Dicotomias em equações diferenciais ordinárias generalizadas e aplicações

Fábio Lima Santos

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Fábio Lima Santos

Dicotomias em equações diferenciais ordinárias generalizadas e aplicações

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Marcia Cristina Anderson Braz Federson

USP – São Carlos
Novembro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santos, Fábio Lima
S237d Dicotomias em equações diferenciais ordinárias generalizadas e aplicações / Fábio Lima Santos; orientador Marcia Cristina Anderson Braz Federson. -- São Carlos, 2016.
83 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Dicotomias. 2. Equações diferenciais ordinárias generalizadas. 3. Integral de Kurzweil. 4. Integral de Perron-Stieltjes. I. Federson, Marcia Cristina Anderson Braz, orient. II. Título.

Fábio Lima Santos

Dichotomies in generalized ordinary differential equations and applications

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Marcia Cristina Anderson Braz Federson

USP – São Carlos
November 2016

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e pela força nessa caminhada.

Aos meus familiares em especial à minha mãe Edenilce, ao meu pai José (in memoriam), aos meus irmãos Tiago e Daniel e ao meu padrasto Ivaldo (in memoriam) por todo apoio e incentivo que sempre me deram.

À todos os meus amigos que estiveram presentes nessa jornada pelos momentos de diversão e pelo companheirismo em momentos difíceis, em especial a Rodolfo, Thiago (O Fera), Jorge, Gigi, Clessius e Tarci, essa jornada se tornou menos árdua graças a vocês.

À minha namorada Michele por todos os momentos felizes, pela paciência e palavras de conforto e de incentivo nos momentos difíceis e por toda a ajuda que sempre deu durante todo esse período.

Aos professores Fábio Santos e Kalasas, os quais foram os primeiros a me incentivar a continuar na carreira acadêmica. Aos professores Bruno de Andrade e Claudio Cuevas pelo incentivo e pela ajuda para que eu conseguisse iniciar os estudos no ICMC-USP e a todos os demais professores que contribuíram com a minha formação acadêmica transmitiram conhecimento e experiências de vida.

À minha orientadora professora Márcia Federson que é a idealizadora desse trabalho.

Ao professor Everaldo de Mello Bonotto pela importante contribuição no desenvolvimento desse trabalho.

À Fapesp, processo 2011/24027-0, pelo importante apoio financeiro sem o qual esse trabalho não poderia ter sido desenvolvido.

À todos os meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Neste trabalho, estabelecemos a teoria de dicotomias para equações diferenciais ordinárias generalizadas, introduzindo os conceitos de dicotomias para essas equações generalizadas, estudando as suas propriedades e propondo resultados novos. Investigamos condições para a existência de soluções limitadas e condições para a existência de dicotomia exponencial. Utilizando teoremas de correspondência entre equações diferenciais ordinárias generalizadas e outras equações, traduzimos os resultados obtidos para os casos particulares de dicotomias para equações diferenciais em medida e para equações diferenciais com impulsos. O fato de trabalharmos no ambiente das equações diferenciais ordinárias generalizadas faz com que os resultados obtidos para os casos particulares possam envolver funções com muitas descontinuidades e de variação ilimitada.

Palavras Chaves: Dicotomias, Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas, Integral de Kurzweil, Integral de Perron-Stieltjes, Equações Diferenciais em Medida, Equações Diferenciais Impulsivas.

Abstract

In this work we establish the theory of dichotomies for generalized ordinary differential equations, introducing the concepts of dichotomies for these equations, studying their properties and proposing new results. We investigate conditions of existence of exponential dichotomies and bounded solutions. Using correspondence theorems between generalized ordinary differential equations and other equations, we translate the obtained results to the particular cases of dichotomies for measure differential equations and for impulsive differential equations. The fact that we work in the framework of generalized ordinary differential equations allows us to obtain results for the particular cases where the functions involved can have many discontinuities and be of unbounded variation.

Keywords: Dichotomies, Generalized Ordinary Differential Equations, Kurzweil Integral, Perron-Stieltjes Integral, Mesure Differential Equations, Impulsive Differential Equations.

Sumário

Introdução

A evolução da teoria de estabilidade em equações diferenciais depende, em grande parte, de resultados obtidos para equações diferenciais lineares. As definições clássicas de estabilidade dadas por Lyapunov podem ser adequadas para equações autônomas, por exemplo. Entretanto equações não autônomas requerem uma noção mais sutil de estabilidade uniforme: a dicotomia exponencial.

A dicotomia exponencial é uma generalização do conceito de hiperbolicidade de equações lineares autônomas para equações lineares não autônomas, onde os subespaços são substituídos por fibrados vetoriais invariantes e as propriedades de estabilidades das soluções nesses conjuntos invariantes não triviais são uniformes.

Na teoria de equações diferenciais ordinárias (EDOs), o Teorema de Linearização de Hartman e Grobman e o Primeiro Método de Lyapunov são bem conhecidos. Entretanto, eles são suficientes somente para sistemas autônomos. Palmer (1973) aplica a dicotomia exponencial para generalizar o Teorema de Linearização de Hartman e Grobman de sistemas autônomos para sistemas não autonômos e aplica a técnica da dicotomia exponencial para simplificar a prova original do Teorema de Linearização de Hartman e Grobman.

Introduções minuciosas sobre a dicotomia exponencial para EDOs podem ser encontradas nos livros Daleckii e Krein [9] e Coppel [8], sendo que Palmer publicou uma série de trabalhos sobre dicotomia exponencial para EDOs nos últimos anos. Para equações diferença, a literatura é mais esparsa, mas Coffman e Schäfer [6] são pioneiros aqui. Para equações diferenciais impulsivas (EDIs), a teoria de dicotomia exponencial pode ser encontrada em Bainov *et al* [4], por exemplo.

Na teoria de sistemas dinâmicos não autônomos, a importância da dicotomia exponencial deve-se ao fato dela ser muito utilizada para resolver problemas não lineares como perturbações de problemas lineares (veja Henry [19] e Sakamoto [32], por exemplo). Além disso, devido ao fato da dicotomia ser um tipo de estabilidade condicional, ela pode ser usada para estudarmos estabilidade na teoria moderna do caos (Palmer [30]). Em [26], Lin utiliza a dicotomia exponencial para caracterizar a estabilidade estrutural do campo de vetores e dá uma prova da Conjectura de Smale. Deste modo, dicotomia exponencial também é importante na teoria de conjunto de pontos hiperbólicos.

O interesse mais recente em se estudar a teoria de Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas (escreveremos abreviadamente EDOs generalizadas) está no fato de que estas equações compreendem vários tipos de outras equações como EDOs, EDIs, equações diferenciais em medida (EDMs) e equações diferenciais funcionais retardadas (EDFRs), veja [14], [23], [24] e [29]. O leitor pode consultar [13] para o estudo que relaciona EDOs generalizadas com EDIs e EDFRs, e [12] e [34] para o estudo que relaciona EDOs generalizadas e EDMs. Além disso, EDFRs com impulsos em tempo variável também podem ser consideradas no contexto das EDOs generalizadas, veja [1] e [2]. Assim, o contexto das EDOs generalizadas vem se mostrando um excelente ambiente para se tratar problemas de outras classes de equações, principalmente as equações em que as funções envolvidas apresentam muitas descontinuidades e/ou são de variação ilimitada. E, como se não bastasse, o ambiente das EDOs generalizadas é bastante amigável, sendo mais simples do que qualquer das equações mencionadas acima.

O presente trabalho descreve a teoria de dicotomias no âmbito das EDOs generalizadas e aplica os resultados obtidos às EDMs e EDIs. Esse texto está organizado em quatro capítulos, que compõe os resultados preliminares e os resultados principais. No que segue, descrevemos um resumo de cada capítulo.

No Capítulo 1, apresentamos a teoria da integral de Kurzweil e da teoria das EDOs generalizadas. Na Seção 1.1, recordamos os conceitos básicos de funções regradas e de funções de variação limitada. A Seção 1.2 introduz os conceitos das integrais de Kurzweil e de Perron-Stieltjes. Além disso, várias propriedades dessas integrais são apresentadas. A Seção 1.3 lida com a teoria das equações diferenciais ordinárias generalizadas. Como o objetivo principal desse trabalho é o estudo de dicotomias de EDOs generalizadas lineares, apresentamos na Subseção 1.3.1 a teoria para essa classe de equações lineares. Finalizamos o Capítulo 1, com a Subseção 1.3.2, onde um breve resumo das EDOs generalizadas lineares perturbadas é apresentado.

O Capítulo 2 dedica-se ao estudo da teoria de dicotomias para EDOs generalizadas. Na Seção 2.1, apresentamos os conceitos de dicotomias ordinárias e exponencial para a EDO generalizada linear da forma

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{0.1}$$

em que $A : J \subset \mathbb{R} \to L(X)$ é um operador satisfazendo algumas condições particulares e X é um espaço de Banach. A Proposição 2.5 apresenta condições suficientes e necessárias para que a equação (0.1) possua dicotomia exponencial. No Teorema 2.1.1, apresentamos condições suficientes para que a equação (0.1) admita dicotomia exponencial. A Seção 2.2, apresenta resultados que caracterizam a existência de soluções limitadas para a equação (0.1) e para a equação

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)],$$

em que $f : J \to X$ é uma função regrada, veja a Proposição 2.11, Corolário 2.12, Proposição 2.13 e Proposição 2.14. Na Proposição 2.16, analisamos a existência de soluções periódicas para a EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)]$.

No Capítulo 3, consideramos a EDO generalizada (0.1) com dicotomia exponencial e estabelecemos condições suficientes para um operador $B : [0, \infty) \to L(X)$ de tal forma que EDO generalizada perturbada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[(A(t) + B(t))x]$$

permaneça com dicotomia exponencial, veja Teorema 3.12.

Finalizamos esse trabalho com o Capítulo 4. Na Seção 4.1, utilizamos o teorema de correspondência entre EDOs generalizadas e EDMs, veja Teorema 4.3, e obtemos resultados de dicotomia nas Proposições 4.10 e 4.11 e no Teorema 4.1.1, para uma EDM da forma

$$Dx = \mathcal{F}(t)x + \mathcal{G}(t)xDu,$$

em que $\mathcal{F}, \mathcal{G} : J \to L(X)$ são operadores satisfazendo algumas condições especiais e Dx e Du representam as derivadas distribucionais de x e u no sentido de L. Schwartz. No caso em que $J = \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to X$ é uma função $du-$integrável em $\mathbb{R}$, exibimos na Proposição 4.12, condições suficientes para que uma EDM da forma

$$Dx = \mathcal{F}(t)x + h(t)Du$$

possua no máximo uma solução limitada. Na Seção 4.2, utilizamos o teorema de correspondência entre EDOs generalizadas e EDIs, veja Teorema 4.2.1, e obtemos resultados de dicotomia para uma EDI da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x, \ t \neq t_i, \\ \Delta(x(t_i)) = x(t_i+) - x(t_i) = B_i x(t_i), \ i = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

em que $f : J \to L(X)$ e $B_i \in L(X)$, $i = 1, 2, \ldots$, satisfazem condições adicionais. Tais resultados estão nas Proposições 4.19 e 4.20 e o Teorema 4.2.2. Finalizamos o trabalho com a Proposição 4.21, onde apresentamos condições suficientes para que uma EDI perturbada da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x + h(t), \ t \neq t_i, \\ \Delta(x(t_i)) = x(t_i+) - x(t_i) = B_i x(t_i), \ i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

possua no máximo uma solução limitada.

Capítulo 1

Preliminares

Iniciaremos este primeiro capítulo relembrando as classes das funções regradas e das funções de variação limitada. Relembraremos definições e resultados conhecidos que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Em seguida, apresentaremos a definição da integral de Kurzweil e exibiremos algumas de suas propriedades. Por fim, apresentaremos a teoria de equações diferenciais ordinárias generalizadas introduzida por J. Kurzweil em 1957 em [24].

Por todo esse capítulo, a menos que seja dito o contrário, X e Y denotarão espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente. Quando não causar equívoco, isto é, quando estiver claro a qual espaço estamos nos referindo, escreveremos apenas $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\cdot\|_X$ ou $\|\cdot\|_Y$. O conjunto de todas as transformações lineares limitadas de X em Y será denotado por $L(X,Y)$. No caso particular em que $X = Y$, escreveremos apenas $L(X)$ no lugar de $L(X,X)$.

1.1 Funções regradas e funções de variação limitada

Nessa seção, apresentamos duas importantes classes de funções, a saber, a classe das funções regradas e a classe das funções de variação limitada. Para um melhor entendimento sobre estas classes de funções, o leitor pode consultar, por exemplo, [16], [21], [22] e [35].

Sejam a e b números reais com $a < b$ e X um espaço de Banach. Uma função $f\colon [a,b] \to X$ será denominada *regrada*, quando os limites laterais

$$\lim_{s\to t^-} f(s), \quad t \in (a,b], \quad e \quad \lim_{s\to t^+} f(s), \quad t \in [a,b),$$

existirem. Neste caso, denotaremos $f(t^-) = \lim_{s \to t^-} f(s)$ e $f(t^+) = \lim_{s \to t^+} f(s)$. O conjunto de todas as funções regradas $f\colon [a,b] \to X$ será denotado por $G([a,b],X)$. O espaço $G([a,b],X)$, quando munido com a norma usual do supremo $\|\cdot\|_\infty$, definida por $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_X$, se torna um espaço de Banach. Veja, por exemplo, [22, Teorema 3.6].

O resultado a seguir mostra que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função regrada é pequeno em certo sentido.

Proposição 1.1 [22, Corolário 3.2] *Seja $f\colon [a,b] \to X$ uma função regrada. Então:*

(*i*) *Para todo $\epsilon > 0$, os conjuntos*

$$\left\{t \in [a,b) : \|f(t^+) - f(t)\|_X \geq \epsilon\right\} \quad e \quad \left\{t \in (a,b] : \|f(t) - f(t^-)\|_X \geq \epsilon\right\}$$

são finitos.

(*ii*) *O conjunto dos pontos de descontinuidade da função f é enumerável.*

No que segue, apresentaremos o conceito de função de variação limitada. Considere, novamente, um intervalo fechado $[a,b]$ da reta com $a < b$. Um conjunto $D = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\} \subset [a,b]$, tal que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, será dito uma *divisão* de $[a,b]$. Denotaremos por $|D|$ o número de subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$ de uma divisão D de $[a,b]$ e escreveremos $D = \left\{t_0, t_1, \ldots, t_{|D|}\right\}$. Denotaremos por $\mathcal{D}[a,b]$ o conjunto de todas as divisões de $[a,b]$.

A *variação* de uma função $f : [a,b] \to X$ em $[a,b]$ é definida por

$$\mathrm{var}_a^b f = \sup_{D\in\mathcal{D}[a,b]} \sum_{i=1}^{|D|} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_X.$$

Note que $\mathrm{var}_a^b f \in [0,\infty]$. Entretanto, se $\mathrm{var}_a^b f < \infty$, diremos que f é uma função de *variação limitada* no intervalo $[a,b]$ ou simplesmente que f é de variação limitada. Representaremos o espaço de todas as funções $f\colon [a,b] \to X$ de variação limitada por $BV([a,b],X)$. O espaço $BV([a,b],X)$ munido com a norma da variação, $\|f\|_{BV} = \|f(a)\|_X + \mathrm{var}_a^b f$, é um espaço de Banach, veja [21, Resultado 2.3, página 27].

Não é difícil mostrar que se $f \in BV([a,b],X)$, então a função $[a,b] \ni t \mapsto \mathrm{var}_a^t f \in [0,\infty)$ será não decrescente e aditiva, isto é,

$$\mathrm{var}_a^b f = \mathrm{var}_a^c f + \mathrm{var}_c^b f,$$

em que $c \in [a,b]$, veja [21, Resultado 2.2, página 26].

Observação 1.2 Valem as seguintes inclusões

$$C\left([a,b],X\right) \subset G\left([a,b],X\right) \quad \text{e} \quad BV\left([a,b],X\right) \subset G\left([a,b],X\right),$$

em que $C\left([a,b],X\right)$ representa o conjunto de todas as funções $f\colon [a,b] \to X$ contínuas. Uma prova para a segunda inclusão pode ser encontrada, por exemplo, em [21, Teorema 2.7].

Sejam, agora, $A : [a,b] \to L(X)$ e $D = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ uma divisão de $[a,b]$. Podemos definir

$$V_a^b\left(A,D\right) = \sup\left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k} \left[A(t_j) - A(t_{j-1})\right] y_j \right\|_X \right\}$$

em que o supremo é tomado para todas as escolhas possíveis de $y_j \in X, j = 1, \ldots, k$, com $\|y_j\|_X \leq 1$. Nesse caso, definimos a *$\mathcal{B}$-variação* de A em $[a,b]$ por

$$(\mathcal{B})\mathrm{var}_a^b A = \sup_{D \in \mathcal{D}[a,b]} V_a^b(A,D).$$

No caso em que $(\mathcal{B})\mathrm{var}_a^b A < \infty$, diremos que A é um operador de $\mathcal{B}$-variação limitada. Denotaremos por $(\mathcal{B})BV([a,b],L(X))$ o conjunto de todos os operadores $A : [a,b] \to L(X)$ de $\mathcal{B}$-variação limitada.

Observação 1.3 Segue diretamente da definição, que se o operador $A \in BV([a,b],L(X))$, então $A \in (\mathcal{B})BV([a,b],L(X))$. Além disso, vale

$$(\mathcal{B})\mathrm{var}_a^b A \leq \mathrm{var}_a^b A.$$

Veja [33, Proposição 1] para mais detalhes.

O leitor pode consultar [35] para obter mais detalhes sobre operadores de $\mathcal{B}$-variação limitada.

1.2 As integrais de Kurzweil e de Perron-Stieltjes

Nesta seção, apresentamos a definição da integral de Kurzweil e algumas de suas propriedades que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Um leitor mais interessado no tema pode consultar [33] e [34]. Como caso particular da integral de Kurzweil, mencionaremos resultados para a integral de Perron-Stieltjes.

Antes de introduzirmos a definição da integral de Kurzweil, vamos relembrar alguns conceitos preliminares.

Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo com $a < b$. Uma *divisão marcada* do intervalo $[a,b]$ é uma coleção finita de pares $D = \{(\tau_i, [t_{i-1}, t_i]) : i = 1, 2, \ldots, |D|\}$ tal que $\{t_1, t_2, \ldots, t_{|D|}\}$ é uma divisão de $[a,b]$ e $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, |D|$. Os elementos $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ são ditos *marcas* dos subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, |D|$.

Uma função positiva $\delta\colon [a,b] \to (0,\infty)$ é chamada de *calibre* de $[a,b]$. Sejam $[a,b]$ um intervalo e δ um calibre de $[a,b]$. Uma divisão marcada $D = \{t_0, \tau_1, t_1, \ldots, t_{|D|-1}, \tau_{|D|}, t_{|D|}\}$ será dita *δ-fina*, se tivermos

$$[t_{i-1}, t_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)),$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, |D|$.

A seguir, vamos enunciar um lema que será importante na definição da integral de Kurzweil.

Lema 1.4 (Lema de Cousin) [20, Teorema 4.1] *Dado um calibre δ de $[a,b]$, existe uma divisão marcada δ-fina de $[a,b]$.*

No que segue, apresentamos a definição da integral de Kurzweil de uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$, em que X é um espaço de Banach.

Definição 1.5 *Seja $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função. Diremos que U é Kurzweil integrável, se existir um $I \in X$ com a seguinte propriedade: dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ de $[a,b]$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] - I \right\| < \epsilon$$

para toda divisão marcada $D = \{t_0, \tau_1, t_1, \ldots, t_{|D|-1}, \tau_{|D|}, t_{|D|}\}$ δ-fina de $[a,b]$. O elemento $I \in X$ é chamado de integral de Kurzweil de U sobre o intervalo $[a,b]$ e será denotado por $I = \int_a^b DU(\tau, t)$. Denotaremos por $\mathcal{K}([a,b], X)$ o espaço das funções de $[a,b]$ em X que são Kurzweil integráveis.

Observação 1.6 O Lema de Cousin (Lema 1.4) garante que a integral de Kurzweil esteja bem definida.

Observação 1.7 Quando $\int_a^b DU(\tau,t)$ existir, definiremos $\int_b^a DU(\tau,t) = -\int_a^b DU(\tau,t)$ e usaremos a convenção $\int_a^b DU(\tau,t) = 0$ quando $a = b$.

Observação 1.8 A integral de Kurzweil pode ser extendida para intervalos ilimitados, ou seja, intervalos onde um dos extremos são $-\infty$ ou ∞. Ao invés de lidarmos com processo limite, impomos que $U(\tau,s_2) - U(\tau,s_1) = 0$ sempre que $s_1 = -\infty$, $s_2 = \infty$ ou ambos. Não importa o valor de $U(\tau,s)$ quando $\tau \in \{-\infty,\infty\}$, já que intervalos ilimitados possuem $-\infty$ e ∞ como marcas. O leitor pode consultar [5] para obter mais detalhes.

Vamos, agora, apresentar algumas propriedades da integral de Kurzweil. Começaremos exibindo resultados que mostram que esta integral possui as propriedades de linearidade, aditividade com respeito a intervalos adjacentes e integrabilidade em subintervalos. Suas demonstrações podem ser encontradas em [34], nos Teoremas 1.9, 1.10 e 1.11, respectivamente. Cabe observar que, apesar de em [34] os resultados estarem enunciados para o caso em que X possui dimensão finita, as demonstrações seguem de modo análogo para o caso em que X possui dimensão infinita.

Teorema 1.9 *Sejam $U, V \in \mathcal{K}([a,b],X)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Então $c_1U + c_2V \in \mathcal{K}([a,b],X)$ e vale a igualdade*

$$\int_a^b D\left[c_1U(\tau,t) + c_2V(\tau,t)\right] = c_1\int_a^b DU(\tau,t) + c_2\int_a^b DV(\tau,t).$$

Teorema 1.10 *Se $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$, então, para todo $[c,d] \subset [a,b]$, teremos $U \in \mathcal{K}([c,d],X)$.*

Teorema 1.11 *Se $c \in (a,b)$ e $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ for tal que $U \in \mathcal{K}([a,c],X)$ e $U \in \mathcal{K}([c,b],X)$, então $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$ e valerá a igualdade*

$$\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^c DU(\tau,t) + \int_c^b DU(\tau,t).$$

A seguir, vamos enunciar um importante teorema a respeito da integral de Kurzweil. Sua demonstração pode ser encontrada em [34, Teorema 1.14] para o caso em que X possui dimensão finita. A demonstração desse fato para X com dimensão infinita segue de modo análogo.

Teorema 1.12 *Seja $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função tal que $U \in \mathcal{K}([a,c],X)$ para todo $c \in [a,b)$ e suponha que o limite*

$$\lim_{c \to b^-} \left[\int_a^c DU(\tau,t) - U(b,c) + U(b,b) \right] = I$$

exista. Então $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$ e vale a igualdade

$$\int_a^b DU(\tau,t) = I.$$

Observação 1.13 Vale um resultado análogo do teorema acima no caso em que $U \in \mathcal{K}([c,b],X)$ para todo $c \in (a,b]$.

