Raízes de aplicações próprias via o número de
raízes de Nielsen

Jean Cerqueira Berni

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

Raízes de aplicações próprias via o número de raízes de Nielsen

Jean Cerqueira Berni

***Orientador:* Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Março de 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C528 Cerqueira Berni, Jean
/ Jean Cerqueira Berni; orientador Oziride
Manzoli Neto. -- São Carlos, 2014.
157 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Teoria de Raízes. 2. Teoria de Nielsen. 3.
Aplicações próprias. I. Manzoli Neto, Oziride,
orient. II. Título.

"When we press the thorn to our chest we know, we understand, and still we do it."

- Colleen McCullough, *The Thorn Birds*.

Agradecimentos

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização e a elaboração desta dissertação. Agradeço imensamente a Deus, meu Pai do Céu, por ter me preparado o caminho a fim de que eu pudesse chegar a estudar no ICMC - USP. Agradeço a Nossa Mãe do Céu, Maria, e a Santa Rita de Cássia por terem passado à minha frente me defendendo de todo mal e toda injustiça, e a São Jorge por ter me aberto os caminhos que me pareciam intransitáveis.

Agradeço ao meu pai, Sidival Aparecido Berni, por seu apoio em muitos sentidos, por seu exemplo de bondade, honestidade, perdão e humildade. A bênção, meu pai, para seguir adiante. Agradeço à minha mãe, Geni Cerqueira Trindade Berni, por seu apoio e exemplo, que me ensinou a encarar a vida com bom humor e a não levá-la tão a sério - afinal não vou sair vivo dela - e por ser a rocha, o esteio, o amparo e a luz de minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto, por ter me acolhido neste projeto, por ter me dado autonomia na elaboração desta dissertação e por ter me compreendido tantas vezes, por ter me ajudado e ter sido um exemplo de humildade, humanidade, trabalho e competência acadêmica. Suas cãs e sua sabedoria - tanto acadêmica quanto de vida - me deram a segurança para a execução dos estudos para a elaboração deste trabalho. Tenho-lhe uma imensa admiração, e espero um dia poder seguir seus passos.

Agradeço aos amigos de graduação, a brejeira Suelen Gasparetto, ao circunspecto e bem-humorado Vinicius Brasílio Canale, ao leal amigo e ajudador Alex Melges Barbosa, ao meu querido, compreensivo e genial amigo Pablo Gonzales Pagoto, ao querido Givânildo Melo, ao meu amigo otimista e brilhante, Lucas Caritá, ao meu brilhante amigo e irmão de coração, Glalco Silva Costa - que me ensinou muitas coisas importantíssimas, a minha querida amiga Renata Barbetta, a minha plácida e cândida amiga e torcedora Raphaela Cândido, a bem-humorada e sorridente super alto astral Carolina Arná Nobre, a sempre bem-humorada e realista Amanda Queirós Moura, a minha justa, verdadeira, fiel e querida amiga, Amanda Cristina Estevam, à minha doce e fiel amiga Priscila Picelo, aos meus amigos e companheiros nas aulas de Topologia Algébrica do Prof. Dr. João Peres Vieira, na Unesp em 2010, Ariadne Oliveira e Murilo de Freitas, e a minha amiga e irmã de coração, Maria Carolina Stefani Mesquita Macena por tantas vezes que me ajudou, socorreu, apoiou e me tranquilizou em momentos difíceis.

Aos meus amigos da pós-graduação, os queridos amigos desde os tempos do Verão do ICMC, o sempre fiel e querido amigo Renan Maneli Mezzabarba e o sempre justo e fiel amigo Balbino Farias, ao amigo Lito Bocanegra, à querida amiga Sabrina Graciela Calcina. Aos amigos que fiz enquanto escrevia este trabalho, Priscila Gutierrez, Alisson Almeida Bueno e Hugo Catarucci Botós. Ao eficientíssimo e amissíssimo pessoal da biblioteca Prof. Dr. Achille Bassi, a querida Gláucia Cristianini por seus conselhos excelentes e conversas edificantes, a Ivani Bragatto por sempre me receber com um sorriso, pela prestatividade e pela boa vontade em me escutar, a Inês Veronese, a Maria Lima, à querida amiga Regina Célia Vidal Medeiros, a amiga do coração Beatriz Sousa Caneviva Deiroz e a querida Adriana Bueno Balsani. Agradeço à Ana Carolina Venere Murata pelas alvíssaras dadas sempre com alegria e entusiasmo! À Verinha que talvez não saiba quantas vezes o seu simples "bom dia" me animou.

Agradeço ao professor João Peres Vieira por suas excelentes aulas, por seu exemplo de profissional e ser humano, por seu entusiasmo contagiante e por ter oferecido em 2010 a disciplina "Tópicos de Topologia - além de ter lido cuidadosamente este trabalho, corri-

gindo muitos (quase um por página) erros da versão original e contribuindo imensamente para a qualidade da redação final. Agradeço à Prof^a. Dr^a Alice Kimie Miwa Libardi por haver me introduzido ao mundo dos Espaços Métricos de modo *ex professo*, por meio de suas excelentes aulas em 2008 e 2009 e à Prof^a Eliris Cristina Rizziolli, por ter me introduzido ao mundo da Topologia Diferencial. Agradeço ao Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo por suas inestimáveis contribuições à qualidade deste trabalho e por participar de minha banca com suas valorosas correções e preciosas sugestões. Agradeço, em especial, à Prof^a Dr^a Denise de Mattos, cuja ajuda e cujas aulas foram condições *sine quibus non* para meu aprendizado em Topologia Algébrica, para me familiarizar com o ritmo das disciplinas do doutorado e, principalmente por seu apoio e por suas palavras que sempre foram um bálsamo para mim em muitos momentos, e pela pura amizade valiosíssima para mim!

Finalmente agradeço à minha melhor amiga, à abençoada e iluminada professora Marta Cilene Gadotti, que Maria Santíssima colocou em minha vida. Obrigado por seu exemplo de ser humano, por ter me dado o ombro para chorar nos momentos difíceis, por ter me escutado pacientemente e me animado em cada visita que lhe fiz ao longo do curso. Obrigado por me impelir a seguir minhas metas. A senhora foi condição *sine qua non* para a concretização deste trabalho. Agradeço à minha amiga Suzete Maria Afonso pelos conselhos inestimáveis ao longo dos momentos mais difíceis que passei durante o mestrado, e à querida amiga Suzi Marconatto, pelo incentivo e boa acolhida no curso de Matemática em 2008 e à Prof^a Miriam Penteado pela dedicação, prestatividade e conversas edificantes. Agradeço finalmente ao Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre, por ter sido um esteio e um exemplo para mim, e por ter me recebido sempre que precisei. O senhor é uma pessoa muito especial para mim, e eu o admiro demais.

A todos os professores da pós-graduação agradeço pelos ensinamentos que guardarei para sempre. Obrigado por tudo.

Este trabalho foi parcialmente subvencionado durante 7 meses pela CAPES-Proex e subvencionado durante 17 meses pela **Fapesp**, processo 2012/15516-0.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar a Teoria de Raízes de Nielsen para aplicações próprias, analisando resultados concernentes ao número de Nielsen próprio e ao grau absoluto de uma aplicação própria em um ponto do contradomínio. Apresentamos uma demonstração detalhada dos principais teoremas provados por R. Brooks em [20]

Abstract

The stated goal of this work is to study Nielsen Root Theory for proper maps, analyzing results concerning the Nielsen proper number and the absolute degree of a proper map at a point of its codomain. We present a detailed proof of the main theorems given by R. Brooks [20].

Sumário

Introdução	3
1 Conceitos e Resultados Preliminares	7
1.1 A topologia compacto-aberta	7
1.2 Aplicações Próprias	12
1.3 Transversalidade, Homeomorfismos Locais e Raízes Isoladas	20
1.4 Orientação e Homologia	27
2 Alguns Resultados da Teoria de Raízes de Nielsen Elementar	43
2.1 Definições e Resultados	44
2.2 Revestimentos e Levantamentos de Hopf	50
2.3 Pares Admissíveis	56
2.4 Índices de Raízes	58
3 Teoria de Raízes de Nielsen elementar para Aplicações Próprias	63
3.1 Classes de Raízes Próprias e o Número Próprio de Raízes de Nielsen	63
3.2 Pares Propriamente Admissíveis	65
3.3 Índice de Raízes Próprio	67
3.4 Classes de Nielsen na Variedade de Orientação	84
3.5 Multiplicidade e o Grau Absoluto	90
3.6 Isolando Raízes	99

4	Combinando Raízes Isoladas	109
4.1	Construções de Aplicações e Demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2	109
4.2	Um exemplo.	135
5	Homologia Simplicial	141

Introdução

A Teoria de Raízes de Nielsen clássica trata, essencialmente, de calcular um limitante inferior para o número de raízes de uma aplicação $f : X^n \rightarrow Y^n$ em $y_0 \in Y$, onde X^n é uma variedade topológica compacta e orientável de dimensão n e Y^n é uma variedade topológica fechada de mesma dimensão, válido para uma classe de homotopia de f . As raízes são particionadas em classes de equivalência, e definimos um critério para decidir quando uma classe de raízes de Nielsen é essencial. O número de Nielsen, que será denotado por $N(f, y_0)$, conta o número de classes essenciais, e é um invariante por homotopias.

Estando o conceito número de raízes de Nielsen bem definido, podemos destacar duas linhas principais de investigação. Uma delas é o desenvolvimento de técnicas para computar $N(f, y_0)$. Por exemplo, algumas classes de espaços permitem um cálculo direto para o número de Nielsen, como por exemplo aquele em que Y é um grupo de Lie. A outra linha de investigação concerne a se $N(f, y_0)$ é um limitante inferior estrito, ou seja, se existem aplicações na classe de homotopia de f que têm exatamente $N(f, y_0)$ raízes.

Seguindo [20], vamos “despir” X^n das hipóteses de ser orientável e compacta e Y^n da hipótese de ser uma variedade fechada. Lançaremos mão apenas das propriedades mais essenciais de Y , que serão as hipóteses de Y ser um espaço topológico de Hausdorff bem-conexo (ou seja, conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo), e y_0 admitir uma vizinhança homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. A fim de abranger alguns resultados da teoria “clássica”, vamos impor sobre f a hipótese de ser uma aplicação própria

- ou seja, vamos substituir uma hipótese sobre a topologia de X^n por uma hipótese sobre $f : X^n \rightarrow Y$. A fim de abarcar variedades topológicas não orientáveis, introduziremos o revestimento de orientação de X^n , $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ e, utilizando o fato de $\tilde{X}$ ser orientável, recuperaremos resultados da teoria clássica para f ao analisar $f \circ \tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow Y$.

Uma vez que estaremos trabalhando no contexto de aplicações próprias, convém definirmos o número de Nielsen próprio para $f : X^n \rightarrow Y$ em y_0 , $PNR(f, y_0)$ como um limitante inferior para o número de raízes de aplicações propriamente homotópicas a f . Assim como $N(f, y_0)$ é invariante por homotopias, $PNR(f, y_0)$ será invariante por homotopias próprias. Outras ferramentas ainda mais poderosas - embora nem sempre fáceis de computar - são definidas, como o grau absoluto, $\mathcal{A}(f, y_0)$, que será um limitante inferior mais fino para o número de raízes de uma aplicação que, além de propriamente homotópica a f também é transversal a y_0 , ou seja, tal que y_0 admite uma vizinhança uniformemente revestida por f . Para aplicações entre variedades topológicas compactas orientadas, o grau absoluto coincide, em módulo, com o grau de Brouwer, de modo a ser desnecessária sua introdução. Na teoria apresentada por Brooks em [20], o grau absoluto será uma espécie de extensão do conceito de grau de Brouwer para o caso em que X^n não é uma variedade fechada e Y^n não é uma variedade conexa.

Um dos nossos objetivos será, seguindo [20], apresentar condições suficientes para que exista uma aplicação $g : X^n \rightarrow Y$ que tenha exatamente $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes, levando em consideração, entre outras coisas, a dimensão da variedade topológica X^n , usando para isto as propriedades de contratibilidade de laços na bola $\mathbb{B}^n$.

A nossa meta principal é apresentar uma demonstração detalhada de dois teoremas da Teoria de Raízes de Nielsen para aplicações próprias, com base em [20]. O primeiro destes teoremas, o **Teorema 1.1**, versa sobre o grau absoluto de uma aplicação $f : X^n \rightarrow Y$ em $y_0 \in Y$ transversal a este ponto como limitante inferior para o número de raízes de aplicações que, além de propriamente homotópicas a $f : X^n \rightarrow Y$, também são transversais

a y_0 . Enunciamos este teorema a seguir:

Teorema 1.1 *Sejam X^n uma n -variedade topológica conexa, Y um espaço topológico de Hausdorff bem-conexo e $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria. Se $y_0 \in Y$ admite uma vizinhança homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, então toda aplicação propriamente homotópica a $f : X^n \rightarrow Y$ que também é transversal a y_0 tem, no mínimo, $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes. Além disso, se $n > 2$, existe uma aplicação propriamente homotópica a $f : X^n \rightarrow Y$ e transversal a y_0 que admite exatamente $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0 .*

O segundo teorema, **Teorema 1.2**, caracteriza a essencialidade de classes de raízes de uma aplicação $f : X^n \rightarrow Y$ em y_0 por meio da multiplicidade destas.

Teorema 1.2 *Sejam X^n uma n -variedade topológica conexa, Y um espaço topológico de Hausdorff bem-conexo e $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria. Se $y_0 \in Y$ admite uma vizinhança homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, então toda aplicação propriamente homotópica a f e transversal a y_0 admite, no mínimo, $\text{PNR}(f, y_0)$ raízes em y_0 , e toda classe de raízes de Nielsen de f em y_0 com multiplicidade diferente de zero é propriamente essencial. Ademais, se $n > 2$, então existe uma aplicação propriamente homotópica a $f : X^n \rightarrow Y$ que tem exatamente $\text{PNR}(f, y_0)$ raízes em y_0 , e uma classe de raízes de $f : X^n \rightarrow Y$ é propriamente essencial apenas quando tiver multiplicidade não zero.*

Para o caso de ser a dimensão da variedade topológica X^n maior que 2 (i.e., $n > 2$), temos propriedades conhecidas como "propriedades do tipo Wecken" para o grau absoluto e para o número de raízes de Nielsen próprio. Estes resultados garantem a existência de aplicações que realizam estas propriedades.

Para a construção das aplicações cuja existência asseveramos nos teoremas acima, faremos forte uso da **Teoria de Homologia Simplicial**¹, e das propriedades topológicas

¹alguns conceitos essenciais são dados no **Apêndice A**

da variedade X^n , como, por exemplo, sua paracompacidade.

Daremos, no **Exemplo 120**, uma aplicação $f : X^n \rightarrow Y$ que satisfaz às condições dos teoremas acima e que ilustra que, contrariamente ao que é verdadeiro quando Y é uma variedade topológica de dimensão n , f tem classes de raízes de Nielsen com multiplicidades e essencialidades diferentes, e o número de Reidemeister de suas raízes é estritamente maior que o número de raízes de Nielsen, mesmo quando este não é nulo.

Esta dissertação está organizada como segue: nas primeiras seções estabelecemos o embasamento preliminar e as notações da linguagem da topologia que vamos utilizar. Na segunda seção fornecemos as definições e os teoremas essenciais da Teoria de Nielsen elementar.

No capítulo 2 apresentamos sucintamente a teoria clássica para depois estendê-la.

No Capítulo 3 apresentamos a Teoria de Nielsen para Aplicações Próprias e, finalmente, no Capítulo 4 apresentamos uma demonstração para os teoremas enunciados acima e apresentamos um exemplo para o qual a teoria apresentada se apropria.

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as ferramentas essenciais da Topologia Algébrica que iremos utilizar a fim de estabelecer os resultados da Teoria de Nielsen Clássica. Na seção 1.1 apresenta-se um modo usual de dotar o espaço de aplicações entre dois espaços topológicos de uma topologia. A seção 1.2 tratará de um dos protagonistas desta teoria, o conceito de aplicação própria. Na seção 1.3 apresentamos uma extensão do conceito de transversalidade para aplicações (não necessariamente diferenciáveis) em um ponto do contradomínio que admite uma vizinhança homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Finalmente, na seção 1.4, apresentamos uma maneira conveniente de definir orientação para uma variedade topológica, maneira esta que nos permitirá estender os resultados da teoria clássica para o caso em que X^n é não-orientável.

1.1 A topologia compacto-aberta

Esta seção é necessária devido à **Proposição 5**, que nos permitirá provar certas propriedades do objeto que definiremos na próxima seção, a saber, o índice. A teoria aqui apresentada se encontra em [17]. Ao longo desta dissertação, a fim de simplicidade de notação, sempre que nos referirmos a espaços topológicos arbitrários omitiremos sua topologia, de modo que ao invés de escrevermos "seja (X, τ) é um espaço topológico",

escreveremos "seja X um espaço topológico".

Sendo X e Y espaços topológicos, $\text{Map}(X, Y)$ denotará o conjunto de todas as aplicações de X em Y . Por aplicação entenderemos, ao longo desta dissertação, uma função contínua.

Existem vários modos de dotar $\text{Map}(X, Y)$ de uma topologia, mas para nossos propósitos a topologia mais útil será a **topologia compacto-aberta**, também chamada de **k -topologia**.

Para quaisquer dois conjuntos $K \subset X$ e $W \subset Y$, seja $M(K, W)$ o subconjunto de $\text{Map}(X, Y)$ definido por:

$$M(K, W) := \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f(K) \subset W\}.$$

$M(K, W)$ será chamado de **conjunto sub-básico** de $\text{Map}(X, Y)$ sempre que K for compacto e W for aberto. A topologia compacto-aberta de $\text{Map}(X, Y)$ é a topologia gerada pela sub-base:

$$\mathfrak{S} = \{M(K, W) \mid K \subset X \text{ é compacto e } W \subset Y \text{ é aberto}\}.$$

De acordo com a nossa definição de sub-base, um conjunto será aberto em $\text{Map}(X, Y)$ se for reunião de interseções finitas de conjuntos sub-básicos.

