ um conjunto residual. Dado um aberto não vazio U , temos que $U \setminus R$ é magro por estar contido em $X \setminus R$. Suponhamos que $R \cap U$ é magro, logo U também é magro mas isso não pode acontecer devido à Proposição 1.3.14. Então $R \cap U$ é de segunda categoria. $\square$

1.4 Usco e usco minimal

Nesta seção estudamos as funções multi-avaliadas semicontínuas superiores e suas propriedades. A menos de menção contrária, vamos supor que os espaços topológicos são Hausdorff. Para uma leitura mais profunda e completa, o leitor pode consultar a referência [HOLA; HOLY](#).

Definição 1.4.1. Uma **função multi-avaliada** F entre X e Y é uma função $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$. Isto é, para cada $x \in X$, $F(x)$ é um subconjunto de Y . Dados $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ não vazios, $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$ é a **imagem de A** e $F^{-1}(B) = \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \emptyset\}$ é a **pré-imagem de B** . O **gráfico de F** é definido como $\text{Graf}(F) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$.

Definição 1.4.2. Seja $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ uma função multi-avaliada. Dizemos que F é **um-avaliada** num subconjunto E de X se, para cada $x \in E$, $F(x)$ é um conjunto unitário.

Uma função $h : X \rightarrow Y$ é uma **seleção de F** se $h(x) \in F(x)$, para todo $x \in X$.

Definição 1.4.3. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ é **usco (upper semicontinuous and compact valued)** se, para cada $x \in X$, $\varphi(x)$ é um conjunto compacto não vazio e, para cada aberto W de Y , temos que $\{x \in X \mid \varphi(x) \subseteq W\}$ é um aberto de X . Além disso, se o gráfico do φ não contém propriamente o gráfico de qualquer outro usco definido em X , então φ é chamada de **usco minimal**.

Exemplo 1.4.4. Definamos $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ como $F(x) = \left\{ \frac{|x|}{x} \right\}$, se $x \neq 0$, e $F(0) = \{-1, 1\}$. É claro que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ é compacto e não vazio. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}$ um aberto e $z \in A = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \subseteq U\}$. Se $z > 0$, existe $r > 0$ tal que $(z-r, z+r) \subseteq (0, \infty)$. Logo, para qualquer $w \in (z-r, z+r)$ temos que $F(w) = \{1\} \subseteq U$. Analogamente para o caso $z < 0$. Agora, se $z = 0$, qualquer $t > 0$ satisfaz que $(-t, t) \subseteq A$. Assim, A é aberto. Ou seja, F é usco.

Suponhamos que exista $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ usco tal que $\text{Graf}(G) \subsetneq \text{Graf}(F)$. Então $G(x) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim, $G(0) \subsetneq F(0)$. No caso $G(x_0) = \{1\}$, existe $r > 0$ tal que $(-r, r) \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid G(x) \subseteq (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\}$. Logo $G(-\frac{r}{2}) = -1 \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, o que é absurdo. Analogamente obtemos uma contradição no caso $G(0) = \{-1\}$. Portanto, F é usco minimal.

Observação 1.4.5. Dados $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ usco e $A \subseteq X$, tem-se que $\varphi|_A : A \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ é usco.

Lema 1.4.6. Seja $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ usco. São equivalentes

- a) F é usco minimal.
- b) Para quaisquer aberto G de X e fechado K de Y tais que $F(x) \cap K \neq \emptyset$, para todo $x \in G$, temos que $F(G) \subseteq K$.
- c) Dados dois abertos $U \subseteq X$ e $W \subseteq Y$ tais que $F(U) \cap W \neq \emptyset$, existe um aberto não vazio $V \subseteq U$ tal que $F(V) \subseteq W$.
- d) Para toda função contínua $g : Y \rightarrow Z$ temos que $g \circ F : X \rightarrow \mathcal{P}(Z)$, definida por $(g \circ F)(x) = \{g(y) \mid y \in F(x)\}$, é usco minimal.

Demonstração. Primeiro vejamos que (a) implica (b). De fato, sejam $G \subseteq X$ um aberto e $K \subseteq Y$ um fechado tais que $F(x) \cap K \neq \emptyset$ para todo $x \in G$. Definimos $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ como $\varphi(x) = F(x) \cap K$, se $x \in G$, e $\varphi(x) = F(x)$ se $x \in X \setminus G$. Não é difícil ver que φ é usco e $\text{Graf}(\varphi) \subseteq \text{Graf}(F)$. Como F é usco minimal, $\text{Graf}(\varphi) = \text{Graf}(F)$. Logo, se $x \in G$, então $F(x) = F(x) \cap K \subseteq K$. Ou seja, $F(G) \subseteq K$.

Agora provaremos (c) a partir de (b). Dados dois abertos $U \subseteq X$ e $W \subseteq Y$ tais que $F(U) \cap W \neq \emptyset$. Suponhamos que $F(x) \cap Y \setminus W \neq \emptyset$, para todo $x \in U$. Pelo item (b), temos que $F(U) \subseteq Y \setminus W$, o que é falso. Logo, existe $x_0 \in U$ tal que $F(x_0) \subseteq W$. Então o conjunto $V = \{x \in X \mid F(x) \subseteq W\} \cap U$

é um aberto não vazio que satisfaz $F(V) \subseteq W$.

Em seguida veremos que (c) implica (d). Dada uma função contínua $g : Y \rightarrow Z$, é claro que $g \circ F : X \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ éusco. Seja $H : X \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ usco tal que $\text{Graf}(H) \subseteq \text{Graf}(g \circ F)$. Suponhamos que $\text{Graf}(H) \subsetneq \text{Graf}(g \circ F)$, logo existe $x_0 \in X$ tal que $H(x_0) \subsetneq (g \circ F)(x_0)$. Devido à Proposição 1.2.22, existe um aberto $U \subseteq Z$ tal que $H(x_0) \cap \overline{U} = \emptyset$ e $(g \circ F)(x_0) \cap U \neq \emptyset$. Existe um aberto $V \subseteq X$ tal que $x_0 \in V$ e $V \subseteq \{x \in X \mid H(x) \subseteq Z \setminus \overline{U}\}$. Como $F(V) \cap g^{-1}(U) \neq \emptyset$, existe um aberto não vazio $W \subseteq V$ tal que $F(W) \subseteq g^{-1}(U)$. Então $(g \circ F)(W) \subseteq U$ e, em consequência, $H(W) \subseteq U$ mas $H(W) \cap \overline{U} = \emptyset$, obtendo assim uma contradição. Portanto, $\text{Graf}(H) = \text{Graf}(g \circ F)$. Isto é, $g \circ F$ éusco minimal.

Finalmente, basta usar a função identidade $i : Y \rightarrow Y$ para ver que (d) implica (a). $\square$

Proposição 1.4.7. Dado $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ usco, existe $\phi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ usco minimal tal que $\phi(x) \subseteq F(x)$, para todo $x \in X$.

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{G \mid G : X \rightarrow \mathcal{P}(Y) \text{ éusco e } \text{Graf}(G) \subseteq \text{Graf}(F)\}$. Dados $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$, dizemos que $H_1 \leq H_2$ se $\text{Graf}(H_2) \subseteq \text{Graf}(H_1)$. Em virtude do Lema de Zorn, basta provar que cada cadeia possui cota superior.

Dada uma cadeia $\mathcal{C}$, definamos $F_0 : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ por $F_0(x) = \bigcap_{G \in \mathcal{C}} G(x)$ para cada $x \in X$. Mostraremos que F_0 é uma cota superior de $\mathcal{C}$.

Em virtude da Proposição 1.2.23, sabemos que cada $F_0(x)$ é um compacto não vazio. Sejam $U \subseteq Y$ um aberto e $z \in X$ tais que $F_0(z) \subseteq U$. Se $G(z) \setminus U$ é não vazio, para cada $G \in \mathcal{C}$, então aplicando novamente a Proposição 1.2.23 obtemos que $F_0(z) \setminus U = \bigcap_{G \in \mathcal{C}} G(z) \setminus U$ é não vazio, o que é absurdo. Então existe $H \in \mathcal{C}$ tal que $H(z) \setminus U = \emptyset$. Logo $F_0(z) \subseteq H(z) \subseteq U$. Ou seja, considerando o aberto $V = \{x \in X \mid H(x) \subseteq U\}$, temos que $z \in V \subseteq \{x \in X \mid F_0(x) \subseteq U\}$. Isto é, F_0 éusco e, claramente, é uma cota superior de $\mathcal{C}$. $\square$

Proposição 1.4.8. Seja $\phi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ usco minimal. Se A é um subconjunto denso ou aberto de X , então $\phi|_A : A \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ éusco minimal.

Demonstração. Sabemos que $\psi = \phi|_A$ éusco. Sejam U um aberto de A e W um aberto de Y tais que $\psi(U) \cap W \neq \emptyset$. No caso que A seja aberto, ψ éusco minimal a partir do item (c) do Lema 1.4.6. No caso que A seja denso, existe um aberto V de X tal que $U = V \cap A$. Pelo item (c) do Lema 1.4.6, existe um aberto não vazio $\Omega \subseteq V$ tal que $\phi(\Omega) \subseteq W$. Logo $\Omega \cap A$ é um aberto não vazio tal que $\Omega \cap A \subseteq U$ e $\psi(\Omega \cap A) \subseteq W$. Então ψ éusco minimal. $\square$

Proposição 1.4.9. Se $\phi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ éusco minimal, então ϕ é um-avaliada no conjunto dos pontos isolados de X .

Demonstração. Sejam $a \in X$ um ponto isolado e $z \in \phi(a)$. Como Y é Hausdorff, temos que $\{z\} \subseteq \phi(a)$ é fechado. Em virtude do item (b) do Lema 1.4.6, temos que $\phi(a) \subseteq \{z\}$. Ou seja, $\phi(a) = \{z\}$. Assim, ϕ é um-avaliada em cada ponto isolado de X . $\square$

Definição 1.4.10. Sejam X um espaço topológico e ρ uma pseudo-métrica definida nele. Dizemos que X é **fragmentado por ρ** se, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $A \subseteq X$ não vazio, existe um aberto U tal que $A \cap U \neq \emptyset$ e $\rho - \text{diam}(A \cap U) < \varepsilon$.

Observação 1.4.11. Seja ρ uma pseudo-métrica definida num espaço topológico (X, τ) . Se toda ρ -bola aberta é τ -aberta, então X é fragmentado por ρ .

Proposição 1.4.12. Seja $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ usco minimal. Se Y é fragmentado por uma pseudo-métrica ρ , então existe um subconjunto residual R em X tal que $\rho - \text{diam}(\varphi(x)) = 0$, para todo $x \in R$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definimos o conjunto $A_n = \{x \in X \mid \text{existe um aberto } U, \text{ com } x \in U, \text{ tal que } \rho - \text{diam}(\varphi(U)) < \frac{1}{n}\}$. Não é difícil ver que cada A_n é um aberto. Vamos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}_{>0}$, A_n é denso. De fato, seja W um aberto não vazio de X , como Y é fragmentado por ρ , existe um aberto Ω de Y tal que $\varphi(W) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $\rho - \text{diam}(\varphi(W) \cap \Omega) < \frac{1}{n}$. Pelo item (c) do Lema 1.4.6, existe um aberto não vazio V tal que $V \subseteq W$ e $\varphi(V) \subseteq \Omega$. Assim, $\emptyset \neq V \subseteq W \cap A_n$. Agora só basta tomar $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, o que é residual, e que satisfaz a propriedade desejada. $\square$

Observação 1.4.13. Na proposição anterior, no caso que ρ seja uma métrica, φ é um-avaliada em R .

Teorema 1.4.14. Sejam B um espaço de Baire e $\varphi : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$ usco minimal.

- a) A família $\mathcal{R} = \{E \subseteq X \mid \text{existe } G, \text{ um subconjunto } G_\delta \text{ denso de } B, \text{ tal que } \varphi(x) \subseteq E \text{ ou } \varphi(x) \subseteq E^c \text{ para todo } x \in G\}$ é uma σ -álgebra que contém os Borelianos de X ². Além disso, para cada $T \in \mathcal{R}$, o conjunto $\varphi^{-1}(T) \setminus \{x \in B \mid \varphi(x) \subseteq T\}$ é magro.
- b) A família $\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{R} \mid \varphi^{-1}(E) \text{ possui a propriedade de Baire}\}$ é uma σ -álgebra que contém os Borelianos de X .

Demonstração.

- a) Note que $\mathcal{R}$ é fechado por complementos. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe G_n , um conjunto G_δ denso de B , tal que $\varphi(x) \subseteq A_n$ ou $\varphi(x) \subseteq A_n^c$ para todo $x \in G_n$. Sejam $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ um conjunto G_δ denso de B e $x \in G$ tal que $\varphi(x) \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x) \not\subseteq A_m$, então $\varphi(x) \subseteq A_m^c$, mas isso não pode acontecer. Logo $\varphi(x) \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\varphi(x) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Isto é, $\varphi(x) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ou $\varphi(x) \subseteq \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c$ para todo $x \in G$. Então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$.

² A σ -álgebra de Borel é a menor σ -álgebra que contém a topologia. Seus elementos são chamados de **Borelianos**.

Se F é um fechado de X , definamos $G_F = \{x \in B \mid \varphi(x) \subseteq F^c\} \cup \text{int}(\varphi^{-1}(F))$. Não é difícil ver que G_F é aberto e denso. Pelo item (b) do Lema 1.4.6, temos que $\varphi(x) \subseteq F$ ou $\varphi(x) \subseteq F^c$ para todo $x \in G_F$. Logo $F \in \mathcal{R}$. Concluimos que $\mathcal{R}$ é uma σ -álgebra que contém os Borelianos de X .

Por último note que, dado $T \in \mathcal{R}$, o conjunto $\{x \in B \mid \varphi(x) \subseteq T \text{ ou } \varphi(x) \subseteq T^c\}$ é residual. Ou seja, $\varphi^{-1}(T) \cap \varphi^{-1}(T^c) = \varphi^{-1}(T) \setminus \{x \in B \mid \varphi(x) \subseteq T\}$ é magro.

- b) Note que $\mathcal{M}$ contém os conjuntos fechados de X . Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{M}$. Logo $\varphi^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{-1}(A_n)$ possui a propriedade de Baire. Isto é, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$. Dado $E \in \mathcal{M}$, temos que $\varphi^{-1}(E^c) = (\varphi^{-1}(E) \cap \varphi^{-1}(E^c)) \cup (B \setminus \varphi^{-1}(E))$ possui a propriedade de Baire devido ao Teorema 1.3.12. Ou seja, $E^c \in \mathcal{M}$. Portanto, $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra que contém os Borelianos de X .

□

Corolário 1.4.15. Sejam B um espaço de Baire e $\varphi : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$ usco minimal. Se K é um Boreliano de X e $\varphi^{-1}(K)$ é de segunda categoria, então existem um aberto não vazio $U \subseteq B$ e G , um subconjunto G_δ denso de U , tais que $\varphi(G) \subseteq K$.

Demonstração. Seja $K_B = \{x \in B \mid \varphi(x) \subseteq K\}$. Pelo Teorema 1.4.14, e seguindo a notação dele, sabemos que $K \in \mathcal{M}$ e $\varphi^{-1}(K) \setminus K_B$ é magro. Dado que $\varphi^{-1}(K)$ possui a propriedade de Baire, existe um aberto $U \subseteq B$ tal que $U \triangle \varphi^{-1}(K)$ é magro. Mais ainda, como $\varphi^{-1}(K)$ é de segunda categoria, U é não vazio e $U \cap \varphi^{-1}(K)$ é de segunda categoria. Em consequência, $U \cap K_B$ é residual em U . Logo existe G , um subconjunto G_δ denso de U , tal que $G \subseteq U \cap K_B$. Portanto $\varphi(G) \subseteq K$.

□

1.5 Análise funcional

Apresentamos alguns conceitos e resultados clássicos de análise funcional. Para uma leitura mais profunda e completa, o leitor pode consultar as referências [BREZIS](#) e [KREYSZIG](#).

Definição 1.5.1. Seja X um espaço vetorial real. Uma **norma** em X é uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz o seguinte

- Se $\|x\| = 0$, então $x = 0$.
- $\|ax\| = |a|\|x\|$, para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $x \in X$.
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in X$.

Nesse caso dizemos que X é um **espaço normado** e será denotado por $(X, \|\cdot\|)$.

Definição 1.5.2. Um espaço normado é dito **espaço de Banach** se é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Definição 1.5.3. Uma função linear $T : X \rightarrow Y$ entre espaços normados é dita **limitada** se existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

Proposição 1.5.4. Seja $T : X \rightarrow Y$ uma função linear entre espaços normados. São equivalentes

- a) T é limitada.
- b) T é contínua.
- c) T é contínua em algum ponto $x_0 \in X$.

Demonstração. Não é difícil ver que (a) implica (b) e (b) implica (c). Basta provar que (c) implica (a). Existe $\delta > 0$ tal que $\|T(w) - T(x_0)\| < 1$, para todo $w \in B(x_0, \delta)$. Dado $x \in X \setminus \{0\}$, sabemos que $x_0 + \frac{\delta x}{2\|x\|} \in B(x_0, \delta)$. Logo $\|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$. Portanto, T é limitada. $\square$

Definição 1.5.5. Sejam X, Y dois espaços normados. Denotamos por $\mathcal{B}(X, Y)$ o espaço vetorial formado pelas funções lineares limitadas de X a Y .

No caso particular $Y = \mathbb{R}$, dizemos que $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é o **espaço dual de X** e será denotado por X^* .

Em seguida veremos que $\mathcal{B}(X, Y)$ é um espaço normado, inclusive de Banach se Y for de Banach.

Proposição 1.5.6. Sejam X, Y dois espaços normados.

- a) A função $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \mid x \in X \setminus \{0\} \right\}$ é uma norma.
- b) Para todo $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.
- c) Se Y é de Banach, então $\mathcal{B}(X, Y)$ é de Banach.

Demonstração. Uma prova desta proposição pode ser encontrada em [KREYSZIG](#) (Teoremas 1 e 2 da Seção 10 do Capítulo 2, páginas 118-119). $\square$

Em particular o espaço dual de todo espaço normado é um espaço de Banach.

Definição 1.5.7. Seja X um espaço vetorial real. Diz-se que uma função $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ é **sublinear** se satisfaz as seguintes propriedades

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, para todos $x, y \in X$.
- $p(\lambda z) = \lambda p(z)$, para quaisquer $z \in X$ e $\lambda > 0$.

Exemplo 1.5.8. Toda norma é uma função sublinear.

Proposição 1.5.9. Seja $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função sublinear.

- a) p é linear se, e só se, $-p(-x) = p(x)$ para todo $x \in X$.
- b) p é contínua se, e só se, existe $M > 0$ tal que $|p(x)| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$.

Demonstração.

- a) Basta provar a necessidade. Sejam $x, y \in X$, sabemos que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. Pelo enunciado obtemos $p(x) + p(y) = -(p(-x) + p(-y)) \leq -p(-x-y) = p(x+y)$. Ou seja, $p(x+y) = p(x) + p(y)$. Sejam $z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Basta provar $p(\lambda z) = \lambda p(z)$ para o caso $\lambda < 0$. De fato, $p(\lambda z) = -\lambda \frac{p(\lambda z)}{-\lambda} = \lambda(-p(-z)) = \lambda p(z)$. Concluimos que p é linear.
- b) Basta provar a suficiência. Como p é contínua em 0, existe $\delta > 0$ tal que $|p(w) - p(0)| < 1$ para todo $w \in B(0, \delta)$. Dado $x \in X \setminus \{0\}$, e considerando $w' = \frac{\delta x}{2\|x\|}$, obtemos que $|p(w')| - |p(0)| \leq |p(w') - p(0)| < 1$. Logo $\frac{\delta}{2\|x\|}|p(x)| < 1 + |p(0)|$. Ou seja, $|p(x)| < \frac{2+2|p(0)|}{\delta}\|x\|$.

□

Teorema 1.5.10 (Teorema de Hahn-Banach). Sejam $E \subseteq X$ um subespaço vetorial e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função sublinear. Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear tal que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$, então existe uma função linear $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que F estende a f e $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Uma demonstração desta teorema pode ser encontrada em [BREZIS](#) (Teorema 1.1 da Seção 1 do Capítulo 1, página 1). □

Corolário 1.5.11. Seja $V \subseteq X$ um subespaço vetorial. Dada uma função linear contínua $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, existe $F \in X^*$ tal que F estende a f e $\|F\| = \|f\|$.

Demonstração. Definamos a função $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $p(x) = \|f\|\|x\|$, a qual é sublinear. É claro que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in V$. Em virtude do Teorema de Hahn-Banach, existe uma função linear $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que F estende a f e $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Logo $|F(x)| \leq \|f\|\|x\|$, para todo $x \in X$. Ou seja, F é limitada e $\|F\| \leq \|f\|$. Ademais, $|f(z)| = |F(z)| \leq \|F\|\|z\|$, para todo $z \in V$. Então $\|f\| \leq \|F\|$. Portanto, $F \in X^*$ estende a f e $\|F\| = \|f\|$. □

Proposição 1.5.12. Seja $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função sublinear contínua. Se existe um único $f \in X^*$ tal que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in X$, então p é linear.

Demonstração. Sejam $x_0 \in X$ e V o subespaço gerado por $\{x_0\}$. Sabemos que $-p(-z) \leq p(z)$ para todo $z \in X$. Definamos $f_1, f_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_1(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$ e $f_2(\alpha x_0) = -\alpha p(-x_0)$. Não

é difícil ver que f_1 e f_2 são funcionais lineares tais que $f_1(x) \leq p(x)$ e $f_2(x) \leq p(x)$ para todo $x \in V$. Logo, pelo Teorema de Hahn-Banach, existem funcionais lineares $F_1, F_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f_1 = F_1|_V$, $f_2 = F_2|_V$, $F_1(x) \leq p(x)$ e $F_2(x) \leq p(x)$, para todo $x \in X$. Além disso, $F_1, F_2 \in X^*$ pois p é contínua. Pela hipóteses sobre a unicidade de f , temos que $F_1 = F_2 = f$. Logo $-p(-x_0) = F_2(x_0) = F_1(x_0) = p(x_0)$. Portanto, p é linear. $\square$

Teorema 1.5.13 (Teorema do gráfico fechado). Seja $T : X \rightarrow Y$ uma função linear entre espaços de Banach. Se o gráfico de T é fechado em $X \times Y$, então T é contínua.

Demonstração. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [BREZIS](#) (Teorema 2.9 da Seção 3 do Capítulo 2, página 37). $\square$

Definição 1.5.14. Seja $T : X \rightarrow Y$ uma função entre espaços vetoriais normados. Dizemos que T é uma **isometria** se $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.

Proposição 1.5.15. Seja $L : X \rightarrow Y$ uma função linear. Se L é uma isometria, então L é contínua e injectiva. Mais ainda, se L é uma isometria sobrejetora, então L é um isomorfismo.

Demonstração. É claro que L é injetora por ser uma isometria. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X que converge a 0. Como $\|x_n\| = \|L(x_n)\|$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $(L(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ também converge a 0. Ou seja, L é contínua.

Mais ainda, se L é uma isometria sobrejetora, pelo argumento acima, L é contínua e bijetora. Além disso, L^{-1} é uma isometria e, em consequência, L^{-1} é contínua. Portanto, L é um isomorfismo. $\square$

A seguir introduzimos uma nova topologia sobre espaços normados, a menor possível de forma que cada função linear limitada seja contínua.

Definição 1.5.16. Seja E um espaço normado. A **topologia fraca** em E é a topologia gerada por $\{\varphi^{-1}(U) \mid \varphi \in E^* \text{ e } U \text{ é um aberto de } \mathbb{R}\}$. Denotaremos por (E, fraca) .

Se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x em (E, fraca) , dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge fracamente** a x e denotamos por $x_n \rightharpoonup x$.

Proposição 1.5.17. Seja E um espaço normado.

- (E, fraca) é Hausdorff.
- Dado $x_0 \in E$, a família $\{V(x_0; f_1, \dots, f_n; \varepsilon) \mid f_1, \dots, f_n \in E^*, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}$ é uma base de vizinhanças para x_0 na topologia fraca, onde $V(x_0; f_1, \dots, f_n; \varepsilon) = \{x \in E \mid |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}$.
- $x_n \rightharpoonup x$ se, e só se, $f(x_n) \rightarrow f(x)$ para todo $f \in E^*$.

Demonstração. Uma demonstração desta proposição pode ser encontrada em [BREZIS](#) (Proposições 3.3, 3.4 e 3.5 da Seção 2 do Capítulo 3, páginas 57-58). $\square$

Definição 1.5.18. Seja E um espaço normado. Dado $x \in E$, definamos função $J_x : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ por $J_x(f) = f(x)$. A **topologia fraca*** em E^* é a topologia gerada por $\{J_x^{-1}(U) \mid x \in E \text{ e } U \text{ é um aberto de } \mathbb{R}\}$. Denotaremos por (E^*, fraca^*) .

Se uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f em (E^*, fraca^*) , dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge fracamente*** a f e denotamos por $f_n \xrightarrow{*} f$.

Proposição 1.5.19. Seja E um espaço normado.

- a) (E^*, fraca^*) é Hausdorff.
- b) Dado $f_0 \in E^*$, a família $\{V(f_0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) \mid x_1, \dots, x_n \in E, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}$ é uma base de vizinhanças para f_0 na topologia fraca^* , onde $V(f_0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = \{f \in E^* \mid |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}$.
- c) $f_n \xrightarrow{*} f$ se, e só se, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Uma demonstração desta proposição pode ser encontrada em [BREZIS](#) (Proposições 3.11, 3.12 e 3.13 da Seção 4 do Capítulo 3, página 63). $\square$

Proposição 1.5.20. Sejam E e F dois espaços vetoriais normados. Se E e F são isomorfos, então E^* e F^* também são isomorfos. Mais ainda, (E^*, fraca^*) e (F^*, fraca^*) são homeomorfos.

Demonstração. Seja $T : E \rightarrow F$ um isomorfismo. Definimos $\varphi : E^* \rightarrow F^*$ como $\varphi(x^*) = x^* \circ T^{-1}$, a qual é linear e limitada. Não é difícil verificar que φ é um isomorfismo.

Além disso, provaremos que φ é um homeomorfismo entre E^* e F^* com suas topologias fraca^* . De fato, sejam U um aberto de (F^*, fraca^*) e $x^* \in \varphi^{-1}(U)$. Como $\varphi(x^*) \in U$, existem $y_1, \dots, y_n \in F$ e $r > 0$ tais que $V(\varphi(x^*); y_1, \dots, y_n, r) \subseteq U$. Considerando $x_i = T^{-1}(y_i)$, para cada i , temos que $V(x^*; x_1, \dots, x_n; r) \subseteq \varphi^{-1}(U)$. Ou seja, $\varphi^{-1}(U)$ é aberto. Analogamente, φ^{-1} é contínua. Portanto, (E^*, fraca^*) e (F^*, fraca^*) são homeomorfos. $\square$

Teorema 1.5.21 (Teorema de Banach-Alaoglu). A bola fechada unitária $B_{E^*} = \{f \in E^* \mid \|f\| \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca^* .

Demonstração. Uma demonstração desta teorema pode ser encontrada em [BREZIS](#) (Teorema 3.16 da Seção 4 do Capítulo 3, página 66). $\square$

1.6 Diferenciabilidade Gâteaux

Nesta seção introduzimos o conceito de diferenciabilidade em espaços normados. Em particular estudamos a diferenciabilidade Gâteaux em funções convexas. Para uma leitura mais profunda e completa, o leitor pode consultar as referências [PHELPS](#), [GILES](#) e [FABIAN](#).

Definição 1.6.1. Sejam E um espaço vetorial real e $A \subseteq E$. Dizemos que A é **convexo** se $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$, para quaisquer $x, y \in A$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Definição 1.6.2. Sejam X um espaço vetorial normado e $D \subseteq X$ um conjunto convexo. Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é **convexa** se, para quaisquer $x, y \in D$ e $\lambda \in [0, 1]$, tem-se que $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Proposição 1.6.3. Sejam $U \subseteq X$ um aberto convexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se f é contínua em $a \in U$, então existem $\delta > 0$ e $K > 0$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq K\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in B(a, \delta)$.

Demonstração. Dado que f é contínua em $a \in U$, existem $M, \delta > 0$ tais que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in B(a, \delta)$. Sejam $x, y \in B(a, \frac{\delta}{2})$ distintos e $\alpha = \|x - y\|$. Logo $z_1 = y + \frac{\delta}{2\alpha}(y - x) \in B(a, \frac{\delta}{2})$ e $f(y) \leq \frac{2\alpha}{2\alpha + \delta}f(z_1) + \frac{\delta}{2\alpha + \delta}f(x)$. Então $f(y) - f(x) \leq \frac{4M}{\delta}\|x - y\|$. Do mesmo jeito, fazendo $z_2 = x + \frac{\delta}{2\alpha}(x - y) \in B(a, \frac{\delta}{2})$, obtemos que $f(x) - f(y) \leq \frac{4M}{\delta}\|x - y\|$. Portanto, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4M}{\delta}\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in B(a, \frac{\delta}{2})$. $\square$

Definição 1.6.4. Sejam X um espaço vetorial normado, $A \subseteq X$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dados $a \in A$ e $v \in X$, definimos a **derivada direcional pela direita** $f'_+(a, v)$, a **derivada direcional pela esquerda** $f'_-(a, v)$, e a **derivada direcional** $f'(a, v)$ do seguinte modo.

$$\begin{aligned} f'_+(a, v) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}, \\ f'_-(a, v) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}, \\ f'(a, v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}. \end{aligned}$$

Observação 1.6.5. Note que $f'_-(a, v) = -f'_+(a, -v)$. Ademais, $f'(a, v)$ existe se, e só se, $f'_+(a, v)$ existe e $f'_+(a, v) = -f'_+(a, -v)$.

Proposição 1.6.6. Sejam $U \subseteq X$ um aberto convexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Dado $a \in U$, existe $f'_+(a, v)$, para qualquer $v \in X$, e a função $f'_+(a, \cdot)$ é sublinear. Mais ainda, se f é contínua em a , então $f'_+(a, \cdot)$ é contínua.

Demonstração. Seja $v \in X$. Existe $\delta > 0$ tal que $a + tv \in U$ para qualquer $t \in (-\delta, \delta)$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \delta)$ tais que $\lambda_1 < \lambda_2$. Como f é convexa, temos que $f(a + \lambda_1 v) \leq \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)f(a) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}f(a + \lambda_2 v)$. Logo $\frac{f(a + \lambda_1 v) - f(a)}{\lambda_1} \leq \frac{f(a + \lambda_2 v) - f(a)}{\lambda_2}$. Analogamente, dados $\beta_1 \in (-\delta, 0)$ e $\beta_2 \in (0, \delta)$, temos que $\frac{f(a + \beta_1 v) - f(a)}{\beta_1} \leq \frac{f(a + \beta_2 v) - f(a)}{\beta_2}$. Então $f'_+(a, v) = \inf \left\{ \frac{f(a + \lambda v) - f(a)}{\lambda} \mid \lambda > 0 \right\}$.