O teorema a seguir decorre do anterior e é conhecido como Teorema de Hake. Sua prova para o caso em que X é um espaço de Banach de dimensão finita pode ser encontrado em [34, Teorema 1.16]. A prova para X com dimensão infinita é análoga.

Teorema 1.14 *Seja $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função tal que $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$ e $c \in [a,b]$. Então*

$$\lim_{s \to c} \left[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c) \right] = \int_a^c DU(\tau,t)$$

e

$$\lim_{s \to c} \left[\int_s^b DU(\tau,t) + U(c,s) - U(c,c) \right] = \int_c^b DU(\tau,t).$$

Observação 1.15 O Teorema 1.14 acima nos mostra que a função $s \in [a,b] \mapsto \int_a^s DU(\tau,t)$, isto é, a integral indefinida de U, não é necessariamente contínua. A integral indefinida será contínua em $c \in [a,b]$ se, e somente se, a função $U(c,\cdot) : [a,b] \to X$ for contínua em c.

Seja $U\colon [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função dada por $U(\tau,t) = F(t)g(\tau)$ com $F\colon [a,b] \to L(X)$ e $g\colon [a,b] \to X$. Nesse caso particular, obtemos a soma do tipo Riemann

$$\sum U(\tau_i,t_i) = \sum [F(t_i) - F(t_{i-1})]g(\tau_i)$$

e a integral de Kurzweil $\int_a^b DU(\tau,t)$ coincide com a integral de Perron-Stieltjes a qual é usualmente denotada por

$$\int_a^b d[F(s)]g(s).$$

Observação 1.16 Como caso particular da integral de Kurzweil, segue do Teorema 1.9 que a integral de Perron-Stiltjes é linear e aditiva em intervalos subjacentes. Além disso, a integral indefinida de Perron-Stieltjes não é necessariamente contínua.

O resultado a seguir apresenta condições que garantem a existência da integral de Perron-Stieltjes em espaços de Banach. Para uma demonstração, o leitor pode consultar [33, Proposição 15].

Teorema 1.17 *Se $g\colon [a,b] \to X$ for uma função regrada e $F\colon [a,b] \to L(X)$ for uma função de variação limitada em $[a,b]$, então a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b d[F(s)]g(s)$ existirá.*

Apresentaremos, na sequência, um resultado de integração por partes para a integral de Perron-Stieltjes. Uma demonstração para o caso em que X tem dimensão finita pode ser encontrada em [34, Corolário 1.23]. A demonstração para o caso em que X tem dimensão infinita pode ser encontrada em [28, Teorema B].

Proposição 1.18 *Sejam $F : [a,b] \to L(X)$ e $g : [a,b] \to X$ funções de variação limitada. Então as integrais de Perron-Stieltjes $\int_a^b d[F(r)]g(r)$ e $\int_a^b F(r)d[g(r)]$ existem e vale a igualdade*

$$\begin{aligned}\int_a^b d[F(r)]g(r) + \int_a^b F(r)d[g(r)] &= F(b)g(b) - F(a)g(a) \\ &\quad - \sum_{a\le\tau<b} \Delta^+F(\tau)\Delta^+g(\tau) + \sum_{a\le\tau<b} \Delta^-F(\tau)\Delta^-g(\tau),\end{aligned}$$

onde $\Delta^+F(\tau) = F(\tau^+) - F(\tau)$, $\Delta^-F(\tau) = F(\tau) - F(\tau^-)$, $\Delta^+g(\tau) = g(\tau^+) - g(\tau)$ e $\Delta^-g(\tau) = g(\tau) - g(\tau^-)$.

A proposição a seguir é uma consequência de [34, Corolário 1.36] que, apesar de estar enunciado para dimensão finita, também é válido para dimensão infinita, veja [33, Proposição 10].

Proposição 1.19 *Sejam $g\colon [a,b] \to X$ uma função de variação limitada e $F\colon [a,b] \to L(X)$ uma função regrada em $[a,b]$. Se a integral $\int_a^b d[F(s)]g(s)$ existir, então*

$$\left\| \int_a^b F(s)d[g(s)] \right\| \le \int_a^b \|F(s)\| d[\mathrm{var}_a^s g] \le (\mathrm{var}_a^b g)\|F\|.$$

A Proposição 1.20 segue diretamente de [33, Corolário 21]. As notações de Δ^+ e Δ^- que estão na Proposição 1.20 são as mesmas notações que aparecem na Proposição 1.18.

Proposição 1.20 *Sejam* $f\colon [a,b] \to L(X)$ *e* $g\colon [a,b] \to X$ *funções tais que* $\int_a^b f dg$ *exista. Então a função* $h(t) = \int_a^t f dg$ *está definida para todo* $t \in [a,b]$*. Além disso, se* $g \in G([a,b],X)$ *então* $h \in G([a,b],X)$ *e*

$$\Delta^+ h(t) = f(t)\Delta^+ g(t) \quad e \quad \Delta^- h(t) = f(t)\Delta^- g(t),$$

para todo $t \in [a,b]$.

Por fim, vamos apresentar um teorema que mostra uma desigualdade do tipo Grownwall para a integral de Perron-Stieltjes. Este resultado pode ser encontrado em [34, Corolário 1.43].

Teorema 1.21 *Sejam* $h\colon [a,b] \to [0,\infty)$ *uma função não decrescente e contínua à esquerda,* $k > 0$ *e* $\ell \geq 0$ *constantes. Se* $\psi\colon [a,b] \to [0,\infty)$ *for uma função que satisfaz a desigualdade*

$$\psi(\xi) \leq k + \ell \int_a^\xi \psi(\tau) dh(\tau), \quad \xi \in [a,b],$$

então $\psi(\xi) \leq k e^{\ell(h(\xi)-h(a))}$ *para todo* $\xi \in [a,b]$.

1.3 EDOs generalizadas

Nesta seção, vamos apresentar a teoria fundamental das equações diferenciais ordinárias generalizadas (escreveremos EDOs generalizadas ou EDOGs). Em seguida, vamos nos restringir às EDOs generalizadas lineares e exibiremos algumas propriedades de suas soluções bem como uma "fórmula da variação das constantes". As principais referências para esta seção são [7], [24], [25], [34] e [35].

Sejam X um espaço de Banach, $\Omega \subset X \times \mathbb{R}$ um aberto e $F\colon \Omega \to X$ uma função. A definição a seguir é devida a J. Kurzweil e pode ser encontrada em [24], [25] ou em [34, Definição 3.1] para X com dimensão finita.

Definição 1.22 *Diremos que uma função* $x\colon [\alpha,\beta] \to X$ *é solução da equação diferencial ordinária generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) \tag{1.1}$$

no intervalo $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$*, se* $(x(t),t) \in \Omega$ *para todo* $t \in [\alpha,\beta]$ *e se para quaisquer* γ*,* $v \in [\alpha,\beta]$*, a igualdade*

$$x(v) - x(\gamma) = \int_{\gamma}^{v} DF(x(\tau),t) \tag{1.2}$$

for verdadeira, em que a integral do lado direito de (1.2) *é no sentido da integral de Kurzweil (vide Definição 1.5).*

Observação 1.23 A notação (1.1) é apenas simbólica. O símbolo $\frac{dx}{d\tau}$ não significa que a solução possui uma derivada como mostra o exemplo a seguir extraído de [34], Capítulo 3, página 100.

Exemplo 1.24 *Seja* $r\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua que não possui derivada em qualquer ponto do intervalo* $(0,1)$*. Defina* $F\colon \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}$ *por* $F(x,t) = r(t)$*. Note que*

$$\int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t) = \int_{s_1}^{s_2} D\left[r(t)\right] = r(s_2) - r(s_1), \quad s_1, s_2 \in (0,1),$$

para qualquer função $x\colon (0,1) \to \mathbb{R}$*. Assim, pela Definição 1.22,* $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*,* $0 < a < b < 1$*, definida por* $x(s) = r(s)$*, para* $s \in [a,b]$*, é solução da EDO generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) = D\left[r(t)\right],$$

porém x *não possui derivada em qualquer ponto do intervalo* $[a,b]$*.*

No que segue vamos consider $\Omega = \mathcal{O} \times [a,b]$, em que $\mathcal{O} \subset X$ é um subconjunto aberto e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

Definição 1.25 *Diremos que a função* $F : \Omega \to X$ *pertence à classe* $\mathcal{F}(\Omega,h)$*, se existir uma função não decrescente* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as condições:*

(i) $\|G(x,s_2) - G(x,s_1)\|_X \leq |h(s_2) - h(s_1)|$ *para todos* $(x,s_1),(x,s_2) \in \Omega$*;*

(ii) $\|G(x,s_2) - G(x,s_1) - G(y,s_2) + G(y,s_1)\|_X \leq \|x-y\|_X |h(s_2) - h(s_1)|$ *para todos* $(x,s_1),(x,s_2),(y,s_1),(y,s_2) \in \Omega$*.*

A classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$ definida acima permite obtermos várias propriedades qualitativas para as soluções de uma EDO generalizada. No seguinte resultado, exibimos condições suficientes para que a EDO generalizada (1.1) admita uma única solução.

Teorema 1.26 [13, Teorema 2.15] *Suponha que $F : \Omega \to X$ pertença à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$, em que h é uma função contínua à esquerda. Assuma que para cada $(\tilde{x}, t_0) \in \Omega$ tem-se $(\tilde{x}_+, t_0) \in \Omega$, em que $\tilde{x}_+ = \tilde{x} + F(\tilde{x}, t_0+) - F(\tilde{x}, t_0)$. Então existem $\Delta > 0$ e uma única solução $x : [t_0, t_0 + \Delta] \to X$ da EDO generalizada* (1.1) *no intervalo $[t_0, t_0 + \Delta]$ satisfazendo $x(t_0) = \tilde{x}$.*

É importante mencionar que a continuidade à esquerda da função h no Teorema 1.26 garante que as soluções da EDO generalizada (1.1) sejam contínuas à esquerda.

1.3.1 EDOs generalizadas lineares

Nesta seção, vamos considerar EDOs generalizadas para o caso particular em que a função $F : X \times [a, b] \to X$ é dada pela lei $F(x, t) = A(t)x$, em que $A\colon [a, b] \to L(X)$ é um operador. Neste caso, a equação

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x] \tag{1.3}$$

é conhecida como *EDO generalizada linear.*

Uma solução para a equação (1.3) no intervalo $[a, b]$ é uma função $x\colon [a, b] \to X$ que satisfaz a igualdade:

$$x(s_2) = x(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} D[A(t)x(\tau)],$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [a, b]$.

Note que a integral de Kurzweil da expressão acima é representada por somas de Riemann-Stieltjes da forma $\sum[A(t_j) - A(t_{j-1})]x(\tau_j)$. Assim, podemos denotar a integral $\int_{s_1}^{s_2} D[A(t)x(\tau)]$ pela forma convencional $\int_{s_1}^{s_2} d[A(s)]x(s)$ para a integral de Perron-Stieltjes. Portanto, x será solução de (1.3) no intervalo $[a, b]$ se valer

$$x(s_2) = x(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} d[A(s)]x(s),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [a, b]$.

No caso de problema de valor inicial (PVI), dados $t_0 \in [a,b]$ e $\tilde{x} \in X$, diremos que uma função $x : [a,b] \to X$ será uma solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \\ x(t_0) = \tilde{x}, \end{cases} \tag{1.4}$$

se

$$x(t) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s),$$

para quaisquer $t \in [a,b]$.

Por [34, Lema 6.1] e [7, Lema 2.11], se $x : [a,b] \to X$ for uma solução para o PVI (1.4), então $x \in BV([a,b],X)$.

Para obtermos propriedades de existência e unicidade de solução para o PVI (1.4), vamos assumir que o operador $A\colon [a,b] \to L(X)$ satisfaça as seguintes condições:

(H_1) $A \in BV\,([a,b], L(X))$.

(H_2) $(I + [A(t^+) - A(t)])^{-1} \in L(X),\ t \in [a,b)$ e $(I - [A(t) - A(t^-)])^{-1} \in L(X),\ t \in (a,b]$ em que $I \in L(X)$ é o operador indentidade, $A(t^+) = \lim\limits_{s \to t+} A(s)$ e $A(t^-) = \lim\limits_{s \to t-} A(s)$.

Observação 1.27 Como $A \in BV([a,b],L(X)) \subset G([a,b],L(X))$, os limites laterais

$$A(t^+) = \lim_{r \to t^+} A(r) \in L(X), \quad t \in [a,b),$$

e

$$A(t^-) = \lim_{r \to t^-} A(r) \in L(X), \quad t \in (a,b],$$

existem. Dado $\epsilon > 0$, segue pela Proposição 1.1, item (i), que os conjuntos

$$\{t \in [a,b) : \|A(t^+) - A(t))\| \geq \epsilon\} \quad e \quad \{t \in (a,b] : \|A(t) - A(t^-))\| \geq \epsilon\}$$

são finitos. Desta forma, tomando $\epsilon = 1$, existe um conjunto finito $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \subset [a,b]$ tal que $\|A(t^+) - A(t))\| < 1$ para todo $t \in [a,b)$, $t \neq t_i$, $i = 1, \ldots, m$, e $\|A(t) - A(t^-))\| < 1$ para todo $t \in (a,b]$, $t \neq t_i$, $i = 1, \ldots, m$. Logo, os operadores

$$I + \Delta^+ A(t) \in L(X) \quad e \quad I - \Delta^- A(t) \in L(X)$$

são invertíveis, isto é,

$$[I + \Delta^+ A(t)]^{-1} \in L(X), \quad t \in [a, b),\, t \neq t_i,\, i = 1, \ldots, m,$$

e

$$[I - \Delta^- A(t)]^{-1} \in L(X), \quad t \in (a, b],\, t \neq t_i,\, i = 1, \ldots, m.$$

Assim, se $A\colon [a, b] \to L(X)$ for um operador de variação limitada em $[a, b]$, a condição (H_2) é válida, exceto por uma quantidade finita de pontos em $[a, b]$. Seja $B = \{t_1, \ldots, t_m\}$ e considere $\tilde{A} = A\chi_B$, então $\tilde{A} \in BV([a, b], L(X))$ e a hipótese (H_2) é válida para todo $t \in [a, b]$.

No próximo resultado exibimos o teorema que lida com a existência e unidade de solução para o PVI (1.4). Esse resultado é consequência tanto do Teorema 2.10 em [35] como da última observação do artigo [35].

Teorema 1.28 *Assuma que o operador* $A : [a, b] \to L(X)$ *satisfaça as condições* (H_1) *e* (H_2). *Então o PVI* (1.4) *possui uma única solução definida no intervalo* $[a, b]$.

O próximo resultado trata da existência de um operador que será bastante utilizado no decorrer desse trabalho e será chamado de *operador fundamental* da EDO generalizada linear (1.3). Para sua demonstração, o leitor pode consultar [34, Teorema 6.13] no caso em que X possui dimensão finita e [7, Teorema 2.14] para o caso em que X possui dimensão infinita.

Teorema 1.29 *Suponha que* A *satisfaça as condições* (H_1) *e* (H_2). *Então existe um único operador* $U\colon [a, b] \times [a, b] \to L(X)$ *tal que*

$$U(t, s) = I + \int_s^t d[A(r)]U(r, s) \tag{1.5}$$

para quaisquer $t, s \in [a, b]$, *em que* I *denota o operador identidade em* $L(X)$. *Além disso, para cada* $s \in [a, b]$ *fixado,* $U(\cdot, s)$ *será um operador de variação limitada. Este operador é chamado operador fundamental da EDO generalizada linear*

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x].$$

A seguir, vamos exibir um teorema que relaciona soluções de EDOs generalizadas lineares com o seu operador fundamental correspondente. Uma demonstração para tal resultado pode ser encontrada em [34, Teorema 6.14], no caso em que X possui dimensão finita, e em [7, Teorema 2.15], para o caso em que X possui dimensão infinita.

Teorema 1.30 *Suponha que A satisfaça as condições (H_1) e (H_2). Então, para todo $s \in [a,b]$, a única solução $x\colon [a,b] \to X$ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \\ x(s) = \tilde{x}, \end{cases} \tag{1.6}$$

será dada pela relação

$$x(t) = U(t,s)\tilde{x}, \quad t \in [a,b], \tag{1.7}$$

em que $U\colon [a,b] \times [a,b] \to L(X)$ é o operador fundamental dado pelo Teorema 1.29.

Demonstração. Reproduziremos, aqui, a demonstração apresentada em [7, Teorema 2.15]. Pelo Teorema 1.29, a função $x : [a,b] \to X$ definida por $x(t) = U(t,s)\tilde{x}$ é de variação limitada em $[a,b]$ (logo regrada em $[a,b]$). Dessa forma, pelo Teorema 1.17, a integral $\displaystyle\int_s^t d[A(r)]x(r)$ existe para todo $t \in [a,b]$. Além disso,

$$\int_s^t d[A(r)]x(r) = \int_s^t d[A(r)]U(r,s)\tilde{x} = [U(t,s) - I]\,\tilde{x} = x(t) - \tilde{x}.$$

Isso mostra que $x : [a,b] \to X$ é solução do problema de valor inicial (1.6). A unicidade segue do Teorema 1.28. ■

O teorema a seguir mostra várias propriedades interessantes do operador fundamental U dado por (1.5). Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em [34, Teorema 6.15], para o caso em que X possui dimensão finita. O caso em que X possui dimensão infinita foi apresentado em [7, Teorema 2.16].

Teorema 1.31 *Suponha que $A : [a,b] \to L(X)$ satisfaça as condições (H_1) e (H_2). Então o operador fundamental $U\colon [a,b] \times [a,b] \to L(X)$, dado por (1.5), satisfará as seguintes propriedades:*

(i) $U(t,t) = I$*, para todo* $t \in [a,b]$*;*

(ii) Existe uma constante $M > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\|U(t,s)\| \leq M, \ t,s \in [a,b], \\ &\mathrm{var}_a^b U(t,\cdot) \leq M, \ t \in [a,b], \\ &\mathrm{var}_a^b U(\cdot,s) \leq M, \ s \in [a,b]; \end{aligned}$$

(iii) $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$, *para quaisquer* $t, r, s, \in [a,b]$;

(iv) $[U(t,s)]^{-1} \in L(X)$ *existe e* $[U(t,s)]^{-1} = U(s,t)$, *para quaisquer* $t, s \in [a,b]$;

(v) *Valem as igualdades:*

$$\begin{aligned}
U(t^+, s) &= [I + \Delta^+ A(t)]U(t,s), \\
U(t^-, s) &= [I - \Delta^- A(t)]U(t,s), \\
U(t, s^+) &= U(t,s)[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}, \\
U(t, s^-) &= U(t,s)[I - \Delta^- A(t)]^{-1},
\end{aligned}$$

para quaisquer $t, s \in [a,b]$.

1.3.2 EDOs generalizadas lineares perturbadas

Dados $A\colon [a,b] \to L(X)$ e $f\colon [a,b] \to X$, consideremos a função $F : X \times [a,b] \to L(X)$ definida por $F(x,t) = A(t)x + f(t)$. Dizemos que uma EDO generalizada do tipo

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)]$$

é uma EDO generalizada linear perturbada.

Dados $t_0 \in [a,b]$ e $\tilde{x} \in X$, diremos que a função $x\colon [a,b] \to X$ é uma solução para o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)], \\ x(t_0) = \tilde{x}, \end{cases} \tag{1.8}$$

se

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} D[A(s)x(\tau) + f(s)] = \tilde{x} + \int_{t_0}^{t} (D[A(s)x(\tau)] + D[f(s)]), \tag{1.9}$$

para todo $t \in [a,b]$.

Como já foi observado antes,

$$\int_{t_0}^{t} D[A(s)x(\tau)] = \int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s) \quad \text{e} \quad \int_{t_0}^{t} D[f(s)] = f(t) - f(t_0).$$

Portanto $x\colon [a,b] \to X$ será uma solução para o problema de valor inicial (1.8) em $[a,b]$ se, e somente se, tivermos

$$x(t) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s) + f(t) - f(t_0), \quad t \in [a,b]. \tag{1.10}$$

Dessa forma, a EDO generalizada linear (1.8) pode ser reescrita na forma integral dada em (1.10).

Além das condições (H_1) e (H_2), vamos assumir, também, a condição:

(H_3) $f \in G([a,b], X)$.

A seguir, vamos exibir um resultado que mostra que, sob as hipóteses (H_1) e (H_3), toda solução do problema de valor inicial (1.8) será regrada. Este fato é consequência direta de [35, Proposição 2.2].

Proposição 1.32 *Assuma que as condições* (H_1) *e* (H_3) *estejam satisfeitas. Se* $x\colon [a,b] \to X$ *for uma solução para o PVI* (1.8) *em* $[a,b]$*, então* $x \in G([a,b], X)$*.*

O próximo resultado garante a existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial (1.8) em todo o intervalo $[a,b]$. A demonstração aqui apresentada foi retirada dos comentários que aparecem após o Teorema 2.11 na página 456 do artigo [35].

Teorema 1.33 *Considere a EDO generalizada linear perturbada* (1.8) *em que as condições* (H_1)*,* (H_2) *e* (H_3) *estejam satisfeitas. Então o problema de valor inicial* (1.8) *terá uma única solução* $x \in G([a,b], X)$*.*

Observação 1.34 Sejam $f\colon \mathbb{R} \to X$ satisfazendo (H_3) em $\mathbb{R}$ e $A\colon \mathbb{R} \to L(X)$ um operador localmente de variação limitada, isto é, A é de variação limitada em cada intervalo fechado de $\mathbb{R}$ e satisfazendo (H_2). O Teorema 1.33 garante a existência global e unicidade de solução para o problema de valor inicial (1.8).

Para finalizar este capítulo, vamos enunciar a fómula da variação das constantes, introduzida em [7], Teorema 2.22, para o PVI (1.8).

Teorema 1.35 *Sejam* A *satisfazendo as condições* (H_1) *e* (H_2) *e* $F\colon X \times [a,b] \to X$ *uma função tal que, para cada* $x \in G([a,b], X)$*, a aplicação* $t \in [a,b] \mapsto F(x(t), t)$ *é Kurzweil integrável. Se* $[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$*,* $t_0 \in [\alpha, \beta]$ *e* $x \in G([\alpha, \beta], X)$ *for uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + F(x,t)], \\ x(t_0) = \tilde{x}, \end{cases} \tag{1.11}$$

então x poderá ser escrita como

$$x(t) = U(t,t_0)\tilde{x} + \int_{t_0}^{t} DF(x(\tau),s) - \int_{t_0}^{t} d_\sigma[U(t,\sigma)] \left(\int_{t_0}^{\sigma} DF(x(\tau),s) \right), \quad t \in [\alpha,\beta], \tag{1.12}$$

em que $U\colon [a,b] \times [a,b] \to L(X)$ é o operador fundamental da EDO generalizada linear $\dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]$ dado por (1.5) e $d_\sigma[U(t,\sigma)]$ representa a derivada de $U(t,\sigma)$ com relação à σ.