Sejam X um espaço topológico de Hausdorff, Y um espaço topológico qualquer e $\mathfrak{U} = \{U\}$ uma sub-base para a topologia σ de Y . O lema a seguir nos permitirá construir uma sub-base para a topologia compacto-aberta de $\text{Map}(X, Y)$ a partir da sub-base $\mathfrak{U}$.

Lema 1. *Se X é um espaço de Hausdorff e $\mathfrak{U} = \{U\}$ é uma sub-base para os conjuntos abertos de Y , então*

$$\{M(K, U) \mid K \subset X \text{ é compacto e } U \in \mathfrak{U}\}$$

constitui uma sub-base para a topologia compacto-aberta de $\text{Map}(X, Y)$.

Demonstração. Basta mostrar que se K é um subconjunto compacto de X , W é um subconjunto aberto de Y , e se $f \in M(K, W)$, então existem subconjuntos compactos $K_1, K_2, \dots, K_m$ de X e $U_1, \dots, U_m \in \mathfrak{U}$ tais que:

$$f \in M(K_1, U_1) \cap \dots \cap M(K_m, U_m) \subset M(K, W).$$

Seja $x \in K$. Como $f(x) \in W$, existe um número finito de conjuntos em $\mathfrak{U}$, digamos, $U_1^x, \dots, U_{n(x)}^x$, tais que:

$$f(x) \in U_1^x \cap \dots \cap U_{n(x)}^x \subset W.$$

Como f é contínua, existe uma vizinhança G_x de x em X tal que:

$$f(G_x) \subset U_1^x \cap \dots \cap U_{n(x)}^x.$$

Como K é um espaço de Hausdorff compacto, K é regular. Assim, existe uma vizinhança aberta H_x de x em K tal que o fecho $K_x = \text{Cl. } H_x$ está contido em G_x .

A coleção $\{H_x : x \in K\}$ é uma cobertura aberta do espaço compacto K , e por conseguinte existe um número finito de pontos em K , digamos $x_1, \dots, x_q$, tais que:

$$K = H_{x_1} \cup \dots \cup H_{x_q}.$$

Agora, os conjuntos $K_{x_1}, \dots, K_{x_q}$ são compactos. Ademais,

$$f(K_{x_j}) \subset f(G_{x_j}) \subset U_{x_1}^{x_j} \cap \dots \cap U_{x_{n_j}}^{x_j} \subset W, \quad (j = 1, \dots, q).$$

Portanto nós temos:

$$f \in \bigcap_{j=1}^q \left[\bigcap_{i=1}^{n_j} M(K_{x_j}, U_i^{x_j}) \right]. \quad (1.1.1)$$

Suponha que $g \in \text{Map}(X, Y)$ pertença ao conjunto do membro direito da expressão (1.1.1). Se $x \in K$, então x pertence a algum H_{x_j} , e portanto está em K_{x_j} . Assim,

$$g(x) \in U_1^{x_j} \cap \cdots \cap U_{n_j}^{x_j} \subset W.$$

Por conseguinte, $g \in M(K, W)$, de modo que:

$$\bigcap_{j=1}^q \left[\bigcap_{i=1}^{n_j} M(K_{x_j}, U_i^{x_j}) \right] \subset M(K, W).$$

□

Definição 2. Dados X e Y espaços topológicos e $x \in X$, a função:

$$\begin{aligned} \vartheta_x : \text{Map}(X, Y) &\rightarrow Y \\ f &\mapsto \vartheta_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

é chamada a **função de avaliação** de um produto cartesiano $\text{Map}(X, Y)$.

Proposição 3. Se X é um espaço topológico regular e localmente compacto, então a função avaliação ϑ de $\text{Map}(X, Y)$ é contínua.

Demonstração. Sejam $f \in \text{Map}(X, Y)$, $x \in X$. Seja W um aberto arbitrário de Y tal que $W \ni f(x)$. Mostremos que existe um aberto $Z \subset \text{Map}(X, Y) \times X$ tal que $\vartheta(Z) \subset W$.

Como f é uma aplicação contínua, a pré-imagem de W , $f^{-1}(W)$, é um subconjunto aberto de X que contém x . Uma vez que X é regular e localmente compacto, existe uma vizinhança aberta de x , V , tal que $\text{Cl. } V$ é compacto e $\text{Cl. } V \subset f^{-1}(W)$. Então $M(\text{Cl. } V, W)$ é um conjunto aberto sub-básico de $\text{Map}(X, Y)$ que contém f . Deste modo, tomando $Z = M(\text{Cl. } V, W) \times V$, $\vartheta(Z) \subset W$, e portanto ϑ é contínua. □

Definição 4. *Sejam X e Y espaços topológicos e $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. A aplicação:*

$$\begin{aligned} \theta(F) : [0, 1] &\rightarrow \text{Map}(X, Y) \\ t &\mapsto \theta(F)(t) : X \rightarrow Y \\ &\quad x \mapsto F(x, t) \end{aligned}$$

é chamada a função associada de F .

A seguir enunciamos a proposição mais importante desta seção.

Proposição 5. *A função associada $\theta(F)$ de $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ é contínua.*

Demonstração. Seja $M(K, W)$ um aberto sub-básico arbitrário de $\text{Map}(X, Y)$. Basta provarmos que $\theta(F)^{-1}(M(K, W))$ é um subconjunto aberto de $[0, 1]$. Considere, $t_0 \in \theta(F)^{-1}(M(K, W))$. Por definição, temos:

$$K \times \{t_0\} \subset F^{-1}(W).$$

Desde que W é aberto, a continuidade de F implica que $F^{-1}(W)$ é um subconjunto aberto de $X \times [0, 1]$. Por conseguinte, $F^{-1}(W)$ é reunião de uma coleção de conjuntos abertos da forma $G_\mu \times H_\mu$, onde G_μ e H_μ são subconjuntos abertos de X e de $[0, 1]$, respectivamente. Uma vez que K é compacto, $K \times \{t_0\}$ está contido na reunião de um número finito destes conjuntos abertos, digamos:

$$G_1 \times H_1, G_2 \times H_2, \dots, G_n \times H_n$$

com $t_0 \in H_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Então:

$$H = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$$

é um subconjunto aberto de $[0, 1]$ contendo t_0 que está contido em $\theta(F)^{-1}(M(K, W))$, de maneira que $\theta(F)^{-1}(M(K, W))$ é um subconjunto aberto de $[0, 1]$. Logo, $\theta(F)$ é contínua, como desejado. $\square$

1.2 Aplicações Próprias

Nesta seção apresentaremos outro conceito ubíquo nesta teoria, o conceito de aplicação própria. Veremos nesta seção que podemos preservar muitos resultados concernentes à topologia das pré-imagens de subconjuntos de Y por f quando substituimos a hipótese de X ser um espaço topológico compacto pela hipótese de ser $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação própria.

Definição 6. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uma **aplicação própria** se para todo $C \subset Y$ compacto, $f^{-1}(C)$ é compacto.*

Definição 7. *Sejam X e Y espaços topológicos normais. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é fechada se, para todo $F \subset X$ fechado, tem-se $f(F) \subset Y$ fechado.*

O resultado a seguir caracteriza aplicações fechadas em termos de abertos e de pontos.

Proposição 8. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é fechada se, e somente se, dados $y \in Y$ qualquer e um aberto $U \subset X$ com $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, existir um aberto $V \subset Y$ tal que $y \in V$ e $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(V) \subset U$.*

Demonstração. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação fechada, sendo $X \setminus U$ fechado, $f(X \setminus U) \subset Y$ é um conjunto fechado. Pela normalidade de Y , como $y \notin f(X \setminus U)$, existe um aberto $V \in \sigma$ tal que $\{y\} \subset V$ e $V \cap f(X \setminus U) = \emptyset$. Mas isto quer dizer que $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(V) \subset U$, o que prova uma das implicações.

Suponha agora que, dados $y \in Y$ qualquer e $U \subset X$ aberto com $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, exista um aberto $V \subset Y$ tal que $y \in V$ e $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(V) \subset U$. Mostremos que $f : X \rightarrow Y$ é

uma aplicação fechada.

Para tanto, seja $F \subset X$ fechado. Se $y \notin f(F)$, mostraremos que existe um aberto $V \in \sigma$ tal que $y \in V \subset X \setminus f(F)$, ou seja, provaremos que o complementar de $f(F)$ é aberto.

Como $y \notin f(F)$, então $F \cap f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, de modo que o aberto $X \setminus F$ contém $f^{-1}(\{y\})$, i.e.,

$$f^{-1}(\{y\}) \subset X \setminus F.$$

Por hipótese, existe $V \subset Y$ aberto tal que $f^{-1}(V) \subset X \setminus F$. Mas isto quer dizer que $V \cap f(F) = \emptyset$, ou seja, que $Y \setminus f(F)$ é aberto e, por conseguinte, que $f(F)$ é fechado. $\square$

Teorema 9. *Sejam X e Y espaços topológicos normais. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é própria se, e somente se, for fechada e para todo $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ é compacto.*

Demonstração. Suponha que $f : X \rightarrow Y$ seja fechada e tal que $\forall y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ é compacto. Dado $K \subset Y$, mostremos que $f^{-1}(K)$ é compacto. Para tanto, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $f^{-1}(K)$ por abertos U de X . Para $y \in K$, podemos extrair uma subcoleção finita $\{U_1^y, U_2^y, \dots, U_{n_y}^y\} \subset \mathcal{U}$ que ainda cobre o compacto $f^{-1}(\{y\})$, i.e.,

$$f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n_y} U_i^y.$$

Pela **Proposição 8**, como f é fechada e $\bigcup_{i=1}^{n_y} U_i^y$ é aberto, existe um aberto $V_y \ni y$, $V_y \in \sigma$ tal que:

$$f^{-1}(V_y) \subset U_1^y \cup U_2^y \cup \dots \cup U_{n_y}^y.$$

Pela compacidade de K , também podemos encontrar pontos $y_1, \dots, y_k \in K$ tais que $K \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_k}$. Então:

$$f^{-1}(K) \subset \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{n_{y_j}} U_i^{y_j}.$$

Esta é, portanto, uma subcobertura finita de $f^{-1}(K)$. Assim, $f^{-1}(K)$ é compacto, e portanto f é uma aplicação própria.

Supondo que $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação própria, como $\forall y \in Y, \{y\} \subset Y$ é compacto, $f^{-1}(\{y\}) \subset X$ é compacto.

Seja $F \subset X$ um fechado. Mostraremos que $f(F)$ intersectado com cada compacto de Y é compacto. Disto seguirá que $f(F)$ é fechado.

Para todo compacto $K \subset Y$, temos $f^{-1}(K)$ compacto (devido ao fato de f ser própria), e portanto, $F \cap f^{-1}(K)$ é compacto. Por causa disto, $f(F \cap f^{-1}(K)) = f(F) \cap K$ é compacto. Desta maneira, $f(F)$ intersecta cada compacto $K \subset Y$ num compacto, de modo que $f(F)$ é fechado. $\square$

Definição 10. Uma homotopia $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é uma **homotopia própria** se a aplicação:

$$\begin{aligned} H : X \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto f_t(x) \end{aligned}$$

for própria.

A seguir, alguns resultados elementares a respeito de aplicações e homotopias próprias.

Teorema 11. Uma homotopia $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é própria se, e somente se,

$$\bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(C) \subset X$$

é compacto sempre que $C \subset Y$ é compacto.

Demonstração. Suponha que $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ seja uma homotopia própria. Então, dado $C \subset Y$ compacto, segue que $H^{-1}(C)$ é compacto em $X \times [0, 1]$. Utilizando-nos do fato de que a projeção p_1 :

$$\begin{aligned} p_1 : X \times [0, 1] &\rightarrow X \\ (x, t) &\mapsto x \end{aligned}$$

que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow p_t & \nearrow f_t & \\ X & & \end{array}$$

é contínua, segue-se que $p_1(H^{-1}(C))$ é compacto, de modo que, como

$$p_1(H^{-1}(C)) = \bigcup_{t \in [0,1]} f_t^{-1}(C),$$

então $\bigcup_{t \in [0,1]} f_t^{-1}(C)$ é compacto.

Suponha que sempre que $C \subset Y$ for compacto, $\bigcup_{t \in I} f_t^{-1}(C)$ seja compacto. Então, pelo Teorema de Tychonoff,

$$\left[\bigcup_{t \in [0,1]} f_t^{-1}(C) \right] \times [0, 1]$$

também é compacto.

Agora, como C é compacto e portanto fechado em Y , sendo $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ contínua, segue que $H^{-1}(C)$ é fechado. Uma vez que $H^{-1}(C) \subset \bigcup_{t \in [0,1]} f_t^{-1}(C) \times [0, 1]$, do fato de $H^{-1}(C)$ ser fechado num conjunto compacto, segue que $H^{-1}(C)$ é compacto, de modo que a homotopia é própria, como desejado. $\square$

Definição 12. *Seja $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ uma homotopia com $f_0 = f$ e $A \subset X$ qualquer. A homotopia é constante igual a f fora de A quando $\forall x \in X \setminus A, f_t(x) = f(x)$.*

Teorema 13. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação própria, $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ uma homotopia com $f_0 = f$ e $K \subset X$ compacto. Se $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é constante fora de K , então a homotopia $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é própria.*

Demonstração. Seja $C \subset Y$ compacto e suponha que $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ seja constante com relação a t fora de K , digamos, $H(x, t) = \kappa, \forall x \in X \setminus K$. Note que:

$$\bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(C) = \left(\bigcup_{t \in [0, 1]} \left(f_t \Big|_K \right)^{-1}(C) \right) \cup f_t \Big|_{X \setminus K}^{-1}(C).$$

De fato, a inclusão não trivial é:

$$\bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(C) \subseteq \left(\bigcup_{t \in [0, 1]} \left(f_t \Big|_K \right)^{-1}(C) \right) \cup f^{-1}(C).$$

Dado $x \in \bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(C) \subset X$, temos duas possibilidades:

(i) $x \in K \cap \left(\bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(C) \right).$

Dado $x \in K$ com $x \in \bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(C)$, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $f_{t_0}(x) \in C$. Neste caso, $x \in \left(f_{t_0} \Big|_K \right)^{-1}(C)$, e portanto, $x \in \left(\bigcup_{t \in [0, 1]} \left(f_t \Big|_K \right)^{-1}(C) \right) \cup f^{-1}(C)$.

(ii) $x \in X \setminus K$ com $x \in (X \setminus K) \cap \left(\bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(C) \right).$

Então $f_t(x) = \kappa, \forall t \in [0, 1]$. Se $\kappa \in C$, $x \in \bigcup_{t \in [0, 1]} \left(f_t \Big|_{X \setminus K} \right)^{-1}(C)$. Entretanto, se $\kappa \in Y \setminus C$, então $f_t(x) = f(x) = \kappa$, uma vez que a homotopia é constante fora de K .

Sendo K compacto, a homotopia $f_t|_K : K \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é própria, de modo que pelo **Teorema 11**,

$$\bigcup_{t \in [0, 1]} \left(f_t \Big|_K \right)^{-1}(C)$$

é compacta. Sendo f própria, $f^{-1}(C)$ é compacto. Logo, a reunião:

$$\bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(C)$$

é compacta, de modo que pelo **Teorema 11**, a homotopia $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é própria. $\square$

O teorema a seguir relaciona f e seu levantamento por um revestimento $\bar{q} : \bar{Y} \rightarrow Y$, que não precisa ser próprio.

Teorema 14. *Seja $\bar{f} : X \rightarrow \bar{Y}$ um levantamento da aplicação $f : X \rightarrow Y$ pelo revestimento $\bar{q} : \bar{Y} \rightarrow Y$. Então f é própria se, e somente se, $\bar{f}$ é própria.*

Demonstração. Suponha que $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação própria. Seja $\bar{C} \subset \bar{Y}$ compacto. Então $\bar{q}(\bar{C})$ é compacto. Como f é, por hipótese, própria, $\bar{f}^{-1}(\bar{C}) = f^{-1}(\bar{q}(\bar{C}))$ é compacto, de modo que $\bar{f}$ é própria.

Suponha que $\bar{f} : X \rightarrow \bar{Y}$ é uma aplicação própria. Seja $C \subset Y$ compacto. Para cada $y \in Y$, existe uma vizinhança $V_y \subset Y$ tal que:

$$\bar{q}^{-1}(V_y) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \widetilde{V}_y^k$$

e

$$\bar{q} : \widetilde{V}_y^k \rightarrow V_y \text{ é um homeomorfismo.}$$

Para cada $y \in C$, considere $V_y \cap C$. O conjunto:

$$\mathcal{K}' = \{V_y \cap C; y \in C\}$$

é uma cobertura por abertos (relativos) para C , que por ser compacto, admite uma subcobertura finita, que designaremos por $\mathcal{K}''$. Considere:

$$\mathcal{K} = \{\text{Cl. } A; A \in \mathcal{K}''\},$$

que é uma cobertura finita por compactos uniformemente revestidos por $\bar{q}$.

Para cada $K \in \mathcal{K}$, seja $\overline{K}$ um conjunto que é aplicado homeomorficamente sobre K por $\overline{q}$, ou seja, tal que:

$$\overline{q} : \overline{K} \rightarrow K$$

é um homeomorfismo. Estamos, portanto, tomando os compactos correspondentes no revestimento.

Cada um destes $\overline{K}$ s é compacto por ser homeomorfo a um conjunto compacto, e como $\overline{f}$ é própria, $\overline{f}^{-1}(\overline{K})$ também é compacto. Assim,

$$\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \overline{f}^{-1}(\overline{K})$$

é uma reunião finita de conjuntos compactos e é, portanto, compacto. Segue-se que $f^{-1}(C)$, por ser subconjunto fechado do compacto $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \overline{f}^{-1}(\overline{K})$, é compacto. Logo, f é própria, como prometido. $\square$

Como uma homotopia própria $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é, em particular, uma aplicação própria $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, segue o corolário abaixo.

