Dicotomias Exponenciais e Pontos Homoclínicos

VANDERLEI MINORI HORITA

Orientador: PROF. DR. JOSÉ GASPAR RUAS FILHO

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Ciências - Área: Matemática".

USP - São Carlos
Julho de 1993

À minha família

Abstract

Smale showed, using the famous *horseshoe* construction, that for diffeomorphisms with *transversal homoclinic points* there is a compact invariant set on which the action of some iterate of the diffeomorphism is topologically conjugate to the action of the *Bernoulli shift*. We will show this statement using the so-called *shadowing lemma*. Our basic technique is the theory of *exponential dichotomies*.

Resumo

Smale mostrou, usando a famosa construção do *horseshoe*, que para difeomorfismos com *pontos homoclínicos transversais* existe um conjunto invariante compacto no qual a ação de algum iterado do difeomorfismo é topologicamente conjugado à ação do *shift de Bernoulli*. Mostraremos este resultado utilizando o *shadowing lemma*. Nossa técnica básica é a teoria de *dicotomias exponenciais*.

Agradecimentos

Ao Gaspar pela orientação segura, pela dedicação e pela confiança; sendo ele, o responsável pelas qualidades deste trabalho (se é que possui alguma); os erros, que são muitos, estes são totalmente devidos a mim.

À minha família pelo apoio e incentivo, embora nem sempre entendendo como alguém possa gostar de matemática.

Aos professores, que seja em cursos ou seja em conversas me ensinaram o pouco de matemática que sei.

Aos meus colegas que me suportaram e que tornaram muito agradáveis estes anos. Em particular ao Antonio e ao Marcos, pelas incontáveis “discussões”, que ajudaram tornar claras idéias e conceitos.

À Beth e a Laura, pela eficiência que tratam dos nossos assuntos acadêmicos.

Aos funcionários do instituto, cuja ação nos dá condições de desenvolver nosso trabalho.

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram na elaboração deste trabalho. Peço desculpas àqueles que injusta e involuntariamente tenham sido omitidos.

Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq.

Conteúdo

Introdução	1
1 Dicotomias Exponenciais para Equações Diferença Lineares	3
2 Conjuntos Hiperbólicos e o Shadowing Lemma	22
3 Comportamento Caótico na vizinhança de um ponto homoclínico transversal: O Teorema de Smale	31
4 Equivalência de Definições de Ponto Homoclínico Transversal	39
Bibliografia	55

Introdução

Os difeomorfismos com pontos homoclínicos transversais foram estudados por Smale em [8] e [9]. Nestes trabalhos foi demonstrado que a dinâmica é caótica na vizinhança de tais pontos, no sentido que existe um conjunto invariante compacto no qual a ação de algum iterado do difeomorfismo é topologicamente conjugado à ação do *shift de Bernoulli* (hoje conhecido como Teorema de Smale). Como consequência imediata disto temos o resultado de Birkhoff de que o difeomorfismo tem infinitos pontos periódicos. Um outro resultado que podemos obter é que difeomorfismos próximos devem também ter pontos homoclínicos transversais e, portanto, infinitos pontos periódicos. Assim, a propriedade de ter infinitos pontos periódicos não pode, em geral, ser perturbada.

Smale provou seu teorema usando a famosa construção do *horseshoe* (veja também Moser [3] e Nitecki [4]). Nosso trabalho é baseado em Palmer [5] e tem como objetivo principal apresentar uma demonstração, em um certo sentido “mais fácil”, usando o *shadowing lemma* (Anosov [1], Guckenheimer, Moser e Newhouse [2], Robinson [7]) para provar o teorema. Tal prova foi esboçada em Palmer [6] e levada até o fim no caso onde o difeomorfismo é uma aplicação correspondente a um sistema periódico de equações diferenciais. Não apenas provaremos o *Teorema de Smale* como também daremos uma prova do *shadowing lemma*. Nossa técnica básica será a teoria de *dicotomias exponenciais*.

No capítulo 1 desenvolvemos a teoria de dicotomias exponenciais para equações diferença linear. Também damos um resultado sobre a existência de soluções limitadas de sistemas quasilinear onde a parte linear tem uma dicotomia exponencial.

No capítulo 2 iniciamos o estudo de difeomorfismos. Vemos que toda órbita de difeomorfismo tem associada uma equação diferença linear chamada sua *equação variacional*. Rigorosamente falando, um conjunto invariante é hiperbólico se a equação variacional de cada órbita no conjunto tem uma dicotomia exponencial. O *shadowing lemma*, que é uma propriedade de conjuntos hiperbólicos, passa ser

uma consequência do resultado de sistemas quasilinear provado no capítulo 1.

No capítulo 3 os pontos homoclínicos transversais são definidos. A definição de transversalidade é puramente em termos da equação variacional da órbita do ponto homoclínico transversal. Usamos então o shadowing lemma para provar o Teorema de Smale.

Um ponto homoclínico transversal é usualmente definido como um ponto onde as variedades estável e instável de um ponto fixo hiperbólico interseccionam-se transversalmente. No capítulo 4 usamos as ferramentas do capítulo 1 para provar o teorema da variedade estável e mostrar que a definição de ponto homoclínico dado no capítulo 3 é equivalente à usual. Finalmente, mostramos que próximo a qualquer ponto homoclínico transversal existem infinitos outros e também que a propriedade de ter um ponto homoclínico transversal persiste sob perturbação.

Capítulo 1

Dicotomias Exponenciais para Equações Diferença Lineares

Neste capítulo desenvolvemos as ferramentas que servirão de base para o resto deste trabalho. Desenvolvemos a teoria de dicotomias exponenciais para equações diferença linear e obtemos um resultado sobre a existência de soluções limitadas de sistemas quasilinear onde a parte linear possui uma dicotomia exponencial.

Consideraremos equações diferença lineares

$$u_{n+1} = C_n u_n \quad (1.1)$$

onde $u_n \in \mathbb{R}^p$, $n \in J$ (J é usualmente $\mathbb{Z}$, os inteiros não negativos $\mathbb{Z}^+$ ou os inteiros não positivos $\mathbb{Z}^-$) e para cada n C_n é uma matriz $p \times p$ inversível. Para $n, m \in J$ definimos a *matriz de transição*

$$\Phi(n, m) = \begin{cases} C_{n-1} \cdots C_m & \text{se } n > m \\ I & \text{se } n = m \\ C_n^{-1} \cdots C_{m-1}^{-1} & \text{se } n < m \end{cases}$$

Ela tem a propriedade

$$\Phi(n, k)\Phi(k, m) = \Phi(n, m) \quad \text{se } n, k, m \in J$$

e a propriedade que $u_n = \Phi(n, m)\xi$ é a única solução da equação (1.1) satisfazendo $u_m = \xi$. Note também como uma consequência da propriedade que

$$\Phi^{-1}(n, m) = \Phi(m, n) \quad \text{se } n, m \in J \quad (1.2)$$

Definição 1.1 A equação diferença linear (1.1) tem uma dicotomia exponencial em J se existem constantes positivas K, α e uma família de projeções $P_n, n \in J$, tal que

$$(i) P_{n+1}C_n = C_nP_n \text{ para todo } n \text{ (} n < 0 \text{ se } J = \mathbb{Z}^- \text{)}$$

$$(ii) |\Phi(n, m)P_m| \leq Ke^{-\alpha(n-m)} \text{ para } n \geq m \quad (1.3)$$

$$|\Phi(n, m)(I - P_m)| \leq Ke^{-\alpha(m-n)} \text{ para } m \geq n \quad (1.4)$$

Por repetidas aplicações de (i) obtemos a identidade

$$P_n\Phi(n, m) = \Phi(n, m)P_m \quad (1.5)$$

Isto significa que as projeções P_n são invariantes com respeito à equação (1.1). Isto é, se u_n é uma solução de (1.1) tal que u_m está na imagem (respec. núcleo) de P_m , para algum m , então u_n está na imagem (respec. núcleo) de P_n para todo n . A propriedade (ii) diz, em primeiro lugar, que os P_n 's são limitados e, em segundo, que as soluções u_n da equação (1.1) que estão na imagem de P_n decaem exponencialmente enquanto as que estão no núcleo de P_n crescem exponencialmente.

Proposição 1.1 Notamos que se, como na Definição 1.1, a equação (1.1) tem uma dicotomia exponencial em $J = [q, \infty)$, onde $q > 0$, então ela tem uma dicotomia exponencial em $\mathbb{Z}^+$ (vale também para $J = \mathbb{Z}^-$)

Prova:

Defina $P_n = \Phi(n, q)P_q\Phi(q, n)$ para $0 \leq n < q$. Então a propriedade (i) na Definição 1.1 é satisfeita para $n \geq 0$, pois

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \Phi(n+1, q)P_q\Phi(q, n+1) \\ &= C_{n+1}^{-1} \dots C_{q-1}^{-1}P_qC_{q-1} \dots C_{n+1} \\ &= C_n\Phi(n, q)P_q\Phi(q, n)C_n^{-1} \end{aligned}$$

Sabemos que as desigualdades (1.3) e (1.4) ocorrem para $n \geq m \geq q, m \geq n \geq q$ respectivamente. Considere

$$M_1 = \sup\{|\Phi(n, m)P_m| : 0 \leq n, m \leq q\}$$

Então se $n \geq q > m \geq 0$

$$\begin{aligned}
|\Phi(n, m)P_m| &= |\Phi(n, q)\Phi(q, m)P_mP_m| \\
&= |\Phi(n, q)P_q\Phi(q, m)P_m| \\
&\leq |\Phi(n, q)P_q| |\Phi(q, m)P_m| \\
&\leq M_1 K e^{-\alpha(n-q)} \leq M_1 K e^{\alpha q} e^{-\alpha(n-m)}
\end{aligned}$$

e se $q \geq n \geq m \geq 0$

$$|\Phi(n, m)P_m| \leq M_1 \leq M_1 e^{\alpha q} e^{-\alpha(n-m)}$$

Analogamente, defina

$$M_2 = \sup\{|\Phi(n, m)(I - P_m)| : 0 \leq n, m \leq q\}$$

se $m \geq q > n \geq 0$

$$\begin{aligned}
|\Phi(n, m)(I - P_m)| &= |\Phi(n, q)\Phi(q, m)(I - P_m)(I - P_m)| \\
&= |\Phi(n, q)(I - P_q)\Phi(q, m)(I - P_m)| \\
&\leq M_2 K e^{\alpha q} e^{-\alpha(m-n)}
\end{aligned}$$

e se $q \geq m \geq n \geq 0$

$$|\Phi(n, m)(I - P_m)| \leq M_2 \leq M_2 K e^{\alpha q} e^{-\alpha(m-n)}$$

Então, notando que $M_1, M_2 \geq 1$, concluímos que a equação (1.1) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbb{Z}^+$ com constantes $\max\{M_1 K e^{\alpha q}, M_2 K e^{\alpha q}\}$ e α . ■

Segue de (1.5) que quando $J = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{Z}^-$ então

$$P_n = \Phi(n, 0)P_0\Phi(0, n) \quad (1.6)$$

Isto mostra que o posto de P_n não depende de n e que P_n está determinado uma vez que P_0 está. Em nossa primeira proposição determinamos todas as possíveis escolhas de P_0 . Usaremos as notações $\mathcal{R}, \mathcal{N}$ para denotar a imagem e o núcleo de uma transformação linear.

Proposição 1.2 *Seja a equação diferença linear (1.1) tendo uma dicotomia exponencial em J com constantes K, α e projeções P_n . Denote por $\Phi(n, m)$ a matriz de transição para (1.1).*

(i) *Se $J = \mathbb{Z}^+$, então*

$$\mathcal{R}(P_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \sup_{n \geq 0} |\Phi(n, 0)\xi| < \infty\}. \quad (1.7)$$

e se Q_0 é outra projeção com $\mathcal{R}(Q_0) = \mathcal{R}(P_0)$, (1.1) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbb{Z}^+$ com projeções $Q_n = \Phi(n, 0)Q_0\Phi(0, n)$,

(ii) *Se $J = \mathbb{Z}^-$, então*

$$\mathcal{N}(P_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \sup_{n \leq 0} |\Phi(n, 0)\xi| < \infty\} \quad (1.8)$$

e se Q_0 é outra projeção com $\mathcal{N}(Q_0) = \mathcal{N}(P_0)$, (1.1) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbb{Z}^-$ com projeções $Q_n = \Phi(n, 0)Q_0\Phi(0, n)$,

(iii) *Se $J = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}(P_0)$ é dado por (1.7) e $\mathcal{N}(P_0)$ por (1.8), então P_0 e portanto os P_n são unicamente determinados.*

Prova:

(i) Se $\xi \in \mathbb{R}^p$ segue de (1.3), com $m = 0$ que, para $n \geq 0$,

$$|\Phi(n, 0)P_0\xi| \leq K e^{-\alpha n} |P_0\xi|$$

Além disso, usando (1.2), (1.4) e (1.5),

$$\begin{aligned} |(I - P_0)\xi| &= |\Phi(0, n)\Phi(n, 0)(I - P_0)(I - P_0)\xi| \\ &= |\Phi(0, n)(I - P_n)\Phi(n, 0)(I - P_0)\xi| \\ &\leq |\Phi(0, n)(I - P_n)| |\Phi(n, 0)(I - P_0)\xi| \\ &\leq K e^{-\alpha n} |\Phi(n, 0)(I - P_0)\xi| \end{aligned}$$

Logo, para $n \geq 0$

$$|\Phi(n, 0)(I - P_0)\xi| \geq K^{-1} e^{\alpha n} |(I - P_0)\xi|$$

Portanto, $\Phi(n, 0)\xi = \Phi(n, 0)P_0\xi + \Phi(n, 0)(I - P_0)\xi$ é limitado se, e somente se, $(I - P_0)\xi = 0$, isto é, se, e somente se, $\xi \in \mathcal{R}(P_0)$. Isto estabelece (1.7).

Agora, seja Q_0 qualquer projeção com $\mathcal{R}(Q_0) = \mathcal{R}(P_0)$ e defina

$$Q_n = \Phi(n, 0)Q_0\Phi(0, n).$$

Então para $n \geq m \geq 0$

$$\begin{aligned}
|\Phi(n, m)(Q_m - P_m)| &= |\Phi(n, m)\Phi(m, 0)(Q_0 - P_0)\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)(Q_0 - P_0)\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)P_0(Q_0 - P_0)(I - P_0)\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)P_0(Q_0 - P_0)\Phi(0, m)(I - P_m)| \\
&\leq |\Phi(n, 0)P_0| |Q_0 - P_0| |\Phi(0, m)(I - P_m)| \\
&\leq K^2 e^{-\alpha(n+m)} |Q_0 - P_0|
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade decorre do fato que $\mathcal{R}(Q_0) = \mathcal{R}(P_0)$ assim, para $n \geq m \geq 0$

$$\begin{aligned}
|\Phi(n, m)Q_m| &\leq |\Phi(n, m)P_m| + |\Phi(n, m)(Q_m - P_m)| \\
&\leq K[1 + K |Q_0 - P_0|] e^{-\alpha(n-m)}
\end{aligned}$$

Analogamente, para $m \geq n \geq 0$

$$|\Phi(n, m)(I - Q_m)| \leq K[1 + K |Q_0 - P_0|] e^{-\alpha(m-n)}$$

Finalmente, observamos que a invariância de Q_n com respeito a equação (1.1) segue de sua definição e portanto, completa a prova de (i).