Agora vejamos que $f'_+(a, \cdot)$ é sublinear. É fácil ver que $f'_+(a, \lambda u) = \lambda f'_+(a, u)$ para quaisquer $u \in X$ e $\lambda > 0$. Dados $u_1, u_2 \in X$, temos que

$$\begin{aligned} f'_+(a, u_1 + u_2) &= 2f'_+\left(a, \frac{u_1 + u_2}{2}\right) = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + t(\frac{u_1 + u_2}{2})) - f(a)}{t} \\ &\leq 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}f(a + tu_1) + \frac{1}{2}f(a + tu_2) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + tu_1) - f(a)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + tu_2) - f(a)}{t}. \end{aligned}$$

Ou seja, $f'_+(a, u_1 + u_2) \leq f'_+(a, u_1) + f'_+(a, u_2)$. Portanto, $f'_+(a, \cdot)$ é sublinear.

No caso que f seja contínua em a , pela Proposição 1.6.3, existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in B(a, \delta)$. Dado $w \in X$, existe $t_w > 0$ tal que $a + t_w w \in B(a, \delta)$. Logo $|f(a + t_w w) - f(a)| \leq M\|t_w w\|$. Em consequência, $f'_+(a, w) \leq \frac{f(a + t_w w) - f(a)}{t_w} \leq M\|w\|$. Portanto, $f'_+(a, \cdot)$ é contínua. $\square$

Definição 1.6.7. Sejam X um espaço vetorial normado e $U \subseteq X$. Dada uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a **subdiferencial de f em $a \in U$** como $\partial f(a) = \{x^* \in X^* \mid x^*(x - a) \leq f(x) - f(a), \text{ para todo } x \in U\}$. Cada elemento de $\partial f(a)$ é chamado de **subgradiente de f em a** .

Teorema 1.6.8. Sejam X um espaço vetorial normado e $U \subseteq X$ aberto convexo. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e convexa, então $\partial f : U \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$, considerando a topologia fraca* em X^* , éusco.

Demonstração. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em GILES (Teorema 12 da Seção 2 do Capítulo 3, página 132). $\square$

Definição 1.6.9. Sejam X um espaço vetorial normado e $U \subseteq X$ um aberto. Dizemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é **Gâteaux diferenciável** em $a \in U$ se existe $x^* \in X^*$ tal que $f'(a, v) = x^*(v)$, para todo $v \in X$.

Observação 1.6.10. Note que f é Gâteaux diferenciável em a se, e só se, $f'_+(a, \cdot) \in X^*$.

Proposição 1.6.11. Sejam $U \subseteq X$ um aberto convexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa contínua. Para qualquer $x_0 \in U$ as seguintes afirmações são equivalentes.

- a) f é Gâteaux diferenciável em x_0 .
- b) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tv) + f(x_0 - tv) - 2f(x_0)}{t} = 0$, para todo $v \in X$.
- c) $\partial f(x_0)$ é um conjunto unitário.

Demonstração. Não é difícil verificar que (a) implica (b). Vamos provar que (b) implica (c). Pelo Teorema 1.6.8 sabemos que existe $x^* \in \partial f(x_0)$. Sejam $y^* \in \partial f(x_0)$ e $v \in X$. Existe $r > 0$ tal que

$B(x_0, r) \subseteq U$. Dado $t \in (0, r)$, temos que $x^*(tv) \leq f(x_0 + tv) - f(x_0)$ e $y^*(-tv) \leq f(x_0 - tv) - f(x_0)$. Logo

$$x^*(v) - y^*(v) \leq \frac{f(x_0 + tv) + f(x_0 - tv) - 2f(x_0)}{t}.$$

Analogamente obtemos

$$y^*(v) - x^*(v) \leq \frac{f(x_0 + tv) + f(x_0 - tv) - 2f(x_0)}{t}.$$

Assim,

$$0 \leq |x^*(v) - y^*(v)| \leq \frac{f(x_0 + tv) + f(x_0 - tv) - 2f(x_0)}{t}.$$

Então $x^*(v) = y^*(v)$. Portanto, $x^* = y^*$. Isto é, $\partial f(x_0)$ é um conjunto unitário.

Para ver que (c) implica (a) mostraremos inicialmente a seguinte afirmação. Dado $x^* \in X^*$, $x^* \in \partial f(x_0)$ se, e só se, $x^*(v) \leq f'_+(x_0, v)$ para todo $v \in X$.

De fato, se $x^* \in \partial f(x_0)$, então $x^*(v) \leq f'_+(x_0, v)$ para todo $v \in X$. Reciprocamente, suponhamos que x^* satisfaz tal propriedade. Se $v \in U$, então $x^*(v - x_0) \leq f'_+(x_0, v - x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t(v - x_0)) - f(x_0)}{t} \leq f(v) - f(x_0)$. Ou seja, $x^* \in \partial f(x_0)$.

Pela Proposição 1.6.6 sabemos que $f'_+(x_0, \cdot)$ é sublinear contínua. Seja $z^* \in \partial f(x_0)$. Dado que z^* é a única funcional linear contínua tal que $z^* \leq f'_+(x_0, \cdot)$, e em virtude da Proposição 1.5.12, então $f'_+(x_0, \cdot)$ é linear. Ou seja, $f'_+(x_0, \cdot) \in X^*$. Portanto, f é Gâteaux diferenciável em x_0 . $\square$

Teorema 1.6.12 (Teorema de Mazur). Em todo espaço de Banach separável temos que qualquer função contínua convexa é Gâteaux diferenciável num subconjunto G_δ denso.

Demonstração. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [PHELPS](#) (Teorema 1.20 do Capítulo 1, página 12). $\square$

UMA VERSÃO TOPOLÓGICA DO TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO

Neste capítulo apresentamos uma aplicação do jogo de Banach-Mazur para caracterizar os conjuntos residuais. Fornecemos condições necessárias para que funções aproximadamente contínuas se tornem contínuas, como foi mostrado por [Moors \(2000\)](#), obtendo no final uma versão topológica do Teorema do gráfico fechado.

2.1 O jogo de Banach-Mazur

A seguir introduzimos o jogo de Banach-Mazur e apresentamos uma primeira aplicação dele para caracterizar os conjuntos residuais.

Definição 2.1.1. Seja X um espaço topológico e E um subconjunto dele. Definimos o **jogo de Banach-Mazur**, denotado por $BM(E)$, como segue. O Jogador I começa escolhendo um aberto não vazio B_0 , o Jogador II responde selecionando um aberto não vazio $A_0 \subseteq B_0$. Em seguida o Jogador I responde tomando outro aberto não vazio $B_1 \subseteq A_0$. Então o Jogador II contesta com um aberto não vazio $A_1 \subseteq B_1$ e assim sucessivamente. Deste modo obtemos uma sequência de abertos não vazios

$$\dots A_{n+1} \subseteq B_{n+1} \subseteq A_n \subseteq B_n \subseteq \dots \subseteq A_0 \subseteq B_0.$$

Dizemos que o Jogador II **vence** se $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq E$. Caso contrário, o Jogador I **vence**.

Lema 2.1.2. Seja E um subconjunto de um espaço topológico (X, τ) . Para que E seja residual é necessário e suficiente que o Jogador II possua uma estratégia vencedora em $BM(E)$.

Demonstração. Provaremos a equivalência utilizando o item (e) do Teorema [1.3.3](#). Se E é residual, então existe $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma sequência de conjuntos abertos densos, tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq E$. Suponhamos que o Jogador I começa o jogo escolhendo um aberto não vazio U_0 . Logo o Jogador

II responde definindo $T(U_0) = U_0 \cap C_0$. Em seguida o Jogador I escolhe um aberto não vazio U_1 tal que $U_1 \subseteq T(U_0)$. Depois o Jogador II responde definindo $T(U_0, U_1) = U_1 \cap C_1$. Suponhamos que na n -ésima rodada o Jogador I escolhe um aberto não vazio U_n tal que $U_n \subseteq T(U_0, \dots, U_{n-1})$. Logo o Jogador II responde definindo $T(U_0, \dots, U_n) = U_n \cap C_n$. Obtemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T(U_0, \dots, U_n) \subseteq E$. Portanto, T é uma estratégia vencedora para o Jogador II em $BM(E)$. Reciprocamente, seja Σ uma estratégia vencedora para o Jogador II em $BM(E)$. Definimos

$$\mathcal{G}_0 = \{ \mathcal{F} \subseteq \tau \setminus \{ \emptyset \} \mid \text{se } U_1, U_2 \in \mathcal{F} \text{ são distintos, então } \Sigma(U_1) \cap \Sigma(U_2) = \emptyset \}.$$

Não é difícil ver que $(\mathcal{G}_0, \subseteq)$ é parcialmente ordenado e, ademais, toda cadeia é limitada. Sejam $\mathcal{F}_0$ o elemento maximal de $\mathcal{G}_0$, em virtude do Lema de Zorn, e $W_0 = \bigcup_{U \in \mathcal{F}_0} \Sigma(U)$.

Vamos provar que W_0 é denso. Seja O um aberto não vazio de X . Se $O \in \mathcal{F}_0$, então $\emptyset \neq \Sigma(O) \subseteq O \cap W_0$. No caso que $O \notin \mathcal{F}_0$, pela maximalidade de $\mathcal{F}_0$, existe $O' \in \mathcal{F}_0$ tal que $\Sigma(O) \cap \Sigma(O') \neq \emptyset$. Ou seja, $O \cap W_0 \neq \emptyset$.

Suponhamos que $\mathcal{F}_n$ é o elemento maximal de

$$\mathcal{G}_n = \{ \mathcal{F} \subseteq \tau \setminus \{ \emptyset \} \mid \text{se } A, B \in \mathcal{F} \text{ são distintos, então } \Sigma(U_0, \dots, U_{n-1}, A) \cap \Sigma(U_0, \dots, U_{n-1}, B) = \emptyset, \text{ para quaisquer } U_0 \in \mathcal{F}_0, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1} \text{ que satisfaçam as regras do jogo} \}.$$

e $W_n = \bigcup \{ \Sigma(U_0, \dots, U_n) \mid U_0 \in \mathcal{F}_0, \dots, U_n \in \mathcal{F}_n \text{ satisfazem as regras do jogo} \}$ é aberto e denso. Do mesmo jeito, definimos

$$\mathcal{G}_{n+1} = \{ \mathcal{F} \subseteq \tau \setminus \{ \emptyset \} \mid \text{se } A, B \in \mathcal{F} \text{ são distintos, então } \Sigma(U_0, \dots, U_n, A) \cap \Sigma(U_0, \dots, U_n, B) = \emptyset, \text{ para quaisquer } U_0 \in \mathcal{F}_0, \dots, U_n \in \mathcal{F}_n \text{ que satisfaçam as regras do jogo} \}.$$

Novamente pelo Lema de Zorn sabemos que $\mathcal{G}_{n+1}$ possui elemento maximal. Seja $\mathcal{F}_{n+1}$ o elemento maximal de $\mathcal{G}_{n+1}$. Definimos o conjunto

$$W_{n+1} = \bigcup \{ \Sigma(U_0, \dots, U_{n+1}) \mid U_0 \in \mathcal{F}_0, \dots, U_{n+1} \in \mathcal{F}_{n+1} \text{ satisfazem as regras do jogo} \}.$$

Afirmamos que W_{n+1} é denso. De fato, seja O um aberto não vazio de X . Pela densidade de W_n , existem $D_0 \in \mathcal{F}_0, \dots, D_n \in \mathcal{F}_n$ tais que $P = O \cap \Sigma(D_0, \dots, D_n) \neq \emptyset$. Se $P \in \mathcal{F}_{n+1}$, então $\emptyset \neq \Sigma(D_0, \dots, D_n, P) \subseteq O \cap W_{n+1}$. No caso que $P \notin \mathcal{F}_{n+1}$, pela maximalidade de $\mathcal{F}_{n+1}$, existem $C_0 \in \mathcal{F}_0, \dots, C_{n+1} \in \mathcal{F}_{n+1}$ tais que $\Sigma(C_0, \dots, C_n, P) \cap \Sigma(C_0, \dots, C_n, C_{n+1}) \neq \emptyset$. Por consequência, $O \cap W_{n+1} \neq \emptyset$. Assim, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos abertos e densos.

Finalmente vamos mostrar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n \subseteq E$. Se $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$, então existe $V_n \in \mathcal{F}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Sigma(V_0, \dots, V_n)$. Dado que Σ é uma estratégia vencedora, obtemos que $x \in E$. Portanto, E é residual. $\square$

2.2 Funções aproximadamente contínuas

Nesta seção estudamos as funções aproximadamente contínuas e fornecemos condições necessárias para que tal tipo de funções sejam contínuas.

Definição 2.2.1. Uma função $f: X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos é dita **aproximadamente contínua** se, para cada aberto U de Y , $f^{-1}(U) \subseteq \text{int}(\overline{f^{-1}(U)})$. Mais ainda, se $f^{-1}(U)$ é um subconjunto residual de $\text{int}(\overline{f^{-1}(U)})$, para todo aberto U de Y , então a função f é chamada de **muito aproximadamente contínua**.

Exemplo 2.2.2. Toda função contínua é aproximadamente contínua, mas o reverso não é verdade (basta tomar $f = \chi_{\mathbb{Q}}$).

Definição 2.2.3. Diz-se que uma função $f: X \rightarrow Y$ **satisfaz a propriedade P** se, para cada par de abertos disjuntos U, V de Y , tem-se que $\text{int}(\overline{f^{-1}(U)}) \cap \text{int}(\overline{f^{-1}(V)}) = \emptyset$.

Exemplo 2.2.4. Toda função contínua satisfaz a propriedade P .

Observação 2.2.5. Se f é aproximadamente contínua e satisfaz a propriedade P , então $f^{-1}(A) \subseteq \text{int}(\overline{f^{-1}(A)}) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$, para cada A aberto de Y .

O seguinte teorema estabelece que a propriedade P e aproximadamente continuidade podem implicar continuidade.

Teorema 2.2.6. Sejam Y um espaço regular e $f: X \rightarrow Y$ uma função aproximadamente contínua. Se f satisfaz a propriedade P , então f é contínua.

Demonstração. Sejam U um aberto de Y e $x \in f^{-1}(U)$. Como Y é regular, existe um aberto W de Y tal que $f(x) \in W$ e $\overline{W} \subseteq U$. Pela Observação 2.2.5, temos que $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}(\overline{f^{-1}(W)}) \subseteq f^{-1}(\overline{W}) \subseteq f^{-1}(U)$. Ou seja, $x \in \text{int}(\overline{f^{-1}(W)}) \subseteq f^{-1}(U)$. Isto é, f é contínua. $\square$

Para uma função muito aproximadamente contínua satisfazer a propriedade P basta que o domínio da função seja um espaço de Baire.

Teorema 2.2.7. Se X é um espaço de Baire e $f: X \rightarrow Y$ é muito aproximadamente contínua, então f satisfaz a propriedade P .

Demonstração. Sejam U, V dois abertos disjuntos de Y . Se $E = \text{int}(\overline{f^{-1}(U)}) \cap \text{int}(\overline{f^{-1}(V)}) \neq \emptyset$, então pela Proposição 1.3.7 os conjuntos $f^{-1}(U) \cap E$ e $f^{-1}(V) \cap E$ são residuais em E . Logo

$$(f^{-1}(U) \cap E) \cap (f^{-1}(V) \cap E) = (f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)) \cap E = \emptyset,$$

o qual é falso pela Proposição 1.3.15. Então $\text{int}(\overline{f^{-1}(U)}) \cap \text{int}(\overline{f^{-1}(V)}) = \emptyset$. $\square$

Para o teorema principal deste capítulo precisamos introduzir os seguintes conceitos.

Definição 2.2.8. Seja $\mathcal{F}$ uma família não vazia de subconjuntos de um espaço topológico tal que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **base de filtro** se, para quaisquer $E, F \in \mathcal{F}$, existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $G \subseteq E \cap F$.

Proposição 2.2.9. Sejam $f: X \rightarrow Y$ uma função entre espaços topológicos e $\mathcal{A}$ uma base de vizinhanças de um ponto $x \in X$. Se f tem o gráfico fechado, então $\bigcap_{E \in \mathcal{A}} \overline{f(E)} = \{f(x)\}$.

Demonstração. Seja $y \in \bigcap_{E \in \mathcal{A}} \overline{f(E)}$. Se $y \neq f(x)$ temos que $(x, y) \notin \text{Graf}(f)$. Então existem A, B abertos de X e Y respectivamente, tais que $(x, y) \in A \times B \subseteq X \times Y \setminus \text{Graf}(f)$. Logo existe $N \in \mathcal{A}$ tal que $N \subseteq A$ e, sabendo que $y \in \overline{f(N)}$, obtemos $f(N) \cap B \neq \emptyset$. Isto é, $(A \times B) \cap \text{Graf}(f) \neq \emptyset$, o qual é absurdo. Portanto, $\bigcap_{E \in \mathcal{A}} \overline{f(E)} = \{f(x)\}$. $\square$

Definição 2.2.10. Seja $\mathcal{V}$ uma cobertura de um espaço topológico X . Uma base de filtro $\mathcal{F}$ sobre X é chamada de $\mathcal{V}$ -**pequena** se existe um elemento de $\mathcal{F}$ que está contido em algum elemento de $\mathcal{V}$. Dizemos que uma base de filtro $\mathcal{G}$ é **controlada** por uma família de coberturas $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in L}$ se $\mathcal{G}$ é $\mathcal{A}_\alpha$ -pequena para cada $\alpha \in L$.

Definição 2.2.11. Uma sequência de coberturas $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de um espaço topológico é **completa** se toda base de filtro $\mathcal{F}$ controlada por $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$.

Um espaço regular é chamado de **partição completo** se possui uma sequência completa de coberturas abertas.

Exemplo 2.2.12. Seja X um espaço métrico completo. Definimos $\mathcal{V}_n = \{B(x, 1/2^n) \mid x \in X\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência completa de coberturas abertas. Portanto, todo espaço métrico completo é um espaço partição completo.

Teorema 2.2.13. Toda função aproximadamente contínua de um espaço de Baire a um espaço partição completo que tem o gráfico fechado é contínua.

Demonstração. Sejam X um espaço de Baire, Y um espaço partição completo e $f: X \rightarrow Y$ uma função aproximadamente contínua que tem o gráfico fechado. Pelos Teoremas 2.2.6 e 2.2.7, basta mostrar que f é muito aproximadamente contínua.

Seja U um aberto de Y . Mostraremos que $f^{-1}(U)$ é um subconjunto residual de $\text{int}(\overline{f^{-1}(U)})$ fazendo uso do Lema 2.1.2. Seja $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência completa de coberturas abertas de Y . Suponhamos que o Jogador I escolhe um aberto não vazio B_0 de $\text{int}(\overline{f^{-1}(U)})$. Como $f(B_0) \cap U \neq \emptyset$, existe um aberto $V_0 \in \mathcal{V}_0$ tal que $f(B_0) \cap U \cap V_0 \neq \emptyset$. Se $a \in B_0$ tal que $f(a) \in U \cap V_0$, existe um aberto U_0 tal que $f(a) \in U_0$ e $\overline{U_0} \subseteq U \cap V_0$. Logo o Jogador II responde definindo $\Sigma(B_0) = \text{int}(\overline{f^{-1}(U_0)}) \cap B_0 \neq \emptyset$. Fazendo $D_0 = f(B_0) \cap U_0 \neq \emptyset$ temos que $D_0 \subseteq V_0$, $D_0 \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U$ e $\Sigma(B_0) \subseteq \overline{f^{-1}(D_0)}$.

Suponhamos que na $n+1$ -ésima rodada o Jogador I escolhe um aberto não vazio B_{n+1} de $\Sigma(B_0, \dots, B_n) = \text{int}(\overline{f^{-1}(U_n)}) \cap B_n$. Ademais, $D_n = f(B_n) \cap U_n \neq \emptyset$ e, por consequência, obtemos

que $D_n \subseteq V_n$, $D_n \subseteq U_n \subseteq \overline{U_n} \subseteq U$ e $\Sigma(B_0, \dots, B_n) \subseteq \overline{f^{-1}(D_n)}$.

Como $f(B_{n+1}) \cap U_n \neq \emptyset$, existe um aberto $V_{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$ tal que $f(B_{n+1}) \cap U_n \cap V_{n+1} \neq \emptyset$. Se $c \in B_{n+1}$ é tal que $f(c) \in U_n \cap V_{n+1}$, existe um aberto U_{n+1} tal que $f(c) \in U_{n+1}$ e $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n \cap V_{n+1}$. Então o Jogador II define $\Sigma(B_0, \dots, B_{n+1}) = \text{int}(\overline{f^{-1}(U_{n+1})}) \cap B_{n+1} \neq \emptyset$. Do mesmo jeito, fazendo $D_{n+1} = f(B_{n+1}) \cap U_{n+1} \neq \emptyset$, temos que $D_{n+1} \subseteq D_n$, $\Sigma(B_0, \dots, B_{n+1}) \subseteq \overline{f^{-1}(D_{n+1})}$ e $D_{n+1} \subseteq V_{n+1}$.

Agora vamos provar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f^{-1}(D_n)} \subseteq f^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D_n}\right)$. Sejam $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f^{-1}(D_n)}$ e $\mathcal{N}$ uma base de vizinhança de x . Logo $\mathcal{F} = \{f(N) \cap D_n \mid N \in \mathcal{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de filtro em Y controlada por $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Então

$$\emptyset \neq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \overline{f(N)} \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D_n} = \{f(x)\} \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D_n},$$

onde a igualdade é obtida pela Proposição 2.2.9. Assim, $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D_n}\right)$.

Em consequência,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Sigma(B_0, \dots, B_n) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f^{-1}(D_n)} \subseteq f^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D_n}\right) \subseteq f^{-1}(U).$$

Ou seja, Σ é uma estratégia vencedora para o Jogador II em $BM(f^{-1}(U))$ desenvolvido em $\text{int}(\overline{f^{-1}(U)})$. Portanto, concluímos que f é contínua. $\square$

UMA CARACTERIZAÇÃO DOS CONJUNTOS ESTRITAMENTE PSEUDO-COMPLETOS

Estabelecemos no presente capítulo a equivalência entre os espaços de Choquet e Choquet forte com os espaços pseudo-completos e estritamente pseudo-completos, respectivamente. Baseado na noção de espaços pseudo-completos, [Noll \(1990\)](#) estendeu o conceito de pseudo-completude para os conjuntos convexos em espaços localmente convexos. Nós apresentamos uma redefinição de tal conceito utilizando a equivalência obtida com os espaços de Choquet. Utilizamos também um jogo topológico para caracterizar os conjuntos estritamente pseudo-completos e CS-fechados nos espaços de Banach, de acordo com [Noll \(1990\)](#), e assim obter de um modo mais simples uma relação entre tais conjuntos.

3.1 Espaços pseudo-completos e o jogo de Choquet

Nesta seção introduzimos o conceito de espaços pseudo-completos e estabelecemos a equivalência com os espaços de Choquet. Para isso precisamos das seguintes definições.

Definição 3.1.1. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{F}$ uma coleção de abertos. Diz-se que $\mathcal{F}$ é uma π -base para X se, para qualquer aberto não vazio U , existe $V \in \mathcal{F}$ não vazio tal que $V \subseteq U$.

Definição 3.1.2. Uma **árvore** $(T, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado onde, para cada $x \in T$, o conjunto $\{y \in T \mid y < x\}$ é bem ordenado.

A **altura** de $t \in T$ é o tipo da ordem de $\{y \in T \mid y < t\}$. A **altura** de T é o menor ordinal que seja maior do que a altura de cada elemento.

Exemplo 3.1.3. Sejam A um conjunto não vazio e $A^{<\omega}$ o conjunto das sequências finitas de elementos de A . Dados $(a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_m) \in A^{<\omega}$, dizemos que $(a_0, \dots, a_n) \leq (b_0, \dots, b_m)$ se $n \leq m$ e $b_k = a_k$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Não é difícil ver que $(A^{<\omega}, \leq)$ é uma árvore de altura ω .

Definição 3.1.4. Uma **web** sobre um espaço topológico (X, τ) é um par (φ, T) formado por uma árvore $(T, \leq)$ de altura ω e uma função $\varphi : T \rightarrow \tau$ satisfazendo o seguinte.

- i) $\{\varphi(t) \mid t \in T\}$ é uma π -base para X .
- ii) Para cada $t \in T$, $\{\varphi(s) \mid s \in T \text{ e } t < s\}$ é uma π -base para o subespaço $\varphi(t)$.

Se nas condições anteriores o termo π -base é trocado por base, a web será chamada de **web estrita**.

Exemplo 3.1.5. Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $A = \{(x, U) \mid x \in X \text{ e } U \in \tau_d \text{ tais que } x \in U\}$ e $M = A^{<\omega}$. Definimos $\psi : M \rightarrow \tau_d$ do seguinte modo. Dado $(x, U) \in M$, existe $r > 0$ tal que $\overline{B(x, r)} \subseteq U$ e, portanto, definimos $\psi(x, U) = B(x, r)$. Seja $((x_0, U_0), (x_1, U_1)) \in M$. No caso que $x_1 \notin \psi(x_0, U_0)$, fazemos $\psi((x_0, U_0), (x_1, U_1)) = \emptyset$. Se $x_1 \in \psi(x_0, U_0)$, existe $r_1 > 0$ tal que $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq \psi(x_0, U_0) \cap U_1$. Logo definimos $\psi((x_0, U_0), (x_1, U_1)) = B(x_1, r_1)$. Indutivamente, seja $((x_0, U_0), \dots, (x_{n+1}, U_{n+1})) \in M$. No caso que $x_{n+1} \notin \psi((x_0, U_0), \dots, (x_n, U_n))$, fazemos $\psi((x_0, U_0), \dots, (x_{n+1}, U_{n+1})) = \emptyset$. Se $x_{n+1} \in \psi((x_0, U_0), \dots, (x_n, U_n))$, existe $r_{n+1} > 0$ tal que $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq \psi((x_0, U_0), \dots, (x_n, U_n)) \cap U_{n+1}$ e, portanto, definimos

$$\psi((x_0, U_0), \dots, (x_{n+1}, U_{n+1})) = B(x_{n+1}, r_{n+1}).$$

É claro que $\{\psi(t) \mid t \in M\}$ é uma base para X . Seja $t = ((x_0, U_0), \dots, (x_m, U_m)) \in M$ tal que $\psi(t) \neq \emptyset$. Dados um aberto não vazio W de $\psi(t)$ e $z \in \psi(t)$ tais que $z \in W$, definimos $s = ((x_0, U_0), \dots, (x_m, U_m), (z, W))$. Logo $z \in \psi(s) \subseteq W$. Ou seja, $\{\psi(s) \mid s \in M \text{ e } t < s\}$ é uma base para $\psi(t)$. Portanto, (ψ, M) é uma web estrita sobre (X, τ_d) .

Definição 3.1.6. Dizemos que uma web (φ, T) , sobre um espaço topológico X , é **pseudo-completa**, ou simplesmente **p -completa**, se para qualquer $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência crescente de elementos de T , satisfazendo $\varphi(t_n) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi(t_n) \neq \emptyset$.

Definição 3.1.7. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço pseudo-completo**, ou **p -completo**, se admite uma web p -completa. No caso que X admita uma web estrita p -completa, X é chamado de **estritamente pseudo-completo**.

Exemplo 3.1.8. Baseados no exemplo anterior e no Teorema 1.2.3, concluímos que todo espaço métrico completo é um espaço estritamente p -completo.

A seguir definimos o jogo de Choquet para caracterizar os espaços pseudo-completos.

Definição 3.1.9. Seja (X, τ) um espaço topológico. O **jogo de Choquet** desenvolvido em X , denotado por G_X , é definido do seguinte modo. O Jogador I começa escolhendo um aberto não vazio U_0 . Em seguida, o Jogador II responde com um aberto não vazio V_0 tal que $V_0 \subseteq U_0$. O Jogador I reage escolhendo $U_1 \in \tau$ tal que $U_1 \subseteq V_0$. Logo o Jogador II responde com um aberto

não vazio V_1 tal que $V_1 \subseteq U_1$ e assim sucessivamente. O Jogador II **vence** o jogo se $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$.

Caso contrário, o Jogador I é o **vencedor**.

Dizemos que (X, τ) é um **espaço de Choquet** se o Jogador II possui uma estratégia vencedora em G_X .

Definição 3.1.10. Seja (X, τ) um espaço topológico. O **jogo forte de Choquet** desenvolvido em X , denotado por G_X^s , é definido do seguinte modo. O Jogador I começa escolhendo $x_0 \in X$ e $U_0 \in \tau$ tais que $x_0 \in U_0$. Em seguida, o Jogador II responde com um aberto não vazio V_0 tal que $x_0 \in V_0 \subseteq U_0$. O Jogador I reage escolhendo $x_1 \in X$ e $U_1 \in \tau$ tais que $x_1 \in U_1 \subseteq V_0$. Logo o Jogador II responde com um aberto não vazio V_1 tal que $x_1 \in V_1 \subseteq U_1$ e assim sucessivamente. O Jogador II **vence** o jogo se $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$. Caso contrário, o Jogador I é o **vencedor**.

Dizemos que (X, τ) é um **espaço de Choquet forte** se o Jogador II possui uma estratégia vencedora em G_X^s .

O seguinte teorema revela a relação entre o conceito de pseudo-completude e o jogo de Choquet.

Teorema 3.1.11. Seja (X, τ) um espaço topológico.

- 1) X é um espaço p -completo se, e somente se, X é um espaço de Choquet.
- 2) X é um espaço estritamente p -completo se, e somente se, X é um espaço de Choquet forte.

Demonstração.

- 1) Se X é p -completo, existe uma web p -completa (φ, T) sobre X . Mostraremos que X é de Choquet. Ou seja, vamos definir uma estratégia vencedora Σ para o Jogador II em G_X . Suponhamos que o Jogador I começa escolhendo um aberto não vazio U_0 . Existe $t_0 \in T$ tal que $\emptyset \neq \varphi(t_0) \subseteq U_0$. Então o Jogador II responde $\Sigma(U_0) = \varphi(t_0)$. Em seguida o Jogador I reage escolhendo $U_1 \in \tau$ tal que $U_1 \subseteq \Sigma(U_0)$. Logo existe $t_1 \in T$, onde $t_0 < t_1$, tal que $\emptyset \neq \varphi(t_1) \subseteq U_1$. Então o Jogador II responde $\Sigma(U_0, U_1) = \varphi(t_1)$.

Suponhamos que, depois de n rodadas, o Jogador I escolhe um aberto não vazio U_n tal que $U_n \subseteq \Sigma(U_0, \dots, U_{n-1})$. Analogamente, existe $t_n \in T$, onde $t_{n-1} < t_n$, tal que $\emptyset \neq \varphi(t_n) \subseteq U_n$. Então o Jogador II responde $\Sigma(U_0, \dots, U_n) = \varphi(t_n)$. Note que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de elementos de T , onde cada $\varphi(t_n)$ é não vazio. Então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Sigma(U_0, \dots, U_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi(t_n) \neq \emptyset$. Portanto, Σ é uma estratégia vencedora para o Jogador II em G_X . Isto é, X é de Choquet.