Corolário 15. *Se $\overline{f}_t : X \rightarrow \overline{Y}, t \in [0, 1]$ é um levantamento de uma homotopia $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ pelo revestimento $\overline{q} : \overline{Y} \rightarrow Y$. Então $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é própria se, e somente se, $\overline{f}_t : X \rightarrow \overline{Y}, t \in [0, 1]$ é própria. Assim, uma homotopia é própria se, e somente se o seu levantamento o for.*

Teorema 16. *Seja Y^m uma variedade topológica. Uma aplicação de revestimento de Y^m é própria se, e somente se, tiver um número finito de folhas. A composição de aplicações próprias é própria.*

Demonstração. A ideia da demonstração da primeira asserção retiramos de [13].

Seja $\overline{Y}^m \xrightarrow{q} Y^m$ uma aplicação de revestimento. Suponha, primeiramente, que q tenha um número finito de folhas, digamos n , i.e., para cada $y \in Y^m$

$$\#q^{-1}(\{y\}) = n.$$

Sejam $y \in Y^m$ e A aberto tais que $A \supset q^{-1}(\{y\})$. Podemos escrever:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = q^{-1}(\{y\}).$$

Como Y^m é um espaço de Hausdorff (devido ao fato de ser Y^m uma variedade, e consequentemente, $\overline{Y^m}$ ser espaço de Hausdorff), existem abertos $W_1, W_2, \dots, W_n$ com $W_1 \ni x_1, W_2 \ni x_2, \dots, W_n \ni x_n$, $W_i \cap W_j = \emptyset$ se $i \neq j$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n \subset A$. Então:

$$V = \bigcap_{i=1}^n q(W_i)$$

é uma vizinhança aberta de y . Como q é contínua, para cada $i = 1, 2, \dots, n$,

$$U_i = W_i \cap q^{-1}(V)$$

é aberto. Pondo $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$, tem-se:

$$U \subset q^{-1}(V).$$

Afirmamos que $q^{-1}(V) \subset U$.

De fato, se $w \in q^{-1}(V)$, então $q(w) = v \in V = \bigcap_{i=1}^n q(W_i)$, de modo que existem $w_1 \in W_1, \dots, w_n \in W_n$ tais que $q(w_i) = v$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Como $v \in Y^m$, $q^{-1}(\{v\})$ tem n elementos, e os W_i 's são dois a dois disjuntos, deve-se ter $w = w_i$ para um certo $i = 1, 2, \dots, n$. Logo $w \in q^{-1}(V) \cap W_i = U_i \subset U$.

Observe que q é uma aplicação fechada. Com efeito, se $F \subset \overline{Y^m}$ é fechado e $y \in Y^m \setminus q(F) \subset \overline{Y^m}$ é tal que $\overline{Y^m} \setminus F \supset q^{-1}(\{y\})$, existe $V \subset Y^m$ aberto com $y \in V$ e $q^{-1}(V) \subset \overline{Y^m} \setminus F$. Assim, $V \subset Y^m \setminus q(F)$, de modo que $Y^m \setminus q(F) \subset Y^m$ é aberto e, consequentemente, $q(F) \subset Y^m$ é fechado.

Assim, $q^{-1}(V) = U$, de modo que $q^{-1}(V) = U \subset \bigcup_{i=1}^n W_i \subset A$. Como $\overline{Y^m}$ e Y^m são normais, q é uma aplicação fechada, e para todo $y \in Y^m$, $q^{-1}(\{y\})$ é compacto (porque é

discreto), q é própria.

Suponha agora que $q : \overline{Y^m} \rightarrow Y^m$ seja uma aplicação própria. Dado $y \in Y^m$ qualquer, como $\{y\} \subset Y^m$ é compacto, $q^{-1}(\{y\})$ é compacto. Uma vez que este conjunto é discreto (devido ao fato de q ser uma aplicação de revestimento), segue que $q^{-1}(\{y\})$ é finito, ou seja, a aplicação de revestimento tem um número finito de folhas.

Sejam $f : X^\ell \rightarrow Y^m$, $g : Y^m \rightarrow Z^k$ aplicações próprias:

$$X^\ell \xrightarrow{f} Y^m \xrightarrow{g} Z^k.$$

Mostremos que a composição $g \circ f : X^\ell \rightarrow Z^k$ é própria.

Seja $K \subset Z^k$ um compacto. Sendo g uma aplicação própria, $g^{-1}(K) \subset Y^m$ é compacto, de modo que, como f é própria, $f^{-1}[g^{-1}(K)] \subset X^\ell$ é compacto, ou seja, $(g \circ f)^{-1}(K)$ é compacto, de maneira que $g \circ f$ é própria. $\square$

Na próxima seção apresentaremos o conceito de transversalidade estendido para aplicações contínuas e variedades topológicas, e suas propriedades para posterior uso na Teoria de Raízes para aplicações próprias.

1.3 Transversalidade, Homeomorfismos Locais e Raízes Isoladas

Uma propriedade importante que uma raiz de uma aplicação própria pode ter é a de ser uma raiz isolada. A grosso modo, uma raiz de uma aplicação é isolada quando podemos encontrar uma vizinhança suficientemente "pequena" desta que não contém outras raízes da aplicação. Segue abaixo a definição precisa.

Definição 17. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. Um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = y_0$ é uma **raiz de f em y_0** . A raiz x é **isolada** se admitir uma vizinhança V tal que f não tem nenhuma outra raiz de y_0 em V .*

Observação 18. *Se todas as raízes de f em y_0 forem isoladas, então $f^{-1}(\{y_0\})$ é discreto, de modo que, se f for própria, $f^{-1}(\{y_0\})$ é compacto, e portanto, finito.*

Definição 19. *Sejam X e Y espaços topológicos e $x_0 \in X$. A aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um **homeomorfismo local em $x_0 \in X$** quando x_0 admite uma vizinhança V que é aplicada homeomorficamente sobre uma vizinhança W de $f(x_0)$. Claramente, como homeomorfismos são aplicações injetoras, se f for um homeomorfismo local em uma raiz x_0 , então x_0 é isolada.*

A seguir damos uma definição de transversalidade no contexto topológico. Mais adiante veremos que esta generalização é feita a partir das propriedades que o Teorema da Função Inversa impõe para aplicações diferenciáveis.

Definição 20. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **transversal a $y_0 \in Y$** quando y_0 admite uma vizinhança V para a qual existe uma família:*

$$\{V_x \subset X \mid x \in f^{-1}(\{y_0\})\}$$

de subconjuntos mutuamente disjuntos tal que:

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{x \in f^{-1}(\{y_0\})} V_x,$$

onde cada V_x é uma vizinhança de x aplicada homeomorficamente por f sobre V .

Em Topologia Diferencial o conceito de transversalidade é recorrente. A seguir mostraremos que a definição acima generaliza a definição de transversalidade para um contexto sem estruturas de diferenciabilidade.

Definição 21. *Sejam X^n e Y^n variedades suaves, $Z^m \subset Y^n$ uma subvariedade de Y^n e $f : X^n \rightarrow Y^n$ uma aplicação suave. A aplicação $f : X^n \rightarrow Y^n$ é **transversal a Z^m** , e escrevemos $f \pitchfork Z^m$, se $\forall x \in f^{-1}(Z^m)$, tivermos:*

$$Df_x(T_x X^n) + T_{f(x)} Z^m = T_{f(x)} Y^n.$$

Observação 22. *No caso em que $Z^m = \{y_0\}$, $f \pitchfork y_0$ se, e somente se $\forall x \in f^{-1}(\{y_0\})$:*

$$Df_x(T_x X^n) + T_{y_0} \{y_0\} = T_{y_0} Y^n,$$

ou seja:

$$Df_x(T_x X^n) = T_{y_0} Y^n.$$

Isto nos motiva a dar a seguinte definição.

Definição 23. *Sejam X^n e Y^n variedades suaves e $f : X^n \rightarrow Y^n$ uma aplicação suave. Dado $y_0 \in Y^n$, f é **transversal a y_0** , e escrevemos $f \pitchfork y_0$, se y_0 é um valor regular da aplicação f , ou seja, se para todo $x \in f^{-1}(\{y_0\})$ a aplicação $Df_x : T_x X^n \rightarrow T_{y_0} Y^n$ é sobrejetora.*

Note que ao longo da demonstração do teorema a seguir, utilizamos fortemente o Teorema da Função Inversa.

Teorema 24. (Stack of Records ou Pilha de Cópias) *Sejam X^n e Y^n duas variedades de mesma dimensão com X^n compacta, $f : X^n \rightarrow Y^n$ suave e $y_0 \in Y^n$. Suponha que $f \pitchfork y_0$. Então $f^{-1}(\{y_0\})$ é finito e existe uma vizinhança $V \ni y_0$ em Y^n tal que:*

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^k U_i,$$

com cada U_i aberto e aplicado difeomorficamente sobre V por $f|_{U_i}$.

Demonstração. Como y_0 é valor regular, pelo **Teorema da Pré-Imagem** [veja, por exemplo, p. 21 de [26]], $f^{-1}(\{y_0\})$ deve ser uma subvariedade de X^n de dimensão igual

a $\dim X^n - \dim Y^n = n - n = 0$. Como X^n é compacta, e portanto limitada, $f^{-1}(\{y_0\})$ deve ser finito, pois de outro modo conteria um ponto de acumulação, o que contrariaria seu status como variedade de dimensão 0.

Do **Teorema do Núcleo e da Imagem**, como cada $x \in f^{-1}(\{y_0\})$ é ponto regular de f ,

$$n = \dim \ker Df_x + \dim \operatorname{Im} Df_x = \dim \ker Df_x + n \iff \dim \ker Df_x = 0$$

e Df_x é um isomorfismo para cada x nesta pré-imagem.

Nestas condições, pelo **Teorema da Função Inversa**, para cada $x \in f^{-1}(\{y_0\})$, existe uma vizinhança $W_x \ni x$ para a qual $f : W_x \rightarrow f(W_x)$ é um difeomorfismo.

Observe que cada W_x contém apenas um elemento da pré-imagem de y_0 , uma vez que f restrita a W_x é uma bijeção (e, em particular, uma injeção).

Agora, a reunião dos W_x 's constitui uma cobertura aberta para o conjunto $f^{-1}(\{y_0\}) \subset X^n$, com X^n compacto.

A compacidade de $f^{-1}(\{y_0\})$ (pois todo subconjunto fechado de um conjunto compacto é também compacto) garante que esta cobertura contém uma subcobertura finita. Pela observação acima, podemos denotar os elementos desta subcobertura finita por $W_{x_1}, \dots, W_{x_n}$.

Como X^n é, por definição, um espaço topológico de Hausdorff, podemos associar para cada W_{x_i} um aberto W_i de tal forma que $W_1, \dots, W_n$ ainda compõem uma cobertura finita para $f^{-1}(\{y_0\})$ e $W_i \cap W_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Para cada i , denote $V_i = f(W_i)$, e note que V_i é uma vizinhança aberta de y_0 .

Defina:

$$V = \bigcup_{j=1}^n V_j$$

e:

$$U_i = f^{-1}(V) \cap W_i.$$

Como os W_i 's são disjuntos, *a fortiori*, os U_i 's o são.

Assim, temos:

$$\bigsqcup_{i=1}^n U_i = \bigsqcup_{i=1}^n f^{-1}(V) \cap W_i = f^{-1}(V) \cap \overbrace{\bigsqcup_{i=1}^n W_i}^{=f^{-1}(\{y_0\})} \stackrel{y_0 \in V}{=} f^{-1}(V)$$

Observe que desta maneira, como $f|_{W_i} : W_i \rightarrow V_i$ é difeomorfismo, segue que:

$$f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$$

também o é. □

Observação 25. *Pelo Teorema 24, a Definição 20 se apropria naturalmente ao contexto da Topologia Diferencial.*

Observação 26. *O caso em que $f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$ exige uma classificação particular. Se $y_0 \notin \text{Cl. } f(X)$, então y_0 admite uma vizinhança V tal que $f^{-1}(V) = \emptyset$, e portanto é a reunião de uma família vazia de conjuntos. Como os membros de uma família vazia têm (por vacuidade) qualquer propriedade que quisermos, incluindo ser homeomorfa a V , neste caso convém dizer que f é transversal a y_0 .*

Por outro lado, se $y_0 \notin f(X)$ mas $y_0 \in \partial f(X)$, então $f^{-1}(V)$ é não vazio para toda vizinhança V de y_0 , mas nenhum subconjunto de $f^{-1}(V)$ é aplicado sobrejetivamente por f , de modo que f não pode ser transversal a y_0 .

Naturalmente, se f é transversal a y_0 , então f é um homeomorfismo local em cada $x \in f^{-1}(\{y_0\})$.

Observação 27. *A recíproca da asserção acima é falsa. Considere o seguinte homeomorfismo local:*

$$\begin{aligned} f :] - 2\pi, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto e^{it} \end{aligned}.$$

Observe, todavia, que f não é transversal a $y_0 = 1 \in \mathbb{S}^1$. O **Teorema 28** nos apresenta as ressalvas que precisamos fazer sobre f a fim de recuperar, embora parcialmente, esta recíproca.

Teorema 28. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação própria entre espaços de Hausdorff e $y_0 \in Y$ um ponto que admite uma vizinhança compacta $K \subset Y$. Se f é um homeomorfismo local em cada $x \in f^{-1}(\{y_0\})$, então f é transversal a y_0 .*

Demonstração. Como K é compacto e f é própria, $f^{-1}(K)$ é compacto e $f^{-1}(\{y_0\})$ é finito. Como f é homeomorfismo local em cada $x \in f^{-1}(\{y_0\})$, para cada um destes x existem abertos $U_x \subset X$ e $V_x^{y_0} \subset K$ tais que:

$$f \Big|_{U_x} : U_x \rightarrow V_x^{y_0}$$

é um homeomorfismo. Como $f^{-1}(\{y_0\})$ é finito, o conjunto:

$$U = \bigcap_{x \in f^{-1}(\{y_0\})} V_x^{y_0}$$

é um aberto que contém y_0 . Defina:

$$\widetilde{U}_x = \left(f \Big|_{U_x} \right)^{-1}(U).$$

Nestas condições, $U \subset K$ é uma vizinhança aberta de y_0 e $\{\widetilde{U}_x | x \in f^{-1}(\{y_0\})\}$ é uma família de conjuntos mutuamente disjuntos tais que as restrições de f aplicam cada $\widetilde{U}_x$ homeomorficamente sobre U .

Vale sempre a inclusão a seguir:

$$\bigsqcup_x \widetilde{U}_x \subset f^{-1}(U),$$

no entanto, geralmente tem-se:

$$\bigsqcup_x \widetilde{U}_x \neq f^{-1}(U).$$

A fim de "remediar" isto, seja $\mathcal{C}$ a família de todas as vizinhanças fechadas, $C \subset U$ de y_0 . Como K é compacto e de Hausdorff, não é difícil provar que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ e $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \{y_0\}$. Assim, uma vez que:

$$z \in f^{-1}(\{y_0\}) \subset \bigsqcup_x \widetilde{U}_x,$$

existem $U_z \subset X$ e $V_z^{y_0} \subset K$ tais que:

$$f \Big|_{U_z} : U_z \rightarrow V_z^{y_0}$$

é homeomorfismo e $f \Big|_{U_z} (z) = y_0 \in V$, de modo que $z \in f \Big|_{U_z}^{-1}(U) = \widetilde{U}_z$, e temos:

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \left(f^{-1}(C) \setminus \bigsqcup_x \widetilde{U}_x \right) = f^{-1}(\{y_0\}) \setminus \bigsqcup_x \widetilde{U}_x = f^{-1} \left(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \right) \setminus \bigsqcup_x \widetilde{U}_x = \emptyset.$$

Como $f^{-1}(K)$ é compacto, isto mostra que a família:

$$\{f^{-1}(C) \setminus \bigsqcup_x \widetilde{U}_x \mid C \in \mathcal{C}\}$$

não pode ter a propriedade da interseção finita (vide, *e.g.*, o **Teorema 26.9** de [12]), de modo que deve existir uma subfamília $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ tal que:

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} \left[f^{-1}(C) \setminus \bigsqcup_x \widetilde{U}_x \right] = \emptyset,$$

e portanto $f^{-1}(\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C) \subset \bigsqcup_x \widetilde{U}_x$.

Segue-se que $\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C$ é uma vizinhança de y_0 tal que $f^{-1}(\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C) = \sqcup_x (\widetilde{U}_x \cap f^{-1}(\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C))$ e, para cada $x \in f^{-1}(\{y_0\})$ a restrição de f aplica a vizinhança $\widetilde{U}_x \cap f^{-1}(\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C)$ de x homeomorficamente sobre a vizinhança $\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C$ de y_0 . Logo, f é transversal a y_0 . $\square$

Uma noção fundamental sobre a qual jaz esta teoria é a de variedade topológica. Estes entes matemáticos são importantes por se assemelharem localmente com espaços euclidianos, além de terem boas propriedades concernentes à topologia e portanto, aos invariantes algébricos que a ela associamos. Na seção a seguir expressamos de maneira mais rigorosa o que queremos dizer com "se assemelhar localmente com um espaço euclidiano", bem como ser "orientável".

1.4 Orientação e Homologia

Quando estamos tratando de variedades diferenciáveis, a noção de orientação num ponto é expressa por meio da orientação do espaço vetorial que lhe é tangente. A fim de, quando possível, introduzir uma noção global de orientação em variedades diferenciáveis, usamos as seções do fibrado tangente. No entanto, em se tratando de variedades topológicas, não dispomos do aparato fornecido pela estrutura diferenciável, e contamos tão somente com homeomorfismos locais com espaços euclidianos. Neste caso, poderemos associar a cada ponto, ao invés de um espaço vetorial, uma estrutura algébrica um pouco mais simples, um $\mathbb{Z}$ -módulo, e usando geradores deste definir orientação. Também daremos uma definição apropriada a esta teoria de quando uma aplicação $f : X^n \rightarrow Y$ preserva orientação.