(ii) Se $\xi \in \mathbb{R}^p$ segue de (1.4), com $m = 0$, que para $n \leq 0$, temos

$$|\Phi(n, 0)(I - P_0)\xi| \leq K e^{\alpha n} |(I - P_0)\xi|$$

Além disso, usando (1.2), (1.3) e (1.5) segue

$$\begin{aligned}
|P_0\xi| &= |\Phi(0, n)\Phi(n, 0)P_0P_0\xi| \\
&= |\Phi(0, n)P_n\Phi(n, 0)P_0\xi| \\
&\leq |\Phi(0, n)P_n| |\Phi(n, 0)P_0\xi| \\
&\leq K e^{\alpha n} |\Phi(n, 0)P_0\xi|
\end{aligned}$$

Assim, para $n \leq 0$,

$$|\Phi(n, 0)P_0\xi| \geq K e^{-\alpha n} |P_0\xi|$$

Portanto $\Phi(n, 0)\xi = \Phi(n, 0)P_0\xi + \Phi(n, 0)(I - P_0)\xi$ é limitado se, e somente se, $P_0\xi = 0$, isto é, se, e somente se, $\xi \in \mathcal{N}(P_0)$. Isto estabelece (1.8).

Agora, seja Q_0 qualquer projeção com $\mathcal{N}(P_0) = \mathcal{N}(Q_0)$ e defina

$$Q_n = \Phi(n, 0)Q_0\Phi(0, n).$$

Então, para $m \leq n \leq 0$

$$\begin{aligned}
|\Phi(n, m)(Q_m - P_m)| &= |\Phi(n, m)\Phi(m, 0)(Q_0 - P_0)\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)(Q_0 - P_0)\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)(I - P_0)(Q_0 - P_0)P_0\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)(I - P_0)(Q_0 - P_0)\Phi(0, m)P_m| \\
&\leq |\Phi(n, 0)(I - P_0)| |(Q_0 - P_0)| |\Phi(0, m)P_m| \\
&\leq Ke^{\alpha n} |Q_0 - P_0| Ke^{\alpha m} \\
&= K^2 e^{\alpha(n+m)} |Q_0 - P_0|
\end{aligned}$$

assim, para $m \leq n \leq 0$,

$$\begin{aligned}
|\Phi(n, m)Q_m| &\leq |\Phi(n, m)P_m| + |\Phi(n, m)(Q_m - P_m)| \\
&\leq Ke^{-\alpha(n-m)} + K^2 e^{\alpha(n+m)} |Q_0 - P_0| \\
&\leq K[1 + K |Q_0 - P_0|] e^{-\alpha(n-m)}
\end{aligned}$$

Analogamente, para $n \leq m \leq 0$,

$$|\Phi(n, m)(I - Q_m)| \leq K[1 + K |Q_0 - P_0|] e^{-\alpha(m-n)}$$

A invariância de Q_n com relação a equação (1.1) segue de sua definição e assim a prova de (ii).

(iii) De (i) e (ii), temos que $\mathcal{R}(P_0)$ e $\mathcal{N}(P_0)$ ficam unicamente determinados, ou seja, P_0 e consequentemente P_n , ficam bem determinados. ■

Observação 1.1 *Segue da Proposição 1.2 que quando $J = \mathbb{Z}^+$ (respectivamente $J = \mathbb{Z}^-$), a única solução limitada u_n da equação (1.1) em J com $P_0 u_0 = 0$ (respectivamente $(I - P_0)u_0 = 0$) é a trivial; e, quando $J = \mathbb{Z}$, a única solução limitada de (1.1) é a trivial.*

De fato, mostraremos para o caso $J = \mathbb{Z}^+$, o outro segue por argumentos análogos. Seja u_n uma solução limitada de 1.1, isto é,

$$\sup_{n \geq 0} |u_n| < \infty$$

Mas, $u_n = \Phi(n, 0)u_0$, ou seja

$$\sup_{n \geq 0} |\Phi(n, 0)u_0| < \infty$$

Assim, $u_0 \in \mathcal{R}(P_0)$, logo $0 = P_0 u_0 = u_0$. Portanto, u_n deve ser trivial. ■

Exemplo 1 Quando C_n independe de n a equação 1.1 tem uma dicotomia exponencial em J se, e somente se, os autovalores de C não estão no círculo unitário.

De fato, se C satisfaz a última condição, denotamos por P a projeção com

$$\mathcal{R}(P) = \{ \text{soma dos autoespaços generalizados de } C \text{ correspondentes aos autovalores dentro do círculo unitário} \}$$

e com

$$\mathcal{N}(P) = \{ \text{soma dos autoespaços generalizados de } C \text{ correspondentes aos autovalores fora do círculo unitário} \}.$$

Então C comuta com P e existem constantes positivas K e α tal que

$$|C^n P| \leq K e^{-\alpha n} \quad (n \geq 0),$$

$$|C^n(I - P)| \leq K e^{\alpha n} \quad (n \leq 0).$$

Isto significa que a equação

$$u_{n+1} = C u_n$$

que tem matriz de transição C^{n-m} tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com projeções constantes P .

Reciprocamente, suponha que a última equação tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com constantes K , α e projeções P_n . Logo

$$|C^{n-m} P_m| \leq K e^{-\alpha(n-m)} \quad (n \geq m)$$

$$|C^{n-m}(I - P_m)| \leq K e^{-\alpha(m-n)} \quad (m \geq n)$$

Se definirmos $Q_n = P_{n+1}$, vemos que

$$|C^{n-m} Q_m| = |C^{n+1-(m+1)} P_{m+1}| \leq K e^{-\alpha(n-m)} \quad (n \geq m),$$

$$|C^{n-m}(I - Q_m)| = |C^{n+1-(m+1)}(I - P_{m+1})| \leq K e^{-\alpha(m-n)} \quad (m \geq n).$$

Como P_n é invariante, temos para todo n ,

$$Q_{n+1}C = P_{n+2}C = CP_{n+1} = CQ_n$$

Assim, também temos uma dicotomia exponencial com projeções Q_n . Segue pela Proposição 1.2 (iii) que $Q_n = P_n$ para todo n . Portanto P_n é, na verdade, uma

constante P (digamos). Então segue da invariância de P_n que P comuta com C e, além disso, das desigualdades acima, que

$$\|C^n P\| \leq K e^{-\alpha n} \quad (n \geq 0)$$

$$\|C^n(I - P)\| \leq K e^{\alpha n} \quad (n \leq 0)$$

Isto significa que $\mathbf{R}^p = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ onde $\mathcal{R}(P)$ e $\mathcal{N}(P)$ são ambos invariantes por C e os autovalores de C restritos a $\mathcal{R}(P)$ estão dentro do círculo unitário e aqueles de C restritos a $\mathcal{N}(P)$ estão fora do círculo unitário. Portanto, todos os autovalores de C não pertencem ao círculo unitário. ■

É claro que quando (1.1) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ então tem uma em $\mathbf{Z}^+$ e uma em $\mathbf{Z}^-$. Em nossa próxima proposição examinamos a extensão para o qual a recíproca deste comportamento é verdadeira.

Proposição 1.3 *Seja C_n uma função matriz $p \times p$ inversível definida para todo n . Então a equação diferença linear (1.1) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ se, e somente se, ela tem uma em $\mathbf{Z}^+$ e uma em $\mathbf{Z}^-$ com projeções do mesmo posto, e a única solução limitada em $\mathbf{Z}$ é a trivial.*

Prova:

($\Rightarrow$) Segue da definição de dicotomia exponencial e da Observação 1.1.

($\Leftarrow$) Suponha que (1.1) tenha uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}^+$ e em $\mathbf{Z}^-$ com projeções P_n e Q_n , respectivamente, ambas com mesmo posto, e que ela tenha como única solução limitada em $\mathbf{Z}$ a solução trivial. Pela Proposição 1.2 podemos escolher P_0 como alguma projeção com imagem

$$V^+ = \{\xi \in \mathbf{R}^p : \sup_{n \geq 0} \|\Phi(n, 0)\xi\| < \infty\}$$

e Q_0 como alguma projeção com núcleo

$$V^- = \{\xi \in \mathbf{R}^p : \sup_{n \leq 0} \|\Phi(n, 0)\xi\| < \infty\}$$

[Aqui $\Phi(n, m)$ é a matriz de transição de (1.1)]. Como a única solução limitada de (1.1) em $\mathbf{Z}$ é a trivial, $V^+ \cap V^- = \{0\}$ e como P_0 e Q_0 tem o mesmo posto, $\dim V^+ + \dim V^- = p$. Logo $\mathbf{R}^p = V^+ \oplus V^-$ e portanto, podemos escolher P_0 e Q_0 como a mesma projeção, com imagem V^+ e núcleo V^- . Então uma

desigualdade como (1.3) ocorre para $n \geq m \geq 0$, $0 \geq n \geq m$ e outra como (1.4) para $m \geq n \geq 0$, $0 \geq m \geq n$. Se $n \geq 0 \geq m$, temos

$$\begin{aligned}
|\Phi(n, m)P_m| &= |\Phi(n, m)\Phi(m, 0)P_0\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)P_0P_0\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)P_0\Phi(0, m)P_m| \\
&\leq |\Phi(n, 0)P_0| |\Phi(0, m)P_m| \\
&\leq Ke^{-\alpha n}Ke^{\alpha m} = K^2e^{-\alpha(n-m)}
\end{aligned}$$

e se $n \leq 0 \leq m$, temos

$$\begin{aligned}
|\Phi(n, m)(I - P_m)| &= |\Phi(n, m)\Phi(m, 0)(I - P_0)\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)(I - P_0)(I - P_0)\Phi(0, m)| \\
&= |\Phi(n, 0)(I - P_0)\Phi(0, m)(I - P_m)| \\
&\leq |\Phi(n, 0)(I - P_0)| |\Phi(0, m)(I - P_m)| \\
&\leq Ke^{-\alpha m}Ke^{\alpha n} = K^2e^{-\alpha(m-n)}
\end{aligned}$$

Portanto, (1.1) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$. ■

Nosso próximo objetivo é provar a existência de uma solução limitada de uma equação diferença quasilinear. Primeiro consideraremos uma equação não homogênea.

Lema 1.1 *Considere a equação diferença linear (1.1) com uma dicotomia exponencial em J com constantes K, α e projeções P_n . Seja h_n , $n \in J$ uma sequência limitada de vetores.*

(i) *Se $J = \mathbf{Z}$ então a equação diferença não homogênea*

$$u_{n+1} = C_n u_n + h_n \quad (1.9)$$

tem uma única solução u_n limitada em $\mathbf{Z}$. Além disso para todo n ,

$$|u_n| \leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |h_n| \quad (1.10)$$

(ii) *Se $J = \mathbf{Z}^+$ ou $\mathbf{Z}^-$ e $\xi \in \mathbf{R}^p$, então (1.9) tem uma única solução u_n limitada em J e satisfaz*

$$P_0 u_0 = P_0 \xi \quad (J = \mathbf{Z}^+)$$

$$(I - P_0)u_0 = (I - P_0)\xi \quad (J = \mathbb{Z}^-)$$

Além disso para n em J ,

$$|u_n| \leq K |\xi| + K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |h_n| \quad (1.11)$$

Prova:

(i) Denote por $\Phi(n, m)$ a matriz de transição para a equação (1.1). Então definimos

$$u_n = \sum_{m \in J} G(n, m+1)h_m \quad \text{para } n \in J \quad (1.12)$$

onde $G(n, m)$ é a função de Green definida por

$$G(n, m) = \begin{cases} \Phi(n, m)P_m & \text{se } m \leq n \\ -\Phi(n, m)(I - P_m) & \text{se } n < m \end{cases} \quad (n, m \in J)$$

Pelas desigualdades (1.3) e (1.4),

$$|G(n, m)| \leq Ke^{-\alpha|n-m|}, \quad \text{para } n, m \in J$$

logo,

$$\begin{aligned} \sum_{m \in J} |G(n, m+1)h_m| &\leq K \sum_{m \in J} e^{-\alpha|n-m-1|} \sup_{n \in J} |h_n| \\ &\leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |h_n| \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left| \sum_{m \in J} G(n, m+1)h_m \right| \\ &\leq \sum_{m \in J} |G(n, m+1)h_m| \\ &\leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |h_n| \end{aligned}$$

Portanto u_n está bem definida e satisfaz (1.10).

Agora, note que para cada m em J fixado, $X_n = G(n, m)$ resolve a equação diferença

$$X_{n+1} = C_n X_n + H_n^{(m)},$$

onde

$$H_n^{(m)} = \begin{cases} I & \text{se } n = m-1 \\ 0 & \text{se } n \neq m-1 \end{cases}$$

pois,

- Se $m \leq n$,

$$\begin{aligned} C_n X_n + H_n^{(m)} &= C_n G(n, m) = C_n \Phi(n, m) P_m \\ &= \Phi(n+1, m) P_m = X_{n+1} \end{aligned}$$

- Se $n = m - 1$,

$$\begin{aligned} C_n X_n + H_n^{(m)} &= C_{m-1} G(m-1, m) + I \\ &= -C_{m-1} \Phi(m-1, m) (I - P_m) + I \\ &= -C_{m-1} C_{m-1}^{-1} (I - P_m) + I \\ &= P_m = \Phi(m, m) P_m = G(m, m) \\ &= G(n+1, m) = X_{n+1} \end{aligned}$$

- Se $n < m - 1$,

$$\begin{aligned} C_n X_n + H_n^{(m)} &= C_n G(n, m) = -C_n \Phi(n, m) (I - P_m) \\ &= -\Phi(n+1, m) P_m = G(n+1, m) = X_{n+1} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{m \in J} G(n+1, m+1) h_m \\ &= \sum_{m \in J, m \leq n-1} C_n G(n, m+1) h_m + [C_n G(n, n+1) + I] h_n \\ &\quad + \sum_{m \in J, m \geq n+1} C_n G(n, m+1) h_m \\ &= C_n \sum_{m \in J} G(n, m+1) h_m + h_n \\ &= C_n u_n + h_n \end{aligned}$$

Portanto, u_n é uma solução de (1.9). Finalmente, note que a unicidade segue da Observação 1.1, pois se v_n é outra solução, então $w_n = u_n - v_n$ é solução da equação diferença homogênea, logo que $u_n = v_n$.

(ii) No lugar de (1.12), considere

$$u_n = \Phi(n, 0) P_0 \xi + \sum_{m=0}^{\infty} G(n, m+1) h_m \quad (1.13)$$

quando $J = \mathbb{Z}^+$ e

$$u_n = \Phi(n, 0) (I - P_0) \xi + \sum_{m=-\infty}^{-1} G(n, m+1) h_m$$

quando $J = \mathbf{Z}^-$.

A prova que u_n é uma solução de (1.9) e satisfaz a estimativa (1.11) é essencialmente a mesma da parte (i).