Reciprocamente, se X é de Choquet, existe uma estratégia vencedora Λ para o Jogador II em G_X . Seja M o conjunto das sequências finitas formadas por abertos não vazios de X . Definimos $\psi : M \rightarrow \tau$ do seguinte modo. Para qualquer aberto não vazio U , $\psi(U) = \Lambda(U)$. Dado $(U_0, U_1) \in M$ fazemos o seguinte. Se $U_1 \cap \Lambda(U_0) \neq \emptyset$, definimos

$\psi(U_0, U_1) = \Lambda(U_0, U_1 \cap \Lambda(U_0))$. No caso que $U_1 \cap \Lambda(U_0) = \emptyset$, fazemos $\psi(U_0, U_1) = \emptyset$. Dado $(U_0, \dots, U_n) \in M$, definimos

$$\psi(U_0, \dots, U_n) = \begin{cases} \Lambda(U_0, \dots, U_n \cap \psi(U_0, \dots, U_{n-1})), & \text{se } U_n \cap \psi(U_0, \dots, U_{n-1}) \neq \emptyset. \\ \emptyset, & \text{se } U_n \cap \psi(U_0, \dots, U_{n-1}) = \emptyset. \end{cases}$$

É claro que $\{\psi(t) \mid t \in M\}$ é uma π -base para X . Seja $t = (U_0, \dots, U_m) \in M$ tal que $\psi(t) \neq \emptyset$. Dado um aberto não vazio W de $\psi(t)$, definimos $s = (U_0, \dots, U_m, W)$. Logo $\psi(s) \subseteq W$. Ou seja, $\{\psi(s) \mid s \in M \text{ e } t < s\}$ é uma π -base para $\psi(t)$. Isto é, (ψ, M) é uma web sobre X . Só falta provar que tal web é p -completa.

Seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de elementos de M tal que cada $\psi(t_n)$ é não vazio. Se $t_n = (V_0, \dots, V_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \psi(t_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda(V_0, \dots, V_n \cap \psi(V_0, \dots, V_{n-1})) \neq \emptyset$ pois Λ é uma estratégia vencedora. Portanto, X é um espaço p -completo.

- 2) Se X é estritamente p -completo, existe uma web estrita p -completa (φ, T) sobre X . Mostraremos que X é de Choquet forte. Ou seja, vamos construir uma estratégia vencedora Σ para o Jogador II em G_X^s . Suponhamos que o Jogador I começa escolhendo um ponto $x_0 \in X$ e um aberto não vazio U_0 tais que $x_0 \in U_0$. Existe $t_0 \in T$ tal que $x_0 \in \varphi(t_0) \subseteq U_0$. Então o Jogador II responde $\Sigma(x_0, U_0) = \varphi(t_0)$. Em seguida o Jogador I reage escolhendo $x_1 \in X$ e $U_1 \in \tau$ tais que $x_1 \in U_1 \subseteq \Sigma(x_0, U_0)$. Logo existe $t_1 \in T$, onde $t_0 < t_1$, tal que $x_1 \in \varphi(t_1) \subseteq U_1$. Então o Jogador II responde $\Sigma((x_0, U_0), (x_1, U_1)) = \varphi(t_1)$.

Suponhamos que, depois de n rodadas, o Jogador I escolhe $x_n \in X$ e um aberto U_n tais que $x_n \in U_n \subseteq \Sigma((x_0, U_0), \dots, (x_{n-1}, U_{n-1}))$. Analogamente, existe $t_n \in T$, onde $t_{n-1} < t_n$, tal que $x_n \in \varphi(t_n) \subseteq U_n$. Então o Jogador II responde $\Sigma((x_0, U_0), \dots, (x_n, U_n)) = \varphi(t_n)$. Note que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de elementos de T , onde cada $\varphi(t_n)$ é não vazio. Então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Sigma((x_0, U_0), \dots, (x_n, U_n)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi(t_n) \neq \emptyset$. Portanto, Σ é uma estratégia vencedora para o Jogador II em G_X^s . Isto é, X é de Choquet forte.

Reciprocamente, se X é de Choquet forte, existe uma estratégia vencedora Λ para o Jogador II em G_X^s . Sejam $A = \{(x, U) \mid x \in X \text{ e } U \in \tau \text{ tais que } x \in U\}$ e $M = A^{<\omega}$. Definimos $\psi: M \rightarrow \tau$ do seguinte modo. Para qualquer $(x, U) \in M$, $\psi(x, U) = \Lambda(x, U)$. Dado $((x_0, U_0), (x_1, U_1)) \in M$ fazemos o seguinte. Se $x_1 \in \psi(x_0, U_0)$, definimos

$$\psi((x_0, U_0), (x_1, U_1)) = \Lambda((x_0, U_0), (x_1, U_1 \cap \psi(x_0, U_0))).$$

Caso contrário, $\psi((x_0, U_0), (x_1, U_1)) = \emptyset$. Dado $((x_0, U_0), \dots, (x_n, U_n)) \in M$, definimos

$$\psi((x_0, U_0), \dots, (x_n, U_n)) = \Lambda((x_0, U_0), \dots, (x_n, U_n \cap \psi((x_0, U_0), \dots, (x_{n-1}, U_{n-1})))),$$

se $x_n \in \psi((x_0, U_0), \dots, (x_{n-1}, U_{n-1}))$. Caso contrário, $\psi((x_0, U_0), \dots, (x_n, U_n)) = \emptyset$.

É claro que $\{\psi(t) \mid t \in M\}$ é uma base para X . Seja $t = ((x_0, U_0), \dots, (x_m, U_m)) \in M$ tal que $\psi(t) \neq \emptyset$. Dados um aberto não vazio W de $\psi(t)$ e $z \in \psi(t)$ tais que $z \in W$, definimos $s = ((x_0, U_0), \dots, (x_m, U_m), (z, W))$. Logo $z \in \psi(s) \subseteq W$. Ou seja, $\{\psi(s) \mid s \in M \text{ e } t < s\}$ é uma

base para $\psi(t)$. Isto é, (ψ, M) é uma web estrita sobre X .

Só falta provar que tal web é p -completa. Seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de elementos de M tal que cada $\psi(t_n)$ é não vazio. Se $t_n = ((y_0, V_0), \dots, (y_n, V_n))$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \psi(t_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda((y_0, V_0), \dots, (y_n, V_n \cap \psi((y_0, V_0), \dots, (y_{n-1}, V_{n-1})))) \neq \emptyset$$

pois Λ é uma estratégia vencedora. Portanto, X é um espaço estritamente p -completo. □

3.2 Conjuntos pseudo-completos em espaços de Banach

Nesta seção apresentamos uma redefinição do conceito de conjuntos pseudo-completos baseados na equivalência obtida com os espaços de Choquet. Utilizamos também um jogo topológico para caracterizar os conjuntos estritamente pseudo-completos e CS-fechados nos espaços de Banach, de acordo com Noll (1990), e assim obter de um modo mais simples uma relação entre tais conjuntos.

Definição 3.2.1. Sejam E um espaço vetorial real e $A \subseteq E$. Dizemos que A é um **cone** se $\lambda x \in A$, para todos $x \in A$ e $\lambda \geq 0$.

Proposição 3.2.2. Seja D um subconjunto não vazio de um espaço vetorial real X . Logo D é um cone convexo se, e só se, $D + D \subseteq D$ e $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot D \subseteq D$.

Demonstração. Dado que D é um cone convexo, temos que $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot D \subseteq D$. Se $x, y \in D$, então $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \in D$. Logo $x + y = 2(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}) \in D$. Ou seja, $D + D \subseteq D$.

Reciprocamente, D é um cone devido a que $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot D \subseteq D$. Sejam $x, y \in D$ e $\lambda \in [0, 1]$. Como $\lambda x, (1 - \lambda)y \in D$, temos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in D$. Portanto, D é um cone convexo. □

Definição 3.2.3. Um **espaço vetorial topológico** (e.v.t.) (E, τ) é um espaço vetorial real E dotado de uma topologia τ tal que as operações usuais (soma e produto por um escalar) são contínuas. Além disso, diz-se que (E, τ) é **separado** se τ é Hausdorff.

Um espaço vetorial topológico é chamado de **localmente convexo** se cada ponto possui uma base de vizinhanças convexas.

Definição 3.2.4. Sejam E um e.v.t. separado localmente convexo e $C \subseteq E$ um cone convexo. Para cada $x \in C$, definimos uma base local de vizinhança $\{x + (U \cap C) \mid U \in \mathcal{B}_0\}$, onde $\mathcal{B}_0$ é o conjunto das vizinhanças de $0 \in E$. A topologia gerada por tais bases locais é chamada de **topologia de cone** e será denotada por $\sigma(C)$.

Observação 3.2.5. Sejam $x \in C$ e $U \in \tau$ tais que $x \in U \cap C$. Dado que a função $T_x : E \rightarrow E$ definida por $T_x(w) = w + x$ é contínua, existe $V \in \mathcal{B}_0$ tal que $0 \in V \subseteq T_x^{-1}(U)$. Logo, como C é um cone

convexo, $x \in x + (V \cap C) \subseteq U \cap C$. Portanto, a topologia de cone σ é mais fina do que a topologia relativa τ_C .

Exemplo 3.2.6. Sejam $E = \mathbb{R}$, com a topologia euclideana, e $C = \mathbb{R}_{\geq 0}$ um cone convexo. Logo $\sigma(C)$ é a topologia de Sorgenfrey em C .

A seguir definimos o conceito de conjunto pseudo-completo, baseado no Teorema 3.1.11, por meio do jogo de Choquet.

Definição 3.2.7. Sejam E um e.v.t. separado localmente convexo e $C \subseteq E$ um conjunto convexo. Denotaremos por $\tilde{C}$ o cone convexo em $E \times \mathbb{R}$ gerado por $C \times \{1\}$. Isto é, $\tilde{C} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (C \times \{1\})$. Dizemos que C é um **conjunto p -completo** se $(\tilde{C}, \sigma(\tilde{C}))$ é um espaço de Choquet. Mais ainda, se $(\tilde{C}, \sigma(\tilde{C}))$ é um espaço de Choquet forte então C é chamado de **conjunto estritamente p -completo**.

Definição 3.2.8. Sejam E um espaço de Banach e $C \subseteq E$ um conjunto convexo. Denotemos por C' o cone gerado por C em E e $\sigma(C')$ a topologia de cone. Definimos um jogo em C , denotado por $\Upsilon(C)$, do seguinte modo. O Jogador I escolhe um ponto $x_0 \in C$, um número $\lambda_0 > 0$ e $U_0 \in \sigma(C')$ tais que $\lambda_0 x_0 \in U_0$. Em seguida o Jogador II responde escolhendo um número $\varepsilon_0 > 0$ e $V_0 \in \sigma(C')$ tal que $\lambda_0 x_0 \in V_0 \subseteq U_0$. Logo o Jogador I escolhe $x_1 \in C$, $\lambda_1 > 0$ e $U_1 \in \sigma(C')$ tais que $\lambda_1 < \varepsilon_0$ e $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \in U_1 \subseteq V_0$. Agora o Jogador II escolhe um número ε_1 e $V_1 \in \sigma(C')$ tal que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \in V_1 \subseteq U_1$ e assim sucessivamente.

Dizemos que o Jogador II **vence** em $\Upsilon(C)$ se $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \infty$ e, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que $\emptyset \neq$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \subseteq \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{m-1} x_{m-1} + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \right) \cdot C$. Caso contrário, o Jogador I é o **vencedor**.

Observação 3.2.9. Em $E \times \mathbb{R}$ consideramos a norma do máximo. A bola aberta com centro na origem e raio $r > 0$ será denotada por $\tilde{B}_r$. Não é difícil ver que $\{\tilde{B}_\delta\}_{\delta > 0}$ é uma base de vizinhanças para $0 \in E \times \mathbb{R}$.

O seguinte resultado fornece uma caracterização dos conjuntos estritamente p -completos nos espaços de Banach por meio do jogo anterior.

Proposição 3.2.10. Seja C um subconjunto convexo de um espaço de Banach E . Para que C seja um conjunto estritamente p -completo é necessário e suficiente que o Jogador II possua uma estratégia vencedora em $\Upsilon(C)$.

Demonstração. Se C é um conjunto estritamente p -completo então $(\tilde{C}, \sigma(\tilde{C}))$ é um espaço de Choquet forte. Ou seja, existe uma estratégia vencedora Φ para o Jogador II em $G_{\tilde{C}}^s$.

Construiremos uma estratégia Σ para o Jogador II em $\Upsilon(C)$. Suponhamos que o Jogador I escolhe $x_0 \in C$, $\lambda_0 > 0$ e $U_0 \in \sigma(C')$ tais que $\lambda_0 x_0 \in U_0$. Existe $r_0 > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + (B(0, r_0) \cap C') \subseteq U_0$. Fazendo $\tilde{x}_0 = (\lambda_0 x_0, \lambda_0)$ e aplicando a estratégia Φ , existe $\delta_0 > 0$ tal que $\tilde{x}_0 + (\tilde{B}_{\delta_0} \cap \tilde{C}) \subseteq \Phi(\tilde{x}_0, \tilde{C})$.

Seja $\varepsilon_0 = \min\{r_0, \delta_0\}$, o Jogador II define $\Sigma(x_0, \lambda_0, U_0) = (\lambda_0 x_0 + (B(0, \varepsilon_0) \cap C'), \varepsilon_0)$.

Em seguida o Jogador I escolhe $x_1 \in C$, $\lambda_1 > 0$ e $U_1 \in \sigma(C')$ tais que $\lambda_1 < \varepsilon_0$ e $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \in U_1 \subseteq \lambda_0 x_0 + (B(0, \varepsilon_0) \cap C')$. Existe $r_1 > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + (B(0, r_1) \cap C') \subseteq U_1$. Fazendo $\tilde{x}_0 = (\lambda_1 x_1, \lambda_1)$ e aplicando a estratégia Φ , existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\tilde{x}_0 + \tilde{x}_1 + (\tilde{B}_{\delta_1} \cap \tilde{C}) \subseteq \Phi((\tilde{x}_0, \tilde{C}), (\tilde{x}_0 + \tilde{x}_1, \tilde{x}_0 + (\tilde{B}_{\varepsilon_0} \cap \tilde{C}))).$$

Logo o Jogador II define $\Sigma((x_0, \lambda_0, U_0), (x_1, \lambda_1, U_1)) = (\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + (B(0, \varepsilon_1) \cap C'), \varepsilon_1)$, onde $\varepsilon_1 = \min\{r_1, \delta_1\}$. Agora suponhamos que, depois das n -primeiras rodadas, o Jogador I escolhe $x_{n+1} \in C$, $\lambda_{n+1} > 0$ e $U_{n+1} \in \sigma(C')$ tais que $\lambda_{n+1} < \varepsilon_n$ e

$$\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in U_{n+1} \subseteq \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B(0, \varepsilon_n) \cap C').$$

Existe $r_{n+1} > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} + (B(0, r_{n+1}) \cap C') \subseteq U_{n+1}$. Do mesmo jeito, fazendo $\tilde{x}_{n+1} = (\lambda_{n+1} x_{n+1}, \lambda_{n+1})$ e aplicando a estratégia Φ , existe $\delta_{n+1} > 0$ tal que

$$\tilde{x}_0 + \dots + \tilde{x}_{n+1} + (\tilde{B}_{\delta_{n+1}} \cap \tilde{C}) \subseteq \Phi((\tilde{x}_0, \tilde{C}), \dots, (\tilde{x}_0 + \dots + \tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_0 + \dots + \tilde{x}_n + (\tilde{B}_{\varepsilon_n} \cap \tilde{C}))).$$

Se $\varepsilon_{n+1} = \min\{r_{n+1}, \delta_{n+1}\}$ então o Jogador II define

$$\Sigma((x_0, \lambda_0, U_0), \dots, (x_{n+1}, \lambda_{n+1}, U_{n+1})) = (\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} + (B(0, \varepsilon_{n+1}) \cap C'), \varepsilon_{n+1}).$$

Seja $w \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{x}_0 + \dots + \tilde{x}_n + (\tilde{B}_{\varepsilon_n} \cap \tilde{C})$. Existem $x \in C$ e $\lambda > 0$ tais que $w = (\lambda x, \lambda)$. É claro que

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n = \lambda x \text{ e } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B(0, \varepsilon_{n+1}) \cap C') = \{\lambda x\}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}_{>0}$ temos que

$$w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n, \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n x_n, \sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \right) + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n x_n, \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \right) = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{x}_k + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n x_n, \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \right).$$

Assim, $\left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n x_n, \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \right) \in \tilde{B}_{\varepsilon_{m-1}} \cap \tilde{C}$. Isto é, $\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n x_n \in \left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \right) \cdot C$. Portanto, Σ é uma estratégia vencedora para o Jogador II em $Y(C)$.

Reciprocamente, seja Ψ uma estratégia vencedora para o Jogador II em $Y(C)$. Construiremos uma estratégia Ξ para o Jogador II em $G_{\tilde{C}}^s$.

Suponhamos que o Jogador I começa escolhendo $\tilde{x}_0 \in \tilde{C}$ e $W_0 \in \sigma(\tilde{C})$ tais que $\tilde{x}_0 \in W_0$. Existem $x_0 \in C$, $\lambda_0 > 0$ e $r_0 > 0$ tais que $\tilde{x}_0 = (\lambda_0 x_0, \lambda_0)$ e $\tilde{x}_0 + (\tilde{B}_{r_0} \cap \tilde{C}) \subseteq W_0$. Ademais, $\Psi(x_0, \lambda_0, C') = (V_0, \varepsilon_0)$, onde $\lambda_0 x_0 \in V_0 \subseteq C'$. Existe $t_0 > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + (B(0, t_0) \cap C') \subseteq V_0$. Fazendo $\delta_0 = \min\{r_0, t_0, \varepsilon_0\}$, o Jogador II define $\Xi(\tilde{x}_0, W_0) = \tilde{x}_0 + (\tilde{B}_{\delta_0} \cap \tilde{C})$. Em seguida o Jogador I escolhe $\tilde{x}_1 \in \tilde{C}$ e $W_1 \in \sigma(\tilde{C})$ tais que $\tilde{x}_1 \in W_1 \subseteq \Xi(\tilde{x}_0, W_0)$. Existem $x_1 \in C$, $\lambda_1 > 0$ e $r_1 > 0$ tais que $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0 = (\lambda_1 x_1, \lambda_1) \in \tilde{B}_{\delta_0} \cap \tilde{C}$ e $\tilde{x}_1 + (\tilde{B}_{r_1} \cap \tilde{C}) \subseteq W_1$. Ademais, $\Psi((x_0, \lambda_0, C'), (x_1, \lambda_1, \lambda_0 x_0 + (B(0, \delta_0) \cap C'))) = (V_1, \varepsilon_1)$, onde $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \in V_1 \subseteq \lambda_0 x_0 + (B(0, \delta_0) \cap C')$. Existe $t_1 > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + (B(0, t_1) \cap C') \subseteq V_1$. Fazendo $\delta_1 = \min\{r_1, t_1, \varepsilon_1\}$, o Jogador II define $\Xi((\tilde{x}_0, W_0), (\tilde{x}_1, W_1)) = \tilde{x}_1 + (\tilde{B}_{\delta_1} \cap \tilde{C})$.

Suponhamos que, na n -ésima rodada, o Jogador I escolhe $\tilde{x}_n \in \tilde{C}$ e $W_n \in \sigma(\tilde{C})$ tais que $\tilde{x}_n \in$

$W_n \subseteq \Xi((\tilde{x}_0, W_0), \dots, (\tilde{x}_{n-1}, W_{n-1}))$. Existem $x_n \in C$, $\lambda_n > 0$ e $r_n > 0$ tais que $\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1} = (\lambda_n x_n, \lambda_n) \in \tilde{B}_{\delta_{n-1}} \cap \tilde{C}$ e $\tilde{x}_n + (\tilde{B}_{r_n} \cap \tilde{C}) \subseteq W_n$. Do mesmo jeito, aplicando a estratégia Ψ , temos que

$$\Psi((x_0, \lambda_0, C'), \dots, (x_n, \lambda_n, \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + (B(0, \delta_{n-1}) \cap C'))) = (V_n, \varepsilon_n),$$

onde $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n \in V_n \subseteq \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + (B(0, \delta_{n-1}) \cap C')$. Existe $t_n > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B(0, t_n) \cap C') \subseteq V_n$. Se $\delta_n = \min\{r_n, t_n, \varepsilon_n\}$ então o Jogador II define

$$\Xi((\tilde{x}_0, W_0), \dots, (\tilde{x}_n, W_n)) = \tilde{x}_n + (\tilde{B}_{\delta_n} \cap \tilde{C}).$$

Dado que Ψ é uma estratégia vencedora, obtemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \infty$ e, para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B(0, \delta_n) \cap C') \subseteq \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{m-1} x_{m-1} + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \right) \cdot C.$$

Sejam $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ e $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B(0, \delta_n) \cap C')$. Logo $\|\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n - z\| < \delta_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $z = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$. Além disso, como $\tilde{x}_{n+1} + (\tilde{B}_{\delta_{n+1}} \cap \tilde{C}) \subseteq \tilde{x}_n + (\tilde{B}_{\delta_n} \cap \tilde{C})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m < \delta_n$. Então $(z, \lambda) \in \tilde{x}_n + (\tilde{B}_{\delta_n} \cap \tilde{C})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, Ξ é uma estratégia vencedora para o Jogador II em $G_{\tilde{C}}^s$. $\square$

Definição 3.2.11. Sejam E um e.v.t. separado e $A \subseteq E$. Dizemos que uma série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é **convergente** se a sequência $y_n = \sum_{k=0}^n x_k$ é convergente. Uma **série convexa** de A é uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n$, onde $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$, e $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = 1$. Dizemos que A é um conjunto **CS-fechado** se para toda série convexa convergente de A , a soma dela está em A .

O seguinte jogo permite estabelecer uma relação simples entre os conjuntos p -completos e CS-fechados nos espaços de Banach.

Definição 3.2.12. Sejam E um espaço de Banach e $C \subseteq E$ um conjunto convexo. Definimos um jogo em C , denotado por $\Gamma(C)$, do seguinte modo. O Jogador I escolhe um ponto $x_0 \in C$ e um número positivo $\lambda_0 > 0$. Em seguida o Jogador II responde escolhendo $\varepsilon_0 > 0$. A seguir o Jogador I escolhe $x_1 \in C$ e $\lambda_1 > 0$ tais que $\|\lambda_1 x_1\| < \varepsilon_0$ e $\lambda_1 < \varepsilon_0$. Agora o Jogador II escolhe $\varepsilon_1 > 0$ e assim sucessivamente. Dizemos que o Jogador II **vence** em $\Gamma(C)$ se $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \infty$ e ademais, para cada

$m \in \mathbb{N}$, temos que $\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n x_n \in \left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \right) \cdot C$. Caso contrário, o Jogador I é o **vencedor**.

No caso em que o jogo seja desenvolvido sem memória (isto é, cada jogador só conhece o último movimento do outro), uma estratégia Σ para o Jogador II é **razoável** se $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, onde $\varepsilon_n = \Sigma(x_n, \lambda_n)$ para quaisquer $x_n \in C$ e $\lambda_n > 0$ que jogue o Jogador I.

Teorema 3.2.13. Seja C um subconjunto convexo de um espaço de Banach E . O Jogador II possui uma estratégia vencedora em $\Gamma(C)$ se, e somente se, C é um conjunto estritamente p -completo.

Demonstração. Provaremos tal equivalência por meio da Proposição 3.2.10. Seja Σ uma estratégia vencedora para o Jogador II em $\Gamma(C)$. Em seguida definiremos uma estratégia Δ para o Jogador II em $\Upsilon(C)$. Suponhamos que o Jogador I começa o jogo escolhendo $x_0 \in C$, $\lambda_0 > 0$ e $U_0 \in \sigma(C')$ tais que $\lambda_0 x_0 \in U_0$. Existe $r_0 > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 \in \lambda_0 x_0 + (B(0, r_0) \cap C') \subseteq U_0$. Seja $\varepsilon_0 = \Sigma(x_0, \lambda_0)$ e considerando $\delta_0 = \min\{\varepsilon_0, r_0\}$, o Jogador II define $\Delta(x_0, \lambda_0, U_0) = (\lambda_0 x_0 + (B(0, \delta_0) \cap C'), \delta_0)$. Na rodada seguinte, o Jogador I escolhe $x_1 \in C$, $\lambda_1 > 0$ e $U_1 \in \sigma(C')$ tais que $\lambda_1 < \delta_0$ e $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \in U_1 \subseteq \lambda_0 x_0 + (B(0, \delta_0) \cap C')$. Existe $r_1 > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \in \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + (B(0, r_1) \cap C') \subseteq U_1$. Seja $\varepsilon_1 = \Sigma((x_0, \lambda_0), (x_1, \lambda_1))$ e considerando $\delta_1 = \min\{\varepsilon_1, r_1\}$, o Jogador II define $\Delta((x_0, \lambda_0, U_0), (x_1, \lambda_1, U_1)) = (\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + (B(0, \delta_1) \cap C'), \delta_1)$. Suponhamos que na n -ésima rodada o Jogador I escolhe $x_n \in C$, $\lambda_n > 0$ e $U_n \in \sigma(C')$ tais que $\lambda_n x_n \in U_n$. Existe $r_n > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n \in \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B(0, r_n) \cap C') \subseteq U_n$. Seja $\varepsilon_n = \Sigma((x_0, \lambda_0), \dots, (x_n, \lambda_n))$ e considerando $\delta_n = \min\{\varepsilon_n, r_n\}$, o Jogador II define

$$\Delta((x_0, \lambda_0, U_0), \dots, (x_n, \lambda_n, U_n)) = (\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B(0, \delta_n) \cap C'), \delta_n).$$

Vejamos que Δ é uma estratégia vencedora. Seja $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$. Além disso, dado que Σ é uma estratégia vencedora, existe $x \in C$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n = \lambda x$. Seja $m \in \mathbb{N}$ e seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > m$. Como $\lambda_0 x_0 +$

$$\dots + \lambda_m x_m + \sum_{k=m+1}^p \lambda_k x_k = \sum_{k=0}^p \lambda_k x_k \in \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_m x_m + (B(0, \delta_m) \cap C'), \text{ temos que } \left\| \sum_{k=m+1}^p \lambda_k x_k \right\| < \delta_m.$$

Em consequência, $\left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k x_k \right\| < \delta_m$. Logo $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_m x_m + (B(0, \delta_m) \cap C')$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Mais ainda, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B(0, \delta_n) \cap C') = \{\lambda x\}$. Portanto, Σ é uma estratégia vencedora para o Jogador II em $\Upsilon(C)$.

Reciprocamente, seja Θ uma estratégia vencedora para o Jogador II em $\Upsilon(C)$. A seguir construiremos uma estratégia para o Jogador II em $\Gamma(C)$.

Suponhamos que o Jogador I começa o jogo escolhendo $x_0 \in C$ e $\lambda_0 > 0$. Logo $\Theta(x_0, \lambda_0, C') = (V_0, \varepsilon_0)$, onde $\lambda_0 x_0 \in V_0 \subseteq C'$. Existe $r_0 > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + (B(0, r_0) \cap C') \subseteq V_0$. Então o Jogador II define $\varepsilon'_0 = \min\{\varepsilon_0, r_0, 1\}$. No movimento seguinte, o Jogador I escolhe $x_1 \in C$ e $\lambda_1 > 0$ tais que $\|\lambda_1 x_1\| < \varepsilon'_0$ e $\lambda_1 < \varepsilon'_0$. Como $\lambda_1 x_1 \in (B(0, \varepsilon'_0) \cap C')$, temos que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \in \lambda_0 x_0 + (B(0, \varepsilon'_0) \cap C') \subseteq V_0$. Aplicando a estratégia Θ , sabemos que $\Theta((x_0, \lambda_0, C'), (x_1, \lambda_1, \lambda_0 x_0 + (B(0, \varepsilon'_0) \cap C')) = (V_1, \varepsilon_1)$, onde $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \in V_1 \subseteq \lambda_0 x_0 + (B(0, \varepsilon'_0) \cap C')$. Logo existe $r_1 > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + (B(0, r_1) \cap C') \subseteq V_1$. Então o Jogador II responde definindo $\varepsilon'_1 = \min\{\varepsilon_1, r_1, \frac{1}{2}\}$.

Suponhamos que na n -ésima rodada o Jogador I escolhe $x_n \in C$ e $\lambda_n > 0$ tais que $\|\lambda_n x_n\| < \varepsilon'_{n-1}$ e $\lambda_n < \varepsilon'_{n-1}$. Do mesmo jeito, como $\lambda_n x_n \in B(0, \varepsilon'_{n-1}) \cap C'$, temos que

$$\Theta((x_0, \lambda_0, C'), \dots, (x_n, \lambda_n, \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + (B(0, \varepsilon'_{n-1}) \cap C'))) = (V_n, \varepsilon_n),$$

onde $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n \in V_n \subseteq \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + (B_{(0, \varepsilon'_{n-1})} \cap C')$. Assim, existe $r_n > 0$ tal que $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B_{(0, r_n)} \cap C') \subseteq V_n$. Então o Jogador II responde $\varepsilon'_n = \min\{\varepsilon_n, r_n \frac{1}{2^n}\}$.

Em seguida mostraremos que a estratégia $\Lambda((x_0, \lambda_0), \dots, (x_n, \lambda_n)) = \varepsilon'_n$ é vencedora. Se $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$

então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y \in \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n + (B_{(0, \varepsilon'_n)} \cap C')$. Logo $\left\| y - \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k \right\| < \varepsilon'_n \leq \frac{1}{2^n}$, para

cada $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n = y$. Mais ainda, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n \right\}$. Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \infty$ e, para

cada $m \in \mathbb{N}$, temos que $\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n x_n \in \left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \right) \cdot C$. $\square$

Na seguinte proposição vamos considerar o jogo $\Gamma(C)$ sem memória.

Proposição 3.2.14. Seja C um subconjunto convexo de um espaço de Banach E . Se C é CS-fechado então toda estratégia razoável para o Jogador II em $\Gamma(C)$ é uma estratégia vencedora.

Demonstração. Seja Σ uma estratégia razoável para o Jogador II em $\Gamma(C)$. Suponhamos que o Jogador I começa escolhendo $x_0 \in C$ e $\lambda_0 > 0$. O Jogador II responde $\Sigma(x_0, \lambda_0) = \varepsilon_0 > 0$. No movimento seguinte o Jogador I escolhe $x_1 \in C$ e $\lambda_1 > 0$ tais que $\|\lambda_1 x_1\| < \varepsilon_0$ e $\lambda_1 < \varepsilon_0$. Então o Jogador II escolhe $\Sigma(x_1, \lambda_1) = \varepsilon_1 > 0$. Depois de n rodadas, suponhamos que o Jogador I escolhe $x_n \in C$ e $\lambda_n > 0$ tais que $\|\lambda_n x_n\| < \varepsilon_{n-1}$ e $\lambda_n < \varepsilon_{n-1}$. Do mesmo jeito, o Jogador II responde $\Sigma(x_n, \lambda_n) = \varepsilon_n > 0$. Dado que Σ é razoável, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Além disso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ é

absolutamente convergente porque $\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Em consequência, como E é de

Banach, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $a_m = \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n$. Como C é CS-fechado,

temos que $\frac{1}{a_m} \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n x_n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda_n}{a_m} x_n \in C$.