Analogamente ao procedimento adotado em Topologia Diferencial, definiremos primeiramente orientação pontual de uma variedade topológica, fazendo para tanto uso dos geradores de seus $\mathbb{Z}$ -módulos de homologia relativa. Depois vamos estendê-la para uma orientação local e, finalmente, criaremos um revestimento que, dependendo de admitir seções globais ou não, nos dará importantes informações a respeito da orientabilidade ou não dessa. Para a Teoria de Raízes, a definição mais adequada de orientabilidade é

apresentada nesta seção.

A seguir, definimos quando um espaço se assemelha localmente a $\mathbb{R}^n$. Esta será uma das condições que toda variedade topológica satisfará. A bibliografia na qual baseamos esta seção é [4], pp. 251-253.

Definição 29. *Um espaço topológico X é **localmente n -euclidiano** em x_0 se existirem uma vizinhança $E \ni x_0$ e um homeomorfismo:*

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Observemos que propriedades locais de $\mathbb{R}^n$ são emprestadas à n -variedades, como a conexidade por caminhos, a conexidade local por caminhos e a propriedade de ser semi-localmente simplesmente conexo.

Finalmente, na próxima definição apresentamos o conceito de variedade topológica, segundo podemos encontrar na p. 39 de [10].

Definição 30. *Uma n -variedade topológica X^n é um espaço topológico X , de Hausdorff, com base enumerável que é n -euclidiano em cada um de seus pontos.*

No contexto da Topologia Algébrica, uma orientação de uma n -variedade topológica X^n num ponto x é, a grosso modo, um gerador do n -ésimo $\mathbb{Z}$ -módulo de homologia relativa $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$. A fim de definirmos orientação no ponto deveremos, portanto, garantir que $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ é cíclico. É isto que o teorema a seguir faz.

Teorema 31. *Sejam X um espaço topológico que é localmente n -euclidiano em um de seus pontos, $x_0 \in X$, U uma vizinhança n -euclidiana de x_0 e R um anel comutativo com*

unidade. Então:

$$H_i(X, X \setminus \{x_0\}; R) = \begin{cases} R, & \text{se } i = n; \\ \{0\}, & \text{se } i \neq n \end{cases}$$

Por ser um teorema clássico, omitimos sua demonstração.

Em vista deste teorema, se X é localmente n -euclidiano em x_0 , então:

$$H_p(X, X \setminus \{x_0\}; \mathbb{Z}) \simeq H_p(U, U \setminus \{x_0\}; \mathbb{Z}),$$

que é trivial sempre que $p \neq n$, e cíclico de ordem infinita se $p = n$. Em particular, se X^n é uma variedade, $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, de modo que podemos enunciar a seguinte definição.

Definição 32. *Seja (X, τ) um espaço topológico localmente n -euclidiano em $x_0 \in X$. Uma $\mathbb{Z}$ -orientação local de X em x_0 (ou simplesmente um **orientação local de X em x_0**) é um gerador do n -ésimo módulo de homologia relativa, $H_n(X, X \setminus \{x_0\}; \mathbb{Z})$.*

Uma $\mathbb{Z}$ -orientação global de uma n -variedade X^n é, a grosso modo, uma escolha contínua de $\mathbb{Z}$ -orientações locais em cada ponto $x \in X^n$. A fim de defini-la, precisaremos relacionar classes de homologia em diferentes pontos que "estão próximos" entre si. Para tornar a definição de proximidade precisa, utilizaremos o conceito de "fibrado de orientação".

Dada uma n -variedade topológica X^n , nosso próximo passo é construir um espaço de revestimento para esta. Vamos construir um espaço total que também possua estrutura de variedade topológica. Considere o conjunto:

$$\bigcup_{x \in X^n} H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}).$$

Este conjunto, munido de uma topologia conveniente, será denotado por $\mathcal{OB}(X^n)$. Queremos construir uma aplicação $p : \mathcal{OB}(X^n) \rightarrow X^n$ tal que $p^{-1}(\{x\}) = H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, para $x \in X^n$, a fim de que possamos a cada ponto associar um gerador deste R -módulo.

O lema abaixo servir-nos-á para estender a noção de orientação de uma variedade em um ponto x para uma vizinhança deste, fornecendo-nos uma noção de orientação "local" na variedade.

No que segue, R denota um anel comutativo com unidade e $S_m(X^n; R)$ denota o R -módulo livre das n -cadeias sobre X^n , ou seja, gerado pelas funções contínuas do m -ésimo simplexo padrão Δ_m em X^n , $\sigma : \Delta_m \rightarrow X^n$,

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_n(X^n; R) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X^n; R) \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X^n; R) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

é um complexo de cadeias onde ∂ é o operador face, $Z_n(X^n; R) = \ker \partial$ e $B_n(X^n; R) = \text{im } \partial$

Lema 33. *Sejam X^n uma n -variedade topológica e $z \in Z_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$, ou seja $z \in S_n(X^n; R)$ é tal que $\partial z \in S_{n-1}(X^n \setminus \{x\}; R)$. Existe uma vizinhança V de x tal que $z \in Z_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R)$ para todo $y \in V$, isto é, $\partial z \in S_{n-1}(X^n \setminus \{y\}; R)$ para todo $y \in V$.*

Demonstração. Como $\partial z \in S_{n-1}(X^n \setminus \{x\}; R)$, então podemos escrever:

$$\partial z = \sum_{i=1}^r \alpha_i \sigma_i,$$

onde $\sigma_i : \Delta_{n-1} \rightarrow X \setminus \{x\}$ para $i = 1, \dots, r$.

Como Δ_{n-1} é compacto e cada σ_i é contínua, $\text{im } \sigma_i \subset X \setminus \{x\}$ é compacto para cada $i = 1, \dots, r$. Fixado $i \in \{1, \dots, r\}$, $\text{im } \sigma_i$ é compacto em X^n e $x \notin \text{im } \sigma_i$, como X^n é um espaço de Hausdorff, existe $V_{\sigma_i} \subset X^n$ vizinhança de x tal que $\text{im } \sigma_i \subset X^n \setminus V_{\sigma_i}$.

Tome o aberto:

$$V = \bigcap_{i=1}^r V_{\sigma_i},$$

que é vizinhança aberta de x . Para cada $y \in V$, portanto, $\partial z : \Delta_{n-1} \rightarrow X^n \setminus V \subset X^n \setminus \{y\}$. Assim, podemos considerar que $\partial z : \Delta_{n-1} \rightarrow X^n \setminus \{y\}$ para qualquer $y \in V$. Logo $\partial z \in S_{n-1}(X^n \setminus \{y\}; \mathbb{Z})$ para todo $y \in V$, de modo que z é um n -ciclo módulo $X^n \setminus \{y\}$, ou seja, $z \in Z_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R)$. $\square$

Lema 34. *Sejam X^n uma n -variedade topológica e $z, z' \in Z_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$ tais que $z + B_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R) = z' + B_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$. Nestas condições, existe $V \subset X^n$ vizinhança aberta de x tal que para todo $y \in V$, $z + B_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R) = z' + B_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R)$, ou seja, $z, z' \in Z_n(X^n, X^n \setminus V; R)$.*

Demonstração. Como $z + B_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R) = z' + B_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$, $z - z' \in B_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R) \subset S_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$. Desta maneira, existe uma cadeia $c \in S_{n+1}(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$ tais que $z - z' = \partial c \in S_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$. Logo, $\partial c \in Z_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$, de modo que pelo lema anterior existe uma vizinhança aberta V de x tal que $\partial c \in Z_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R)$ para todo $y \in V$, ou seja $z + B_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R) = z' + B_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R)$ para todo $y \in V$. $\square$

O teorema a seguir nos dá uma base para a topologia de $\mathcal{OB}(X^n)$, ou seja, os abertos de $\mathcal{OB}(X^n)$ serão reuniões arbitrárias dos elementos básicos apresentados a seguir.

Teorema 35. *Dada uma n -variedade topológica X^n , seja $\mathcal{OB}(X^n) = \bigcup_{x \in X} H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$. Considere os pares (V, z) onde $V \subset X^n$ é um subconjunto aberto e $z \in Z_n(X^n, X^n \setminus V; R)$ é um ciclo módulo $X^n \setminus V$. Defina:*

$$V_z = \{[z]_x \in H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R) : x \in V\},$$

onde $[z]$ denota a classe de homologia de z . O conjunto de todos tais V_z é uma base para uma topologia de $\mathcal{OB}(X^n)$, a qual denotaremos por τ . Com respeito a esta topologia, a

aplicação:

$$\begin{aligned} p: \mathcal{OB}(X^n) &\rightarrow X^n \\ \xi &\mapsto x|\xi \in H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R) \end{aligned}$$

é uma aplicação de revestimento.

Demonstração. Mostremos primeiramente que:

$$\mathfrak{B} = \{V_z | V \subset X^n \text{ é aberto e } z \in Z_n(X^n, X^n \setminus V; R)\}$$

é base de uma topologia. Para tal, vamos usar a definição da página 78 de [12].

1) Dado $[u] \in \mathcal{OB}(X^n)$, existe $z \in Z_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$ tal que $[u] \in V_z$.

De fato, como $[u] \in \mathcal{OB}(X^n)$, existe $x \in X^n$ tal que $[u] \in H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$. Seja $z \in Z_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$ tal que $[u] = z + B_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$. Pelo **Lema 33**, existe uma vizinhança aberta V de x tal que $z \in Z_n(X^n, X^n \setminus V; R)$. Logo $[u] \in \{[z] \in H_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R) | y \in V\} = V_z$.

2) Dado $[u] \in V_{z'}' \cap V_{z''}''$, existe $V_z \in \mathfrak{B}$ tal que $[u] \in V_z \subset V_{z'}' \cap V_{z''}''$.

Com efeito, se $[u] \in V_{z'}' \cap V_{z''}''$, então existe $x \in V' \cap V''$ tal que se $z', z'' \in Z_n(X^n, X^n \setminus (V' \cap V''); R)$ então:

$$[u] = z' + B_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R) = z'' + B_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R).$$

Pelo **Lema 34**, existe uma vizinhança aberta V de x tal que para todo $y \in V$,

$$z' + B_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R) = z'' + B_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R),$$

isto é,

$$z' - z'' \in B_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R), \quad \forall y \in V.$$

Desta forma, existe $c \in S_{n+1}(X^n, X^n \setminus \{y\}; \mathbb{Z})$ tal que $z' - z'' = \partial c$. Escolhamos $z = \partial c$ e $V \subset V' \cap V''$ aberto tais que $z \in B_n(X^n, X^n \setminus \{y\}; R)$ para todo $y \in V$. Consequentemente, $[u] \in V_z \subset V'_z \cap V''_z$. Isto prova que o conjunto de todos os V_z 's é base para uma topologia de $\mathcal{OB}(X^n)$.

Assim, os abertos da topologia da qual dotamos $\mathcal{OB}(X^n)$ são caracterizados por serem reuniões arbitrárias de elementos de $\mathfrak{B}$.

Mostremos que p é um homeomorfismo local. Claramente p aplica V_z de maneira biunívoca sobre V , de modo a ser aberta e localmente bijetora. Resta-nos apenas mostrar a continuidade.

Seja W uma vizinhança aberta de $x = p(\xi)$, onde $\xi \in H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; R)$ é um gerador. Como já sabemos pela primeira propriedade de base que provamos, $\xi \in V_z$ para algum z , portanto $(V \cap W)_z$ é uma vizinhança de ξ que é aplicada em $V \cap W \subset W$, de modo que fica provada a continuidade de p .

Como p é uma aplicação contínua, aberta e localmente bijetora, p é uma aplicação de revestimento. □

No caso em que $R = \mathbb{Z}$, para cada $x \in X^n$, pelo **Teorema 31**, o $\mathbb{Z}$ -módulo $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ admite dois possíveis geradores. Com base neste fato, definimos a variedade de orientação de X^n :

Definição 36. *Seja X^n uma n -variedade topológica. O subespaço $\tilde{X}$ de $\mathcal{OB}(X^n)$:*

$$\tilde{X} = \bigcup_{x \in X^n} \{\pm \xi; \xi \text{ gera } H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})\},$$

com a topologia induzida é a variedade de orientação de X^n .

Chamamos a atenção para o fato de toda variedade topológica ser orientável sobre o anel $R = \mathbb{Z}_2$. Isto ocorre porque existe uma única maneira de escolher um gerador para

o $\mathbb{Z}_2$ –módulo de homologia relativa, que é $\bar{I}$.

A variedade de orientação de uma variedade topológica X^n , tomada sobre $R = \mathbb{Z}$, determinará se esta é ou não $\mathbb{Z}$ –orientável. A seguir, uma importante ferramenta no estudo da orientabilidade de variedades.

Teorema 37. *Seja X^n uma variedade topológica e $\tilde{X}$ sua variedade de orientação. Seja $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ a restrição de p a $\tilde{X}$. Nestas condições, $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ é um revestimento duplo de X^n , chamado **revestimento de orientação de X^n** .*

Demonstração. Como $p : \mathcal{OB}(X^n) \rightarrow X^n$ é uma aplicação de revestimento, sua restrição, $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ também é uma aplicação de revestimento. Além disso, tal revestimento tem duas folhas por definição, pois para cada $x \in X$, $p^{-1}(\{x\}) = \{\xi, -\xi\}$, onde ξ é um dos geradores de $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$. $\square$

O teorema a seguir nos mostra que $\tilde{X}$ admite uma estrutura de variedade topológica, sendo um objeto extremamente tratável do nosso ponto de vista. A demonstração de que a topologia de $\tilde{X}$ tem base enumerável é baseada no **Lema 23.3** de [9]

Teorema 38. *Sob as hipóteses do Teorema 37, $\tilde{X}$ é uma n –variedade.*

Demonstração. Dado $\tilde{x} \in \tilde{X}$, seja $p(\tilde{x}) = x \in X^n$. Como X^n é uma n –variedade, existe uma vizinhança U_1 de x que é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, digamos pelo homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1$. Também, como p é uma aplicação de revestimento, existe uma vizinhança U_2 de x que é uniformemente revestida por p . Seja $\tilde{U}_2 = p^{-1}(U_2)$ o aberto em $\tilde{X}$ tal que $\tilde{x} \in \tilde{U}_2$. Considere $\tilde{U} = p^{-1}(U_1 \cap U_2) \subset \tilde{U}_2$, que é aberto pelo fato de p ser contínua. Observe que:

$$\phi^{-1} \circ p \Big|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é um homeomorfismo sobre sua imagem. Logo, $\tilde{X}$ é n –euclidiano em cada um de seus pontos.

Agora, sendo p um revestimento duplo, como X^n é um espaço de Hausdorff, também $\tilde{X}$ o é. Para mostrarmos isto, usaremos o fato da aplicação p ser aberta.

Sejam $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$. Se $p(\tilde{x}_1) \neq p(\tilde{x}_2)$, como X^n é um espaço de Hausdorff, existem abertos U_1 e U_2 tais que $U_1 \ni p(\tilde{x}_1)$ e $U_2 \ni p(\tilde{x}_2)$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Bastar-nos-á tomar $\tilde{U}_1 = p^{-1}(U_1) \ni \tilde{x}_1$ e $\tilde{U}_2 = p^{-1}(U_2) \ni \tilde{x}_2$, que são tais que $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$. Se $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$, então tome uma vizinhança aberta $V \ni p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$ que seja uniformemente revestida por p , ou seja, tal que $p^{-1}(V) = \tilde{V}_1 \sqcup \tilde{V}_2$ com $p|_{\tilde{V}_i} : \tilde{V}_i \rightarrow V$ homeomorfismo para $i = 1, 2$. Como $p|_{\tilde{V}_i}$ é uma bijeção, temos que $\tilde{x}_1 \in \tilde{V}_i$ e $\tilde{x}_2 \in \tilde{V}_j$ $i \neq j, i, j \in \{1, 2\}$. Logo, $\tilde{X}$ é um espaço de Hausdorff.

Mostremos agora que a topologia de $\tilde{X}$ tem base enumerável.

Sendo X^n uma variedade topológica, sua topologia admite uma base enumerável, $\mathfrak{U}$. Tome, para base da topologia de $\tilde{X}$, a coleção:

$$\mathfrak{B} = \{V \subset p^{-1}(U) | U \in \mathfrak{U}, V \text{ é componente conexa de } p^{-1}(U)\}.$$

Note que este conjunto é enumerável pois tem, no máximo, o dobro da cardinalidade de $\mathfrak{U}$, o qual é enumerável.

Mostremos que $\mathfrak{B}$ é uma base, segundo [12].

Sendo X^n uma variedade topológica, podemos considerar $\mathfrak{B}$ composta de abertos conexos. Se $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $p(\tilde{x}) = x \in X^n$. Seja $B \in \mathfrak{B}$ um aberto uniformemente revestido por p , ou seja, $p^{-1}(B) = \tilde{U}_1 \sqcup \tilde{U}_2$, com $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset \tilde{X}$ abertos com $p|_{\tilde{U}_1} : \tilde{U}_1 \rightarrow B$ e $p|_{\tilde{U}_2} : \tilde{U}_2 \rightarrow B$ homeomorfismos. Como B é aberto e conexo, $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset p^{-1}(B)$ são as componentes conexas de $p^{-1}(B)$. Como $x \in B$, então $\tilde{x} \in \tilde{U}_j$ para algum $j = 1, 2$.