Quando $J = \mathbf{Z}^+$,

$$\begin{aligned} u_0 &= P_0 \xi + \sum_{m=0}^{\infty} G(0, m+1) h_m \\ &= P_0 \xi - \sum_{m=0}^{\infty} \Phi(0, m+1) (I - P_{m+1}) h_m \\ &= P_0 \xi - \sum_{m=0}^{\infty} (I - P_0) \Phi(0, m+1) h_m \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} P_0 u_0 &= P_0 (P_0 \xi - \sum_{m=0}^{\infty} (I - P_0) \Phi(0, m+1) h_m) \\ &= P_0 \xi - P_0 \sum_{m=0}^{\infty} (I - P_0) \Phi(0, m+1) h_m \\ &= P_0 \xi - \sum_{m=0}^{\infty} P_0 (I - P_0) \Phi(0, m+1) h_m \\ &= P_0 \xi. \end{aligned}$$

Analogamente, quando $J = \mathbf{Z}^-$, podemos mostrar que $(I - P_0)u_0 = (I - P_0)\xi$. Finalmente, a unicidade segue da Observação 1.1. ■

Proposição 1.4 *Suponhamos que equação diferença linear (1.1) tenha uma dicotomia exponencial em J com constantes K, α e projeções P_n e, para cada n em J , seja $g_n(x)$ uma função com valores em $\mathbf{R}^p$ próximo de 0 tal que*

$$g_n(0) = 0, \quad |g_n(x_1) - g_n(x_2)| \leq \gamma |x_1 - x_2|$$

onde $|x_1| \leq \Delta, |x_2| \leq \Delta$. Suponhamos também que

$$2K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \gamma \leq 1$$

(i) *Seja $J = \mathbf{Z}$ e $h_n, n \in \mathbf{Z}$, uma sequência limitada de vetores satisfazendo*

$$2K(1 + e^{\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} |h_n| \leq \Delta$$

para todo n . Então a equação diferença não linear

$$u_{n+1} = C_n u_n + h_n + g_n(u_n) \quad (1.14)$$

tem uma única solução u_n tal que $|u_n| \leq \Delta$ para todo n , e, além disso, para todo n ,

$$|u_n| \leq 2K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |h_n|$$

(ii) Seja $J = \mathbf{Z}^+$ ou $\mathbf{Z}^-$ e considere $\xi \in \mathbf{R}^p$ satisfazendo $|\xi| \leq \Delta/4K$ e h_n , $n \in J$, uma sequência limitada de vetores satisfazendo

$$4K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha}) |h_n| \leq \Delta$$

para todo n . Então a equação (1.14) tem uma única solução u_n tal que $|u_n| \leq \Delta$ para todo n e

$$\begin{aligned} P_0 u_n &= P_0 \xi \quad (J = \mathbf{Z}^+) \\ (I - P_0) u_n &= (I - P_0) \xi \quad (J = \mathbf{Z}^-) \end{aligned}$$

Além disso, para todo n ,

$$|u_n| \leq 2K |\xi| + 2K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |h_n|$$

Prova:

(i) Denote por $l^\infty(J)$ o espaço de Banach das sequências limitadas $u = \{u_n\}_{n \in J}$ com valores em $\mathbf{R}^p$ com a norma

$$\|u\| = \sup_{n \in J} |u_n|$$

Então

$$\mathcal{D} = \{u \in l^\infty(J) : \|u\| \leq \Delta\}$$

é um subconjunto fechado de $l^\infty(J)$ e portanto um espaço métrico completo.

Definiremos uma aplicação de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}$. Para $u \in \mathcal{D}$, do Lema 1.1 a equação não homogênea

$$\hat{u}_{n+1} = C_n \hat{u}_n + [h_n + g_n(u_n)] \quad (1.15)$$

tem uma única solução limitada $\hat{u}_n$. Além disso, por (1.10)

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\| &\leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |h_n + g_n(u_n)| \\ &\leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} (\|h\| + \gamma \|u\|) \\ &\leq \frac{\Delta}{2} + \frac{\|u\|}{2} \leq \Delta \end{aligned} \quad (1.16)$$

Logo, a aplicação $u \rightarrow \hat{u}$ certamente aplica $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}$.

Além disso, a aplicação é uma contração, pois se $u_1, u_2 \in \mathcal{D}$ e $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ são suas imagens, então $w_n = \hat{u}_{1n} - \hat{u}_{2n}$ é uma solução limitada da equação

$$w_{n+1} = C_n w_n + [g_n(u_{1n}) - g_n(u_{2n})]$$

Assim, novamente por (1.10),

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_1 - \hat{u}_2\| = \|w\| &\leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |g_n(u_{1n}) - g_n(u_{2n})| \\ &\leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \gamma \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

Denote por u o único ponto fixo da aplicação $u \rightarrow \hat{u}$ em $\mathcal{D}$. Então claramente u_n é uma solução de (1.14) satisfazendo $\|u_n\| \leq \Delta$. Além disso, ela é única, pois qualquer tal solução deve estar em $\mathcal{D}$ e ser um ponto fixo da aplicação. Finalmente, colocando $u = \hat{u}$ em (1.16), obtemos

$$\|u\| \leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \|h\| + \frac{1}{2} \|u\|$$

logo,

$$\|u\| \leq 2K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \|h\|$$

completando a prova de (i).

(ii) A prova de (ii) é muito parecida exceto que usamos o Lema 1.1 (ii) e (1.11) no lugar do Lema 1.1 (i) e (1.10). $\hat{u}_n$ está definido como a única solução limitada de (1.15) tal que

$$P_0 u_n = P_0 \xi \quad (J = \mathbb{Z}^+)$$

$$(I - P_0) u_n = (I - P_0) \xi \quad (J = \mathbb{Z}^-)$$

■

Observação 1.2 Se $g_n(x) = D_n x$, onde D_n é uma matriz com $\|D_n\| \leq \gamma$, obtemos um resultado similar. γ satisfaz a mesma restrição, mas precisaremos apenas assumir que h_n é limitada. Quando $J = \mathbb{Z}$ encontramos uma única solução limitada u_n e quando $J = \mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{Z}^-$ uma única solução limitada tal que $P_0 u_0 = P_0 \xi$ ($J = \mathbb{Z}^+$) e assim por diante, onde ξ é qualquer vetor em $\mathbb{R}^p$.

Proposição 1.5 *Seja C_n uma função matriz $p \times p$ inversível definida para $n \in J$ tal que para todo n*

$$|C_n^{-1}| \leq M$$

e tal que a equação diferença linear (1.1) tenha uma dicotomia exponencial com constantes K, α e projeções P_n . Suponha $0 < \delta < \alpha$ e que D_n é uma função matriz $p \times p$ definida para $n \in J$ e satisfazendo

$$|D_n| < M^{-1},$$

$$2K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha}) |D_n| \leq 1,$$

$$2Ke^{\alpha}(e^{-\delta} + 1)(e^{\delta} - 1)^{-1} |D_n| \leq 1.$$

Então $C_n + D_n$ é inversível para todo n e a equação diferença linear perturbada

$$u_{n+1} = (C_n + D_n)u_n \quad (1.17)$$

tem uma dicotomia exponencial em J com constantes $2K(1 + e^{\delta})(1 - e^{-\delta})^{-1}, \alpha - \delta$ e projeções de posto igual à de (1.1)

Prova:

Para todo n temos

$$|(C_n + D_n) - C_n| = |D_n| < M^{-1} \leq |C_n^{-1}|^{-1}$$

Logo $C_n + D_n$ é inversível para todo n . [Note que as condições $|C_n^{-1}| \leq M$, $|D_n| < M^{-1}$ são usadas apenas para assegurar a inversibilidade de $C_n + D_n$]. Agora denote por $\Phi(n, m)$ a matriz de transição para a equação (1.1). Para cada m em J definimos a sequência

$$H_n^{(m)} = \begin{cases} I & \text{se } n = m - 1 \\ 0 & \text{se } n \neq m - 1 \end{cases} \quad (n \in J)$$

e seja $X_n = G(n, m)$ a única solução limitada da equação

$$X_{n+1} = (C_n + D_n)X_n + H_n^{(m)} \quad (1.18)$$

que satisfaz

$$P_0 X_0 = 0 \text{ quando } J = \mathbf{Z}^+ \text{ e } m \geq 1,$$

$$P_0 X_0 = P_0 \text{ quando } J = \mathbf{Z}^+ \text{ e } m = 0,$$

$$(I - P_0)X_0 = 0 \text{ quando } J = \mathbf{Z}^-.$$

Isto é possível pela Proposição 1.4 e Observação 1.2. Além disso

$$|G(n, m)| \leq 2K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1}$$

para n, m em J . [Note que quando $J = \mathbf{Z}^+$ e $m = 0$, $H_n^{(m)} = 0$ para todo n e que $|G(n, 0)| \leq 2K$]. O resto da prova consiste em mostrar que $G(n, m)$ é uma 'função de Green' para a equação (1.17) (cf. a prova do Lema 1.1).

Para um m fixado em J considere a equação modificada

$$X_{n+1} = e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)}(C_n + D_n)X_n + H_n^{(m)},$$

onde

$$\epsilon_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq m \\ -1 & \text{se } n < m \end{cases}$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$X_{n+1} = e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)}C_n X_n + e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)}D_n X_n + H_n^{(m)} \quad (1.19)$$

Note que para m fixo, a matriz de transição da equação $u_{n+1} = \tilde{C}_n u_n$ onde $\tilde{C}_n = e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)}C_n$ é:

$$\tilde{\Phi}(n, m) = \begin{cases} e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)(n-m)}\Phi(n, m) & \text{se } n \geq m \\ e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)(m-n)}\Phi(n, m) & \text{se } n < m \end{cases}$$

assim,

$$\begin{aligned} (i) P_{n+1}\tilde{C}_n &= P_{n+1}e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)}C_n = e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)}P_{n+1}C_n \\ &= e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)}C_n P_n = \tilde{C}_n P_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) |\tilde{\Phi}(n, m)P_m| &= |e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)(n-m)}\Phi(n, m)P_m| \\ &\leq e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)(n-m)}K e^{-\alpha(n-m)} \\ &= K e^{-\delta(n-m)} \text{ para } n \geq m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\Phi}(n, m)(I - P_m)| &= |e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)(m-n)}\Phi(n, m)(I - P_m)| \\ &\leq e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)(m-n)}K e^{-\alpha(m-n)} \\ &= K e^{-\delta(m-n)} \text{ para } m > n \end{aligned}$$

Portanto, a equação

$$u_{n+1} = e^{\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)}C_n u_n$$

tem uma dicotomia exponencial em J com constantes K , δ e projeções P_n . Logo, novamente pela Proposição 1.4 e Observação 1.2, a equação (1.19) tem uma única

solução limitada $X_n = G_\delta(n, m)$ satisfazendo $P_0 X_0 = 0$ quando $J = \mathbf{Z}^+$ e $m \geq 1$ e assim por diante. Além disso, temos a estimativa

$$|G_\delta(n, m)| \leq 2K(1 + e^{-\delta})(1 - e^{-\delta})^{-1}$$

Então vemos facilmente que

$$\begin{aligned} X_n &= e^{-\epsilon_n^{(m)}(\alpha-\delta)(n-m)} G_\delta(n, m) \\ &= e^{-(\alpha-\delta)|n-m|} G_\delta(n, m) \end{aligned}$$

é uma solução limitada de (1.18) satisfazendo $P_0 X_0 = 0$ para $J = \mathbf{Z}^+$ e $m \geq 1$ e assim por diante. Logo pela unicidade

$$G(n, m) = e^{-(\alpha-\delta)|n-m|} G_\delta(n, m)$$

Portanto, temos a estimativa

$$|G(n, m)| \leq 2K(1 + e^{-\delta})(1 - e^{-\delta})^{-1} e^{-(\alpha-\delta)|n-m|} \quad (1.20)$$

para $n, m \in J$.

Da equação (1.18) que $G(n, m)$ satisfaz, vemos que para $n \geq m$

$$\begin{aligned} G(n, m) &= (C_{n-1} + D_{n-1})G(n-1, m) \\ &= (C_{n-1} + D_{n-1}) \dots (C_m + D_m)G(m, m) \end{aligned}$$

Se tomarmos $n = m-1$ em (1.18) com $X_n = G(n, m)$, obtemos

$$G(m, m) = (C_{m-1} + D_{m-1})G(m-1, m) + I$$

Logo, para $n < m$

$$\begin{aligned} -(I - G(m, m)) &= (C_{m-1} + D_{m-1})G(m-1, m) \\ &= (C_{m-1} + D_{m-1}) \dots (C_n + D_n)G(n, m) \end{aligned}$$

Portanto, se denotarmos por $\Psi(n, m)$ a matriz de transição para a equação (1.17) e escrevermos $Q_m = G(m, m)$, mostramos que

$$G(n, m) = \begin{cases} \Psi(n, m)Q_m & \text{para } n \geq m \\ -\Psi(n, m)(I - Q_m) & \text{para } n < m \end{cases}$$

Por (1.20) tudo que resta a ser mostrado é que os Q_m 's são projeções invariantes com respeito à equação (1.17).

Para mostrar que Q_m é uma projeção fixamos m em J e definimos para $n \in J$

$$X_n = \begin{cases} \Psi(n, m)Q_m^2 = G(n, m)Q_m & \text{para } n \geq m \\ -\Psi(n, m)(I - Q_m^2) = G(n, m)(I + Q_m) & \text{para } n < m \end{cases}$$

X_n é limitada pois $G(n, m)$ o é. Também quando $n \neq m - 1$ é fácil ver que

$$X_{n+1} = (C_n + D_n)X_n$$

Quando $n = m - 1$,

$$\begin{aligned} X_{n+1} = X_m = Q_m^2 &= -(I - Q_m^2) + I \\ &= -(C_{m-1} + D_{m-1})\Psi(m-1, m)(I - Q_m^2) + I \\ &= (C_{m-1} + D_{m-1})X_{m-1} + I \end{aligned}$$

Logo, X_n é solução de (1.18). Finalmente quando $J = \mathbf{Z}^+$ e $m \geq 1$, $P_0X_0 = 0$ e assim por diante, pois $G(n, m)$ tem estas propriedades. Segue pela unicidade que $X_n = G(n, m)$ para $n \in J$. Tomando $n = m$, temos $Q_m^2 = Q_m$. Assim Q_m é na verdade uma projeção.