Então $\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n x_n \in \left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \right) \cdot C$. Portanto, Σ é uma estratégia vencedora para o Jogador II. $\square$

A partir do Teorema 3.2.13 e da Proposição 3.2.14 concluímos que, nos espaços de Banach, todo conjunto CS-fechado é estritamente p -completo.

UM ESPAÇO DE DIFERENCIABILIDADE GÂTEAUX QUE NÃO É ASPLUND FRACO

Os espaços de diferenciabilidade Gâteaux e Asplund fracos foram estudados por [Larman e Phelps \(1979\)](#). Nesse trabalho, os autores deixaram uma pergunta aberta: Todo espaço de diferenciabilidade Gâteaux é Asplund fraco?

A resposta é negativa e foi fornecida por [Moors e Somasundaram \(2006\)](#). Neste capítulo apresentamos a construção de um espaço de diferenciabilidade Gâteaux que não é Asplund fraco.

Figura 1 – Resumo da construção feita por [Moors e Somasundaram \(2006\)](#).

Tal construção foi baseada na existência de um subconjunto A de $(0, 1)$ e um σ -ideal próprio $\mathcal{A}$ de $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ que satisfazem as seguintes condições que se detalharam ao longo do capítulo:

- i) A é denso e de segunda categoria em $(0, 1)$.
- ii) $\mathcal{A}$ é fortemente topologicamente estável em $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$.
- iii) $A \cap C \in \mathcal{A}_C$, para todo $C \subseteq [0, 1]$ que seja homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Dita construção será feita seguindo dois caminhos diferentes. No primeiro caminho, vamos provar que $(C(K_A), \|\cdot\|_{\infty})$ é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux a partir do fato que $(C(K_A)^*, \text{fraca}^*)$ seja fracamente Stegall. Por outro lado, no segundo caminho, vamos mostrar que $(C(K_A), \|\cdot\|_{\infty})$ não é um espaço Asplund fraco dado que A é de segunda categoria.

4.1 Espaços de diferenciabilidade Gâteaux e Asplund fracos

Nesta seção introduzimos os conceitos de espaços de diferenciabilidade Gâteaux, Asplund fraco e suas propriedades básicas.

Definição 4.1.1. Seja X um espaço de Banach. Diz-se que

- X é um **espaço Asplund fraco** se, para cada função convexa contínua definida nele, o conjunto onde ela é Gâteaux diferenciável é um subconjunto residual.
- X é um **espaço quase Asplund fraco** se, para cada função convexa contínua definida nele, o conjunto onde ela é Gâteaux diferenciável é um subconjunto de segunda categoria em toda parte. ¹
- X é um **espaço de diferenciabilidade Gâteaux** se, para toda função convexa contínua definida nele, o conjunto onde ela é Gâteaux diferenciável é um subconjunto denso.

Observação 4.1.2. A partir das definições sabemos que todo espaço Asplund fraco é quase Asplund fraco. Assim também, em virtude da Proposição 1.3.21, todo espaço quase Asplund fraco é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux.

Exemplo 4.1.3. Em virtude do Teorema 1.6.12, todo espaço de Banach separável é Asplund fraco.

Teorema 4.1.4. Seja $T : X \rightarrow Y$ uma função linear, contínua e sobrejetora entre espaços de Banach.

¹ Ver Definição 1.3.19

- a) Se X é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux, então Y é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux.
- b) Se X é um espaço Asplund fraco, então Y é um espaço Asplund fraco.

Demonstração. Sejam $U \subseteq Y$ um aberto convexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e convexa. Não é difícil ver que $V = T^{-1}(U)$ é aberto e convexo. Mais ainda, a função $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = (f \circ T)(x)$ é contínua e convexa. Denotemos por D_f e D_g os conjuntos onde f e g são Gâteaux diferenciáveis.

Se X é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux, então D_g é denso em V e, pela sobrejetividade e continuidade de T , $T(D_g)$ é denso em U . Sejam $y \in T(D_g)$ e $v \in Y$, existem $x \in D_g$ e $u \in X$ tais que $y = T(x)$ e $v = T(u)$. Logo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(y+tv) + f(y-tv) - 2f(y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x+tu) + g(x-tu) - 2g(x)}{t} = 0.$$

Ou seja, f é Gâteaux diferenciável em y . Então $T(D_g) \subseteq D_f$ e, em consequência, D_f é denso em U . Portanto, Y é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux.

No caso que X seja Asplund fraco, D_g é residual e, em consequência, existe $W \subseteq D_g$ um subconjunto G_δ denso em V . Notemos que T é aberta e que W é completamente metrizável pois X é de Banach. Consideremos a função $\psi = T|_W : W \rightarrow U$ contínua, sobrejetora e aberta. Pela Proposição 1.2.32, existe $N \subseteq W$ tal que $\psi(N)$ é um conjunto G_δ denso em U . Logo $T(N) \subseteq T(D_g) \subseteq D_f$ e, portanto, D_f é um subconjunto residual de U . Concluimos que Y é Asplund fraco. $\square$

Agora, em particular, vamos estudar as propriedades em espaços da forma $C(K)$. Por tal motivo, introduzimos a seguinte definição.

Definição 4.1.5. Seja K um espaço compacto. Definimos a função $\varphi_K : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_K(g) = \sup\{g(x) \mid x \in K\}$ e a função multi-avaliada $F_K : C(K) \rightarrow \mathcal{P}(K)$ como $F_K(h) = \{x \in K \mid h(x) = \varphi_K(h)\}$. Além disso, denotaremos por M_K o conjunto onde F_K é um-avaliada e definimos a função $f_K : M_K \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_K(h) = \varphi_K(h)$.

Observação 4.1.6. Dada $h : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua não constante, denotaremos por h^* a função definida por $h^*(x) = \frac{h(x) - a}{b - a}$, para cada $x \in K$, onde $a = \inf\{h(t) \mid t \in K\}$ e $b = \sup\{h(t) \mid t \in K\}$. Temos que h^* é uma função contínua não negativa, $F_K(h) = F_K(h^*)$ e $\varphi_K(h^*) = \|h^*\|_\infty = 1$.

Proposição 4.1.7. Dado um espaço compacto Hausdorff K , e seguindo a notação da definição anterior, obtemos o seguinte.

- a) φ_K é uma função convexa contínua, F_K éusco e f_K é contínua.
- b) $h \in M_K$ se, e só se, φ_K é Gâteaux diferenciável em h .

c) $F_K(M_K)$ é o conjunto dos pontos G_δ de K .

d) F_K e f_K são funções abertas.

Demonstração. Por simplicidade escreveremos f, F, φ em lugar de f_K, F_K, φ_K .

a) Não é difícil ver que φ é convexa. Sejam $g \in C(K)$ e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência que converge a g . Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g_n - g\|_\infty < \varepsilon$, para qualquer $n \geq n_0$. Para quaisquer $x \in K$ e $n \geq n_0$ vale que $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$. Logo $g_n(x) < \varepsilon + g(x) \leq \varepsilon + \varphi(g)$ e, por consequência, $\varphi(g_n) - \varphi(g) < \varepsilon$. Analogamente, $\varphi(g) - \varphi(g_n) < \varepsilon$. Ou seja, $|\varphi(g_n) - \varphi(g)| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$.

Para cada $h \in C(K)$, $F(h) = h^{-1}(\{\varphi(h)\}) \neq \emptyset$ é fechado e, portanto, compacto. Sejam C um fechado de K e $g' \in \overline{\{h \in C(K) \mid F(h) \cap C \neq \emptyset\}}$. Se $F(g') \cap C = \emptyset$, então existe um aberto $W \subseteq C(K)$ tal que $g' \in W$ e $W \subseteq \{h \in C(K) \mid F(h) \subseteq K \setminus C\}$. Logo existe $h' \in W$ tal que $F(h') \cap C \neq \emptyset$, o qual é absurdo. Então $\{h \in C(K) \mid F(h) \cap C \neq \emptyset\}$ é fechado. Em conclusão, F éusco.

Finalmente, dado U um aberto de $F(M)$, existe um aberto V de K tal que $U = V \cap F(M)$. Se $h \in f^{-1}(U)$, então $F(h) \subseteq V$ e, por consequência, existe um aberto W de $C(K)$ tal que $h \in W$ e $F(W) \subseteq V$. Assim, $h \in W \cap M \subseteq f^{-1}(U)$. Isto é, f é contínua.

b) Seja $h \in C(K)$. Se $h \in M$, consideremos $F(h) = \{x_0\}$. Sejam $g \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$, existe um aberto $U \subseteq K$ tal que $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para qualquer $x \in U$. Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $F(h + tg) \subseteq U$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Se $t \in (0, \delta)$, e considerando $x_1 \in F(h + tg)$ e $x_2 \in F(h - tg)$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\varphi(h + tg) + \varphi(h - tg) - 2\varphi(h)}{t} &= \frac{(h + tg)(x_1) + (h - tg)(x_2) - 2h(x_0)}{t} \\ &\leq \frac{(h + tg)(x_1) - h(x_1) + (h - tg)(x_2) - h(x_2)}{t} \\ &= g(x_1) - g(x_0) + g(x_0) - g(x_2) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Então φ é Gâteaux diferenciável em h . Reciprocamente, suponhamos que φ é Gâteaux diferenciável em h . Sejam $x, y \in F(h)$ e $p \in C(K)$, logo

$$p(x) - p(y) = \frac{(h + tp)(x) + (h - tp)(y) - 2h(x)}{t} \leq \frac{\varphi(h + tp) + \varphi(h - tp) - 2\varphi(h)}{t}.$$

E, fazendo $t \rightarrow 0^+$, obtemos $p(x) = p(y)$. Ou seja, $T(x) = T(y)$, para todo $T \in C(K)$. Se x e y são distintos, pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $\psi: K \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(K) \subseteq [0, 1]$, tal que $\psi(x) = 0$ e $\psi(y) = 1$, o qual contradiz o fato anterior. Portanto, $F(h)$ é um conjunto unitário.

c) Mostraremos que $F(M) = \{x \in K \mid x \text{ é um ponto } G_\delta \text{ de } K\}$. Dado $y_0 \in F(M)$, existe $h \in M$ tal que $F(h) = \{y_0\}$. Considerando os abertos $A_n = \{x \in K \mid h(x) > \varphi(h) - \frac{1}{n}\}$, para cada

$n \in \mathbb{N}_{>0}$, temos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{y_0\}$. Isto é, y_0 é um ponto G_δ de K .

Reciprocamente, seja x_0 um ponto G_δ de K . Existe uma sequência decrescente de abertos $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \{x_0\}$. Em virtude do Lema de Urysohn, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função contínua $g_n : K \rightarrow \mathbb{R}$, com $g_n(K) \subseteq [0, 1]$, tal que $g_n(w) = 0$, para todo $w \in K \setminus D_n$, e $g_n(x_0) = 1$. Definimos $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^{n+1}}$. Temos que $g(x_0) = 1$ e g é contínua pois $C(K)$ é de Banach. Além disso, se $x \in K \setminus \{x_0\}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_n(x) = 0$, para todo $n \geq n_0$. Em consequência, $0 \leq g(x) < 1$, para qualquer $x \in K \setminus \{x_0\}$. Portanto, $F(g) = \{x_0\}$ e $g \in M$. Isto é, $x_0 \in F(M)$.

- d) Primeiro mostraremos que, para quaisquer $h \in C(K)$ e $r > 0$, existe um aberto $G_{h,r} \subseteq K$ tal que $F(h) \subseteq G_{h,r} \subseteq F(B(h, 2r))$. Mais ainda, se $h \in M$ temos que $F(h) \subseteq G_{h,r} \cap F(M) \subseteq F(B(h, 3r) \cap M)$. De fato, no primeiro caso, consideremos o aberto $G_{h,r} = \{x \in K \mid h(x) > \varphi(h) - r\}$ e definamos a função $t : K \rightarrow \mathbb{R}$ por $t(x) = \min\{h(x) + r, \varphi(h)\}$. Temos que t é contínua, $\varphi(t) = \varphi(h)$ e $\|t - h\|_\infty < 2r$. Então $F(h) \subseteq G_{h,r} \subseteq F(t) \subseteq F(B(h, 2r))$.

No caso que $h \in M$, sabemos que $F(h) \subseteq G_{h,r} \cap F(M)$. Se $x_0 \in G_{h,r} \cap F(M)$, existe $g \in M$ tal que $F(g) = \{x_0\}$. Ademais, seguindo a notação da Observação 4.1.6, temos que $(t + rg^*)(x) < (t + rg^*)(x_0)$, para cada $x \in K \setminus \{x_0\}$. Então $t + rg^* \in M$ e $F(t + rg^*) = \{x_0\}$. Além disso, $\|t + rg^* - h\|_\infty \leq \|t - h\|_\infty + r\|g^*\|_\infty < 3r$. Portanto, $F(h) \subseteq G_{h,r} \cap F(M) \subseteq F(B(h, 3r) \cap M)$.

Dado um aberto $U \subseteq C(K)$, para cada $x \in U$ existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq U$. Logo

$$F(U) = \bigcup_{x \in U} F(x) \subseteq \bigcup_{x \in U} G_{x, \frac{r_x}{2}} \subseteq \bigcup_{x \in U} F(B(x, r_x)) \subseteq F(U).$$

Ou seja, $F(U) = \bigcup_{x \in U} G_{x, \frac{r_x}{2}}$ é um aberto de K .

Por último, dado V um aberto de M , para cada $x \in V$ existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \cap M \subseteq V$. Logo $f(V) = \bigcup_{x \in V} F(x) \subseteq \bigcup_{x \in V} G_{x, \frac{r_x}{3}} \cap F(M) \subseteq \bigcup_{x \in V} F(B(x, r_x) \cap M) \subseteq F(V) = f(V)$. Isto é, $f(V) = \bigcup_{x \in V} G_{x, \frac{r_x}{3}} \cap F(M)$ é um aberto de $F(M)$.

□

Lema 4.1.8. Em um espaço compacto Hausdorff K são equivalentes.

- i) M_K é denso.
- ii) O conjunto onde φ_K é Gâteaux diferenciável é denso.
- iii) O conjunto dos pontos G_δ de K é denso.

Demonstração. Por simplicidade escreveremos f, F, φ em lugar de f_K, F_K, φ_K . Em virtude da Proposição 4.1.7 sabemos que as afirmações (i) e (ii) são equivalentes. Mostraremos que (i)

e (iii) são equivalentes. Sejam U um aberto não vazio de K e $x_0 \in U$. Pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $y : K \rightarrow \mathbb{R}$, com $y(K) \subseteq [0, 1]$, tal que $y(x) = 0$, para cada $x \in K \setminus U$, e $y(x_0) = 1$. Como $F(y) \subseteq U$, existe um aberto $T \subseteq C(K)$ tal que $y \in T$ e $F(T) \subseteq U$. Pela densidade de M , existe $t \in M \cap T$. Assim, $\emptyset \neq F(t) \subseteq F(M) \cap U$. Ou seja, $F(M)$ é denso.

Reciprocamente, dado um aberto não vazio $V \subseteq C(K)$, como F é aberta e $F(M)$ é denso, existem $w \in V$ e $g \in M$ tais que $F(g) \subseteq F(w)$. Ademais existe $r > 0$ tal que $B(w, r) \subseteq V$. Assim, seguindo a notação da Observação 4.1.6, $w + \frac{r}{2}g^* \in V$ e $F(w + \frac{r}{2}g^*) = F(g^*) = F(g)$. Isto é, $w + \frac{r}{2}g^* \in V \cap M$ e, portanto, M é denso. $\square$

Corolário 4.1.9. Em um espaço compacto Hausdorff K são equivalentes.

- i) M_K contém um conjunto G_δ denso.
- ii) O conjunto onde ϕ_K é Gâteaux diferenciável contém um conjunto G_δ denso.
- iii) O conjunto dos pontos G_δ de K contém um conjunto G_δ denso completamente metrizável.

Demonstração. Por simplicidade escreveremos f, F, ϕ em lugar de f_K, F_K, ϕ_K . Em virtude da Proposição 4.1.7 obtemos que as afirmações (i) e (ii) são equivalentes. Mostraremos que (i) implica (iii) e vice-versa. Se existe $E \subseteq M$ um conjunto G_δ denso em $C(K)$, então, pelo Lema 4.1.8, $F(M) = f(M)$ é denso em K . Como $C(K)$ é de Banach, E é G_δ denso completamente metrizável. Aplicando a Proposição 1.2.32 na função $f : M \rightarrow f(M)$, concluímos que K contém um subconjunto G_δ denso completamente metrizável e, além disso, cada ponto dele é um ponto G_δ de K em virtude da Proposição 1.2.31.

Reciprocamente, suponhamos que $F(M)$ contém um subconjunto G_δ completamente metrizável denso em $C(K)$. Sejam D tal subconjunto e d uma métrica completa que induz a topologia de D . Afirmamos que o conjunto $H = \{x \in M \mid F(x) \in D\}$ é denso. De fato, seja P um aberto não vazio de $C(K)$. Sabemos que $F(P) \cap D \neq \emptyset$. Existem $x_0 \in D$ e $h' \in P$ tais que $x_0 \in F(h')$. Ademais existem $r > 0$ e $g \in M$ tais que $B(h', r) \subseteq P$ e $F(g) = \{x_0\}$. Logo, seguindo a notação da Observação 4.1.6, $h' + \frac{r}{2}g^* \in P \cap H$. Então H é denso.

Para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definimos

$$G_n = \left\{x \in C(K) \mid \text{existe um aberto } U \subseteq K \text{ tal que } F(x) \subseteq U \text{ e } d - \text{diam}(\overline{U} \cap D) < \frac{1}{n}\right\},$$

o qual é aberto pois F éusco. Mostraremos que $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ contém H . Sejam $h \in H$ e $n \in \mathbb{N}_{>0}$, existe um aberto U de K tal que $B(F(h), \frac{1}{2n}) = U \cap D$. Ademais existe um aberto $V \subseteq K$ tal que $F(h) \in V$ e $\overline{V} \subseteq U$ e, em consequência, $d - \text{diam}(\overline{V} \cap D) < \frac{1}{n}$. Ou seja, $h \in G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Então $H \subseteq N$ e, portanto, N é denso.

Finalmente vejamos que $N \subseteq M$. Dado $x \in N$, para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$, existe um aberto $U_n \subseteq K$ tal que $F(x) \subseteq U_n$ e $d - \text{diam}(\overline{U_n} \cap D) < \frac{1}{n}$. Sabemos que $\emptyset \neq D \cap \bigcap_{i=1}^n U_n \subseteq D \cap \bigcap_{i=1}^n \overline{U_n}$. Logo, pelo

Teorema 1.2.3, existe $k_0 \in K$ tal que $D \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = \{k_0\}$. Se existe $k' \in F(x) \setminus \{k_0\}$, então existe um aberto $W \subseteq K$ tal que $k_0 \in W$ e $k' \notin \overline{W}$. Em consequência, $D \cap \overline{U_i} \subseteq W$ para algum $i \in \mathbb{N}_{>0}$. Então $k' \in F(x) \subseteq U_i \subseteq \overline{D \cap U_i} = \overline{D \cap \overline{U_i}} \subseteq \overline{W}$, o qual é falso. Ou seja, $F(x) = \{k_0\}$ e, portanto, $N \subseteq M$. Isto é, N é um conjunto G_δ denso em K e contido em M . $\square$

O seguinte teorema fornece uma propriedade importante dos espaços de diferenciabilidade Gâteaux e Asplund fracos da forma $C(K)$.

Teorema 4.1.10. Seja K um espaço compacto Hausdorff.

- 1) Se $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux, então para cada subconjunto fechado $A \subseteq K$, o conjunto dos pontos G_δ de A é denso em A .
- 2) Se $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço Asplund fraco, então cada subconjunto fechado $A \subseteq K$ possui um subespaço G_δ completamente metrizável denso em A .

Demonstração.

- 1) Dado que $C(K)$ é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux, φ_K é Gâteaux diferenciável num conjunto denso de $C(K)$. A partir do Lema 4.1.8 sabemos que o conjunto dos pontos G_δ de K é denso em K . Se $A \subseteq K$ é um subconjunto fechado, consideremos a função linear $T : C(K) \rightarrow C(A)$ definida por $T(f) = f|_A$. Não é difícil ver que T é contínua e, pelo Teorema de Tietze-Urysohn, é sobrejetora. Logo, em virtude do Teorema 4.1.4, $C(A)$ também é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux. O resultado final é obtido aplicando novamente o Lema 4.1.8 a φ_A .
- 2) Dado que $C(K)$ é um espaço Asplund fraco, φ_K é Gâteaux diferenciável num conjunto residual de $C(K)$. A partir do Corolário 4.1.9 sabemos que K contém um subconjunto G_δ denso completamente metrizável. Se $A \subseteq K$ é um subconjunto fechado, consideremos a função linear $T : C(K) \rightarrow C(A)$ definida por $T(f) = f|_A$. Não é difícil ver que T é contínua e, pelo Teorema de Tietze-Urysohn, é sobrejetora. Logo, em virtude do Teorema 4.1.4, $C(A)$ também é um espaço Asplund fraco. O resultado final é obtido aplicando novamente o Corolário 4.1.9 a φ_A .

$\square$

Finalmente definimos os espaços Stegal, fracamente Stegall e estabelecemos uma relação com os espaços Asplund fracos.

Definição 4.1.11. Seja X um espaço de Hausdorff. Dizemos que

- X é um **espaço Stegall** se, para quaisquer espaço de Baire B eusco minimal $\varphi : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$, φ é um-avaliada em algum ponto de B .
- X é um **espaço fracamente Stegall** se, para quaisquer espaço métrico completo M eusco minimal $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(X)$, φ é um-avaliada em algum ponto de M .

Exemplo 4.1.12. Em virtude da Proposição 1.4.12, todo espaço topológico fragmentado por uma métrica é um espaço Stegall.

Proposição 4.1.13. Seja X um espaço de Hausdorff. Logo X é Stegall se, e só se, para quaisquer espaço de Baire B eusco minimal $\varphi : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$, temos que φ é um-avaliada num subconjunto residual.

Demonstração. Basta provar a necessidade. Sejam B um espaço de Baire e $\varphi : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$ usco minimal. Denotemos por R o conjunto onde φ é um-avaliada. Se R^c é de segunda categoria, pelo Teorema 1.3.16, existe um aberto não vazio U tal que $R^c \cap U$ é de Baire e, para todo aberto não vazio V de U , $R^c \cap V$ é de segunda categoria. Mostraremos que $\psi = \varphi|_{R^c \cap U}$ é minimal usco. Sejam Z um aberto de $R^c \cap U$ e W um aberto de X tais que $\psi(Z) \cap W \neq \emptyset$. Existe um aberto A de B tal que $Z = R^c \cap U \cap A$. Dado que $\varphi(U \cap A) \cap W \neq \emptyset$, e aplicando o item (c) do Lema 1.4.6, existe um aberto não vazio $N \subseteq A \cap U$ tal que $\varphi(N) \subseteq W$. Em consequência, $N \cap R^c$ é um aberto não vazio de $R^c \cap U$ tal que $\psi(N \cap R^c) \subseteq W$.

Logo, a partir do fato que X é um espaço Stegall, existe $x \in R^c \cap U$ tal que $\psi(x)$ é um conjunto unitário. Então $x \in R$, o qual é absurdo. Portanto, R^c é magro. Ou seja, R é residual. $\square$

O seguinte teorema fornece uma relação entre os espaços Stegall e fracamente Stegall com os espaços Asplund fracos e quase Asplund fracos, respectivamente.

Teorema 4.1.14. Seja X um espaço de Banach.

- 1) Se (X^*, fraca^*) é Stegall, então X é Asplund fraco.
- 2) Se (X^*, fraca^*) é fracamente Stegall, então X é quase Asplund fraco.

Demonstração. Sejam $U \subseteq X$ um aberto convexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e convexa. Pela Proposição 1.4.7, existe $\varphi : U \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$ usco minimal tal que $\varphi \subseteq \partial f$. Denotemos por D_f o conjunto onde f é Gâteaux diferenciável e R o conjunto onde φ é um-avaliada, demonstraremos que $R \subseteq D_f$. De fato, sejam $x_0 \in R$ e $v \in X$, e consideremos ademais uma seleção h de φ . Para qualquer $t > 0$ temos que

$$[h(x_0)](v) \leq \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \leq [h(x_0 + tv)](v),$$

$$[h(x_0)](-v) \leq \frac{f(x_0 - tv) - f(x_0)}{t} \leq [h(x_0 - tv)](-v).$$

Dado $\varepsilon > 0$, como φ é usco, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq \{z \in U \mid \varphi(z) \subseteq V(h(x_0); v; \frac{\varepsilon}{2})\}$. Assim, se $t \in (-\delta, \delta)$, então

$$0 \leq \frac{f(x_0 + tv) + f(x_0 - tv) - 2f(x_0)}{t} \leq [h(x_0 + tv) - h(x_0 - tv)](v) < \varepsilon.$$

Ou seja, f é Gâteaux diferenciável em x_0 e, portanto, $R \subseteq D_f$.

Se (X^*, fraca^*) é Stegall, pela Proposição 4.1.13, obtemos que R é residual em U . Logo D_f também é residual em U . Isto é, X é Asplund fraco.

Caso (X^*, fraca^*) seja fracamente Stegall, suponhamos que R não é de segunda categoria em toda parte em U . Logo existe um aberto $V \subseteq U$ tal que $V \cap R$ é magro em V . Assim $V \setminus R$ é residual e, em consequência, existe B um subconjunto G_δ denso em V tal que $B \cap R = \emptyset$. Pela Proposição 1.4.8, $\varphi|_V$ é usco minimal. Como B é conjunto G_δ de X , ele é completamente metrizável e, portanto, $\varphi|_B : B \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$ também é usco minimal. Dado que X^* é fracamente Stegall, $\varphi|_B$ é um-avaliada num ponto de B mas isso contradiz o fato que $B \cap R = \emptyset$. Concluimos que R , e em consequência também D_f , é de segunda categoria em toda parte em U . Portanto, X é quase Asplund fraco. $\square$

4.2 Espaços de Kalenda K_A

Como já vimos no Teorema 4.1.10, precisamos de espaços da forma $C(K)$. Por isso, na presente seção vamos estudar um tipo especial de espaços compactos Hausdorff, que foram introduzidos por Kalenda (1999), e suas propriedades básicas.

Definição 4.2.1. Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto sem pontos isolados e $x_0 \in E$. Dizemos que x_0 é um **ponto isolado pela esquerda de E** se existe $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0) \cap E = \emptyset$. Analogamente, x_0 é um **ponto isolado pela direita de E** se existe $r > 0$ tal que $(x_0, x_0 + r) \cap E = \emptyset$. Os conjuntos dos pontos isolados pela esquerda e direita de E serão denotados por E^l e E^r , respectivamente, e $E^d = E \setminus (E^l \cup E^r)$.

Exemplo 4.2.2. Se $E = [0, 1]$, então $E^l = \{0\}$, $E^r = \{1\}$ e $E^d = (0, 1)$.

Proposição 4.2.3. Dado $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto sem pontos isolados, os conjuntos E^r e E^l são enumeráveis.

Demonstração. Para cada $x \in E^r$, existe $r_x > 0$ tal que $(x, x + r_x) \cap E = \emptyset$. Em consequência a família $\{[x, x + r_x)\}_{x \in E^r}$ é disjunta dois a dois. Pela densidade dos racionais concluimos que E^r é enumerável. Analogamente, E^l também é enumerável. $\square$

Definição 4.2.4. Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto compacto perfeito² e $A \subseteq K^d$. Definimos o **espaço de Kalenda** como $K_A = ((K \setminus K^l) \times \{0\}) \cup ((A \cup K^l) \times \{1\})$. Para cada $(t, s) \in K_A$ definimos uma base local $\mathcal{B}(t, s)$ do seguinte modo

- (i) $\{((t-r, t+r) \times \{0, 1\}) \cap K_A \mid r > 0\}$, se $t \in K^d \setminus A$ e $s = 0$.
- (ii) $\{((t-r, t] \times \{0\} \cup (t-r, t) \times \{1\}) \cap K_A \mid r > 0\}$, se $t \in A \cup K^r$ e $s = 0$.
- (iii) $\{((t, t+r) \times \{0\} \cup [t, t+r) \times \{1\}) \cap K_A \mid r > 0\}$, se $t \in A \cup K^l$ e $s = 1$.

Sobre K_A consideramos a topologia gerada pelas bases locais acima, em virtude da Proposição 1.2.11, denotada por τ_{K_A} .

Proposição 4.2.5. O espaço (K_A, τ_{K_A}) é Hausdorff, primeiro-contável, perfeito, compacto e hereditariamente de Lindelöf.

Demonstração. Da definição de τ_{K_A} obtemos que K_A é primeiro-contável e perfeito. Sejam $(a, s_1), (b, s_2) \in K_A$ distintos. Se $a = b$, então $a \in A$. Logo os abertos básicos $((a - \frac{1}{2}, a] \times \{0\} \cup (a - \frac{1}{2}, a) \times \{1\}) \cap K_A$ e $((a, a + \frac{1}{2}) \times \{0\} \cup [a, a + \frac{1}{2}) \times \{1\}) \cap K_A$ separam $(a, 0)$ e $(a, 1)$. No caso que $a \neq b$, basta tomar seus abertos básicos correspondentes com $r = \frac{|a-b|}{3}$.

Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de K_A . Ou seja, para cada $x \in K_A$ existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. A partir de $\mathcal{U}$ vamos obter um recobrimento para o conjunto K do seguinte modo. Para cada $t \in K$ existe $\delta_t > 0$ tal que

- $((t - \delta_t, t + \delta_t) \times \{0, 1\}) \cap K_A \subseteq U_{(t,0)}$, se $t \in K^d \setminus A$.
- $((t - \delta_t, t] \times \{0\} \cup (t - \delta_t, t) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq U_{(t,0)}$, se $t \in K^r$.
- $((t, t + \delta_t) \times \{0\} \cup [t, t + \delta_t) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq U_{(t,1)}$, se $t \in K^l$.
- $((t - \delta_t, t] \times \{0\} \cup (t - \delta_t, t) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq U_{(t,0)}$ e $((t, t + \delta_t) \times \{0\} \cup [t, t + \delta_t) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq U_{(t,1)}$, se $t \in A$.

Assim, $\{(t - \delta_t, t + \delta_t)\}_{t \in K}$ é uma cobertura aberta de K e, por consequência, existe $F \subseteq K$ finito tal que $K \subseteq \bigcup_{t \in F} (t - \delta_t, t + \delta_t)$. Logo $K_A \subseteq \bigcup_{t \in F_0} U_{(t,0)} \cup \bigcup_{t \in F_1} U_{(t,1)}$, onde $F_0 = F \cap (K \setminus K^l)$ e $F_1 = F \cap (K^l \cup A)$. Portanto, K_A é compacto.