Suponhamos $\tilde{x} \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$, onde $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathfrak{U}$. Como $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ são ambos abertos, $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ também é aberto da topologia de $\tilde{X}$. Assim sendo, $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ contém uma vizinhança aberta $\tilde{W}'$ de $\tilde{x}$ que podemos supor conexa (basta tomar a componente conexa de $\tilde{W}'$ que contém $\tilde{x}$). Certamente $x = p(\tilde{x}) \in B$ para algum $B \in \mathfrak{B}$. Tomemos então $\tilde{W} = \tilde{W}' \cap p^{-1}(B)$, que sendo interseção de abertos, é aberto e por ser interseção de conexos com um elemento em comum é conexo. Deste modo, $\tilde{W} \in \mathfrak{U}$ com $\tilde{W} \subset \tilde{U} \cap \tilde{V}$. $\square$

Definição 39. *Seja X^n uma variedade topológica. Uma **seção global** da aplicação de revestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X^n$ é uma aplicação $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$ tal que:*

$$p \circ s_{X^n} = \text{id}_{X^n}.$$

Definição 40. *Seja X^n uma n -variedade. Uma **orientação** de X^n é uma seção global $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$ de p .*

Proposição 41. *Seja X^n uma n -variedade conexa. Então X^n é orientável se, e somente se, a sua variedade de orientação, $\tilde{X}$, for desconexa.*

Demonstração. A demonstração se baseia em [19].

Suponha, *ab absurdo*, que X^n seja orientável e simultaneamente que $\tilde{X}$ seja conexo. Como $\tilde{X}$ é uma variedade topológica conexa, é portanto um espaço conexo por caminhos. Dado $x \in X^n$, sabemos que $s_{X^n}(x) = \xi$ é um gerador de $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$; denotaremos por $-\xi$ o outro gerador de $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$. Existe portanto um caminho:

$$\begin{aligned} \tilde{A} : [0, 1] &\rightarrow \tilde{X} \\ t &\mapsto \tilde{A}(t) \end{aligned}$$

tal que $\tilde{A}(0) = \xi$ e $\tilde{A}(1) = -\xi$.

Temos então que a imagem de $A = p \circ \tilde{A} : [0, 1] \rightarrow X^n$ é um laço com ponto base em $x = p(\xi) = p(-\xi)$. Ademais, como a composição $p \circ s_{X^n} : X^n \rightarrow X^n$ é a identidade em X^n , segue que o caminho $s_{X^n} \circ A : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ coincide com $\tilde{A}$, uma vez que

$p \circ (s_{X^n} \circ A) = (p \circ s_{X^n}) \circ A = A$, segue que $s_{X^n} \circ A : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ também é um levantamento de A com início em $(s_{X^n} \circ A)(0) = s_{X^n}(x) = \xi$, o que, pela unicidade do levantamento $\tilde{A}$ implica que $s \circ A = \tilde{A}$. Logo a aplicação $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$ leva o laço $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ no caminho aberto $\tilde{A} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$, contrariando a boa definição de s_{X^n} , pois $A(0) = A(1)$ mas $s_{X^n}(x) = s_{X^n} \circ A(0) \neq s_{X^n} \circ A(1) = s_{X^n}(x)$, o que é um absurdo.

Suponhamos agora que $\tilde{X}$ seja desconexa e sejam $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ suas componentes. Sendo $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ um revestimento a duas folhas, as restrições:

$$\tilde{p} \Big|_{\tilde{C}_1} : \tilde{C}_1 \rightarrow X^n$$

e

$$\tilde{p} \Big|_{\tilde{C}_2} : \tilde{C}_2 \rightarrow X^n$$

constituem revestimentos simples, portanto homeomorfismos. Desta forma, $\tilde{p} \Big|_{\tilde{C}_1}$ admite um inverso, que denotaremos por $s_1 = \left(\tilde{p} \Big|_{\tilde{C}_1} \right)^{-1}$ e $\tilde{p} \Big|_{\tilde{C}_2}$ admite um inverso que denotaremos por $s_2 = \left(\tilde{p} \Big|_{\tilde{C}_2} \right)^{-1}$. Ora, dado $x \in X^n$ qualquer, $\tilde{p} \circ s_1(x) = \tilde{p} \circ \left(\tilde{p} \Big|_{\tilde{C}_1} \right)^{-1}(x) = x = \text{id}_{X^n}(x)$ e $\tilde{p} \circ s_2(x) = \tilde{p} \circ \left(\tilde{p} \Big|_{\tilde{C}_2} \right)^{-1}(x) = x = \text{id}_{X^n}(x)$, de modo que s_1 e s_2 são seções globais para $\tilde{p}$, logo, orientações. Por conseguinte, X^n é orientável. $\square$

Novamente trazemos à atenção que, se estivermos trabalhando sobre o anel $R = \mathbb{Z}_2$, a variedade de orientação será sempre desconexa.

Definição 42. No contexto da **Definição 39**, a variedade X^n é **orientável** se admite uma orientação. Caso contrário, X^n é **não-orientável**. Uma variedade X^n munida de uma orientação $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$ é uma **variedade orientada**.

O teorema a seguir nos dá a orientabilidade da variedade de orientação.

Teorema 43. *Seja X^n uma n -variedade topológica. Então sua variedade de orientação, $\tilde{X}$, é sempre orientável.*

Demonstração. A variedade de orientação de $\tilde{X}$, que denotaremos por $\tilde{\tilde{X}}$, tem uma **orientação canônica** definida como se segue:

Dado $\tilde{x} \in \tilde{X}$, seja U uma vizinhança aberta conexa uniformemente revestida por p de $p(\tilde{x}) = x$, e $\tilde{U}$ a componente de $p^{-1}(U)$ que contém $\tilde{x}$. Construíamos o diagrama:

$$(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \{\tilde{x}\}) \xleftarrow{\tilde{e}} (\tilde{U}, \tilde{U} \setminus \{\tilde{x}\}) \xrightarrow{p_{\tilde{U}}} (U, U \setminus \{x\}) \xhookrightarrow{e} (X^n, X^n \setminus \{x\}), \quad (1.4.1)$$

onde $p_{\tilde{U}}$ é definida por restrição de p e $\tilde{e} : (\tilde{U}, \tilde{U} \setminus \{\tilde{x}\}) \hookrightarrow (\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \{\tilde{x}\})$ e $e : (U, U \setminus \{x\}) \hookrightarrow (X, X \setminus \{x\})$ são as inclusões. Estas inclusões são excisões e $p_{\tilde{U}}$ é um homeomorfismo, de modo que podemos definir

$$s_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = \tilde{e}_n \circ p_{\tilde{U}_n}^{-1}(\tilde{x}) \in \tilde{\tilde{X}} \subset \mathcal{OB}(\tilde{X}) = \bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} H_n(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \{\tilde{x}\}; \mathbb{Z})$$

onde $\tilde{e}_n$, $p_{\tilde{U}_n}$ e e_n são os isomorfismos induzidos em homologia n -dimensional. Observe que $\tilde{p} \circ s_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = \tilde{p} \circ \tilde{e}_n \circ (p|_{\tilde{U}_n})^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Deste modo $p : \tilde{\tilde{X}} \rightarrow \tilde{X}$ admite uma seção global (definida acima), a variedade de orientação é sempre orientável. $\square$

O teorema a seguir nos permite restringir a orientação global de uma variedade a uma orientação de um subconjunto aberto desta.

Teorema 44. *Seja U um subconjunto aberto de uma n -variedade orientável, X^n . Então U , visto como n -variedade per se, é orientável. A orientação de U , $s_U : U \rightarrow \tilde{U}$ é chamada, por abuso de linguagem, de **restrição de s_{X^n} a U** .*

Demonstração. Para cada $x \in U$, a excisão $e_{X^n} : (U, U \setminus \{x\}) \hookrightarrow (X^n, X^n \setminus \{x\})$ induz um isomorfismo em homologia, $e_n : H_n(U, U \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$. Deste modo, se $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$ for uma orientação de X^n , podemos definir uma orientação $s_U : U \rightarrow \tilde{U}$

como:

$$\begin{aligned} s_U : U &\rightarrow \tilde{U} \\ x &\mapsto e_n^{-1}(s_{X^n}(x)) \end{aligned} .$$

s_U é, de fato, orientação, uma vez que para qualquer $x \in U$, $p_{\tilde{U}} \circ s_U(x) = p_{\tilde{U}} \circ e_n^{-1} \circ s_{X^n}(x) = x$. $\square$

A seguir, veremos como um homeomorfismo de uma variedade sobre si induz um homeomorfismo entre suas variedades de orientação.

Definição 45. *Sejam X^n uma n -variedade topológica e $h : X^n \rightarrow X^n$ um homeomorfismo. O homeomorfismo h induz um homeomorfismo $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, dado por:*

$$\begin{aligned} \tilde{h} : \tilde{X} &\rightarrow \tilde{X} \\ \tilde{x} &\mapsto (h_x)_n(\tilde{x}) \end{aligned} ,$$

onde para cada $x \in X^n$, $h_x : (X^n, X^n \setminus \{x\}) \rightarrow (X^n, X^n \setminus \{h(x)\})$ é a aplicação entre pares definida por h e

$$\begin{aligned} (h_x)_n : H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) &\rightarrow H_n(X^n, X^n \setminus \{h(x)\}; \mathbb{Z}) \\ z + B_n(X^n, X^n \setminus \{x\}) &\mapsto h_x \circ z + B_n(X^n, X^n \setminus \{h(x)\}) \end{aligned}$$

é o isomorfismo induzido entre os n -ésimos $\mathbb{Z}$ -módulos de homologia.

A seguinte definição decidirá quando um homeomorfismo preserva ou inverte a orientação de uma variedade.

Definição 46. *Sejam X^n uma n -variedade orientável e $h : X^n \rightarrow X^n$ um homeomorfismo e $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$ uma orientação de X^n . O homeomorfismo $h : X^n \rightarrow X^n$ **preserva orientação** quando o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{h}} & \tilde{X} \\ s_{X^n} \uparrow & & \uparrow s_{X^n} \\ X^n & \xrightarrow{h} & X^n \end{array}$$

ou seja, $\tilde{h} \circ s_{X^n}(x) = s_{X^n} \circ h(x)$, para todo $x \in X^n$. O homeomorfismo $h : X^n \rightarrow X^n$ **inverte a orientação** quando $\tilde{h} \circ s_{X^n}(x) = -s_{X^n} \circ h(x)$ para todo $x \in X^n$.

Note-se que, caso X^n seja uma variedade conexa, estas são as únicas possibilidades.

Exemplo 47. Com a orientação canônica, $s_{\tilde{X}}$, a aplicação:

$$\begin{aligned} \eta : \tilde{X} &\rightarrow \tilde{X} \\ \tilde{x} &\mapsto -\tilde{x} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo de $\tilde{X}$ que **inverte orientação**.

Demonstração. Com efeito, seja a orientação canônica:

$$\begin{aligned} s_{\tilde{X}} : \tilde{X} &\rightarrow \tilde{X} \\ \tilde{x} &\mapsto +\tilde{e}_n \circ (\widetilde{p_{U_n}})^{-1}(\tilde{x}) \text{ gerador de } H_n(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \{\tilde{x}\}; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

onde $\tilde{U}$ contendo $\tilde{x}$ é uma vizinhança qualquer uniformemente revestida qualquer por $\tilde{p}_U$.

Desta forma,

$$\tilde{\eta} \circ s_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = \tilde{\eta}[(\tilde{e}_n \circ (\widetilde{p_{U_n}})^{-1})(\tilde{x})] = (\eta_x)_n \circ (\tilde{e}_n \circ (\widetilde{p_{U_n}})^{-1})(\tilde{x}) = -(\tilde{e}_n \circ (\widetilde{p_{U_n}})^{-1})(\tilde{x}).$$

Por outro lado,

$$-s_{\tilde{X}} \circ \eta(\tilde{x}) = -s_{\tilde{X}}(-\tilde{x}) = -\tilde{e}_n \circ (\widetilde{p_{U_n}})^{-1}(\tilde{x})$$

onde a segunda igualdade desta última equação segue do fato que $\tilde{p} \circ s_{\tilde{X}}(-\tilde{x}) = -\tilde{x}$.

Assim, η inverte orientação, e tem-se $s_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = -s_{\tilde{X}}(-\tilde{x})$. □

A definição a seguir nos permitirá caracterizar a orientabilidade de uma variedade em termos de seus laços.

Definição 48. *Sejam X^n uma n -variedade, $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ um laço e $\tilde{A}$ o seu levantamento por p em $\tilde{X}$. Caso $\tilde{A}(1) = \tilde{A}(0) \in H_n(X^n, X^n \setminus \{A(0)\})$, de maneira que $\tilde{A}$ é um laço, dizemos que A **preserva orientação**. Não obstante, se $\tilde{A}(1) = -\tilde{A}(0)$, de maneira que $\tilde{A}$ não é um laço, dizemos que A **inverte orientação**.*

Definição 49. *Sejam X^n uma variedade topológica conexa, $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ seu revestimento de orientação e Y um espaço topológico bem-conexo. Uma aplicação $f : X^n \rightarrow Y$ **preserva orientação** se não existir um laço $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ que inverte orientação tal que o laço $f \circ A : [0, 1] \rightarrow Y$ é contrátil. A aplicação **inverte orientação** se existe um laço $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ que inverte orientação tal que o laço $f \circ A : [0, 1] \rightarrow Y$ é contrátil.*

Proposição 50. *Seja X^n uma n -variedade topológica conexa. Então X^n é $\mathbb{Z}$ -orientável se, e somente se, todos os seus laços preservam orientação.*

Demonstração. Se X^n é orientável, pela **Proposição 41**, $\tilde{X}$ tem duas componentes conexas. Seja $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ um laço qualquer. Como o levantamento $\tilde{A} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ é uma aplicação e $[0, 1]$ é conexo, sua imagem estará inteiramente contida em uma das componentes conexas de $\tilde{X}$. Como $\tilde{A}(0), \tilde{A}(1)$ e $-\tilde{A}(0), -\tilde{A}(1)$ pertencem a componentes conexas distintas, não podemos ter $\tilde{A}(1) = -\tilde{A}(0)$. Logo $\tilde{A}(0) = \tilde{A}(1)$, de maneira que o laço $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ preserva orientação.

Agora provaremos, por contraposição, que se todo laço em X^n preserva orientação então X^n é orientável. Logo, pela **Proposição 41**, $\tilde{X}$ é uma variedade topológica conexa, e portanto, conexa por caminhos de modo a existir um caminho $\tilde{A} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ unindo $\tilde{x}$ e $-\tilde{x}$. Assim $A = \tilde{p} \circ \tilde{A}$ é um laço em X^n e $\tilde{A}$ é o seu levantamento (devido à unicidade do levantamento), de modo que A não preserva orientação. $\square$

Definição 51. *Sejam X^n uma n -variedade, Y um espaço topológico e $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação. f é **orientável** se não existir laço $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ que inverte orientação tal que $f \circ A : [0, 1] \rightarrow Y$ (que é um laço com ponto base em y_0) é contrátil. É não orientável se $f \circ A : [0, 1] \rightarrow Y$ for contrátil para algum laço $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ que inverte orientação.*

Observação 52. *Seja $K \subset X^n$ subconjunto compacto da n -variedade orientada X^n com orientação $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$. Existe um único elemento $o_K \in H_n(X^n, X^n \setminus K; \mathbb{Z})$*

tal que para todo $x \in K$ o homomorfismo induzido pela inclusão, $H_n(X^n, X^n \setminus K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, leva o_K em $s_{X^n}(x)$. Este o_K é chamado de **classe fundamental** em K .

A definição abaixo é uma generalização direta da noção de grau de Brouwer para aplicações de n -variedades compactas e conexas.

Definição 53. *Seja $f : X^n \rightarrow Y^n$ uma aplicação da n -variedade orientada X^n na n -variedade Y^n com orientação $s_{Y^n} : Y^n \rightarrow \tilde{Y}$. Suponha que $f^{-1}(\{y_0\})$ seja compacto para algum $y_0 \in Y^n$. Nestes termos f define uma aplicação:*

$$f' : (X^n, X^n \setminus \{f^{-1}(\{y_0\})\}) \rightarrow (Y^n, Y^n \setminus \{y_0\})$$

que induz um homomorfismo em homologia:

$$f'_n : H_n(X^n, X^n \setminus \{f^{-1}(\{y_0\})\}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(Y^n, Y^n \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z}).$$

O grau de f em y_0 é o inteiro $\deg_{y_0}(f)$ definido por:

$$f'_n(o_{f^{-1}(\{y_0\})}) = \deg_{y_0}(f) s_{Y^n}(y_0).$$

No caso de Y^n ser conexa e f ser própria, $\deg_{y_0}(f)$ é independente da escolha de y_0 , e é chamado de **grau de f** , denotado por $\deg(f)$.

Alguns Resultados da Teoria de Raízes de Nielsen Elementar

Sejam $f : X^n \rightarrow Y^n$ uma aplicação entre variedades topológicas orientáveis de mesma dimensão e $y_0 \in Y^n$. O estudo dos conjuntos $f^{-1}(\{y_0\})$ está relacionado com o grau de Brouwer, pois o valor absoluto deste grau fornece informações sobre a cardinalidade de $f^{-1}(\{y_0\})$. Em um artigo de 1930 concernente a este tópico, Hopf introduziu uma teoria de Nielsen modelada, como ele mesmo declara, sobre o artigo de 1927 de Nielsen. Pontos x_1 e x_2 em $f^{-1}(\{y_0\})$ seriam equivalentes se existisse um caminho $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ com $A(0) = x_1$ e $A(1) = x_2$ tal que o laço $f \circ A : [0, 1] \rightarrow Y^n$ fosse contrátil, por meio de uma homotopia que mantivesse y_0 fixado. A noção de essencialidade desenvolvida por Hopf estava fortemente relacionada ao grau de Brouwer. Apesar da teoria do grau do artigo de Hopf que se aplicava mesmo para aplicações de variedades não orientáveis ter se consolidado como parte da topologia algébrica, o trabalho de Nielsen não teve a mesma sorte.

