Funções Estritamente Positivas Definidas em Esferas

JAIR CUNHA FILHO

Orientador: PROF. DR. VALDIR ANTONIO MENEGATTO

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de “Mestre em Ciências - Área: Matemática”.

USP - São Carlos

1995

À Rute, Eulália e Guiomar

Agradecimentos ¹

Ao Dr. Valdir Antonio Menegatto, pelo incentivo, pelos conselhos e pela sua dedicação como orientador.

À EFEI (Escola Federal de Engenharia de Itajubá), pela oportunidade e apoio dados.

Aos professores do ICMSC que tão bem procuraram me informar e me formar.

A meus colegas de mestrado e todos os outros com os quais convivi no ICMSC.

À minha mãe, Dona Eulália, pelas orações e pelos conselhos.

A meu pai, Jair Cunha, in memoriam.

Aos meus sogros, Sr. Iado e Dona Tereza, pelas orações.

Às minhas amadas esposa Rute e filhas Eulália e Guiomar, pelo carinho, amor, compreensão e conforto nos momentos difíceis.

Finalmente, agradeço a Deus, pois sem ele nada seria possível.

¹Este trabalho teve suporte financeiro do PICD/CAPES.

Abstract

We study strictly positive definite functions on spheres in Euclidean spaces. Such functions can be used for solving certain interpolation problems on spheres. Since positive definite functions were already characterized by Schoenberg, our problem is therefore to determine what positive definite functions are actually strictly positive definite. Our approach is based upon a connection between the interpolation problem on spheres and that of multivariate polynomial interpolation. Two different methods are presented. The first uses the so-called “de Boor-Ron spaces” and the second one uses the fact that harmonic polynomials are in the null-space of the Laplacian. The key references are [12] and [13].

Resumo

Neste trabalho, estudamos funções estritamente positivas definidas em esferas no espaço euclidiano m -dimensional. Tais funções podem ser usadas para resolver certos problemas de interpolação em esferas. Uma vez que as funções positivas definidas já foram caracterizadas por Schoenberg, o problema reduz-se em determinar quais funções positivas definidas são estritamente positivas definidas. Nosso estudo baseia-se em uma conexão entre o problema de interpolação em esferas e interpolação polinomial em várias variáveis. Dois métodos distintos são utilizados. O primeiro utiliza propriedades do “Espaço de de Boor-Ron” e o segundo baseia-se no fato de polinômios harmônicos estarem no núcleo do operador laplaciano. As referências principais aqui são [12] e [13].

Índice

1	Introdução	1
1.1	O Problema de Interpolação	1
1.2	Matrizes Positivas Definidas	2
1.3	Polinômios Ultraesféricos e Harmônicos Esféricos	6
1.4	Funções Positivas Definidas em S^m	13
1.5	O Espaço de de Boor-Ron	14
2	Positividade Estrita em S^m	18
2.1	Positividade Estrita em S^m	18
2.2	Positividade Estrita em S^m via o Espaço de de Boor-Ron	22
3	Positividade Estrita em S^m: Um Tratamento Algébrico	30
3.1	Espaços Totais	30
3.2	Positividade Estrita em S^m	33
	Bibliografia	40

Capítulo 1

Introdução

1.1 O Problema de Interpolação

Sejam X um conjunto, $E = \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subset X$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. O termo interpolação refere-se ao problema de encontrar uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua que satisfaz as condições (de interpolação):

$$\varphi(\theta_j) = \lambda_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.1)$$

Um procedimento de comprovado sucesso no caso em que $X = \mathbb{R}^m$ e d é a métrica usual em $\mathbb{R}^m$, consiste em procurar soluções pertencentes ao espaço gerado pelas funções

$$\theta \in X \longrightarrow \phi(d(\theta, \theta_j)), \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde ϕ é uma função previamente selecionada. Veja, por exemplo [9].

Uma vez impostas as condições (1.1), chega-se ao sistema linear

$$\sum_{i=1}^n a_i \phi(d(\theta_i, \theta_j)) = \lambda_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde os coeficientes $a_1, \dots, a_n$ estão a determinar. A matriz do sistema, isto é, a matriz A com entradas

$$A_{ij} = \phi(d(\theta_i, \theta_j))$$

é chamada *matriz de interpolação*. Obviamente, a não singularidade de A implica que o sistema acima, e portanto o problema de interpolação, tem uma única solução, quaisquer que sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Note que a não singularidade de A depende da métrica d e da escolha da função ϕ .

Neste trabalho, X será a esfera unitária S^m em $\mathbb{R}^{m+1}$, isto é,

$$S^m := \{(\theta_1, \dots, \theta_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \theta_1^2 + \dots + \theta_{m+1}^2 = 1\}$$

e d será a distância geodésica d_m , dada por

$$d_m(\theta_1, \theta_2) = \arccos \langle \theta_1, \theta_2 \rangle, \quad \theta_1, \theta_2 \in S^m,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^{m+1}$. Note que $0 \leq d_m(\theta_1, \theta_2) \leq \pi$, $\theta_1, \theta_2 \in S^m$. Uma completa discussão da geometria do espaço (S^m, d_m) pode ser encontrada em [11].

A função ϕ será escolhida, de modo que as matrizes de interpolação sempre sejam simétricas e tenham autovalores não negativos (veja seção a seguir).

1.2 Matrizes Positivas Definidas

Definição 1.1 Uma matriz simétrica $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é dita ser *não negativa definida* se

$$v^t A v := \sum_{i,j=1}^n v_i v_j A_{ij} \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

onde v é o vetor coluna de coordenadas $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2 Uma matriz simétrica $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é dita ser *positiva definida* se

$$v^t A v := \sum_{i,j=1}^n v_i v_j A_{ij} > 0, \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.3)$$

Uma discussão detalhada de matrizes do tipo acima pode ser encontrada em [5]. Nós destacamos as seguintes propriedades:

- (i) Uma matriz simétrica A é não negativa definida se e somente se seus autovalores são não negativos.
- (ii) Uma matriz simétrica A é positiva definida se e somente se seus autovalores são positivos.
- (iii) Uma matriz simétrica A é positiva definida se e somente se existe uma matriz não singular C tal que $A = C^t C$, onde C^t é a transposta de C .

Segue de (ii) que uma matriz não negativa definida é positiva definida se e somente se ela é não singular.

A seguir, caracterizamos a positividade definida de algumas matrizes que surgirão ao longo deste trabalho:

Teorema 1.1 *Sejam $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\theta_1, \dots, \theta_n$ pontos em $\mathbb{R}^m$. Seja A a matriz $n \times n$ com entradas $A_{jk} = \exp(-\|\theta_j - \theta_k\|_2^2)$, onde $\|\cdot\|_2$ é a norma usual em $\mathbb{R}^m$. Então,*

- (i) *A é não negativa definida;*
- (ii) *Se os pontos $\theta_1, \dots, \theta_n$ são distintos, então A é positiva definida.*

Prova: Definamos $I = \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\sum_{r=1}^m [t_r - i(x_r - y_r)]^2) dt$, onde $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ e $t = (t_1, \dots, t_m)$. Então, temos que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\prod_{r=1}^m \exp(-[t_r - i(x_r - y_r)]^2) \right) dt \\ &= \prod_{r=1}^m \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-[t_r - i(x_r - y_r)]^2) dt_r \right). \end{aligned}$$

Considerando a integral de Cauchy (veja [3]) da função analítica $f(z) = e^{-z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, encontramos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-[t_r - i(x_r - y_r)]^2) dt_r = \pi^{1/2}.$$

Logo, $I = \pi^{m/2}$, ou seja,

$$\exp(-\|x - y\|^2) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\|t\|_2^2) \exp(2i\langle t, x \rangle) \exp(-2i\langle t, y \rangle) dt.$$

Seja $v = (v_1, \dots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n v_j v_k A_{jk} &= \sum_{j,k=1}^n v_j v_k \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\|t\|_2^2) \exp(2i\langle t, \theta_j \rangle) \exp(-2i\langle t, \theta_k \rangle) dt \\ &= \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\|t\|_2^2) \left[\sum_{j,k=1}^n v_j v_k \exp(2i\langle t, \theta_j \rangle) \exp(-2i\langle t, \theta_k \rangle) \right] dt \\ &= \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\|t\|_2^2) \left| \sum_{j=1}^n v_j \exp(2i\langle t, \theta_j \rangle) \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Como o integrando da última expressão é uma função de t , contínua e não negativa, segue que

$$\sum_{j,k=1}^n v_j v_k A_{jk} \geq 0.$$

Assim, A é não negativa definida. Suponhamos, agora, que $\theta_1, \dots, \theta_n$ são distintos. Fazendo $g(t) = \sum_{j=1}^n v_j \exp(2i\langle t, \theta_j \rangle)$, devemos mostrar que se $v \neq 0$, então $g \neq 0$, ou, equivalentemente, que se $g \equiv 0$, então $v = 0$. Como os θ_j são distintos, existe $x \in \mathbb{R}^m$, tal que os números complexos $w_j = \exp(2i\langle x, \theta_j \rangle)$, $j = 1, \dots, n$ são todos distintos. Assim, se $g \equiv 0$, então $g(lx) = 0$, para $l = 0, 1, \dots, n-1$, produzindo o sistema linear homogêneo

$$\sum_{j=1}^n v_j w_j^l = 0, \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

O determinante da matriz desse sistema é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{n-1} & w_2^{n-1} & \dots & w_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (w_i - w_j) \neq 0.$$

Portanto, $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$, isto é, $v = 0$. ■

Corolário 1.1 *Sejam $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\theta_1, \dots, \theta_n$ pontos em $\mathbb{R}^m$. Seja A a matriz $n \times n$ com entradas $A_{jk} = \exp(-\alpha \|\theta_j - \theta_k\|^2)$, $\alpha > 0$. Então,*

- (i) *A é não negativa definida.*
- (ii) *Se os pontos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ são distintos, então A é positiva definida.*

Definição 1.3 *Sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, com $A = (A_{ij})$ e $B = (B_{ij})$. O produto de Hadamard (ou produto de Schur) $A \circ B$ de A e B é dado por*

$$A \circ B := (A_{ij} B_{ij}).$$

Aqui, temos o seguinte teorema, cuja prova pode ser vista em [5].

Teorema 1.2 (Desigualdade de Oppenheim) *Se $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ são não negativas definidas, então $\det A \cdot \prod_{i=1}^n B_{ii} \leq \det(A \circ B)$. Em particular,*

- (i) *$A \circ B$ é não negativa definida;*
- (ii) *$A \circ B$ é positiva definida se A é positiva definida e $B_{ii} \neq 0$, para todo i .*

Outros resultados, que também podem ser vistos em [5], são:

Teorema 1.3 *Sejam $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}^m$ e considere a matriz A com entradas $A_{ij} = \langle \theta_i, \theta_j \rangle$. Então,*

- (i) *A é não negativa definida;*
- (ii) *A é positiva definida se e somente se $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ é linearmente independente.*

Teorema 1.4 *Sejam $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}^m$ e considere a matriz A com entradas $A_{ij} = \exp(\langle \theta_i, \theta_j \rangle)$. Então,*

- (i) *A é não negativa definida;*
- (ii) *Se os pontos $\theta_1, \dots, \theta_n$ são distintos, então A é positiva definida.*

1.3 Polinômios Ultraesféricos e Harmônicos Esféricos

Os polinômios de Jacobi (veja [15]) são polinômios obtidos através do processo de ortogonalização da base $\{1, x, x^2, \dots\}$ do espaço de todos os polinômios com coeficientes reais, em relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx.$$

Estes polinômios, aqui denotados por $P_k^{\alpha, \beta}$, são normalizados pela relação

$$P_k^{\alpha, \beta}(1) = \binom{k + \alpha}{k}.$$

Definição 1.4 Seja $\lambda > -\frac{1}{2}$. O *polinômio ultraesférico (de Gegenbauer)* $P_k^\lambda(x)$ é o polinômio dado por

$$P_k^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda + 1/2) \Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda) \Gamma(k + \lambda + 1/2)} P_k^{\lambda-1/2, \lambda-1/2}(x).$$

Em vista da normalização dos polinômios de Jacobi, cada $P_k^\lambda(x)$ está normalizado da seguinte forma:

$$P_k^\lambda(1) = \frac{\Gamma(\lambda + 1/2) \Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda) \Gamma(k + \lambda + 1/2)} P_k^{\lambda-1/2, \lambda-1/2}(1) = \binom{2\lambda + k - 1}{k}.$$

Um fato interessante a respeito dos polinômios ultraesféricos é que os polinômios $P_k^1(x)$ são polinômios de Tchebychev de segunda espécie, $P_k^{1/2}(x)$ são polinômios de Legendre e $(k/2)P_k^0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} (k/2\lambda)P_k^\lambda(x)$ são polinômios de Tchebychev de primeira espécie.