Agora mostraremos que K_A é hereditariamente de Lindelöf usando a Proposição 1.2.37. Sejam M um subespaço aberto de K_A e $\mathcal{G}$ um recobrimento aberto dele. Definimos os conjuntos $A_0 = \{t \in A \mid (t, 0) \in M \text{ e } (t, 1) \notin M\}$ e $A_1 = \{t \in A \mid (t, 1) \in M \text{ e } (t, 0) \notin M\}$. Para cada $t \in A_0$, existe $\varepsilon_t > 0$ tal que $((t - \varepsilon_t, t] \times \{0\} \cup (t - \varepsilon_t, t) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq U_{(t,0)}$. A família $\{(t - \varepsilon_t, t]\}_{t \in A_0}$ é disjunta dois a dois e, portanto, A_0 é enumerável. Do mesmo jeito, A_1 é enumerável. Assim, obtemos uma

² Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é **perfeito** se A é fechado e não possui pontos isolados.

subcobertura enumerável $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ que cobrem $M \cap (A_0 \times \{0\})$, $M \cap (A_1 \times \{1\})$, $M \cap (K^r \times \{0\})$ e $M \cap (K^l \times \{1\})$.

Sejam $N_0 = \{t \in K^d \setminus A \mid (t, 0) \in M\}$ e $B = \{t \in A \mid (t, 0), (t, 1) \in M\}$. Para todo $t \in N_0$, existem $U_{(t,0)} \in \mathcal{G}$ e $\delta_t > 0$ tais que $(t, 0) \in ((t - \delta_t, t + \delta_t) \times \{0, 1\}) \cap K_A \subseteq U_{(t,0)}$. Assim também, para cada $t \in B$ existem $U_{(t,0)}, U_{(t,1)} \in \mathcal{G}$ e $\delta_t > 0$ tais que $(t, 0) \in ((t - \delta_t, t] \times \{0\} \cup (t - \delta_t, t) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq U_{(t,0)}$ e $(t, 1) \in ((t, t + \delta_t) \times \{0\} \cup [t, t + \delta_t) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq U_{(t,1)}$. Obtendo assim o recobrimento $\{(t - \delta_t, t + \delta_t)\}_{t \in N_0 \cup B}$ e, dado que $\mathbb{R}$ é hereditariamente de Lindelöf, existe $P \subseteq N_0 \cup B$ enumerável tal que $N_0 \cup B \subseteq \bigcup_{t \in P} (t - \delta_t, t + \delta_t)$. Logo, $M \cap [(K^d \setminus A \times \{0\}) \cup (B \times \{0, 1\})] \subseteq \bigcup_{t \in P} U_{(t,0)} \cup \bigcup_{t \in P} U_{(t,1)}$. Concluimos que M possui uma subcobertura enumerável de $\mathcal{G}$. Portanto, K_A é hereditariamente de Lindelöf. $\square$

Observação 4.2.6. Como K_A é compacto e Hausdorff, temos que também é regular e de Baire. Ademais, no caso particular em que A é vazio, $K_\emptyset$ é homeomorfo a K . De fato, pela Proposição 1.2.24, basta ver que a função bijetora $T : K_\emptyset \rightarrow K$, definida por $T(t, s) = t$, é contínua.

Proposição 4.2.7. Dado um subconjunto $P \subseteq K$ compacto perfeito, o espaço $P_{pd \cap A}$ é homeomorfo a um subespaço fechado de K_A .

Demonstração. Notemos que $P^d \subseteq K^d$, $P^r \subseteq K \setminus K^l$ e $P^l \subseteq K \setminus K^r$. Seja $H = (P^d \times \{0, 1\}) \cup (P^l \cap A) \times \{1\} \cup (P^r \cup P^l \setminus A) \times \{0\}) \cap K_A$ e definamos $\varphi : P_{pd \cap A} \rightarrow H$ como

$$\varphi(t, s) = \begin{cases} (t, s), & \text{se } (t, s) \in P_{pd \cap A} \setminus (P^l \setminus A \times \{1\}). \\ (t, 0), & \text{se } (t, s) \in P^l \setminus A \times \{1\}. \end{cases}$$

Não é difícil verificar que φ é bijetora. Agora, pela Proposição 1.2.24, só falta provar que ela é contínua. De fato, sejam U um aberto de H e $(t, s) \in \varphi^{-1}(U)$. Se $(t, s) \in P^l \setminus A \times \{1\}$, existe $r > 0$ tal que $(t, 0) \in ((t - r, t + r) \times \{0, 1\}) \cap H \subseteq U$. Logo $(t, 1) \in ((t, t + r) \times \{0\} \cup [t, t + r) \times \{1\}) \cap P_{pd \cap A} \subseteq \varphi^{-1}(U)$. Nos demais casos é ainda mais natural. Então φ é um homeomorfismo. Além disso, H é compacto e, em consequência, é um fechado de K_A . $\square$

Proposição 4.2.8. Seja B um subconjunto de K^d que contém A . Definindo $F : K_B \rightarrow K_A$ por

$$F(t, s) = \begin{cases} (t, s), & \text{se } (t, s) \in K_A. \\ (t, 0), & \text{se } (t, s) \in B \setminus A \times \{1\}. \end{cases}$$

obtemos o seguinte

- (1) F é sobrejetora, contínua e fechada. Ademais, para cada $x \in K_A$, $F^{-1}(x)$ é finito.
- (2) Se $G \subseteq K_B$ possui interior não vazio em K_B então $F(G)$ possui interior não vazio em K_A .
- (3) Para todo M Boreliano de K_B temos que $F(M)$ é um Boreliano de K_A e $F^{-1}(F(M)) \setminus M$ é enumerável.
- (4) M é magro em K_B se, e só se, $F(M)$ é magro em K_A .

Demonstração. Notemos que $F(P) = (P \cap K_A) \cup \{t \in B \setminus A \mid (t, 1) \in P \text{ e } (t, 0) \notin P\} \times \{0\}$ para qualquer $P \subseteq K_B$ e $F^{-1}(R) = R \cup \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \in R\} \times \{1\}$ para todo $R \subseteq K_A$.

Seja $M \subseteq K_B$, e definindo os conjuntos $M_0 = \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \notin M \text{ e } (t, 1) \in M\}$ e $M_1 = \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \in M \text{ e } (t, 1) \notin M\}$, obtemos

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(M)) &= F^{-1}(M \cap K_A) \cup F^{-1}(M_0 \times \{0\}) \\ &= (M \cap K_A) \cup \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \in M \cap K_A\} \times \{1\} \cup M_0 \times \{0\} \\ &\quad \cup (M \cap B \setminus A \times \{1\}) \setminus \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \in M\} \times \{1\} \\ &= (M \cap K_A) \cup M_0 \times \{0\} \cup (M \cap B \setminus A \times \{1\}) \cup M_1 \times \{1\} \\ &= M \cup M_0 \times \{0\} \cup M_1 \times \{1\}. \end{aligned}$$

(1) A partir da definição de F , ela é sobrejetora. Sejam L um aberto de K_A e $(t, s) \in F^{-1}(L)$.

No primeiro caso em que $(t, s) \in L$, temos os seguintes subcasos:

- Se $(t, s) \in L \cap ((K^d \setminus A) \times \{0\})$, existe $\delta > 0$ tal que $((t - \delta, t + \delta) \times \{0, 1\}) \cap K_A \subseteq L$. Se $(x, 1) \in ((t - \delta, t + \delta) \cap B \setminus A) \times \{1\}$, então $x \in B \setminus A \subseteq K^d \setminus A$ e $(x, 0) \in L$. Ou seja, $((t - \delta, t + \delta) \times \{0, 1\}) \cap B \setminus A \times \{1\} \subseteq \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \in L\} \times \{1\}$ e, em consequência, $(t, s) \in ((t - \delta, t + \delta) \times \{0, 1\}) \cap K_B \subseteq F^{-1}(L)$.
- Se $(t, s) \in L \cap ((K^r \cup A) \times \{0\})$, existe $\delta > 0$ tal que $((t - \delta, t] \times \{0\} \cup (t - \delta, t) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq L$. Se $(x, 1) \in ((t - \delta, t) \cap B \setminus A) \times \{1\}$, então $(x, 0) \in L$. Assim, $((t - \delta, t) \cap B \setminus A) \times \{1\} \subseteq \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \in L\} \times \{1\}$. Então $((t - \delta, t] \times \{0\} \cup (t - \delta, t) \times \{1\}) \cap K_B \subseteq F^{-1}(L)$.
- Se $(t, s) \in L \cap ((K^l \cup A) \times \{1\})$, existe $\delta > 0$ tal que $((t, t + \delta) \times \{0\} \cup [t, t + \delta) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq L$. Se $(x, 1) \in ([t, t + \delta) \cap B \setminus A) \times \{1\}$, então $(x, 0) \in L$. Assim, $([t, t + \delta) \cap B \setminus A) \times \{1\} \subseteq \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \in L\} \times \{1\}$. Então $((t, t + \delta) \times \{0\} \cup [t, t + \delta) \times \{1\}) \cap K_B \subseteq F^{-1}(L)$.

No segundo caso, se $(t, s) \in \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \in L\} \times \{1\}$ temos que $(t, 0) \in L \cap (K^d \setminus A \times \{0\})$, então existe $r > 0$ tal que $(t, 0) \in ((t - r, t + r) \times \{0, 1\}) \cap K_A \subseteq L$. Logo, analogamente ao primeiro caso, $((t - r, t + r) \times \{0, 1\}) \cap K_B \subseteq L \cup \{t \in B \setminus A \mid (t, 0) \in L\} \times \{1\}$. Portanto, $F^{-1}(L)$ é aberto em K_B .

Além disso, F é fechada a partir da Proposição 1.2.24. Por último, seja $x \in K_A$. Se $x \in B \setminus A \times \{0\}$, existe $t \in B \setminus A$ tal que $x = (t, 0)$. Logo $F^{-1}(x) = \{(t, 0), (t, 1)\}$. Se $x \in K_A \setminus (B \setminus A \times \{0\})$, então $F^{-1}(x) = \{x\}$.

(2) Seja $G \subseteq K_B$ tal que G possui interior não vazio em K_B . Logo existe $(t, s) \in \text{int}(G)$. Se $(t, s) \in K^d \setminus A \times \{0\}$, então existe $r > 0$ tal que $(t, 0) \in ((t - r, t + r) \times \{0, 1\}) \cap K_B \subseteq \text{int}(G)$. Logo $((t - r, t + r) \times \{0, 1\}) \cap K_A \subseteq F(((t - r, t + r) \times \{0, 1\}) \cap K_B) \subseteq F(G)$. Os outros casos são análogos. Portanto, o interior do $F(G)$ é não vazio em K_A .

- (3) Denotemos por $\mathcal{F}$ a família de subconjuntos de K_B que satisfazem a propriedade desejada, demonstraremos que $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra que contém a topologia τ_{K_B} .

- i) Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{F}$, logo $F\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(A_n)$ é Boreliano e ademais o conjunto

$$F^{-1}\left(F\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-1}(F(A_n)) \setminus A_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-1}(F(A_n)) \setminus A_n$$

é enumerável.

- ii) Dado $D \subseteq K_B$, mostraremos que $F(K_B \setminus D) = (K_A \setminus F(D)) \cup F(F^{-1}(F(D)) \setminus D)$. De fato, como $F^{-1}(F(D)) \setminus D \subseteq K_B \setminus M$ e $K_A \setminus F(D) \subseteq F(K_B \setminus D)$, vale que $(K_A \setminus F(D)) \cup F(F^{-1}(F(D)) \setminus D) \subseteq F(K_B \setminus D)$. Seja $y \in F(K_B \setminus D)$, existe $x \in K_B \setminus D$ tal que $y = F(x)$. Se $y \in F(D)$, então $x \in F^{-1}(F(D)) \cap (K_B \setminus D)$ e, em consequência, $y \in F(F^{-1}(F(D)) \setminus D)$.

Seja $M \in \mathcal{F}$, logo $F(F^{-1}(F(M)) \setminus M)$ é um conjunto F_σ pois é enumerável e, em consequência, é um Boreliano de K_A . Então $F(K_B \setminus M)$ é um Boreliano de K_A .

Além disso, dado que $P = F(F^{-1}(F(K_B \setminus M)) \setminus (K_B \setminus M)) = F(F^{-1}(F(M)) \setminus M)$ é enumerável, $F^{-1}(P) = \bigcup_{x \in P} F^{-1}(x)$ também o é. Assim, $F^{-1}(F(K_B \setminus M)) \setminus (K_B \setminus M)$ é enumerável. Portanto, $K_B \setminus M \in \mathcal{F}$.

- iii) Se E é um aberto de K_B , então $E \cap K_A$ é um aberto de K_A . Agora mostraremos que os conjuntos E_0 e E_1 , como foram definidos no começo, são enumeráveis. De fato, para cada $t \in E_0$ existe $\delta_t > 0$ tal que $(t, 1) \in ((t, t + \delta_t) \times \{0\} \cup [t, t + \delta_t] \times \{1\}) \cap K_B \subseteq E$. A família $\{[t, t + \delta_t]\}_{t \in E_0}$ é disjunta dois a dois e, portanto, E_0 é enumerável. Com o mesmo raciocínio, E_1 também é enumerável. Ademais, os conjuntos $E_0 \times \{0\}$ e $E_1 \times \{1\}$ são F_σ . Logo $F(E) = (E \cap K_A) \cup E_0 \times \{0\}$ é um Boreliano de K_A e $F^{-1}(F(E)) \setminus E = E_0 \times \{0\} \cup E_1 \times \{1\}$ é enumerável. Portanto, $E \in \mathcal{F}$.

- (4) Seja $M \subseteq K_B$. Primeiro mostraremos a equivalência para o caso particular dos conjuntos raros. Se M é raro em K_B , $\overline{M}$ também o é. Suponhamos que $F(\overline{M})$ contém um aberto G de K_A , logo $F^{-1}(G)$ é um aberto não vazio de K_B e, portanto, é de segunda categoria em K_B . Pelo item (3), $F^{-1}(G) \setminus \overline{M} \subseteq F^{-1}(F(\overline{M})) \setminus \overline{M}$ é enumerável e, em consequência, é magro em K_B . Logo $F^{-1}(G) \cap \overline{M}$ é de segunda categoria, mas isso não pode ser verdade porque ele é um subconjunto de $\overline{M}$. Então $F(M) \subseteq F(\overline{M})$ é raro. Reciprocamente, se $F(M)$ é raro em K_A , $\overline{F(M)}$ também o é. Se o interior de $F^{-1}(\overline{F(M)})$ é não vazio em K_B , então pelo item (2), o interior de $\overline{F(M)} = F(F^{-1}(\overline{F(M)}))$ é não vazio em K_A , mas isso contradiz o fato que ele seja raro em K_A . Portanto, $M \subseteq F^{-1}(\overline{F(M)})$ é raro em K_A .

Agora vamos ao caso geral dos conjuntos magros. Se M é magro em K_B , existe uma sequência $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos raros em K_B tal que $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Logo $F(M_n)$ é raro em K_A , para cada $n \in \mathbb{N}$, e $F(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(M_n)$ é magro em K_A . Reciprocamente, se $F(M)$ é magro

em K_A , existe uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos raros em K_A tal que $F(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Logo $F^{-1}(F(M)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-1}(T_n)$ é magro em K_B , porque cada $F^{-1}(T_n)$ é raro em K_B . Então M é magro em K_B . □

Lema 4.2.9. Para que um subespaço $M \subseteq K_A$ seja metrizável é necessário e suficiente que $M \cap (A \times \{0, 1\})$ seja enumerável.

Demonstração. Se M é metrizável, então ele possui uma base enumerável $\mathcal{B}$, em virtude do Corolário 1.2.36 e do fato que K_A é hereditariamente de Lindelöf. Para cada $(t, 1) \in M \cap (A \times \{1\})$, existe $B_{(t,1)} \in \mathcal{B}$ que contém $(t, 1)$ e $B_{(t,1)} \subseteq \{(t, t + \frac{1}{2}) \times \{0\} \cup [t, t + \frac{1}{2}) \times \{1\}\} \cap M$. Se $(t_1, 1), (t_2, 1) \in M \cap (A \times \{1\})$ são distintos, mais ainda suponhamos que $t_1 < t_2$, então $(t_1, 1) \notin B_{(t_2,1)}$. Ou seja, $B_{(t_1,1)}$ e $B_{(t_2,1)}$ são diferentes e, em consequência, $M \cap (A \times \{1\})$ é enumerável. Do mesmo jeito, $M \cap (A \times \{0\})$ é enumerável, então $M \cap (A \times \{0, 1\})$ é enumerável.

Reciprocamente, suponhamos que $M \cap (A \times \{0, 1\})$ seja enumerável. Como o conjunto $N = \{x \in K^d \setminus A \mid (x, 0) \in M\}$ é separável, existe um subconjunto $D \subseteq N$ enumerável e denso nele. Denotemos por $\mathcal{B}_M(x)$ a base local enumerável de cada $x \in M$. Logo $\bigcup_{x \in M_1 \cup M_2} \mathcal{B}_M(x)$ é uma base enumerável para M , onde $M_1 = D \times \{0\}$ e $M_2 = M \setminus (M \cap (K^d \setminus A \times \{0\}))$ são enumeráveis. Finalmente, dado que M é regular e possui base enumerável, concluímos que M é metrizável. □

Definição 4.2.10. Dizemos que $E \subseteq \mathbb{R}$ é **perfeitamente magro** se, para cada P subconjunto perfeito, $P \cap E$ é magro em P .

Observação 4.2.11. Todo conjunto perfeitamente magro é, em particular, um conjunto magro.

O seguinte teorema fornece uma condição necessária sobre o espaço K_A para que o conjunto A seja perfeitamente magro.

Teorema 4.2.12. Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto perfeito e $A \subseteq K^d$. Se cada conjunto fechado de K_A contém um subespaço G_δ completamente metrizável denso nele, então A é perfeitamente magro.

Demonstração. Provaremos o resultado pela contra-positiva. Se A não é perfeitamente magro, existe $P \subseteq K$ perfeito tal que $P \cap A$ é de segunda categoria em P . Em consequência, $P^d \cap A$ é de segunda categoria em P . Logo, como P é homeomorfo a $P_\emptyset$, $(P^d \cap A) \times \{0\}$ é de segunda categoria em $P_\emptyset$. Então, pelo item (4) da Proposição 4.2.8, $(P^d \cap A) \times \{0, 1\}$ é de segunda categoria em $P_{P^d \cap A}$. Em virtude da Proposição 4.2.7, e seguindo com a notação dela, o espaço $P_{P^d \cap A}$ é homeomorfo ao subespaço fechado $H = (P^d \times \{0, 1\} \cup (P^l \cap A) \times \{1\} \cup (P^r \cup P^l \setminus A) \times \{0\}) \cap K_A$. Se H contém um subespaço M completamente metrizável G_δ denso nele, temos que M é residual em H . Logo, $M \cap (P^d \cap A) \times \{0, 1\}$ é de segunda categoria em H e, portanto, é não enumerável. Mas, dado que M é metrizável e utilizando o Lema 4.2.9, $M \cap (P^d \cap A) \times \{0, 1\}$ é enumerável,

o qual é absurdo. Portanto, H não contém subespaços G_δ completamente metrizáveis densos nele. $\square$

O seguinte resultado é uma consequência imediata dos Teoremas 4.1.10 e 4.2.12.

Corolário 4.2.13. Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto perfeito e $A \subseteq K^d$. Se $(C(K_A), \|\cdot\|_\infty)$ é Asplund fraco, então A é perfeitamente magro.

4.3 Uma caracterização do espaço dual de $C(K_A)$

Nesta seção vamos caracterizar o espaço dual de $C(K_A)$, no caso particular $K = [0, 1]$ e $A \subseteq (0, 1)$, por meio de um tipo de espaço de funções de variação limitada ³.

Definição 4.3.1. Denotemos por $D_{(0,1)}$ o espaço vetorial real formado por funções $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que são contínuas pela esquerda em $(0, 1]$ e possuem limite pela direita em $[0, 1)$.

Seja A um subconjunto de $(0, 1)$. Definimos o subespaço vetorial $D_A = \{f \in D_{(0,1)} \mid f \text{ é contínua em } (0, 1) \setminus A\}$.

Proposição 4.3.2. Se $f \in D_{(0,1)}$, então f é limitada.

Demonstração. Como f possui limite pela direita em 0, existe $a > 0$ tal que $|f(w) - f(0^+)| < 1$, ⁴ para todo $w \in (0, a)$. Dado que f é contínua pela esquerda em 1, existe $b > 0$ tal que $|f(s) - f(1)| < 1$, para todo $s \in (1 - b, 1)$. Do mesmo jeito, se $x \in (0, 1)$, então existe $r_x > 0$ tal que $|f(p) - f(x^+)| < 1$ e $|f(q) - f(x)| < 1$ para quaisquer $p \in (x, x + r_x)$ e $q \in (x - r_x, x)$.

Assim, $\{(x - r_x, x + r_x)\}_{x \in (0,1)}$, $(-a, a)$ e $(1 - b, 1 + b)$ formam um recobrimento aberto de $[0, 1]$ e, portanto, existem $x_1, \dots, x_n \in (0, 1)$ tais que $[0, 1] \subseteq (-a, a) \cup \bigcup_{i=1}^n (x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}) \cup (1 - b, 1 + b)$. Considerando $K = \max\{|f(1)| + 1, |f(0^+)| + 1, |f(x_i^+)| + |f(x_i)| + 1 \mid i = 1, \dots, n\}$, obtemos que $|f(y)| \leq K$, para todo $y \in (0, 1]$. $\square$

Em seguida veremos a relação entre os espaços D_A e $C(K_A)$, ambos dotados com a norma do supremo.

Teorema 4.3.3. Para todo $A \subseteq (0, 1)$, D_A é isometricamente isomorfo a $C(K_A)$.

Demonstração. Definamos $\varphi : D_A \rightarrow C(K_A)$ da seguinte maneira. Para cada $f \in D_A$, a função $\varphi(f) : K_A \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$[\varphi(f)](t, s) = \begin{cases} f(t), & \text{se } t \in (0, 1] \text{ e } s = 0. \\ f(t^+), & \text{se } t \in A \cup \{0\} \text{ e } s = 1. \end{cases}$$

³ Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de **variação limitada** se

$$\text{Var}(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ e } t_0 = a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b \right\} < \infty.$$

⁴ Notação de limite pela direita (ver Lista de Símbolos).

Vejamos que φ está bem definida. Isto é, dado $f \in D_A$, precisamos mostrar que $\varphi(f) \in C(K_A)$. De fato, sejam U um aberto de $\mathbb{R}$ e $(t, s) \in [\varphi(f)]^{-1}(U)$. Existe $r > 0$ tal que $([\varphi(f)](t, s) - r, [\varphi(f)](t, s) + r) \subseteq U$. No primeiro caso $(t, s) \in (0, 1] \times \{0\}$, temos $[\varphi(f)](t, s) = f(t)$. Se $t \in (0, 1) \setminus A$, pela continuidade de f em t , existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(w) - f(t)| < \frac{r}{2}$, para todo $w \in (t - \delta_1, t + \delta_1)$. Logo $(t, 0) \in ((t - \delta_1, t + \delta_1) \times \{0, 1\}) \cap K_A \subseteq [\varphi(f)]^{-1}(U)$. Se $t \in A \cup \{1\}$, como f é contínua pela esquerda em t , existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(w) - f(t)| < \frac{r}{2}$, para todo $w \in (t - \delta_2, t)$. Logo $(t, 0) \in ((t - \delta_2, t] \times \{0\} \cup (t - \delta_2, t) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq [\varphi(f)]^{-1}(U)$.

No segundo caso $(t, s) \in (A \cup \{0\}) \times \{1\}$, temos que $[\varphi(f)](t, s) = f(t^+)$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(w) - f(t^+)| < \frac{r}{2}$, para qualquer $w \in (t, t + \varepsilon)$. Logo $(t, 1) \in ((t, t + \varepsilon) \times \{0\} \cup [t, t + \varepsilon) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq [\varphi(f)]^{-1}(U)$.

Além disso, não é difícil ver que φ é linear, injetora e que $\|f\|_\infty \leq \|\varphi(f)\|_\infty$, para todo $f \in D_A$. Sejam $h \in D_A$ e $(t, s) \in K_A$, logo $|[\varphi(h)](t, 1)| = \lim_{a \rightarrow t^+} |h(a)| \leq \|h\|_\infty$ e $|[\varphi(h)](t, 0)| = |h(t)| \leq \|h\|_\infty$, para qualquer $h \in D_A$. Ou seja, $\|\varphi(h)\|_\infty \leq \|h\|_\infty$. Assim, φ é uma isometria e só falta provar que é sobrejetora.

Seja $G \in C(K_A)$, definimos $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(t) = G(t, 0)$. Mostraremos que $g \in D_A$ e $\varphi(g) = G$. De fato, sejam $a \in (0, 1]$ e $\varepsilon > 0$. Se $a \in (0, 1) \setminus A$, existe $r_1 > 0$ tal que $((a - r_1, a + r_1) \times \{0, 1\}) \cap K_A \subseteq G^{-1}(g(a) - \varepsilon, g(a) + \varepsilon)$. Logo, g é contínua em a . Se $a \in A \cup \{1\}$, existe $r_2 > 0$ tal que $((a - r_2, a] \times \{0\} \cup (a - r_2, a) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq G^{-1}(g(a) - \varepsilon, g(a) + \varepsilon)$. Logo, g é contínua pela esquerda em a . Sejam $b \in A \cup \{0\}$ e $\varepsilon > 0$. Existe $p > 0$ tal que $((b, b + p) \times \{0\} \cup [b, b + p) \times \{1\}) \cap K_A \subseteq G^{-1}(G(b, 1) - \varepsilon, G(b, 1) + \varepsilon)$. Em consequência, $g(b^+) = G(b, 1)$. Finalmente, g é contínua em $(0, 1) \setminus A$, ela é contínua pela esquerda em $(0, 1]$, e possui limite pela direita em $[0, 1]$. Então, $g \in D_A$ e $\varphi(g) = G$. Pela Proposição 1.5.15, concluímos que φ é um isomorfismo. $\square$

Definição 4.3.4. Sejam $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas e $P = \{t_k \mid 0 \leq k \leq n\}$ uma partição de $[0, 1]$. Definimos $S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k)[\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})]$. Dizemos que f é **Riemann - Stieltjes integrável com respeito a α** se existe um número real I satisfazendo que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P_0 tal que $|S(P, f, \alpha) - I| < \varepsilon$, para qualquer partição P que refina P_0 . Nesse caso, I é chamado de **integral de Riemann - Stieltjes de f com respeito a α** e será denotado por $I = \int_{[0,1]} f d\alpha$.

Exemplo 4.3.5. Seja $t \in (0, 1]$. Dada uma função de variação limitada $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, a função $\chi_{(0,t]} \in D_{(0,1)}$ é integrável com respeito a α . De fato, se P é uma partição que refina $P_0 = \{0, t, 1\}$, então $S(P, \chi_{(0,t]}, \alpha) = \alpha(t)$. Isto é, $\int_{[0,1]} \chi_{(0,t]} d\alpha = \alpha(t)$.

Proposição 4.3.6. Sejam $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas. Então f é Riemann - Stieltjes integrável com respeito a α se, e só se, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma partição P_0 de $[0, 1]$ tal que $|S(P, f, \alpha) - S(P_0, f, \alpha)| < \varepsilon$, para qualquer partição P que refina P_0 .

Demonstração. Basta provar a recíproca. Para $\varepsilon = 1$, existe uma partição P_0 de $[0, 1]$ tal que $|S(P, f, \alpha) - S(P_0, f, \alpha)| < 1$, para qualquer P que refina P_0 . Analogamente, para $\varepsilon = \frac{1}{4}$, existe

uma partição P'_1 de $[0, 1]$ tal que $|S(P, f, \alpha) - S(P'_1, f, \alpha)| < \frac{1}{4}$, para qualquer P que refina P'_1 . Considerando $P_1 = P_0 \cup P'_1$, temos que $|S(P_1, f, \alpha) - S(P_0, f, \alpha)| < 1$. Do mesmo jeito, para $\varepsilon = \frac{1}{8}$, existe uma partição P'_2 de $[0, 1]$ tal que $|S(P, f, \alpha) - S(P'_2, f, \alpha)| < \frac{1}{8}$, para qualquer P que refina P'_2 . Considerando $P_2 = P_1 \cup P'_2$, temos que $|S(P_2, f, \alpha) - S(P_1, f, \alpha)| < \frac{1}{2}$. Suponhamos que temos as partições P_n e P'_n tais que $|S(P, f, \alpha) - S(P'_n, f, \alpha)| < \frac{1}{2^{n+1}}$, para qualquer partição P que refina P'_n . Do mesmo jeito, para $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+2}}$, existe uma partição P'_{n+1} tal que $|S(P, f, \alpha) - S(P'_{n+1}, f, \alpha)| < \frac{1}{2^{n+2}}$, para toda partição P que refina P'_{n+1} . Fazendo $P_{n+1} = P'_{n+1} \cup P_n$, temos que $|S(P_{n+1}, f, \alpha) - S(P_n, f, \alpha)| < \frac{1}{2^n}$.

Assim, indutivamente, obtemos uma sequência não decrescente de partições $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, no sentido da inclusão, tal que $|S(P_{n+1}, f, \alpha) - S(P_n, f, \alpha)| < \frac{1}{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $(S(P_n, f, \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, em consequência, existe $I \in \mathbb{R}$, o qual é o limite de tal sequência. Mostraremos que I é a integral de f com respeito a α . De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S(P_n, f, \alpha) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$. Se Q é uma partição que refina P_{n_0} , então

$$\begin{aligned} |S(Q, f, \alpha) - I| &\leq |S(Q, f, \alpha) - S(P_{n_0}, f, \alpha)| + |S(P_{n_0}, f, \alpha) - I| \\ &\leq |S(Q, f, \alpha) - S(P'_{n_0}, f, \alpha)| + |S(P'_{n_0}, f, \alpha) - S(P_{n_0}, f, \alpha)| + |S(P_{n_0}, f, \alpha) - I| \\ &\leq \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.3.7. Sejam $f, g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas e $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de variação limitada.

- i) $|S(P, f, \alpha) - S(P, g, \alpha)| \leq \|f - g\|_\infty \text{Var}(\alpha)$, para qualquer partição P de $[0, 1]$.
- ii) $|S(P, f, \alpha)| \leq \|f\|_\infty \text{Var}(\alpha)$, para toda partição P de $[0, 1]$.
- iii) Se f é integrável com respeito a α , então $\left| \int_{[0,1]} f d\alpha \right| \leq \|f\|_\infty \text{Var}(\alpha)$.