Em 1967, como parte do trabalho em teoria de coincidências de Nielsen desenvolvido em sua tese de doutorado "Coincidences, roots and fixed points" (University of California, Los Angeles, 1967), Robin Brooks estudou soluções para a equação $f(x) = y_0$, que ele chamou de *teoria de raízes*. Brooks desenvolveu a teoria de raízes de Nielsen independen-

temente para um contexto mais geral que o do trabalho de Hopf, e desde então, a teoria de raízes tem sido reconhecida como parte importante da teoria de Nielsen [24].

A Teoria de Nielsen tem sido, desde então, imensamente desenvolvida por muitos pesquisadores. Neste capítulo descreveremos resultados e definições essenciais a esta teoria para, no capítulo a seguir, fazer uma generalização no sentido de substituir a hipótese de ser a fonte, X^n , uma variedade compacta por $f : X^n \rightarrow Y$ ser uma aplicação própria, e também substituir a hipótese de ser Y uma variedade por hipóteses mais fracas, que dizem respeito a apenas uma vizinhança de $y_0 \in Y$, a saber, que Y seja um espaço topológico bem conexo (a fim de podermos definir o revestimento de Hopf) que é localmente euclidiano em torno de um ponto $y_0 \in Y$.

2.1 Definições e Resultados

Nesta seção daremos as definições dos conceitos dos quais se ocupa a Teoria de Nielsen, além de enunciar e apresentar demonstrações para os resultados mais conhecidos pelos que trabalham nesta área e mais úteis para estendê-la a aplicações próprias cujo domínio não é compacto nem necessariamente orientável. Nesta teoria, como já mencionado, a fim de estudar o conjunto de raízes de uma aplicação, vamos definir uma relação de equivalência neste. A relação é a definida a seguir.

Definição 54. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. Duas raízes x e x' de f em y_0 são **Nielsen equivalentes** quando existe um caminho $A : [0, 1] \rightarrow X$ com $A(0) = x$ e $A(1) = x'$ e:*

$$[f \circ A] = [y_0].$$

Teorema 55. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. A relação “ser Nielsen-equivalente” no conjunto das raízes de $f : X \rightarrow Y$ em $y_0 \in Y$ é uma*

relação de equivalência. Caso $x_0, x_1 \in f^{-1}(\{y_0\})$ sejam Nielsen-equivalentes, escreveremos $x_0 N x_1$.

Demonstração. A relação “ser Nielsen-equivalente” é:

- (i) **Reflexiva.** De fato, para qualquer $x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})$, basta tomar o caminho constante:

$$\begin{aligned} A : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned},$$

que é tal que $A(0) = x_0 = A(1)$ e $[f \circ A] = [y_0]$, pois $f(A(t)) = y_0, \forall t \in [0, 1]$.

- (ii) **Simétrica.** Com efeito, suponha $x_0, x_1 \in f^{-1}(\{y_0\})$ com $x_0 N x_1$. Então existe um caminho:

$$\begin{aligned} A : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto A(t) \end{aligned}$$

com

$$\begin{cases} A(0) = x_0, \\ A(1) = x_1 \end{cases}$$

tal que $[f \circ A] = [y_0]$, ou seja, existe:

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (t, s) &\mapsto H(t, s) \end{aligned}$$

com

$$\begin{cases} H(t, 0) = f \circ A(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ H(t, 1) = y_0, \quad \forall t \in [0, 1], \\ H(0, s) = H(1, s) = y_0, \quad \forall s \in [0, 1] \end{cases}.$$

Considere o caminho:

$$\begin{aligned} A^{-1} : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto A(1 - t) \end{aligned},$$

e observe que $A^{-1}(0) = A(1) = x_1$, $A^{-1}(1) = A(0) = x_0$ e que:

$$\begin{aligned} \tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (t, s) &\rightarrow H(1 - t, s) \end{aligned}$$

é uma homotopia tal que:

$$\begin{cases} \tilde{H}(t, 0) = H(1 - t, 0) = f \circ A(1 - t) = f \circ A^{-1}(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ \tilde{H}(t, 1) = H(1 - t, 1) = y_0, \quad \forall t \in [0, 1] \\ \tilde{H}(0, s) = \tilde{H}(1, s) = y_0, \quad \forall s \in [0, 1] \end{cases},$$

ou seja, $[f \circ A^{-1}] = [y_0]$, portanto $x_1 N x_0$.

(iii) **Transitiva.** De fato, sejam $x_0, x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y_0\})$ tais que $x_0 N x_1$ e $x_1 N x_2$.

Como $x_0 N x_1$, existem:

$$\begin{aligned} A_1 : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto A_1(t) \end{aligned}$$

com:

$$\begin{cases} A_1(0) = x_0, \\ A_1(1) = x_1 \end{cases}$$

e uma homotopia:

$$\begin{aligned} H_1 : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (t, s) &\mapsto H_1(t, s) \end{aligned}$$

tal que:

$$\begin{cases} H_1(t, 0) = f \circ A_1(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ H_1(t, 1) = y_0 \quad \forall t \in [0, 1], \\ H_1(0, s) = H_1(1, s) = y_0, \quad \forall s \in [0, 1] \end{cases}.$$

Como $x_1 N x_2$, existem:

$$\begin{aligned} A_2 : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto A_2(t) \end{aligned}$$

com:

$$\begin{cases} A_2(0) = x_1, \\ A_2(1) = x_2 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} H_2 : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (t, s) &\mapsto H_2(t, s) \end{aligned}$$

tal que:

$$\begin{cases} H_2(t, 0) = f \circ A_2(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ H_2(t, 1) = y_0 \quad \forall t \in [0, 1], \\ H_2(0, s) = H_1(1, s) = y_0, \quad \forall s \in [0, 1] \end{cases}.$$

Para mostrar que $x_0 N x_2$, considere o caminho:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto \begin{cases} A_1(2t), \quad \forall t \in [0, \frac{1}{2}], \\ A_2(2t - 1), \quad \forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

e a homotopia:

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (t, s) &\mapsto \begin{cases} H_1(2t, s), \quad \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(2t - 1, s), \quad \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \end{aligned}$$

que é tal que:

$$\begin{cases} H(t, 0) = \begin{cases} H_1(2t, 0) = f \circ A_1(2t), \forall t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2t - 1, 0) = f \circ A_2(2t - 1), \forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} & = f \circ (A_1 A_2)(t), \forall t \in [0, 1] \\ H(t, 1) = y_0, \forall t \in [0, 1], \\ H_1(0, s) = H_1(1, s) = H_2(0, s) = H_2(1, s) = y_0, \forall s \in [0, 1] \end{cases}$$

Assim, $f \circ (A_1 A_2)$ é homotópico a y_0 , e portanto $x_0 N x_2$.

□

Definição 56. *As classes de equivalência da relação N se chamam **classes de raízes de Nielsen de f em y_0** ou, mais simplesmente, **classes de Nielsen**. O conjunto das classes de raízes de Nielsen de f em y_0 é denotado por:*

$$\frac{f^{-1}(\{y_0\})}{N} = \{[x]; x \in f^{-1}(\{y_0\})\}.$$

Precisamos agora de uma maneira de relacionar as raízes de uma aplicação f_0 , no “começo” de uma homotopia $f_t : X \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ com as raízes de uma aplicação f_1 , no “final” desta homotopia. Fazemos isto por meio da seguinte definição, que generaliza a **Definição 56** no sentido de englobá-la ao tomar a homotopia constante $f_t = f : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$.

Definição 57. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação, $\{f_t : X \rightarrow Y; t \in [0, 1]\}$ uma homotopia e $y_0 \in Y$. Uma raiz x_0 de f_0 em y_0 e uma raiz x_1 de f_1 em y_0 estão $\{f_t\}$ -relacionadas quando existe um caminho $A : [0, 1] \rightarrow X$ com $A(0) = x_0$, $A(1) = x_1$ tal que o laço:*

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] &\rightarrow Y \\ t &\mapsto f_t(A(t)) \end{aligned}$$

é homotópico ao caminho constante y_0 com $\Gamma(0) = y_0 = \Gamma(1)$. Escrevemos, neste caso, $x_0 \sim_{\{f_t\}} x_1$.

Definição 58. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $f_t, t \in [0, 1]$ uma homotopia com $f_0 = f$. Uma classe de raízes de $f = f_0 : X \rightarrow Y$ em $y_0 \in Y$, α_0 está f_t -relacionada com uma classe de raízes de $f_1 : X \rightarrow Y$ em $y_0 \in Y$, α_1 se existe uma raiz $x_0 \in \alpha_0$ que está f_t -relacionada com alguma raiz de f_1 em y_0 .*

Definição 59. *Uma classe de raízes de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ em $y_0 \in Y$, α_0 , é **essencial** se, dada qualquer homotopia $h_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ com $h_0 = f$, existe uma classe de raízes α_1 de h_1 em y_0 à qual a classe de raízes α_0 de $f = h_0$ em y_0 está relacionada. Em outras palavras, a classe de raízes α da aplicação f em y_0 é essencial se para toda $f' \sim f$ pela homotopia h_t , existe uma classe de raízes α' da aplicação f' em y_0 tal que $\alpha \sim_{h_t} \alpha'$.*

Teorema 60. *Seja Y um espaço topológico bem conexo (i.e., conexo, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo). Dados $y_0 \in Y$ e um subgrupo $H \subset \pi_1(Y, y_0)$, existem um revestimento $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$, com $\tilde{Y}$ conexo e um ponto $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ tais que $p_\#[\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)] = H$.*

Este resultado é clássico em Topologia, de modo que omitiremos sua prova. Uma demonstração deste fato que recomendamos é a dada na **Proposição 12**, página 172 de [13].

Definição 61. *Sejam X e Y espaços topológicos bem conexos. Um **revestimento de Hopf** e um **levantamento de Hopf** de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ são, respectivamente, um revestimento $p : \hat{Y} \rightarrow Y$ e um levantamento $\hat{f} : X \rightarrow \hat{Y}$ tais que $p_\#[\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x))] = f_\#[\pi_1(X, x)]$ para cada $x \in X$. No diagrama abaixo:*

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{Y} \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$\hat{f}$ é um levantamento e p é um revestimento de Hopf se, e somente se:

$$p_\#[\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x))] = f_\#[\pi_1(X, x)]$$

Em forma de diagramas, temos:

$$\begin{array}{ccc}
 & \bar{Y} & \\
 \hat{f} \nearrow & \downarrow \hat{q} & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{induz}}
 \begin{array}{ccc}
 & \pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x)) & \\
 \hat{f}_\# \nearrow & \downarrow \hat{q}_\# & \\
 \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y, f(x))
 \end{array}
 \quad (2.1.1)$$

$$e p_\#(\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x))) = f_\#(\pi_1(X, x)).$$

2.2 Revestimentos e Levantamentos de Hopf

Observemos que toda variedade topológica X^n é um espaço topológico bem-conexo. Os teoremas a seguir, entretanto, somente lançam mão da boa conexidade dos espaços, de maneira a continuarem válidos quando retiramos de Y (ou de X^n também) a hipótese de ser variedade topológica.

Teorema 62. *Sejam X um espaço topológico conexo por caminhos, Y um espaço topológico bem conexo. Então toda aplicação $f : X \rightarrow Y$, admite um revestimento e um levantamento de Hopf.*

Demonstração. A demonstração deste fato é baseada em [16].

Fixe $x_0 \in X$ arbitrário. Pelo **Teorema 60**, dado $f_\#[\pi_1(X, x_0)] \subset \pi_1(Y, f(x_0))$, existe um revestimento $p : \hat{Y} \rightarrow Y$ tal que:

$$p_\#[\pi_1(\hat{Y}, \hat{y}_0)] = f_\#[\pi_1(X, x_0)].$$

Isto quer dizer que, para algum ponto $\hat{y}_0 \in p^{-1}(\{f(x_0)\})$ temos $p_\#[\pi_1(\hat{Y}, \hat{y}_0)] = f_\#[\pi_1(X, x_0)]$.

Agora, caímos nas hipóteses do **Teorema do Levantamento** (veja, por exemplo, p. 76 de [15]), de maneira que existe um levantamento $\hat{f} : X \rightarrow \hat{Y}$ de f tal que $\hat{f}(x_0) = \hat{y}_0$. Note que um tal levantamento $\hat{f}$ não é necessariamente único, devido à possível ambiguidade na escolha de $\hat{y}_0$. Assim, $p_\#[\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x_0))] = f_\#[\pi_1(X, x_0)]$. Como X é conexo por

caminhos, segue que a igualdade $p_{\#}[\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x))] = f_{\#}[\pi_1(X, x)]$ vale para qualquer ponto $x \in X$.

Com efeito, tome um caminho $\Gamma : [0, 1] \rightarrow X$ com $\Gamma(0) = x$ e $\Gamma(1) = x_0$; temos:

$$\begin{aligned} p_{\#}[\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x))] &= p_{\#}([\hat{f}(\Gamma)] \cdot \pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x_0)) \cdot [\hat{f}(\Gamma^{-1})]) = \\ &= [p\hat{f}(\Gamma)] \cdot p_{\#}[\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x_0))] \cdot [p\hat{f}(\Gamma^{-1})] = \\ &= [f(\Gamma)] \cdot f_{\#}[\pi_1(X, x_0)] \cdot [f(\Gamma^{-1})] = f_{\#}[\pi_1(X, x)]. \end{aligned}$$

□

Observação 63. Chamamos o revestimento acima de revestimento de Hopf por ter sido ele a primeira pessoa a explorá-lo para estudar raízes. Observe-se que, apesar deste revestimento não ser único em geral, é único a menos de isomorfismos de espaços de revestimento. Tampouco o levantamento $\hat{f} : X \rightarrow \hat{Y}$ é único; no entanto, dado qualquer $x \in X$ existe, para cada $\hat{y} \in p^{-1}(\{f(x)\}) \subset \hat{Y}$, um único levantamento $\hat{f}$ tal que $\hat{f}(x) = \hat{y}$. Note-se também que se $p : \hat{Y} \rightarrow Y$ é um revestimento de Hopf para f , p também o é para qualquer aplicação $f' : X \rightarrow Y$ homotópica a f .

O teorema a seguir é um dos mais importantes para as demonstrações de vários resultados da última seção, pois articula conceitos de Nielsen-equivalência, equivalência por uma homotopia, revestimentos e levantamentos de Hopf da aplicação em apreço, $f : X^n \rightarrow Y$. Observando que no caso de X^n ser uma variedade topológica, X^n é bem conexo, de modo que com o auxílio deste teorema poderemos transpor conceitos e asserções sobre a Teoria de Raízes, mesmo que apenas parcialmente, para a Teoria dos Espaços de Revestimento.

Teorema 64. Seja X um espaço topológico bem conexo, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$ um ponto que admite uma vizinhança n -euclidiana. Seja $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$ um revestimento de Hopf para f , e seja $\hat{f} : X \rightarrow \hat{Y}$ um levantamento de Hopf de f por $\hat{q}$. Seja $f_t : X \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ uma homotopia entre $f = f_0$ e f_1 e seja $\hat{f}_t : X \rightarrow \hat{Y}; t \in [0, 1]$ um levantamento de f_t por $\hat{q}$. Então:

- (1) Uma raiz x_0 de f em y_0 é Nielsen equivalente a outra raiz x_1 de f em y_0 se, e somente se, $\hat{f}(x_0) = \hat{f}(x_1)$;
- (2) Consequentemente, as classes de equivalência de Nielsen são precisamente os conjuntos não vazios da forma $\hat{f}^{-1}(\{\hat{y}\})$, onde $\hat{y} \in \hat{q}^{-1}(\{y_0\})$;
- (3) Uma raiz x_0 de $f = f_0$ em y_0 está $\{f_t\}$ -relacionada a uma raiz x_1 de f_1 em y_0 se, e somente se $\hat{f}_0(x_0) = \hat{f}_1(x_1)$.
- (4) A relação "ser $\{f_t\}$ -equivalente" entre as raízes de f_0 em y_0 e as raízes de f_1 em y_0 induz uma relação biunívoca do conjunto das classes de raízes de Nielsen essenciais de f_0 em y_0 nas classes de raízes de Nielsen essenciais de f_1 em y_0 , uma vez que uma classe de raízes α_0 de f_0 em y_0 está f_t -relacionada a uma classe de raízes α_1 de f_1 em y_0 se pelo menos uma (e portanto toda) raiz $x_0 \in \alpha_0$ está relacionada a pelo menos uma (e portanto toda) raiz $x_1 \in \alpha_1$, e isto é verdade se, e somente se $\hat{f}_0(\alpha_0) = \hat{f}_1(\alpha_1)$.

Demonstração. Prova de (3): Suponha primeiramente que $\hat{f}_0(x_0) = \hat{f}_1(x_1)$. Mostremos que x_0 está f_t -relacionado a x_1 .

Sendo X bem-conexo, é conexo por caminhos. Seja $A : [0, 1] \rightarrow X$ um caminho em X com $A(0) = x_0$ e $A(1) = x_1$. Temos que:

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] &\rightarrow \hat{Y} \\ t &\mapsto \hat{f}_t \circ A(t) \end{aligned}$$

é um laço em $\hat{Y}$ com ponto base $\hat{f}(x_0)$, de maneira que sua projeção:

$$\begin{aligned} \hat{q} \circ \Gamma : [0, 1] &\rightarrow Y \\ t &\mapsto \hat{q} \circ \hat{f}_t \circ A(t) = f_t \circ A(t) \end{aligned}$$

é um laço em Y com ponto base em y_0 , e portanto, sendo $\hat{q}$ um revestimento de Hopf para f , o caminho $t \xrightarrow{\hat{q} \circ \Gamma} f_t \circ A(t)$ é homotópico com extremidades fixas a $f \circ B$, para algum laço B em X com ponto base em x_0 . Desta forma, $[(f \circ B)^{-1}\{f_t \circ A(t)\}] =$

$[f \circ B]^{-1}[\{f_t \circ A(t)\}] = [y_0]$. O caminho $t \xrightarrow{(f \circ B^{-1})(\hat{q} \circ \Gamma)} (f \circ B)^{-1}\{f_t \circ A(t)\}$ é homotópico com extremidades fixas ao caminho $t \xrightarrow{\theta} f_t \circ (B^{-1}A)(t)$, basta considerar a homotopia $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ dada por:

$$G(s, t) = \begin{cases} (f_{st} \circ B^{-1})(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_{(1-s)(2t-1)+st} \circ A(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que é tal que:

$$\begin{cases} G(0, t) = [(f \circ B^{-1})(\hat{q} \circ \Gamma)](t), \\ G(1, t) = \theta(t), \\ G(s, 0) = H(s, 1) = y_0 \end{cases}$$

Assim, $B^{-1}A$ é um caminho entre x_0 e x_1 tal que $t \xrightarrow{\theta} f_t(B^{-1}A)(t)$ é nulo-homotópico com extremidades fixas, pois $(f \circ B)^{-1}\hat{q} \circ \Gamma$ é homotópico ao caminho constante igual a y_0 com extremidades fixas.