Lembramos, ainda, que os polinômios ultraesféricos podem ser obtidos pelas expansões (veja [10] e [15]):

$$(1 - 2r \cos t + r^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k^\lambda(\cos t), \quad \lambda > 0 \quad (1.4)$$

e

$$\frac{1 - r \cos t}{1 - 2r \cos t + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{k}{2} P_k^0(\cos t) \quad (1.5)$$

Os seguintes resultados referentes aos polinômios ultraesféricos serão utilizados nos capítulos subsequentes. Sendo eles resultados clássicos, omitiremos as suas provas (veja [1],[8] e [15]).

(i) Fórmula de adição para polinômios ultraesféricos:

Para $\phi, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

$$P_k^\lambda(\cos \phi \cos \varphi + \sin \phi \sin \varphi \cos \psi) = \sum_{s=0}^k c_{k,\lambda,s} Q_k^s(\phi) Q_k^s(\varphi) P_s^{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \psi) \quad (1.6)$$

onde $c_{k,\lambda,s} > 0$ e $Q_k^s(\phi) = \sin^s \phi P_{k-s}^{\lambda+s}(\cos \phi)$, $0 \leq s \leq k$.

(ii) Se $\lambda > \nu > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, existem coeficientes positivos $c_{\lambda,\nu,n,k}$ tais que:

$$P_n^\lambda(\cos t) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} c_{\lambda,\nu,n,k} P_{n-2k}^\nu(\cos t) \quad (1.7)$$

Definição 1.5 Um *harmônico esférico* de grau k em $\mathbb{R}^m$ é a restrição de um polinômio em m variáveis, homogêneo de grau k e harmônico, à esfera unitária S^{m-1} em $\mathbb{R}^m$.

Assim, se $h_k(x)$ é um polinômio de grau k homogêneo e harmônico em $\mathbb{R}^m$, então o harmônico esférico de grau k em $\mathbb{R}^m$ é dado por

$$S_k(\xi) := \frac{1}{r^k} h_k(r\xi) = h_k(\xi) \quad (1.8)$$

onde $x = r\xi$, com $r = \|x\|_2$ e $\|\xi\|_2 = 1$.

A relação direta entre os polinômios ultraesféricos e os harmônicos esféricos é apresentada no Teorema 1.5. Os lemas abaixo são preparatórios para a sua demonstração. Observamos que Π^{m+1} denota o espaço de todos os polinômios em $m+1$

variáveis, Π_k^{m+1} o subespaço de Π^{m+1} formado por polinômios de grau menor ou igual a k , $\Pi_k^{\circ, m+1}$ o espaço de todos os polinômios em $m+1$ variáveis que são homogêneos de grau k e, $H_k^{\circ, m+1}$, o subespaço de $\Pi_k^{\circ, m+1}$ formado por polinômios harmônicos em $\mathbb{R}^{m+1}$.

Lema 1.1 *A dimensão de $H_k^{\circ, m+1}$ é*

$$N(m+1, k) := \binom{m+k}{k} - \binom{m+k-2}{k-2}.$$

Prova: Os elementos de $\Pi_k^{\circ, m+1}$ são combinações lineares de polinômios da forma $cx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$, onde $c \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1} \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m+1} = k$. Logo, a dimensão de $\Pi_k^{\circ, m+1}$ é exatamente igual ao número de conjuntos da forma $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}\}$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1} \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1 + \dots + \alpha_{m+1} = k$. Equivalentemente, a dimensão de $\Pi_k^{\circ, m+1}$ é o número de combinações com repetição de $m+1$ elementos tomados k a k ($CR(m+1, k)$). Assim,

$$\dim \Pi_k^{\circ, m+1} = CR(m+1, k) = \binom{m+1+k-1}{k} = \binom{m+k}{k}.$$

Consideremos, agora, o produto interno em $\Pi_k^{\circ, m+1}$ dado por $\langle p, q \rangle = p(D)(q)$ onde $D := (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_{m+1})$. Consideremos, ainda, o subespaço $\Gamma.\Pi_{k-2}^{\circ, m+1}$ de $\Pi_k^{\circ, m+1}$ dado por

$$\Gamma.\Pi_{k-2}^{\circ, m+1} := \{\Gamma p : p \in \Pi_{k-2}^{\circ, m+1}\},$$

$$\Gamma : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

onde $\Gamma(x) = x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2$. Note, agora, que se $p \in H_k^{\circ, m+1}$, então $\Gamma(D)(p) = 0$ e, por conseguinte,

$$0 = (q(D)\Gamma(D))(p) = (\Gamma(D)q(D))(p) = ((\Gamma q)(D))(p), \quad q \in \Pi_{k-2}^{\circ, m+1},$$

ou seja, p é um elemento no complemento ortogonal $(\Gamma.\Pi_{k-2}^{\circ, m+1})^\perp$ de $\Gamma.\Pi_{k-2}^{\circ, m+1}$ em $\Pi_k^{\circ, m+1}$. Em resumo, $(H_k^{\circ, m+1})^\perp = \Gamma.\Pi_{k-2}^{\circ, m+1}$. Portanto,

$$\Pi_k^{\circ, m+1} = H_k^{\circ, m+1} \oplus \Gamma.\Pi_{k-2}^{\circ, m+1}.$$

Como a aplicação $\varphi : \Pi_{k-2}^{\circ, m+1} \rightarrow \Gamma \cdot \Pi_{k-2}^{\circ, m+1}$ dada por $\varphi(p) = \Gamma p$ é linear e bijetora, obtemos

$$\dim \Gamma \cdot \Pi_{k-2}^{\circ, m+1} = \binom{m+k-2}{k-2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \dim H_k^{\circ, m+1} &= \dim \Pi_k^{\circ, m+1} - \dim \Gamma \cdot \Pi_{k-2}^{\circ, m+1} \\ &= \binom{m+k}{k} - \binom{m+k-2}{k-2}. \end{aligned}$$

■

Segue do Lema 1.1 que o espaço dos harmônicos esféricos de grau k em $\mathbb{R}^{m+1}$ tem dimensão finita, uma vez que ele é formado pelas restrições dos polinômios de $H_k^{\circ, m+1}$ a S^m . Como a transformação linear $p \in H_k^{\circ, m+1} \rightarrow p|_{S^m}$ tem núcleo trivial, segue que a dimensão do espaço dos harmônicos esféricos de grau k em $\mathbb{R}^{m+1}$ é igual à dimensão de $H_k^{\circ, m+1}$.

Antes de iniciarmos o próximo lema, voltemos à equação (1.4). Diferenciando-a membro a membro em relação a r , obtemos

$$\frac{2r \cos t - 2r^2}{(1 - 2r \cos t + r^2)^{\lambda+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\lambda} r^k P_k^{\lambda}(\cos t).$$

Somando membro a membro com (1.4), vem

$$\frac{1 - r^2}{(1 - 2r \cos t + r^2)^{\lambda+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{\lambda} + 1 \right) r^k P_k^{\lambda}(\cos t).$$

Fazendo $(k/\lambda + 1)P_k^{\lambda}(\cos t) := Q_k^{\lambda}(\cos t)$, podemos escrever

$$\frac{1 - r^2}{(1 - 2r \cos t + r^2)^{\lambda+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Q_k^{\lambda}(\cos t). \quad (1.9)$$

Lema 1.2 *Seja $\{S_{k,j}\}_{j=1}^{N(m+1,k)}$ uma base ortonormal do espaço dos harmônicos esféricos de grau k em $\mathbb{R}^{m+1}$, em relação ao produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} f(\xi)g(\xi)dw_m,$$

onde w_m é a área de superfície de S^m . Então,

$$Q_k^\lambda(\langle \xi, \eta \rangle) = \sum_{j=1}^{N(m+1,k)} S_{k,j}(\xi) S_{k,j}(\eta), \quad \xi, \eta \in S^m.$$

Prova: Seja $H(x, \eta) := (1 - \|x\|_2^2)(1 - 2\langle x, \eta \rangle + \|x\|_2^2)^{-\lambda-1}$, com $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\|x\|_2 < 1$ e $\eta \in S^m$. Fazendo $x = r\xi$, com $r = \|x\|_2 < 1$ e $\xi \in S^m$ e usando (1.9), nós podemos escrever

$$H(x, \eta) = \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\langle \xi, \eta \rangle + r^2)^{\lambda+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Q_k^\lambda(\cos t) \quad (1.10)$$

onde t é o ângulo entre ξ e η . O coeficiente de r^k nesta expansão é um polinômio da forma

$$\begin{aligned} Q_k^\lambda(\cos t) &= A_0 \cos^k t + A_1 \cos^{k-2} t + A_2 \cos^{k-4} t + \dots \\ &= A_0 \langle \xi, \eta \rangle^k + A_1 \langle \xi, \eta \rangle^{k-2} + A_2 \langle \xi, \eta \rangle^{k-4} + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

A função $h_k(x, \eta) = A_0 \langle x, \eta \rangle^k + A_1 \langle x, \eta \rangle^{k-2} r^2 + A_2 \langle x, \eta \rangle^{k-4} r^4 + \dots$, $r = \|x\|_2$, é um polinômio homogêneo de grau k em x e, além disso,

$$h_k(x, \eta) = h_k(r\xi, \eta) = r^k Q_k^\lambda(\cos t).$$

Desse modo, a equação (1.10) fica na forma

$$H(x, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x, \eta). \quad (1.12)$$

Como $H(x, \eta)$ é harmônica em x , então $0 = \Gamma(D)(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(D)(h_k(x, \eta))$. Como o k -ésimo termo de $\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(D)(h_k(x, \eta))$ é um polinômio homogêneo de grau $k - 2$, obtemos

$$\Gamma(D)(h_k(x, \eta)) = 0, \quad k \geq 0.$$

Logo, $h_k(x, \eta)$ é harmônico em x , $k \geq 0$. Dessa forma, $h_k(\xi, \eta) = Q_k^\lambda(\cos t)$ é um harmônico esférico de grau k em ξ . Devido à simetria do produto interno em (1.11), h_k é também um harmônico esférico em η . Podemos, então, escrever

$$h_k(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{N(m+1,k)} c_j(\xi) S_{k,j}(\eta).$$

Como a base é ortonormal,

$$c_j(\xi) = \langle h_k(\xi, \eta), S_{k,j}(\eta) \rangle = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} h_k(\xi, \eta) S_{k,j}(\eta) dw_m = S_{k,j}(\xi).$$

A última igualdade acima é justificada da seguinte forma: considere a seguinte solução do problema de Dirichlet para o disco $D = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\|_2 \leq 1\}$ (veja [3]):

$$u(x) = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} S_{k,j}(y) H(x, y) dw_m.$$