Demonstração. Os itens (i) e (ii) são evidentes. No item (iii), como f é integrável com respeito a α , existe uma sequência de partições $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(S(P_n, f, \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a integral de f . Pelo item (ii), $|S(P_n, f, \alpha)| \leq \|f\|_\infty \text{Var}(\alpha)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $\left| \int_{[0,1]} f d\alpha \right| \leq \|f\|_\infty \text{Var}(\alpha)$. □

A integral de Riemann - Stieltjes possui propriedades de linearidade como veremos a seguir.

Proposição 4.3.8. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e sejam $f, g, h \in \mathbb{R}^{(0,1]}$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ funções limitadas.

- i) Se f, g são integráveis com respeito a γ , então $f + g$ e λf são integráveis com respeito a γ .
Mais ainda, $\int_{[0,1]} f + g d\gamma = \int_{[0,1]} f d\gamma + \int_{[0,1]} g d\gamma$ e $\int_{[0,1]} \lambda f d\gamma = \lambda \int_{[0,1]} f d\gamma$.

ii) Se h é integrável com respeito a α e β , então h é integrável com respeito a $\alpha + \beta$ e $\lambda\alpha$.

$$\text{Mais ainda, } \int_{[0,1]} h d(\alpha + \beta) = \int_{[0,1]} h d\alpha + \int_{[0,1]} h d\beta \text{ e } \int_{[0,1]} h d(\lambda\alpha) = \lambda \int_{[0,1]} h d\alpha.$$

Demonstração. Para o primeiro item basta apenas verificar que, fixando uma partição P , temos que $S(P, f + g, \gamma) = S(P, f, \gamma) + S(P, g, \gamma)$ e $S(P, \lambda f, \gamma) = \lambda \cdot S(P, f, \gamma)$. Analogamente para o segundo item, fixando uma partição P , obtemos que $S(P, h, \alpha + \beta) = S(P, h, \alpha) + S(P, h, \beta)$ e $S(P, h, \lambda\alpha) = \lambda S(P, h, \alpha)$. $\square$

O seguinte lema nos diz que, no caso que A for um subconjunto denso de $(0, 1)$, o subespaço vetorial gerado pelas funções $\chi_{(0,t]}$, com $t \in A$, é denso em D_A .

Lema 4.3.9. Seja A um subconjunto denso de $(0, 1)$. Dados $f \in D_A$ e $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P_\varepsilon = \{t_i | 0 \leq i \leq n\}$ de $[0, 1]$, com $t_i \in A$ para todo $1 \leq i < n$, tal que $\|f - f_{P_\varepsilon}\|_\infty < \varepsilon$, onde $f_{P_\varepsilon} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f_{P_\varepsilon}(t) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \chi_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$.

Demonstração. Sejam $f \in D_A$ e $\varepsilon > 0$. Como f possui limite pela direita em 0, existe $r_1 > 0$ tal que se $w \in (0, r_1)$, então $|f(w) - f(0^+)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado que f é contínua pela esquerda em 1, existe também $r_2 > 0$ tal que se $q \in (1 - r_2, 1)$, então $|f(q) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Analogamente, se $x \in A$, existe $\delta_x > 0$ tal que $|f(w_1) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f(w_2) - f(x^+)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para quaisquer $w_1 \in (x - \delta_x, x)$ e $w_2 \in (x, x + \delta_x)$. Pela continuidade em $x \in (0, 1) \setminus A$, existe $\delta_x > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para qualquer $y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$. Assim, os abertos $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in (0, 1)}$, $(-r_1, r_1)$ e $(1 - r_2, 1 + r_2)$ cobrem $[0, 1]$. Pela compacidade de $[0, 1]$, existem $x_1, \dots, x_n \in (0, 1)$ tais que $[0, 1] \subseteq (-r_1, r_1) \cup (1 - r_2, 1 + r_2) \cup \bigcup_{i=1}^n (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$. Sem perda de generalidade podemos considerar que os pontos x_i estão ordenados em forma crescente e, portanto, os abertos de dois pontos consecutivos são não disjuntos. Pela densidade de A , existem $t_1, t_{n+1} \in A$ tais que $t_1 \in (0, r_1) \cap (x_1 - \delta_{x_1}, x_1 + \delta_{x_1})$ e $t_{n+1} \in (x_n - \delta_{x_n}, x_n + \delta_{x_n}) \cap (1 - r_2, 1)$. Assim também, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, existe $t_i \in A$ tal que $t_i \in (x_{i-1} - \delta_{x_{i-1}}, x_{i-1} + \delta_{x_{i-1}}) \cap (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$. Seja P_ε a partição de $[0, 1]$ formada por $\{t_j\}_{j=1}^{n+1}$ e aqueles x_i que estejam em A . Ou seja, $P_\varepsilon = \{a_k | 0 \leq k \leq m+n+2\}$, onde $m = \text{Card}(A \cap \{x_1, \dots, x_n\})$, e definimos $f_{P_\varepsilon} = \sum_{k=1}^{m+n+2} f(a_k) \chi_{(a_{k-1}, a_k]}$. Seja $z \in (0, 1]$, existe $k \in \{1, \dots, m+n+2\}$ tal que $z \in (t_{j-1}, t_j]$. Mais ainda, no caso geral, suponhamos que $1 < j < m+n+2$ e $t_{j-1}, t_j \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Logo existe $x_i \in (0, 1) \setminus A$ tal que $x_i \in (t_{j-1}, t_j)$. Então $|f(z) - f_{P_\varepsilon}(z)| = |f(z) - f(t_j)| \leq |f(z) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(t_j)| < \varepsilon$. Portanto, $\|f - f_{P_\varepsilon}\|_\infty < \varepsilon$. $\square$

Em D_A^* denotaremos por fraca_A a topologia gerada pelas funções $\chi_{(0,t]}$, onde $t \in A \cup \{1\}$. Uma consequência do lema anterior, como veremos a seguir, é que nas bolas fechadas de D_A^* , a topologia fraca^* relativa coincide com a topologia fraca_A relativa. Por simplicidade, mostraremos tal resultado para o caso particular da bola fechada unitária de D_A^* , a qual será denotada por $B_{D_A^*}$.

Proposição 4.3.10. Se A é um subconjunto denso de $(0, 1)$, então em $B_{D_A}^*$ as topologias relativas $fraca^*$ e $fraca_A$ coincidem.

Demonstração. Sejam U um aberto de $(B_{D_A}^*, fraca^*)$ e $x^* \in U$. Existem $f_1, \dots, f_n \in D_A$ e $r > 0$ tais que $V(x^*; f_1, \dots, f_n; r) \cap B_{D_A}^* \subseteq U$. Em virtude do Lema 4.3.9, para cada f_i , existe uma partição $P_i = \{t_k^{(i)} \mid 0 \leq k \leq m_i\}$, com $t_k^{(i)} \in A$ para qualquer $0 < k < m_i$, tal que $\|f_i - f_{P_i}\|_\infty < \frac{r}{4}$. Mais ainda, $f_{P_i} = \sum_{j=1}^{m_i} a_j^{(i)} \chi_{(0, t_j]}$. Considerando $a = \sup \{|a_j^{(i)}| \mid j \in \{1, \dots, m_i\} \text{ e } i \in \{1, \dots, n\}\}$ e $\bigcup_{i=1}^n P_i = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_p\}$. Se $y^* \in V(x^*; \chi_{(0, t'_1]}, \dots, \chi_{(0, t'_p]}; \frac{r}{2ap}) \cap B_{D_A}^*$, então, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que

$$\begin{aligned} |(y^* - x^*)(f_i)| &\leq |(y^* - x^*)(f_i - f_{P_i})| + |(y^* - x^*)(f_{P_i})| \\ &\leq \|y^* - x^*\| \|f_i - f_{P_i}\|_\infty + \left| \sum_{j=1}^{m_i} a_j^{(i)} (y^* - x^*)(\chi_{(0, t_j]}) \right| \\ &\leq 2\|f_i - f_{P_i}\|_\infty + \sum_{j=1}^{m_i} |a_j^{(i)}| |(y^* - x^*)(\chi_{(0, t_j]})| \\ &\leq \frac{r}{2} + \sum_{j=1}^{m_i} a \frac{r}{2ap} \leq \frac{r}{2} + \frac{rm_i}{2p} \leq r. \end{aligned}$$

Ou seja, $V(x^*; \chi_{(0, t'_1]}, \dots, \chi_{(0, t'_p]}; \frac{r}{2ap}) \cap B_{D_A}^* \subseteq U$. Então $U \in fraca_A$. Portanto, $fraca_A = fraca^*$ em $B_{D_A}^*$. $\square$

Observação 4.3.11. Notemos que, dadas uma função $f \in D_{(0,1)}$ e uma partição P de $[0, 1]$, podemos definir uma função $f_P \in D_{(0,1)}$ como no lema anterior. Mais ainda, se P' é uma partição que refina P , então $S(P', f_P, \alpha) = S(P, f, \alpha)$.

Os elementos de $D_{(0,1)}$ são funções Riemann - Stieltjes integráveis com respeito as funções de variação limitada, como veremos em seguida.

Teorema 4.3.12. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada. Se $f \in D_{(0,1)}$, então f é Riemann - Stieltjes integrável com respeito a α .

Demonstração. Seja $f \in D_{(0,1)}$. Dado $\varepsilon > 0$, pelo Lema 4.3.9, existe uma partição P_ε tal que $\|f - f_{P_\varepsilon}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{Var(\alpha) + 1}$. Se Q é uma partição que refina P_ε , então

$$|S(Q, f, \alpha) - S(P_\varepsilon, f, \alpha)| = |S(Q, f, \alpha) - S(Q, f_{P_\varepsilon}, \alpha)| \leq \|f - f_{P_\varepsilon}\|_\infty Var(\alpha) < \varepsilon.$$

Em virtude da Proposição 4.3.6 concluímos que f é Riemann - Stieltjes integrável com respeito a α . $\square$

Definição 4.3.13. Denotemos por $BV[0, 1]$ o espaço vetorial real formado pelas funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(0) = 0$, que são de variação limitada.

Dado um subconjunto $A \subseteq (0, 1)$, definimos o subespaço vetorial $BV_A[0, 1] = \{f \in BV[0, 1] \mid f \text{ é contínua pela direita em } (0, 1) \setminus A\}$.

Observação 4.3.14. Em $BV[0, 1]$ se define a norma da variação total. Isto é,

$$\|f\|_{\text{var}} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ e } t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1 \right\}.$$

Ademais, se $h \in BV[0, 1]$, então $|h(x)| \leq \|h\|_{\text{var}}$, para todo $x \in [0, 1]$.

Em $BV_A[0, 1]$ denotaremos por τ_A a topologia herdada de $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \tau_A)$ ⁵, τ_{var} a topologia gerada pela norma da variação total, e τ_p a topologia herdada de $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \tau_p)$. Note que $\tau_A \subseteq \tau_p \subseteq \tau_{\text{var}}$.

Proposição 4.3.15. Se A é um subconjunto denso de $(0, 1)$, então o espaço $(BV_A[0, 1], \tau_A)$ é Hausdorff.

Demonstração. Primeiro mostraremos que dados $f, g \in BV_A[0, 1]$ tais que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cup \{1\}$, obtemos que $f = g$. De fato, se $x \in (0, 1) \setminus A$, então existe uma sequência decrescente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A tal que converge a x . Como f e g são contínuas pela direita em $(0, 1) \setminus A$, obtemos $f(x) = g(x)$. Logo $f = g$.

Sejam $f, g \in BV_A[0, 1]$ distintos, pelo parágrafo anterior, existe $x_0 \in A \cup \{1\}$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Ademais existem U, V abertos disjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $f(x_0) \in U$ e $g(x_0) \in V$. Então $S(x_0, U) \cap BV_A[0, 1]$ e $S(x_0, V) \cap BV_A[0, 1]$ são abertos disjuntos tais que $f \in S(x_0, U) \cap BV_A[0, 1]$ e $g \in S(x_0, V) \cap BV_A[0, 1]$. $\square$

Denotemos por $B[0, r]$ a bola fechada de raio $r > 0$ do espaço $(BV_A[0, 1], \tau_{\text{var}})$. Ainda vale que toda bola fechada é homeomorfa à bola fechada unitária, ambas com a topologia τ_p . Em seguida veremos que as bolas fechadas de $BV_A[0, 1]$ são τ_A -compactas.

Proposição 4.3.16. A bola fechada unitária $B[0, 1]$ é τ_p -compacta em $BV_A[0, 1]$. Em consequência, $B[0, 1]$ é um subconjunto compacto de $(BV_A[0, 1], \tau_A)$.

Demonstração. Basta provar que $B[0, 1]$ é τ_p -compacto em $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Segundo a Proposição 1.2.38, vejamos que $B[0, 1]$ é τ_p -fechada. Dado $f \in \overline{B[0, 1]}$, é claro que $f(0) = 0$. Seja $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$ uma partição e $\delta > 0$ arbitrário. Como $f \in \bigcap_{i=0}^n S(x_i, U_i)$, onde $U_i = \left(f(x_i) - \frac{\delta}{2^{i+1}}, f(x_i) + \frac{\delta}{2^{i+1}} \right)$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$; existe $\varphi \in B[0, 1] \cap \bigcap_{i=0}^n S(x_i, U_i)$. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| &\leq |f(t_0) - \varphi(t_0)| + |f(t_n) - \varphi(t_n)| + \sum_{i=1}^n |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n-1} 2|f(t_i) - \varphi(t_i)| \\ &\leq \|\varphi\| + \delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \leq \|\varphi\| + \delta \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \leq \|\varphi\| + \delta \\ &\leq 1 + \delta. \end{aligned}$$

⁵ Ver Exemplo 1.2.9

Assim, f é de variação limitada. Mais ainda, como δ era arbitrário, obtemos que $\|f\|_{\text{var}} \leq 1$. Agora mostraremos que f é contínua pela direita em $(0, 1) \setminus A$. Sejam $x_0 \in (0, 1) \setminus A$ e $\varepsilon > 0$. Dado que $\overline{B[0, 1]}$ também é fechado em τ_{var} , existe $\psi \in B(f, \frac{\varepsilon}{3}) \cap B[0, 1]$. Como ψ é contínua pela direita em x_0 , existe $r > 0$ tal que $|\psi(t) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para qualquer $t \in (x_0, x_0 + r)$. Então,

$$|f(x_0) - f(t)| \leq |f(x_0) - \psi(x_0)| + |\psi(x_0) - \psi(t)| + |\psi(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para todo $t \in (x_0, x_0 + r)$. Logo, f é contínua pela direita em $(0, 1) \setminus A$ e, portanto, $f \in B[0, 1]$. Por outro lado, temos que $\pi_0(B[0, 1]) = \{0\}$. Seja $x \in [0, 1] \setminus \{0\}$, é claro que $\pi_x(B[0, 1]) \subseteq [-1, 1]$. Se $a \in [-1, 1]$, definimos

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} a, & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Claramente $\varphi_a \in B[0, 1]$ e $\pi_x(\varphi_a) = a$. Isto é, $\pi_x(B[0, 1]) = [-1, 1]$. Finalmente concluímos que $B[0, 1]$ é τ_p -compacta. $\square$

A seguir veremos a relação entre os espaços $D_{(0,1)}$ e $BV[0, 1]$.

Proposição 4.3.17. O espaço $D_{(0,1)}^*$ é isometricamente isomorfo a $BV[0, 1]$.

Demonstração. Definimos $L : D_{(0,1)}^* \rightarrow BV[0, 1]$ do seguinte modo. Para cada $x^* \in D_{(0,1)}^*$, a função $L(x^*) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$[L(x^*)](t) = \begin{cases} x^*(\chi_{(0,t]}), & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Seja $P = \{t_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ uma partição de $[0, 1]$ e consideremos $a_i = \text{sgn}[x^*(\chi_{(0,t_i]}) - x^*(\chi_{(0,t_{i-1}]})]$ ⁶, para cada $1 \leq i \leq n$. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |[L(x^*)](t_i) - [L(x^*)](t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n |x^*(\chi_{(0,t_i]}) - x^*(\chi_{(0,t_{i-1}]})| = \sum_{i=1}^n a_i x^*(\chi_{(t_{i-1}, t_i]}) \\ &= x^*\left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{(t_{i-1}, t_i]}\right) \leq \|x^*\| \left\| \sum_{i=1}^n a_i \chi_{(t_{i-1}, t_i]} \right\|_{\infty} = \|x^*\|. \end{aligned}$$

Então $L(x^*) \in BV[0, 1]$ e $\|L(x^*)\|_{\text{var}} \leq \|x^*\|$.

É claro que L é linear. Dado $x^* \in D_{(0,1)}^*$, mostraremos que $|x^*(f)| \leq \|f\|_{\infty} \|L(x^*)\|_{\text{var}}$, para todo $f \in D_{(0,1)}$. No caso particular que $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{(0,t_i]}$, onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $t_i \in (0, 1]$, para qualquer $1 \leq i \leq n$,

temos que $\int_{[0,1]} f dL(x^*) = \sum_{i=1}^n a_i [L(x^*)](t_i)$. Logo

$$|x^*(f)| = \left| \sum_{i=1}^n a_i x^*(\chi_{(0,t_i]}) \right| = \left| \int_{[0,1]} f dL(x^*) \right| \leq \|f\|_{\infty} \|L(x^*)\|_{\text{var}}.$$

⁶ A função $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como $\text{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$, se $x \neq 0$, e $\text{sgn}(0) = 0$.

No caso geral, em virtude do Lema 4.3.9, existe uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a f . Pelo caso anterior, sabemos que $|x^*(f_n)| \leq \|f_n\|_\infty \|L(x^*)\|_{\text{var}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $|x^*(f)| \leq \|f\|_\infty \|L(x^*)\|_{\text{var}}$. Ou seja, $\|x^*\| \leq \|L(x^*)\|_{\text{var}}$. Portanto, L é uma isometria.

Por último, de acordo com a Proposição 1.5.15, mostraremos que L é sobrejetora. De fato, seja $\alpha \in BV[0, 1]$, definimos $z^* : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por $z^*(f) = \int_{[0,1]} f d\alpha$. A partir das Proposições 4.3.7 e 4.3.8, $z^* \in D_{(0,1)}^*$ e $|z^*(f)| \leq \|f\|_\infty \|\alpha\|_{\text{var}}$, para todo $f \in D_{(0,1)}$. Logo $L(z^*) = \alpha$. Concluimos que L é um isomorfismo. $\square$

Para estabelecer a relação entre os espaços D_A^* e $BV_A[0, 1]$ precisamos do seguinte lema.

Lema 4.3.18. Dado $\alpha \in BV[0, 1]$, existe $\beta \in BV_A[0, 1]$ tal que $\|\beta\|_{\text{var}} \leq \|\alpha\|_{\text{var}}$ e $\int_{[0,1]} f d\beta = \int_{[0,1]} f d\alpha$, para todo $f \in D_A$.

Demonstração. Dado $\alpha \in BV[0, 1]$, definimos $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } t \in A \cup \{0, 1\}. \\ \alpha(t^+), & \text{se } t \in (0, 1) \setminus A. \end{cases}$$

Sejam $P = \{t_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ uma partição e $m = \text{card}(I)$, onde $I = \{i \mid t_i \in (0, 1) \setminus A\}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $k \in I$, existe $\delta_k > 0$ tal que $|\alpha(w) - \alpha(t_k^+)| < \frac{\varepsilon}{2m}$, para todo $w \in (t_k, t_k + \delta_k)$ e, além disso, $t_{k+1} \notin (t_k, t_k + \delta_k)$. Fixando $w_k \in (t_k, t_k + \delta_k)$, para cada $k \in I$, obtemos

$$\sum_{i=1}^n |\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha(z_i) - \alpha(z_{i-1})| + \sum_{i \in I} 2|\alpha(t_i^+) - \alpha(w_i)| \leq \|\alpha\|_{\text{var}} + \varepsilon,$$

onde $z_i = w_i$, se $i \in I$, e $z_i = t_i$ no outro caso. Então $\beta \in BV_A[0, 1]$ e $\|\beta\|_{\text{var}} \leq \|\alpha\|_{\text{var}}$.

Seja $f \in D_A$. Provaremos que dada uma partição $P = \{t_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ de $[0, 1]$, existe uma partição Q que refina P e $S(P, f, \beta) = S(Q, f, \alpha)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, sejam $I = \{i \mid t_i \in (0, 1) \setminus A\}$ e $m = \text{card}(I)$. Pela continuidade de f em $(0, 1) \setminus A$, para cada $i \in I$, existe $\delta_i > 0$ tal que $|f(t_i) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2m\|\alpha\|_{\text{var}}}$ e $|\alpha(t_i^+) - \alpha(w)| < \frac{\varepsilon}{4m\|f\|_\infty}$, para quaisquer $a \in (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i)$ e $w \in (t_i, t_i + \delta_i)$. Fixando $x_i \in (t_i, t_i + \delta_i)$, para cada $i \in I$, e considerando $Q = P \cup \{x_i \mid i \in I\}$, obtemos

$$\begin{aligned} |S(P, f, \beta) - S(Q, f, \alpha)| &\leq \sum_{i \in I} |f(t_i) - f(t_{i+1})| |\alpha(t_i^+) - \alpha(x_i)| + \sum_{i \in I} |f(t_i) - f(x_i)| |\alpha(x_i) - \alpha(t_i)| \\ &\leq \sum_{i \in I} 2\|f\|_\infty |\alpha(t_i^+) - \alpha(x_i)| + \sum_{i \in I} |f(t_i) - f(x_i)| \|\alpha\|_{\text{var}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Em consequência, $\int_{[0,1]} f d\beta = \int_{[0,1]} f d\alpha$, para todo $f \in D_A$. $\square$

O seguinte teorema permite estabelecer uma relação entre $C(K_A)^*$ e $BV_A[0, 1]$.

Teorema 4.3.19. Para todo $A \subseteq (0, 1)$, D_A^* é isometricamente isomorfo a $BV_A[0, 1]$.

Demonstração. Seja $T : BV_A[0, 1] \rightarrow D_A^*$ definido do seguinte modo. Dado $\alpha \in BV_A[0, 1]$, definimos $T(\alpha) : D_A \rightarrow \mathbb{R}$ como $[T(\alpha)](f) = \int_{[0,1]} f d\alpha$. Das Proposições 4.3.7 e 4.3.8, temos que T é linear e $\|T(\alpha)\| \leq \|\alpha\|_{\text{var}}$. Dado $z^* \in D_A^*$, pelo Teorema 1.5.10, existe $x^* \in D_{(0,1)}^*$ tal que $x^*|_{D_A} = z^*$ e $\|x^*\| = \|z^*\|$. Pela Proposição 4.3.17, existe $\alpha \in BV[0, 1]$ tal que $x^*(f) = \int_{[0,1]} f d\alpha$, para qualquer $f \in D_{(0,1)}$. Em virtude do Lema 4.3.18, existe $\beta \in BV_A[0, 1]$ tal que $\|\beta\|_{\text{var}} \leq \|\alpha\|_{\text{var}}$ e $\int_{[0,1]} f d\beta = \int_{[0,1]} f d\alpha$, para todo $f \in D_A$. Então $T(\beta) = z^*$ e $\|\beta\|_{\text{var}} \leq \|\alpha\|_{\text{var}} = \|x^*\| = \|T(\beta)\|$. Em consequência, T é uma isometria sobrejetora e, pela Proposição 1.5.15, concluímos que T é um isomorfismo. $\square$

Até agora, baseado nos Teoremas 4.3.3 e 4.3.19, podemos concluir que $C(K_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $BV_A[0, 1]$. Denotemos por $B_{C(K_A)^*}$ a bola fechada unitária de $C(K_A)^*$. O seguinte corolário nos diz que, no caso que A seja denso em $(0, 1)$, $(B_{[0,1]}, \tau_A)$ é homeomorfa a $(B_{C(K_A)^*}, \text{fraca}^*)$.

Corolário 4.3.20. Para todo $A \subseteq (0, 1)$, $(BV_A[0, 1], \tau_A)$ é homeomorfo a (D_A^*, fraca_A) . Em particular, se A é um subconjunto denso de $(0, 1)$, então $(B_{[0,1]}, \tau_A)$ é homeomorfa a $(B_{D_A^*}, \text{fraca}^*)$.

Demonstração. Seja $A \subseteq (0, 1)$. Consideremos a função bijetora $T : BV_A[0, 1] \rightarrow D_A^*$ definida anteriormente no Teorema 4.3.19. Sejam U um aberto de (D_A^*, fraca_A) e $\alpha \in T^{-1}(U)$. Como $T(\alpha) \in U$, existem $t_1, \dots, t_n \in A \cup \{1\}$ e $r > 0$ tais que $V(T(\alpha); \chi_{(0,t_1]}, \dots, \chi_{(0,t_n]}; r) \subseteq U$.

Se $\beta \in \bigcap_{i=1}^n S(t_i, (\alpha(t_i) - r, \alpha(t_i) + r))$, então $|(T(\alpha) - T(\beta))(\chi_{(0,t_i]})| = |\alpha(t_i) - \beta(t_i)| < r$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo $\alpha \in \bigcap_{i=1}^n S(t_i, (\alpha(t_i) - r, \alpha(t_i) + r)) \subseteq T^{-1}(U)$. Assim, T é contínua. Agora só falta provar que T é aberta. De fato, sejam V um aberto de $(BV_A[0, 1], \tau_A)$ e $y^* \in T(V)$. Existem $\gamma \in V$ e, em consequência, $a_1, \dots, a_m \in A$ e $U_1, \dots, U_m$ abertos de $\mathbb{R}$ tais que $\gamma \in \bigcap_{i=1}^m S(a_i, U_i) \subseteq V$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $\delta_i > 0$ tal que $(a_i - \delta_i, a_i + \delta_i) \subseteq U_i$. Seja $\delta = \min\{\delta_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$. Se $z^* \in V(y^*; \chi_{(0,a_1]}, \dots, \chi_{(0,a_m]}; \delta)$, existe $\alpha_0 \in BV_A[0, 1]$ tal que $T(\alpha_0) = z^*$. Logo $|\alpha_0(a_i) - \gamma(a_i)| = |(T(\alpha_0) - T(\gamma))(\chi_{(0,a_i]})| < \delta$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Ou seja, $\alpha_0 \in V$ e $z^* \in T(V)$. Então $T(V)$ é aberta em fraca_A .

Em particular, $T|_{B[0,1]}$ é um homeomorfismo entre os espaços $(B_{[0,1]}, \tau_A)$ e $(B_{D_A^*}, \text{fraca}_A)$. No caso que A seja denso em $(0, 1)$, pela Proposição 4.3.10, obtemos que $(B_{[0,1]}, \tau_A)$ é homeomorfa a $(B_{D_A^*}, \text{fraca}^*)$. $\square$

4.4 Espaços aproximadamente Stegall e o jogo de Cantor

Nesta seção introduzimos o conceito de espaços aproximadamente Stegall, e suas propriedades básicas, baseado no jogo de Cantor. Por tal motivo, precisamos das seguintes definições.

Definição 4.4.1. Um σ -ideal $\mathcal{F}$ sobre um espaço topológico (X, τ) é **topologicamente estável** se $h(A) \in \mathcal{F}$, para cada homeomorfismo $h: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ e cada $A \in \mathcal{F}$.

Exemplo 4.4.2. Num espaço topológico, devido às Proposições 1.3.3 e 1.3.9, a família dos conjuntos magros é um σ -ideal topologicamente estável.

Definição 4.4.3. Sejam $\mathcal{A}$ um σ -ideal topologicamente estável em $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ ⁷ e (X, τ) um espaço topológico homeomorfo a $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$. Denotaremos por $\mathcal{A}_{(X, \tau)}$ o σ -ideal em X definido como $\mathcal{A}_{(X, \tau)} = \{h^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ para algum homeomorfismo $h: X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Se não houver ambiguidade, pode-se denotar $\mathcal{A}_X$ em lugar de $\mathcal{A}_{(X, \tau)}$.

Observação 4.4.4. A definição de $\mathcal{A}_X$ não depende do homeomorfismo $h: X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ pois $\mathcal{A}$ é topologicamente estável em $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$.

Definição 4.4.5. Dizemos que $\mathcal{A}$ é um **σ -ideal fortemente topologicamente estável em** $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ se $\mathcal{A}$ é topologicamente estável e se, para todo subconjunto aberto-fechado Y de $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ que seja homeomorfo a esse espaço, temos que $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}$.

Daqui em diante $\mathcal{A}$ denotará um σ -ideal próprio fortemente topologicamente estável em $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$.

Proposição 4.4.6. Sejam X um espaço topológico homeomorfo a $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ e E um subespaço aberto e fechado de X . Se E é homeomorfo a $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$, então $\mathcal{A}_E \subseteq \mathcal{A}_X$.

Demonstração. Seja $\varphi: X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ um homeomorfismo e ψ a restrição de φ em E . Temos que $Y = \varphi(E)$ é um subespaço aberto e fechado de $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ e $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}$. Ademais consideremos $h: E \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ um homeomorfismo. Se $K \in \mathcal{A}_E$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $K = h^{-1}(A)$. Logo, como $h \circ \psi^{-1}$ é um homeomorfismo de Y a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, obtemos $(h \circ \psi^{-1})^{-1}(A) = (\psi \circ h^{-1})(A) \in \mathcal{A}_Y$. Então $K = \varphi^{-1}((\psi \circ h^{-1})(A)) \in \mathcal{A}_X$. $\square$

Em seguida apresentamos o jogo de Cantor.

Definição 4.4.7. Sejam (M, d) um espaço métrico completo sem pontos isolados e $R \subseteq M$. Definimos o **jogo de Cantor** em M , denotado por $C^A(R)$, do seguinte modo.

Os Jogadores I e II escolhem famílias de abertos não vazios $B_n = \{B_n^t \mid t \in \{0, 1\}^n\}$ e $A_n = \{A_n^t \mid t \in \{0, 1\}^n\}$, respectivamente, como se observa no seguinte diagrama.

⁷ τ_p denota a topologia produto.

Tais famílias satisfazem as seguintes condições:

- $\text{diam}(B_n^t) < \frac{1}{2^n}$, para quaisquer $t \in \{0, 1\}^n$ e $n \in \mathbb{N}$.
- $A_n^t \subseteq B_n^t$, para quaisquer $t \in \{0, 1\}^n$ e $n \in \mathbb{N}$.
- $\overline{B_{n+1}^{t \wedge 0}} \cup \overline{B_{n+1}^{t \wedge 1}} \subseteq A_n^t$, para quaisquer $t \in \{0, 1\}^n$ e $n \in \mathbb{N}$.⁸

O conjunto de Cantor gerado pelo jogo será denotado por $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, onde $K_n = \bigcup \{B_n^t \mid t \in \{0, 1\}^n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que o Jogador II **vence** se $K \setminus R \in \mathcal{A}_K$. Caso contrário, o Jogador I é o **vencedor**.

Observação 4.4.8. Se o Jogador II tem uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R)$ e $R \subseteq F$, então ela induz uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(F)$.

Proposição 4.4.9. Sejam (M, d) um espaço métrico completo sem pontos isolados e $R \subseteq M$. Se para cada aberto não vazio U existe um conjunto fechado sem pontos isolados F tal que $U \cap \text{int}(F) \neq \emptyset$ e o Jogador II possui uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R \cap F)$ desenvolvido em F , então o Jogador II também possui uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R)$ desenvolvido em M .