Segue que x_0 está f_t -relacionado com x_1 .

Suponha agora que x_0 está f_t -relacionada com x_1 . Existe, portanto, um caminho $A : [0, 1] \rightarrow X$ com $A(0) = x_0$ e $A(1) = x_1$ tal que $t \mapsto f_t \circ A(t)$ é nulo-homotópico com extremidades fixas.

O caminho $t \mapsto \hat{f}_t \circ A(t)$ é um levantamento de $t \mapsto [f_t \circ A](t)$ por $\hat{q}$, de modo que também deve ser nulo-homotópico com extremidades fixas (pois $\hat{q}$ induz um monomorfismo em grupo fundamental) e portanto, um laço. Uma vez que este caminho começa em $\hat{f}_0 \circ A(0) = \hat{f}_0(x_0)$, termina em $\hat{f}_1 \circ A(1) = \hat{f}_1(x_1)$ e é um laço, temos $\hat{f}_0(x_0) = \hat{f}_1(x_1)$.

Prova de (4): Sabemos que por definição uma classe de raízes de Nielsen α_0 de f_0 em y_0 estará f_t -relacionada a uma classe de raízes de Nielsen α_1 de f_1 em y_0 , se, e somente se, existirem $x_0 \in \alpha_0$ e $x_1 \in \alpha_1$ tais que $x_0 \sim_{f_t} x_1$. Observe que, pelo item (3), α_0 estará

f_t -relacionada com α_1 se, e somente se $\hat{f}_0(\alpha_0) = \hat{f}_1(\alpha_1)$. Mostremos que esta relação induz uma bijeção. Começemos a definir a pretensa bijeção como segue:

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \left\{ \alpha_0 \in \frac{f_0^{-1}(\{y_0\})}{N} \middle| \alpha_0 \text{ essencial} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \alpha_1 \in \frac{f_1^{-1}(\{y_0\})}{N} \middle| \alpha_1 \text{ essencial} \right\} \\ & \longmapsto & \alpha_1 \mid \hat{f}_0(\alpha_0) = \hat{f}_1(\alpha_1) \end{array}$$

Primeiramente provaremos que Ψ está bem definida (é uma relação total).

Dada uma classe de raízes de Nielsen α_0 de f_0 em y_0 , afirmamos que a ela associa-se uma classe de raízes de Nielsen α_1 de f_1 em y_0 .

Agora provaremos a boa definição (Ψ é unívoca) de Ψ , mostrando que α_1 é única.

Tome $x_0 \in \alpha_0$. Como $f_t : X \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ é uma homotopia e α_0 é classe essencial, existe pelo menos uma raiz x_1 de f_1 em y_0 que está f_t -relacionada com x_0 . Seja α_1 a classe de raízes de Nielsen à qual x_1 pertence. Mostremos agora que esta classe é única.

Seja $x'_0 \in \alpha_0$, $x'_0 \neq x_0$. Mostremos que $x'_0 \sim_{f_t} x_1$, pois deste modo não existirá $x'_0 \in \alpha_0$ que está f_t -relacionado com outra classe de raízes de Nielsen que não α_1 . Como $x'_0 \in \alpha_0$, $x'_0 N x_0$, e pelo item (1) deste teorema, $\hat{f}_0(x'_0) = \hat{f}_0(x_0)$.

Como $x_0 \sim_{f_t} x_1$, $\hat{f}_0(\alpha_0) = \hat{f}_1(\alpha_1)$. Disto segue que $\hat{f}_0(x'_0) \in \hat{f}_0(\alpha_0) = \hat{f}_1(\alpha_1)$, de modo que existe $x'_1 \in \alpha_1$ tal que $\hat{f}_0(x'_0) = \hat{f}_1(x'_1)$. Como $x'_1 N x_1$, $\hat{f}_1(x'_1) = \hat{f}_1(x_1)$, pelo item (1) e portanto, pelo item (3), $x'_1 \in \alpha_1$. Logo, todo elemento de α_0 está relacionado apenas com elementos de α_1 , de modo que a relação é bem definida.

A fim de confirmar ser Ψ uma bijeção, observamos facilmente que:

$$\Phi : \left\{ \alpha_1 \in \frac{f_1^{-1}(\{y_0\})}{N} \middle| \alpha_1 \text{ essencial} \right\} \longrightarrow \left\{ \alpha_0 \in \frac{f^{-1}(\{y_0\})}{N} \middle| \alpha_0 \text{ essencial} \right\}$$

$$\alpha_1 \longmapsto \alpha_0 \mid \widehat{f}_1(\alpha_1) = \widehat{f}_0(\alpha_0)$$

é a função inversa de Ψ .

Prova de (1): Basta aplicarmos o item (3) usando a homotopia constante $f : X \rightarrow Y; t \in [0, 1]$.

Prova de (2): Com efeito, por definição de aplicação de revestimento, $f^{-1}(\{y_0\}) = (\hat{q} \circ \hat{f})^{-1}(\{y_0\})$. Assim, uma classe de Nielsen de raízes de f em y_0 é uma classe de raízes de Nielsen de $\hat{f}$ em $\hat{y} \in \hat{q}^{-1}(\{y_0\})$. $\square$

Observação 65. *Conforme vimos no teorema anterior, a relação f_t entre classes de Nielsen de raízes é uma bijeção, ou seja, cada classe de raízes de f_0 está f_t -relacionada no máximo a uma classe de raízes de f_1 e cada raiz de f_1 tem, no máximo, uma classe de raízes de f_0 relacionada com ela.*

Observação 66. *Intuitivamente, uma classe de raízes é essencial se “não puder ser removida por meio de homotopias”.*

Definição 67. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. O número de raízes de Nielsen de f em y_0 , $NR(f, y_0)$, é o número de classes de Nielsen de raízes que são raízes de f em y_0 . Assim,*

$$NR(f, y_0) = \sharp\{\alpha; \alpha \text{ é classe essencial}\}.$$

Devido à sua definição acima, o número de raízes de Nielsen era originalmente chamado de "wesentliche Schichtenzahl" (em português uma tradução aproximada seria "número essencial de camadas"). A fim de prosseguir com a exposição da teoria, apresentamos na próxima seção a definição e as propriedades de par admissível.

2.3 Pares Admissíveis

A noção de par admissível será uma ferramenta muito importante, a partir da qual definiremos um instrumento algébrico que se denominará "índice". A importância do índice será tão premente na Teoria de Raízes de Nielsen quanto o é na Teoria de Pontos Fixos.

Definição 68. *Sejam X e Y espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Um par (f, A) é **admissível para** X, Y, y_0 se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação, $A \subset X$, e A admite uma vizinhança fechada F tal que $F \setminus A$ não tem raízes de f em y_0 .*

O teorema a seguir nos diz que as classes de raízes de Nielsen são, na verdade, as componentes conexas do espaço topológico $f^{-1}(\{y_0\})$. Note que embora o conjunto das raízes de f em y_0 seja discreto enquanto subespaço de X^n , as componentes conexas de $f^{-1}(\{y_0\})$ podem conter mais de um ponto cada.

Teorema 69. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$ um ponto que admite uma vizinhança n -euclidiana. Então existe uma família $\{U_\alpha\}_\alpha$ de conjuntos abertos mutuamente disjuntos, um para cada classe de Nielsen de raízes α de f em y_0 tal que $\alpha \subset U_\alpha$. Consequentemente, cada classe de raízes α é simultaneamente aberta e fechada em $f^{-1}(\{y_0\})$.*

Demonstração. Seja $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$ um revestimento de Hopf. Desta forma, y_0 admite uma vizinhança V de y_0 que é uniformemente revestida por $\hat{q}$. Logo, podemos escrever:

$$\hat{q}^{-1}(V) = \bigsqcup_{\hat{y} \in \hat{q}^{-1}(\{y_0\})} V_{\hat{y}}$$

onde $\hat{y} \in V_{\hat{y}}$ para cada $\hat{y}$. Portanto, pelo item (2) do **Teorema 64**, a coleção $\{\hat{f}^{-1}(V_{\hat{y}}); \hat{y} \in \hat{q}^{-1}(\{y_0\}) \text{ e } \hat{f}^{-1}(\{\hat{y}\}) \neq \emptyset\}$ é a família desejada. $\square$

O teorema a seguir nos dará exemplos importantes de pares admissíveis.

Teorema 70. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Temos:*

- (1) (f, X) e $(f, \emptyset)$ são pares admissíveis;
- (2) Se (f, A_1) e (f, A_2) são pares admissíveis, então $(f, A_1 \cap A_2)$ e $(f, A_1 \cup A_2)$ são admissíveis;
- (3) $(f, f^{-1}(\{y_0\}))$ é um par admissível;
- (4) Para qualquer classe α de Nielsen de raízes, α de f em y_0 , (f, α) é um par admissível;
- (5) Se $U \subset X$ é aberto e ∂U não tem nenhuma raiz de f em y_0 , então (f, U) é um par admissível.

Demonstração. Prova de (1). Tome X como vizinhança fechada de X . Temos claramente que $X \setminus X = \emptyset$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Assim, o par (f, X) é admissível. O conjunto $\emptyset$ é, por sua vez, uma vizinhança fechada de $\emptyset$ tal que $\emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 , de maneira que $(f, \emptyset)$ é admissível.

Prova de (2). O caso $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ foi abordado no item (1). Suponha, agora, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Como (f, A_1) é admissível, existe uma vizinhança fechada F_1 de A_1 tal que $F_1 \setminus A_1$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Igualmente, como (f, A_2) é admissível, existe uma vizinhança fechada F_2 de A_2 tal que $F_2 \setminus A_2$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Desta forma, $(F_1 \setminus A_1) \cap (F_2 \setminus A_2) = (F_1 \cap F_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Assim, $F = F_1 \cap F_2$ é uma vizinhança fechada de $A_1 \cap A_2$ tal que $F_1 \cap F_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Disto segue que $(f, A_1 \cap A_2)$ é um par admissível.

Analogamente, $(F_1 \cup F_2) \setminus (A_1 \cup A_2) = F_1 \setminus (A_1 \cap A_2) \cup (F_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) \subset (F_1 \setminus A_1) \cup (F_2 \setminus A_2)$, e como $(F_1 \setminus A_1) \cup (F_2 \setminus A_2)$ não contém raízes de f em y_0 , *a fortiori*, $F = (F_1 \cup F_2) \setminus (A_1 \cup A_2)$ tampouco as contém. Logo, F é uma vizinhança fechada de $A_1 \cup A_2$ tal que $F \setminus (A_1 \cup A_2)$ não contém raízes de f em y_0 . Assim, o par $(f, A_1 \cup A_2)$ é

admissível.

Prova de (3). Como Y é localmente euclidiano em y_0 , existe uma vizinhança V de y_0 tal que $V \cong \mathbb{R}^n$. Considere uma n -bola fechada, N , tal que $y_0 \in N \subset V$. Observe que, pela continuidade de f , $f^{-1}(N)$ é fechado. Basta que tomemos $F = f^{-1}(N)$, que é uma vizinhança fechada de $f^{-1}(\{y_0\})$ tal que $f^{-1}(N) \setminus f^{-1}(\{y_0\}) = f^{-1}(N \setminus \{y_0\})$ não contém, por definição, nenhuma raiz de f em y_0 .

Prova de (4). Basta considerar $F = \text{Cl. } U_\alpha$, onde U_α é a vizinhança aberta de α garantida pelo **Teorema 69**.

Prova de (5). Basta tomar $F = \text{Cl. } U$, que é uma vizinhança fechada de U ($U \subseteq U \subset \text{Cl. } U$), e teremos que $\text{Cl. } U \setminus U = \partial U$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 , de maneira que (f, U) é admissível.

□

Teorema 71. *Sejam X um espaço topológico normal e (f, A) um par admissível para X, Y e y_0 . Então $\text{Cl. } A$ admite uma vizinhança V tal que $V \setminus A$ não contém raízes de f em y_0 . A inclusão $e : (V, V \setminus A) \hookrightarrow (X, X \setminus A)$ é uma excisão.*

Demonstração. Como (f, A) é um par admissível, A admite uma vizinhança fechada F tal que $F \setminus A$ não tem nenhuma raiz de f . Então F e $(X \setminus \overset{\circ}{F}) \cap f^{-1}(\{y_0\})$ são fechados disjuntos. Como X é um espaço normal, existem vizinhanças fechadas N e N' , respectivamente, tais que $F \subset N$, $X \setminus \overset{\circ}{F} \subset N'$ e $N \cap N' = \emptyset$. A vizinhança N é a vizinhança que procurávamos para $\text{Cl. } A$, pois $\text{Cl. } A \subset (X \setminus \overset{\circ}{F})$. □

2.4 Índices de Raízes

Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Nesta seção introduzimos uma ferramenta da Teoria de Nielsen de Raízes capaz de detectar quando um subconjunto de $A \subset X$, tal que (f, A) é um par admissível, contém alguma raiz de f em y_0 .

Definição 72. *Sejam X e Y espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Um **índice de raízes** para X, Y e y_0 é uma função ω :*

$$\begin{aligned} \omega : \{ (f, A) : (f, A) \text{ par admissível} \} &\rightarrow (G, +) \\ (f, A) &\mapsto \omega(f, A) \end{aligned},$$

onde $(G, +)$ é um grupo abeliano, satisfazendo os seguintes axiomas:

(1) **(Aditividade).** *Seja $A \subset X$ e sejam $A_1, \dots, A_n \subset A$ tais que:*

(a) *(f, A) é admissível e (f, A_i) é admissível para cada i ,*

(b) *$f^{-1}(\{y_0\}) \cap (A \setminus \cup_i A_i) = \emptyset$ e*

(c) *$A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.*

Então:

$$\omega(f, A) = \sum_{i=1}^n \omega(f, A_i)$$

(2) **(Homotopia).** *Suponha $f_t : X \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ uma homotopia, A um conjunto aberto em X , e que (f_t, A) é admissível para todo $t \in [0, 1]$. Então $\omega(f_1, A) = \omega(f_0, A)$.*

Vamos agora construir um **índice de raízes de Nielsen**. Começamos com uma construção simples que usa apenas Teoria Básica de Homologia - qualquer teoria que satisfaça aos 7 axiomas de Eilenberg-Steenrod - para detectar a existência de raízes.

Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. Considere a composição:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} (Y, Y \setminus \{y_0\}).$$

Esta composição induz homomorfismos em homologia:

$$H_*(X) \xrightarrow{f_*} H_*(Y) \xrightarrow{j_*} H_*(Y, Y \setminus \{y_0\}).$$

Nestas condições temos o seguinte:

Teorema 73. *Se a composição $j_* \circ f_* \neq 0$, então f , e qualquer aplicação homotópica a f , admite pelo menos uma raiz em y_0 .*

Demonstração. Suponha que f não admita raízes em y_0 . Podemos restringir o contradomínio de f a fim de obter uma aplicação $f' : X \rightarrow Y \setminus \{y_0\}$. A composição de aplicações acima pode ser reescrita como:

$$X \xrightarrow{f'} Y \setminus \{y_0\} \xrightarrow{j'} (Y \setminus \{y_0\}, Y \setminus \{y_0\}) \xrightarrow{k} (Y, Y \setminus \{y_0\}).$$

Isto significa que o homomorfismo induzido $j_* \circ f_* = k_* \circ j'_* \circ f'_*$ se fatora por $H_*(Y \setminus \{y_0\}, Y \setminus \{y_0\}) = 0$, de modo que $j_* \circ f_* = 0$. $\square$

O teorema acima nos motiva a utilizar $j_* \circ f_*$ como uma medida algébrica da possibilidade de f poder ou não ser deformada em uma aplicação sem raízes em y_0 . Isto também nos motiva a tornar local a construção acima para definir um índice de raízes.

Vamos construir o índice do seguinte modo. Suponha que (f, A) seja um par admissível para X, Y e y_0 . Seja N uma vizinhança fechada de A tal que $N \setminus A$ não contenha raízes de f em y_0 , de modo que f define uma aplicação de pares:

$$f' : (N, N \setminus A) \rightarrow (Y, Y \setminus \{y_0\}).$$

Se f não tiver raízes em A , então f' pode ser fatorada pelo par $(Y \setminus \{y_0\}, Y \setminus \{y_0\})$, cuja homologia é trivial. Assim, se f não tem nenhuma raiz em A , o homomorfismo induzido:

$$f'_* : H_*(N, N \setminus A) \rightarrow H_*(Y, Y \setminus \{y_0\})$$

é trivial. Podemos, portanto, utilizar f'_* como uma medida algébrica do número de raízes em A .