Pela unicidade do problema de Dirichlet,

$$u(x) = S_{k,j}(x) = S_{k,j}(r\xi) = r^k S_{k,j}(\xi), \quad \|x\|_2 < 1$$

e, portanto

$$r^k S_{k,j}(\xi) = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} S_{k,j}(\eta) H(x, \eta) dw_m.$$

Usando (1.12), obtemos:

$$\begin{aligned} r^k S_{k,j}(\xi) &= \frac{1}{w_m} \int_{S^m} S_{k,j}(\eta) \sum_{i=0}^{\infty} h_i(x, \eta) dw_m \\ &= \frac{1}{w_m} \int_{S^m} S_{k,j}(\eta) \sum_{i=0}^{\infty} r^i h_i(\xi, \eta) dw_m. \end{aligned}$$

Comparando os termos em r^k , segue que

$$S_{k,j}(\xi) = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} S_{k,j}(\eta) h_k(\xi, \eta) dw_m. \quad (1.13)$$

Assim,

$$h_k(\xi, \eta) = Q_k^\lambda(\cos t) = \sum_{j=1}^{N(m+1,k)} S_{k,j}(\xi) S_{k,j}(\eta) \quad (1.14)$$

completando a prova. ■

Teorema 1.5 *Seja $\{S_{k,j}(\xi)\}_{j=1}^{N(m+1,k)}$ uma base ortonormal do espaço dos harmônicos esféricos de grau k em $\mathbb{R}^{m+1}$, em relação ao produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} f(\xi) g(\xi) dw_m$$

e fixe $\lambda = (m-1)/2$. Então, existem constantes $c_{k,\lambda}$ tais que

$$P_k^\lambda(\langle \xi, \eta \rangle) = \sum_{j=1}^{N(m+1,k)} c_{k,\lambda} S_{k,j}(\xi) S_{k,j}(\eta), \quad \xi, \eta \in S^m.$$

Prova: Se $\lambda > 0$ temos pelo Lema 1.2, que

$$Q_k^\lambda(\langle \xi, \eta \rangle) = \sum_{j=1}^{N(m+1,k)} S_{k,j}(\xi) S_{k,j}(\eta).$$

Logo,

$$P_k^\lambda(\cos t) = \sum_{j=1}^{N(m+1,k)} c_{k,\lambda} S_{k,j}(\xi) S_{k,j}(\eta),$$

onde $c_{k,\lambda} = (k/\lambda + 1)^{-1} = \lambda/(k + \lambda)$. Se $\lambda = 0$, note inicialmente que $N(2, k) = 2$ e $w_m = 2\pi$. Como os polinômios em duas variáveis $\text{Re}(x_2 + ix_1)^n$ e $\text{Im}(x_2 + ix_1)^n$ formam um conjunto linearmente independente e, além disso, são homogêneos de grau n e harmônicos, então obtemos que $S_{n,1}(\xi) = (1/\sqrt{\pi}) \cos n((\pi/2) - \xi)$ e $S_{n,2}(\xi) = (1/\sqrt{\pi}) \sin n((\pi/2) - \xi)$. Se $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $\eta = (\cos \phi, \sin \phi)$, segue imediatamente que

$$P_n^0(\langle \xi, \eta \rangle) = P_n^0(\cos(\theta - \phi)) = \pi \sum_{j=1}^2 S_{n,j}(\xi) S_{n,j}(\eta)$$

■

1.4 Funções Positivas Definidas em S^m

Seja g uma função real contínua definida em $[0, \pi]$. Dizemos que g é uma função *positiva definida* em S^m se

$$\sum_{i,j=1}^n v_i v_j g(d_m(\theta_i, \theta_j)) \geq 0$$

quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\} \subset S^m$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Logo, g é positiva definida em S^m se, para cada n e cada subconjunto $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ de S^m , a matriz A com entradas $A_{i,j} = g(d_m(\theta_i, \theta_j))$ é não negativa definida. Por exemplo, a função $g(t) = \cos t$ é positiva definida em S^m . De fato, temos que para todo $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e todo $\{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subset S^m$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j g(d_m(\theta_i, \theta_j)) &= \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \cos(\arccos\langle \theta_i, \theta_j \rangle) = \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \langle \theta_i, \theta_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n v_i \theta_i, \sum_{j=1}^n v_j \theta_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^n v_i \theta_i \right\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, usando o Teorema 1.4, vemos que $\exp(\cos t)$ é também positiva definida em S^m . Dentre as muitas propriedades que as funções positivas definidas possuem, nós mencionamos as seguintes (veja [14]):

- (i) Se g_1 e g_2 são positivas definidas em S^m , então $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$ é positiva definida, contanto que $\alpha_1 \geq 0$ e $\alpha_2 \geq 0$.
- (ii) Se g_1 e g_2 são positivas definidas em S^m , então $g_1 g_2$ é também positiva definida em S^m (este fato segue do Teorema 1.2).
- (iii) Se $\{g_n\}$ é uma seqüência de funções positivas definidas em S^m convergindo para uma função contínua g , então g é positiva definida em S^m .

A seguinte caracterização de funções positivas definidas em S^m foi apresentada por Schöenberg em [14]:

Teorema 1.6 *Uma função contínua $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva definida em S^m se e somente se for da forma:*

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{\lambda}(\cos t), \quad \lambda = \frac{m-1}{2}, \quad a_k \geq 0 \quad \text{para} \quad k \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{\lambda}(1) < \infty.$$

1.5 O Espaço de de Boor-Ron

Nesta seção nós apresentamos o espaço de polinômios introduzido em [2]. Esse espaço é fundamental para a obtenção dos resultados dessa dissertação.

O termo principal $p \uparrow$ de um polinômio p é, por definição, o polinômio homogêneo para o qual o grau de $p - p \uparrow$ é estritamente menor que o grau de p .

Se f é uma função de classe C^{∞} em alguma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$, então o termo inicial $f \downarrow$ de f é, por definição, o primeiro somando não trivial no desenvolvimento de Taylor de f centrado em 0. Note, então, que necessariamente $f \downarrow$ é um polinômio homogêneo.

Se $\theta \in \mathbb{R}^{m+1}$, escrevemos $\exp_{\theta}$ para denotar a função $\exp_{\theta} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\exp_{\theta}(x) = e^{\langle \theta, x \rangle}.$$

Se $E \subset \mathbb{R}^{m+1}$, escrevemos $\exp_E$ para denotar o espaço

$$\exp_E := [\{\exp_{\theta} : \theta \in E\}].$$

Definição 1.6 *Seja $E \subset \mathbb{R}^{m+1}$. O espaço de de Boor-Ron associado a E é o espaço dado por*

$$\Pi_E^{m+1} := [\{f \downarrow : f \in \exp_E\}].$$

Se $E \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é um conjunto unitário, então $\Pi_E^{m+1} = \Pi_0^{m+1}$, enquanto que se $E = \{\theta_1, \theta_2\}$, então Π_E^{m+1} será o espaço gerado pelos polinômios 1 e $\langle \theta_1 - \theta_2, x \rangle$.

Aqui estão algumas propriedades dos espaços de de Boor-Ron. Para ver mais detalhes sobre essas propriedades, veja [2].

- (i) Π_E^{m+1} é $|E|$ -dimensional;
- (ii) Se f é uma função definida em $E \subset \mathbb{R}^{m+1}$, então existe exatamente um $p \in \Pi_E^{m+1}$ tal que $p(\theta) = f(\theta)$, $\theta \in E$;
- (iii) Π_E^{m+1} é invariante por translações, isto é, se $p \in \Pi_E^{m+1}$ e $a \in \mathbb{R}^{m+1}$, então $p(a + \cdot) \in \Pi_E^{m+1}$. Isto implica que Π_E^{m+1} é invariante sob derivações, isto é, se $x \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$, a derivada direcional de qualquer elemento de Π_E^{m+1} na direção de x ainda é um elemento de Π_E^{m+1} . Em símbolos, $D_x(\Pi_E^{m+1}) \subset \Pi_E^{m+1}$;
- (iv) Se $p \in \Pi_E^{m+1}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $p(\alpha \cdot) \in \Pi_E^{m+1}$. Isto equivale a dizer que Π_E^{m+1} é gerado por polinômios homogêneos. Precisamente,

$$\Pi_E^{m+1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1});$$

- (v) Se $p \in \Pi^{m+1}$ anula E , então o operador diferencial $p \uparrow (D)$ anula Π_E^{m+1} ;
- (vi) Se q é um polinômio homogêneo e $q(D)$ anula Π_E^{m+1} , então $q = p \uparrow$, para algum $p \in \Pi^{m+1}$ que anula E .

Para o caso de $E \subset S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, nós temos os seguintes resultados:

Teorema 1.7 *Se $E \subset S^m$, então Π_E^{m+1} é composto de polinômios harmônicos.*

Prova: Seja $E = \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subset S^m$. Defina $q \in \Pi^{m+1}$ por:

$$q(x_1, \dots, x_{m+1}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_{m+1})^2 - 1.$$

Então

$$q(\theta_i) = q(\theta_i^1, \theta_i^2, \dots, \theta_i^{m+1}) = \sum_{j=1}^{m+1} (\theta_i^j)^2 - 1 = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Pela propriedade (v) de Π_E^{m+1} , $q \uparrow (D)$ anula Π_E^{m+1} . Como $q \uparrow (D) = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 + \dots + \partial^2 / \partial x_{m+1}^2$, o resultado segue. ■

Teorema 1.8 *Sejam $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $E \subset S^m$ e $p \in \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1}$. Se o espaço $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{j-1}^{\circ, m+1}$ tem dimensão menor ou igual a 1, então a transformação $T : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \Pi_{j-1}^{\circ, m+1}$ dada por $T(x) = D_x(p)$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ é não nula, linear e o seu núcleo é um hiperplano em $\mathbb{R}^{m+1}$.*

Prova: Se ∇p denota o gradiente de p , temos que $D_x(p) = \langle \nabla p, x \rangle$. A linearidade de T segue, então, das igualdades

$$\begin{aligned} D_{\alpha x + y}(p) &= \langle \nabla p, \alpha x + y \rangle = \alpha \langle \nabla p, x \rangle + \langle \nabla p, y \rangle \\ &= \alpha D_x(p) + D_y(p), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^{m+1}. \end{aligned}$$

Se tivéssemos $T \equiv 0$, então $D_x(p) = 0$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$. Em particular, $\nabla p \equiv 0$ e, portanto, p seria identicamente nulo, contrariando a escolha de j . Assim, $T \not\equiv 0$. A propriedade (iii) de Π_E^{m+1} implica que a imagem $\text{Im}T$ de T satisfaz $\text{Im}T \subset \Pi_E^{m+1}$. Logo, $\text{Im}T \subset \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{j-1}^{\circ, m+1}$ e, portanto, $\dim \text{Im}T \leq 1$. Como $T \not\equiv 0$, $\dim \text{Im}T = 1$. Assim, $\dim \ker T = \dim \mathbb{R}^{m+1} - 1$, ou seja, $\ker T$ é um hiperplano em $\mathbb{R}^{m+1}$. ■

Com o objetivo de provar o Teorema 1.9, temos o seguinte lema:

Lema 1.3 *Seja $p \in \Pi_j^{\circ, m+1}$. Se S é um hiperplano de $\mathbb{R}^{m+1}$ e $D_v p = 0$, para todo $v \in S$, então*

$$p(x) = c(\langle \xi, x \rangle)^j, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \xi \perp S.$$

Prova: A prova segue por computação direta. ■

Teorema 1.9 *Sejam $E \subset S^m$ e k o menor inteiro tal que $\Pi_E^{m+1} \subset \Pi_k^{m+1}$. Então,*

$$\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1} \geq 2, \quad 1 \leq j \leq k-1.$$

Prova: Suponhamos que $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1} \leq 1$, para pelo menos um $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Seja $\bar{j}$ o maior tal inteiro. Se $\bar{j} = k-1$, então $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{\bar{j}+1}^{\circ, m+1} = \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_k^{\circ, m+1} \neq \emptyset$, pois $\Pi_E^{m+1} \subset \Pi_k^{m+1}$. Se $\bar{j} \neq k-1$, como $\bar{j}$ é o maior inteiro j tal que $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1} < 2$, teremos $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{\bar{j}+1}^{\circ, m+1} \geq 2$. Em qualquer dos dois casos acima, $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{\bar{j}+1}^{\circ, m+1}$ contém um polinômio não nulo p . Defina, então, $T : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \Pi_{\bar{j}}^{\circ, m+1}$ da seguinte forma: $T(x) = D_x(p)$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$. Pelo Teorema 1.8, temos que $\ker T$ é um hiperplano. Então, pelo Lema 1.3,

$$p(x) = c \langle \xi, x \rangle^{\bar{j}+1}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \xi \perp \ker T.$$

Mas isto é uma contradição, pois:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{m+1}^2} \right) p(x) \\ &= c \left[(\bar{j}+1) \bar{j} \langle \xi, x \rangle^{\bar{j}-1} \xi_1^2 + \dots + (\bar{j}+1) \bar{j} \langle \xi, x \rangle^{\bar{j}-1} \xi_{m+1}^2 \right] \\ &= c (\bar{j}+1) \bar{j} \langle \xi, x \rangle^{\bar{j}-1} \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, a prova está completa. ■

Capítulo 2

Positividade Estrita em S^m

2.1 Positividade Estrita em S^m

Como vimos na Seção 1.4, funções positivas definidas em S^m são as funções que utilizaremos para obter soluções do problema de interpolação introduzido na Seção 1.1.