Note que, no caso particular em que $F(x,t) = f(t)$, com $f\colon [a,b] \to X$ regrada, temos

$$\int_{\alpha}^{\beta} D[F(x(\tau),s)] = \int_{\alpha}^{\beta} D[f(s)] = f(\beta) - f(\alpha)$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in [a,b]$ e $x\colon [a,b] \to X$. Dessa forma, o resultado a seguir é consequência imediata do Teorema 1.35 e do Teorema 1.17.

Corolário 1.36 *Sejam A satisfazendo as condições (H_1) e (H_2) e $f\colon [a,b] \to X$ uma função regrada. Então a única solução $x\colon [a,b] \to X$ de*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + f(t)], \\ x(t_0) = \tilde{x}, \end{cases}$$

em que $t_0 \in [a,b]$, será dada por

$$x(t) = U(t,t_0)\tilde{x} + (f(t) - f(t_0)) - \int_{t_0}^{t} d_\sigma[U(t,\sigma)]\,(f(\sigma) - f(t_0)), \quad t \in [a,b].$$

Capítulo 2

Dicotomia exponencial para EDOs generalizadas

A teoria de dicotomia exponencial para EDOs generalizadas é inexistente até o presente momento. Desta forma, dedicamos esse capítudo à investigação dessa nova teoria. O capítulo está dividido em duas seções. Na Seção 2.1, iremos introduzir a definição de dicotomia exponencial para EDOs generalizadas e estenderemos alguns resultados existentes na teoria de dicotomia exponencial para EDO clássicas para o caso de EDOs generalizadas. Na Seção 2.2, vamos obter alguns resultados de soluções limitadas para EDOs generalizadas lineares perturbadas.

2.1 Dicotomia exponencial

Sejam X um espaço de Banach, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e consideremos a EDO generalizada linear

$$\frac{dx}{d\tau} = D\left[A(t)x\right], \tag{2.1}$$

onde o operador $A : J \to L(X)$ satisfaz as condições:

(H_1^{loc}) $A \in BV\left([a,b], L(X)\right),$ para todo subintervalo $[a,b] \subset J$;

(H_2) $(I + [A(t^+) - A(t)])^{-1} \in L(X)$ e $(I - [A(t) - A(t^-)])^{-1} \in L(X)$, para todo $t \in J$.

Seja $U : J \times J \to L(X)$ o operador fundamental da EDO generalizada linear (2.1), o qual foi definido no Teorema 1.29. Fixado $t_0 \in J$, definimos o operador $U : J \to L(X)$ por $U(t) = U(t, t_0)$ e, portanto, $U^{-1}(t) = U(t_0, t)$ para $t \in J$. Também denotaremos por $U(t)$ o operador fundamental da EDO generalizada linear (2.1).

As próximas definições exibem os conceitos de dicotomia ordinária e de dicotomia exponencial para a EDO generalizada linear (2.1).

Definição 2.1 A EDO generalizada linear (2.1) possuirá dicotomia exponencial, se existirem constantes positivas K_1, K_2, α_1 e α_2 e uma projeção $P : X \to X$ (isto é, $P \in L(X)$ tal que $P^2 = P$) tais que:

a) $\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$, para $t, s \in J$ com $t \geq s$;

b) $\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$, para $t, s \in J$ com $s \geq t$.

Definição 2.2 A EDO generalizada linear (2.1) possuirá dicotomia ordinária, se existirem constantes positivas M_1 e M_2 e uma projeção $P : X \to X$ tais que:

a) $\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq M_1$, para $t, s \in J$ com $t \geq s$;

b) $\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| \leq M_2$, para $t, s \in J$ com $s \geq t$.

Podemos notar que a Definição 2.1 generaliza a definição correspondente de dicotomia exponencial conhecida para EDOs clássicas. Com efeito, no caso particular em que

$$A(t) = \int_0^t B(s)ds, \quad t \in J, \tag{2.2}$$

temos que se $\dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]$ possui dicotomia exponencial, então a EDO clássica $\dot{x} = B(t)x$ também possui dicotomia exponencial. Para ver isso, note que A satisfaz as condições (H_1^{loc}) e (H_2), assim podemos considerar o operador fundamental $U : J \to L(X)$ da EDO generalizada $\dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]$. Como

$$U(t) = I + \int_0^t d[A(r)]U(r) = I + \int_0^t B(r)U(r)dr, \quad t \in J, \tag{2.3}$$

segue que $U(t)$ é o operador fundamental da EDO $\dot{x} = B(t)x$.

Observação 2.3 Se J for um intervalo limitado, as Definições 2.1 e 2.2 serão equivalentes. Com efeito, suponha que J seja um intervalo limitado e considere $\overline{J} = [a,b]$ (o fecho de J). Suponhamos, inicialmente, que a EDO generalizada (2.1) possua dicotomia exponencial como na Definição 2.1. Tome $M_i = K_i e^{\alpha_i(b-a)}$, $i = 1,2$. Assim, teremos

- $\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \leq K_1 e^{\alpha_1(b-a)} = M_1$, para $t,s \in J$ com $t \geq s$;
- $\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)} \leq K_2 e^{\alpha_2(b-a)} = M_2$, para $t,s \in J$ com $s \geq t$.

Portanto, a EDO generalizada (2.1) possui dicotomia ordinária.

Por outro lado, suponha que a EDO generalizada (2.1) possua uma dicotomia ordinária como na Definição 2.2. Tome $K_i = M_i e^{(b-a)}$, $i = 1,2$. Então

- $\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq M_1 = M_1 e^{-(b-a)} e^{(b-a)} \leq K_1 e^{-(t-s)}$, para $t,s \in J$ com $t \geq s$;
- $\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| \leq M_2 = M_2 e^{-(b-a)} e^{(b-a)} \leq K_2 e^{-(s-t)}$, para $t,s \in J$ com $s \geq t$.

Isso mostra que (2.1) possui uma dicotomia exponencial.

Observação 2.4 Considere, agora, a EDO generalizada linear (2.1), no caso em que $J = [0,\infty)$. Suponha que exista $a \in J$ tal que esta equação possua uma dicotomia exponencial (respectivamente dicotomia ordinária) no intervalo $[a,\infty)$. Então a EDO generalizada linear (2.1) possuirá uma dicotomia exponencial (respectivamente dicotomia ordinária) no intervalo $[0,\infty)$. De fato, denotemos por K_1 e K_2 as constantes, α_1 e α_2 os expoentes e P a projeção da dicotomia exponencial conforme a Definição 2.1. Pela condição (ii) do Teorema 1.31, existe $M > 0$ tal que $\|U(t)\| \leq M$ e $\|U^{-1}(t)\| \leq M$ para $t \in [0,a]$. Logo,

- Para $t \geq a \geq s \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\|U(t)PU^{-1}(s)\| &= \|U(t)PU^{-1}(a)U(a)U^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-a)} \|U(a)\| \|U^{-1}(s)\| \\ &\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-a)} e^{\alpha_1 s} M^2 = K_1 e^{\alpha_1 a} M^2 e^{-\alpha_1(t-s)}.\end{aligned}$$

- Para $a \geq t \geq s \geq 0$, temos

$$\|U(t)PU^{-1}(s)\| = M^2\|P\| \leq M^2\|P\| e^{\alpha_1[a-(t-s)]} = \|P\| e^{\alpha_1 a} M^2 e^{-\alpha_1(t-s)}.$$

- Para $s \geq a \geq t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| &= \|U(t)U^{-1}(a)U(a)(I-P)U^{-1}(s)\| \\ &\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-a)}\|U^{-1}(a)\|\|U(t)\| \\ &\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-a)}e^{\alpha_2 t}M^2 = K_2 e^{\alpha_2 a}M^2 e^{-\alpha_2(s-t)}.\end{aligned}$$

- Para $a \geq s \geq t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| &= M^2(1+\|P\|) \leq M^2(1+\|P\|)e^{\alpha_2[a-(s-t)]} \\ &= (1+\|P\|)e^{\alpha_2 a}M^2 e^{-\alpha_2(s-t)}.\end{aligned}$$

Portanto, tomando $\widetilde{K}_1 = \max\{K_1 e^{\alpha_1 a}M^2, \|P\|e^{\alpha_1 a}M^2\}$ e $\widetilde{K}_2 = \max\{K_2 e^{\alpha_2 a}M^2, (1 + \|P\|)e^{\alpha_2 a}M^2\}$, valem as desigualdades

$$\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq \widetilde{K}_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \text{ para } t \geq s;$$

$$\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| \leq \widetilde{K}_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \text{ para } s \geq t.$$

O próximo resultado mostra condições necessárias e suficientes para que a EDO generalizada linear (2.1) possua uma dicotomia exponencial. Sua demonstração segue os passos encontrados em [8], Capítulo 2, página 11.

Proposição 2.5 *A EDO generalizada linear (2.1) possuirá uma dicotomia exponencial se, e somente se, existirem constantes positivas L_1, L_2, M, β_1 e β_2, tais que, para todo $\xi \in X$, as seguintes estimativas são satisfeitas:*

(i) $\|U(t)P\xi\| \leq L_1 e^{-\beta_1(t-s)}\|U(s)P\xi\|$, *para* $t, s \in J$ *com* $t \geq s$;

(ii) $\|U(t)(I-P)\xi\| \leq L_2 e^{-\beta_2(s-t)}\|U(s)(I-P)\xi\|$, *para* $t, s \in J$ *com* $t \leq s$;

(iii) $\|U(t)PU^{-1}(t)\| \leq M$, *para* $t \in J$.

Demonstração. Suponha que a EDO generalizada linear (2.1) possua uma dicotomia exponencial com constantes K_1 e K_2 e expoentes α_1 e α_2 como na Definição 2.1. Assim, para todo $\xi \in X$, obtemos as seguintes desigualdades:

- Para $t \geq s$, vale

$$\begin{aligned}\|U(t)P\xi\| &= \|U(t)P^2\xi\| = \|U(t)PU^{-1}(s)U(s)P\xi\| \leq \|U(t)PU^{-1}(s)\|\|U(s)P\xi\| \\ &\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\|U(s)P\xi\|;\end{aligned}$$

- Para $t \leq s$, vale

$$\begin{aligned}\|U(t)(I-P)\xi\| &= \|U(t)(I-P)^2\xi\| = \|U(t)(I-P)U^{-1}(s)U(s)(I-P)\xi\| \\ &\leq \|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\|\|U(s)(I-P)\xi\| \\ &\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\|U(s)(I-P)\xi\|;\end{aligned}$$

- Para qualquer $t \in J$, podemos tomar $s = t$, e daí

$$\|U(t)PU^{-1}(t)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-t)} = K_1.$$

Basta tomarmos $L_1 = M = K_1$, $L_2 = M_2$, $\alpha_1 = \beta_1$ e $\alpha_2 = \beta_2$.

Suponhamos, agora, que a EDO generalizada linear (2.1) seja tal que existem constantes positivas L_1, L_2, M, β_1 e β_2 satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii). Então

- Para $t \geq s$, temos
  $\|U(t)PU^{-1}(s)\xi\| \leq L_1 e^{-\beta_1(t-s)}\|U(s)PU^{-1}(s)\xi\| \leq ML_1 e^{-\beta_1(t-s)}\|\xi\|$, para todo $\xi \in X$. Portanto,

$$\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq ML_1 e^{-\beta_1(t-s)} = K_1 e^{-\beta_1(t-s)},$$

  com $K_1 = ML_1$.

- Para $t \leq s$, temos
  $\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\xi\| \leq L_2 e^{-\beta_2(s-t)}\|U(s)(I-P)U^{-1}(s)\xi\| \leq (1+M)L_2 e^{-\beta_2(s-t)}\|\xi\|$, para todo $\xi \in X$. Portanto,

$$\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| \leq (1+M)L_2 e^{-\beta_2(s-t)} = K_2 e^{-\beta_2(s-t)},$$

  com $K_2 = (1+M)L_2$.

Portanto, a proposição está demonstrada. ■

Vamos, agora, introduzir a noção de crescimento limitado para EDOs generalizadas lineares.

Definição 2.6 Diremos que a EDO generalizada linear (2.1) possui crescimento limitado sobre o intervalo J, se existirem constantes $h > 0$ e $C \geq 1$ tais que para qualquer solução $x : J \to X$ de (2.1), temos

$$\|x(t)\| \leq C\|x(s)\|, \text{ para } \ s, t \in J, \text{ com } s \leq t \leq s + h.$$

O resultado a seguir mostra que se a EDO generalizada linear (2.1) possuir um crescimento limitado, então a condição (iii) da Proposição 2.5 será consequência das condições (i) e (ii) desta mesma proposição. A demonstração desse resultado segue os passos encontrados em [8], página 11.

Lema 2.7 *Se a EDO generalizada linear (2.1) possuir um crescimento limitado sobre o intervalo J e existirem constantes positivas K_1, K_2, α_1 e α_2 satisfazendo as condições*

(i) $\|U(t)P\xi\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\|U(s)P\xi\|$, para $t, s \in J$, com $t \geq s$;

(ii) $\|U(t)(I - P)\xi\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\|U(s)(I - P)\xi\|$, para $t, s \in J$, com $t \leq s$,

então existe $M \geq 0$ tal que $\|U(t)PU^{-1}(t)\| \leq M$, para todo $t \in J$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos a afirmação seguinte.
Afirmação: Existem constantes $C \geq 1$ e $\mu \geq 0$ tais que

$$\|U(t)U^{-1}(s)\| \leq Ce^{\mu(t-s)}, \text{ para } t, s \in J, \text{ com } t \geq s.$$

De fato, sejam $C \geq 1$ e $h > 0$ constantes como na Definição 2.6. Tome $\mu' \geq 0$ tal que $e^{\mu'} = C$ e defina $\mu = \dfrac{\mu'}{h}$. Sejam, também, $t, s \in J$ com $t \geq s$ e tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [s + nh, s + (n + 1)h)$. Assim, para todo $\xi \in X$, como $U(t)U^{-1}(s)\xi$ é solução da EDO generalizada linear (2.1), temos

$$\left\|U(t)U^{-1}(s)\xi\right\| \leq C \left\|U(t - h)U^{-1}(s)\xi\right\| \leq \ldots \leq C^{n+1} \left\|U(s)U^{-1}(s)\xi\right\| = C^{n+1} \left\|\xi\right\|.$$

Dessa forma,

$$\left\|U(t)U^{-1}(s)\xi\right\| \leq C^{n+1} \left\|\xi\right\| = C(e^{\mu'})^n \left\|\xi\right\| = C(e^{\mu})^{hn} \left\|\xi\right\| \leq Ce^{\mu(t-s)} \left\|\xi\right\|$$

e a afirmação segue.

Agora, sejam $K = \max\{K_1, K_2\}$ e $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Então, podemos reescrever as condições (i) e (ii) da seguinte forma

(i') $\|U(t)P\xi\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}\|U(s)P\xi\|$, para $t, s \in J$ e $t \geq s$;

(ii') $\|U(t)(I-P)\xi\| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}\|U(s)(I-P)\xi\|$, para $t, s \in J$ e $t \leq s$.

Assim, dados $t \in J$ e $h > 0$, a hipótese (i') implica que

$$\|U(t+h)PU^{-1}(t)\xi\| \leq Ke^{-\alpha h}\|U(t)PU^{-1}(t)\xi\|$$

para todo $\xi \in X$. Portanto,

$$\|U(t+h)PU^{-1}(t)\| \leq Ke^{-\alpha h}\|U(t)PU^{-1}(t)\|.$$

Por outro lado, da hipótese (ii'), temos

$$\|U(t)(I-P)U^{-1}(t)\xi\| \leq Ke^{-\alpha h}\|U(t+h)(I-P)U^{-1}(t)\xi\|$$

para todo $\xi \in X$. Dessa forma,

$$\|U(t+h)(I-P)U^{-1}(t)\| \geq K^{-1}e^{\alpha h}\|U(t)(I-P)U^{-1}(t)\|.$$

Agora, defina

$$\rho = \rho(t) = \|U(t)(I-P)U^{-1}(t)\| \quad \text{e} \quad \sigma = \sigma(t) = \|U(t)PU^{-1}(t)\|$$

e tome h suficientemente grande tal que

$$\gamma = K^{-1}e^{\alpha h} - Ke^{-\alpha h} > 0.$$

Note que $|\rho - \sigma| \leq 1$ e

$$\|\rho^{-1}U(t+h)(I-P)U^{-1}(t) + \sigma^{-1}U(t+h)PU^{-1}(t)\| \geq$$

$$\geq \rho^{-1}\|U(t+h)(I-P)U^{-1}(t)\| - \sigma^{-1}\|U(t+h)PU^{-1}(t)\| \geq$$

$$\geq K^{-1}e^{\alpha h} - Ke^{-\alpha h} = \gamma > 0.$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\gamma &\leq \|\rho^{-1}U(t+h)(I-P)U^{-1}(t) + \sigma^{-1}U(t+h)PU^{-1}(t)\| \\
&= \|U(t+h)U^{-1}(t)[\rho^{-1}U(t)(I-P)U^{-1}(t) + \sigma^{-1}U(t)PU^{-1}(t)]\| \\
&\leq Ce^{\mu h}\|\rho^{-1}U(t)(I-P)U^{-1}(t) + \sigma^{-1}U(t)PU^{-1}(t)\|,
\end{aligned}$$

onde utilizamos a Afirmação inicial na última desigualdade. Assim

$$\begin{aligned}
\gamma C^{-1}e^{-\mu h} &\leq \|\rho^{-1}U(t)(I-P)U^{-1}(t)+\sigma^{-1}U(t)PU^{-1}(t)\| \\
&= \|\sigma^{-1}I+(\rho^{-1}-\sigma^{-1})U(t)(I-P)U^{-1}(t)\| \\
&\leq \sigma^{-1}+|\rho^{-1}-\sigma^{-1}|\rho = \sigma^{-1}(1+\rho\sigma|\rho^{-1}-\sigma^{-1}|) \\
&= \sigma^{-1}(1+|\rho\sigma(\rho^{-1}-\sigma^{-1})|) = \sigma^{-1}(1+|\sigma-\rho|) \\
&\leq 2\sigma^{-1}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\|U(t)PU^{-1}(t)\| = \sigma \leq 2\gamma^{-1}Ce^{\mu h},$$

como queríamos demonstrar. ∎

Lema 2.8 *Seja $J=[0,\infty)$. Suponha que existam constantes positivas α_1,α_2,K_1 e K_2 tais que o operador fundamental $U:J\to L(X)$ da EDO generalizada linear (2.1) satisfaça as condições*

(i) $\|U(t)P\xi\| \leq K_1e^{-\alpha_1(t-s)}\|U(s)P\xi\|$, *para $t,s\in J$, com $t\geq s$,*

(ii) $\|U(t)(I-P)\xi\| \leq K_2e^{-\alpha_2(s-t)}\|U(s)(I-P)\xi\|$, *para $t,s\in J$, com $t\leq s$,*

para todo $\xi\in X$. Então, dado $\theta\in(0,1)$, existirá $T>0$ tal que, para toda solução $x:J\to X$ da EDO generalizada linear (2.1), vale a implicação

$$s\geq T \implies \|x(s)\| \leq \theta \sup_{|u-s|\leq T}\|x(u)\|.$$

Demonstração. Primeiramente, sejam $K=\max\{K_1,K_2\}$ e $\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Assim, para todo $\xi\in X$, temos

- $\|U(t)P\xi\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}\|U(s)P\xi\|$, para $t,s\in J$, com $t\geq s$;
- $\|U(t)(I-P)\xi\| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}\|U(s)(I-P)\xi\|$, para $t,s\in J$, com $t\leq s$.

Sejam $x:J\to X$ uma solução da EDO generalizada linear (2.1) e $s\in J$. Defina, então,

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= U(t)PU^{-1}(t)x(t),\ t\in J,\\
x_2(t) &= U(t)(I-P)U^{-1}(t)x(t),\ t\in J.
\end{aligned}$$

Logo $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ e

$$x(t) = U(t)U^{-1}(s)x(s) = U(t)U^{-1}(s)(x_1(s) + x_2(s)) =$$
$$= U(t)PU^{-1}(s)x(s) + U(t)(I - P)U^{-1}(s)x(s).$$

Se $\|x_2(s)\| \geq \|x_1(s)\|$, tomando $t \geq s$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &= \|U(t)PU^{-1}(s)x(s) + U(t)(I-P)U^{-1}(s)x(s)\| \\
&\geq \|U(t)(I-P)U^{-1}(s)x(s)\| - \|U(t)PU^{-1}(s)x(s)\| \\
&\geq K^{-1}e^{\alpha(t-s)}\|U(s)(I-P)U^{-1}(s)x(s)\| - Ke^{-\alpha(t-s)}\|U(s)PU^{-1}(s)x(s)\| \\
&= K^{-1}e^{\alpha(t-s)}\|x_2(s)\| - Ke^{-\alpha(t-s)}\|x_1(s)\| \\
&\geq \left(K^{-1}e^{\alpha(t-s)} - Ke^{-\alpha(t-s)}\right)\|x_2(s)\|.
\end{aligned}$$

Dado $\theta \in (0,1)$, escolha $T_1 > 0$ tal que

$$K^{-1}e^{\alpha T_1} - Ke^{-\alpha T_1} \geq 2\theta^{-1}.$$

Daí, se $t_1 = s + T_1$, então

$$\|x(t_1)\| \geq 2\theta^{-1}\|x_2(s)\| \geq \theta^{-1}\|x(s)\|.$$

Logo,

$$\|x(s)\| \leq \theta\|x(t_1)\|.$$

Portanto, vale a implicação

$$s \geq T_1 \implies \|x(s)\| \leq \theta \sup_{|u-s|\leq T_1} \|x(u)\|.$$

De modo análogo, se $\|x_2(s)\| \leq \|x_1(s)\|$, tomamos $t \leq s$, o que implica em

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &= \|U(t)PU^{-1}(s)x(s) + U(t)(I-P)U^{-1}(s)x(s)\| \\
&\geq \|U(t)PU^{-1}(s)x(s)\| - \|U(t)(I-P)U^{-1}(s)x(s)\| \\
&\geq K^{-1}e^{\alpha(s-t)}\|U(s)PU^{-1}(s)x(s)\| - Ke^{-\alpha(s-t)}\|U(s)(I-P)U^{-1}(s)x(s)\| \\
&= K^{-1}e^{\alpha(s-t)}\|x_1(s)\| - Ke^{-\alpha(s-t)}\|x_2(s)\| \\
&\geq K^{-1}e^{\alpha(s-t)}\|x_1(s)\| - Ke^{-\alpha(s-t)}\|x_1(s)\| \\
&\geq \left[K^{-1}e^{\alpha(s-t)} - Ke^{-\alpha(s-t)}\right]\|x_1(s)\|.
\end{aligned}$$

Escolha $T_2 > 0$ tal que

$$K^{-1}e^{\alpha T_2} - Ke^{-\alpha T_2} \geq 2\theta^{-1}.$$

Daí, se $t_2 = s - T_2$, então

$$\|x(t_2)\| \geq 2\theta^{-1}\|x_1(s)\| \geq \theta^{-1}\|x(s)\|.$$

Logo,

$$\|x(s)\| \leq \theta\|x(t_2)\|.$$

Portanto, vale a implicação

$$s \geq T_2 \implies \|x(s)\| \leq \theta \sup_{|u-s|\leq T_2} \|x(u)\|.$$

Tome $T = \max\{T_1, T_2\}$. Então

$$s \geq T \implies \|x(s)\| \leq \theta \sup_{|u-s|\leq T} \|x(u)\|.$$

Portanto, concluímos a demonstração. ■

No próximo resultado, exibimos condições suficientes para que a EDO generalizada (2.1) admita uma dicotomia exponencial. Vamos denotar por $x(t, x_0)$ a solução de (2.1) tal que $x(0, x_0) = x_0$ e vamos considerar $J = [0, \infty)$.