A invariância de Q_m é provada por um tipo análogo de argumento. Fixe m em J ($m \leq -1$ se $J = \mathbf{Z}^-$) e defina para $n \in J$

$$X_n = \begin{cases} \Psi(n, m)Q_m\Psi(m, m+1) & \text{para } n > m \\ -\Psi(n, m)(I - Q_m)\Psi(m, m+1) & \text{para } n \leq m \end{cases}$$

$X_n = G(n, m)\Psi(m, m+1)$ para $n \neq m$ e logo é limitado. Quando $n \neq m$ é fácil ver que

$$X_{n+1} = (C_n + D_n)X_n$$

Quando $n = m$

$$\begin{aligned} X_{n+1} = X_{m+1} &= \Psi(m+1, m)Q_m\Psi(m, m+1) \\ &= (C_m + D_m)\Psi(m, m)Q_m\Psi(m, m+1) \\ &= (C_m + D_m)(-\Psi(m, m)(I - Q_m)\Psi(m, m+1) + \Psi(m, m+1)) \\ &= (C_m + D_m)(X_m + \Psi(m, m+1)) \\ &= (C_m + D_m)X_m + I \end{aligned}$$

Logo X_n é uma solução de (1.18) com $m+1$ no lugar de m . Finalmente, quando $J = \mathbf{Z}^+$ e $m \geq 1$, $P_0X_0 = 0$ e quando $J = \mathbf{Z}^-$, $(I - P_0)X_0 = 0$, pois $G(n, m)$ tem estas propriedades. Quando $J = \mathbf{Z}^+$ e $m = 0$,

$$P_0X_0 = -P_0(I - G(0, 0))\Psi(0, 1) = 0$$

pois $P_0 G(0, 0) = P_0$. Assim, pela unicidade, $X_n = G(n, m+1)$ para $n, m \in J$ ($m \leq -1$ se $J \in \mathbb{Z}^-$). Em particular, tomando $n = m+1$, temos

$$\Psi(m+1, m)Q_m\Psi(m, m+1) = G(m+1, m+1) = Q_{m+1}$$

Isto é,

$$(C_m + D_m)Q_m = Q_{m+1}(C_m + D_m)$$

Logo, as projeções Q_m são invariantes com respeito à equação (1.17) e a prova está concluída. ■

Observação 1.3 Podemos obter também uma estimativa para $|Q_n - P_n|$ no seguinte sentido: a função de Green para o sistema não perturbado (1.1) é definido por

$$G_0(n, m) = \begin{cases} \Phi(n, m)P_m & \text{para } n \geq m \\ -\Phi(n, m)(I - P_m) & \text{para } n < m \end{cases}$$

e é, para cada m , a única solução limitada da equação

$$X_{n+1} = C_n X_n + H_n^{(m)}$$

tal que $P_0 X_0 = 0$ quando $J = \mathbb{Z}^+$ e $m \geq 1$ e assim por diante. Logo, $W_n = G(n, m) - G_0(n, m)$ é a única solução limitada de

$$W_{n+1} = C_n W_n + D_n W_n + D_n G_0(n, m)$$

tal que $P_0 W_0 = 0$ quando $J = \mathbb{Z}^+$ e $(I - P_0)W_0 = 0$ quando $J = \mathbb{Z}^-$. Então pela Proposição 1.4 e Observação 1.2, temos a estimativa

$$|W_n| \leq 2K(1 + \epsilon^{-\alpha})(1 - \epsilon^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |D_n| K$$

Tome $n = m$ e temos para todo m em J ,

$$|Q_m - P_m| \leq 2K^2(1 + \epsilon^{-\alpha})(1 - \epsilon^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in J} |D_n|$$

Capítulo 2

Conjuntos Hiperbólicos e o Shadowing Lemma

O resultado principal deste capítulo é o shadowing lemma. A toda órbita de um difeomorfismo associamos uma equação diferença linear chamada *equação variacional*, e diremos que um conjunto invariante é hiperbólico se a equação variacional de cada órbita neste conjunto tem uma dicotomia exponencial. O shadowing lemma, que é uma propriedade de conjuntos hiperbólicos, passa a ser uma consequência de sistemas quasilinear provado no capítulo anterior.

Seja $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ um difeomorfismo C^1 . Um subconjunto S de $\mathbb{R}^p$ é *invariante* se $f(S) = S$.

Definição 2.1 Um conjunto invariante compacto S é hiperbólico se para cada x em S a ‘equação variacional’ ao longo da órbita $\{f^n(x)\}$

$$u_{n+1} = Df(f^n(x))u_n \quad (2.1)$$

tem uma dicotomia exponencial em $\mathbb{Z}$ com constantes K, α e os postos das projeções $P_n(x)$ independentes de x .

Observação 2.1 Se denotarmos $C_n(x) = Df(f^n(x))$, note que a matriz de transição da equação (2.1) é dada por

$$\Phi(n, m)(x) = \begin{cases} C_{n-1}(x) \dots C_m(x) & \text{se } n > m \\ I & \text{se } n = m \\ C_n^{-1}(x) \dots C_{m-1}^{-1}(x) & \text{se } n < m \end{cases}$$

Mas, para $n > m$

$$\begin{aligned} C_{n-1}(x)C_{n-2}(x)\dots C_m(x) &= Df(f^{n-1}(x))Df(f^{n-2}(x))\dots Df(f^m(x)) \\ &= Df^{n-m}(f^m(x)) \end{aligned}$$

temos também, para $n < m$, que

$$\Phi(n, m) = [\Phi(m, n)]^{-1} = [Df^{m-n}(f^n(x))]^{-1} = Df^{n-m}(f^m(x))$$

pois

$$I = DI(y) = D(f^{-k} \circ f^k)(y) = Df^{-k}(f^k(y)) \circ Df^k(y)$$

donde

$$[Df^k(y)]^{-1} = Df^{-k}(f^k(y))$$

Portanto,

$$\Phi(n, m)(x) = Df^{n-m}(f^m(x)),$$

para todo $n, m \in J$.

A Proposição seguinte nos dá uma definição alternativa para conjuntos hiperbólicos.

Proposição 2.1 *Seja $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ um difeomorfismo C^1 e S um conjunto invariante compacto. Então S é hiperbólico se, e somente se, existem constantes positivas K, α e uma função matriz projeção $\mathcal{P}(x)$, $x \in S$, de posto constante tal que para todo x em S*

$$\mathcal{P}(f(x))Df(x) = Df(x)\mathcal{P}(x), \quad (2.2)$$

$$|Df^n(x)\mathcal{P}(x)| \leq Ke^{-\alpha n} \quad (n \geq 0) \quad (2.3)$$

$$|Df^n(x)(I - \mathcal{P}(x))| \leq Ke^{\alpha n} \quad (n \leq 0) \quad (2.4)$$

Prova:

Note, pela observação acima, que a matriz de transição para a equação (2.1) é dada por

$$\Phi(n, m)(x) = Df^{n-m}(f^m(x))$$

($\Leftarrow$) Defina

$$P_n(x) = \mathcal{P}(f^n(x))$$

e mostremos que (2.1) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com constantes K , α e projeções $P_n(x)$. $P_n(x)$ é invariante, pois

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x)Df(f^n(x)) &= \mathcal{P}(f^{n+1}(x))Df(f^n(x)) \\ &= Df(f^n(x))\mathcal{P}(f^n(x)) \\ &= Df(f^n(x))P_n(x) \end{aligned}$$

Também, para $n \geq m$, temos

$$|\Phi(n, m)(x)P_m(x)| = |Df^{n-m}(f^m(x))\mathcal{P}(f^m(x))| \leq Ke^{-\alpha(n-m)}$$

e para $n \leq m$

$$|\Phi(n, m)(x)(I - P_m(x))| = |Df^{n-m}(f^m(x))(I - \mathcal{P}(f^m(x)))| \leq Ke^{-\alpha(m-n)}$$

onde usamos (2.3) e (2.4).

($\Rightarrow$) Sejam K , α e $P_n(x)$ como na Definição 2.1. Note primeiramente que para qualquer inteiro m a equação variacional

$$u_{n+1} = Df(f^n(f^m(x)))u_n$$

tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com projeções $P_n(f^m(x))$. Mas esta equação diferença também pode ser escrita como

$$u_{n+1} = Df(f^{n+m}(x))u_n$$

da qual, por comparação com (2.1), tem uma dicotomia exponencial com projeções P_{n+m} . De fato, seja $u_{n+1} = \tilde{C}_n(x)u_n$, onde $\tilde{C}_n(x) = Df(f^{n+m}(x))$. Como $C_{n+m}(x) = Df(f^{n+m}(x))$, tem-se que $\tilde{C}_n(x) = C_{n+m}(x)$. A equação acima tem projeções $\{\tilde{P}_n(x)\}$ cujo índice está associado ao de $\{\tilde{C}_n(x)\}$. Mas, $\tilde{C}_n(x) = C_{n+m}(x)$ cujo índice de $\{C_n(x)\}$ está associado ao de $\{P_n(x)\}$. Pela Definição 2.1, $\tilde{P}_n(x) = P_n(f^m(x))$. Da unicidade das projeções (Proposição 1.2 (iii)) segue que $P_{n+m}(x) = P_n(f^m(x))$. Em particular, temos a identidade

$$P_n(x) = P_0(f^n(x)) \quad (2.5)$$

Defina

$$\mathcal{P}(x) = P_0(x)$$

Então $\mathcal{P}(x)$ é de posto constante e segue da identidade (2.5) que

$$P_n(x) = \mathcal{P}(f^n(x))$$

Assim, para todo x

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f(x))Df(x) &= P_1(x)Df(f^0(x)) \\ &= Df(f^0(x))P_0(x) \\ &= Df(x)\mathcal{P}(x) \end{aligned}$$

Portanto, temos a propriedade de invariância (2.2). Também, para todo x em S e $n \geq 0$,

$$|Df^n(x)\mathcal{P}(x)| = |\Phi(n, 0)(x)P_0(x)| \leq Ke^{-\alpha n}$$

e para $n \leq 0$,

$$|Df^n(x)(I - \mathcal{P}(x))| = |\Phi(n, 0)(x)(I - P_0(x))| \leq Ke^{\alpha n}$$

Isto estabelece (2.3) e (2.4) e completa a prova da proposição. ■

Proposição 2.2 *Seja $\mathcal{P}(x)$ como na Proposição 2.1. Então $\mathcal{P}(x)$ é contínua em S .*

Prova:

Segue de (2.3) com $n = 0$ que

$$|\mathcal{P}(x)| \leq K$$

para todo x em S . Como S é compacto, para mostrar que $\mathcal{P}$ é contínua é suficiente mostrar que a aplicação $x \rightarrow \mathcal{P}(x)$ tem gráfico fechado. Tome $x_k \rightarrow x$ e $\mathcal{P}(x_k) \rightarrow Q$. Temos que mostrar que $Q = \mathcal{P}(x)$. Mas de (2.3) e de (2.4), temos as desigualdades

$$|Df^{n-m}(f^m(x_k))\mathcal{P}(f^m(x_k))| \leq Ke^{-\alpha(n-m)} \quad (n \geq m) \quad (2.6)$$

$$|Df^{n-m}(f^m(x_k))(I - \mathcal{P}(f^m(x_k)))| \leq Ke^{-\alpha(m-n)} \quad (m \geq n) \quad (2.7)$$

Também, por repetidas aplicações de (2.2), obtemos

$$\mathcal{P}(f^n(x_k)) = Df^n(x_k)\mathcal{P}(x_k)Df^{-n}(f^n(x_k)) \quad (2.8)$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ em (2.6), (2.7) e (2.8) obtemos

$$|Df^{n-m}(f^m(x))Q_m| \leq Ke^{-\alpha(n-m)} \quad (n \geq m)$$

$$|Df^{n-m}(f^m(x))(I - Q_m)| \leq Ke^{-\alpha(m-n)} \quad (m \geq n)$$

onde $Q_n = Df^n(x)QDf^{-n}(f^n(x))$. Isto significa que a equação diferença linear (2.1), que tem matriz de transição $Df^{n-m}(f^m(x))$, tem uma dicotomia exponencial em $\mathbb{Z}$ com projeções Q_n . Mas já sabemos que ela tem uma dicotomia exponencial com projeções $P_n(x) = \mathcal{P}(f^n(x))$. Logo pela unicidade (Proposição 1.2 (iii)) $Q_n = \mathcal{P}(f^n(x))$ para todo n . Em particular, tomando $n = 0$, temos $Q = \mathcal{P}(x)$. ■

Definição 2.2 Uma sequência duplamente infinita (ou bisequência) em $\mathbf{R}^p$ é uma δ pseudo-órbita de um difeomorfismo C^1 $f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ se para todo inteiro n

$$|y_{n+1} - f(y_n)| \leq \delta$$

Uma órbita $\{f^n(x)\}$ ϵ -shadow(ϵ -sombreia) uma δ pseudo-órbita se para todo inteiro n

$$|f^n(x) - y_n| \leq \epsilon$$

Enunciamos e provamos agora o 'shadowing lemma'.

Teorema 2.1 (shadowing lemma) Seja S um conjunto hiperbólico compacto para o difeomorfismo C^1 $f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$. Então dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que toda δ pseudo-órbita em S tem uma única órbita que a ϵ -shadow.

Prova:

Sejam K , α e $\mathcal{P}(x)$ como na Definição 2.1 e na Proposição 2.1. Denote por B uma bola fechada limitada contendo S e defina

$$M = \sup_{x \in B} |Df(x)|$$

Denote por $w_1(\cdot)$ o módulo de continuidade para $Df(x)$ com x em B . Isto é, se $\Delta > 0$,

$$w_1(\Delta) = \sup\{|Df(x) - Df(y)| : x, y \in B, |x - y| \leq \Delta\}$$

Pela Proposição 2.2, $\mathcal{P}(x)$ é contínua no conjunto S . Denote por $w_2(\cdot)$ seu módulo de continuidade em S .

Temos que resolver a equação diferença não linear

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \in \mathbf{Z})$$

para uma sequência $\{x_n\}$ tal que $|x_n - y_n| \leq \epsilon$ para todo n . Escreva

$$x_n = y_n + z_n$$

Então $\{z_n\}$ é uma solução de

$$z_{n+1} = C_n z_n + h_n + g_n(z_n) \quad (2.9)$$

onde

$$\begin{aligned} C_n &= Df(y_n) \\ g_n(z) &= f(y_n + z) - f(y_n) - Df(y_n)z \\ h_n &= f(y_n) - y_{n+1} \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} P_n &= \mathcal{P}(y_n) \\ Q_{n+1} &= \mathcal{P}(f(y_n)) \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{Z}$. Então segue de (2.2) que, para todo n ,

$$Q_{n+1}C_n = C_nP_n \quad (2.10)$$

Agora defina

$$D_n = P_{n+1}C_nP_n + (I - P_{n+1})C_n(I - P_n)$$

Pode ser facilmente verificado que

$$P_{n+1}D_n = D_nP_n$$

Também,

$$\begin{aligned} |C_n - D_n| &= |(I - P_{n+1})C_nP_n + P_{n+1}C_n(I - P_n)| \\ &= |(I - P_{n+1})Q_{n+1}C_n + P_{n+1}(I - Q_{n+1})C_n| \\ &= |[(Q_{n+1} - P_{n+1})Q_{n+1} + P_{n+1}(P_{n+1} - Q_{n+1})]C_n| \\ &= |[(Q_{n+1} - P_{n+1})(Q_{n+1} - P_{n+1})]C_n| \\ &\leq \{|Q_{n+1}| + |P_{n+1}|\} |C_n| |Q_{n+1} - P_{n+1}| \\ &\leq 2KMw_2(\delta) \end{aligned}$$

Portanto, para todo n ,

$$|C_n - D_n| \leq 2KMw_2(\delta) \quad (2.11)$$

Reescrevemos (2.9) como

$$z_{n+1} = D_n z_n + h_n + [(C_n - D_n)z_n + g_n(z_n)] \quad (2.12)$$

e queremos aplicar a Proposição 1.4. Para fazer isto, devemos primeiro mostrar que a equação linear

$$z_{n+1} = D_n z_n \quad (2.13)$$

tem uma dicotomia exponencial em $\mathbb{Z}$. Mostraremos, na verdade, que a equação tem uma dicotomia exponencial com projeções P_n . A invariância de P_n segue da

definição de D_n e da igualdade $P_{n+1}D_n = D_nP_n$.