As seguintes classes de funções positivas definidas em S^m fornecem soluções únicas para o problema de interpolação:

Definição 2.1 Uma função $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser *estritamente positiva definida de ordem n em S^m* se

$$\sum_{i,j=1}^n v_i v_j g(d_m(\theta_i, \theta_j)) > 0$$

quaisquer que sejam $\{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subset S^m$ e $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Se g for estritamente positiva definida de todas as ordens em S^m , dizemos que g é *estritamente positiva definida em S^m* .

Em vista da caracterização de funções positivas definidas dada por Schöenberg, uma função g estritamente positiva definida em S^m pode ser representada na forma

$$g(t) = \sum_{k \in K} a_k P_k^\lambda(\cos t), \quad \lambda = \frac{m-1}{2}, \quad K \subset \mathbb{N}, \quad a_k > 0 \text{ para } k \in K, \text{ e } \sum_{k \in K} a_k P_k^\lambda(1) < \infty.$$

Nas notações acima, escreveremos $K_{m,g} := K$.

Segue do Teorema 1.2 que se g_1 e g_2 são positivas definidas em S^m e ambas são estritamente positivas definidas (de ordem n), então $g_1 g_2$ é estritamente positiva definida (de ordem n) em S^m . O Teorema 1.4 garante que $x \rightarrow \exp(\cos x)$ é estritamente positiva definida (de ordem n). Na verdade, os Teoremas 1.2 e 1.4 garantem a existência de um cone de funções estritamente positivas definidas em todas as esferas S^m , como pode ser visto em [6].

O teorema a seguir garante que o fato de uma função g positiva definida em S^m ser ou não estritamente positiva definida (de ordem n) depende exclusivamente do conjunto $K_{m,g}$ e não da magnitude dos coeficientes a_k .

Teorema 2.1 *Sejam g_1 e g_2 funções positivas definidas em S^m tais que $K_{m,g_1} = K_{m,g_2}$. Então, g_1 é estritamente positiva definida (de ordem n) em S^m se e somente se g_2 é estritamente positiva definida (de ordem n) em S^m .*

Prova: Sejam $g_1(t) = \sum_{k \in K} a_k^1 P_k^\lambda(\cos t)$, e $g_2(t) = \sum_{k \in K} a_k^2 P_k^\lambda(\cos t)$, onde $K := K_{m,g_1} = K_{m,g_2}$, $\lambda = (m-1)/2$, $a_k^1 a_k^2 > 0$ para $k \in K$, $\sum_{k \in K} a_k^1 P_k^\lambda(1) < \infty$ e $\sum_{k \in K} a_k^2 P_k^\lambda(1) < \infty$. Seja $E = \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subset S^m$ e defina $A_{g_\alpha, E} := (A_{ij}^\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, onde $A_{ij}^\alpha = g_\alpha(d_m(\theta_i, \theta_j))$, $1 \leq i, j \leq n$. Então,

$$A_{ij}^\alpha = \sum_{k \in K} a_k^\alpha P_k^\lambda(\cos d_m(\theta_i, \theta_j)) = \sum_{k \in K} a_k^\alpha P_k^\lambda(\langle \theta_i, \theta_j \rangle)$$

e, portanto $A_{g_\alpha, E} = \sum_{k \in K} a_k^\alpha A_k$, onde $A_k = (P_k^\lambda(\langle \theta_i, \theta_j \rangle))$. Se $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, então $\sum_{i,j=1}^n v_i v_j A_{ij}^\alpha = \sum_{k \in K} a_k^\alpha \sum_{i,j=1}^n v_i v_j P_k^\lambda(\langle \theta_i, \theta_j \rangle)$, $\alpha = 1, 2$ e, portanto, a igualdade $\sum_{i,j=1}^n v_i v_j A_{ij}^\alpha = 0$ equivale a $\sum_{i,j=1}^n v_i v_j P_k^\lambda(\langle \theta_i, \theta_j \rangle) = 0$, condição esta que independe da magnitude dos coeficientes. ■

O teorema anterior motiva a seguinte definição:

Definição 2.2 Um subconjunto K de $\mathbb{N}$ induz positividade estrita (de ordem n) em S^m se toda função positiva definida em S^m que satisfaz $K_{m,g} = K$ for estritamente positiva definida (de ordem n) em S^m .

O problema de determinar os conjuntos que induzem positividade estrita (de ordem n) em S^m está relacionado com o problema de interpolação em esferas usando harmônicos esféricos. O teorema abaixo justifica este fato. Nós escrevemos H^{m+1} para denotar o espaço dos polinômios harmônicos em $m+1$ variáveis.

Teorema 2.2 *Sejam $K \subset \mathbb{N}$, g uma função positiva definida em S^m que satisfaz $K_{m,g} = K$ e $E = \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subset S^m$. Defina $H_K^{m+1} := (\sum_{k \in K} \Pi_k^{o,m+1}) \cap H^{m+1}$. São equivalentes:*

- (i) $A_{g,E}$ é positiva definida.
- (ii) Não existe um funcional linear não nulo da forma $L(h) = \sum_{j=1}^n v_j h(\theta_j)$ que anula H_K^{m+1} .
- (iii) A dimensão do espaço $H_K^{m+1}|_E := \{f|_E : f \in H_K^{m+1}\}$ é n .
- (iv) Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então existe $p \in H_K^{m+1}$ tal que $p(\theta_i) = f(\theta_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Prova: Inicialmente, considere, para cada $k \in K$, uma base ortonormal $\{S_{k,j}\}_{j=1}^{N(m+1,k)}$ de $H_k^{o,m+1}$, como no Lema 1.2. Utilizando o Teorema 1.5, podemos escrever:

$$P_k^\lambda(\cos d_m(\theta_i, \theta_j)) = P_k^\lambda(\langle \theta_i, \theta_j \rangle) = c_{k,\lambda} \sum_{l=1}^{N(m+1,k)} S_{k,l}(\theta_i) S_{k,l}(\theta_j)$$

Logo, escrevendo $g(t) = \sum_{k \in K} a_k P_k^\lambda(\cos t)$, onde $\lambda = (m-1)/2$, $a_k > 0$ para $k \in K$ e $\sum_{k \in K} a_k P_k^\lambda(1) < \infty$, obtemos, então

$$A_{g,E} = \sum_{k \in K} a_k (P_k^\lambda(\langle \theta_i, \theta_j \rangle)) = c_{k,\lambda} \sum_{k \in K} a_k \left(\sum_{l=1}^{N(m+1,k)} S_{k,l}(\theta_i) S_{k,l}(\theta_j) \right) = c_{k,\lambda} \sum_{k \in K} a_k B_k^t B_k$$

onde $B_k = (S_{k,l}(\theta_i))_{N(m+1,k) \times n}$. Assim, $A_{g,E}$ é singular se e somente se existir $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que $v^t A_{g,E} v = 0$. Computação direta revela que a condição

acima equivale a

$$\sum_{j=1}^n v_j S_{k,l}(\theta_j) = 0, \quad 1 \leq l \leq N(m+1, k), \quad k \in K,$$

isto é, o funcional linear $L(h) = \sum_{j=1}^n v_j h(\theta_j)$ anula-se numa base de $H_k^{o,m+1}$, $k \in K$. Note, agora, que $L \equiv 0$ se e somente se $v = 0$. De fato, se $L \equiv 0$, tomamos, para cada i , $p_i \in H_K^{m+1}$ tal que $p_i(\theta_i) = 1$ e $p_i(\theta_j) = 0$, para $j \neq i$. Então,

$$0 = L(p_i) = \sum_{j=1}^n v_j p_i(\theta_j) = v_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

e, portanto, $v = 0$. A outra implicação é óbvia. Concluimos, assim, que (i) e (ii) são equivalentes.

Suponhamos, agora, que exista um funcional linear não nulo da forma $L(h) = \sum_{j=1}^n v_j h(\theta_j)$ anulando H_K^{m+1} . Seja f tal que $L(f) \neq 0$. Afirmamos que não existe $p \in H_K^{m+1}$ tal que $p(\theta_i) = f(\theta_i)$, $1 \leq i \leq n$. De fato, se existisse tal p , teríamos

$$L(p) = \sum_{j=1}^n v_j p(\theta_j) = \sum_{j=1}^n v_j f(\theta_j) = L(f) \neq 0,$$

contradizendo o fato de L anular H_K^{m+1} . Provamos, assim, que (iv) implica (ii).

Suponhamos, agora, que $\dim H_K^{m+1}|_E < n$. Seja $\{u_1, \dots, u_\alpha\}$, $\alpha < n$, uma base de $H_K^{m+1}|_E$. Escrevamos

$$u_i = (p_i(\theta_1), \dots, p_i(\theta_n)), \quad 1 \leq i \leq \alpha, \quad p_i \in H_K^{m+1}.$$

Extendamos esta base a uma base $B = \{u_1, \dots, u_\alpha, u_{\alpha+1}, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e consideremos a base dual $B^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ de B . Escrevamos u_n^* na forma

$$u_n^*(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

e definamos $L(h) = \sum_{j=1}^n c_j h(\theta_j)$. Obviamente, $L \not\equiv 0$. Se $p \in H_K^{m+1}$ e $(p(\theta_1), \dots, p(\theta_n))$

$= \sum_{i=1}^{\alpha} \alpha_i(p_i(\theta_1), \dots, p_i(\theta_n))$, então

$$\begin{aligned} L(p) &= \sum_{j=1}^n c_j p(\theta_j) = u_n^*(p(\theta_1), \dots, p(\theta_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha} \alpha_i u_n^*(p_i(\theta_1), \dots, p_i(\theta_n)) = \sum_{i=1}^{\alpha} \alpha_i u_n^*(u_i) = 0 \end{aligned}$$

Assim, (ii) implica (iii).