Teorema 2.1.1 *Seja*

$$V_0 = \{x_0 \in X : \|x_0\| = 1 \text{ e } x(t, x_0) \text{ é ilimitada}\}$$

um subconjunto compacto de X. Suponha que existam constantes $T > 0, C > 1$ e $0 < \theta < 1$ tais que toda solução $x(t)$ de (2.1) satisfaz as condições

(i) $\|x(t)\| \leq C\|x(s)\|$, *para* $0 \leq s \leq t \leq s + T$;

(ii) $\|x(t)\| \leq \theta \sup_{|u-t|\leq T} \|x(u)\|$, *para* $t \geq T$.

Além disso, assuma que para cada $x_0 \in V_0$ existe uma sequência $\{t_n^{x_0}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ estritamente crescente com $t_{n+1}^{x_0} \leq t_n^{x_0} + T$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x(t, x_0)\| < \theta^{-n}C$ para $t \in [0, t_n^{x_0})$ e $\|x(t_n^{x_0}, x_0)\| \geq \theta^{-n}C$, $n \in \mathbb{N}$. Então a EDO generalizada (2.1) admite uma dicotomia exponencial em $[0, \infty)$.

Demonstração. Inicialmente, consideremos que $x(t)$ seja uma solução limitada não trivial de (2.1). Para $s \geq 0$, defina

$$\mu(s) = \sup_{u \geq s} \|x(u)\|.$$

Seja $t \geq s + T$. Então

$$\|x(t)\| \leq \theta \sup_{|u-t|<T} \|x(u)\| \leq \theta \sup_{u \geq s} \|x(u)\| = \theta\mu(s). \tag{2.4}$$

Logo, $\sup_{t \geq s+T} \|x(t)\| \leq \theta\mu(s)$, com $\theta < 1$ e, portanto,

$$\mu(s) = \sup_{s \leq u \leq s+T} \|x(u)\|.$$

Dessa forma, pela condição (i), temos

$$\|x(t)\| \leq \mu(s) = \sup_{s \leq u \leq s+T} \|x(u)\| \leq C\|x(s)\|, \quad 0 \leq s \leq t < \infty. \tag{2.5}$$

Afirmação: Se $t \geq (n+1)T$, vale

$$\sup_{|u-t| \leq nT} \|x(u)\| \leq \theta \sup_{|u-t| \leq (n+1)T} \|x(u)\|.$$

De fato, seja η tal que $|\eta - t| \leq nT$. Logo, $\eta \geq t - nT = (t - (n+1)T) + T \geq T$. Pela condição (ii), obtemos

$$\|x(\eta)\| \leq \theta \sup_{\eta - T \leq u \leq \eta + T} \|x(u)\| \leq \theta \sup_{t-(n+1)T \leq u \leq t+(n+1)T} \|x(u)\| = \theta \sup_{|u-t| \leq (n+1)T} \|x(u)\|$$

e, portanto,

$$\sup_{|\eta - t| \leq nT} \|x(\eta)\| \leq \theta \sup_{|u-t| \leq (n+1)T} \|x(u)\|.$$

Desta forma, a afirmação fica demonstrada.

Agora, seja $t \geq s$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s + nT \leq t < s + (n+1)T$. Se $n = 0$, obtemos $s \leq t < s + T$ e, então $\frac{(t-s)}{T} < 1$. Logo, pela condição (i), temos

$$\|x(t)\| \leq C\|x(s)\| = \theta^{-1}\theta C\|x(s)\| \leq \theta^{-1}C\theta^{\frac{(t-s)}{T}}\|x(s)\|.$$

Se $n = 1$, temos $s + T \leq t < s + 2T$. Portanto, $t - T \geq s$ e $\frac{(t-s)}{T} < 2$. Dessa forma, pela condição (ii) e pela desigualdade (2.5), obtemos

$$\|x(t)\| \leq \theta \sup_{|u-t| \leq T} \|x(u)\| \leq \theta \sup_{u \geq s} \|x(u)\| \leq \theta C\|x(s)\| = \theta^{-1}C\theta^2\|x(s)\| \leq \theta^{-1}C\theta^{\frac{(t-s)}{T}}\|x(s)\|. \tag{2.6}$$

Se $n \geq 2$, temos $s + nT \leq t < s + (n+1)T$. Logo, $t - nT \geq s$ e $\frac{(t-s)}{T} < n + 1$. Dessa forma, pela condição (ii) e pela Afirmação, temos

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \theta \sup_{|u-t|\leq T} \|x(u)\| \leq \theta^2 \sup_{|u-t|\leq 2T} \|x(u)\| \leq \cdots \leq \theta^n \sup_{|u-t|\leq nT} \|x(u)\| \leq \theta^n \sup_{u \geq s} \|x(u)\| \\
&\leq \theta^n C \|x(s)\| = \theta^{-1} C \theta^{n+1} \|x(s)\| \leq \theta^{-1} C \theta^{\frac{(t-s)}{T}} \|x(s)\|.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $K = \theta^{-1}C > 1$ e $\alpha = -T^{-1} \ln \theta > 0$, obtemos

$$\|x(t)\| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \|x(s)\|, \text{ para } 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Agora, consideremos que $x(t)$ seja uma solução ilimitada de (2.1) tal que $\|x(0)\| = 1$. Como x é ilimitada, segue da hipótese que existe uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ (que depende da condição inicial $x(0)$) estritamente crescente, $t_{n+1} \leq t_n + T$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\|x(t)\| < \theta^{-n}C$ para $t \in [0, t_n)$ e $\|x(t_n)\| \geq \theta^{-n}C$, $n \in \mathbb{N}$. Se $0 \leq t \leq T$, segue da condição (i) que

$$\|x(t)\| \leq C\|x(0)\| = C < \theta^{-1}C$$

e assim $t_1 > T$. Logo, $T < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \cdots$, e $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Suponha que $t \leq s$, $t_m \leq t < t_{m+1}$ e $t_n \leq s < t_{n+1}$. Note que

$$s - t < t_{n+1} - t_m \leq t_n + T - t_m \leq t_{n-1} + 2T - t_m < \ldots < t_m + (n - m + 1)T - t_m,$$

ou seja,

$$\frac{s-t}{T} < n - m + 1.$$

Então, usando as propriedades da sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ e a condição (i), obtemos

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &< \theta^{-m-1}C = \theta^{n-m} C \theta^{-n-1} \leq \theta^{n-m} \|x(t_{n+1})\| \\
&\leq C\theta^{-1}\theta^{n-m+1}\|x(s)\| \leq C\theta^{-1}\theta^{\frac{(s-t)}{T}}\|x(s)\|.
\end{aligned}$$

pois $s < t_{n+1} \leq t_n + T \leq s + T$. Logo, como $K = \theta^{-1}C > 1$ e $\alpha = -T^{-1} \ln \theta > 0$, obtemos

$$\|x(t)\| \leq K e^{-\alpha(s-t)} \|x(s)\| \text{ para } t_1 \leq t \leq s < \infty. \tag{2.7}$$

Seja $X_1 = \{\xi \in X : \, x(t,\xi) \text{ é limitada em } [0,\infty)\}$. Então X_1 é um subespaço vetorial de X. Seja X_2 um subespaço de X tal que $X = X_1 \oplus X_2$. Para $\xi \in X_2$, com $\|\xi\| = 1$, seja

$t_1 = t_1(\xi)$ tal que $x(t_1, \xi) \geq \theta^{-1}C$ e $\|x(t, \xi)\| < \theta^{-1}C$ para $0 \leq t < t_1$. Vamos mostrar que o conjunto $\{t_1(\xi) : \xi \in X_2 \text{ e } \|\xi\| = 1\}$ é limitado. De fato, se $\{t_1(\xi) : \xi \in X_2 \text{ e } \|\xi\| = 1\}$ for ilimitado, existe uma sequência de vetores unitários $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_2$ tal que $\|\xi_n\| = 1$ e $t_1^{(n)} = t_1(\xi_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Pela compacidade de V_0, podemos supor, a menos de subsequências de $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que $\xi_n \to \xi_0$ quando $n \to \infty$, para algum $\xi_0 \in X_2$ com $\|\xi_0\| = 1$. Dessa forma, obtemos

$$x(t, \xi_n) = \xi_n + \int_0^t d[A(s)]x(s) \longrightarrow \xi_0 + \int_0^t d[A(s)]x(s) = x(t, \xi_0), \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

para todo $t \geq 0$. Como $\|x(t, \xi_n)\| < \theta^{-1}C$ para $0 \leq t < t_1^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\|x(t, \xi_0)\| \leq \theta^{-1}C, \text{ para } 0 \leq t < \infty,$$

o que contradiz o fato que $\xi_0 \in X_2$. Assim, existe $T_1 > 0$ tal que $t_1(\xi) \leq T_1$ para todo $\xi \in X_2$ com $\|\xi\| = 1$. Pela desigualdade (2.7), para toda solução $x(t)$ ilimitada, vale

$$\|x(t)\| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}\|x(s)\|, \text{ para } T_1 \leq t \leq s < \infty. \tag{2.8}$$

Seja $P \in L(X)$ a projeção da decomposição $X = X_1 \oplus X_2$ sobre o subespaço X_1. Dessa forma, para todo ξ, valem as desigualdades

$$\|U(t)P\xi\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}\|U(s)P\xi\|, \; t \geq s \geq T_1$$

e

$$\|U(t)(I-P)\xi\| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}\|U(s)(I-P)\xi\|, \; s \geq t \geq T_1.$$

Consequentemente, segue do Lema 2.7, que existe $L > 0$ tal que

$$\|U(t)PU^{-1}(t)\| \leq L.$$

Logo, pela Proposição 2.5, a EDO generalizada (2.1) possui uma dicotomia exponencial sobre o intervalo $[T_1, \infty)$ e, pela Observação 2.4, a EDO generalizada possui uma dicotomia exponencial sobre o intervalo $[0, \infty)$. ∎

O resultado a seguir mostra que, se a EDO generalizada linear (2.1), com $J = [0, \infty)$, possuir uma dicotomia exponencial com projeção P e se P' for uma outra projeção satisfazendo certas condições, então a EDO generalizada linear (2.1) também possuirá uma dicotomia exponencial com projeção P'. Para sua demonstração, usaremos a técnica que aparece em [8], Capítulo 2, página 16.

Proposição 2.9 *Suponha que a EDO generalizada* (2.1) *possua dicotomia exponencial em* $J = [0, \infty)$ *com projeção* P*. Suponha, ainda, que* $U(0) = I$ $(U(t) = U(t, 0))$ *e que exista uma projeção* P' *tal que*

$$PP' = P' \quad e \quad P'P = P.$$

Então a EDO generalizada linear (2.1) *possuirá dicotomia exponencial com a projeção* P'*.*

Demonstração. Como $PP' = P'$, $P'P = P$ e $P^2 = P$, temos

$$P - P' = P^2 - PP' = P(P - P') \tag{2.9}$$

e

$$P - P' = P - P' - (P^2 - P'P) = P - P' - (P - P')P = (P - P')(I - P). \tag{2.10}$$

Sejam $\xi \in X$ e $t, s \geq 0$. Utilizando os parâmetros da Definição 2.1 e as igualdades (2.9) e (2.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\|U(t)(P - P')\xi\| &= \|U(t)P(P - P')\xi\| \\
&= \|U(t)PU^{-1}(0)U(0)(P - P')\xi\| \\
&\leq K_1 e^{-\alpha_1 t}\|(P - P')\xi\| \\
&= K_1 e^{-\alpha_1 t}\|(P - P')(I - P)\xi\| \\
&\leq K_1 e^{-\alpha_1 t}\|P - P'\|\|(I - P)\xi\| \\
&\leq K_1 e^{-\alpha_1 t}\|P - P'\|\|U(0)(I - P)U^{-1}(s)U(s)\xi\| \\
&\leq K_1 e^{-\alpha_1 t}\|P - P'\|K_2 e^{-\alpha_2 s}\|U(s)\xi\|.
\end{aligned}$$

Assim, para $s \geq t$, vale

$$\begin{aligned}
\|U(t)(I - P')U^{-1}(s)\| &= \|U(t)(I - P + P - P')U^{-1}(s)\| \\
&\leq \|U(t)(I - P)U^{-1}(s)\| + \|U(t)(P - P')U^{-1}(s)\| \\
&\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)} + \|P - P'\|K_1 e^{-\alpha_1 t}K_2 e^{-\alpha_2 s} \\
&\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)} + \|P - P'\|K_1 e^{-\alpha_2(s-t)}K_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t} \\
&\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)} + \|P - P'\|K_1 e^{-\alpha_2(s-t)}K_2 \\
&= \big[1 + \|P - P'\|K_1\big]K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}
\end{aligned}$$

e, para $t \geq s$, vale

$$\begin{aligned}
\|U(t)P'U^{-1}(s)\| &= \|U(t)(P - P + P')U^{-1}(s)\| \\
&\leq \|U(t)PU^{-1}(s)\| + \|U(t)(P - P')U^{-1}(s)\| \\
&\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} + \|P - P'\| K_1 e^{-\alpha_1 t} K_2 e^{-\alpha_2 s} \\
&\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} + \|P - P'\| K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} K_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)s} \\
&\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} + \|P - P'\| K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} K_2 \\
&= \big[1 + \|P - P'\| K_2\big] K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, fazendo $L_1 = \big[1 + \|P - P'\|K_2\big]K_1$ e $L_2 = \big[1 + \|P - P'\|K_1\big]K_2$, obtemos

i) $\|U(t)P'U^{-1}(s)\| \leq L_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$, para todo $t \geq s$;

ii) $\|U(t)(I - P')U^{-1}(s)\| \leq L_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$, para todo $s \geq t$.

Desta forma, concluímos que a EDO generalizada linear (2.1) também possui dicotomia exponencial com projeção P' e a prova está completa. ■

2.2 Dicotomia exponencial e soluções limitadas

Nesta seção, vamos investigar a relação entre dicotomia exponencial e soluções limitadas. Se $A : \mathbb{R} \to L(X)$ for um operador contínuo, é conhecido na literatura o fato que a EDO linear do tipo

$$\dot{x} = A(t)x$$

possui dicotomia exponencial se, e somente se, para cada $f \in C(\mathbb{R}, X)$, a EDO perturbada

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

tem uma única solução limitada. Vamos demonstrar alguns resultados nessa direção para o caso de dicotomia exponencial em EDOs generalizadas.

Sejam X um espaço de Banach, $A : \mathbb{R} \to L(X)$ um operador e consideremos a EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D\left[A(t)x\right]. \tag{2.11}$$

Definição 2.10 *A EDO generalizada (2.11) satisfaz a condição (D), se o operador A satisfizer as condições (H_1^{loc}) e (H_2) e a EDO generalizada (2.11) possuir uma dicotomia exponencial com projeção $P \in L(X)$, constantes positivas K_1 e K_2, e expoentes positivos α_1 e α_2, ou seja,*

$$\begin{aligned} \|U(t)PU^{-1}(s)\| &\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\ , \quad t \geq s, \\ \|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| &\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\ , \quad s \geq t, \end{aligned} \tag{2.12}$$

em que $U : \mathbb{R} \to L(X)$ é o operador fundamental de (2.11) com $U(0) = I$.

Proposição 2.11 *A única solução limitada da EDO generalizada linear (2.11) satisfazendo a condição (D), é a solução nula.*

Demonstração. Seja $x : \mathbb{R} \to X$ uma solução limitada de (2.11). Fixe $\xi = x(0)$. Pela Observação 1.34, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D\left[A(t)x\right] \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

possui uma única solução $x : \mathbb{R} \to X$ dada por $x(t) = U(t)\xi$, em que U representa o operador fundamental da EDO generalizada linear (2.11).

Defina $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to L(X)$ pelas leis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= U(t)P\xi \\ x_2(t) &= U(t)(I-P)\xi. \end{aligned}$$

Note que $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Por (2.12), temos

$$\|x_1(t)\| = \|U(t)P\xi\| = \|U(t)PU^{-1}(0)\xi\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 t}\|\xi\|, \quad t \geq 0, \tag{2.13}$$

e

$$\|x_2(t)\| = \|U(t)(I-P)\xi\| = \|U(t)(I-P)U^{-1}(0)\xi\| \leq K_2 e^{\alpha_2 t}\|\xi\|, \quad t \leq 0. \tag{2.14}$$

Seja $K = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$. Então

$$\|x_1(t)\| = \|x(t) - x_2(t)\| \leq \|x(t)\| + \|x_2(t)\| \leq K + K_2\|\xi\|, \quad t \leq 0, \tag{2.15}$$

e

$$\|x_2(t)\| = \|x(t) - x_1(t)\| \leq \|x(t)\| + \|x_1(t)\| \leq K + K_1\|\xi\|, \quad t \geq 0. \tag{2.16}$$

De (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16), podemos obter $L > 0$ tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_1(t)\| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_2(t)\| \leq L.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \|P\xi\| &= \|x_1(0)\| = \|U(0)P\xi\| = \|U(0)PU^{-1}(t)U(t)P\xi\| \leq \|U(0)PU^{-1}(t)\|\|x_1(t)\| \\ &\leq K_1 e^{\alpha_1 t} L \quad \text{para todo } t \leq 0, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \|(I-P)\xi\| &= \|x_2(0)\| = \|U(0)(I-P)\xi\| = \|U(0)(I-P)U^{-1}(t)U(t)(I-P)\xi\| \\ &\leq \|U(0)(I-P)U^{-1}(t)\|\|x_2(t)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2 t} L \text{ para todo } t \geq 0. \end{aligned}$$

Das desigualdades acima, concluímos que $P\xi = 0$ e $(I-P)\xi = 0$. Portanto

$$\xi = P\xi + (I-P)\xi = 0$$

e, pela unicidade de soluções, obtemos $x(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

■

Corolário 2.12 *Assuma que a EDO generalizada linear (2.11) satisfaça a condição (D) e $f \in G(\mathbb{R}, X)$. Então a EDO generalizada perturbada*

$$\frac{dx}{d\tau} = D\left[A(t)x + f(t)\right] \tag{2.17}$$

possuirá, no máximo, uma solução limitada.

Demonstração. Sejam $x, y : \mathbb{R} \to X$ duas soluções limitadas de (2.17). Defina $z : \mathbb{R} \to X$ por $z(t) = x(t) - y(t)$. É claro que z é uma função limitada. Diretamente do Corolário 1.36, podemos escrever

$$x(t) = U(t)x(0) + f(t) - f(0) - \int_0^t d_s\left[U(t)U^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)), \ t \in \mathbb{R},$$

e

$$y(t) = U(t)y(0) + f(t) - f(0) - \int_0^t d_s\left[U(t)U^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)), \ t \in \mathbb{R},$$

em que $U(t) = U(t,0)$ é o operador fundamental de (2.11). Assim,

$$z(t) = U(t)x(0) - U(t)y(0) = U(t)z(0), \ t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, z é solução da EDO generalizada linear (2.11). Como z é limitada, segue da Proposição 2.11 que $z(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $x(t) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

As Proposições 2.13 e 2.14 apresentam condições suficientes para que a EDO generalizada perturbada (2.17) possua uma única solução limitada.

Proposição 2.13 *Consideremos a EDO generalizada perturbada (2.17) com $f \in G(\mathbb{R}, X)$ e limitada. Suponha que a EDO generalizada linear correspondente (2.11) satisfaça a condição (D), que as integrais de Perron-Stieltjes*

$$\int_{-\infty}^{t} d_s \left[U(t)PU^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)) \quad e \quad \int_{t}^{\infty} d_s \left[U(t)(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s) - f(0))$$

existam para cada $t \in \mathbb{R}$ e que as funções

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{t} d_s \left[U(t)PU^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)) \in X$$

e

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{t}^{\infty} d_s \left[U(t)(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)) \in X$$

sejam limitadas, em que $U(t) = U(t,0)$ é o operador fundamental de (2.11). Então a EDO generalizada perturbada (2.17) possuirá, uma única solução limitada.

Demonstração. Seja $x : \mathbb{R} \to X$ solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D\left[A(t)x + f(t)\right] \\ x(0) = -\int_{-\infty}^{0} d_s \left[PU^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)) + \int_{0}^{\infty} d_s \left[(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)). \end{cases}$$

Pelo Corolário 1.36, podemos escrever

$$x(t) = U(t)x(0) + f(t) - f(0) - \int_{0}^{t} d_s \left[U(t)U^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
x(t) &= U(t)x(0) + f(t) - f(0) - \int_0^t d_s\left[U(t)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \\
&= U(t)x(0) + f(t) - f(0) - \int_0^t d_s\left[U(t)PU^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \\
&\quad - \int_0^t d_s\left[U(t)(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \\
&= U(t)x(0) + f(t) - f(0) \\
&\quad - U(t)\left(\int_0^t d_s\left[PU^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \pm \int_{-\infty}^0 d_s\left[PU^{-1}(s)\right](f(s)-f(0))\right. \\
&\quad \left. + \int_0^t d_s\left[(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \pm \int_0^\infty d_s\left[(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0))\right) \\
&= U(t)x(0) + f(t) - f(0) \\
&\quad - U(t)\left(\int_{-\infty}^t d_s\left[PU^{-1}(s)\right](f(s)-f(0))\right. \\
&\quad \left. - \int_t^\infty d_s\left[(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) + x(0)\right) \\
&= f(t) - f(0) - \int_{-\infty}^t d_s\left[U(t)PU^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \\
&\quad + \int_t^\infty d_s\left[U(t)(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)).
\end{aligned}$$

Como as funções da última igualdade são limitadas, segue que x é limitada. Pelo Corolário 2.12, concluímos que x é a única solução limitada de (2.17). ■

Proposição 2.14 *Consideremos a EDO generalizada perturbada (2.17), onde a EDO generalizada linear (2.11) satisfaz a condição* (D) *e* $f \in G(\mathbb{R}, X)$. *Suponha que as integrais de Perron-Stieltjes*

$$\int_{-\infty}^t U(t)PU^{-1}(s)d\left(f(s)-f(0)\right) \quad e \quad \int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(s)d\left(f(s)-f(0)\right)$$

existam para cada $t \in \mathbb{R}$ *e sejam limitadas. Suponha, ainda, que a função* $g\colon \mathbb{R} \to X$, *definida por*

$$g(t) := \begin{cases} U(t)\left(\sum_{0\le\tau<t} \Delta^+U^{-1}(\tau)\Delta^+(f(\tau)-f(0)) - \sum_{0<\tau\le t} \Delta^-U^{-1}(\tau)\Delta^-(f(\tau)-f(0))\right), & t>0 \\ U(t)\left(\sum_{t\le\tau<0} \Delta^+U^{-1}(\tau)\Delta^+(f(\tau)-f(0)) - \sum_{t<\tau\le 0} \Delta^-U^{-1}(\tau)\Delta^-(f(\tau)-f(0))\right), & t<0 \\ 0\,, \quad t=0 \end{cases}$$

seja limitada. Então a EDO generalizada perturbada (2.17) possui uma única solução limitada.