Usando a desigualdade

$$\begin{aligned} |y_{n+k+1} - f^{k+1}(y_n)| &\leq |y_{n+k+1} - f(y_{n+k})| + |f(y_{n+k}) - f(f^k(y_n))| \\ &\leq \delta + M |y_{n+k} - f^k(y_n)| \end{aligned}$$

podemos mostrar, por indução em k , que

$$|y_{n+k} - f^k(y_n)| \leq (1 + M + \dots + M^{k-1})\delta \quad (2.14)$$

para todo n e $k \geq 1$.

Denote por $\Psi(n, m)$ a matriz de transição para (2.13). Fixe n e defina

$$d_k = |\Psi(n+k, n)P_n - Df^k(y_n)P_n|,$$

onde $k \geq 1$. Escolha o menor inteiro positivo N tal que

$$Ke^{-\alpha N} \leq 1/2$$

Nosso objetivo é estimar d_N . Façamos isto obtendo uma estimativa para d_{k+1} em termos de d_k para $1 \leq k \leq N-1$. Primeiro devemos supor que

$$(1 + M + \dots + M^{N-1})\delta \leq \text{dist}(S, B^c). \quad (2.15)$$

Isto assegura que $f^k(y_n) \in B$ para todo n e $1 \leq k \leq N$, usando (2.14). Então

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= |\Psi(n+k+1, n)P_n - Df^{k+1}(y_n)P_n| \\ &\leq |\Psi(n+k+1, n)P_n - Df(f^k(y_n))\Psi(n+k, n)P_n| \\ &\quad + |Df(f^k(y_n))\Psi(n+k, n)P_n - Df(f^k(y_n))Df^k(y_n)P_n| \\ &\leq |D_{n+k} - Df(f^k(y_n))| |\Psi(n+k, n)P_n| \\ &\quad + |Df(f^k(y_n))| |\Psi(n+k, n)P_n - Df^k(y_n)P_n| \\ &\leq \{|D_{n+k} - C_{n+k}| + |Df(y_{n+k}) - Df(f^k(y_n))|\} |\Psi(n+k, n)P_n| \\ &\quad + |Df(f^k(y_n))| |\Psi(n+k, n)P_n - Df^k(y_n)P_n| \\ &\leq \{2KMw_2(\delta) + w_1((1 + M + \dots + M^{k-1})\delta)\} 2^k M^k K^{2k} K + Md_k \end{aligned}$$

onde usamos (2.11), (2.14) e o fato que $2MK^2$ é um limitante superior para $|D_n|$.

$$\begin{aligned} |D_n| &= |P_{n+1}C_nP_n + (I - P_{n+1})C_n(I - P_{n+1})| \\ &\leq |P_{n+1}C_nP_n| + |(I - P_{n+1})C_n(I - P_{n+1})| \\ &\leq K|C_n|K + K|C_n|K \\ &= 2K^2|Df(y_n)| \leq 2MK^2. \end{aligned}$$

Portanto, para $1 \leq k \leq N-1$,

$$d_{k+1} \leq w_3(\delta) + Md_k$$

onde

$$w_3(\delta) = \sup_{1 \leq k \leq N-1} 2^k M^k K^{2k+1} \{2KMw_2(\delta) + w_1((1+M+\dots+M^{k-1})\delta)\}$$

Segue por indução em k que

$$d_N \leq (1+M+\dots+M^{N-2})w_3(\delta) + M^{N-1}d_1$$

Mas,

$$d_1 = |(D_n - C_n)P_n| \leq 2K^2 M w_2(\delta)$$

Logo,

$$d_N \leq (1+M+\dots+M^{N-2})w_3(\delta) + 2K^2 M^N w_2(\delta) \leq 1/4 \quad (2.16)$$

se δ é suficientemente pequeno.

Então segue que para todo n ,

$$\begin{aligned} |\Psi(n+N, n)P_n| &\leq d_N + |Df^N(y_n)P_n| \\ &= d_N + |Df^N(y_n)\mathcal{P}(y_n)| \\ &\leq d_N + Ke^{-\alpha N} \leq 1/4 + 1/2 \end{aligned}$$

Assim, para todo n ,

$$|\Psi(n+N, n)P_n| \leq 3/4$$

Desejamos estender esta última desigualdade a uma para $|\Psi(n, m)P_n|$ onde $n \geq m$. Existe um único inteiro não negativo k tal que

$$m + kN \leq n < m + (k+1)N.$$

Então,

$$\begin{aligned} &|\Psi(n, m)P_m| \\ &= |\Psi(n, m+kN)\Psi(m+kN, m+(k+1)N)\dots\Psi(m+N, m)P_m| \\ &= |\Psi(n, m+kN)\Psi(m+kN, m+(k+1)N)P_{m+(k-1)N}\dots\Psi(m+N, m)P_m| \\ &\leq |\Psi(n, m+kN)| |\Psi(m+kN, m+(k+1)N)P_{m+(k-1)N}| \dots |\Psi(m+N, m)P_m| \\ &\leq (2MK^2)^{N-1} (\frac{3}{4})^k \leq (2MK^2)^{N-1} (\frac{3}{4})^{\frac{n-m}{N}-1} \end{aligned}$$

Logo, para $n \geq m$,

$$|\Psi(n, m)P_m| \leq K_1 e^{-\alpha_1(n-m)}$$

onde $K_1 = \frac{4}{3}(2MK^2)^{N-1}$ e $\alpha_1 = \frac{\log \frac{4}{3}}{N}$.

Analogamente podemos mostrar que para $m \geq n$

$$|\Psi(n, m)(I - P_m)| \leq K_1 e^{-\alpha_1(m-n)}$$

Portanto, mostramos que quando $\delta > 0$ é tão pequeno que (2.15) e (2.16) são satisfeitos, a equação linear (2.13) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com constantes K_1 , α_1 e projeções P_n .

Agora aplicamos a Proposição 1.4 à equação (2.12) para provar a existência de uma única solução z_n tal que $|z_n| \leq \epsilon$ para todo n . O termo não linear em (2.12) tem constante de Lipschitz

$$|C_n - D_n| + w_1(\epsilon)$$

desde que restrinjamos z a $|z_n| \leq \epsilon$ e assumamos $\epsilon \leq \text{dist}(S, B^c)$. Logo a condição sobre a constante de Lipschitz na Proposição 1.4 será satisfeita desde que

$$4K_1(1 + e^{-\alpha_1})(1 - e^{-\alpha_1})^{-1}2KMw_2(\delta) \leq 1 \quad (2.17)$$

$$4K_1(1 + e^{-\alpha_1})(1 - e^{-\alpha_1})^{-1}w_1(\epsilon) \leq 1 \quad (2.18)$$

onde usamos (2.11). Também a condição sobre h_n será satisfeita desde que

$$2K_1(1 + e^{-\alpha_1})(1 - e^{-\alpha_1})^{-1}\delta \leq \epsilon \quad (2.19)$$

Portanto, se $\epsilon > 0$ satisfaz $\epsilon \leq \text{dist}(S, B^c)$ e (2.18) e $\delta > 0$ é escolhido tão pequeno que (2.15), (2.16), (2.17) e (2.19) são satisfeitas, a equação diferença (2.9) tem uma única solução z_n tal que $|z_n| \leq \epsilon$ para todo n . ■

Observação 2.2 A equação variacional da shadowing órbita x_n também tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ desde que ϵ e δ sejam suficientemente pequenos. A equação variacional é, na verdade,

$$u_{n+1} = D_n u_n + \{C_n - D_n + Dg_n(z_n)\}u_n \quad (2.20)$$

Sabemos que a equação (2.13) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com constantes K_1 , α_1 . Logo, pela Proposição 1.5 a equação (2.20) também terá uma dicotomia em $\mathbf{Z}$ com projeções de mesmo posto desde que

$$\sup\{|C_n - D_n| + |Dg_n(z_n)|\} \leq 2KMw_2(\delta) + w_1(\epsilon)$$

seja suficientemente pequeno, e isto pode ser alcançado fazendo δ e ϵ pequenos.

Capítulo 3

Comportamento Caótico na vizinhança de um ponto homoclínico transversal: O Teorema de Smale

Neste capítulo o shadowing lemma visto no capítulo anterior será usado para provar o Teorema de Smale. Os pontos homoclínicos transversais são definidos e o conceito de transversalidade é estudado puramente em termos da equação variacional da órbita do ponto homoclínico transversal.

Seja $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ um difeomorfismo C^1 .

Definição 3.1 $x_0 \in \mathbb{R}^p$ é um ponto fixo hiperbólico de f se $f(x_0) = x_0$ e os autovalores de $Df(x_0)$ estão fora do círculo unitário.

Seja x_0 um ponto fixo hiperbólico de f e denote por P a projeção com imagem a soma dos autoespaços generalizados de $Df(x_0)$ correspondentes aos autovalores dentro do círculo unitário, e com núcleo a soma dos autoespaços generalizados correspondentes aos autovalores fora do círculo unitário. Então $Df(x_0)$ comuta com P e existem constantes positivas K, α tal que

$$\begin{aligned} \|Df^n(x_0)P\| &\leq Ke^{-\alpha n} \quad (n \geq 0) \\ \|Df^n(x_0)(I - P)\| &\leq Ke^{\alpha n} \quad (n \leq 0) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Isto significa que a equação variacional ao longo da órbita $\{x_0\}$

$$u_{n+1} = Df(x_0)u_n \tag{3.2}$$

tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com projeção constante P . Logo, se x_0 é um ponto fixo hiperbólico, o conjunto $\{x_0\}$ é um conjunto hiperbólico no sentido da Definição 2.1.

Definição 3.2 $y_0 \in \mathbf{R}^p$ é um ponto homoclínico com respeito ao ponto fixo hiperbólico x_0 se $y_0 \neq x_0$ e $f^n(y_0) \rightarrow x_0$ quando $|n| \rightarrow \infty$.

A proposição abaixo analisa a equação variacional ao longo da órbita de um ponto homoclínico.

Proposição 3.1 Seja y_0 um ponto homoclínico com respeito a um ponto fixo hiperbólico x_0 de um difeomorfismo $C^1 f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$. Então a equação variacional

$$u_{n+1} = Df(f^n(y_0))u_n \quad (3.3)$$

tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}^+$ e em $\mathbf{Z}^-$ com o posto da projeção, em ambos os casos, igual ao número de autovalores de $Df(x_0)$ dentro do círculo unitário.

Prova:

A equação (3.2) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com projeções constantes P , o posto de P sendo igual ao número de autovalores de $Df(x_0)$ dentro do círculo unitário.

Para $q \geq 0$ fixado considere a equação

$$u_{n+1} = Df(f^{n+q}(y_0))u_n = [Df(x_0) + Df(f^{n+q}(y_0)) - Df(x_0)]u_n \quad (3.4)$$

Podemos fazer $|Df(f^{n+q}(y_0))u_n + Df(x_0)|$ uniformemente pequeno para $n \geq 0$ escolhendo q suficientemente grande. Logo, segue da Proposição 1.5 que se q é suficientemente grande, a equação (3.4) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}^+$ com projeções com mesmo posto que P .

Afirmção : A equação (3.3) tem uma dicotomia exponencial em $[q, \infty)$. De fato, sejam $C_n = Df(f^n(y_0))$ com $\Phi(n, m) = Df^{n-m}(f^m(y_0))$ a matriz de transição da equação (3.3) e $\hat{C}_n = Df(f^{n+q}(y_0))$ com $\hat{\Phi}(n, m) = Df^{n-m}(f^{m+q}(y_0))$ a matriz de transição da equação (3.4). Então, $\hat{C}_n = C_{n+q}$ e $\hat{P}_n = P_{n+q}$, logo

$$\hat{\Phi}(n, m) = \hat{C}_{n-1} \dots \hat{C}_m = C_{n-1+q} \dots C_{m+q} = \Phi(n+q, m+q)$$

Se $\hat{n} = n + q$ e $\hat{m} = m + q$, então $\hat{n}, \hat{m} \in [q, \infty)$, logo $\hat{C}_n = C_{\hat{n}}, \hat{P}_n = P_{\hat{n}}$ e $\hat{\Phi}(n, m) = \Phi(\hat{n}, \hat{m})$.

Assim,

$$\begin{aligned} P_{\hat{n}+1} C_{\hat{n}} &= C_{\hat{n}} P_{\hat{n}} \\ |\Phi(\hat{n}, \hat{m}) P_{\hat{m}}| &\leq K e^{-\alpha(\hat{n}-\hat{m})} \quad (\hat{m} \leq \hat{n}) \\ |\Phi(\hat{n}, \hat{m})(I - P_{\hat{m}})| &\leq K e^{-\alpha(\hat{m}-\hat{n})} \quad (\hat{n} \leq \hat{m}) \end{aligned}$$

logo (3.3) tem uma dicotomia exponencial em $[q, \infty]$ e portanto, pela Proposição 1.1 em $\mathbf{Z}^+$, com projeções com mesmo posto de P . ■

Definição 3.3 *Seja y_0 um ponto homoclínico com respeito a um ponto fixo hiperbólico x_0 de um difeomorfismo $C^1 f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$. y_0 é um ponto homoclínico transversal se a única solução limitada em $\mathbf{Z}$ da equação variacional (3.3) for a solução trivial.*

Proposição 3.2 *Seja y_0 um ponto homoclínico transversal com respeito a um ponto fixo hiperbólico x_0 de um difeomorfismo $C^1 f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$. Então o conjunto*

$$\{x_0\} \cup \{f^n(y_0) : n \in \mathbf{Z}\}$$

é um conjunto hiperbólico.

Prova:

Pela Proposição 3.1 a equação variacional (3.3) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}^+$ e em $\mathbf{Z}^-$ com projeções do mesmo posto. Como y_0 é transversal, (3.3) não tem solução limitada em $\mathbf{Z}$. Segue pela Proposição 1.3 que (3.3) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$. Se q é um inteiro fixo, pela comparação da matriz de transição para a equação

$$u_{n+1} = Df(f^n(f^q(y_0)))u_n = Df(f^{n+q}(y_0))u_n \quad (3.5)$$

com a matriz de transição para (3.3), vemos que (3.5) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com as mesmas constantes e projeções com o mesmo posto de (3.3). Além disso, como x_0 é um ponto fixo hiperbólico sua equação variacional (3.2) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com projeções tendo posto igual ao número de autovalores de $Df(x_0)$ dentro do círculo unitário. Como as projeções para (3.5) também tem este número como posto, e como existem apenas duas escolhas possíveis para as constantes, segue da Definição 2.1 que o conjunto

$\{x_0\} \cup \{f^n(y_0) : n \in \mathbb{Z}\}$, que é claramente compacto e invariante, é um conjunto hiperbólico. ■

Novamente, seja y_0 um ponto homoclínico transversal com respeito a um ponto fixo hiperbólico x_0 de um difeomorfismo $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Então sabemos que o conjunto

$$S = \{x_0\} \cup \{f^n(y_0) : n \in \mathbb{Z}\} \quad (3.6)$$

é hiperbólico. Nosso objetivo agora é usar o shadowing lemma para mostrar que a dinâmica de f próxima a S é caótica, isto é, que existe um conjunto invariante compacto no qual a ação de algum iterado do difeomorfismo é topologicamente conjugado à ação do shift de Bernoulli.