Para concluir a prova, provemos que (iii) implica (iv). Suponhamos que exista f tal que $p|_E \not\equiv f|_E$, para todo $p \in H_K^{m+1}$. Mostraremos que $\dim H_K^{m+1}|_E < n$, exibindo um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v \notin H_K^{m+1}|_E$. Defina $v = (f(\theta_1), \dots, f(\theta_n))$. Então $v \notin H_K^{m+1}|_E$, pois, caso contrário, existiria $p \in H_K^{m+1}$ tal que $v = (p(\theta_1), \dots, p(\theta_n))$, contrariando nossa hipótese. ■

2.2 Positividade Estrita em S^m via o Espaço de de Boor-Ron

Nessa seção, exploraremos o Teorema 2.2 para obter condições suficientes para que um conjunto $K \subset \mathbb{N}$ induza positividade estrita (de ordem n) em S^m . Os espaços de de Boor-Ron são as ferramentas básicas utilizadas aqui. Escrevemos H_k^{m+1} para denotar o espaço de todos os polinômios harmônicos em $m+1$ variáveis, de grau menor ou igual a k . A primeira condição suficiente é apresentada no Teorema 2.3. O lema seguinte é necessário para a sua demonstração.

Lema 2.1 *Se $E \subset S^m$ tem cardinalidade n , então $\Pi_E^{m+1} \subset H_{[n/2]}^{m+1}$ e $\Pi_E^{m+1}|_E$ é n -dimensional.*

Prova: Primeiramente, note que Π_E^{m+1} contém os polinômios constantes, uma vez que Π_E^{m+1} é invariante por derivações. Logo, $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_0^{0,m+1} = 1$. Seja k o menor inteiro que satisfaz $\Pi_E^{m+1} \subset \Pi_k^{m+1}$. Pela propriedade (iv) do espaço de de Boor-Ron (Seção 1.5), vemos que Π_E^{m+1} contém um polinômio homogêneo de grau k . Dessa

forma $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_k^{\circ, m+1} \geq 1$. Pelo Teorema 1.9, obtemos que $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1} \geq 2$, $1 \leq j \leq k-1$. Usando a decomposição de Π_E^{m+1} dada na propriedade (iv) da Seção 1.5, obtemos:

$$\begin{aligned} \dim \Pi_E^{m+1} &= \dim \sum_{j=0}^k (\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1}) \\ &\geq \sum_{j=0}^k \dim (\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1}) \\ &\geq 1 + 2 + \dots + 2 + 1 = 2k. \end{aligned}$$

Como $\dim \Pi_E^{m+1} = n$, segue que $k \leq n/2$. Em particular, $k \leq [n/2]$ e, conseqüentemente, $\Pi_E^{m+1} \subset \Pi_{[n/2]}^{m+1}$. Pelo Teorema 1.7, segue finalmente que $\Pi_E^{m+1} \subset H_{[n/2]}^{m+1}$. A outra afirmação do lema é provada como na demonstração do Teorema 2.2, usando a propriedade (ii) da Seção 1.5. ■

Teorema 2.3 *Seja $K \subset \mathbb{N}$. Se $\{0, 1, \dots, [n/2]\} \subset K$, então K induz positividade estrita de ordem n em S^m .*

Prova: Seja $E = \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subset S^m$. Pelo Lema 2.1, $\Pi_E^{m+1} \subset H_{[n/2]}^{m+1} \subset H_K^{m+1}$ e $\dim \Pi_E^{m+1}|_E = n$. Logo, $\dim H_K^{m+1}|_E = n$ e o resultado segue do Teorema 2.2. ■

Resultados análogos ao do teorema acima, mas quando não há pontos antipodais entre os pontos a serem interpolados foram obtidos em [7]. A fórmula de adição para polinômios ultrasféricos citada na Seção 1.3 é fundamental na prova desses resultados.

O Teorema 2.3 é útil quando se quer assegurar a positividade estrita definida de uma certa ordem n de uma função g positiva definida em S^m , uma vez que ele permite que g seja a composição de um polinômio de grau menor que n com $\cos t$. Entretanto, o teorema não fornece nenhuma pista real para o problema da positividade estrita definida (de todas as ordens) de g . Ele implica somente que g é estritamente positiva definida quando $K_{m,g} = \mathbb{N}$.

Corolário 2.1 *Seja g uma função positiva definida em S^m e suponhamos que $K_{m,g}$ contenha um inteiro par k_1 e um inteiro ímpar k_2 . Então, g é estritamente positiva definida de ordem n em S^l contanto que $l < m$ e $[n/2] \leq \min\{k_1, k_2\}$.*

Prova: Suponhamos que $l < m$ e $[n/2] \leq \min\{k_1, k_2\}$. Escrevamos

$$g(t) = a_{k_1} P_{k_1}^\lambda(\cos t) + a_{k_2} P_{k_2}^\lambda(\cos t) + \sum_{k \in K_{m,g} \setminus \{k_1, k_2\}} a_k P_k^\lambda(\cos t),$$

onde $\lambda = (m-1)/2$, $a_k > 0$ para $k \in K_{m,g}$ e $\sum_{k \in K_{m,g}} a_k P_k^\lambda(1) < \infty$. Usando a equação (1.7), podemos escrever:

$$\begin{aligned} g(t) = & a_{k_1} \sum_{0 \leq 2i \leq k_1} a_{\lambda, l, k_1, i} P_{k_1 - 2i}^{\frac{l-1}{2}}(\cos t) + a_{k_2} \sum_{0 \leq 2j \leq k_2} a_{\lambda, l, k_2, j} P_{k_2 - 2j}^{\frac{l-1}{2}}(\cos t) \\ & + \sum_{k \in K_{m,g} \setminus \{k_1, k_2\}} a_k P_k^\lambda(\cos t), \end{aligned}$$

onde $a_{\lambda, l, k_1, i} > 0$, para $0 \leq 2i \leq k_1$ e $a_{\lambda, l, k_2, j} > 0$ para $0 \leq 2j \leq k_2$. Como $S^l \subset S^m$, a função $\sum_{k \in K_{m,g} \setminus \{k_1, k_2\}} a_k P_k^\lambda(\cos t)$ é positiva definida em S^l . Pela expressão acima, vemos que $K_{l,g} \supset \{0, 1, 2, \dots, \min\{k_1, k_2\}\}$ e, portanto, pelo Teorema 2.3, g é estritamente positiva definida de ordem n em S^l . ■

No restante desta seção, mostraremos que o conjunto $\{0, 1, \dots, [n/2] - 1\}$ não induz positividade estrita definida de ordem n em S^m , mas quase o faz quando $m \geq 2$. Uma destas situações é apresentada no Teorema 2.4, sendo necessário o lema abaixo.

Lema 2.2 *Seja $n \in 2\mathbb{N}$ e $E \subset S^m$ um conjunto de cardinalidade n . Suponha que $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{n/2}^{\circ, m+1} \neq \{0\}$. Então:*

- (i) *As dimensões dos espaços $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1}$, $0 \leq j \leq n/2$ são, respectivamente, $1, 2, \dots, 2$ e 1 ;*
- (ii) *Se $0 \neq p \in \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{n/2}^{\circ, m+1}$, então Π_E^{m+1} é gerado por derivadas de p .*

Prova: (i) Pelo Lema 2.1, temos que $\Pi_E^{m+1} \subset H_{n/2}^{m+1}$. Pela prova do mesmo lema, $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_0^{\circ, m+1} = 1$, $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1} \geq 2$, $1 \leq j \leq n/2 - 1$ e $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{n/2}^{\circ, m+1} \geq 1$. Logo, pela propriedade (iv) da Seção 1.5,

$$\begin{aligned} n = \dim \Pi_E^{m+1} &= \dim \sum_{j=0}^{n/2} (\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1}) \\ &\geq \sum_{j=0}^{n/2} \dim (\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1}) \\ &\geq 1 + 2 + \dots + 2 + 1 = n \end{aligned}$$

e, portanto $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1} = 2$, $1 \leq j \leq n/2 - 1$, enquanto que $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{n/2}^{\circ, m+1} = 1$.

(ii) Como $\Pi_E^{m+1} = \sum_{j=0}^{n/2} (\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1})$, é suficiente provar que cada somando na expressão acima é gerado por derivadas de p . Como $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_0^{\circ, m+1}$ contém somente constantes e $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{n/2}^{\circ, m+1}$ é gerado por p , esses dois somandos são gerados por derivadas de p . Para provar que os demais somandos têm essa propriedade, fixe $j \in \{2, \dots, n/2\}$ e escolha $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}) \in \mathbb{N}^{m+1}$ tal que $\alpha_1 + \dots + \alpha_{m+1} = n/2 - j$. Defina, então,

$$q := D^\alpha(p) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{m+1}}}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}} \right) (p)$$

e considere a transformação linear $T_q : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \Pi_{j-1}^{\circ, m+1}$ dada por $T_q(x) = D_x q$. A propriedade (iii) da Seção 1.5 implica que $\text{Im} T_q \subset \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{j-1}^{\circ, m+1}$. Obviamente, $\text{Im} T_q \neq \{0\}$, pois, caso contrário, $D_x q = 0$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ e teríamos $q = 0$, uma contradição. Logo, por (i), $0 < \dim \text{Im} T_q \leq 2$. Se $\dim \text{Im} T_q = 1$, então $\dim \ker T_q = m$, ou seja, $\ker T_q$ é um hiperplano em $\mathbb{R}^{m+1}$. Pelo Lema 1.3, $q(x) = c(\langle \xi, x \rangle)^j$, onde $c \neq 0$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ é ortogonal a $\ker T_q$. Daí, em vista do Teorema 1.7, $0 = \Gamma(D)(q) = cj(j-1)(\langle \xi, x \rangle)^{j-2} \sum_{j=1}^{m+1} \xi_j^2 \neq 0$, uma contradição. Assim, $\dim \text{Im} T_q = 2$ e, então, $\text{Im} T_q = \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{j-1}^{\circ, m+1}$. Portanto, $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{j-1}^{\circ, m+1}$ é gerado por derivadas de p . ■

Teorema 2.4 *Seja $n \in 2\mathbb{N}$ e $E \subset S^m$ um conjunto de cardinalidade n . Se E não está contido em um círculo, então*

$$\Pi_E^{m+1} \subset H_{n/2-1}^{m+1} = H_{[n/2]-1}^{m+1}$$

Prova: Suponhamos que $\Pi_E^{m+1} \not\subset H_{n/2-1}^{m+1}$. Como $\Pi_E^{m+1} \subset H_{n/2}^{m+1}$, então $\Pi_E^{m+1} \subset \Pi_{n/2}^{\circ, m+1}$. Pelo Lema 2.2 – ii, Π_E^{m+1} é gerado pelas derivadas de um polinômio $p \in \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{n/2}^{\circ, m+1}$. Usaremos este fato para mostrar que E está necessariamente contido em um círculo. Considere o espaço de operadores $\Lambda := \{D_x : x \in \ker T_p\}$, onde T_p é definida como na prova do Lema 2.2 – ii. Então, $\dim \ker T_p = m - 1$ e, portanto, podemos tomar uma base $\{D_{x_1}, \dots, D_{x_{m-1}}\}$ de Λ , onde $\{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ é uma base de $\ker T_p$. Como Π_E^{m+1} é gerado por derivadas de p , cada elemento de Λ anula Π_E^{m+1} . Escrevendo $D_{x_j} = p_j(D)$, $1 \leq j \leq m - 1$, com $p_j \in \Pi_1^{\circ, m+1}$, temos, então que $p_j(D)(\Pi_E^{m+1}) = 0$, $1 \leq j \leq m - 1$. Usando a propriedade (vi) da Seção 1.5, podemos escrever $p_j = q_j \uparrow$, $1 \leq j \leq m - 1$, onde $q_j \in \Pi_1^{m+1}$ e $q_j(E) = 0$. Note, agora, que $\{q_1, \dots, q_{m-1}\}$ é linearmente independente, pois, caso contrário, $\{D_{x_1}, \dots, D_{x_{m-1}}\}$ seria linearmente dependente. Assim, como E é anulado por um conjunto linearmente independente formado por $m - 1$ polinômios lineares em $m + 1$ variáveis, E está contido em uma variedade linear bidimensional de $\mathbb{R}^{m+1}$. A inclusão $E \subset S^m$ implica que E está contido em um círculo. ■

Uma outra situação, conforme comentário antes do Lema 2.2, é apresentada no Teorema 2.5, que segue os Lemas 2.3 e 2.4, necessários para a sua demonstração.