Demonstração. Mostraremos que o Jogador II possui uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R)$. Suponhamos que o Jogador I começa com $B_0 = \{B_0^\emptyset\}$. Fixemos um fechado sem pontos isolados F tal que $B_0^\emptyset \cap \text{int}(F) \neq \emptyset$. Ademais existe uma estratégia vencedora σ para o Jogador II em

⁸ Ver notações na Lista de Símbolos

$C^A(R \cap F)$ jogado em F . Mais ainda, sem perda de generalidade, podemos supor que $B_0^\emptyset \subseteq \text{int}(F)$. Assim, todo o jogo será desenvolvido em F e, basta aplicar aquela estratégia σ para o Jogador II vencer naquela partida. Portanto, pela observação anterior, o Jogador II possui uma estratégia vencedora em $C^A(R)$ jogado em M . $\square$

Teorema 4.4.10. Sejam (M, d) um espaço métrico completo sem pontos isolados e $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos dele. Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma estratégia vencedora para o Jogador II em $C^A(R_n)$, então o Jogador II possui uma estratégia vencedora em $C^A\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n\right)$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja σ_n a estratégia vencedora do Jogador II em $C^A(R_n)$. Vamos construir uma estratégia vencedora σ para o Jogador II em $C^A\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n\right)$.

Suponhamos que o Jogador I começa com uma família unitária $B_0 = \{B_0^\emptyset\}$, logo o Jogador II responde fazendo $\sigma(B_0) = \sigma_0(B_0)$. Em seguida o Jogador I escolhe $B_1 = \{B_1^0, B_1^1\}$, então o Jogador II faz o seguinte. Primeiro usa a estratégia σ_0 para obter $\sigma_0(B_0, B_1) = \{^1B_1^0, ^1B_1^1\}$ e depois responde definindo $\sigma(B_0, B_1) = \{\sigma_1(^1B_1^0), \sigma_1(^1B_1^1)\}$.

Na seguinte rodada o Jogador I seleciona $B_2 = \{B_2^{00}, B_2^{01}, B_2^{10}, B_2^{11}\}$ e o Jogador II reage assim. Primeiro aplica a estratégia σ_0 para obter $\sigma_0(B_0, B_1, B_2) = \{^1B_2^{00}, ^1B_2^{01}, ^1B_2^{10}, ^1B_2^{11}\}$. Depois aplica duas vezes a estratégia σ_1 da seguinte maneira

- $\sigma_1(\{^1B_1^0\}, \{^1B_2^{00}, ^1B_2^{01}\}) = \{^2B_2^{00}, ^2B_2^{01}\}$.
- $\sigma_1(\{^1B_1^1\}, \{^1B_2^{10}, ^1B_2^{11}\}) = \{^2B_2^{10}, ^2B_2^{11}\}$.

Então o Jogador II define $\sigma(B_0, B_1, B_2) = \{\sigma_2(^2B_2^t) \mid t \in \{0, 1\}^2\}$.

A seguir o Jogador I escolhe $B_3 = \{B_3^t \mid t \in \{0, 1\}^3\}$. Então o Jogador II procede assim. Primeiro a estratégia σ_0 é usada uma vez para obter $\sigma_0(B_0, B_1, B_2, B_3) = \{^1B_3^t \mid t \in \{0, 1\}^3\}$. Depois, aplicando duas vezes a estratégia σ_1 , obtemos

- $\sigma_1(\{^1B_1^0\}, \{^1B_2^{00}, ^1B_2^{01}\}, \{^1B_3^{000}, ^1B_3^{001}, ^1B_3^{010}, ^1B_3^{011}\}) = \{^2B_3^{000}, ^2B_3^{001}, ^2B_3^{010}, ^2B_3^{011}\}$.
- $\sigma_1(\{^1B_1^1\}, \{^1B_2^{10}, ^1B_2^{11}\}, \{^1B_3^{100}, ^1B_3^{101}, ^1B_3^{110}, ^1B_3^{111}\}) = \{^2B_3^{100}, ^2B_3^{101}, ^2B_3^{110}, ^2B_3^{111}\}$.

Logo, aplica 2^2 vezes a estratégia σ_2 , obtendo $\sigma_2(\{^2B_2^i\}, \{^2B_3^{i^0}, ^2B_3^{i^1}\}) = \{^3B_3^{i^0}, ^3B_3^{i^1}\}$ para qualquer $i \in \{0, 1\}^2$. Por último aplica 2^3 vezes a estratégia σ_3 , sendo $\sigma(B_0, B_1, B_2, B_3) = \{\sigma_3(^3B_3^t) \mid t \in \{0, 1\}^3\}$ a resposta do Jogador II. E assim sucessivamente se define a estratégia σ . Agora vamos mostrar que σ é uma estratégia vencedora.

Note que os conjuntos da forma $^mB_n^t$, onde $t \in \{0, 1\}^n$ e $n, m \in \mathbb{N}$, têm as seguintes propriedades:

- a) $^nB_n^t \subseteq ^iB_n^t \subseteq ^jB_n^t \subseteq ^tB_n^t$, para quaisquer $j \leq i \leq n$.
- b) $\overline{^nB_{n+1}^{t^0}} \cup \overline{^nB_{n+1}^{t^1}} \subseteq ^nB_n^t$.

Se $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \{0, 1\}^m$ estão fixos, temos 2^m partidas do jogo $C^{\mathcal{A}}(R_m)$ nas quais o Jogador II utilizará a estratégia σ_m . Denotemos por K^s o conjunto de Cantor gerado pela partida $(\sigma_m(B_0^{(s)}, B_1^{(s)}, \dots, B_n^{(s)}), B_n^{(s)})_{n \in \mathbb{N}}$, onde $B_n^{(s)} = \{^m B_{m+n}^{s \wedge t} \mid t \in \{0, 1\}^n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\bigcup_{s \in \{0, 1\}^m} K^s = K$.

Dado que $K^s = K \cap {}^m B_m^s$, temos que K^s é um subconjunto aberto e fechado de K . Logo, pela Proposição 4.3.3, $\mathcal{A}_{K^s} \subseteq \mathcal{A}_K$. Finalmente, $K \setminus R_m = \bigcup_{s \in \{0, 1\}^m} K^s \setminus R_m \in \mathcal{A}_{K^s}$. Portanto, $K \setminus \bigcap_{m \in \mathbb{N}} R_m \in \mathcal{A}_K$. $\square$

A seguir introduzimos o conceito de espaços aproximadamente Stegall, baseado no jogo de Cantor, o que fica no meio dos espaços Stegall e fracamente Stegall.⁹

Definição 4.4.11. Sejam X um espaço de Hausdorff e $\mathcal{A}$ um σ -ideal próprio fortemente topologicamente estável em $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$. Dizemos que X é **aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$** se, para quaisquer espaço métrico completo sem pontos isolados M e usco minimal $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(X)$, o Jogador II possui uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R)$, onde R é o conjunto no qual φ é um-avaliada.

Para qualquer σ -ideal próprio $\mathcal{A}$, todo espaço Stegall é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$. Em virtude da Proposição 1.4.9, cada espaço aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$ é um espaço fracamente Stegall.

Observação 4.4.12. Dado um espaço aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$, todo subespaço dele também é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$.

No caso que um espaço topológico possua uma métrica, o seguinte corolário fornece uma caracterização dos espaços aproximadamente Stegall.

Corolário 4.4.13. Sejam (X, τ) um espaço de Hausdorff e d uma métrica definida nele. Para que (X, τ) seja aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$ é necessário e suficiente que, para quaisquer $\varepsilon > 0$, espaço métrico completo sem pontos isolados M e usco minimal $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(X)$, exista uma estratégia vencedora para o Jogador II em $C^{\mathcal{A}}(R_\varepsilon)$, onde $R_\varepsilon = \{x \in M \mid d - \text{diam}(\varphi(x)) \leq \varepsilon\}$.

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$, M um espaço métrico completo sem pontos isolados e $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(X)$ usco minimal. Se R é o conjunto dos pontos nos quais φ é um-avaliada, temos que $R \subseteq R_\varepsilon$ e, portanto, o Jogador II possui uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R_\varepsilon)$. Reciprocamente, sejam M um espaço métrico completo sem pontos isolados e $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(X)$ usco minimal. Sendo R o conjunto onde φ é um-avaliada, é claro que $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_{1/n}$. Então, pelo Teorema 4.4.10, existe uma estratégia vencedora para o Jogador II em $C^{\mathcal{A}}(R)$. Finalmente concluímos que X é aproximadamente Stegall como respeito a $\mathcal{A}$. $\square$

⁹ Ver Definição 1.5.10.

O seguinte teorema reúne algumas propriedades básicas dos espaços aproximadamente Stegall.

Teorema 4.4.14. Sejam X e Y dois espaços topológicos.

- i) Se $f : X \rightarrow Y$ é perfeita ¹⁰ e X é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$, Y também o é.
- ii) Seja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma cobertura fechada de X . Se cada X_n é um espaço aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$, então X é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$.
- iii) O produto enumerável de espaços aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$ é um espaço aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$.

Demonstração.

- i) Sejam M um espaço métrico completo sem pontos isolados e $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ usco minimal. Definimos $\psi : M \rightarrow \mathcal{P}(X)$ como $\psi(x) = f^{-1}(\varphi(x))$ e mostraremos que também éusco minimal. De fato, sejam $U \subseteq M$ e $W \subseteq X$ abertos tais que $\psi(U) \cap W \neq \emptyset$. Logo $\emptyset \neq \varphi(U) \cap f(W) \subseteq \varphi(U) \cap Y \setminus f(X \setminus W)$. Então existe um subconjunto aberto V de U tal que $\varphi(V) \subseteq Y \setminus f(X \setminus W)$, em virtude do item (c) do Lema 1.2.37. Obtemos que $\psi(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus W)) \subseteq X \setminus f^{-1}(f(X \setminus W)) \subseteq W$. Em consequência, ψ éusco minimal. Sejam R_φ e R_ψ os conjuntos onde φ e ψ são um-avaliadas, respectivamente. Sabendo que $R_\psi \subseteq R_\varphi$ e que o Jogador II tem uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R_\psi)$, então também possui uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R_\varphi)$. Portanto, Y é um aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$.
- ii) Dados M um espaço métrico completo sem pontos isolado e $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(X)$ usco minimal, sejam R o conjunto dos pontos nos quais φ é um-avaliada e $M_n = \{x \in M \mid \varphi(x) \cap X_n \neq \emptyset\}$. É claro que $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura fechada de M . Logo, pela Proposição 1.3.18, se $U_n = \text{int}(M_n)$ temos que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ é denso em M . Agora, suponhamos que o Jogador I começa com a família $B_0 = \{B_0^\emptyset\}$, logo tomemos o mínimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_0^\emptyset \cap U_{n_0} \neq \emptyset$. Existem $a \in B_0^\emptyset \cap U_{n_0}$ e $r > 0$ tais que $\overline{B(a, r)} \subseteq U_{n_0}$. Considerando $F = \overline{B(a, r)}$, definimos $\psi : F \rightarrow \mathcal{P}(X_{n_0})$ por $\psi(x) = \varphi(x)$, onde F é um espaço métrico completo sem pontos isolados e ψ éusco minimal. Denotemos por R_ψ o conjunto dos pontos onde ψ é um-avaliada, nesse caso temos que $R_\psi = R \cap F$. Dado que X_{n_0} é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$, existe uma estratégia vencedora para o Jogador II no $C^{\mathcal{A}}(R_\psi)$ jogado em F . Em virtude da Proposição 4.4.9, concluímos que o Jogador II possui uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R)$. Finalmente, X é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$.
- iii) Seja $(X_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de espaços aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$. Dado um espaço métrico completo sem pontos isolados M eusco minimal

¹⁰ Ver Definição 1.2.26

$\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n\right)$, a partir do item (d) do Lema 1.2.37, obtemos que $\pi_n \circ \varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(X_n)$ éusco minimal para cada $n \in \mathbb{N}$. Sejam R_n e R os conjuntos onde $\pi_n \circ \varphi$ e φ são um-avaliadas, respectivamente. Como o Jogador II possui uma estratégia vencedora para cada $C^A(R_n)$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n \subseteq R$, então o Jogador II possui também uma estratégia vencedora em $C^A(R)$. Portanto, $\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n, \tau_{prod}\right)$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$.

□

4.5 Um espaço quase Asplund fraco que não é Asplund fraco

Nesta seção vamos mostrar que, dados um subconjunto A denso de $(0, 1)$ e um σ -ideal próprio $\mathcal{A}$, sob certas hipóteses, o espaço $BV_A[0, 1]$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$. Baseado nisto, de acordo com Moors e Somasundaram (2006), construímos um espaço quase Asplund fraco que não é Asplund fraco.

Definição 4.5.1. Dado $A \subseteq (0, 1)$, denotaremos por $M_A[0, 1]$ o conjunto das funções não decrescentes de $B[0, 1]$, onde $B[0, 1] = \{f \in BV_A[0, 1] \mid \|f\|_{var} \leq 1\}$.

Proposição 4.5.2. O espaço $(M_A[0, 1], \tau_A)$ é compacto.

Demonstração. Basta provar que $M_A[0, 1]$ é τ_p -fechado em $\mathbb{R}^{[0, 1]}$. De fato, sejam $\alpha \in \overline{M_A[0, 1]}$ e $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tais que $t_1 < t_2$. Se $\alpha(t_1) > \alpha(t_2)$, tomemos dois intervalos abertos disjuntos U_1, U_2 de $\mathbb{R}$ tais que $\alpha(t_1) \in U_1$ e $\alpha(t_2) \in U_2$. Assim, existe $\beta \in M_A[0, 1] \cap (S(t_1, U_1) \cap S(t_2, U_2))$ e, em consequência, $\beta(t_1) > \beta(t_2)$, mas isso contradiz o fato que β seja não decrescente. Então $\alpha(t_1) \leq \alpha(t_2)$ e, portanto, $\alpha \in M_A[0, 1]$. □

Daqui em diante só utilizaremos sobre $M_A[0, 1]$ a topologia τ_A , salvo indicação contrária. Note que, pela Proposição 1.2.25, no caso que A seja denso em $(0, 1)$, as topologias τ_A e τ_p são iguais em $M_A[0, 1]$.

Proposição 4.5.3. Se A é um subconjunto denso de $(0, 1)$, então a função $H : (M_A[0, 1] \times M_A[0, 1], \tau_{prod}) \rightarrow (BV_A[0, 1], \tau_A)$ definida por $H(f, g) = f - g$ é contínua, fechada e, para cada $\varphi \in BV_A[0, 1]$, $H^{-1}(\varphi)$ é τ_{prod} -compacta. Além disso, $B[0, 1] \subseteq H(M_A[0, 1] \times M_A[0, 1])$.

Demonstração. Sejam C um τ_A -aberto de $BV_A[0, 1]$ e $(f, g) \in H^{-1}(C)$. Existem $x_i \in A$ e U_i abertos de $\mathbb{R}$, onde $i \in \{1, \dots, n\}$, tais que $H(f, g) \in \bigcap_{i=1}^n S(x_i, U_i) \cap BV_A[0, 1] \subseteq C$. Para cada i , existe

$r_i > 0$ tal que $((f(x_i) - g(x_i)) - r, (f(x_i) - g(x_i)) + r) \subseteq U_i$.

Então, definindo $V_i = (f(x_i) - \frac{r}{2}, f(x_i) + \frac{r}{2})$ e $W_i = (g(x_i) - \frac{r}{2}, g(x_i) + \frac{r}{2})$, obtemos que

$$(f, g) \in \left(\bigcap_{i=1}^n S(x_i, V_i) \cap M_A[0, 1] \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n S(x_i, W_i) \cap M_A[0, 1] \right) \subseteq H^{-1}(C).$$

Assim, $H^{-1}(C)$ é τ_{prod} -aberto. As demais propriedades são obtidas a partir do fato que H é contínua e que o espaço $M_A[0, 1] \times M_A[0, 1]$ é compacto Hausdorff.

Por último, se $\varphi \in B[0, 1]$, existem duas funções não decrescentes $\varphi_1, \varphi_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Sem perda de generalidade podemos considerar que $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. Ademais, $\varphi_1, \varphi_2 \in BV_A[0, 1]$. Logo $\varphi_1(1) \leq \varphi(1) \leq 1$ e, assim também, $\varphi_2(1) = \varphi_1(1) - \varphi(1) \leq \varphi_1(1) \leq 1$. Ou seja, $\varphi_1, \varphi_2 \in M_A[0, 1]$ tais que $H(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi$. Em conclusão, $B[0, 1] \subseteq H(M_A[0, 1] \times M_A[0, 1])$. $\square$

Observação 4.5.4. Com as mesmas hipóteses, a função $H : M_A[0, 1] \times M_A[0, 1] \rightarrow H(M_A[0, 1] \times M_A[0, 1])$ é perfeita.

Definição 4.5.5. Sejam $\alpha \in M_A[0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Definimos $L^1(\alpha, n) = \sum_{t \in S(\alpha, n)} \alpha(t^+) - \alpha(t^-)$, onde

$S(\alpha, n) = \{t \in [0, 1] \mid \alpha(t^+) - \alpha(t^-) \geq \frac{1}{n}\}$. Denotaremos por $S(\alpha, \infty)$ o conjunto dos pontos onde α não seja contínua e definimos $L^1(\alpha, \infty) = \sum_{t \in S(\alpha, \infty)} \alpha(t^+) - \alpha(t^-)$.

Observação 4.5.6. Para os extremos consideramos $\alpha(1^+) = 1$ e $\alpha(0^-) = 0$. Por outro lado, é claro que $\{S(\alpha, n)\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ é uma sequência não decrescente, no sentido da inclusão, e $S(\alpha, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(\alpha, n)$. Assim também, $\{L^1(\alpha, n)\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ é uma sequência não decrescente que converge a $L^1(\alpha, \infty)$. Por outro lado, cada $S(\alpha, n)$ é um conjunto finito.

Proposição 4.5.7. Sejam A um subconjunto denso de $(0, 1)$ e $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ um subconjunto denso enumerável de A . Se $\rho_I, \rho_J : M_A[0, 1] \times M_A[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ são definidas por

$$\rho_I(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(f-g)(a_n)|}{2^n} \quad \text{e} \quad \rho_J(f, g) = \sum_{t \in A} |(f-g)(t^+) - (f-g)(t)|,$$

onde $a_0 = 1$, então

- i) ρ_I e ρ_J são pseudo-métricas.
- ii) Sejam $\alpha, \beta \in M_A[0, 1]$ tais que $\rho_I(\alpha, \beta) = 0$. Logo $\alpha(t^+) = \beta(t^+)$ e $\alpha(t^-) = \beta(t^-)$, para qualquer $t \in [0, 1]$. Consequentemente α e β são iguais em $(0, 1) \setminus A$ e, para todo $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $S(\alpha, m) = S(\beta, m)$.
- iii) $M_A[0, 1]$ é fragmentado por ρ_I .¹¹
- iv) $d = \rho_I + \rho_J$ é uma métrica.

¹¹ Ver Definição 1.4.10.

Demonstração. Não é difícil provar que ρ_I e ρ_J são pseudo-métricas em $M_A[0, 1]$ ¹². Sejam $\alpha, \beta \in M_A[0, 1]$ tais que $\rho_I(\alpha, \beta) = 0$. Logo $\alpha(a_n) = \beta(a_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $t \in [0, 1]$. Se $\alpha(t^+) < \beta(t^+)$, existe $t_1 > t$ tal que $\alpha(t^+) \leq \alpha(t_1) < \beta(t^+)$. Existe $n_1 \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $t < a_{n_1} < t_1$ e $\alpha(t) \leq \alpha(a_{n_1}) \leq \alpha(t_1)$. Em consequência $\beta(a_{n_1}) < \beta(t^+)$, o qual não pode acontecer. Analogamente, se $\alpha(t^+) > \beta(t^+)$ obtemos uma contradição. Então $\alpha(t^+) = \beta(t^+)$. Do mesmo jeito, $\alpha(t^-) = \beta(t^-)$. Por conseguinte, $\alpha(t^+) = \beta(t^+)$ e $\alpha(t^-) = \beta(t^-)$, para qualquer $t \in [0, 1]$.

Se $B_{\rho_I}(\alpha, r)$ é uma ρ_I -bola aberta e $\alpha \in \overline{M_A[0, 1] \setminus B_{\rho_I}(\alpha, r)}$, existe $\beta \in B(\alpha, \frac{r}{2}) \cap (M_A[0, 1] \setminus B_{\rho_I}(\alpha, r))$, mas $B(\alpha, \frac{r}{2}) \subseteq B_{\rho_I}(\alpha, r)$, o qual é absurdo. Ou seja, cada ρ_I -bola aberta é τ_A -aberta em $M_A[0, 1]$. Então, pela Observação 1.4.11, $M_A[0, 1]$ é fragmentado por ρ_I .

Por último, é claro que $d = \rho_I + \rho_J$ é uma pseudo-métrica. Se $\alpha, \beta \in M_A[0, 1]$ tais que $d(\alpha, \beta) = 0$, então $\rho_I(\alpha, \beta) = \rho_J(\alpha, \beta) = 0$. Dado que $\rho_J(\alpha, \beta) = 0$, isto nos assegura que $\alpha - \beta$ é contínua pela direita em $(0, 1)$ e, como $\rho_I(\alpha, \beta) = 0$, temos que α e β coincidem em $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Então $\alpha = \beta$. Ou seja, d é uma métrica. $\square$

Teorema 4.5.8. Sejam A um subconjunto denso de $(0, 1)$ e $0 \leq a < b \leq 1$. Dados $\alpha \in M_A[0, 1]$ e $m \in \mathbb{N}_{>0}$ tais que $S(\alpha, m) \cap [a, b] = \emptyset$, existe um subconjunto aberto U de $(M_A[0, 1], \tau_A)$, com $\alpha \in U$, tal que $S(\beta, m) \cap [a, b] = \emptyset$, para todo $\beta \in U$.

Demonstração. Em virtude da Proposição 1.2.25, basta mostrar o resultado para o espaço $(M_A[0, 1], \tau_p)$. Seja $E = \{f \in M_A[0, 1] | S(f, m) \cap [a, b] \neq \emptyset\}$. Suponhamos que $\alpha \in \overline{E}$.

No caso que α for contínua em $[a, b]$, e como $\overline{E}$ é fechado em τ_{var} , existe $\psi \in B(\alpha, \frac{1}{3m}) \cap E$. Em consequência, existe $t \in [a, b]$ tal que $\psi(t^+) - \psi(t^-) \geq \frac{1}{m}$, mas $(\psi(t^-), \psi(t^+)) \subseteq [\alpha(t) - \frac{1}{3m}, \alpha(t) + \frac{1}{3m}]$, o qual não pode acontecer. Logo $\alpha \in M_A[0, 1] \setminus \overline{E}$.

Se α não é contínua em $[a, b]$, seja B o subconjunto de $[a, b]$ onde α não é contínua. Como B é compacto, existe $t_0 \in B$ tal que $\alpha(t_0^+) - \alpha(t_0^-)$ é o máximo deles. Seja $r = \frac{1}{m} - (\alpha(t_0^+) - \alpha(t_0^-)) > 0$, e analogamente ao caso anterior, existe $\varphi \in B(\alpha, \frac{r}{3}) \cap E$. Logo existe $s \in [a, b]$ tal que $\varphi(s^+) - \varphi(s^-) \geq \frac{1}{m}$.

Se $s \in [a, b] \setminus B$, temos que $(\varphi(s^-), \varphi(s^+)) \subseteq [\alpha(s) - \frac{r}{3}, \alpha(s) + \frac{r}{3}]$. Ou seja, $\varphi(s^+) - \varphi(s^-) \leq \frac{2r}{3} < \frac{1}{m}$, o qual é falso. Do mesmo jeito, se $s \in B$ temos que $(\varphi(s^-), \varphi(s^+)) \subseteq [\alpha(s^-) - \frac{r}{3}, \alpha(s^+) + \frac{r}{3}]$. Logo $\varphi(s^+) - \varphi(s^-) \leq \alpha(s^+) - \alpha(s^-) + \frac{2r}{3} \leq \alpha(t_0^+) - \alpha(t_0^-) + \frac{2r}{3} < \frac{1}{m}$, obtendo assim novamente uma contradição. Então podemos concluir que $\alpha \in M_A[0, 1] \setminus \overline{E}$. Portanto, $S(\beta, m) \cap [a, b] = \emptyset$, para todo $\beta \in M_A[0, 1] \setminus \overline{E}$. $\square$

Corolário 4.5.9. Sejam A um subconjunto denso de $(0, 1)$ e U um subconjunto aberto de $(0, 1)$. Dados $\alpha \in M_A[0, 1]$ e $m \in \mathbb{N}_{>0}$ tais que $S(\alpha, m) \subseteq U$, existe um subconjunto aberto W de $(M_A[0, 1], \tau_A)$, com $\alpha \in W$, tal que $S(\beta, m) \subseteq U$, para todo $\beta \in W$.

Demonstração. Consideremos $S(\alpha, m) = \{t_1, \dots, t_l\}$ pois ele é finito. Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ existe $r_i > 0$ tal que $\bigcup_{i=1}^l (t_i - r_i, t_i + r_i) \subseteq U$. Pelo Teorema 4.5.8, para cada $j \in \{1, \dots, l-1\}$, existe um

¹² Ver Exemplo 1.2.2.

τ_A -aberto W_j de $M_A[0, 1]$, com $\alpha \in W_j$, tal que $S(\gamma, m) \cap [t_j + r_j, t_{j+1} - r_{j+1}] = \emptyset$, para todo $\gamma \in W_j$. Do mesmo jeito, existem W_0, W_l abertos de $(M_A[0, 1], \tau_A)$, com $\alpha \in W_0 \cap W_l$, tais que $S(\alpha_1, m) \cap [0, t_1 - r_1] = \emptyset$ e $S(\alpha_2, m) \cap [t_l + r_l, 1] = \emptyset$, para quaisquer $\alpha_1 \in W_0$ e $\alpha_2 \in W_l$. Portanto, tomando $W = \bigcap_{i=0}^l W_i$ obtemos o resultado desejado. $\square$

Proposição 4.5.10. Seja A um subconjunto denso de $(0, 1)$. Para todo $m \in \mathbb{N}_{>0}$ temos que a função $F_m : M_A[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F_m(\alpha) = L^1(\alpha, m)$, é semicontínua superior ¹³. Consequentemente a função $T : M_A[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $T(\alpha) = L^1(\alpha, \infty)$, é Borel mensurável ¹⁴.

Demonstração. Seja $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Mostraremos que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $F_m^{-1}(-\infty, \lambda) = \{f \in M_A[0, 1] \mid L^1(f, m) < \lambda\}$ é τ_A -aberto. De fato, basta apenas provar para o caso $\lambda \in (0, 1)$.

Sejam $\alpha \in F_m^{-1}(-\infty, \lambda)$, $r = \frac{\lambda - L^1(\alpha, m)}{4l} > 0$, e consideremos $S(\alpha, m) = \{t_1 < \dots < t_l\}$. Para cada $t_i \in S(\alpha, m)$, existe $\delta_i > 0$ tal que $\alpha(w_1) - \alpha(t_i^+) < r$ e $\alpha(t_i^-) - \alpha(w_2) < r$ para quaisquer $w_1 \in (t_i, t_i + \delta_i)$ e $w_2 \in (t_i - \delta_i, t_i)$. Assim, $S(\alpha, m) \subseteq \bigcup_{i=1}^l (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i)$. Em virtude do Corolário 4.5.9

existe U um aberto de $M_A[0, 1]$, com $\alpha \in U$, tal que $S(f, m) \subseteq \bigcup_{i=1}^l (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i)$ para todo $f \in U$. Seja $V_i = S(t_i - \delta_i, (\alpha(t_i^-) - r, \alpha(t_i^+) + r)) \cap S(t_i + \delta_i, (\alpha(t_i^-) - r, \alpha(t_i^+) + r)) \cap M_A[0, 1]$ um τ_p -aberto. Dado $\beta \in U \cap \bigcap_{i=1}^l V_i$, temos que $S(\beta, m) \subseteq \bigcup_{i=1}^l (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i)$. Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, se

$S(\beta, m) \cap (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i) = \{a_1 < \dots < a_{k(i)}\}$, então, como β é não decrescente, $\bigcup_{j=1}^{k(i)} (\beta(a_j^-), \beta(a_j^+)) \subseteq$

$(\alpha(t_i^-) - r, \alpha(t_i^+) + r)$. Logo $\sum_{j=1}^{k(i)} \beta(a_j^+) - \beta(a_j^-) \leq 2r + \alpha(t_i^+) - \alpha(t_i^-)$. Por conseguinte, $L^1(\beta, m) \leq$

$2rl + L^1(\alpha, m) < \lambda$. Ou seja, $\alpha \in U \cap \bigcap_{i=1}^l V_i \subseteq F_m^{-1}(-\infty, \lambda)$. Portanto, F_m é semicontínua superior e, em consequência, é Borel mensurável.

Finalmente, dado que $(F_m)_{m \in \mathbb{N}_{>0}}$ converge pontualmente a T , concluímos que T é Borel mensurável. $\square$

A partir de agora adotaremos a seguinte notação. Dada uma partição $P = \{t_k \mid 0 \leq k \leq n\}$ de $[0, 1]$, $P^* = P \setminus \{0, 1\}$ e, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, $I_k = [t_{k-1}, t_k]$. Ademais, $P_n = \{\frac{k}{n} \mid 0 \leq k \leq n\}$.

Definição 4.5.11. Para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, definimos

$$M_{m,n}^\varepsilon = \{\alpha \in M_m^\varepsilon \mid S(\alpha, m) \cap P_n^* = \emptyset \text{ e } \text{card}(S(\alpha, m) \cap I_k(P_n)) \leq 1 \text{ para cada } k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

onde $M_m^\varepsilon = \{\alpha \in M_A[0, 1] \mid L^1(\alpha, m) > L^1(\alpha, \infty) - \varepsilon\}$.

Sejam $\mathcal{F}_n$ o conjunto potência de $\{1, 2, \dots, n\}$ e $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$. Para cada $F \in \mathcal{F}_n$, definimos

¹³ Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é **semicontínua superior** se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(-\infty, \lambda)$ é um aberto.