Definição 3.4 *Seja S como em (3.6). Um segmento de órbita de comprimento l é uma sequência finita de l pontos da forma*

$$\{x_0, x_0, \dots, x_0\}$$

ou da forma

$$\{f^{q+1}(y_0), f^{q+2}(y_0), \dots, f^{q+l}(y_0)\}$$

Considere as bisequências

$$\dots, C_{-1}, C_0, C_1, \dots$$

de segmentos de órbita. Arranjamos em sequência os pontos nos segmentos consecutivamente para formar uma bisequência de pontos.

Pelo shadowing lemma (Teorema 2.1), dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\delta > 0$ tal que qualquer δ pseudo-órbita em S tem uma única ϵ -shadowing órbita (esta última órbita pode não estar em S). Fixe um tal ϵ e o correspondente δ e considere as bisequências formadas de segmentos de órbita com a propriedade que o ponto extremo esquerdo e a imagem por f do ponto extremo direito estão na bola de raio $\delta/2$ centrada em x_0 (Esta condição é sempre satisfeita quando o segmento de órbita contém apenas o ponto x_0 e nos outros casos podem ser satisfeitos escolhendo q e l suficientemente grandes). Então cada tal bisequência tem uma única ϵ -shadowing órbita. Assim o que obtemos são órbitas que flutuam entre permanecer próxima a x_0 e seguir em torno da órbita de y_0 , de modo aleatório.

Definição 3.5 Denote por $\mathcal{I}_m$ ($m \geq 2$) o conjunto das bisequências

$$a = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

onde $a_i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Portanto $\mathcal{I}_m = \{1, 2, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$. Damos ao conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$ a topologia discreta e a $\mathcal{I}_m$ a topologia produto. O shift de Bernoulli $\beta : \mathcal{I}_m \rightarrow \mathcal{I}_m$ é o homeomorfismo definido por

$$[\beta(a)]_i = a_{i+1}$$

Teorema 3.1 (Teorema de Smale) Seja y_0 um ponto homoclínico transversal com respeito a um ponto fixo hiperbólico x_0 de um difeomorfismo C_1 $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Então existe um inteiro l e um homeomorfismo ϕ de $\mathcal{I}_m$ em um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^p$ que é invariante por f^l , tal que

$$f^l \circ \phi = \phi \circ \beta,$$

isto é, a ação de f^l em $\phi(\mathcal{I}_m)$ é conjugada à ação de β em $\mathcal{I}_m$, onde β é o shift de Bernoulli.

Prova:

Sejam $p_1, p_2, \dots, p_r$, onde $r = m - 1$ ou m , inteiros distintos. Escolha e fixe $\epsilon > 0$ tão pequeno quanto é exigido quando o shadowing lemma é aplicado ao conjunto hiperbólico $S = \{x_0\} \cup \{f^n(y_0) : n \in \mathbb{Z}\}$ e tal que

$$\epsilon < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |f^{p_i}(y_0) - f^{p_j}(y_0)| \quad (3.7)$$

Quando $r = m - 1$ exija também que

$$\epsilon < \frac{1}{2} \min |f^{p_i}(y_0) - x_0| \quad (3.8)$$

Agora tome $\delta > 0$ correspondente a ϵ como no shadowing lemma e escolha N tal que para $i = 1, \dots, r$,

$$|f^n(y_0) - x_0| < \delta/2 \text{ quando } n = N + p_i + 1 \text{ ou } p_i - N.$$

Para $i = 1, \dots, r$, definimos o segmento de órbita

$$C_i = \{f^{p_i-N}(y_0), \dots, f^{p_i}(y_0), \dots, f^{p_i+N}(y_0)\}$$

e se $r = m - 1$, definimos

$$C_m = \{x_0, \dots, x_0\}$$

onde existem $2N + 1$ x_0 's.

Seja $a = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$ em $\mathcal{I}_m$. Então, como na discussão anterior à Definição 3.5, a bisequência formada pelo arranjo em sequência dos segmentos de órbita

$$\dots, C_{a_{-1}}, C_{a_0}, C_{a_1}, \dots$$

consecutivamente é uma δ pseudo-órbita e, portanto, tem uma única ϵ -shadowing órbita. Definimos $\phi(a)$ sendo o ponto nesta órbita que 'sombreia' o ponto médio do segmento de órbita C_{a_0} . Assim, se denotarmos por $z_{ij}(a)$ o j -ésimo ponto de C_{a_i} , $\phi(a)$ é o único ponto tal que

$$|f^{N+(i-1)(2N+1)+j}(\phi(a)) - z_{ij}(a)| \leq \epsilon \quad (3.9)$$

para todo i e $j = 1, \dots, 2N + 1$. Se trocarmos i por $i + 1$, obtemos

$$|f^{N+i(2N+1)+j}(\phi(a)) - z_{ij}(a)| \leq \epsilon$$

mas isto pode ser reescrito como

$$|f^{N+(i-1)(2N+1)+j}(f^{2N+1}(\phi(a))) - z_{ij}(\beta(a))| \leq \epsilon$$

pois $a_{i+1} = [\beta(a)]_i$. Esta última desigualdade ocorre para todo i e $j = 1, \dots, 2N + 1$. Por comparação com (3.9) vemos pela unicidade que isto significa que

$$\phi(\beta(a)) = f^{2N+1}(\phi(a))$$

isto ocorre para todo $a \in \mathcal{I}_m$ e portanto,

$$\phi \circ \beta = f^{2N+1} \circ \phi$$

Isto também mostra que $\phi(\mathcal{I}_m)$ é invariante por f^{2N+1} .

Agora, mostremos que ϕ é 1-1. Se $a \neq a'$ então $a_i \neq a'_i$ para algum i . Então,

$$\begin{aligned} & |f^{N+(i-j)(2N+1)+(N+1)}(\phi(a)) - f^{N+(i-j)(2N+1)+(N+1)}(\phi(a'))| \\ & \geq |z_{i,N+1}(a) - z_{i,N+1}(a')| - |f^{N+(i-j)(2N+1)+(N+1)}(\phi(a)) - z_{i,N+1}(a)| \\ & \quad - |f^{N+(i-j)(2N+1)+(N+1)}(\phi(a')) - z_{i,N+1}(a')| \\ & \geq |z_{i,N+1}(a) - z_{i,N+1}(a')| - 2\epsilon > 0 \end{aligned}$$

Logo, $\phi(a) \neq \phi(a')$, como requerido.

A seguir mostraremos que ϕ é contínua. Caso contrário, existiria um ponto a em $\mathcal{I}_m$, um número $\Delta > 0$ e uma sequência $a^{(k)}$ em $\mathcal{I}_m$ tal que para todo k ,

$$a_i^{(k)} = a_i \quad \text{para } |i| \leq k$$

mas,

$$|\phi(a^{(k)}) - \phi(a)| \geq \Delta \quad (3.10)$$

$\phi(\mathcal{I}_m)$ está na ϵ -vizinhança de S e, portanto, é certamente limitada. Logo, tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir sem perda de generalidade que $\phi(a^{(k)}) \rightarrow x$ (digamos). Então de (3.10), obtemos

$$|x - \phi(a)| \geq \Delta.$$

Usando agora (3.9), temos

$$|f^{N+(i-1)(2N+1)+j}(\phi(a^{(k)})) - z_{ij}(a^{(k)})| \leq \epsilon$$

para todo k, i e $j = 1 \dots, 2N+1$. Mas $C_{a_i^{(k)}} = C_{a_i}$, se $|i| \leq k$. Logo, se fixarmos i e tomarmos $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$|f^{N+(i-1)(2N+1)+j}(x) - z_{ij}(a)| \leq \epsilon$$

para i e $j = 1 \dots, 2N+1$. Pela unicidade, devemos ter $x = \phi(a)$ que é uma contradição.

Portanto, ϕ é 1-1 e contínua. Como $\mathcal{I}_m$ é Hausdorff compacto segue que $\phi(\mathcal{I}_m)$ é compacto e que ϕ é um homeomorfismo. ■

Observação 3.1 O teorema foi provado com $l = 2N+1$. É evidente que não é necessário que l seja ímpar. Ele foi assim escolhido apenas por uma questão de conveniência.

Observação 3.2 Podemos facilmente arranjar, como Smale fez, para que o ponto homoclínico transversal y_0 esteja em $\phi(\mathcal{I}_m)$. Além disso, como $\phi(\mathcal{I}_m)$ é f^{2N+1} -invariante, todos os iterados de y_0 por f^{2N+1} estão em $\phi(\mathcal{I}_m)$, e como $\phi(\mathcal{I}_m)$ é fechado, segue que x_0 também está em $\phi(\mathcal{I}_m)$.

Para ver isto, considere $r = m-1$ e $p_1 = 0$ e escolha δ e N tal que satisfaçam as condições adicionais

$$\delta \leq 2\epsilon$$

e

$$|f^n(y_0) - x_0| < \delta/2 \text{ quando } n > N \text{ ou } n \leq -N$$

Então, a pseudo-órbita correspondente a

$$a = (\dots, m, m, 1, m, m, \dots)$$

é formada dos segmentos de órbitas

$$\dots, C_m, C_m, C_1, C_m, C_m, \dots$$

onde

$$C_1 = \{f^{-N}(y_0), \dots, y_0, \dots, f^N(y_0)\}$$

e

$$C_m = \{x_0, \dots, x_0, \dots, x_0\}$$

É claro que a órbita de y_0 , $\{f^n(y_0)\}$, ϵ -shadow esta pseudo-órbita e que y_0 'sombreia' o ponto médio de $C_{a_0} = C_{a_1}$. Portanto, $\phi(a) = y_0$ e $y_0 \in \phi(\mathcal{I}_m)$, como afirmado. ■

Capítulo 4

Equivalência de Definições de Ponto Homoclínico Transversal

O propósito principal deste capítulo é mostrar que a definição de ponto homoclínico transversal dado no capítulo 3 é equivalente à definição usual em termos de variedades estável e instável. Mostramos também que próximo a um ponto homoclínico transversal existem infinitos outros tais pontos, e que difeomorfismos próximos também devem ter pontos homoclínicos transversais.

Primeiro provaremos a existência de uma variedade estável de um ponto fixo hiperbólico.

Proposição 4.1 *Seja x_0 um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo C^1 $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Então existem constantes K , α e uma projeção P comutando com $Df(x_0)$ tal que as desigualdades (3.1) ocorrem. Considere $\Delta > 0$ com a propriedade que*

$$|Df(x) - Df(x_0)| \leq \gamma = \frac{1}{2}K^{-1}(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha}) \quad (4.1)$$

quando $|x - x_0| \leq \Delta$. Então existe uma aplicação C^1

$$v : \{\xi \in \mathcal{R}(P) : |\xi| < \Delta/4K\} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

com as seguintes propriedades:

(i) $x = v(\xi)$ é o único x tal que

$$\begin{aligned} P(x - x_0) &= \xi \\ |f^n(x) - x_0| &\leq \Delta \quad \text{para todo } \xi \in \mathcal{R}(P), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$(ii) \quad |v(\xi) - x_0| \leq \Delta \\ |Dv(\xi)| \leq 2K \text{ para todo } \xi \in \mathcal{R}(P);$$

$$(iii) \quad v(0) = x_0 \\ Dv(0) = P$$

$$(iv) \quad v \text{ é 1-1.}$$

Prova:

Dado $\xi \in \mathcal{R}(P)$ com $|\xi| < \Delta/4K$, procuramos x tal que as condições (4.2) sejam válidas. Defina

$$f^n(x) = x_0 + z_n$$

Então z_n é uma solução da equação diferença não linear

$$z_{n+1} = Df(x_0)z_n + g(z_n) \quad (4.3)$$

onde

$$g(z) = f(x_0 + z) - f(x_0) - Df(x_0)z \quad (4.4)$$

Queremos

$$Pz_0 = \xi (= P\xi) \text{ e } |z_n| \leq \Delta \text{ para } n \geq 0 \quad (4.5)$$

Note que como

$$|Dg(z)| = |Df(x_0 + z) - Df(x_0)|$$

segue de (4.1) que

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq \gamma |z_1 - z_2| \quad (4.6)$$

para $|z_1|, |z_2| \leq \Delta$. Além disso,

$$g(0) = 0$$

Assim, todas as condições da Proposição 1.4 (ii) estão satisfeitas e concluímos que existe uma única solução da equação (4.3) satisfazendo às condições (4.5). Denote esta solução por $z_n(\xi)$.

Note que quando $\xi = 0$, $z_n = 0$ para todo n é uma solução satisfazendo às condições (4.5). Logo pela unicidade

$$z_n(0) = 0 \text{ para } n \geq 0$$

Agora, definimos

$$v(\xi) = x_0 + z_0(\xi)$$

logo para $n \geq 0$

$$f^n(v(\xi)) = x_0 + z_n(\xi)$$

Então (i) e os primeiro itens em (ii), (iii) seguem imediatamente. A primeira condição em (4.5) dá a identidade

$$P(v(\xi) - x_0) = \xi \quad (4.7)$$

da qual a injetividade de v segue imediatamente.

Falta provar a suavidade de v . Primeiro mostremos que $z_n(\xi)$ é Lipschitziana em ξ . Sejam ξ_1, ξ_2 no domínio de v . Então $w_n = z_n(\xi_1) - z_n(\xi_2)$ é uma solução da equação não homogênea

$$w_{n+1} = Df(x_0)(w_n) + [g_n(z_n(\xi_1)) - g_n(z_n(\xi_2))]$$

que é limitada em $\mathbf{Z}^+$ e satisfaz $Pw_0 = P(\xi_1 - \xi_2)$. Segue do Lema 1.1 (ii) e de (4.6) que

$$\|w\| \leq K \|\xi_1 - \xi_2\| + K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \gamma \|w\|$$

onde

$$\|w\| = \sup_{n \geq 0} \|w_n\|.$$

Assim,

$$\|w\| \leq K \|\xi_1 - \xi_2\| + \frac{1}{2} \|w\|$$

logo,

$$\|w\| \leq 2K \|\xi_1 - \xi_2\|$$

Portanto, para $n \geq 0$

$$\|z_n(\xi_1) - z_n(\xi_2)\| \leq 2K \|\xi_1 - \xi_2\| \quad (4.8)$$

Agora considere a equação matricial

$$Z_{n+1} = [Df(x_0) + Dg(z_n(\xi))]Z_n \quad (4.9)$$

onde $\|Dg(z_n(\xi))\| \leq \gamma$. Pela Proposição 1.4 (ii) e observação 1.2 esta equação tem uma única solução $Z_n(\xi)$ que é limitada em $\mathbf{Z}^+$ e satisfaz

$$PZ_0(\xi) = P.$$

Mostremos que $Z_n(\xi) = Dz_n(\xi)$. Para este fim considere

$$w_n = z_n(\xi + h) - z_n(\xi) - Z_n(\xi)h$$

onde $\xi, h \in \mathcal{R}(P)$ com $|\xi| < \Delta/4K$, $|h| < \Delta/4K - |\xi|$. Vemos que w_n é uma solução da equação

$$w_{n+1} = Df(x_0)w_n + [g(z_n(\xi + h)) - g(z_n(\xi)) - Dg(z_n(\xi))Z_n(\xi)h]$$

que é limitada em $\mathbf{Z}^+$ e satisfaz $Pw_0 = 0$. A norma do termo não homogêneo é