Demonstração. Seja $x : \mathbb{R} \to X$ solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D\left[A(t)x + f(t)\right] \\ x(0) = \int_{-\infty}^{0} PU^{-1}(s)d\left(f(s) - f(0)\right) - \int_{0}^{\infty}(I-P)U^{-1}(s)d\left(f(s) - f(0)\right). \end{cases}$$

Pelo Corolário 1.36, podemos escrever

$$x(t) = U(t)x(0) + f(t) - f(0) - \int_0^t d_s\left[U(t)U^{-1}(s)\right]\left(f(s) - f(0)\right), \; t \in \mathbb{R}.$$

Pela Proposição 1.18, para todo $t \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} x(t) &= U(t)x(0) + f(t) - f(0) \\ &\quad - \left(f(t) - f(0) - \int_0^t U(t)U^{-1}(s)d\left[f(s) - f(0)\right] - g(t)\right) \\ &= U(t)x(0) + g(t) + \int_0^t U(t)PU^{-1}(s)d\left[f(s) - f(0)\right] \\ &\quad + \int_0^t U(t)(I-P)U^{-1}(s)d\left[f(s) - f(0)\right] \\ &= U(t)x(0) + g(t) + U(t)\left(\int_0^t PU^{-1}(s)d\left[f(s) - f(0)\right] \pm \int_{-\infty}^0 PU^{-1}(s)d\left[f(s) - f(0)\right]\right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (I-P)U^{-1}(s)d\left[f(s) - f(0]\right) \pm \int_0^\infty (I-P)U^{-1}(s)d\left[f(s) - f(0)\right]\right) \\ &= \int_{-\infty}^t U(t)PU^{-1}(s)d\left[f(s) - f(0)\right] - \int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(s)d\left[f(s) - f(0)\right] + g(t). \end{aligned}$$

Como as funções da última igualdade são limitadas, a solução x é limitada em $\mathbb{R}$. Pelo Corolário 2.12, x é a única solução limitada da EDO generalizada perturbada (2.17). ■

Observação 2.15 Suponha que a EDO generalizada perturbada (2.17) com $f \in G(\mathbb{R}, X)$, seja dada de tal forma que a EDO generalizada linear (2.11) correspondente satisfaça a condição (D) e, para $Y : \mathbb{R} \to L(X)$ localmente de variação limitada, a desigualdade

$$\left\| \int_a^b Y(r)df(r) \right\| \leq \int_a^b \|Y(r)\|\delta dr$$

seja satisfeita para algum $\delta > 0$ e para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então as hipóteses da Proposição 2.14 são satisfeitas. De fato, fixe $t_0 \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$x_n = \int_{-n}^{t_0} U(t_0)PU^{-1}(r)df(r).$$

Note que, para $n \geq m > |t_0|$, temos

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \left\| \int_{-n}^{-m} U(t_0)PU^{-1}(r)df(r) \right\| \leq \int_{-n}^{-m} K_1 e^{-\alpha_1(t_0 - r)} \delta dr \leq K_1 \delta e^{-\alpha_1 t_0} \int_{-n}^{-m} e^{\alpha_1 r} dr \\ &= K_1 \delta e^{-\alpha_1 t_0} \frac{1}{\alpha_1} \left(e^{-\alpha_1 m} - e^{-\alpha_1 n} \right) \to 0, \text{ quando } n, m \to \infty.\end{aligned}$$

Dessa forma, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe. Assim, a integral de Perron-Stieltjes

$$\int_{-\infty}^{t_0} U(t_0)PU^{-1}(r)df(r)$$

existe. A existência dessa integral segue pelo Teorema de Hake (Teorema 1.14), no caso em que o intervalo não é limitado (veja Observação 1.8).

Note que, de modo análogo ao feito acima, temos

$$\|x_n\| = \left\| \int_{-n}^{t_0} U(t_0)PU^{-1}(r)df(r) \right\| \leq \frac{K_1}{\alpha_1} \delta e^{-\alpha_1 t_0} \left(e^{\alpha_1 t_0} - e^{-\alpha_1 n} \right) \leq \frac{K_1}{\alpha_1} \delta.$$

Portanto, obtemos

$$\left\| \int_{-\infty}^{t_0} U(t_0)PU^{-1}(r)df(r) \right\| \leq \frac{K_1}{\alpha_1} \delta.$$

Como $t_0 \in \mathbb{R}$ é arbitrário e a constante $\frac{K_1}{\alpha_1}\delta$ não depende da escolha do $t_0 \in \mathbb{R}$, concluímos que a integral de Perron-Stieltjes $\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(r)df(r)$ existe e vale a desigualdade

$$\left\| \int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(r)df(r) \right\| \leq \frac{K_1}{\alpha_1} \delta$$

para $t \in \mathbb{R}$.

De modo análogo, pode-se mostrar que a integral de Perron-Stieltjes

$$\int_{t}^{\infty} U(t)(I - P)U^{-1}(r)df(r)$$

existe e vale

$$\left\| \int_{t}^{\infty} U(t)(I - P)U^{-1}(r)df(r) \right\| \leq \frac{K_2}{\alpha_2} \delta.$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Suponhamos, agora, que a EDO generalizada linear (2.11) satisfaça a condição (D), $A : \mathbb{R} \to L(X)$ seja um operador τ-periódico e que a projeção da dicotomia exponencial seja unicamente determinada. Defina $Y : \mathbb{R} \to L(X)$ por $Y(t) = U(t+\tau)$, em que $U(t+\tau) = U(t+\tau, 0)$. Note que

$$\begin{aligned} Y(t) &= I + \int_0^{t+\tau} d[A(s)]U(s) = U(\tau) + \int_\tau^{t+\tau} d[A(s)]U(s) = \\ &= U(\tau) + \int_0^t d[A(s+\tau)]U(s+\tau) = U(\tau) + \int_0^t d[A(s)]Y(s). \end{aligned}$$

Logo, Y é solução da EDO generalizada linear

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{d\tau} = D\left[A(t)Y\right] \\ Y(0) = U(\tau) \end{cases}$$

e, portanto, $Y(t) = U(t)U(\tau)$, ou seja, $U(t+\tau) = U(t)U(\tau)$.

Defina $\widetilde{P} = U(\tau)PU^{-1}(\tau)$. Assim, $\widetilde{P}$ é uma projeção e vale

$$\begin{aligned} U(t)\widetilde{P}U^{-1}(s) &= U(t)U(\tau)PU^{-1}(\tau)U^{-1}(s) \\ &= U(t)U(\tau)P\left(U(s)U(\tau)\right)^{-1} = U(t+\tau)PU^{-1}(s+\tau) \end{aligned}$$

e

$$U(t)(I-\widetilde{P})U^{-1}(s) = U(t+\tau)(I-P)U^{-1}(s+\tau).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|U(t)\widetilde{P}U^{-1}(s)\| &= \|U(t+\tau)PU^{-1}(s+\tau)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t+\tau-s-\tau)} \\ &= K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \ t \geq s, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|U(t)(I-\widetilde{P})U^{-1}(s)\| &= \|U(t+\tau)(I-P)U^{-1}(s+\tau)\| \\ &\leq K_2 e^{-\alpha_2(s+\tau-t-\tau)} = K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \ s \geq t. \end{aligned}$$

Como estamos supondo que a projeção da definição de dicotomia exponencial é unicamente determinada, temos $P = \widetilde{P} = U(\tau)PU^{-1}(\tau)$. Com isso, obtemos

$$U(t+\tau)PU^{-1}(t+\tau) = U(t)\widetilde{P}U^{-1}(t) = U(t)PU^{-1}(t),$$

ou seja, a aplicação $t \mapsto U(t)PU^{-1}(t)$ é τ-periódica. Analogamente, temos que a aplicação $t \mapsto U(t)(I-P)U^{-1}(t)$ também é τ-periódica.

A Proposição 2.16 exibe condições suficientes para que a EDO generalizada perturbada (2.17) possua uma única solução τ-periódica.

Proposição 2.16 *Suponha que valham as hipóteses da Proposição 2.13. Suponha, também, que a projeção P em* (2.12) *seja unicamente determinada e que A e f sejam τ-periódicas. Então a EDO generalizada perturbada (2.17) possuirá uma única solução τ-periódica.*

Demonstração. Seja $x : \mathbb{R} \to X$ solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D\left[A(t)x + f(t)\right] \\ x(0) = -\int_{-\infty}^{0} d_s\left[PU^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) + \int_{0}^{\infty} d_s\left[(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)). \end{cases}$$

Como mostramos na prova da Proposição 2.13, x pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t) - f(0) - \int_{-\infty}^{t} d_s\left[U(t)PU^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \\ &\quad + \int_{t}^{\infty} d_s\left[U(t)(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)),\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Note que, para cada $t \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} x(t+\tau) &= f(t+\tau) - f(0) - \int_{-\infty}^{t+\tau} d_s\left[U(t+\tau)PU^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \\ &\quad + \int_{t+\tau}^{\infty} d_s\left[U(t+\tau)(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \\ &= f(t) - f(0) - \int_{-\infty}^{t} d_s\left[U(t+\tau)PU^{-1}(s+\tau)\right](f(s+\tau)-f(0)) \\ &\quad + \int_{t}^{\infty} d_s\left[U(t+\tau)(I-P)U^{-1}(s+\tau)\right](f(s+\tau)-f(0)) \\ &= f(t) - f(0) - \int_{-\infty}^{t} d_s\left[U(t+\tau)U^{-1}(s+\tau)U(s+\tau)PU^{-1}(s+\tau)\right](f(s)-f(0)) \\ &\quad + \int_{t}^{\infty} d_s\left[U(t+\tau)U^{-1}(s+\tau)U(s+\tau)(I-P)U^{-1}(s+\tau)\right](f(s)-f(0)) \\ &= f(t) - f(0) - \int_{-\infty}^{t} d_s\left[U(t)U(\tau)U^{-1}(\tau)U^{-1}(s)U(s)PU^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \\ &\quad + \int_{t}^{\infty} d_s\left[U(t)U(\tau)U^{-1}(\tau)U^{-1}(s)U(s)(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s)-f(0)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& f(t) - f(0) - \int_{-\infty}^{t} d_s \left[U(t)PU^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)) \\
& + \int_{t}^{\infty} d_s \left[U(t)(I-P)U^{-1}(s)\right](f(s) - f(0)) = x(t).
\end{aligned}
$$

Assim, x é uma solução τ-periódica da EDO generalizada perturbada (2.17). Do Corolário 2.12, concluímos que x é a única solução de (2.17) o qual é τ-periódica. ■

Capítulo 3

Dicotomia exponencial para sistemas perturbados

Neste capítulo, iremos estudar condições para que uma EDO generalizada linear com dicotomia exponencial permaneça com dicotomia quando essa equação "sofrer pequenas" perturbações.

3.1 EDOs generalizadas perturbadas

Sejam X um espaço de Banach, $J = [0, \infty)$ e $A : J \to L(X)$ um operador tal que a EDO generalizada linear

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x] \tag{3.1}$$

possua dicotomia exponencial, isto é, existem constantes positivas $K_1, K_2, \alpha_1, \alpha_2$ e uma projeção P tais que

- $\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$ para todo $t \geq s \geq 0$;
- $\|U(t)(I - P)U^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$ para todo $s \geq t \geq 0$.

Estamos denotando $U(t) = U(t, 0)$, $t \in J$.

Seja, agora, $B : J \to L(X)$ um operador tal que a EDO generalizada perturbada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[(A(t) + B(t))x] \tag{3.2}$$

possua um operador fundamental $V : J \times J \to L(X)$. Queremos encontrar condições sobre B tais que a equação (3.2) também possua uma dicotomia exponencial, ou seja, queremos encontrar condições sobre o operador B que garantam a existência de constantes positivas L_1, L_2, β_1 e β_2 e uma projeção $\widetilde{P}$ satisfazendo as seguintes estimativas

- $\|V(t)\widetilde{P}V^{-1}(s)\| \leq L_1 e^{-\beta_1(t-s)}$, para todo $t \geq s \geq 0$,
- $\|V(t)(I-\widetilde{P})V^{-1}(s)\| \leq L_2 e^{-\beta_2(s-t)}$, para todo $s \geq t \geq 0$,

em que $V(t) = V(t,0)$.

Iniciaremos com a apresentação de alguns resultados auxiliares que serão de grande importância nesse capítulo. A demonstração do primeiro lema segue os passos do Lema 6.2 em [18].

Lema 3.1 *Sejam $\alpha, \gamma > 0$, $K, L, M \geq 0$ constantes e $u : [\tau, \infty) \to [0, \infty)$ uma função limitada tal que as integrais de Perron*

$$\int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds \quad e \quad \int_t^\infty e^{-\gamma(s-t)}u(s)ds$$

existem para todo $t \geq \tau$. Suponha que $\beta := \dfrac{L}{\alpha} + \dfrac{M}{\gamma} < 1$ e que a desigualdade

$$u(t) \leq Ke^{-\alpha(t-\tau)} + L\int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds + M\int_t^\infty e^{-\gamma(s-t)}u(s)ds, \quad t \geq \tau,$$

seja satisfeita. Então, temos

$$u(t) \leq \frac{K}{1-\beta}e^{-(\alpha - \frac{L}{1-\beta})(t-\tau)}, \quad \textit{para todo} \quad t \geq \tau.$$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $u(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Suponha o contrário. Então $\delta := \limsup_{t\to\infty} u(t) > 0$. Assim, dado $\theta \in (\beta, 1)$, existe $t_1 > \tau$ tal que

$$t \geq t_1 \implies u(t) \leq \frac{\delta}{\theta}.$$

Logo, para $t \geq t_1$, temos

$$u(t) \;\leq\; Ke^{-\alpha(t-\tau)} + L\int_\tau^{t_1} e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds + L\int_{t_1}^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds + M\int_t^\infty e^{-\gamma(s-t)}u(s)ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Ke^{-\alpha(t-\tau)} + L\int_\tau^{t_1} e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds + L\frac{\delta}{\theta}\int_{t_1}^{t} e^{-\alpha(t-s)}ds + M\frac{\delta}{\theta}\int_t^\infty e^{-\gamma(s-t)}ds\\
&= Ke^{-\alpha(t-\tau)} + L\int_\tau^{t_1} e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds + L\frac{\delta}{\theta}e^{-\alpha t}\frac{1}{\alpha}\Big(e^{\alpha t} - e^{\alpha t_1}\Big) + M\frac{\delta}{\theta}\frac{1}{\gamma}\\
&= e^{-\alpha t}\left(Ke^{\alpha\tau} + L\int_\tau^{t_1} e^{\alpha s}u(s)ds\right) + \left(\frac{L}{\alpha}+\frac{M}{\gamma}\right)\frac{\delta}{\theta} - \frac{L}{\alpha}\frac{\delta}{\theta}e^{-\alpha(t-t_1)}\\
&\leq e^{-\alpha t}\left(Ke^{\alpha\tau} + L\int_\tau^{t_1} e^{\alpha s}u(s)ds\right) + \beta\frac{\delta}{\theta}.
\end{aligned}
$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $e^{-\alpha t} \to 0$ quando $t \to \infty$, existe $\tilde{t} \geq \tau$ tal que $u(t) \leq \epsilon + \dfrac{\beta}{\theta}\delta$ sempre que $t \geq \tilde{t}$. Portanto,

$$
\delta := \lim_{t\to\infty}\sup u(t) \leq \frac{\beta}{\theta}\delta < \delta
$$

o que é um absurdo. Logo $u(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Seja, então, $v(t) = \sup_{s\geq t} u(s)$. Dessa forma, v é monótona não crescente $\big($note que v é regrada em $[\tau,\infty)$ e $var_{s_1}^{s_2} v \leq \sup_{t\in[s_1,\infty)} u(t)$ para todo $[s_1,s_2] \subset [\tau,\infty)\big)$.

Como foi mostrado acima, $u(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Assim, dado $t \in [\tau,\infty)$, existe $t_1 \geq t$ tal que $v(t) = v(s) = v(t_1)$ para $s \in [t,t_1]$ e $v(s) < v(t)$ para $s > t_1$. Logo, como $t_1 \geq t$, temos

$$
\begin{aligned}
v(t) &= u(t_1) \leq Ke^{-\alpha(t_1-\tau)} + L\int_\tau^{t_1} e^{-\alpha(t_1-s)}u(s)ds + M\int_{t_1}^\infty e^{-\gamma(s-t_1)}u(s)ds\\
&\leq Ke^{-\alpha(t_1-\tau)} + L\int_\tau^{t} e^{-\alpha(t_1-s)}v(s)ds + L\int_t^{t_1} e^{-\alpha(t_1-s)}v(s)ds + M\int_{t_1}^\infty e^{-\gamma(s-t_1)}v(s)ds\\
&\leq Ke^{-\alpha(t-\tau)} + L\int_\tau^{t} e^{-\alpha(t-s)}v(s)ds + L\int_t^{t_1} e^{-\alpha(t_1-s)}v(t)ds + M\int_{t_1}^\infty e^{-\gamma(s-t_1)}v(t)ds\\
&\leq Ke^{-\alpha(t-\tau)} + L\int_\tau^{t} e^{-\alpha(t-s)}v(s)ds + \left(\frac{L}{\alpha}+\frac{M}{\gamma}\right)v(t)\\
&= Ke^{-\alpha(t-\tau)} + L\int_\tau^{t} e^{-\alpha(t-s)}v(s)ds + \beta v(t).
\end{aligned}
$$

Portanto, para todo $t \geq \tau$, obtemos

$$
e^{\alpha t}v(t) \leq \frac{K}{1-\beta}e^{\alpha\tau} + \frac{L}{1-\beta}\int_\tau^t e^{\alpha s}v(s)ds.
$$

Pelo Teorema 1.21, temos

$$
e^{\alpha t}v(t) \leq \frac{K}{1-\beta}e^{\alpha\tau}e^{\frac{L}{1-\beta}(t-\tau)}.
$$

Daí, multiplicando a desigualdade acima por $e^{-\alpha t}$, concluímos que

$$u(t) \leq v(t) \leq \frac{K}{1-\beta} e^{-(\alpha - \frac{L}{1-\beta})(t-\tau)}, \text{ para todo } t \geq \tau,$$

como queríamos demonstrar. ■

De modo análogo, podemos demonstrar o seguinte lema.

Lema 3.2 *Sejam $\alpha, \gamma > 0$, $K, L, M \geq 0$ constantes e $u : (-\infty, \tau] \to [0, \infty)$ uma função limitada tal que as integrais de Perron*

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)} u(s) ds \qquad e \qquad \int_{t}^{\tau} e^{-\alpha(s-t)} u(s) ds$$

existem para todo $t \leq \tau$. Suponha que $\beta := \frac{L}{\alpha} + \frac{M}{\gamma} < 1$ e que a desigualdade

$$u(t) \leq K e^{-\alpha(\tau - t)} + L \int_{t}^{\tau} e^{\alpha(s-t)} u(s) ds + M \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)} u(s) ds, \quad t \leq \tau,$$

seja satisfeita. Então

$$u(t) \leq \frac{K}{1-\beta} e^{-(\alpha - \frac{L}{1-\beta})(\tau - t)} \quad \textit{para todo } t \leq \tau.$$

Observação 3.3 O Lema 3.2 continuará verdadeiro, se o intervalo de definição da função u for um intervalo da forma $[\eta, \tau]$ e se trocarmos $-\infty$ por η no limite de integração. O mesmo se aplica para o Lema 3.1.

Com o intuito de encontrar uma dicotomia exponencial para a EDO generalizada linear 3.2, consideremos os conjuntos auxiliares

$$J_+ = \{(t, s) \in J \times J : \; t \geq s\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{B}(J_+) = \{A : J_+ \to L(X) : \sup_{(t,s) \in J_+} ||A(t, s)|| < \infty \text{ e } A(\cdot, s) \text{ é regrada, para todo } s \in J\}.$$

Consideremos $\mathcal{B}(J_+)$ com a norma $\|A\|_\infty = \sup_{(t,s) \in J_+} ||A(t, s)||$.

Lema 3.4 *O conjunto $\mathcal{B}(J_+)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(J_+)$ uma sequência de Cauchy. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_n - A_m\|_\infty < \epsilon, \text{ para } m, n \geq N.$$

Dessa forma, para todo $(t,s) \in J_+$, temos

$$\|A_n(t,s) - A_m(t,s)\| < \epsilon, \text{ para } m, n \geq N. \tag{3.3}$$

Logo, para cada par $(t,s) \in J_+$ fixado, a sequência $\{A_n(t,s)\})_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X)$ é de Cauchy. Como $L(X)$ é um espaço de Banach, $\{A_n(t,s)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $L(X)$. Dessa forma, existe uma função $A : J_+ \to L(X)$ tal que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para A. Vamos mostrar que essa convergência é uniforme.

Seja $\epsilon_1 > 0$ dado. Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_n(t,s) - A_m(t,s)\| < \epsilon_1, \text{ para todo par } (t,s) \in J_+ \text{ e quaisquer } m, n \geq N_1. \tag{3.4}$$

Afirmamos que

$$\|A_n(t,s) - A(t,s)\| \leq \epsilon_1, \text{ para todo par } (t,s) \in J_+ \text{ e para todo } n \geq N_1. \tag{3.5}$$

Suponha o contrário que existam $(t_0,s_0) \in J_+$ e $n_1 \geq N_1$ tais que

$$\|A_{n_1}(t_0,s_0) - A(t_0,s_0)\| > \epsilon_1.$$

Defina $\epsilon_2 = \|A_{n_1}(t_0,s_0) - A(t_0,s_0)\| - \epsilon_1 > 0$. Como $\{A_n(t_0,s_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $A(t_0,s_0)$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_n(t_0,s_0) - A(t_0,s_0)\| < \epsilon_2, \text{ para todo } n \geq N_2. \tag{3.6}$$

Seja $n_2 \geq \max\{N_1, N_2\}$. Assim, pela desigualdade (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\|A_{n_1}(t_0,s_0) - A_{n_2}(t_0,s_0)\| &\geq \|A_{n_1}(t_0,s_0) - A(t_0,s_0)\| - \|A(t_0,s_0) - A_{n_2}(t_0,s_0)\| \\
&> \|A_{n_1}(t_0,s_0) - A(t_0,s_0)\| - \epsilon_2 = \epsilon_1,
\end{aligned}$$

o que contradiz a desigualdade (3.4). Portanto (3.5) é verdade e, consequentemente, $\|A_n - A\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, a convergência é uniforme.