Lema 2.3 *Seja $n \in 2\mathbb{N} + 1$, $n \neq 1, 3$ e $E \subset S^m$ um conjunto de cardinalidade n . Se E não está contido em um círculo e $\Pi_E^{m+1} \not\subset \Pi_{(n-3)/2}^{m+1}$, então as dimensões de $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1}$, $0 \leq j \leq (n - 1)/2$ são, respectivamente, $1, 3, 2, \dots, 2$ e 1 .*

Prova: Pelo Lema 2.1, $\Pi_E^{m+1} \subset H_{[n/2]}^{m+1} = H_{(n-1)/2}^{m+1}$. Pela prova do mesmo lema, $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_0^{\circ, m+1} = 1$ e $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1} \geq 2$, $1 \leq j \leq (n - 3)/2$. Afirmamos,

inicialmente, que de fato $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_1^{\circ, m+1} \geq 3$. Para verificarmos isto, tomemos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in E$ não coplanares. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o conjunto $\{\theta_2 - \theta_1, \theta_3 - \theta_1, \theta_4 - \theta_1\}$ é linearmente independente. O conjunto $\{f_2 \downarrow, f_3 \downarrow, f_4 \downarrow\}$, onde $f_j = \exp_{\theta_j} - \exp_{\theta_1}$, $j = 2, 3, 4$, é linearmente independente, pois se $\alpha_2 f_2 \downarrow + \alpha_3 f_3 \downarrow + \alpha_4 f_4 \downarrow = 0$, teremos

$$\langle \alpha_2(\theta_2 - \theta_1) + \alpha_3(\theta_3 - \theta_1) + \alpha_4(\theta_4 - \theta_1), x \rangle = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{m+1}$$

e, por conseguinte, $\alpha_2(\theta_2 - \theta_1) + \alpha_3(\theta_3 - \theta_1) + \alpha_4(\theta_4 - \theta_1) = 0$, implicando que $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Assim, como $\{f_2 \downarrow, f_3 \downarrow, f_4 \downarrow\} \subset \Pi_E^{m+1}$, $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_1^{m+1} \geq 3$. Pela propriedade (iv) da Seção 1.5, temos, então, que

$$n = \dim \Pi_E^{m+1} \geq \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \dim (\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1}) \geq 1 + 3 + 2 + \dots + 2 + 1 = n.$$

Portanto, $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_1^{\circ, m+1} = 3$, $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1} = 2$, $2 \leq j \leq (n-3)/2$ e $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{(n-1)/2}^{\circ, m+1} = 1$. ■

Lema 2.4 *Sejam $n \in 2\mathbb{N} + 1$, $n \geq 7$ e $E \subset S^m$ um conjunto de cardinalidade n e suponha que $\dim \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{(n-1)/2}^{\circ, m+1} = 1$. Se $0 \neq p \in \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{(n-1)/2}^{\circ, m+1}$, $x \in \ker T_p$ e $p = f \downarrow$, onde $f = \sum_{\theta \in E} c_\theta \exp_\theta \in \exp_E$, então $E' = \{\theta \in E : c_\theta \neq 0\}$ está contido em um hiperplano ortogonal a x .*

Prova: Seja $\bar{k}(f)$ o somando da série de potências de f que é homogêneo de grau k . Então, $p = f \downarrow = \bar{k}_0(f)$, onde k_0 é o menor inteiro não negativo que satisfaz $\bar{k}(f) \neq 0$. Como $p \in \Pi_{(n-1)/2}^{m+1}$, segue que $k_0 = (n-1)/2$. Como $\bar{j}(f) = 0$, para $j < k_0$, temos que $\overline{j-1}(D_x f) = D_x \bar{j}(f) = 0$, $j < k_0$. Além disso, $\overline{k_0-1}(D_x f) = D_x \bar{k}_0(f) = D_x p = 0$. Logo, $(D_x f) \downarrow$ tem grau maior ou igual a k_0 . Como $(D_x f) \downarrow \in \Pi_E^{m+1} \subset \Pi_{(n-1)/2}^{m+1} = \Pi_{k_0}^{m+1}$, concluímos que $(D_x f) \downarrow$ tem grau k_0 . Logo, $(D_x f) \downarrow \in \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{k_0}^{\circ, m+1}$, e a nossa hipótese implica que $(D_x f) \downarrow = cp$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Definamos, então, $q(y) := \langle x, y \rangle - c$. Afirmamos que $q(D)(f) \equiv 0$. Para vermos isso, note, primeiramente, que $\bar{j}(q(D)(f)) = \bar{j}(D_x f) - c\bar{j}(f)$, $j \geq 0$. Logo, $\bar{j}(q(D)(f)) = 0$, para $0 \leq j < k_0$ e

$$\bar{k}_0(q(D)(f)) = \bar{k}_0(D_x f) - c\bar{k}_0(f) = \bar{k}_0(f) - c\bar{k}_0(f) = 0.$$

Portanto, se $q(D)(f) \neq 0$, então o grau de $(q(D)(f)) \downarrow$ é maior do que k_0 , contradizendo o fato de que $(q(D)(f)) \downarrow \in \Pi_E^{m+1} \subset \Pi_{(n-1)/2}^{m+1}$. Utilizando, agora, a expressão de f , temos que

$$0 \equiv q(D)(f) = q(D) \left(\sum_{\theta \in E} c_\theta \exp_\theta \right) = \sum_{\theta \in E} q(\theta) c_\theta \exp_\theta.$$

Como $\{\exp_\theta : \theta \in E\}$ é linearmente independente, obtemos $q(\theta) c_\theta = 0$, $\theta \in E$. Assim, $E' = \{\theta \in E : c_\theta \neq 0\} \subset \{\theta \in E : q(\theta) = 0\}$, isto é, E' está contido em um hiperplano ortogonal a x . ■

Teorema 2.5 *Seja $n \in 2\mathbb{N} + 1$, $n \geq 7$ e $E \subset S^m$ um conjunto de cardinalidade n . Se nenhum subconjunto de E de cardinalidade $n - 1$ estiver contido em um círculo, então $\Pi_E^{m+1} \subset H_{(n-3)/2}^{m+1}$.*

Prova: Suponhamos que $n \geq 7$ e $\Pi_E^{m+1} \not\subset H_{(n-3)/2}^{m+1}$ e mostremos que, a menos de um ponto, E está contido em um círculo. Se o próprio conjunto E já estiver contido em um círculo, a prova está terminada. Logo, podemos supor que E não está contido em um círculo. Pelo Lema 2.3, obtemos, então, que as dimensões de $\Pi_E^{m+1} \cap \Pi_j^{\circ, m+1}$, $0 \leq j \leq (n-1)/2$ são, respectivamente, $1, 3, 2, \dots, 2$ e 1 . Tomando $0 \neq p \in \Pi_E^{m+1} \cap \Pi_{(n-1)/2}^{\circ, m+1}$ e repetindo o argumento usado na prova do Lema 2.2 (aqui a hipótese $n \neq 5$ é fundamental), vemos que Π_E^{m+1} é gerado pelas derivadas de p . Seja $x \in \ker T_p$ e considere $f \in \exp_E$ tal que $f \downarrow = p$. Pelo Lema 2.4, $E' = \{\theta \in E : c_\theta \neq 0\}$ está contido num hiperplano ortogonal a x . Utilizando um argumento similar aquele usado na prova do Teorema 2.4, concluímos que E' está contido em um círculo. Para concluirmos a prova, basta, então, mostrarmos que E' tem cardinalidade maior ou igual a $n - 1$. Como, de fato, $f = \sum_{\theta \in E'} c_\theta \exp_\theta$, então $p = f \downarrow \in \Pi_{E'}^{m+1}$. Como $\Pi_{E'}^{m+1}$ é invariante por translações, o espaço $\Lambda(p)$ de todas as derivadas de p é um subconjunto de $\Pi_{E'}^{m+1}$. Como $\Lambda(p)$ é $(n-1)$ -dimensional, finalmente obtemos que

$$|E'| = \dim \Pi_{E'}^{m+1} \geq \dim \Lambda(p) = n - 1.$$

Assim, a prova está completa. ■

Observações:

- (i) Se $E \subset S^2$ tem cardinalidade 5, então $\Pi_E^3 \not\subset H_{(n-3)/2}^3 = H_1^3$, pois Π_1^3 tem dimensão 4. Logo o teorema anterior não vale quando $n = 5$.
- (ii) Se E é como em (i), 4 pontos de E estão contidos em um círculo e o último ponto não está, então $\Pi_E^3 \not\subset \Pi_1^3$. Logo, pela prova do Teorema 2.5, E não pode estar inteiramente contido em um círculo.

Os últimos resultados podem ser sumarizados da seguinte forma:

Corolário 2.2 *Seja g uma função positiva definida em S^m . Suponhamos que $K_{m,g} \supset \{0, 1, \dots, [n/2] - 1\}$ e que $E \subset S^m$ tenha cardinalidade $n \geq 1$. Então, a matriz de interpolação $A_{g,E}$ é positiva definida, a menos que uma das situações seguintes ocorra:*

- (i) n é par e E está contido em um círculo;
- (ii) n é ímpar e, a menos de um ponto, E está contido em um círculo.

Capítulo 3

Positividade Estrita em S^m : Um Tratamento Algébrico

Neste capítulo, obteremos resultados que garantem positividade estrita (de todas as ordens) em S^m , uma vez que os resultados do capítulo anterior não fornecem informações concretas nessa direção.

Os argumentos utilizados nas provas do capítulo anterior eram essencialmente analíticos. No presente capítulo, o fato de polinômios harmônicos estarem no núcleo do operador laplaciano será explorado e, portanto, os argumentos serão na sua maioria algébricos.

3.1 Espaços Totais

Denotamos por A^{m+1} a álgebra das séries de potências formais em $m+1$ variáveis, como definido em [4]. Como $A^{m+1} = \bigoplus \Pi_k^{o,m+1}$, então, para todo $k \in \mathbb{N}$, a aplicação $\bar{k} : A^{m+1} \rightarrow \Pi_k^{o,m+1}$ dada por $\bar{k}(f) =$ somando homogêneo de grau k na expansão de f , é uma projeção. Se $K \subset \mathbb{N}$, então $\sum_{k \in K} \bar{k} : A^{m+1} \rightarrow \Pi_K^{m+1} := \sum_{k \in K} \Pi_k^{m+1}$ dada

por

$$\left(\sum_{k \in K} \bar{k} \right) (f) := \sum_{k \in K} \bar{k}(f)$$

é também uma projeção.

Definição 3.1 Um espaço U de polinômios em $m + 1$ variáveis é dito ser *homogêneo* se $\bar{k}(U) \subset U$, $k \in \mathbb{N}$.

Definição 3.2 Sejam $F \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e U um espaço homogêneo. Dizemos que U é *total de ordem n* em F se, para cada $E \subset F$, com $|E| = n$ e qualquer função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, existir $p \in U$ tal que $p \equiv f$ em E .

Definindo-se $U = H_K^{m+1} := \left(\sum_{k \in K} \Pi_k^{\circ, m+1} \right) \cap H^{m+1}$, então o Teorema 2.2 implica que K induz positividade estrita de ordem n em S^m se e somente se U é total de ordem n em S^m .