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 Dg(z_n(\xi) + \theta(z_n(\xi + h) - z_n(\xi))) d\theta [z_n(\xi + h) - z_n(\xi)] \right. \\ & \quad \left. - Dg(z_n(\xi))Z_n(\xi)h \right| \\ &= \left| \int_0^1 Dg(z_n(\xi) + \theta(z_n(\xi + h) - z_n(\xi))) - Dg(z_n(\xi)) d\theta [z_n(\xi + h) - z_n(\xi)] \right. \\ & \quad \left. + Dg(z_n(\xi))w_n \right| \\ &\leq \int_0^1 |Dg(z_n(\xi) + \theta(z_n(\xi + h) - z_n(\xi))) - Dg(z_n(\xi))| d\theta |z_n(\xi + h) - z_n(\xi)| \\ & \quad + |Dg(z_n(\xi))| |w_n| \\ &\leq w(2K|h|)2K|h| + \gamma\|w\| \end{aligned}$$

onde $\|w\| = \sup_{n \geq 0} |w|$, $w(\cdot)$ é o módulo de continuidade de $Df(x)$ em $|x - x_0| \leq \Delta$ e usamos (4.8). Do Lema 1.1 (ii), temos a estimativa

$$\begin{aligned} \|w\| &\leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1}[w(2K|h|)2K|h| + \gamma\|w\|] \\ &\leq 2K^2(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1}w(2K|h|)|h| + \frac{1}{2}\|w\| \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|w\| \leq 4K^2(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1}w(2K|h|)|h|$$

Assim,

$$|z_n(\xi + h) - z_n(\xi) - Z_n(\xi)h| = o(|h|) \text{ quando } |h| \rightarrow 0,$$

uniformemente em relação a ξ . Disto segue que para $n \geq 0$, $Dz_n(\xi) = DZ_n(\xi)$ e, além disso, que $Dz_n(\xi)$ é contínua em ξ . Também a condição de Lipschitz (4.8) implica que

$$|Dz_n(\xi)| \leq 2K.$$

Finalmente, quando $\xi = 0$, $z_n(\xi) = 0$ então a equação (4.9) toma a forma

$$Z_{n+1} = Df(x_0)Z_n.$$

Agora, $Z_n = Df^n(x_0)P$ é uma solução desta equação que é limitada em $\mathbf{Z}^+$ e satisfaz $PZ_0 = P$. Logo, pela unicidade,

$$Z_n(0) = Df^n(x_0)P \quad (n \geq 0)$$

Tomando $n = 0$, temos

$$Z_0(0) = Df^0(x_0)P = DI(x_0)P = P$$

por outro lado,

$$Z_0(0) = Dz_0(0) = Dv(0)$$

portanto

$$Dv(0) = P$$

Da definição de $v(\xi)$, temos

$$v(\xi) = x_0 + z_n(\xi) \Rightarrow Dv(\xi) = Dz_n(\xi)$$

Logo $v(\xi)$ é C^1 (pois z_n o é) e que os segundos itens de (ii) e (iii) são satisfeitos. ■

Definição 4.1 *Suponha que as hipóteses da Proposição 4.1 estejam satisfeitas. Então definimos a variedade estável local de x_0 como sendo o conjunto*

$$W_{loc}^s(x_0) = \{v(\xi) : \xi \in \mathcal{R}(P), |\xi| < \Delta/4K\}$$

Definimos a variedade estável global de x_0 como sendo o conjunto

$$W^s(x_0) = \{x \in \mathbf{R}^p : f^n(x) \rightarrow x_0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Lema 4.1 *Suponha que as hipóteses da Proposição 4.1 estejam satisfeitas. Suponha que $x \in \mathbf{R}^p$ satisfaça*

$$|f^n(x) - x_0| \leq \Delta \quad \text{para } n \geq 0 \quad (4.10)$$

Então temos a estimativa

$$|f^n(x) - x_0| \leq (2K + e^\alpha) e^{-[\alpha - \log(1 + 2K\gamma e^\alpha)]n} |x - x_0| \quad \text{para } n \geq 0$$

onde

$$\alpha - \log(1 + 2K\gamma e^\alpha) > 0$$

Prova:

Primeiro, usando (4.1), temos
 $1 + 2K\gamma e^\alpha = 1 + e^\alpha(1 - e^{-\alpha})(1 + e^{-\alpha})^{-1} = 1 + \frac{e^\alpha - 1}{1 + e^{-\alpha}} = \frac{e^{-\alpha} + e^\alpha}{1 + e^{-\alpha}} < \frac{1 + e^\alpha}{1 + e^{-\alpha}} = e^\alpha$
 o que implica em $\alpha - \log(1 + 2K\gamma e^\alpha) > 0$.

Agora tome x satisfazendo (4.10). Então, $z_n = f^n(x) - x_0$ é uma solução da equação diferença (4.3) satisfazendo $|z_n| \leq \Delta$ para $n \geq 0$. Assim, a função de Green (veja Lema 1.1) para a equação

$$z_{n+1} = Df(x_0)z_n$$

é dada por

$$G(n, m) = \begin{cases} Df^{n-m}(x_0)P & \text{para } m \leq n \\ -Df^{n-m}(x_0)(I - P) & \text{para } n < m \end{cases}$$

z_n é solução da equação não homogênea

$$z_{n+1} = Df(x_0)z_n + g(z_n)$$

que é limitada em $n \geq 0$, e assim, segue de (1.13) na prova do Lema 1.1 que

$$z_n = Df^n(x_0)Pz_0 + \sum_{m=0}^{n-1} Df^{n-m-1}(x_0)Pg(z_m) - \sum_{m=n}^{\infty} Df^{n-m-1}(x_0)(I - P)g(z_m)$$

para $n \geq 0$. Logo, para $n \geq 0$, temos a desigualdade

$$|z_n| \leq Ke^{-\alpha n}|z_0| + K\gamma \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-m-1)}|z_m| + \sum_{m=n}^{\infty} e^{-\alpha(m+1-n)}|z_m| \right\} \quad (4.11)$$

Para $n \geq 0$ tome

$$\mu_n = \sup_{m \leq n} |z_m|$$

Dado $n \geq 0$ e $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n' \geq n$ tal que

$$(1 - \epsilon)\mu_n \leq |z_{n'}|$$

Então de (4.11), com n' no lugar de n ,

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon)\mu_n &\leq Ke^{-\alpha n'}|z_0| + K\gamma \left\{ \sum_{m=0}^{n'-1} e^{-\alpha(n'-m-1)}|z_m| + \sum_{m=n'}^{\infty} e^{-\alpha(m+1-n')}|z_m| \right\} \\ &\leq Ke^{-\alpha n}|z_0| + K\gamma \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-m-1)}|z_m| \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=n} e^{-\alpha(n'-m-1)} |z_m| + \sum_{m=n'} e^{-\alpha(m+1-n')} |z_m| \} \\
& \leq K e^{-\alpha n} |z_0| + K \gamma \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-m-1)} |z_m| \right. \\
& \quad \left. + K \gamma (1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \mu_n \right\} \\
& \leq K e^{-\alpha n} |z_0| + K \gamma \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-m-1)} |z_m| + \frac{1}{2} \mu_n
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \mu_n \leq K e^{-\alpha n} |z_0| + K \gamma \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-m-1)} |z_m|$$

Isto ocorre para todo $\epsilon > 0$. Faça $\epsilon \rightarrow 0$ para obter

$$|z_n| \leq \mu_n \leq 2K e^{-\alpha n} |z_0| + 2K \gamma \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-m-1)} |z_m|$$

para $n \geq 0$. Defina $w_n = e^{\alpha n} |z_n|$, então

$$w_n \leq 2K |z_0| + 2K e^{\alpha} \gamma \sum_{m=0}^{n-1} w_m$$

para $n \geq 0$. Isto implica, por indução para $n \geq 1$, que

$$w_n \leq (2K |z_0| + 2K e^{\alpha} \gamma w_0)(1 + 2K e^{\alpha} \gamma)^{n-1}$$

Portanto, para $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
|z_n| & \leq (2K + 2K e^{\alpha} \gamma) e^{-\alpha n} (1 + 2K e^{\alpha} \gamma)^{n-1} |z_0| \\
& = \frac{2K + 2K e^{\alpha} \gamma}{1 + 2K e^{\alpha} \gamma} e^{-[\alpha - \log(1 + 2K e^{\alpha} \gamma)]n} |z_0| \\
& \leq (2K + e^{\alpha}) e^{-[\alpha - \log(1 + 2K e^{\alpha} \gamma)]n} |z_0|
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.2 *Suponha que as hipóteses da Proposição (4.1) estejam satisfeitas. Então*

- (i) $W_{loc}^s(x_0)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^p$;
- (ii) $x \in W^s(x_0)$ se, e somente se, existe um inteiro N tal que

$$f^N(x) \in W_{loc}^s(x_0);$$

além disso, $f^{-N}(W_{loc}^s(x_0))$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^p$ contendo x e contida em $W^s(x_0)$. Seu espaço tangente em x é denotado por $T_x W^s(x_0)$ e é dado por

$$T_x W^s(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \sup_{n \geq 0} |Df^n(x)\xi| < \infty\}$$

Prova:

$W_{loc}^s(x_0)$ é imagem da aplicação C^1 $v(\xi)$ definida para ξ em $\mathcal{R}(P)$, com $|\xi| < \Delta/4K$. Pela Proposição 4.1, v é 1-1. Também da prova da proposição $PDv(\xi) = P$ e assim $Dv(\xi)$ é de posto máximo para todo ξ . Portanto, $W_{loc}^s(x_0)$ é na verdade uma subvariedade de dimensão igual ao posto de P .

Segue da Proposição 4.1 que se $x \in W_{loc}^s(x_0)$ então para $n \geq 0$

$$|f^n(x) - x_0| \leq \Delta.$$

Mas então segue do Lema 4.1 que $|f^n(x) - x_0| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo que $x \in W^s(x_0)$. Portanto,

$$W_{loc}^s(x_0) \subset W^s(x_0)$$

Mais geralmente, se $f^N(x) \in W_{loc}^s(x_0)$ para algum N então pelo que acabamos de provar $f^N(x) \in W^s(x_0)$ e assim $x \in W^s(x_0)$, pois de sua definição $W^s(x_0)$ é claramente um conjunto invariante.

Reciprocamente, suponha que $x \in W^s(x_0)$. Então existe N tal que

$$|f^n(x) - x_0| < \Delta/4K^2 \quad \text{para } n \geq N$$

Isto implica que

$$|f^n(f^N(x)) - x_0| < \Delta/4K^2 < \Delta \quad \text{para } n \geq 0$$

Em particular, $\xi = P(f^N(x) - x_0)$ satisfaz $|\xi| < \Delta/4K$. Segue da Proposição 4.1 (i) que $f^N(x) = v(\xi)$ com $\xi = P(f^N(x) - x_0)$. Logo $f^N(x) \in W_{loc}^s(x_0)$.

Seja $x \in W^s(x_0)$. Então do que acabamos de provar existe um inteiro N tal que $f^N(x) \in W_{loc}^s(x_0)$. Assim $f^{-N}(W_{loc}^s(x_0))$ contém x e é uma subvariedade de $\mathbf{R}^p$, pois f^{-N} é um difeomorfismo e está contido em $W^s(x_0)$ pela primeira parte. Denotamos seu espaço tangente em x por $T_x W^s(x_0)$ e então temos,

$$T_x W^s(x_0) = Df^{-N}(f^N(x))\{T_{f^N(x)} W_{loc}^s(x_0)\} \quad (4.12)$$

Agora, para qualquer y em $W_{loc}^s(x_0)$, $y = v(\xi)$ para algum $\xi \in \mathcal{R}(P)$, $|\xi| < \Delta/4K$ e

$$T_y W_{loc}^s(x_0) = \mathcal{R}(Dv(\xi)) = \mathcal{R}(Z_0(\xi))$$

onde $Z_n(\xi)$ é a única solução de (4.9), a qual é limitada em $\mathbf{Z}^+$ e satisfaz $PZ_0(\xi) = P$. Usando (4.4) e (4.7), vemos que (4.9) pode ser reescrito como

$$Z_{n+1} = Df(f^n(y))Z_n$$

Como $f^n(y) \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$, segue como na prova da Proposição 3.1 que a equação variacional

$$u_{n+1} = Df(f^n(y))u_n \quad (4.13)$$

tem uma dicotomia exponencial com projeções P_n tendo o mesmo posto que P . Para qualquer vetor fixado η , $Z_n(\xi)\eta$ é uma solução de (4.13), limitada em $\mathbf{Z}^+$. Então pela Proposição 1.2

$$Z_0(\xi)\eta \in \mathcal{R}(P_0)$$

Isto ocorre para todo η , logo

$$\mathcal{R}(Z_0(\xi)) \subset \mathcal{R}(P_0)$$

Mas, como $PZ_0(\xi) = P$, $Z_0(\xi)$ tem o mesmo posto de P , e portanto, o mesmo posto de P_0 . Logo,

$$\mathcal{R}(Z_0(\xi)) = \mathcal{R}(P_0)$$

Assim, usando a Proposição 1.2 e o fato que a matriz de transição para (4.13) é $Df^{n-m}(f^m(y))$, temos

$$T_y W_{loc}^s(x_0) = \mathcal{R}(P_0) = \{\xi \in \mathbf{R}^p : \sup_{n \geq 0} |Df^n(y)\xi| < \infty\}$$

Então usando (4.12), temos

$$T_x W^s(x_0) = \{Df^{-N}(f^N(x))\xi : \xi \in \mathbf{R}^p, \sup_{n \geq 0} |Df^n(f^N(x))\xi| < \infty\}$$

Mas,

$$Df^n(f^N(x))\xi = Df^{n+N}(x)Df^{-N}(f^N(x))\xi$$

portanto,

$$T_x W^s(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \sup_{n \geq 0} |Df^{n+N}(x)\xi| < \infty\}$$

que é claramente igual a

$$\{\xi \in \mathbb{R}^p : \sup_{n \geq 0} |Df^n(x)| \xi < \infty\}$$

■

Observação 4.1 *Seja x_0 um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo C^1 $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Definimos a variedade instável global de x_0 ao conjunto*

$$W^u(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^p : f^n(x) \rightarrow x_0 \text{ quando } n \rightarrow -\infty\}$$

Analogamente à Proposição 4.1 podemos provar a existência de uma aplicação C^1 $w : \{\xi \in \mathcal{N}(P) : |\xi| < \Delta/4K\} \rightarrow \mathbb{R}^p$ com a propriedade que $x = w(\xi)$ é o único x tal que

$$(I - P)(x - x_0) = \xi$$

$$|f^n(x) - x_0| \leq \Delta \text{ para } n \leq 0$$

e também com propriedades análogas a (ii), (iii) e (iv). Então como na Proposição 4.2 podemos mostrar que $x \in W^u(x_0)$ se, e somente se, existe um inteiro N tal que $f^N(x) \in W_{loc}^u(x_0)$, onde este último é a variedade local instável, isto é, a imagem da aplicação w . Além disso, se definirmos $T_x W^u(x_0)$ como o espaço tangente a $f^{-N}(W^u(x_0))$ em x , então

$$T_x W^u(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \sup_{n \leq 0} |Df^n(x)\xi| < \infty\}$$

Teorema 4.1 *Seja x_0 um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo C^1 $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ e sejam $W^s(x_0)$, $W^u(x_0)$ as variedades estável e instável global de x_0 . Então y_0 é um ponto homoclínico com respeito a x_0 se, e somente se $y_0 \neq x_0$ e*

$$y_0 \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$$

y_0 é transversal (de acordo com a Definição 3.3) se, e somente se,

$$T_{y_0} W^s(x_0) \cap T_{y_0} W^u(x_0) = \{0\}$$

Prova:

O fato que y_0 é um ponto homoclínico (de acordo com a Definição 3.2) se, e somente se, $y_0 \neq x_0$ e $y_0 \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ segue diretamente da definição. Agora, a solução u_n da equação variacional (3.3) satisfazendo $u_0 = \xi$ é dada por $u_n = Df^n(y_0)\xi$. Claramente então u_n é limitada em $\mathbf{Z}$ se, e somente se,

$$\xi \in T_{y_0}W^s(x_0) \cap T_{y_0}W^u(x_0)$$

Assim, (3.3) não tem uma solução não trivial limitada em $\mathbf{Z}$, isto é, y_0 é um ponto homoclínico transversal de acordo com a Definição 3.3 se, e somente se,

$$T_{y_0}W^s(x_0) \cap T_{y_0}W^u(x_0) = \{0\}.$$

■

Teorema 4.2 *Próximo a qualquer ponto homoclínico transversal existem infinitos outros pontos homoclínicos transversais.*

De fato,

Seja y_0 um ponto homoclínico transversal com respeito a um ponto fixo hiperbólico x_0 .