Vamos, agora, mostrar que $A \in \mathcal{B}(J_+)$. Primeiramente, mostraremos que A é limitado. De fato, tome $\epsilon = 1$. Como $\|A_n - A\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_n(t,s) - A(t,s)\| < 1, \text{ para todo par } (t,s) \in J_+ \text{ e para todo } n \geq N. \tag{3.7}$$

Assim, para todo $(t,s) \in J_+$, temos

$$\|A(t,s)\| \leq \|A(t,s) - A_N(t,s)\| + \|A_N(t,s)\| < 1 + \|A_N\|_\infty.$$

Portanto $\|A\|_\infty = \sup\limits_{(t,s)\in J_+} ||A(t,s)|| \leq 1 + \|A_N\|_\infty$.

Vamos, agora, mostrar que $A(\cdot, s)$ é regrada para todo $s \geq 0$. Para isso, precisamos mostrar que $A(t^+, s)$ e $A(t^-, s)$ existem para todo $t > s$ e que $A(s^+, s)$ existe. Sejam, então, $s \geq 0$ e $t > s$ dados. Fixe $T > t$ e defina os operadores $Y : [s,T] \to L(X)$ e $Y_n : [s,T] \to L(X)$ por $Y(\tau) = A(\tau, s)$ e por $Y_n(\tau) = A_n(\tau, s)$, $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $Y_n \to Y$ quando $n \to \infty$. Como $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G\big([s,T], L(X)\big)$ e $G\big([s,T], L(X)\big)$ é um espaço de Banach, obtemos $Y \in G\big([s,T], L(X)\big)$ e, assim, $Y(\tau^-)$ existe para todo $\tau \in (s,T]$ e $Y(\tau^+)$ existe para todo $\tau \in [s,T)$. Portanto $A(t^-, s) = Y(t^-)$, $A(t^+, s) = Y(t^+)$ e $A(s^+, s) = Y(s^+)$ existem. Logo $A(\cdot, s)$ é regrada, para todo $s \geq 0$.

Dessa forma, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{B}(J_+)$ e, assim, $\mathcal{B}(J_+)$ é um espaço de Banach. ■

No caso do intervalo $J = [0, \infty)$, temos a seguinte definição para funções de variação limitada.

Definição 3.5 *Uma aplicação $H : J \to L(X)$ é chamada de variação limitada em $J = [0,\infty)$, se $\text{var}_J H = \sup\{\text{var}_a^b H : a, b \in J, a < b\} < \infty$.*

De mesma forma apresentada no Capítulo 1, vamos denotar por $BV(J, L(X))$ o conjunto de todas as funções definidas em J à valores em $L(X)$ com variação limitada em $J = [0, \infty)$.

Lema 3.6 *Sejam $B \in BV(J, L(X))$ e $Y \in G(J, L(X))$, com $\|Y\|_\infty = \sup\limits_{s\in J} ||Y(s)|| < \infty$. Então, para todo $t \in J$, a integral de Perron-Stieltjes*

$$\int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma)$$

existe e vale a estimativa

$$\left\| \int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma) \right\| \leq K_2 \|Y\|_\infty (\text{var}_J B),$$

em que U é o operador fundamental da EDO generalizada (3.1), P é a projeção e K_2 é a constante da definição da dicotomia exponencial da EDO generalizada (3.1).

Demonstração. A integral de Perron-Stieltjes

$$\int_t^T U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma)$$

existe para $T \geq t \geq 0$, veja [27, Teorema 3.8].

Seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ uma sequência crescente arbitrária com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Fixe $t \in J$ e defina a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X)$ por

$$x_n = \int_t^{t_n} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma).$$

A sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. De fato, sejam $n, m \in \mathbb{N}$ com $n \geq m$. Segue da Proposição 1.19 que

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &= \left\| \int_{t_m}^{t_n} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma) \right\| \\
&\leq \int_{t_m}^{t_n} \|U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)\| \|Y\|_\infty d[\mathrm{var}_{t_m}^{\sigma} B] \\
&\leq \sup_{\sigma\in[t_m,t_n]} \|U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)\| \|Y\|_\infty (\mathrm{var}_{t_m}^{t_n} B) \\
&\leq K_2 e^{\alpha_2 t} \sup_{\sigma\in[t_m,t_n]} e^{-\alpha_2\sigma} \|Y\|_\infty (\mathrm{var}_{t_m}^{t_n} B) \\
&\leq K_2 e^{\alpha_2 t} e^{-\alpha_2 t_m} \|Y\|_\infty (\mathrm{var}_{t_m}^{t_n} B) \\
&\leq K_2 e^{\alpha_2 t} e^{-\alpha_2 t_m} \|Y\|_\infty (\mathrm{var}_J B).
\end{aligned}$$

Portanto, quando $m, n \to \infty$, $\|x_n - x_m\| \to 0$. Dessa forma, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como $L(X)$ é um espaço de Banach, existe $I \in L(X)$ tal que $x_n \to I$ quando $n \to \infty$. É fácil ver que o elemente $I \in L(X)$ não depende da escolha particular da sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ crescente com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Com isso, concluímos que a integral de Perron-Stieltjes

$$\int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma)$$

existe e é igual a I.

Agora, note que, de modo análogo ao feito acima, para $T \geq t \geq 0$, temos

$$\left\| \int_t^T U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma) \right\| \leq K_2 \|Y\|_\infty (\mathrm{var}_J B)$$

e dessa forma

$$\left\| \int_t^{\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma) \right\| \leq K_2 \|Y\|_\infty (\mathrm{var}_J B),$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 3.7 De modo análogo ao feito na demonstração do Lema 3.6, para $t \geq s \geq 0$, vale

$$\left\| \int_s^{t} U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma) \right\| \leq K_1 \|Y\|_\infty (\mathrm{var}_J B). \tag{3.8}$$

O próximo resultado nos permitirá definir um operador que nos auxiliará a encontrar a projeção desejada para obter a dicotomia exponencial para a EDO generalizada (3.2). A demonstração desse resultado segue os passos do Lema 3.1 em [31].

Proposição 3.8 *Suponha que* $(K_1 + K_2)(\mathrm{var}_J B) < 1$ *e que exista uma constante* $\delta > 0$, $\delta < \left(\dfrac{K_1}{\alpha_1} + \dfrac{K_2}{\alpha_2}\right)^{-1}$, *tal que*

$$\left\| \int_a^{b} H_1(r)d[B(r)]H_2(r) \right\| \leq \int_a^b \delta ||H_1(r)||||H_2(r)||dr, \tag{3.9}$$

para todo $H_1, H_2 \in G(J, L(X))$, *com* $a, b \in J$ *e* $a \leq b$. *Dado* $A \in \mathcal{B}(J_+)$, *considere o operador* $TA : J_+ \to L(X)$ *definido por*

$$\begin{aligned} (TA)(t,s) &= U(t)PU^{-1}(s) + \int_s^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s) \\ &\quad - \int_t^{\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s), \end{aligned}$$

para todo $(t,s) \in J_+$. *Então o operador* $T : \mathcal{B}(J_+) \to \mathcal{B}(J_+)$ *possui um único ponto fixo* A *satisfazendo*

$$\|A(t,s)\| \leq L_1 e^{-\theta(t-s)}, \qquad \text{para } t \geq s \geq 0, \tag{3.10}$$

com $L_1 = \dfrac{K_1}{1-\beta}$, $\theta = \left(\alpha_1 - \dfrac{K_1\delta}{1-\beta}\right)$ *e* $\beta = \left(\dfrac{K_1}{\alpha_1} + \dfrac{K_2}{\alpha_2}\right)\delta$.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{B}(J_+)$. Do Lema 3.6 e da Observação 3.7, temos

$$\begin{aligned} ||(TA)(t,s)|| &= \Big\| U(t)PU^{-1}(s) + \int_s^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s) \\ &\quad - \int_t^{\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s) \Big\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\|U(t)PU^{-1}(s)\right\| + \left\|\int_s^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s)\right\| \\ &\quad + \left\|\int_t^{\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s)\right\| \\ &\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} + (K_1+K_2)\|A\|_{\infty}(\mathrm{var}_J B), \end{aligned}$$

para todo $t \geq s \geq 0$. Dessa forma $T : \mathcal{B}(J_+) \to \mathcal{B}(J_+)$.

De modo análogo, para $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(J_+)$, vale

$$||(TA_1)(t,s) - (TA_2)(t,s)|| \leq (K_1+K_2)(\mathrm{var}_J B)||A_1 - A_2||_{\infty}.$$

Portanto, pela hipótese, temos que T é uma contração e, assim, possui um único ponto fixo $A \in \mathcal{B}(J_+)$ dado por

$$\begin{aligned} A(t,s) &= U(t)PU^{-1}(s) + \int_s^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s) \\ &\quad - \int_t^{\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s). \end{aligned}$$

Utilizando a Hipótese (3.9), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} ||A(t,s)|| &= \Bigg\| U(t)PU^{-1}(s) + \int_s^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s) \\ &\quad - \int_t^{\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s)\Bigg\| \\ &\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} + \int_s^t K_1 e^{-\alpha_1(t-\sigma)}\delta||A(\sigma,s)||d\sigma \\ &\quad + \int_t^{\infty} K_2 e^{-\alpha_2(\sigma-t)}\delta||A(\sigma,s)]||d\sigma, \quad (t,s) \in J_+. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 3.1, temos

$$\|A(t,s)\| \leq L_1 e^{-\theta(t-s)}, \qquad \text{para } t \geq s \geq 0,$$

em que com $L_1 = \dfrac{K_1}{1-\beta}$, $\theta = \left(\alpha_1 - \dfrac{K_1\delta}{1-\beta}\right)$ e $\beta = \left(\dfrac{K_1}{\alpha_1} + \dfrac{K_2}{\alpha_2}\right)\delta$, como queríamos demonstrar. ■

O lema a seguir nos mostra que o ponto fixo A do operador T apresentado na Proposição 3.8 possui uma propriedade de semigrupo. Sua demonstração segue os passos do Lema 3.2 em [31].

Lema 3.9 *Suponha que* $(K_1 + K_2)(\mathrm{var}_J B) < 1$. *Para* $\tau, t, s \in J$ *com* $\tau \geq t \geq s$, *vale*

$$A(\tau, t)A(t, s) = A(\tau, s),$$

em que A *é o ponto fixo do operador* T *definido na Proposição 3.8.*

Demonstração. Para $\tau, t, s \in J$ com $\tau \geq t \geq s \geq 0$, valem as igualdades

$$\begin{aligned}
A(\tau,t)A(t,s) &= \left(U(\tau)PU^{-1}(t) + \int_t^\tau U(\tau)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)\right.\\
&\quad \left.-\int_\tau^\infty U(\tau)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)\right)A(t,s)\\
&= U(\tau)PU^{-1}(t)A(t,s) + \left(\int_t^\tau U(\tau)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)\right)A(t,s)\\
&\quad -\left(\int_\tau^\infty U(\tau)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)\right)A(t,s)\\
&= U(\tau)PU^{-1}(t)U(t)PU^{-1}(s)\\
&\quad +U(\tau)PU^{-1}(t)\left(\int_s^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s)\right)\\
&\quad -U(\tau)PU^{-1}(t)\left(\int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s)\right)\\
&\quad +\int_t^\tau U(\tau)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)A(t,s)\\
&\quad -\int_\tau^\infty U(\tau)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)A(t,s)\\
&= U(\tau)PU^{-1}(s) + \int_s^t U(\tau)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s)\\
&\quad +\int_t^\tau U(\tau)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)A(t,s)\\
&\quad -\int_\tau^\infty U(\tau)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)A(t,s),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato que $P(I-P) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
A(\tau,t)A(t,s) - A(\tau,s) &= U(\tau)PU^{-1}(s) + \int_s^t U(\tau)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s)\\
&\quad +\int_t^\tau U(\tau)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)A(t,s)\\
&\quad -\int_\tau^\infty U(\tau)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)A(t,s)\\
&\quad -U(\tau)PU^{-1}(s) - \int_s^\tau U(\tau)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\tau}^{\infty} U(\tau)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,s)\\
=\ &\int_{t}^{\tau} U(\tau)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)](A(\sigma,t)A(t,s)-A(\sigma,s))\\
&-\int_{\tau}^{\infty} U(\tau)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)](A(\sigma,t)A(t,s)-A(\sigma,s)).
\end{aligned}
$$

Portanto, definindo $\varphi(u)=A(u,t)A(t,s)-A(u,s)$, segue que φ é ponto fixo do operador $\widetilde{T}$ definido por

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{T}Y)(u) &= \int_{t}^{u} U(u)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma)\\
&- \int_{u}^{\infty} U(u)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma).
\end{aligned}
$$

De modo análogo ao feito para o operador T na demonstração da Proposição 3.8, podemos mostrar que $\widetilde{T}$ possui um único ponto fixo e este é $\varphi\equiv 0$. Portanto

$$A(\tau,t)A(t,s)-A(\tau,s)=\varphi(\tau)=0$$

e, assim, o resultado segue. ■

Segue diretamente do Lema 3.9 que $A(t,t)$ é uma projeção para todo $t\in J$. Defina a projeção

$$\widetilde{P}=A(0,0) \tag{3.11}$$

e o operador

$$Q(t)=U(t)PU^{-1}(t),\quad t\in J. \tag{3.12}$$

Usando as ideias desenvolvidas em [31], vamos encontrar as relações entre P e $\widetilde{P}$.

Note que, para $t\geq 0$, temos

$$
\begin{aligned}
Q(t)A(t,t) &= U(t)PU^{-1}(t)\left(U(t)PU^{-1}(t)-\int_{t}^{\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)\right)\\
&= U(t)PU^{-1}(t)-\int_{t}^{\infty} U(t)P(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,t)\\
&= U(t)PU^{-1}(t)=Q(t)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A(t,0)P &= U(t)PU^{-1}(0)P+\left(\int_{0}^{t} U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\right)P\\
&-\left(\int_{t}^{\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\right)P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= U(t)PU^{-1}(0)+\int_0^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)P \\
&\quad -\int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)P \\
&= T(AP)(t,0).
\end{aligned}
$$

Pela unicidade do ponto fixo de T, obtemos $A(t,0)P = A(t,0)$. Em particular, temos

$$P\widetilde{P} = PA(0,0) = Q(0)A(0,0) = Q(0) = P \tag{3.13}$$

e

$$\widetilde{P}P = A(0,0)P = A(0,0) = \widetilde{P}. \tag{3.14}$$

Consideremos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 3.10 *Suponha que a condição* (3.9) *seja válida. Então*

$$\int_0^t d[U(t)U^{-1}(\sigma)]\left[\int_0^\sigma d[B(r)]A(r,0)\right] = -\int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d\left[\int_0^\sigma d[B(r)]A(r,0)\right]+$$
$$+\int_0^t d[B(r)]A(r,0).$$

Demonstração. Dados $a,b\in J$, $a\leq b$, segue pela condição (3.9) que

$$\left\|\int_a^b d[B(r)]A(r,0)\right\| \leq \int_a^b \delta||A||_\infty dr = \delta||A||_\infty(b-a).$$

Então

$$\Delta^+\left(\int_0^\tau d[B(r)]A(r,0)\right) = \Delta^-\left(\int_0^\tau d[B(r)]A(r,0)\right) = 0,$$

para todo $\tau\in[0,t)$. Agora, usando a Proposição 1.18, obtemos

$$\int_0^t d[U(t)U^{-1}(\sigma)]\left[\int_0^\sigma d[B(r)]A(r,0)\right] = -\int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d\left[\int_0^\sigma d[B(r)]A(r,0)\right]+$$
$$+\int_0^t d[B(r)]A(r,0),$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 3.11 *Suponha que a condição* (3.9) *seja válida. O operador* $A(\cdot,0)$ *é solução da EDO generalizada perturbada*

$$
\begin{cases}
\dfrac{dZ}{d\tau} = D[(A(t)+B(t))Z] \\
Z(0) = A(0,0) = P - \displaystyle\int_0^\infty (I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)
\end{cases}
$$

em que A é o ponto fixo do operador T encontrado na Proposição 3.8.

Demonstração. Para $t \geq 0$, valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
A(t,0) &= U(t)PU^{-1}(0) + \int_0^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&\quad - \int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&= U(t)PU^{-1}(0) + \int_0^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&\quad + U(t)\int_0^t (I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&\quad - U(t)\int_0^t (I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&\quad - \int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&= U(t)P - U(t)\int_0^\infty (I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&\quad + \int_0^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&\quad + \int_0^t U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&= U(t)\left(P - \int_0^\infty (I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\right) \\
&\quad + \int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0) \\
&= U(t)A(0,0) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d\left[\int_0^\sigma d[B(r)]A(r,0)\right] \\
&= U(t)A(0,0) + \int_0^t d[B(r)]A(r,0) - \int_0^t d[U(t)U^{-1}(\sigma)]\left[\int_0^\sigma d[B(r)]A(r,0)\right],
\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do Lema 3.10. Portanto, a afirmação segue pelo Teorema 1.35. ■

No próximo resultado, vamos mostrar que a projeção $\widetilde{P}$ definida em (3.11) é a projeção desejada para a dicotomia exponencial da EDO generalizada (3.2). Para isso utilizaremos técnicas encontradas em [8], Capítulo 4.

Teorema 3.12 *Sejam X um espaço de Banach e $A : [0,\infty) \to L(X)$ um operador tal que a EDO generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]$$

possua uma dicotomia exponencial com constantes K_1 e K_2, expoentes α_1 e α_2 e projeção P. Seja $B \in BV([0,\infty), L(X))$ um operador satisfazendo (3.9) tal que δ satisfaz

$$\delta\left(\frac{K_1}{\alpha_1}+\frac{K_2}{\alpha_2}\right)<\frac{1}{2}$$

e

$$\max\left\{\delta\left[\left(\frac{K_1}{\alpha_1}+\frac{K_2}{\alpha_2}\right)+\frac{K_1(2K_2+1)}{\alpha_1+\alpha_2}\right], \delta\left[\left(\frac{K_1}{\alpha_1}+\frac{K_2}{\alpha_2}\right)+\frac{K_2(2K_1+1)}{\alpha_1+\alpha_2}\right]\right\}<1.$$

Além disso, se $(K_1+K_2)(\mathrm{var}_J B)<1$, então a EDO generalizada linear perturbada

$$\frac{dx}{d\tau}=D\left[(A(t)+B(t))\,x\right]$$

também possuirá dicotomia exponencial.

Demonstração. Utilizando a Proposição 3.11, podemos escrever $A(t,0)=V(t)A(0,0)=V(t)\widetilde{P}$, em que $V: J\to L(X)$ é o operador fundamental da EDO generalizada (3.2).

Para $s\geq 0$, temos

$$\begin{aligned} A(s,0) &= U(s)PU^{-1}(0)+\int_0^s U(s)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\\ &\quad -\int_s^\infty U(s)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0). \end{aligned}$$

Portanto, para $t\geq s\geq 0$, vale

$$U(t)PU^{-1}(s)A(s,0)=U(t)P+\int_0^s U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0).$$

Dessa forma, para $t\geq s\geq 0$, temos

$$\begin{aligned} A(t,0) &= U(t)PU^{-1}(0)+\int_0^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\\ &\quad -\int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\\ \\ &= U(t)PU^{-1}(s)A(s,0)-\int_0^s U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\\ &\quad +\int_0^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\\ &\quad -\int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\\ &= U(t)PU^{-1}(s)A(s,0)+\int_s^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0)\\ &\quad -\int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]A(\sigma,0). \end{aligned}$$

Portanto, para $t \geq s \geq 0$ e $\xi \in X$, temos

$$
\begin{aligned}
V(t)\widetilde{P}\xi = A(t,0)\xi &= U(t)PU^{-1}(s)V(s)\widetilde{P}\xi + \int_s^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)\widetilde{P}\xi \\
&\quad - \int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)\widetilde{P}\xi.
\end{aligned}
$$

Defina, agora, $Y(t) = V(t)(I-\widetilde{P})$, $t \in J$. Usando o Teorema 1.35 e a Proposição 1.18, obtemos

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= V(t)(I-\widetilde{P}) \\
&= \left(U(t) + \int_0^t d[B(r)]V(r) - \int_0^t d[U(t)U^{-1}(\sigma)]\left[\int_0^\sigma d[B(r)]V(r)\right]\right)(I-\widetilde{P}) \\
&= \left(U(t) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d\left[\int_0^\sigma d[B(r)]V(r)\right]\right)(I-\widetilde{P}) \\
&= \left(U(t) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)\right)(I-\widetilde{P}) \\
&= U(t)(I-\widetilde{P}) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)(I-\widetilde{P}) \\
&= U(t)(I-\widetilde{P}) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma), \quad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Como $(I-P)(I-\widetilde{P}) = I - \widetilde{P} - P + P\widetilde{P} = I - \widetilde{P}$, para $s \geq t \geq 0$, temos

$$
U(t)(I-P)U^{-1}(s)Y(s) = U(t)(I-\widetilde{P}) + \int_0^s U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma).
$$

Assim, para $s \geq t \geq 0$, valem as desigualdades

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= U(t)(I-\widetilde{P}) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma) \\
&= U(t)(I-P)U^{-1}(s)Y(s) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma) \\
&\quad - \int_0^s U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma) \\
&= U(t)(I-P)U^{-1}(s)Y(s) + \int_0^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma) \\
&\quad - \int_t^s U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]Y(\sigma).
\end{aligned}
$$

Dessa forma, para $s \geq t \geq 0$ e $\xi \in X$, obtemos

$$\begin{aligned} V(t)(I-\widetilde{P})\xi &= U(t)(I-P)U^{-1}(s)V(s)(I-\widetilde{P})\xi \\ &+ \int_0^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)(I-\widetilde{P})\xi \\ &- \int_t^s U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)(I-\widetilde{P})\xi. \end{aligned}$$

Utilizando as expressões de $V(t)\tilde{P}\xi$ e $V(t)(I-\widetilde{P})\xi$ obtidas anteriormente, concluímos as seguintes estimativas:

- Para $t \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left\|V(t)\widetilde{P}\xi\right\| &\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\left\|V(s)\widetilde{P}\xi\right\| + K_1\delta\int_s^t e^{-\alpha_1(t-\sigma)}\left\|V(\sigma)\widetilde{P}\xi\right\| d\sigma \\ &+ K_2\delta\int_t^\infty e^{-\alpha_2(\sigma-t)}\left\|V(\sigma)\widetilde{P}\xi\right\| d\sigma. \end{aligned}$$

- Para $s \geq t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left\|V(t)(I-\widetilde{P})\xi\right\| &\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\left\|V(s)(I-\widetilde{P})\xi\right\| \\ &+ K_1\delta\int_0^t e^{-\alpha_1(t-\sigma)}\left\|V(\sigma)(I-\widetilde{P})\xi\right\| d\sigma \\ &+ K_2\delta\int_t^s e^{-\alpha_2(\sigma-t)}\left\|V(\sigma)(I-\widetilde{P})\xi\right\| d\sigma. \end{aligned}$$

Com as desigualdades acima, utilizando o Lema 3.1 e a Observação 3.3, conseguimos as seguintes estimativas:

$$\|V(t)\widetilde{P}\xi\| \leq L_1 e^{-\beta_1(t-s)}\|V(s)\widetilde{P}\xi\|, \text{ para } t \geq s \geq 0, \tag{3.15}$$

$$\|V(t)(I-\widetilde{P})\xi\| \leq L_2 e^{-\beta_2(s-t)}\|V(s)(I-\widetilde{P})\xi\|, \text{ para } s \geq t \geq 0, \tag{3.16}$$

em que $\theta = \left(\frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2}\right)\delta$, $\beta_1 = \alpha_1 - \frac{K_1\delta}{1-\theta}$, $L_1 = \frac{K_1}{1-\theta}$, $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{K_2\delta}{1-\theta}$ e $L_2 = \frac{K_2}{1-\theta}$. Note que $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > 0$ pois $\delta\left(\frac{K_1}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2}\right) < \frac{1}{2}$.