Definição 3.3 Sejam $F \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então,

$$E_n(f) := \left\{ \sum_{\theta \in E} c_\theta \exp_\theta : E \subset F, |E| \leq n, c_\theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$e \ E(F) := \bigcup_{n \geq 1} E_n(F).$$

Notemos que $E(F)$ é um espaço vetorial, enquanto que $E_n(F)$ não é. De fato, dois subconjuntos E_1 e E_2 de F , com $|E_1| < n$ e $|E_2| < n$, podem ser tais que $|E_1 \cup E_2| \geq n$.

Definição 3.4 Se $\theta \in \mathbb{R}^{m+1}$, δ_θ é o funcional linear definido no espaço das funções definidas em θ dado por $\delta_\theta(f) = f(\theta)$. Se $E \subset \mathbb{R}^{m+1}$, então $M_E^{m+1} := [\{\delta_\theta : \theta \in E\}]$.

O próximo lema faz referências a algumas propriedades dos espaços totais.

Lema 3.1 Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $F \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e U um espaço homogêneo de polinômios em $m + 1$ variáveis. São equivalentes:

- (i) U não é total de ordem n em F .
- (ii) Para algum $E \subset F$, com $|E| = n$, existe uma função $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g - p \neq 0$ em E , para todo $p \in U$.
- (iii) Existe $E \subset F$, com $|E| = n$, tal que $\dim U|_E < \dim M_E^{m+1} = n$.
- (iv) Existe $E \subset F$, com $|E| = n$ e $0 \neq \lambda \in M_E^{m+1}$ tal que $\lambda(p) = 0$, $p \in U$.

Prova: Análoga à prova do Teorema 2.2. ■

Teorema 3.1 *Sejam n , F e U como no Lema 3.1. Então U é total de ordem n em F se e somente se, para todo $f \in E_n(F)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{k}(f)(D)$ não anula $U \cap \Pi_k^{\circ, m+1}$.*

Prova: Suponhamos, inicialmente, que U não é total de ordem n em F . Então, pelo Lema 3.1, existe $E \subset F$, com $|E| = n$ e $0 \neq \lambda \in M_E^{m+1}$ tal que $\lambda(p) = 0$, $p \in U$. Escrevamos $\lambda = \sum_{\theta \in E} c_\theta \exp_\theta$ e definamos $f := \sum_{\theta \in E} c_\theta \exp_\theta \in E_n(F)$. Afirmamos que $\bar{k}(f)(D)$ anula $U \cap \Pi_k^{\circ, m+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, se $p \in U \cap \Pi_k^{\circ, m+1}$, então,

$$\bar{k}(f)(D)(p) = [\bar{k}(f)(D)(p)](0) = [p(D)(\bar{k}(f))](0).$$

Por outro lado,

$$p(D)(f)(x) = p(D) \left(\sum_{\theta \in E} c_\theta \exp_\theta(x) \right) = \sum_{\theta \in E} p(D)c_\theta \exp(\langle \theta, x \rangle) = \sum_{\theta \in E} c_\theta p(\theta) \exp(\langle \theta, x \rangle)$$

e, conseqüentemente, $p(D)(f)(0) = \sum_{\theta \in E} c_\theta p(\theta) = \lambda(p) = 0$. Como $p(D)(f)(0) = p(D)(\bar{k}(f))(0)$, finalmente obtemos $\bar{k}(f)(D)(p) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que exista $f \in E_n(F)$ tal que $\bar{k}(f)(D)$ anula $U \cap \Pi_k^{\circ, m+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Escrevamos $f = \sum_{\theta \in E} c_\theta \exp_\theta$, onde $E \subset F$ e $|E| = n$. Defina $\lambda = \sum_{\theta \in E} c_\theta \delta_\theta$. Então,

$$\lambda(p) = \sum_{\theta \in E} c_\theta \delta_\theta(p) = \sum_{\theta \in E} c_\theta p(\theta) = p(D)(f)(0) = p(D)(\bar{k}(f))(0), \quad p \in U \cap \Pi_k^{\circ, m+1}.$$

Pelo Lema 3.1, U não é total de ordem n em F . ■

3.2 Positividade Estrita em S^m

Nesta seção, $\Gamma.A^{m+1}$ denota o ideal principal em A^{m+1} gerado por Γ , isto é,

$$\Gamma.A^{m+1} := \{\Gamma.f : f \in A^{m+1}\}.$$

O primeiro resultado que garante positividade estrita (de todas as ordens) em S^m é apresentado no teorema abaixo.

Teorema 3.2 *Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $K \subset \mathbb{N}$. Então K não induz positividade estrita de ordem n em S^m se e somente se $(\sum_{k \in K} \bar{k})(f) \in \Gamma.A^{m+1}$, para algum $f \in E_n(S^m)$.*

Prova: Como vimos anteriormente, K induz positividade estrita de ordem n em S^m se e somente se H_K^{m+1} é total de ordem n em S^m . Pelo Teorema 3.1, temos que K não induz positividade estrita de ordem n em S^m se e somente se existe $f \in E_n(S^m)$ tal que $\bar{k}(f)(D)$ anula $H_K^{m+1} \cap \Pi_k^{o,m+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Obviamente, as afirmações acima equivalem, então, à existência de $f \in E_n(S^m)$ tal que $\bar{k}(f)(D)$ anula $H_k^{o,m+1}$ para todo $k \in K$. Notemos, agora, que $\bar{k}(f)(D)$ anula $H_k^{o,m+1}$ se e somente se $\bar{k}(f) \in \Gamma.A^{m+1}$. De fato, se $\bar{k}(f) = \Gamma g$, $g \in A^{m+1}$, então, para todo $p \in H_k^{o,m+1}$,

$$\bar{k}(f)(D)(p) = (\Gamma g)(D)(p) = \Gamma(D)g(D)(p) = g(D)\Gamma(D)(p) = g(D)(0) = 0.$$

Reciprocamente, se $\bar{k}(f) \notin \Gamma.A^{m+1}$, então existe $p \in H_k^{o,m+1}$ tal que $\bar{k}(f)(D)(p) = \text{constante} \neq 0$ e, portanto, $\bar{k}(f)(D)$ não anula $H_k^{o,m+1}$. Concluímos, assim, que K não induz positividade estrita de ordem n em S^m se e somente se existe $f \in E_n(S^m)$ tal que $\bar{k}(f) \in \Gamma.A^{m+1}$, $k \in K$, ou seja, se e somente se existe $f \in E_n(S^m)$ tal que $\sum_{k \in K} \bar{k}(f) \in \Gamma.A^{m+1}$. ■

Corolário 3.1 *Seja g uma função positiva definida em S^m e $E \subset S^m$ um conjunto finito. Então, $A_{g,E}$ é não inversível se e somente se existe $f \in \exp_E$ tal que $(\sum_{k \in K_{m,g}} \bar{k})(f) \in \Gamma.A^{m+1}$.*

Prova: Seja $p = \Gamma^{n+1}h$, $h \in H_k^{\circ, m+1}$. Computação direta produz a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma(D)(p))\Gamma &= 4n(n+1)\Gamma^{n-1}h\Gamma^2 + \\
 &+ 2(n+1) [(h + x_1h_{x_1}) + \dots + (h + x_{m+1}h_{x_{m+1}})] \Gamma^{n+1} + \\
 &+ 2(n+1) (x_1h_{x_1} + \dots + x_{m+1}h_{x_{m+1}}) \Gamma^{n+1} + (\Gamma(D)(h)) \Gamma^{n+1} \\
 &= [4n(n+1) + 2(m+1)(n+1)] \Gamma^{n+1}.h + 4k(n+1)\Gamma^{n+1}h \\
 &= 2(n+1)(2n+m+1+2k)p
 \end{aligned}$$

O resultado segue tomando-se $c = [2(n+1)(2n+m+1+2k)]^{-1}$. ■

Lema 3.5 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então a aplicação $p \in \Gamma^{n+1}.H^{m+1} \longrightarrow \Gamma(D)(p) \in \Gamma^n.H^{m+1}$ é um isomorfismo.*

Prova: A linearidade da aplicação é óbvia. Se $h \in H^{m+1}$, então $h = \sum_{j=0}^{\alpha} h_j$, onde $h_j \in H_j^{\circ, m+1}$, $0 \leq j \leq \alpha := \text{grau de } h$. Daí,

$$\Gamma(D)(\Gamma^{n+1}h) = \Gamma(D) \left[\Gamma^{n+1} \left(\sum_{j=0}^{\alpha} h_j \right) \right] = \Gamma(D) \left(\sum_{j=0}^{\alpha} \Gamma^{n+1}h_j \right) = \sum_{j=0}^{\alpha} \Gamma(D) (\Gamma^{n+1}h_j)$$

Utilizando o Lema 3.4, a igualdade acima fica na forma:

$$\Gamma(D)(\Gamma^{n+1}h) = \sum_{j=0}^{\alpha} (c(j, n))^{-1} \Gamma^n h_j = \Gamma^n \sum_{j=0}^{\alpha} (c(j, n))^{-1} h_j$$

Cálculo direto com a igualdade revela, então, que a aplicação do teorema é injetora e sobrejetora. ■

Lema 3.6 *Seja $n \in \mathbb{N}$. A aplicação $p \in \Gamma^{n+1}.\Pi^{m+1} \longrightarrow \Gamma(D)(p) \in \Gamma^n.\Pi^{m+1}$ é um isomorfismo.*

Prova: A linearidade da aplicação é óbvia. Seja $p \in \Gamma^{n+1}.\Pi^{m+1}$ e suponha que $\Gamma(D)(p) = 0$. Pela observação após o Lema 3.3, podemos escrever:

$$p = \Gamma^{k_1}h_1 + \dots + \Gamma^{k_{\alpha}}h_{\alpha}, \quad k_1, \dots, k_{\alpha} \geq n+1, \quad h_1, \dots, h_{\alpha} \in H^{m+1}.$$

Então, $0 = \Gamma(D)(p) = \sum_{j=1}^{\alpha} \Gamma(D) (\Gamma^{k_j} h_j)$. Como $\Gamma(D) (\Gamma^{k_j} . H^{m+1}) \subset \Gamma^{k_j-1} . H^{m+1}$, $1 \leq j \leq \alpha$, podemos escrever

$$\Gamma(D) (\Gamma^{k_j} h_j) = \Gamma^{k_j-1} h_j^1, \quad h_j^1 \in H^{m+1}, \quad 1 \leq j \leq \alpha.$$

Logo, obtemos $0 = \sum_{j=1}^{\alpha} \Gamma^{k_j-1} h_j^1$. Como $\Pi^{m+1} = \oplus_{k \geq 0} \Gamma^k . H^{m+1}$ pelo Lema 3.3, $\Gamma^{k_j-1} h_j^1 = 0$, $1 \leq j \leq \alpha$. Logo, $h_j^1 = 0$, $1 \leq j \leq \alpha$. Pelo Lema 3.5, obtemos, então, que $\Gamma^{k_j} h_j = 0$, $1 \leq j \leq \alpha$. Portanto, $h_j = 0$, $1 \leq j \leq \alpha$, isto é, $p = 0$. Assim, a aplicação do teorema é injetora.