Seja $\Delta > 0$ como Proposição 4.1. Na prova do Teorema 3.1 tome $r = m - 1$ e $p_1 = 0$. Escolha N_1 tal que

$$|f^n(y_0) - x_0| \leq \frac{|x_0 - y_0|}{2} \quad \text{se } |n| > N_1$$

Também escolha $\epsilon > 0$ tal que ele satisfaça às condições adicionais

$$\epsilon \leq \Delta$$

$$\epsilon \leq \frac{|x_0 - y_0|}{4}$$

$$\epsilon \leq \frac{1}{2} \min\{|f^i(y_0) - y_0| : 0 < |i| \leq N_1\}$$

Seja q um inteiro positivo e considere a bisequência em $\mathcal{I}_m$

$$a = (\dots, m, m, 1, \dots, 1, m, m, \dots)$$

onde existem q 1's e a_0 é o primeiro 1. Pelo shadowing lemma existe uma única órbita que ϵ -shadows a pseudo-órbita formada pelos segmentos

$$\dots, C_m, C_{a_0} = C_1, \dots, C_1, C_m, \dots$$

Seja $x^{(q)}$ o ponto na órbita que 'sombreia' o ponto médio de y_0 de

$$C_{a_0} = C_1 = \{f^{-N}(y_0), \dots, y_0, \dots, f^N(y_0)\}$$

Então

$$|x^{(q)} - y_0| < \epsilon$$

Como

$$C_m = \{x_0, \dots, x_0, \dots, x_0\}$$

para $|n|$ suficientemente grande

$$|f^n(x^{(q)}) - x_0| < \epsilon \leq \Delta$$

Logo, pelo Lema 4.1, $f^n(x^{(q)}) \in W^s(x_0)$ para $n > 0$ suficientemente grande. Como $W^s(x_0)$ é invariante, isto significa que $x^{(q)} \in W^s(x_0)$. Analogamente provamos que $x^{(q)} \in W^u(x_0)$. Portanto,

$$x^{(q)} \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$$

Também como $|x^{(q)} - y_0| < \epsilon$ e $|x_0 - y_0| \geq 4\epsilon$, $x^{(q)} \neq x_0$. Logo $x^{(q)}$ é um ponto homoclínico.

Que a equação variacional

$$u_{n+1} + Df^n(x^{(q)})u_n$$

tem uma dicotomia exponencial segue da Observação 2.2 (ϵ e δ podem ser tomados menores para assegurar isto). Então $x^{(q)}$ é um ponto homoclínico transversal.

Agora, cada ponto na órbita de $x^{(q)}$ ϵ -shadows x_0 ou um dos pontos $f^i(y_0)$, $|i| \leq N$. Nossas hipóteses sobre ϵ e N_1 implicam que se um ponto ϵ -shadows x_0 ou $f^i(y_0)$ onde $0 < |i| \leq N$, então ele não pode ϵ -shadows y_0 . Na verdade, existem exatamente q pontos na órbita de $x^{(q)}$ que ϵ -shadows y_0 . Portanto, se $q_1 \neq q_2$ as órbitas de $x^{(q_1)}$ e $x^{(q_2)}$ não se intersectam.

Portanto, mostramos que a bola de raio ϵ centrada em y_0 contém uma quantia enumerável de pontos homoclínicos transversais, nenhum deles está na órbita de qualquer outro. ■

Teorema 4.3 *Se o difeomorfismo C^1 $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ tem um ponto homoclínico transversal e $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ é outro difeomorfismo que está C^1 -próximo a f , então g também tem um ponto homoclínico transversal.*

De fato, Seja x_0 um ponto fixo hiperbólico para f . Então existem constantes K, α e um projeção P tal que as desigualdades (3.1) ocorrem. Suponha também que y_0 seja um ponto homoclínico transversal com respeito a x_0 , ou seja, $f^n(y_0) \rightarrow x_0$ quando $|n| \rightarrow \infty$ e a equação variacional (3.3) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbb{Z}$ com constantes que podemos assumir serem K, α também.

Seja $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ um difeomorfismo C^1 tal que

$$|g(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{para } x \in S \quad (4.14)$$

$$|Dg(x) - Df(x)| \leq \epsilon \quad \text{para } |x - y| \leq \Delta_0, y \in S \quad (4.15)$$

onde $S = \{x_0\} \cup \{f^n(y_0) : n \in \mathbb{Z}\}$, Δ_0 é uma constante positiva e as condições serão determinadas abaixo.

Primeiro mostramos que quando ϵ é suficientemente pequeno, g tem um ponto fixo hiperbólico próximo a x_0 . Fazemos isto mostrando que a equação diferença

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (4.16)$$

tem uma única solução x_n próxima a x_0 . Se colocarmos

$$x_n = x_0 + z_n,$$

então z_n será uma solução da equação

$$z_{n+1} = Df(x_0)z_n + G(z_n), \quad (4.17)$$

onde

$$G(z) = f(x_0 + z) - f(x_0) - Df(x_0)z + g(x_0 + z) - f(x_0 + z)$$

Vemos que

$$|G(0)| = |g(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

e que quando $|z| \leq \Delta_0$,

$$\begin{aligned} |DG(z)| &\leq |Df(x_0 + z) - Df(x_0)| + |Dg(x_0 + z) - Df(x_0 + z)| \\ &\leq w(|z|) + \epsilon \end{aligned}$$

onde $w(\cdot)$ é o módulo de continuidade de $Df(x)$ no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^p : |x - y| \leq \Delta_0 \text{ para algum } y \in S\}$.

Assumamos que

$$\Delta(\epsilon) = 2K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1}\epsilon \leq \Delta_0 \quad (4.18)$$

Então se

$$2K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1}(w(\Delta(\epsilon)) + \epsilon) \leq 1 \quad (4.19)$$

segue da Proposição 1.4 que a equação (4.17) tem uma única solução z_n tal que

$$|z_n| \leq \Delta(\epsilon)$$

para todo n . Isto significa que $x_n = x_0 + z_n$ é a única solução da equação (4.16) tal que

$$|x_n - x_0| \leq \Delta(\epsilon)$$

para todo n . Mas x_{n+1} claramente é também uma solução. Pela unicidade devemos ter $x_{n+1} = x_n$ para todo n . Assim, x_n é, na verdade, uma constante x_0' . x_0' é então um ponto fixo de g satisfazendo

$$|x_0' - x_0| \leq \Delta(\epsilon)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |Dg(x_0') - Df(x_0)| &\leq |Dg(x_0') - Df(x_0')| + |Df(x_0') - Df(x_0)| \\ &\leq \epsilon + w(\Delta(\epsilon)) \end{aligned}$$

Então segue da Proposição 1.5 com $\delta = \alpha/2$ que se (4.19) é satisfeita e também

$$2Ke^{\alpha}(\epsilon^{-\frac{\alpha}{2}} + 1)(\epsilon^{\frac{\alpha}{2}} - 1)^{-1}[\epsilon + w(\Delta(\epsilon))] \leq 1 \quad (4.20)$$

a equação linear

$$u_{n+1} = Dg(x_0')u_n$$

tem uma dicotomia exponencial em $\mathbb{Z}$ com constantes K_1 e $\alpha/2$ onde $K_1 = 2K(1 + e^{-\frac{\alpha}{2}})(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}})^{-1}$. Então a Observação 1 nos diz que os autovalores de $Dg(x_0')$ estão fora do círculo unitário e que se P' é a projeção com imagem a soma dos autoespaços generalizados correspondentes aos autovalores dentro do círculo unitário e com núcleo a soma dos autoespaços generalizados correspondentes aos autovalores fora do círculo unitário, as desigualdades

$$|Dg^n(x_0')P'| \leq K_1 e^{-\frac{\alpha}{2}n} \quad (n \geq 0)$$

$$|Dg^n(x_0')(I - P')| \leq K_1 e^{\frac{\alpha}{2}n} \quad (n \leq 0)$$

são satisfeitas. Logo x_0' é certamente um ponto fixo hiperbólico de g .

Mostraremos agora que para ϵ suficientemente pequeno, g tem um ponto homoclínico transversal y'_0 próximo a y_0 . Faremos isto encontrando uma solução x_n da equação (4.16) próxima a $f^n(y_0)$. Se escrevermos

$$x_n = f^n(y_0) + z_n$$

então z_n deve ser uma solução da equação

$$z_{n+1} = Df(f^n(y_0))z_n + G_n(z_n) \quad (4.21)$$

onde

$$G_n(z) = f(f^n(y_0) + z) - f(f^n(y_0)) - Df(f^n(y_0))z + g(f^n(y_0) + z) - f(f^n(y_0) + z)$$

Note que

$$|G_n(0)| = |g(f^n(y_0)) - f(f^n(y_0))| \leq \epsilon$$

e se $|z| \leq \Delta_0$,

$$\begin{aligned} |DG_n(z)| &\leq |Df(f^n(y_0) + z) - Df(f^n(y_0))| \\ &\quad + |Dg(f^n(y_0) + z) - Df(f^n(y_0) + z)| \\ &\leq w(|z|) + \epsilon \end{aligned}$$

Então segue da Proposição 1.4 que se as condições (4.18), (4.19) estão satisfeitas, a equação (4.21) tem uma única solução z_n tal que

$$|z_n| \leq \Delta(\epsilon)$$

para todo n .

Escolha $\Delta_1 > 0$ tal que

$$K_1 = 4K_1(1 + e^{-\frac{\alpha}{2}})(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}})^{-1}w(\Delta_1) \leq 1$$

e assumamos que

$$8K_1(1 + e^{-\frac{\alpha}{2}})(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}})^{-1}\epsilon \leq 1 \quad (4.22)$$

$$3\Delta(\epsilon) \leq \Delta_1 \quad (4.23)$$

Então se $|x - x'_0| \leq \Delta_1$,

$$\begin{aligned} |Dg(x) - Dg(x'_0)| &\leq |Dg(x) - Df(x)| + |Df(x) - Df(x'_0)| \\ &\quad + |Df(x'_0) - Dg(x'_0)| \\ &\leq \epsilon + w(\Delta_1) + \epsilon \\ &\leq \gamma_1 = \frac{1}{2}K_1^{-1}(1 + e^{-\frac{\alpha}{2}})^{-1}(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}}). \end{aligned}$$

Isto significa que podemos aplicar a Proposição 4.1 e o Lema 4.1 a g e x'_0 com os valores K_1 , $\alpha/2$, Δ_1 , γ_1 no lugar de K , α , Δ , γ .

Existe um inteiro positivo N tal que

$$|f^n(y_0) - x_0| \leq \frac{\Delta_1}{3}$$

para $|n| \geq N$. Então se $|n| \geq N$,

$$\begin{aligned} |g^n(y'_0) - x'_0| &\leq |g^n(y'_0) - f^n(y_0)| + |f^n(y_0) - x_0| + |x'_0 - x_0| \\ &\leq \Delta(\epsilon) + \frac{\delta_1}{3} + \Delta(\epsilon) \leq \Delta_1 \end{aligned}$$

Segue então do Lema 4.1 que $g^N(y'_0) \in W^s(x'_0)$ e portanto que $y'_0 \in W^s(x'_0)$. Analogamente, $y'_0 \in W^u(x'_0)$. Se assumirmos

$$2\Delta(\epsilon) < |y_0 - x_0|, \quad (4.24)$$

então

$$|y'_0 - x'_0| \geq |y_0 - x_0| - |y'_0 - y_0| - |x'_0 - x_0| \geq |y_0 - x_0| - 2\Delta(\epsilon) > 0.$$

Assim, $y'_0 \neq x'_0$ e y'_0 é portanto um ponto homoclínico com respeito à x'_0 .

Além disso, para todo n

$$\begin{aligned} |Dg(g^n(y'_0)) - Df(f^n(y_0))| &\leq |Dg(g^n(y'_0)) - Df(g^n(y'_0))| \\ &\quad + |Df(g^n(y'_0)) - Df(f^n(y_0))| \\ &\leq \epsilon + w(\Delta(\epsilon)) \end{aligned}$$

Como (3.3) tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$ com constantes K, α e (4.19), (4.20) são satisfeitas, segue da Proposição 1.5 que a equação variacional

$$u_{n+1} = Dg(g^n(y'_0))u_n$$

tem uma dicotomia exponencial em $\mathbf{Z}$. Portanto, y'_0 é um ponto homoclínico transversal.

Concluindo, mostramos que se $g : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ é um difeomorfismo satisfazendo (4.14), (4.15), onde ϵ satisfaz (4.18), (4.19), (4.20), (4.22), (4.23) e (4.24), então g tem um ponto homoclínico transversal. ■

Bibliografia

- [1] D. V. ANOSOV, Geodesic Flows on Compact Riemannian Manifolds of Negative Curvature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 90 (1967); English transl., *Amer. Math. Soc. Transl.* (1969).
- [2] J. GUCKENHEIMER, J. MOSER E S. NEWHOUSE, *Dynamical Systems*, Birkhauser, Boston (1980).
- [3] J. MOSER, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1973).
- [4] Z. NITECKI, *Differentiable Dynamics - An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms*. The M.I.T. Press (1971).
- [5] K. J. PALMER, Exponential Dichotomies, the Shadowing Lemma and Transversal Homoclinic Points. *Dynamics Reported*. Volume 1, (1988), 265-306.
- [6] K. J. PALMER, Exponential Dichotomy and Transversal Homoclinic Points. *J. Differential Equations*, 55, (1984), 225-256.
- [7] C. ROBINSON, Stability Theorems and Hyperbolicity in Dynamical Systems. *Rocky Mountains J. Math.*, 35, (1983), 98-103.
- [8] S. SMALE, Diffeomorphisms with Many Periodic Points. *Differential and Combinatorial Topology*, S. Cairns (ed.), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (1965), 63-80.
- [9] S. SMALE, Differentiable Dynamical Systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, (1967), 747-817.