Pela Proposição 2.5, para provarmos que a EDO generalizada (3.2) possui uma dicotomia exponencial, falta apenas mostrar que existe uma constante $L' > 0$, tal que

$$\|V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t)\| \leq L', \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Lembremos que, para $t \geq s \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} V(t)\widetilde{P} &= U(t)PU^{-1}(s)V(s)\widetilde{P} + \int_s^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)\widetilde{P} \\ &- \int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)\widetilde{P}. \end{aligned}$$

Assim,

$$U(t)(I-P)U^{-1}(t)V(t)\widetilde{P} = -\int_t^\infty U(t)(I-P)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)\widetilde{P}.$$

Portanto, usando (3.15), tem-se

$$\begin{aligned} \left\|U(t)(I-P)U^{-1}(t)V(t)\widetilde{P}\xi\right\| &\leq \int_t^\infty K_2 e^{-\alpha_2(\sigma-t)}\|V(\sigma)\widetilde{P}\xi\|\delta d\sigma \\ &\leq \delta K_2 L_1\|V(t)\widetilde{P}\xi\| \int_t^\infty e^{-(\alpha_2+\beta_1)(\sigma-t)}d\sigma \\ &= \delta\frac{K_2L_1}{\alpha_2+\beta_1}\|V(t)\widetilde{P}\xi\|, \ \ t \geq 0, \ \xi \in X. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Note, agora, que, para $t \geq 0$

$$V(t)(I-\widetilde{P}) = U(t)(I-\widetilde{P}) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)(I-\widetilde{P}).$$

Assim, como $P\widetilde{P} = P$, para $t \geq 0$ e $\xi \in X$

$$U(t)PU^{-1}(t)V(t)(I-\widetilde{P})\xi = \int_0^t U(t)PU^{-1}(\sigma)d[B(\sigma)]V(\sigma)(I-\widetilde{P})\xi.$$

Portanto, de modo análogo ao feito acima com uso de (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} \left\|U(t)PU^{-1}(t)V(t)(I-\widetilde{P})\xi\right\| &\leq \int_0^t K_1 e^{-\alpha_1(t-\sigma)}\|V(\sigma)(I-\widetilde{P})\xi\|\delta d\sigma \\ &\leq \delta K_1 L_2\|V(t)(I-\widetilde{P})\xi\| \int_0^t e^{-(\alpha_1+\beta_2)(t-\sigma)}d\sigma \\ &\leq \delta\frac{K_1L_2}{\alpha_1+\beta_2}\|V(t)(I-\tilde{P})\xi\|, \ \ t \geq 0, \ \xi \in X. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} U(t)(I-P)U^{-1}(t)V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) &- U(t)PU^{-1}(t)V(t)(I-\widetilde{P})V^{-1}(t) = \\ &= U(t)U^{-1}(t)V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) - U(t)PU^{-1}(t)V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) \\ &+ U(t)PU^{-1}(t)V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) - U(t)PU^{-1}(t)V(t)V^{-1}(t) \\ &= V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) - U(t)PU^{-1}(t). \end{aligned}$$

Sendo $\gamma_1(t) = \left\| V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) \right\|$, $\gamma_2(t) = \left\| V(t)(I-\widetilde{P})V^{-1}(t) \right\|$ e trocando ξ por $V^{-1}(t)$ em (3.17) e (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) - \left\| U(t)PU^{-1}(t) \right\| &\leq \left\| V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) - U(t)PU^{-1}(t) \right\| \\
&= \Big\| U(t)(I-P)U^{-1}(t)V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) \\
&\quad -U(t)PU^{-1}(t)V(t)(I-\widetilde{P})V^{-1}(t) \Big\| \\
&\leq \delta \frac{K_2L_1}{\alpha_2+\beta_1}\gamma_1(t) + \delta \frac{K_1L_2}{\alpha_1+\beta_2}\gamma_2(t).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &\leq \|U(t)PU^{-1}(t)\| + \delta \frac{K_2L_1}{\alpha_2+\beta_1}\gamma_1(t) + \delta \frac{K_1L_2}{\alpha_1+\beta_2}\gamma_2(t) \\
&\leq K_1 + \delta \frac{K_2L_1}{\alpha_2+\beta_1}\gamma_1(t) + \delta \frac{K_1L_2}{\alpha_1+\beta_2}\gamma_2(t).
\end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $t \geq 0$, vale

$$\begin{aligned}
V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) - U(t)PU^{-1}(t) &= U(t)U^{-1}(t) - U(t)PU^{-1}(t) - V(t)V^{-1}(t) + V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) \\
&= U(t)(I-P)U^{-1}(t) - V(t)(I-\widetilde{P})V^{-1}(t).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\gamma_2(t) - \left\| U(t)(I-P)U^{-1}(t) \right\| &\leq \left\| V(t)(I-\widetilde{P})V^{-1}(t) - U(t)(I-P)U^{-1}(t) \right\| \\
&= \left\| V(t)\widetilde{P}V^{-1}(t) - U(t)PU^{-1}(t) \right\| \\
&\leq \delta \frac{K_2L_1}{\alpha_2+\beta_1}\gamma_1(t) + \delta \frac{K_1L_2}{\alpha_1+\beta_2}\gamma_2(t), \ t \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\gamma_2(t) &\leq \left\| U(t)(I-P)U^{-1}(t) \right\| + \delta \frac{K_2L_1}{\alpha_2+\beta_1}\gamma_1(t) + \delta \frac{K_1L_2}{\alpha_1+\beta_2}\gamma_2(t) \\
&\leq K_2 + \delta \frac{K_2L_1}{\alpha_2+\beta_1}\gamma_1(t) + \delta \frac{K_1L_2}{\alpha_1+\beta_2}\gamma_2(t).
\end{aligned}$$

Seja $\eta := \max\left\{ \delta \frac{K_2L_1}{\alpha_2+\beta_1}, \delta \frac{K_1L_2}{\alpha_1+\beta_2} \right\}$. Pela condição de δ, obtemos $\eta < \frac{1}{2}$. De fato

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta K_2 L_1}{\alpha_2+\beta_1} < \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\delta K_2 K_1}{(\alpha_2+\beta_1)(1-\theta)} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\delta K_2 K_1}{\left(\alpha_2+\alpha_1-\dfrac{\delta K_1}{1-\theta}\right)(1-\theta)} < \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad 2\delta K_1 K_2 < \alpha_1+\alpha_2-(\alpha_1+\alpha_2)\theta - K_1\delta\\
&\Leftrightarrow \quad 2\delta K_1 K_2 < \alpha_1+\alpha_2-(\alpha_1+\alpha_2)\delta\left(\frac{K_1}{\alpha_1}+\frac{K_1}{\alpha_1}\right) - K_1\delta\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\delta K_1 K_2}{\alpha_1+\alpha_2} < 1-\delta\left(\frac{K_1}{\alpha_1}+\frac{K_2}{\alpha_2}\right)-\frac{K_1\delta}{\alpha_1+\alpha_2}\\
&\Leftrightarrow \quad \delta\left[\left(\frac{K_1}{\alpha_1}+\frac{K_2}{\alpha_2}\right)+\frac{K_1(2K_2+1)}{\alpha_1+\alpha_2}\right] < 1.
\end{aligned}
$$

De modo análogo,

$$\frac{\delta K_1 L_2}{\alpha_1+\beta_2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta\left[\left(\frac{K_1}{\alpha_1}+\frac{K_2}{\alpha_2}\right)+\frac{K_2(2K_1+1)}{\alpha_1+\alpha_2}\right] < 1.$$

Dessa forma,

$$\gamma_1(t)+\gamma_2(t) \le 2\eta\big(\gamma_1(t)+\gamma_2(t)\big)+K_1+K_2$$

e, então,

$$\gamma_1(t)+\gamma_2(t) \le \frac{K_1+K_2}{1-2\eta},\ t \ge 0.$$

■

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, utilizaremos os resultados de dicotomias para equações diferenciais ordinárias generalizadas lineares para obtermos dicotomia para equações diferenciais em medida e equações diferenciais com impulsos. Como consequência dos resultados desse capítulo, obtemos dicotomia para as equações diferenciais ordinárias lineares clássicas.

4.1 Equações diferenciais em medida

Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, X um espaço de Banach e $\mathcal{B}_c = \{x \in X : \|x\| \leq c\}$, em que $c > 0$. Agora, sejam $\mathcal{F} : J \to L(X)$, $g : \mathcal{B}_c \times J \to X$ e $u : J \to \mathbb{R}$ funções satisfazendo as condições:

a) $\mathcal{F}(\cdot)$ é Perron integrável e localmente limitada em J, isto é, $\sup\limits_{t \in [a,b]} \|\mathcal{F}(t)\| < \infty$ para todo $a, b \in J$.

b) para cada $x \in \mathcal{B}_c$, $g(x, \cdot)$ é $du-$integrável em J, em que du é a medida de Lebesgue-Stieltjes gerada pela função u.

c) u é de variação limitada em J e contínua à esquerda em $J \setminus \{\inf J\}$.

Consideremos equação diferencial da forma

$$Dx = \mathcal{F}(t)x + g(x,t)Du, \tag{4.1}$$

em que Dx e Du representam as derivadas distribucionais de x e u no sentido de L. Schwartz. A equação (4.1) é chamada de equação diferencial em medida (EDM). O leitor pode consultar [17] para obter mais detalhes sobre a teoria de equações diferenciais em medida.

Definição 4.1 *Uma função $x : [\alpha, \beta] \subset J \to X$ é chamada de solução do PVI*

$$\begin{cases} Dx = \mathcal{F}(t)x + g(x,t)Du \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

em $[\alpha, \beta]$, com $t_0 \in [\alpha, \beta]$, se x for uma função contínua à esquerda, de variação limitada, $x(t_0) = x_0$ e a derivada distribucional de x satisfaz a equação (4.1) *para todo $t \in [\alpha, \beta]$.*

Pelo Teorema da Representação Integral apresentado em [15, Teorema 2.3], podemos estabelecer o seguinte resultado: a função $x : [\alpha, \beta] \subset J \to X$ é solução do PVI (4.2) se, e somente se,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), s)du(s),$$

para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

No próximo resultado, vamos estabelecer o teorema de existência e unicidade para o PVI (4.2). Para isso, vamos considerar as seguintes hipóteses adicionais:

*A*1) Existe uma função Lebesgue mensurável $m_1 : J \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $a, b \in J$, tem-se $\displaystyle\int_a^b m_1(s)ds < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b \mathcal{F}(s)ds \right\| \leq \int_a^b m_1(s)ds.$$

*A*2) Existe uma função $du-$mensurável $m_2 : J \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $a, b \in J$, tem-se $\displaystyle\int_a^b m_2(s)du(s) < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b g(x,s)du(s) \right\| \leq \int_a^b m_2(s)du(s) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{B}_c.$$

*A*3) Existe uma função $du-$mensurável $\ell : J \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $a, b \in J$, tem-se $\displaystyle\int_a^b \ell(s)du(s) < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b g(x,s)du(s) - \int_a^b g(y,s)du(s) \right\| \leq \int_a^b \ell(s)\|x-y\|ds$$

para todos $x, y \in \mathcal{B}_c$.

A demonstração do Teorema 4.2 a seguir, segue os passos da demonstração do Teorema 3.7, apresentado em [17].

Teorema 4.2 (Existência Local) *Sejam $\mathcal{F}$ e g funções satisfazendo as condições a), b), c), A1), A2) e A3). Seja $t_0 \in J \setminus \{\inf J\}$. Então existe $\Delta > 0$ tal que no intervalo $[t_0, t_0 + \Delta]$ existe uma única solução $x : [t_0, t_0 + \Delta] \to X$ do PVI (4.2).*

No que segue, apresentamos o teorema de correspondência entre a EDM (4.1) e a sua EDOG correspondente.

Teorema 4.3 [34, Teorema 5.17] *A função $x : [\alpha, \beta] \subset J \to X$ é solução do PVI (4.2) em $[\alpha, \beta]$ se, e somente se, x é solução do PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + F(x,t)] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4.3}$$

em que $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(s)ds$ e $F(x,t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(x,s)du(s)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e $x \in \mathcal{B}_c$.

Demonstração. Suponhamos que $x : [\alpha, \beta] \subset J \to X$ seja solução do PVI (4.2) em $[\alpha, \beta]$. Então

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), s)du(s),$$

para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

Sejam $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(s)ds$ e $F(x,t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(x,s)du(s)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e $x \in \mathcal{B}_c$. Agora, notemos que

$$\int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(s)x(s)ds = \int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s) = \int_{t_0}^{t} D[A(s)x(\tau)]$$

e

$$\int_{t_0}^{t} g(x(s), s)du(s) = \int_{t_0}^{t} DF(x(\tau), s).$$

Daí, $x(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} D[A(s)x(\tau) + F(x(\tau), s)]$, $t \in [\alpha, \beta]$, e isso mostra que x é solução do PVI (4.3). A recíproca segue de forma análoga. ∎

4.1.1 Dicotomia para EDMs

Seja $g(x,t) = \mathcal{G}(t)x$, $t \in J$ e $x \in X$, e assuma que $\mathcal{G} : J \to L(X)$ satisfaça as seguintes condições:

$G1)$ $\mathcal{G}(\cdot)$ é $du-$integrável em J, em que du é a medida de Lebesgue-Stieltjes gerada pela função u satisfazendo a condição $c)$.

$G2)$ Existe uma função $du-$mensurável $m_2' : J \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $a, b \in J$, tem-se $\int_a^b m_2'(s)du(s) < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b \mathcal{G}(s)du(s) \right\| \leq \int_a^b m_2'(s)du(s).$$

$G3)$

$$\left(I + \lim_{r \to t+} \int_t^r \mathcal{G}(s)du(s) \right)^{-1} \in L(X),$$

para todo $t \in \{$conjunto dos pontos de descontinuidades de $u\}$.

Agora, consideremos a EDM

$$Dx = \mathcal{F}(t)x + \mathcal{G}(t)xDu. \tag{4.4}$$

Pelo Teorema 4.3, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.4 *Seja $t_0 \in J$. A função $x : [\alpha, \beta] \subset J \to X$ é solução da EDM* (4.4) *com condição inicial $x(t_0) = x_0$ se, e somente se, x é solução do PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + F(t)x] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

em que $A(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{F}(s)ds$ e $F(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{G}(s)du(s)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e $x \in \mathcal{B}_c$.

Observação 4.5 Vamos assumir que as soluções da EDM (4.4) estão definidas em todo intervalo J.

O Teorema 4.6 apresenta a definição do operador fundamental para a EDM (4.4).

Teorema 4.6 *Existe um único operador* $V\colon J\times J\to L(X)$ *tal que*

$$V(t,s)=I+\int_s^t \mathcal{F}(r)V(r,s)dr+\int_s^t \mathcal{G}(r)V(r,s)du(r), \tag{4.6}$$

para quaisquer $t,s\in J$. *Além disso, para cada* $s\in J$ *fixado,* $V(\cdot,s)$ *será um operador localmente de variação limitada. Este operador é chamado de operador fundamental da EDM* (4.4). *Além disso, dado* $t_0\in J$*, a função* $x(t)=V(t,t_0)\tilde{x}$ *é solução da EDM* (4.4) *satisfazendo a condição* $x(t_0)=\tilde{x}$*, com* $\tilde{x}\in X$.

Demonstração. Fixe $s\in J$. Defina os operadores

$$A_s(t)=\int_s^t \mathcal{F}(r)dr \quad \text{e} \quad F_s(t)=\int_s^t \mathcal{G}(r)du(r),$$

para cada $t\in J$. Dados $t_1,t_2\in J$, obtemos

$$\|A_s(t_2)-A_s(t_1)\|=\left\|\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{F}(r)dr\right\|\leq\int_{t_1}^{t_2} m_1(r)dr$$

e

$$\|F_s(t_2)-F_s(t_1)\|=\left\|\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{G}(r)du(r)\right\|\leq\int_{t_1}^{t_2} m_2'(r)du(r).$$

Isso mostra que $A_s\in C(J,L(X))$ e F_s é contínua nos pontos em que u é contínua. Consequentemente,

$$(I-[(A_s+F_s)(t)-(A_s+F_s)(t^-)])^{-1}=(I-F_s(t)+F_s(t^-))^{-1}=I\in L(X)$$

pois u é contínua à esquerda, e pela condição $G3)$ segue que

$$\begin{aligned}(I+[(A_s+F_s)(t^+)-(A_s+F_s)(t)])^{-1}&=(I+F_s(t^+)-F_s(t))^{-1}=\\ &=\left(I+\lim_{\alpha\to t^+}\int_t^\alpha \mathcal{G}(r)du(r)\right)^{-1}\in L(X).\end{aligned}$$

Portanto, A_s+F_s satisfaz a condição $(H2)$.

Por outro lado, sejam $a,b\in J, a<b$, e $D=\{t_0,t_1,\ldots,t_k\}$ uma divisão de $[a,b]$, então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k\|A_s(t_i)+F_s(t_i)-A_s(t_{i-1})-F_s(t_{i-1})\|&\leq\sum_{i=1}^k\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{F}(r)dr\right\|+\sum_{i=1}^k\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{G}(r)du(r)\right\|\leq\\ &\leq\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}m_1(s)ds+\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}m_2'(s)du(s)=\int_a^b m_1(s)ds+\int_a^b m_2'(s)du(s).\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{var}_a^b(A_s + F_s) < \infty \quad \text{para todo} \quad a, b \in J,$$

e a condição (H_1^{loc}), também está satisfeita.

De acordo com o Teorema 1.29, existe um único operador $V_s\colon J \to L(X)$ tal que

$$V_s(t) = I + \int_s^t d[A_s(r) + F_s(r)]V_s(r), \quad t \in J,$$

e $V_s(\cdot)$ é um operador localmente de variação limitada em J.

Defina $V\colon J \times J \to L(X)$ por $V(t,s) = V_s(t)$, $t, s \in J$. Agora note que

$$\int_s^t d[A_s(r)]V(r,s) = \int_s^t \mathcal{F}(r)V(r,s) \quad \text{e} \quad \int_s^t d[F_s(r)]V(r,s) = \int_s^t \mathcal{G}(r)V(r,s)du(r),$$

ou seja,

$$V(t,s) = I + \int_s^t \mathcal{F}(r)V(r,s)dr + \int_s^t \mathcal{G}(r)V(r,s)du(r), \ \ t, s \in J.$$

Para terminar a demonstração, seja $x(t) = V(t,t_0)\tilde{x}$ com $\tilde{x} \in X$, então

$$\int_{t_0}^t \mathcal{F}(s)x(s)ds + \int_{t_0}^t \mathcal{G}(s)x(s)du(s) = \int_{t_0}^t \mathcal{F}(s)V(s,t_0)\tilde{x}ds + \int_{t_0}^t \mathcal{G}(s)V(s,t_0)\tilde{x}du(s) =$$

$$= (V(t,t_0) - I)\tilde{x} = x(t) - \tilde{x},$$

ou seja, $x(t) = V(t,t_0)\tilde{x}$ é solução da EDM (4.4) satisfazendo a condição $x(t_0) = \tilde{x}$. ■

Observação 4.7 Usando o Teorema 1.31 e um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 4.6, podemos mostrar que o operador V satisfaz:

(i) $V(t,t) = I$, para todo $t \in J$;

(ii) Para cada $[a,b] \subset J$ existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\|V(t,s)\| \leq M, \ \ t, s \in [a,b], \\ &\mathrm{var}_a^b V(t,\cdot) \leq M, \ \ t \in [a,b], \\ &\mathrm{var}_a^b V(\cdot,s) \leq M, \ \ s \in [a,b]; \end{aligned}$$

(iii) $V(t,s) = V(t,r)V(r,s)$, para quaisquer $t, r, s, \in J$;

(iv) $[V(t,s)]^{-1} \in L(X)$ existe e $[V(t,s)]^{-1} = V(s,t)$, para quaisquer $t, s \in J$;

(v) Valem as igualdades:

$$V(t^+, s) = [I + \Delta^+ A(t)]V(t, s),$$
$$V(t^-, s) = [I - \Delta^- A(t)]V(t, s),$$
$$V(t, s^+) = V(t, s)[I + \Delta^+ A(t)]^{-1},$$
$$V(t, s^-) = V(t, s)[I - \Delta^- A(t)]^{-1},$$

para quaisquer $t, s \in J$.

A definição de dicotomia exponencial é apresentada a seguir. Vamos considerar $V(t) = V(t, t_0)$ o operador fundamental da EDM (4.4) e vamos denotar $V^{-1}(t) = V(t_0, t)$, $t, t_0 \in J$.

Definição 4.8 A EDM (4.4) possui dicotomia exponencial, se existirem constantes positivas K_1, K_2, α_1 e α_2 e uma projeção $P : X \to X$ tais que:

a) $\|V(t)PV^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$, para $t, s \in J$ com $t \geq s$;

b) $\|V(t)(I - P)V^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$, para $t, s \in J$ com $s \geq t$.

A seguir, obtemos a equivalência de dicotomia entre a EDM (4.4) e sua EDO generalizada correspondente. Antes de exibirmos o resultado, apresentamos um lema auxiliar.

Lema 4.9 [10, Teorema 11] *Sejam $Y : \mathbb{R} \to L(X)$ localmente de variação limitada, $v : \mathbb{R} \to X$ e $f : \mathbb{R} \to X$ localmente Perron integrável com respeito à v. Então as integrais de Perron-Stieltjes $\int_a^b Y(r)d\tilde{f}(r)$ e de Perron $\int_a^b Y(r)f(r)dv(r)$ existem e vale a igualdade*

$$\int_a^b Y(r)d\tilde{f}(r) = \int_a^b Y(r)f(r)dv(r)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, em que $\tilde{f} : \mathbb{R} \to X$ é dada por $\tilde{f}(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)dv(s)$, $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.10 *A EDM* (4.4) *possui dicotomia exponencial se, e somente se, a EDO generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + F(t)x] \tag{4.7}$$

possui dicotomia exponencial, em que $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \mathcal{F}(s)ds$ e $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \mathcal{G}(s)du(s)$ para todo $t \in J$.