¹⁴ Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é **Borel mensurável** se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(-\infty, \lambda)$ é um Boreliano de X .

$$M_{m,n,F}^\varepsilon = \left\{ \alpha \in M_{m,n}^\varepsilon \mid \text{card}(S(\alpha, m) \cap I_k(P_n)) = 1 \text{ se e somente se } k \in F \right\}.$$

Lema 4.5.12. Seja A um subconjunto denso de $(0, 1)$. Para todo $\varepsilon > 0$, $\{M_{m,n,F}^\varepsilon \mid (m, n, F) \in \mathbb{N}_{>0}^2 \times \mathcal{F}\}$ é uma decomposição enumerável de $(M_A[0, 1], \tau_A)$ formada por Borelianos dele.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Vejamos que $M_A[0, 1] = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{N}_{>0}^2} M_{m,n}^\varepsilon$. Se $f \in M_A[0, 1]$, então existe $m_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $L^1(f, m_0) > L^1(f, \infty) - \varepsilon$. Suponhamos que $S(f, m_0) = \{t_1 < t_2 < \dots < t_l\}$ e seja

$$r = \min\{t_{i+1} - t_i, t_1, 1 - t_l \mid i \in \{1, \dots, l-1\}\} > 0.$$

Logo existe $j \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $r > \frac{1}{j}$. Se $(S(f, m_0) \setminus \{0, 1\}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, então $S(f, m_0) \cap P_j^* = \emptyset$ e $\text{card}(S(f, m_0) \cap I_k(P_j)) \leq 1$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, j\}$. Ou seja, $f \in M_{m_0,j}$. No caso contrário, seja $(S(f, m_0) \setminus \{0, 1\}) \cap \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_q}{b_q} \right\}$, onde cada fração é irredutível. Seja n_0 um número primo maior do que $\max\{b_1, \dots, b_q, j\}$, logo $f \in M_{m_0,n_0}^\varepsilon$.

É claro que $M_{m,n}^\varepsilon = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_n} M_{m,n,F}^\varepsilon$. Mais ainda, $M_A[0, 1] = \bigcup \{M_{m,n,F}^\varepsilon \mid (m, n, F) \in \mathbb{N}_{>0}^2 \times \mathcal{F}\}$. Vamos mostrar que cada $M_{m,n,F}^\varepsilon$ é um Boreliano.

Dadas uma partição $P = \{t_k \mid 0 \leq k \leq n\}$ de $[0, 1]$ e $G \in \mathcal{F}_n$, definimos os conjuntos

$$M_m(P, G) = \left\{ \alpha \in M_{m,n}^\varepsilon \mid S(\alpha, m) \cap P^* = \emptyset \text{ e } S(\alpha, m) \subseteq \bigcup_{k \in G} I_k(P) \right\}$$

e $M_m^*(P, G) = \{\alpha \in M_m(P, G) \mid S(\alpha, m) \cap I_k(P^*) \neq \emptyset \text{ se e só se } k \in G\}$. Se $\alpha \in M_m(P, G)$, temos que $S(\alpha, m) \subseteq \bigcup_{k \in G} \text{int}(I_k(P))$. Pelo Corolário 4.5.9, existe um τ_A -aberto U , com $\alpha \in U$, tal que $S(\beta, m) \subseteq \bigcup_{k \in G} \text{int}(I_k(P))$ para todo $\beta \in U$. Ou seja, $\alpha \in U \cap M_m^\varepsilon \subseteq M_m(P, G)$. Então $M_m(P, G)$ é um τ_A -aberto de M_m^ε . Logo $M_m(P, G)$ é um Boreliano de $M_A[0, 1]$.

Seja $\alpha \in M_m^*(P, G)$. Suponhamos que existe $F \not\subseteq G$ tal que $\alpha \in M_m(P, F)$. Existe $k_0 \in G \setminus F$ tal que $S(\alpha, m) \cap I_{k_0}(P) \neq \emptyset$. Mas $S(\alpha, m) \subseteq \bigcup_{k \in F} I_k(P)$, o qual é absurdo. Então $\alpha \in M_m(P, G) \setminus \left(\bigcup_{F \not\subseteq G} M_m(P, F) \right)$.

Reciprocamente, seja $\beta \in M_m(P, G) \setminus \left(\bigcup_{F \not\subseteq G} M_m(P, F) \right)$. Dado $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $S(\beta, m) \cap I_k(P) \neq \emptyset$ obtemos que $k \in F$ devido a que $S(\beta, m) \subseteq \bigcup_{k \in F} I_k(P)$ e $S(\beta, m) \cap P^* = \emptyset$.

Seja $i \in F$. Se $S(\beta, m) \cap I_i(P) = \emptyset$, então $S(\beta, m) \subseteq \bigcup_{k \in F \setminus \{i\}} I_k(P)$. Em consequência, $\beta \in M_m(P, F \setminus \{i\})$, o qual é absurdo. Então $\beta \in M_m^*(P, G)$. Portanto, $M_m^*(P, G) = M_m(P, G) \setminus \left(\bigcup_{F \not\subseteq G} M_m(P, F) \right)$

também é um Boreliano de $M_A[0, 1]$.

Para quaisquer $\delta > 0$, P uma partição de $[0, 1]$ e $F \in \mathcal{F}_n$, definimos o conjunto

$$M_m^*(P, F, \delta) = \left\{ \alpha \in M_m^*(P, F) \mid \text{diam}(S(\alpha, m) \cap I_k(P)) < \delta, \text{ para todo } k \in F \right\}.$$

Dado $\alpha \in M_m^*(P, F, \delta)$, para cada $k \in F$, denotemos por a_k e b_k o mínimo e o máximo de $S(\alpha, m) \cap I_k(P)$. Se $r_k = \delta - (b_k - a_k)$, então $S(\alpha, m) \subseteq \bigcup_{k \in F} (a_k - \frac{r_k}{3}, b_k + \frac{r_k}{3})$. Em virtude do Corolário 4.5.9,

existe um τ_A -aberto V , com $\alpha \in V$, tal que $S(\beta, m) \subseteq \bigcup_{k \in F} (a_k - \frac{r_k}{3}, b_k + \frac{r_k}{3})$ para todo $\beta \in V$. Assim, $\alpha \in V \cap M_m^*(P, F) \subseteq M_m^*(P, F, \delta)$. Logo, $M_m^*(P, F, \delta)$ é um τ_A -aberto de $M_m^*(P, F)$. Portanto, $M_m^*(P, F, \delta)$ é um Boreliano de $M_A[0, 1]$. Por conseguinte, $M_{m,n,F}^\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_m^*(P, F, 1/i)$ também é Boreliano.

Concluimos que $\{M_{m,n,F}^\varepsilon \mid (m, n, F) \in \mathbb{N}_{>0}^2 \times \mathcal{F}\}$ é uma decomposição enumerável de $M_A[0, 1]$ formada por Borelianos dele. $\square$

Agora já temos as ferramentas necessárias para demonstrar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 4.5.13. Dados A um subconjunto denso de $(0, 1)$ e $\mathcal{A}$ um σ -ideal próprio fortemente topologicamente estável em $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ tais que $A \cap C \in \mathcal{A}_C$, para todo $C \subseteq [0, 1]$ que seja homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, então $(BV_A[0, 1], \tau_A)$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$.

Demonstração. Inicialmente provaremos que $(M_A[0, 1], \tau_A)$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$ por meio do Corolário 4.4.13. Sejam ρ_I e ρ_J , como foram definidas na Proposição 4.5.7, pseudo-métricas em $M_A[0, 1]$. Sabemos que $d = \rho_I + \rho_J$ é uma métrica e que $M_A[0, 1]$ é fragmentado por ρ_I .

Sejam $\varepsilon > 0$, M um espaço métrico completo sem pontos isolados e $\varphi : M \rightarrow \mathcal{P}(M_A[0, 1])$ usco minimal. Pela Proposição 1.4.12, existe um conjunto residual R em M tal que $\rho_I - \text{diam}(\varphi(x)) = 0$, para todo $x \in R$. Mostraremos que o Jogador II possui uma estratégia vencedora em $C^{\mathcal{A}}(R_\varepsilon)$, onde $R_\varepsilon = \{x \in M \mid d - \text{diam}(\varphi(x)) \leq \varepsilon\}$.

Suponhamos que o Jogador I começa escolhendo uma família unitária $B_0 = \{B_0^\emptyset\}$, onde $B_0^\emptyset$ é um aberto não vazio de M tal que $\text{diam}(B_0^\emptyset) < 1$. A partir do Lema 4.5.12, e seguindo com a notação dele, sabemos que $M_A[0, 1] = \bigcup \left\{ M_{m,n,F}^{\frac{\varepsilon}{2}} \mid (m, n, F) \in \mathbb{N}_{>0}^2 \times \mathcal{F} \right\}$. Note que $\varphi_1 = \varphi|_{B_0^\emptyset}$ é usco minimal e $B_0^\emptyset = \bigcup \left\{ \varphi_1^{-1} \left(M_{m,n,F}^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \mid (m, n, F) \in \mathbb{N}_{>0}^2 \times \mathcal{F} \right\}$. Existe $(m', n', F') \in \mathbb{N}_{>0}^2 \times \mathcal{F}$ tal que $\varphi_1^{-1} \left(M_{m',n',F'}^{\frac{\varepsilon}{2}} \right)$ é de segunda categoria. Logo, pela Corolário 1.4.15, existem um aberto U de $B_0^\emptyset$ e G um subconjunto G_δ denso de U tais que $\varphi_1(G) \subseteq M_{m',n',F'}^{\frac{\varepsilon}{2}}$. Mais ainda, $\tilde{G} = G \cap R$ é um subconjunto G_δ denso de $U \cap R$ e $\varphi_1(\tilde{G}) \subseteq M_{m',n',F'}^{\frac{\varepsilon}{2}}$. Para cada $k \in F'$, seja $g_k : \tilde{G} \rightarrow [0, 1]$ tal que $g_k(x) = S(\alpha, m') \cap I_k(P_{n'})$, onde $\alpha \in \varphi_1(x)$. A boa definição de g_k está garantida pelo item (ii) da Proposição 4.5.7. Sejam V um aberto de $[0, 1]$ e $x \in g_k^{-1}(V)$. Para cada $\alpha \in \varphi(x)$, temos que $S(\alpha, m') \cap I_k(P_{n'}) \in V$ e $S(\alpha, m') \setminus \{g_k(x)\} \subseteq [0, 1] \setminus I_k(P_{n'})$. Pelo Corolário 4.5.9, existe um τ_A -aberto W_α , com $\alpha \in W_\alpha$, tal que $S(\beta, m') \subseteq V \cup [0, 1] \setminus I_k(P_{n'})$ para qualquer $\beta \in W_\alpha$. Como φ_1 é usco, existe um aberto $L \subseteq B_0^\emptyset$ tal que $x \in L$ e $\varphi_1(L) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \varphi_1(x)} W_\alpha$. Dados $z \in L \cap \tilde{G}$ e $\beta' \in \varphi_1(z)$, existe $\alpha' \in \varphi_1(x)$ tal que $\beta' \in W_{\alpha'}$. Em consequência, $S(\beta', m) \subseteq V \cup [0, 1] \setminus I_k(P_{n'})$ e $g_k(z) = S(\beta', m) \cap I_k(P_{n'}) \in V$. Ou seja, g_k é contínua. Além disso, considerando $F' = \{n_1 < \dots < n_l\}$, existe um aberto não vazio $D_1 \subseteq U$ tal que g_{n_1} não é constante em $Q \cap \tilde{G}$, para qualquer aberto não vazio $Q \subseteq D_1$, ou g_{n_1} é constante em $D_1 \cap \tilde{G}$. Analogamente, existe um aberto não vazio

$D_2 \subseteq D_1$ tal que g_{n_2} não é constante em $Q \cap \tilde{G}$, para qualquer aberto não vazio $Q \subseteq D_1$, ou g_{n_2} é constante em $D_2 \cap \tilde{G}$. E assim sucessivamente, existe um aberto não vazio $D_l \subseteq D_{l-1}$ tal que g_{n_l} não é constante em $Q \cap \tilde{G}$, para qualquer aberto não vazio $Q \subseteq D_l$, ou g_{n_l} é constante em $D_l \cap \tilde{G}$. Então $A_0^\emptyset = D_l$ satisfaz a seguinte propriedade. Para cada $k \in F'$, g_k não é constante em $V \cap \tilde{G}$, para qualquer aberto $V \subseteq A_0^\emptyset$, ou g_k é constante em $A_0^\emptyset \cap \tilde{G}$. Logo, o Jogador II responde $\sigma(B_0^\emptyset) = A_0^\emptyset$.

Note que, aplicando repetidamente a Proposição 1.4.8, $\varphi_2 = \varphi|_{A_0^\emptyset \cap \tilde{G}}$ é minimal usco. Sejam

- $F_1 = \{k \in F' \mid g_k \text{ é constante em } A_0^\emptyset \cap \tilde{G} \text{ e } g_k(A_0^\emptyset \cap \tilde{G}) \cap A = \emptyset\}$.
- $F_2 = \{k \in F' \mid g_k \text{ é constante em } A_0^\emptyset \cap \tilde{G} \text{ e } g_k(A_0^\emptyset \cap \tilde{G}) \subseteq A\}$.
- $F_3 = \{k \in F' \mid g_k \text{ não é constante em } W \cap \tilde{G}, \text{ para qualquer aberto não vazio } W \subseteq A_0^\emptyset\}$.

Não é difícil ver que para todo $k \in F_3$ e para qualquer aberto não vazio $W \subseteq A_0^\emptyset$, $g_k(W \cap \tilde{G})$ é um conjunto infinito.

Para cada $i \in F_2$, definimos a função $h_i : M_A[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $h_i(\alpha) = \alpha(g_i(w))$, onde $w \in A_0^\emptyset \cap \tilde{G}$. Cada função h_i é contínua e, conseqüentemente, $h_i \circ \varphi_2 : A_0^\emptyset \cap \tilde{G} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é usco minimal. Logo, pela Proposição 1.4.12, existe um residual R_i de $A_0^\emptyset \cap \tilde{G}$ tal que $h_i \circ \varphi_2$ é um-avaliada em R_i . Então $R^* = \bigcap_{i \in F_2} R_i$ é residual em $A_0^\emptyset \cap \tilde{G}$ tal que cada $h_i \circ \varphi_2$ é um-avaliada em R^* . Mais ainda, pela continuidade pela direita em $(0, 1) \setminus A$, se $k \in F_1 \cup F_2$ e $z \in R^*$, então $\{\alpha(g_k(z)) \mid \alpha \in \varphi(z)\}$ é um conjunto unitário.

Além disso, pela Proposição 1.3.8, R^* é residual em $A_0^\emptyset$. Então existe $(O_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ uma sequência de abertos densos de $A_0^\emptyset$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \subseteq R^*$.

Suponhamos que na n -ésima rodada o Jogador I escolhe uma família de abertos não vazios $B_n = \{B_n^t \mid t \in \{0, 1\}^n\}$, onde $\text{diam}(B_n^t) < \frac{1}{2^n}$, para cada $t \in \{0, 1\}^n$, e $\overline{B_n^{t \wedge 0}} \cup \overline{B_n^{t \wedge 1}} \subseteq A_{n-1}^t$ para todo $t \in \{0, 1\}^{n-1}$. Seja $k \in F_3$. Para cada $t \in \{0, 1\}^n$, podemos escolher $a_t \in B_n^t \cap O_n$ de modo que $g_k(a_{t_1}) \neq g_k(a_{t_2})$ para quaisquer $t_1, t_2 \in \{0, 1\}^n$ distintos. Logo, para cada $t \in \{0, 1\}^n$, existe um aberto V_t^k de $[0, 1]$ tal que $g_k(a_t) \in V_t^k$ e $V_t^k \cap V_r^k = \emptyset$ para qualquer $r \neq t$. Existe um aberto C_t^k de M tal que $g_k^{-1}(V_t^k) = C_t^k \cap \tilde{G}$. Definamos $A_n^t = \bigcap_{k \in F_3} C_t^k \cap B_n^t \cap O_n$ para cada $t \in \{0, 1\}^n$. Logo

$g_k(A_n^t) \cap g_k(A_n^{t'}) = \emptyset$, para quaisquer $t, t' \in \{0, 1\}^n$ distintos e $k \in F_3$. Então o Jogador II responde $\sigma(B_0, \dots, B_n) = \{A_n^t \mid t \in \{0, 1\}^n\}$.

Agora vejamos que σ é uma estratégia vencedora. Seja $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, onde $K_n = \bigcup \{B_n^t \mid t \in \{0, 1\}^n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que $K \subseteq R^*$ e, para cada $k \in F_3$, g_k é injetora em K . Ou seja, $g_k|_K : K \rightarrow g_k(K)$ é um homeomorfismo. Para cada $k \in F_3$ definamos $A_k = g_k^{-1}(A) \cap K$. Pelo fato anterior e por hipóteses do teorema, $g_k(K) \cap A \in \mathcal{A}_{g_k(K)}$. Logo $A_k = g_k^{-1}(g_k(K) \cap A) \in \mathcal{A}_K$.

Sejam $x_0 \in K \setminus \bigcup_{k \in F_3} A_k$ e $\alpha, \beta \in \varphi(x_0)$. Se $t \in S(\alpha, m')$, então $\alpha(t^+) = \beta(t^+)$ e, como α e β são

contínuas pela direita em $(0, 1) \setminus A$, $\alpha(t) = \beta(t)$. Logo

$$\begin{aligned}
 \rho_J(\alpha, \beta) &= \sum_{t \in A \cap S(\alpha, \infty)} |(\alpha - \beta)(t^+) - (\alpha - \beta)(t)| \\
 &= \sum_{t \in A \cap S(\alpha, m')} |(\alpha - \beta)(t^+) - (\alpha - \beta)(t)| + \sum_{t \in A \cap D} |(\alpha - \beta)(t^+) - (\alpha - \beta)(t)| \\
 &\leq \sum_{t \in A \cap D} \alpha(t^+) - \alpha(t) + \sum_{t \in A \cap D} \beta(t^+) - \beta(t) \\
 &\leq \sum_{t \in A \cap D} \alpha(t^+) - \alpha(t^-) + \sum_{t \in A \cap D} \beta(t^+) - \beta(t^-) < \varepsilon,
 \end{aligned}$$

onde $D = S(\alpha, \infty) \setminus S(\alpha, m')$. Ou seja, $\rho_J - \text{diam}(\varphi(x_0)) < \varepsilon$ e, por consequência, $x_0 \in R_\varepsilon$. Isto é, $K \setminus \bigcup_{k \in F_3} A_k \subseteq R_\varepsilon$. Portanto, $K \setminus R_\varepsilon \subseteq \bigcup_{k \in F_3} A_k$. Assim, $K \setminus R_\varepsilon \in \mathcal{A}_K$. Então $M_A[0, 1]$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$.

Finalmente, pela Proposição 4.5.3 e o item (i) do Teorema 4.4.14, temos que a bola unitária fechada $B[0, 1]$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$. Em virtude do item (ii) do Teorema 4.4.14, concluímos que $BV_A[0, 1]$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$. $\square$

O seguinte resultado garante a existência de um conjunto denso de $(0, 1)$ e um σ -ideal próprio que satisfazem as hipóteses do teorema anterior.

Proposição 4.5.14. Existem $\mathcal{A}$ um σ -ideal próprio fortemente topologicamente estável em $(\{0, 1\}^\mathbb{N}, \tau_p)$ e A um subconjunto denso e de segunda categoria de $(0, 1)$ tais que $A \cap C \in \mathcal{A}_C$, para todo $C \subseteq [0, 1]$ que seja homeomorfo a $\{0, 1\}^\mathbb{N}$.

Demonstração. Seja κ o menor ordinal que tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$. Seja $\{E^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ uma enumeração dos conjuntos Borelianos não magros de $(0, 1)$ e seja $\{(f_n)_{n \in \mathbb{N}}^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ uma enumeração dos conjuntos das sequências de funções contínuas injetoras de $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ em $[0, 1]$.

Em seguida mostraremos que, dado $\alpha \in \kappa$, existe $a_\alpha \in E^\alpha \setminus \{f_n^\beta(x_\beta) \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } \beta < \alpha\}$ e existe $x_\alpha \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ tal que $f_n^\alpha(x_\alpha) \neq a_\beta$, para quaisquer $\beta \leq \alpha$ e $n \in \mathbb{N}$.

De fato, seja $\alpha \in \kappa$ e suponhamos que todo $\beta < \alpha$ satisfaz as propriedades desejadas. Se $E^\alpha \setminus \{f_n^\beta(x_\beta) \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } \beta < \alpha\} = \emptyset$, então $E^\alpha \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n^\beta(x_\beta) \mid \beta < \alpha\}$. Por consequência, $2^{\aleph_0} \leq \text{card}(E^\alpha) \leq \text{card}(\alpha \times \mathbb{N})$, o qual não pode ser pois $\text{card}(\alpha \times \mathbb{N}) < 2^{\aleph_0}$. Então existe $a_\alpha \in E^\alpha \setminus \{f_n^\beta(x_\beta) \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } \beta < \alpha\}$.

Além disso, suponhamos que para todo $t \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$, existem $m \in \mathbb{N}$ e $\beta \leq \alpha$ tais que $f_m^\alpha(t) = a_\beta$. Baseado nisto, podemos definir uma função injetora $H: \{0, 1\}^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{\beta \in \kappa \mid \beta \leq \alpha\}$ tal que $H(t) = (n_t, \beta_t)$, onde $n_t \in \mathbb{N}$ é o menor natural e β_t é o menor ordinal tais que $f_{n_t}^\alpha(t) = a_{\beta_t}$. Logo $2^{\aleph_0} \leq \text{card}(\alpha \times \mathbb{N})$, mas novamente isso é falso. Então existe $x_\alpha \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ tal que $f_n^\alpha(x_\alpha) \neq a_\beta$, para quaisquer $\beta \leq \alpha$ e $n \in \mathbb{N}$.

Definimos $A = \{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$. Não é difícil ver que A é denso em $(0, 1)$. Se A é magro, então $(0, 1) \setminus A$ é residual. Logo existe G , um conjunto G_δ denso de $(0, 1)$, tal que $G \subseteq (0, 1) \setminus A$. Como G é um Boreliano não magro de $(0, 1)$, existe $\tilde{\alpha} \in \kappa$ tal que $G = E^{\tilde{\alpha}}$. Por consequência $a_{\tilde{\alpha}} \in G$,

mas $G \cap A = \emptyset$, o qual é absurdo. Portanto, A é um conjunto denso não magro de $(0, 1)$.

Dada $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])$, existe $\alpha \in \kappa$ tal que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}^\alpha = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se $\{(f_n^\alpha)^{-1}(A) \mid n \in \mathbb{N}\}$ cobre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_\alpha \in (f_m^\alpha)^{-1}(A)$. Ou seja, $f_m^\alpha(x_\alpha) \in A$. Logo, existe $\beta \in \kappa$ tal que $f_m^\alpha(x_\alpha) = a_\beta$. No caso que $\beta \leq \alpha$, temos que $f_m^\alpha(x_\alpha) \neq a_\beta$, o qual é falso. E no caso que $\alpha < \beta$, temos que $f_m^\alpha(x_\alpha) = a_\beta \in E^\beta$, o qual também é falso. Por conseguinte, para cada $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])$, $\{g_n^{-1}(A) \mid n \in \mathbb{N}\}$ não cobre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Denotemos por $\mathcal{A}$ o σ -ideal gerado por $\mathcal{F} = \{f^{-1}(A) \mid f \in C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])\}$. Pelo fato anterior sabemos que é um σ -ideal próprio. Agora vejamos que $\mathcal{A}$ é topologicamente estável em $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$. Dado um homeomorfismo $h: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, denotemos por $\mathcal{A}_h = \{h(D) \mid D \in \mathcal{A}\}$ o σ -ideal gerado por $h(\mathcal{F})$. Se $f \in C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])$, então $f \circ h^{-1} \in C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])$ e $h(f^{-1}(A)) = (f \circ h^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Logo $\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}$. Isto é, $h(U) \in \mathcal{A}$ para qualquer $U \in \mathcal{A}$.

Agora mostraremos que $\mathcal{A}$ é um σ -ideal fortemente topologicamente estável em $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$. Seja Y um subespaço aberto-fechado de $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ que é homeomorfo a ele. Não é difícil ver que $\mathcal{A}_Y$ é o σ -ideal gerado por $\{g^{-1}(A) \mid g \in C_i(Y, [0, 1])\}$. Dado $g \in C_i(Y, [0, 1])$, pela Proposição 1.2.39, existe uma função $L: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ contínua injetora que estende g . Logo $g^{-1}(A) = L^{-1}(A) \cap Y \in \mathcal{A}$. Por consequência, $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}$.

Por último, sejam $C \subseteq [0, 1]$ um subespaço homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $\varphi: C \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ um homeomorfismo. A função $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$, definida por $f(t) = \varphi^{-1}(t)$, é contínua injetora. Por consequência, $f^{-1}(A) = \varphi(A) \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}_C = \{\varphi^{-1}(Z) \mid Z \in \mathcal{A}\}$, obtemos que $A \in \mathcal{A}_C$. Então $A \cap C \in \mathcal{A}_C$. $\square$

Finalmente o seguinte corolário, objetivo principal deste capítulo, fornece uma resposta negativa à pergunta feita por [Larman e Phelps \(1979\)](#).

Corolário 4.5.15. Existe um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ tal que (X^*, fraca^*) é fracamente Stegall, mas X não é Asplund fraco. Em particular, X é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux que não é Asplund fraco.

Demonstração. Sejam A e $\mathcal{A}$ como foram construídos na Proposição 4.5.14. Sabemos que o espaço $(BV_A[0, 1], \tau_A)$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$ pelo Teorema 4.5.13. Em virtude do Corolário 4.3.20, a bola fechada unitária $(B_{C(K_A)^*}, \text{fraca}^*)$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$. Pelo item (ii) do Teorema 4.4.14, $(C(K_A)^*, \text{fraca}^*)$ é aproximadamente Stegall com respeito a $\mathcal{A}$.

Em consequência, $(C(K_A)^*, \text{fraca}^*)$ é fracamente Stegall. Por conseguinte, $(C(K_A), \|\cdot\|_\infty)$ é quase Asplund fraco devido ao Teorema 4.1.14. Em particular, $(C(K_A), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux.

Se $(C(K_A), \|\cdot\|_\infty)$ é Asplund fraco, então em virtude do Corolário 4.2.13, A é perfeitamente magro, mas isso contradiz o fato que A seja de segunda categoria.

Portanto, $(C(K_A), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de diferenciabilidade Gâteaux que não é Asplund fraco. $\square$

REFERÊNCIAS

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado nas páginas 42, 44, 45 e 46.

ENGELKING, R. **General topology, Sigma series in pure mathematics, vol. 6**. [S.l.]: Heldermann Verlag, Berlin, 1989. Citado na página 25.

FABIAN, M. **Gâteaux Differentiability of Convex Functions and Topology: Weak Asplund Spaces**. Wiley, 1997. (Canadian Mathematical Society series of monographs and advanced texts). ISBN 9780471168225. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IDKJf-lbWGEC>>. Citado nas páginas 31 e 46.

GILES, J. R. **Convex analysis with application in the differentiation of convex functions**. Pitman Pub., 1982. Citado nas páginas 46 e 48.

HOLA, L.; HOLÝ, D. Minimal usco and minimal cusco maps. **Khayyam Journal of Mathematics**, Tusi Mathematical Research Group (TMRG) and Department of Pure Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad (in cooperation with The Center of Excellence in Analysis on Algebraic Structures), v. 1, n. 2, p. 125–150, 2015. Citado na página 38.

HRBACEK, K.; JECH, T. **Introduction to Set Theory, Revised and Expanded**. [S.l.]: Crc Press, 1999. Citado nas páginas 21, 23 e 25.

JECH, T. **Set theory. the third millennium edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag**, 2003. Citado nas páginas 21 e 23.

KALENDA, O. Stegall compact spaces which are not fragmentable. **Topology and its Applications**, Elsevier, v. 96, n. 2, p. 121–132, 1999. Citado na página 75.

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. [S.l.]: wiley New York, 1978. v. 1. Citado nas páginas 42 e 43.

LARMAN, D.; PHELPS, R. Gateaux differentiability of convex functions on banach spaces. **Journal of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 115–127, 1979. Citado nas páginas 20, 67 e 103.

MOORS, W.; SOMASUNDARAM, S. A gâteaux differentiability space that is not weak asplund. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 134, n. 9, p. 2745–2754, 2006. Citado nas páginas 20, 67 e 95.

MOORS, W. B. **Closed graph theorems and Baire spaces**. [S.l.]: University of Waikato [Department of Mathematics], 2000. Citado nas páginas 19 e 51.

MUNKRES, J. R. **Topology**. [S.l.]: Prentice Hall, 2000. Citado nas páginas 25, 28, 33 e 36.

NOLL, D. A topological completeness concept with applications to the open mapping theorem and the separation of convex sets. **Topology and its Applications**, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 53–69, 1990. Citado nas páginas 19, 57 e 61.

PHELPS, R. R. **Convex functions, monotone operators and differentiability**. [S.l.]: Springer, 2009. v. 1364. Citado nas páginas [46](#) e [49](#).

RANA, I. K. **An introduction to measure and integration**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2002. v. 45. Citado na página [107](#).

TELGÁRSKY, R. Topological games: on the 50th anniversary of the banach-mazur game. **The Rocky Mountain Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 17, n. 2, p. 227–276, 1987. Citado na página [19](#).

ALGUNS CARDINAIS

Calcularemos os cardinais de alguns conjuntos envolvidos na Proposição 4.5.14.

Proposição A.0.1. O conjunto das funções contínuas injetoras de $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ em $[0, 1]$, denotado por $C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])$, possui a cardinalidade do contínuo.

Demonstração. Dado que $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ é separável, existe um conjunto denso enumerável $D \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Definamos a função $\psi : C(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1]) \rightarrow C(D, [0, 1])$ por $\psi(f) = f|_D$. Como ψ é injetora, temos que $\text{card}(C(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])) \leq 2^{\aleph_0}$. Logo $\text{card}(C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])) \leq 2^{\aleph_0}$.

Por outro lado, sabemos que o conjunto de Cantor $C \subseteq [0, 1]$ é homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Ou seja, existe um homeomorfismo $h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow C$. Definamos a função $\varphi : (0, 1) \rightarrow C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])$ por $\varphi(\lambda) = \lambda h$. Como φ é injetora, temos que $2^{\aleph_0} \leq \text{card}(C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1]))$. Portanto concluímos que $\text{card}(C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])) = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Denotemos por $\mathcal{E}$ o conjunto de seqüências de elementos de $C_i(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, [0, 1])$. Então $\text{card}(\mathcal{E}) = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Teorema A.0.2. O conjunto dos Borelianos de $\mathbb{R}$ possui a cardinalidade do contínuo.

Demonstração. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em RANA (Corolário 4.5.3 da Seção 5 do Capítulo 4, página 112). $\square$

Proposição A.0.3. O conjunto dos Borelianos não magros de $(0, 1)$, denotado por $\tilde{\mathcal{B}}_{(0,1)}$, possui a cardinalidade do contínuo.

Demonstração. Sabemos que $\text{card}(\tilde{\mathcal{B}}_{(0,1)}) \leq 2^{\aleph_0}$. Definamos a função $T : (0, 1) \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{(0,1)}$ por $T(x) = (0, x)$, a qual está bem definida pois $(0, 1)$ é de Baire. Como T é injetora, temos que $2^{\aleph_0} \leq \text{card}(\tilde{\mathcal{B}}_{(0,1)})$. Portanto, $\text{card}(\tilde{\mathcal{B}}_{(0,1)}) = 2^{\aleph_0}$. $\square$