Para provarmos a sobrejetividade, seja $q = \Gamma^n q_1 \in \Gamma^n . \Pi^{m+1}$. Usando o Lema 3.3, podemos escrever

$$q_1 = \sum_{j=1}^{\beta} \Gamma^{k_j} h_j, \quad \text{onde } k_1, \dots, k_j \geq 0 \text{ e } h_1, \dots, h_{\beta} \in H^{m+1}.$$

Como cada aplicação $p \in \Gamma^{k_j+1} . H^{m+1} \longrightarrow \Gamma(D)(p) \in \Gamma^{k_j} . H^{m+1}$ é sobrejetora, pelo Lema 3.5, então, podemos escrever

$$q_1 = \sum_{j=1}^{\beta} \Gamma(D) (\Gamma^{k_j+1} h_j^1), \quad h_1^1, \dots, h_{\beta}^1 \in H^{m+1}.$$

Portanto,

$$q = \Gamma^n . \Gamma(D) \left(\sum_{j=1}^{\beta} \Gamma^{k_j+1} h_j^1 \right) = \Gamma(D) \left(\Gamma^{n+1} . \sum_{j=1}^{\beta} \Gamma^{k_j} h_j^1 \right),$$

onde $\sum_{j=1}^{\beta} \Gamma^{k_j} h_j^1 \in \oplus_{k \geq 0} \Gamma^k . H^{m+1} = \Pi^{m+1}$. Concluimos, assim, a prova do lema. ■

Lema 3.7 *Seja $f \in A^{m+1}$ um ponto fixo de $\Gamma(D)$. Suponha que existam $k, n \in \mathbb{N}$ tais que $\overline{k+2j}(f) \in \Gamma . \Pi^{m+1}$, $0 \leq j \leq n$. Então $\overline{k+2n}(f) \in \Gamma^{n+1} . \Pi^{m+1}$.*

Prova: Usemos indução sobre n . Se $n = 0$, a afirmação do teorema é óbvia. Assumamos, então, que o resultado é válido para $n-1 \geq 0$. Suponhamos que $\overline{k+2j}(f) \in \Gamma . \Pi^{m+1}$, $0 \leq j \leq n$. Como $\Gamma(D)(f) = f$, temos que

$$\Gamma(D) (\overline{k+2n}(f)) = \overline{k+2(n-1)}(\Gamma(D)(f)) = \overline{k+2(n-1)}(f).$$

Pela hipótese de indução, concluímos, então, que $\Gamma(D)(\overline{k+2n}(f)) \in \Gamma^n \cdot \Pi^{m+1}$. Pelo Lema 3.6, existe $p \in \Gamma^{n+1} \Pi^{m+1}$ tal que $\Gamma(D)(\overline{k+2n}(f)) = \Gamma(D)(p)$. Logo, temos que $\Gamma(D)(\overline{k+2n}(f) - p) = 0$, ou seja, $\overline{k+2n}(f) - p \in H^{m+1}$. Como $\overline{k+2n}(f) \in \Gamma \cdot \Pi^{m+1}$ pela hipótese de indução, segue que $\overline{k+2n}(f) - p \in H^{m+1} \cap \Gamma \cdot \Pi^{m+1}$. Pelo Lema 3.2, concluímos, então, que $\overline{k+2n}(f) = p \in \Gamma^{n+1} \cdot \Pi^{m+1}$. ■

Lema 3.8 *Sejam $E \subset S^m$ e $f \in \exp_E$. Se E tem cardinalidade n , então existe $k_0 \leq [n/2]$ tal que $\overline{k_0+2j}(f) \neq 0$, para $j \geq 0$.*

Prova: Suponhamos que E tenha cardinalidade n . A existência de $k_0 \leq [n/2]$ tal que $\overline{k_0}(f) \neq 0$ segue diretamente do Lema 2.1 e da definição de Π_E^{m+1} . Para provarmos o restante da afirmação do lema, notemos, inicialmente, que $\Gamma(D)(f) = f$. De fato, escrevendo f na forma $f(x) = \sum_{j=1}^{\alpha} a_j \exp(\langle \theta_j, x \rangle)$, onde $a_1, \dots, a_{\alpha} \in \mathbb{R}$ e $\theta_1, \dots, \theta_{\alpha} \in E$, temos

$$\Gamma(D)(f)(x) = \sum_{j=1}^{\alpha} a_j \Gamma(D)(\exp(\langle \theta_j, x \rangle)) = \sum_{j=1}^{\alpha} a_j \left(\sum_{i=1}^{m+1} (\theta_j^i)^2 \right) \exp(\langle \theta_j, x \rangle) = f(x).$$

Usando esta informação, temos que

$$\Gamma(D)(\overline{k_0+2j}(f)) = \overline{k_0+2j-2}(\Gamma(D)(f)) = \overline{k_0+2j-2}(f) \neq 0, \quad j \geq 1.$$

Portanto, $\overline{k_0+2j}(f) \neq 0$, para $j \geq 1$. ■

Teorema 3.3 *Seja $E \subset S^m$ e defina*

$$\sigma(E) := \min\{|E'| : E' \subset E \text{ e } [E \setminus E'] \neq \mathbb{R}^{m+1}\}.$$

Seja j o menor inteiro satisfazendo $\dim \Pi_{j-1}^{o,m+1} > \sigma(E)$. Seja g uma função positiva definida em S^m e assumamos que $K := \{k \in K_{m,g} : k \geq |E|/2\}$ contém j inteiros pares consecutivos e j inteiros ímpares consecutivos. Então $A_{g,E}$ é positiva definida.

Prova: Em vista do Corolário 3.1, vamos supor que existe $f \in \exp_E$ tal que $(\sum_{k \in K} \overline{k})(f) \in \Gamma \cdot A^{m+1}$ e obter uma contradição. Se existir tal f , o Lema 3.8 implica

a existência de um $k_0 \leq [n/2]$ tal que $\overline{k_0 + 2j}(f) \neq 0$, $j \geq 0$, onde $n = |E|$. Devido à nossa hipótese sobre K , existem, então, inteiros $k, k-2, \dots, k-2j+2 \in K$ com $k-2j+2+k_0$ par. Em particular, $\overline{k_0 + 2i}(f) \neq 0$, $k-2j+2 \leq i \leq k$. Como $(\sum_{k \in K} \overline{k})(f) \in \Gamma.A^{m+1}$, então

$$\overline{k-2(j-1)+2i}(f) \in \Gamma.\Pi^{m+1}, \quad 0 \leq i \leq j-1.$$

Logo, pelo Lema 3.7, $\overline{k}(f) \in \Gamma^j.\Pi^{m+1}$. Afirmamos que esta conclusão contradiz o fato de que $f \in \exp_E$. De fato, escrevamos $f(x) := \sum_{\theta \in E} c_\theta \exp(\langle \theta, x \rangle)$, onde $c_\theta \in \mathbb{R}$. Obviamente,

$$\overline{k}(f)(x) = \sum_{\theta \in E} c_\theta \overline{k}(\exp(\langle \theta, x \rangle)) = \sum_{\theta \in E} \frac{c_\theta}{k!} \langle \theta, x \rangle^k$$

e, então, podemos escrever

$$\overline{k}(f)(x) = \sum_{\theta \in T} \frac{c_\theta}{k!} \langle \theta, x \rangle^k$$

onde $T \subset E$ e cada dois pontos de T formam um conjunto linearmente independente. Seja $T' \subset T$ tal que $[T'] \neq \mathbb{R}^{m+1}$ e $|T'|$ é máxima. Como $\dim \Pi_{j-1}^{0,m+1} > \sigma(E) \geq |T \setminus T'|$, existe $p_1 \in \Pi_{j-1}^{0,m+1}$ tal que $p_1|_{T \setminus T'} \equiv 0$. Escrevendo p_1 na forma $p_1 = \Gamma^i p$, $i \geq 0$ e $p \notin \Gamma.\Pi^{m+1}$, vemos que p é homogêneo, tem grau $r \leq j-1$ e $p|_{T \setminus T'} \equiv 0$. Note, agora, que

$$\begin{aligned} p(D)(\overline{k}(f))(x) &= p(D) \left(\sum_{\theta \in T} \frac{c_\theta}{k!} \langle \theta, x \rangle^k \right) \\ &= \sum_{\theta \in T} \frac{c_\theta}{k!} k(k-1) \dots (k-r+1) p(\theta) \langle \theta, x \rangle^{k-r} \\ &= \sum_{\theta \in T'} \frac{c_\theta}{k!} k(k-1) \dots (k-r+1) p(\theta) \langle \theta, x \rangle^{k-r} \end{aligned}$$

Como $[T'] \neq \mathbb{R}^{m+1}$, é possível fazer uma mudança de variáveis (se necessário) para concluirmos que $p(D)\overline{k}(f)$ é (a menos de uma transformação linear) um polinômio com no máximo m variáveis. Por outro lado, como $\overline{k}(f) \in \Gamma^j.\Pi^{m+1}$, podemos escrever $\overline{k}(f) = \Gamma^{j+s}q$, onde $s \geq 0$ e $q \in \Pi^{m+1} \setminus \Gamma.\Pi^{m+1}$. Daí,

$$p(D)(\overline{k}(f)) = p(D)(\Gamma^{j+s}q) = cp\Gamma^{j+s-r}q + \Gamma^{j+s-r+1}q_1$$

onde c é uma constante não nula e $q_1 \in \Pi^{m+1}$. Como $0 \neq cpq \in \Gamma.\Pi^{m+1}$, então concluímos que $0 \neq p(D)(\bar{k}(f)) \in \Gamma.\Pi^{m+1}$ e, portanto, $p(D)(\bar{k}(f))$ possui $m+1$ variáveis. Alcançamos, assim, a desejada contradição. ■

Corolário 3.2 *Sejam $K \subset \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja j o menor inteiro satisfazendo*

$$\binom{j+m-1}{m} > n-m.$$

Se $K \cap \{k \in \mathbb{N} : k \geq n/2\}$ contém j inteiros pares consecutivos e j inteiros ímpares consecutivos, então K induz positividade estrita em S^m .

Corolário 3.3 *Seja $K \subset \mathbb{N}$. Se K contém seqüências arbitrariamente grandes de inteiros pares e seqüências arbitrariamente grandes de inteiros ímpares, então K induz positividade estrita em S^m .*

Bibliografia

- [1] R. **Askey** e J. **Fritch**, "Integral Representations for Jacoby Polynomials and some Applications", *J. Math. Anal. Appl.* 26(1969), 411-437.
- [2] C. de **Boor** e A. **Ron**, "On Multivariate Polynomial Interpolation", *Constructive Approximation* 6(1990), 287-302.
- [3] J. B. **Conway**, "Functions of One Complex Variable", *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 11(1973).
- [4] K. **Hoffman** e R. **Kunze**, "Linear Algebra", *Prentice-Hall Inc.*, 2nd ed.(1971).
- [5] R. A. **Horn** e C. R. **Johnson**, "Matrix Analysis", *Cambridge University Press*, (1985).
- [6] V. A. **Menegatto**, "Strictly Positive Definite Kernels on the Hilbert Sphere", *Appl. Analysis*, 55(1994), 91-101.
- [7] V. A. **Menegatto**, "Interpolation on Spherical Domains", *Analysis*, 14(1994), 415-424.
- [8] N. **Nielsen**, "Théorie des Fonctions Métasphériques", *Gauthier-Villars*, Paris, 1911.
- [9] M. J. D. **Powell**, "Radial Basis Functions for Multivariable Interpolation", *Algorithms for Approximation*, J. C. Mason e M. G. Cox, eds., Oxford University Press, 1987, 143-167.

- [10] T. J. **Rivlin**, "The Tchebychev Polynomials", *Wiley*, New York, 1974.
- [11] P. J. **Ryan**, "Euclidean and Non-euclidean Geometry", *Cambridge University Press*, (1985).
- [12] A. **Ron** e X. **Sun**, "Strictly Positive Definite Functions on Spheres", CMSTR 94-6, University of Wisconsin-Madison(1994).
- [13] A. **Ron** e X. **Sun**, "Strictly Positive Definite Functions on Spheres", *Mathematics of Computation*, a aparecer.
- [14] I. J. **Schöenberg**, "Positive Definite Functions on Spheres", *Duke Math. Journal* 9(1942), 96-108.
- [15] G. **Szegö**, "Orthogonal Polynomials", *Amer. Math. Colloq. Publ.*, vol. 23, 1939.