Demonstração. Utilizando o Teorema 4.4, podemos obter a correspondência entre as soluções da EDM (4.4) e da EDO generalizada correspondente $\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + F(t)x]$. Se $U(t) = U(t,t_0)$, $t \in J$, denota o operador fundamental para a EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + F(t)x]$, segue que

$$U(t) = I + \int_{t_0}^{t} d[A(r) + F(r)]U(r) = I + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(r)U(r)dr + \int_{t_0}^{t} \mathcal{G}(r)U(r)du(r), \quad t \in J,$$

onde a última integral obtemos utilizando o Lema 4.9. Pela unicidade do operador fundamental da EDM (4.4), veja Teorema 4.6, segue que $U(t) = V(t)$ e isso conclui o resultado. ■

Como consequência das Proposições 2.5 e 4.10, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 4.11 *A EDM* (4.4) *possuirá uma dicotomia exponencial se, e somente se, existirem constantes positivas* L_1, L_2, L, α_1 *e* α_2 *tais que:*

$$\begin{aligned} &\|V(t)P\xi\| \leq L_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\|V(s)P\xi\|, && \textit{para} \quad t,s \in J \textit{ com } t \geq s;\\ &\|V(t)(I-P)\xi\| \leq L_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\|V(s)(I-P)\xi\|, && \textit{para} \quad t,s \in J \textit{ com } s \geq t;\\ &\|V(t)PV^{-1}(t)\| \leq L, && \textit{para} \quad t \in J. \end{aligned}$$

O próximo teorema mostra condições suficientes para que a EDM (4.4) admita dicotomia exponencial.

Teorema 4.1.1 *Seja* $J = [0, \infty)$ *e*

$$V_0 = \{x_0 \in X : \|x_0\| = 1 \textit{ e } x(t,x_0) \textit{ é ilimitada}\}$$

um subconjunto compacto de X*, em que* $x(t,x_0)$ *denota a solução da EDM* (4.4) *satisfazendo a condição* $x(0) = x_0$*. Suponha que existam constantes* $T > 0, C > 1$ *e* $0 < \theta < 1$ *tais que toda solução* $x(t)$ *de* (4.4) *satisfaz as condições*

(i) $\|x(t)\| \leq C\|x(s)\|$, *para* $0 \leq s \leq t \leq s + T$;

(ii) $\|x(t)\| \leq \theta \sup_{|u-t| \leq T} \|x(u)\|$, *para* $t \geq T$.

Além disso, assuma que para cada $x_0 \in V_0$ *existe uma sequência* $\{t_n^{x_0}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ *estritamente crescente com* $t_{n+1}^{x_0} \leq t_n^{x_0} + T$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\|x(t,x_0)\| < \theta^{-n}C$ *para* $t \in [0, t_n^{x_0})$ *e* $\|x(t_n^{x_0}, x_0)\| \geq \theta^{-n}C$, $n \in \mathbb{N}$. *Então a EDM* (4.4) *admite uma dicotomia exponencial.*

Demonstração. A EDO generalizada associada a EDM (4.4) é dada por

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + F(t)x],$$

em que $A(t) = \int_0^t \mathcal{F}(s)ds$ e $F(t) = \int_0^t \mathcal{G}(s)du(s)$ para todo $t \in J$. Pela prova do Teorema 4.6, a função $A + F$ satisfaz as condições $(H_1^{\rm loc})$ e (H_2). O resultado segue pelo Teorema 4.4 e pelo Teorema 2.1.1. ∎

Para a próxima proposição, vamos supor que $J = \mathbb{R}$ e que u seja localmente de variação limitada.

Proposição 4.12 *Seja $J = \mathbb{R}$ e u localmente de variação limitada. Suponha que a EDO linear $\dot{x} = \mathcal{F}(t)x$ possua uma dicotomia exponencial e considere $h : \mathbb{R} \to X$ uma função $du-$integrável em $\mathbb{R}$. Então a EDM*

$$Dx = \mathcal{F}(t)x + h(t)Du$$

possui no máximo uma solução limitada.

Demonstração. Seja $A : \mathbb{R} \to L(X)$ dado por

$$A(t) = \int_0^t \mathcal{F}(s)ds, \ t \in \mathbb{R}.$$

Note que A satisfaz as condições (H_1^{loc}) e (H_2). Pelo Teorema 1.29, existe o operador fundamental $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to L(X)$ da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{4.8}$$

em que $U(t,s) = I + \int_s^t d[A(r)]U(r,s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Sejam $U(t) = U(t,0)$ e $\Phi(t) = \Phi(t,0)$ o operador fundamental da EDO $\dot{y} = \mathcal{F}(t)y$. Então

$$\Phi(t) = I + \int_0^t \mathcal{F}(r)\Phi(r)dr = I + \int_0^t d[A(r)]\Phi(r)dr,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Pela unicidade do operador fundamental obtemos $\Phi(t) = U(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto a EDO generalizada (4.8) possui uma dicotomia exponencial

$$\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \ t \geq s,$$

$$\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \ s \geq t,$$

em que K_1, K_2, α_1 e α_2 são as constantes da dicotomia da EDO $\dot{x} = \mathcal{F}(t)x$.

Agora, defina, $g : \mathbb{R} \to X$ por

$$g(t) = \int_0^t h(s)du(s) + g(0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Assim, $g \in G(\mathbb{R}, X)$ e a condição (H_3) está satisfeita. Note que a EDO generalizada perturbada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + g(t)] \tag{4.9}$$

é a equação correspondente a EDM $Dx = \mathcal{F}(t)x + h(t)Du$. Pelo Corolário 2.12, a EDO generalizada perturbada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + g(t)] \tag{4.10}$$

possui, no máximo, uma solução limitada. Como $x : \mathbb{R} \to X$ é solução da EDM $Dx = \mathcal{F}(t)x + h(t)Du$ se, e somente se, x for solução da EDO generalizada perturbada (4.10), concluímos que a EDM $Dx = \mathcal{F}(t)x + h(t)Du$ possui, no máximo, uma solução limitada. ■

4.2 Equações diferenciais ordinárias com impulsos

Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, X um espaço de Banach e $\mathcal{B}_c = \{x \in X : \|x\| \leq c\}$. Consideremos uma função $f : J \to L(X)$ satisfazendo as condições:

$B1)$ $f(\cdot)$ é Perron integrável em J.

$B2)$ Existe uma função Lebesgue mensurável $m : J \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $a, b \in J$, tem-se $\displaystyle\int_a^b m(s)ds < \infty$ e

$$\left\| \int_a^b f(s)ds \right\| \leq \int_a^b m(s)ds.$$

Consideremos o conjunto $\{t_1, \ldots, t_k, \ldots\} \subset J$ com $t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$. Se J for ilimitado superiormente assumiremos que $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$. Se J for limitado o conjunto $\{t_1, \ldots, t_k, \ldots\}$ será finito. Agora, considere os operadores $B_i \in L(X)$, $i = 1, 2, \ldots$, tais que $I + B_i \in L(X)$ para cada $i = 1, 2, \ldots$.

Vamos estudar condições de dicotomia para a seguinte equação diferencial impulsiva (EDI)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x, \ t \neq t_i, \\ \Delta(x(t_i)) = x(t_i+) - x(t_i) = B_i x(t_i), \ i = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{4.11}$$

Definição 4.13 *Suponha que* $\{t_1, \ldots, t_k\} \subset [\alpha, \beta]$ *e* $t_{k+1} > \beta$. *Uma função* $x : [\alpha, \beta] \to X$, $[\alpha, \beta] \subset J$, *é uma solução para a EDI* (4.11) *se* $x(t) \in \mathcal{B}_c$ *para todo* $t \in [\alpha, \beta]$, *a função* x *é absolutamente contínua em todo intervalo da forma* $(-\infty, t_1] \cap [\alpha, \beta]$, $(t_i, t_{i+1}] \cap [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, *e em* $(t_k, +\infty) \cap [\alpha, \beta]$,

$$x'(t) = f(t)x(t) \quad \textit{para todo} \quad t \in [\alpha, \beta] \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$$

e $x(t_i+) = \lim\limits_{t \to t_i+} x(t) = x(t_i) + B_i x(t_i)$ *para* $i = 1, 2, \ldots, k$.

No próximo lema caracterizamos a solução da EDI (4.11) pela representação integral. Na caracterização, utilizaremos a função de Heaviside em um ponto $d \in J \setminus \{\sup J\}$, isto é,

$$H_d(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leq d \\ 1 & \text{se} \quad t > d. \end{cases}$$

No Lema 4.14 e no Teorema 4.2.1, vamos assumir que $\{t_1, \ldots, t_k\} \subset [\alpha, \beta]$ e $t_{k+1} > \beta$.

Lema 4.14 *Sejam* $t_0 \in J$ *e* $x_0 \in \mathcal{B}_c$. *A função* $x : [\alpha, \beta] \subset J \to X$ *é solução do PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x, \ t \neq t_i, \\ \Delta(x(t_i)) = x(t_i+) - x(t_i) = B_i x(t_i), \ i = 1, 2, \ldots, k, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.12}$$

se, e somente se,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)x(s)ds + \sum_{\substack{i \in \{1, \ldots, k\} \\ t > t_i}} B_i x(t_i) H_{t_i}(t),$$

para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

O Teorema 4.2.1 trata-se da correspondência entre a EDI (4.12) e sua EDO generalizada associada. A demonstração desse resultado é análoga a prova do Teorema 5.20 apresentado em [34].

Teorema 4.2.1 *Sejam $t_0 \in J$ e $x_0 \in \mathcal{B}_c$. A função $x : [\alpha, \beta] \to X$, $[\alpha, \beta] \subset J$, é uma solução do PVI (4.12) se, e somente se, x for solução da EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]$, em que A é dada por*

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + \sum_{i=1}^{k} B_i H_{t_i}(t), \quad t \in J. \tag{4.13}$$

Observação 4.15 Vamos assumir que as soluções da EDI (4.11) estão definidas em todo intervalo J.

Observação 4.16 O operador A definido em (4.13) satisfaz as seguintes condições:

$$I + \Delta^+ A(t) = I \quad \text{se} \quad t \neq t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

e

$$I + \Delta^+ A(t) = I + B_i \quad \text{se} \quad t = t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Como A é contínua à esquerda, temos

$$I - \Delta^- A(t) = I \quad \text{para todo} \quad t \in J.$$

Portanto, A satisfaz as condições (H_1^{loc}) e (H_2). Veja o Exemplo 6.20 em [34] para mais detalhes. Note que A satisfaz essas condições mesmo que J seja ilimitado.

Seja $\Phi : J \times J \to L(X)$ o operador fundamental da EDO $\dot{x} = f(t)x$. Defina o operador $V : J \times J \to L(X)$ pela lei

$$V(t, s) = \Phi(t, t_i) \left(\prod_{k=i}^{j+1} [I + B_k]\Phi(t_k, t_{k-1}) \right) [I + B_j]\Phi(t_j, s)$$

se $t \geq s$, $t \in (t_i, t_{i+1}] \cap J$ e $s \in (t_{j-1}, t_j] \cap J$ ($s \in (-\infty, t_1] \cap J$ se $j = 1$), e

$$V(t, s) = [V(s, t)]^{-1} = \Phi(t, t_j)[I + B_j]^{-1} \cdots [I + B_i]^{-1}\Phi(t_i, s)$$

se $t < s$, $s \in (t_i, t_{i+1}] \cap J$ e $t \in (t_{j-1}, t_j] \cap J$ ($t \in (-\infty, t_1] \cap J$ se $j = 1$).

De acordo com o Exemplo 6.20, página 194 em [34], temos o seguinte lema.

Lema 4.17 *O operador $V(t, s)$ é o operador fundamental da EDI (4.11) e $x(t) = V(t, s)\tilde{x}$ é solução da EDI (4.11) com condição inicial $x(s) = \tilde{x}$, para $t \geq s$, $t \in (t_i, t_{i+1}] \cap J$ e $s \in (t_{j-1}, t_j] \cap J$ ($s \in (-\infty, t_1] \cap J$ se $j = 1$). Além disso, $U(t, s) = V(t, s)$ para todo $t, s \in J$, em que $U(t, s)$ é o operador fundamental da EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]$ e $A(t)$ é dado por (4.13).*

4.2.1 Dicotomia para EDIs

Seja $V(t,s)$, $t,s \in J$, o operador fundamental da EDI (4.11). O conceito de dicotomia exponencial para a EDI (4.11) é apresentado a seguir.

Definição 4.18 A EDI (4.11) possui dicotomia exponencial, se existirem constantes positivas K_1, K_2, α_1 e α_2 e uma projeção $P: X \to X$ tais que:

a) $\|V(t)PV^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}$, para $t,s \in J$ com $t \geq s$;

b) $\|V(t)(I-P)V^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}$, para $t,s \in J$ com $s \geq t$.

Como consequência do Teorema 4.2.1 e do Lema 4.17, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.19 *A EDI* (4.11) *possui dicotomia exponencial se, e somente se, a EDO generalizada correspondente* $\dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]$ *possui dicotomia exponencial, em que* A *é dado por* (4.13).

Como consequência das Proposições 2.5 e 4.19, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 4.20 *A EDI* (4.11) *possuirá uma dicotomia exponencial se, e somente se, existirem constantes* $L_1, L_2, L, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ *tais que*

$$\begin{aligned}
&\|V(t)P\xi\| \leq L_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\|V(s)P\xi\|, && \text{para} \quad t,s \in J \text{ com } t \geq s;\\
&\|V(t)(I-P)\xi\| \leq L_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\|V(s)(I-P)\xi\|, && \text{para} \quad t,s \in J \text{ com } s \geq t;\\
&\|V(t)PV^{-1}(t)\| \leq L, && \text{para} \quad t \in J.
\end{aligned}$$

O próximo teorema mostra condições suficientes para que a EDI (4.11) possua dicotomia exponencial, no caso em que $J = [0,\infty)$. A demonstração segue pelo Teorema 4.2.1 e pelo Teorema 2.1.1. Lembre-se que como $J = [0,\infty)$, estamos considerando os impulsos $t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$, com $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$.

Teorema 4.2.2 *Seja* $J = [0,\infty)$ *e*

$$V_0 = \{x_0 \in X : \|x_0\| = 1 \text{ e } x(t,x_0) \text{ é ilimitada}\}$$

um subconjunto compacto de X, *em que* $x(t,x_0)$ *denota a solução da EDI* (4.11) *satisfazendo a condição* $x(0) = x_0$. *Suponha que existam constantes* $T > 0, C > 1$ *e* $0 < \theta < 1$ *tais que toda solução* $x(t)$ *de* (4.11) *satisfaz as condições* *(i)* $\|x(t)\| \leq C\|x(s)\|$, *para* $0 \leq s \leq t \leq s+T$;

(ii) $\|x(t)\| \leq \theta \sup_{|u-t|\leq T} \|x(u)\|$, *para* $t \geq T$.

Além disso, assuma que para cada $x_0 \in V_0$ *existe uma sequência* $\{t_n^{x_0}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ *estritamente crescente com* $t_{n+1}^{x_0} \leq t_n^{x_0} + T$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\|x(t, x_0)\| < \theta^{-n}C$ *para* $t \in [0, t_n^{x_0})$ *e* $\|x(t_n^{x_0}, x_0)\| \geq \theta^{-n}C$, $n \in \mathbb{N}$. *Então a EDI* (4.11) *admite uma dicotomia exponencial.*

A Proposição 4.21 apresenta condições suficientes para que uma EDI perturbada possua no máximo uma única solução limitada, no caso em que $J = \mathbb{R}$.

Proposição 4.21 *Seja* $J = \mathbb{R}$. *Suponha que a EDI* (4.11) *possua dicotomia exponencial e considere* $h : \mathbb{R} \to L(X)$ *uma função Perron integrável. Então a EDI perturbada*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x + h(t), \ t \neq t_i, \\ \Delta(x(t_i)) = x(t_i+) - x(t_i) = B_i x(t_i), \ i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

possui no máximo uma solução limitada.

Demonstração. Seja $A : \mathbb{R} \to L(X)$ dado por

$$A(t) = \int_0^t f(s)ds + \sum_{\substack{i\in\{1,2,\ldots\} \\ t_i<t}} B_i H_{t_i}(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Note que A satisfaz as condições (H_1^{loc}) e (H_2) (veja Observação 4.16). Pelo Teorema 1.29, existe o operador fundamental $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to L(X)$ da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{4.14}$$

em que $U(t, s) = I + \displaystyle\int_s^t d[A(r)]U(r, s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Como a EDI (4.11) possui dicotomia exponencial, existem constantes positivas K_1, K_2, α_1 e α_2 tais que:

$$\|V(t)PV^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \ t \geq s,$$
$$\|V(t)(I-P)V^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \ s \geq t.$$

Agora pelo Lema 4.17, temos $U(t) = V(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)},\ t \geq s,$$
$$\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)},\ s \geq t,$$

e a EDO generalizada (4.14) possui dicotomia exponencial.

Agora, defina, $g : \mathbb{R} \to X$ por

$$g(t) = \int_0^t h(s)ds + g(0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Assim, $g \in G(\mathbb{R}, X)$ e a condição (H_3) está satisfeita. Note que a EDO generalizada perturbada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + g(t)] \tag{4.15}$$

é a equação correspondente a EDI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x + h(t),\ t \neq t_i, \\ \Delta(x(t_i)) = x(t_i+) - x(t_i) = B_i x(t_i),\ i = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{4.16}$$

Pelo Corolário 2.12, a EDO generalizada perturbada (4.15) possui, no máximo, uma solução limitada. Como $x : \mathbb{R} \to X$ é solução da EDI (4.16) se, e somente se, x for solução da EDO generalizada perturbada (4.15), segue que a EDI (4.16) possui, no máximo, uma solução limitada. ■

Observação 4.22 Se $B_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots$, obtemos resultados de dicotomias para as equações diferenciais ordinárias clássicas.

Referências Bibliográficas

[1] S. M. Afonso, E. M. Bonotto e M. Federson, On exponential stability of functional differential equations with variable impulsive perturbations, *Differential and Integral Equations*, v. 27, (2014), 721-742.

[2] S. M. Afonso, E. M. Bonotto, M. Federson e L. P. Gimenes, Boundedness of solutions for functional differential equations with variable impulses via generalized ordinary differential equations, *Mathematische Nachrichten*, v. 285, (2012), 545-561.

[3] S. M. Afonso, E. M. Bonotto, M. Federson e Š. Schwabik, Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to LaSalle's invariance principle for differential systems with impulses at variable times, *J. Diff. Equations*, 250 (2011), 2936-3001.

[4] D. D. Bainov, S. I. Kostadinov e Nguyen van Minh, Dichotomies and Integral Manifolds of Impulsive Differential Equations, Oxford Graphics Printers, Singapore, 1994.

[5] R. G. Bartle, A modern theory of integration, Graduate Studies in Mathematics, AMS, v. 32, 2000.

[6] C. V. Coffman e J. J. Schäfer, Dichotomies for linear difference equations, *Math. Annalen*, 172 (1967), 139-166.

[7] R. Collegari, Equações Diferenciais Generalizadas Lineares e Aplicações às Equações Diferenciais Funcionais Lineares. Tese de Doutorado, ICMC-Universidade de São Paulo, 2014.

[8] W. A. Coppel, Dichotomies in Stability Theory, *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York*, 1978.

[9] Ju. L. Daleckii e M. G. Krein, Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 43, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1974.

[10] M. Federson, Substitution formulas for the Kurzweil and Henstock vector integrals, *Mathematica Bohemica*, 127 (1), (2002), 15-26.

[11] M. Federson, J. G. Mesquisa e A. Slavík, Basic results for functional differential and dynamic equations involving impulses, *Mathematische Nachrichten*, v. 286, (2013), 181-204.

[12] M. Federson, J. G. Mesquisa e A. Slavík, Measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales, *J. Diff. Equations*, 252 (2012), 3816-3847.

[13] M. Federson e Š. Schwabik, Generalized ODE approach to impulsive retarded differential equations, *Diff. Integral Equations*, 19 (11) (2006), 1201-1234.

[14] M. Federson e P. Z. Táboas, Topological dynamics of retarded functional differential equations, *J. Diff. Equations*, 195(2), (2003), 313-331.

[15] M. Frasson, Sistemas Impulsivos do Ponto de Vista das Equações Diferenciais em Medida, Dissertação de Mestrado, ICMC-Universidade de São Paulo, 2000.

[16] D. Fraňková, Regulated functions, *Math. Bohem.*, 116(1), (1991), 20-59.

[17] L. F. R. S. Garcia, Estabilidade para equações diferenciais em medida, Dissertação de Mestrado, ICMC-Universidade de São Paulo, 2008.

[18] J. K. Hale, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[19] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, *Lecture Notes in Mathematics*, 840, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[20] R. Henstock, Lectures on the Theory of Integration, *World Scientific*, Singapore, 1988.

[21] C. S. Hönig, The abstract Riemann-Stieltjes integral and its applications to Linear Differential Equations with generalized boundary conditions, *Série Matemática No. 1*, São Paulo, 1973.

[22] C. S. Hönig, Volterra Stieltjes-Integral Equations, *North-Holland Publ. Comp.*, Amsterdam, 1975.

[23] C. Imaz e Z. Vorel, Generalized ordinary differential equations in Banach spaces and applications to functional equations, *Bol. Soc. Mat. Mexicana,* 11 (1966), 47-59.

[24] J. Kurzweil, Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, *Czechoslovak Math. J.*, 7(82), (1957), 418-448.

[25] J. Kurzweil, Generalized ordinary differential equations, *Czechoslovak Math. J.*, 8(83), (1958), 360-388.

[26] Z. S. Lin e Y.-X. Lin, Linear Sistems Exponential Dichotomy and Structure of Sets of Hyperbolic Points, *Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, Singapore, 1999.

[27] G. A. Monteiro, M. Tvrdy, On Kurzweil-Stieltjes Integral in a Banach Space *Math. Bohem.*, 137(4), (2012), 365-381.

[28] K. M. Naralenkov, On integration by parts for Stieltjes-type integrals of Banach space-valued functions, *Real Analysis Exchange*, 30(1), (2004/2005), 235-260.

[29] F. Oliva e Z. Vorel, Functional equations and generalized ordinary differential equations, *Bol. Soc. Mat. Mexicana,* 11 (1966), 40-46.

[30] K. J. Palmer, Exponential dichotomies, the shadowing lemma and transversal homoclinic points, in Dynamics Reported, Vol.1, U. Kirchgraber and H.O. Walther, eds., Hohn Wiley and Sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore, 1988, 265-306.

[31] L. H. Popescu, Exponential Dichotomy Roughness on Banach Spaces, *J. Math. Analysis and Appl.*, 314, (2006), 436-454.

[32] K. Sakamoto, Estimates on the strength of exponential dichotomies and application to integral manifolds, *J. Diff. Equations*, 107 (1994), 259-279.

[33] Š. Schwabik, Abstract Perron-Stieltjes integral, *Math. Bohem.*, 121, (1996), 425-447.

[34] Š. Schwabik, Generalized Ordinary Differential Equations, *World Scientific*, Singapore, Series in real Anal., vol. 5, 1992.

[35] Š. Schwabik, Linear Stieltjes Integral Equations in Banach Spaces, *Math. Bohem.*, 124, (1999), 433-457.

[36] A. Slavík, Dynamic equations on time scales and generalized ordinary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 385 (2012), 534-550.