O problema, entretanto, é que apesar de f'_* pertencer ao grupo dos homomorfismos de $H_*(N, N \setminus A)$ em $H_*(Y, Y \setminus \{y_0\})$, este grupo depende do conjunto A , enquanto que

para que f'_* seja um índice, o grupo deveria ser o mesmo para diferentes conjuntos A escolhidos, e depender apenas de X, Y, y_0 . A solução é aumentar o diagrama:

$$X \xrightarrow{i} (X, X \setminus A) \xleftarrow{e} (N, N \setminus A) \xrightarrow{f'} (Y, Y \setminus \{y_0\}).$$

Pelo **Teorema 71** podemos supor que N também é uma vizinhança de Cl. A , de modo que a inclusão $e : (N, N \setminus A) \hookrightarrow (X, X \setminus A)$ é uma excisão, e logo induz isomorfismos em homologia. Temos o seguinte diagrama induzido:

$$H_*(X) \xrightarrow{i_*} H_*(X, X \setminus A) \xleftarrow{\cong e_*} H_*(N, N \setminus A) \xrightarrow{f'_*} H_*(Y, Y \setminus \{y_0\}).$$

Como e_* é um isomorfismo, podemos formar a composição:

$$L_*(f, A) = f'_* \circ e_*^{-1} \circ i_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y, Y \setminus \{y_0\}).$$

Nesta discussão, o homomorfismo $L_*(f, A)$ é independente da escolha da vizinhança fechada N de Cl. A , de modo a depender apenas de X, Y, y_0 e do par (f, A) . Assim, L_* é uma função do conjunto dos pares admissíveis no grupo abeliano $\text{Hom}(H_*(X), H_*(Y, Y \setminus \{y_0\}))$. Pode-se verificar que L_* satisfaz as condições da definição de índice de raízes, chamado o índice de raízes do homomorfismo em homologia.

Teoria de Raízes de Nielsen elementar para Aplicações Próprias

Esta seção servirá a dois propósitos principais:

- (1) Modificar esta teoria a fim de contemplar o caso de aplicações próprias, permitindo-nos definir conceitos tais como "essencialidade própria", "número de raízes de Nielsen próprio" e "índice inteiro de raízes próprio" para aplicações próprias $f : X^n \rightarrow Y$, onde X^n é uma n -variedade e Y um espaço bem conexo que é n -euclidiano em y_0 ;
- (2) Estender as definições de "multiplicidade" de uma classe de raízes e a de "grau absoluto" de uma aplicação $f : X^n \rightarrow Y$, onde X^n é uma n -variedade e Y é bem conexo e n -euclidiano em y_0 , mas **não necessariamente uma variedade**.

3.1 Classes de Raízes Próprias e o Número Próprio de Raízes de Nielsen

Vamos primeiramente definir uma noção de equivalência no conjunto das raízes de uma aplicação que agora é suposta *própria*. Nas definições a seguir exige-se somente que X e Y sejam espaços topológicos.

Definição 74. Uma classe de raízes α_0 de uma aplicação própria $f : X \rightarrow Y$ em $y_0 \in Y$ é **essencial** se, dada qualquer homotopia $h_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ com $h_0 = f$, existe uma classe de raízes α_1 de h_1 em y_0 à qual α_0 está relacionada. Em outras palavras, a classe de raízes α da aplicação f é essencial se para toda $f' \sim f$ pela homotopia h_t , existe uma classe de raízes α' de f' tal que $\alpha \sim_{h_t} \alpha'$.

Definição 75. Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação própria e $y_0 \in Y$. Uma classe de raízes α_0 de f em y_0 é **propriamente essencial** se, dada qualquer homotopia própria $\{h_t : X \rightarrow Y\}$ com $h_0 = f$, existe uma classe de raízes α_1 de h_1 à qual α_0 está h_t -relacionada.

Em se tratando de aplicações próprias, o correspondente ao número de Nielsen será o **número de Nielsen próprio**, como definido em seguida.

Definição 76. Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação própria e $y_0 \in Y$. O número de classes de raízes propriamente essenciais da aplicação própria $f : X \rightarrow Y$ em y_0 é o **número de raízes de Nielsen próprio de f em y_0** , que denotamos por $PNR(f, y_0)$.

Como toda classe propriamente essencial de raízes é essencial, então $NR(f, y_0) \leq PNR(f, y_0)$. Pode acontecer, entretanto, que $NR(f, y_0) < PNR(f, y_0)$. Um exemplo disto é o **Exemplo 88**, que veremos mais adiante.

O teorema a seguir é uma simples consequência desta discussão:

Teorema 77. Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. Nestes termos, $NR(f, y_0)$ é invariante por homotopias de f e $NR(f, y_0) \leq \#f^{-1}(\{y_0\})$. Se f é própria, então $PNR(f, y_0)$ é invariante por homotopias próprias de f e $PNR(f, y_0) \leq \#f^{-1}(\{y_0\})$.

Demonstração. Suponha $f \sim f'$. Pelo **Teorema 64**, existe uma bijeção entre os conjuntos das classes de raízes essenciais de f e o das classes de raízes essenciais de f' . Como NR é o cardinal destes conjuntos, segue que:

$$NR(f, y_0) = NR(f', y_0),$$

de modo que NR é invariante por homotopias. Analogamente, o resultado é válido para o número próprio de raízes de Nielsen. $\square$

3.2 Pares Propriamente Admissíveis

A noção de par admissível já apresentada será aqui adaptada para o contexto de aplicações próprias. Para tanto, daremos uma definição deste conceito e alguns exemplos, em comparação com o que fizemos anteriormente.

Definição 78. *Sejam X e Y espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Um par (f, A) é **propriamente admissível** para X, Y, y_0 se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação própria, $A \subset X$, e A admite uma vizinhança fechada F tal que $F \setminus A$ não tem raízes de f em y_0 .*

O teorema a seguir nos dará exemplos importantes de pares propriamente admissíveis.

Teorema 79. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação própria entre espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Temos:*

- (1) (f, X) e $(f, \emptyset)$ são pares propriamente admissíveis;
- (2) Se (f, A_1) e (f, A_2) são pares propriamente admissíveis, então $(f, A_1 \cap A_2)$ e $(f, A_1 \cup A_2)$ são propriamente admissíveis;
- (3) $(f, f^{-1}(\{y_0\}))$ é um par propriamente admissível;
- (4) Para qualquer classe de raízes de Nielsen própria α de f em y_0 , (f, α) é um par propriamente admissível;
- (5) Se $U \subset X$ é aberto e ∂U não contém nenhuma raiz de f em y_0 , então (f, U) é um par propriamente admissível.

Demonstração. Prova de (1). Tome X como vizinhança fechada de X . Temos claramente que $X \setminus X = \emptyset$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Assim, o par (f, X) é propriamente admissível. O conjunto $\emptyset$ é, por sua vez, uma vizinhança fechada de $\emptyset$ tal que $\emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 , de maneira que $(f, \emptyset)$ é admissível.

Prova de (2). O caso $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ foi abordado no item (1). Suponha, agora, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Como (f, A_1) é propriamente admissível, existe uma vizinhança fechada F_1 de A_1 tal que $F_1 \setminus A_1$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Igualmente, como (f, A_2) é propriamente admissível, existe uma vizinhança fechada F_2 de A_2 tal que $F_2 \setminus A_2$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Desta forma, $(F_1 \setminus A_1) \cap (F_2 \setminus A_2) = (F_1 \cap F_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Assim, $F = F_1 \cap F_2$ é uma vizinhança fechada de $A_1 \cap A_2$ que não contém nenhuma raiz de f em y_0 . Disto segue que $(f, A_1 \cap A_2)$ é um par propriamente admissível.

Analogamente, $(F_1 \cup F_2) \setminus (A_1 \cup A_2) = F_1 \setminus (A_1 \cap A_2) \cup (F_2 \setminus (A_1 \cup A_2)) \subset (F_1 \setminus A_1) \cup (F_2 \setminus A_2)$, e como $(F_1 \setminus A_1) \cup (F_2 \setminus A_2)$ não contém raízes de f em y_0 , *a fortiori*, $F = (F_1 \cup F_2) \setminus (A_1 \cup A_2)$ tampouco as contém. Logo, F é uma vizinhança fechada de $A_1 \cup A_2$ tal que $F \setminus (A_1 \cup A_2)$ não contém raízes de f em y_0 . O par $(f, A_1 \cup A_2)$ é admissível.

Prova de (3). Como Y é localmente euclidiano em y_0 , existe uma vizinhança V de y_0 tal que $V \cong \mathbb{R}^n$. Considere uma n -bola fechada, N , tal que $y_0 \in N \subset V$. Observe que, pela continuidade de f , $f^{-1}(N)$ é fechado. Basta que tomemos $F = f^{-1}(N)$, que é uma vizinhança fechada de $f^{-1}(\{y_0\})$ tal que $f^{-1}(N) \setminus f^{-1}(\{y_0\}) = f^{-1}(N \setminus \{y_0\})$ não contém, por definição, nenhuma raiz de f em y_0 .

Prova de (4). Basta considerar $F = \text{Cl. } U_\alpha$, onde U_α é a vizinhança aberta de α garantida pelo **Teorema 69**.

Prova de (5). Basta tomar $F = \text{Cl. } U$, que é uma vizinhança fechada de U ($U \subseteq U \subset \text{Cl. } U = U \cup \partial U$), e teremos que $\text{Cl. } U \setminus U = \partial U$ não contém nenhuma raiz de f em y_0 , de maneira que (f, U) é propriamente admissível.

□

Teorema 80. *Sejam X um espaço topológico normal e (f, A) um par propriamente admissível para X, Y e y_0 . Então $\text{Cl. } A$ admite uma vizinhança V tal que $V \setminus A$ não contém raízes de f em y_0 . A inclusão $e : (V, V \setminus A) \hookrightarrow (X, X \setminus A)$ é uma excisão.*

Demonstração. Como (f, A) é um par propriamente admissível, A admite uma vizinhança fechada F tal que $F \setminus A$ não tem nenhuma raiz de f . Então F e $(X \setminus \overset{\circ}{F}) \cap f^{-1}(\{y_0\})$ são fechados disjuntos. Como X é um espaço normal, existem vizinhanças fechadas N e N' , respectivamente, tais que $F \subset N$, $X \setminus \overset{\circ}{F} \subset N'$ e $N \cap N' = \emptyset$. A vizinhança N é a vizinhança que procurávamos para $\text{Cl. } A$, pois $\text{Cl. } A \subset (X \setminus \overset{\circ}{F})$. $\square$

3.3 Índice de Raízes Próprio

Começamos esta seção definindo um objeto que generaliza o conceito de índice da Teoria de Pontos-Fixos. Alguns axiomas daquela teoria são enunciados a fim de certificar a unicidade da função índice definida. Aqui, entretanto, tomaremos apenas dois dos axiomas que aquele índice satisfaz, os que são mais importantes para o nosso trabalho: a aditividade e a homotopia. Também restringimos menos sua definição ao permitir que o índice seja, ao invés de um número racional, um elemento de um grupo abeliano.

Definição 81. *Sejam X e Y espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Um **índice de raízes próprio** para X, Y, y_0 é uma função ω com domínio no conjunto dos pares propriamente admissíveis para X, Y, y_0 e contradomínio num grupo abeliano, $(G, +)$,*

$$\begin{aligned} \omega : \{ (f, A) : (f, A) \text{ par propriamente admissível para } X, Y \text{ e } y_0 \} &\rightarrow (G, +) \\ (f, A) &\mapsto \omega(f, A) \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) (Aditividade) Se $A \subset X$ e $A_1, \dots, A_n \subset A$ são tais que:

(a) (f, A) é propriamente admissível e (f, A_i) é propriamente admissível para cada $i = 1, \dots, n$,

$$(b) f^{-1}(\{y_0\}) \cap (A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i) = \emptyset,$$

$$(c) A_i \cap A_j = \emptyset \text{ sempre que } i \neq j,$$

$$\text{então } \omega(f, A) = \sum_{i=1}^n \omega(f, A_i).$$

(2) (Homotopia) Se $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é uma homotopia própria, $A \subset X$ é aberto em X e (f_t, A) é propriamente admissível para todo $t \in [0, 1]$, então $\omega(f_0, A) = \omega(f_1, A)$.

Uma consequência simples da aditividade do índice é a seguinte:

Teorema 82. *Seja (f, A) um par admissível para X, Y e y_0 . Se denotarmos por 0 o elemento neutro do grupo abeliano sobre o qual ω toma valores, então $\omega(f, A) \neq 0$ implica que $f(x) = y_0$ para algum $x \in A$.*

Demonstração. Provaremos por contraposição. Suponha que f não tenha nenhuma raiz de y_0 em A . Aplicando a aditividade do índice com $A_1 = \emptyset$, temos $\omega(f, A) = \omega(f, \emptyset)$. Aplicando este mesmo argumento para $A_2 = \emptyset \subset A_1$, temos $\omega(f, \emptyset) = \omega(f, \emptyset) + \omega(f, \emptyset)$. Por conseguinte, $\omega(f, A) = \omega(f, \emptyset) = 0$. $\square$

Observação 83. *Se $A \subset X$ é um conjunto tal que (f, A) é admissível para X, Y, y_0 , o Teorema 82 nos permite detectar quando o conjunto A contém uma raiz de f em y_0 : basta termos $\omega(f, A) \neq 0$. No entanto, não é sempre verdadeiro que se tivermos $\omega(f, A) = 0$ então A não conterá nenhuma raiz de f em y_0 .*

É de particular interesse na Teoria de Raízes a invariância do índice, ou seja, se duas classes de raízes de uma aplicação estão relacionadas pela mesma homotopia, elas têm o mesmo índice. O teorema a seguir mostra isto.

Teorema 84. *Seja $\{f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]\}$ uma homotopia própria, $y_0 \in Y$, ω um índice próprio de raízes para X, Y, y_0 e suponha que α_0 é uma classe de raízes de Nielsen de f_0 . Se α_0 estiver $\{f_t\}$ -relacionada a uma classe de raízes α_1 de f_1 em y_0 , então $\omega(f_0, \alpha_0) = \omega(f_1, \alpha_1)$. Se, no entanto, α_0 não estiver $\{f_t\}$ -relacionada com nenhuma classe de raízes de f_1 em y_0 , então $\omega(f_0, \alpha_0) = 0$.*

Demonstração. Fixe $f_t : X \rightarrow Y$. Sejam:

$$\widehat{q} : \widehat{Y} \rightarrow Y \text{ e } \widehat{f}_t : X \rightarrow \widehat{Y}$$

um revestimento e um levantamento de Hopf, respectivamente, para a aplicação $f_t : X \rightarrow Y$.

Pelo item 2 do **Teorema 64**, $\alpha_0 = \widehat{f}_0^{-1}(\{\widehat{y}_0\})$ para algum $\widehat{y}_0 \in \widehat{q}^{-1}(\{y_0\})$, de modo que precisamos provar apenas que:

$$\omega(f_0, \widehat{f}_0^{-1}(\{\widehat{y}_0\})) = \omega(f_1, \widehat{f}_1^{-1}(\{\widehat{y}_0\})).$$

Como o intervalo $[0, 1]$ é conexo, basta mostrarmos que $t \mapsto \omega(f_t, \widehat{f}_t^{-1}(\{\widehat{y}_0\}))$ é uma função localmente constante de t .

Seja $t \in [0, 1]$. Vamos encontrar uma vizinhança J de t tal que $\omega(f_s, \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}))$ é constante para $s \in J$ igual a $\omega(f_0, \alpha_0)$.

O conjunto $W = \{(x, t) \in X \times [0, 1] : f_t(x) = y_0\} = \{(x, t) \in X \times [0, 1] : F(x, t) = y_0\}$ é compacto, uma vez que a homotopia $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, $F(x, t) = f_t(x)$ é própria, $\{y_0\}$ é compacto em Y e $W = F^{-1}(\{y_0\})$.

Seja:

$$C = \bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(\{y_0\}) \subset X$$

a projeção de W sobre X , que por ser imagem por uma função contínua (a projeção) de um conjunto compacto (a saber, W), também é compacto.

Como na demonstração do **Teorema 69**, sabemos que existe uma família:

$$\{U_{\widehat{y}} : \widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(\{y_0\})\}$$

de abertos mutuamente disjuntos de X tais que $\widehat{f}_t^{-1}(\{\widehat{y}\}) \subset U_{\widehat{y}}$ para todo $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(\{y_0\})$.

Dado o conjunto $\text{Map}(X, \widehat{Y})$ com a topologia compacto-aberta, pela **Proposição 5**, a aplicação associada a $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$,

$$\begin{aligned} \theta : [0, 1] &\rightarrow \text{Map}(X, \widehat{Y}) \\ s &\mapsto \widehat{f}_s \end{aligned}$$

é contínua.

O conjunto $C \setminus U_{\widehat{y}_0}$ é compacto e $\widehat{f}_t$ leva $C \setminus U_{\widehat{y}_0}$ em um subconjunto do conjunto aberto $\widehat{Y} \setminus \{\widehat{y}_0\}$. Desta forma,

$$\widehat{f}_t \in M(C \setminus U_{\widehat{y}_0}, \widehat{Y} \setminus \{\widehat{y}_0\}),$$

onde $M(C \setminus U_{\widehat{y}_0}, \widehat{Y} \setminus \{\widehat{y}_0\})$ é aberto de $\text{Map}(X, \widehat{Y})$. Pela continuidade de θ existe $J_0 \subset [0, 1]$, vizinhança aberta de t , tal que $\forall s \in J_0$, $\widehat{f}_s \in M(C \setminus U_{\widehat{y}_0}, \widehat{Y} \setminus \{\widehat{y}_0\})$. Assim, para todo $s \in J_0$:

$$\widehat{f}_s(C \setminus U_{\widehat{y}_0}) \subset \widehat{Y} \setminus \{\widehat{y}_0\}$$

para todo $s \in J_0$ e portanto:

$$\widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}) \subset U_{\widehat{y}_0} \quad \forall s \in J_0. \quad (3.3.1)$$

Similarmente, existe uma outra vizinhança J_1 de t tal que:

$$\widehat{f}_s \left(C \setminus \bigcup_{\widehat{y} \neq \widehat{y}_0} U_{\widehat{y}} \right) \subset \widehat{Y} \setminus (\widehat{q}^{-1}(\{y_0\}) \setminus \{\widehat{y}_0\})$$

para todo $s \in J_1$, uma vez que como $\widehat{q}^{-1}(\{y_0\})$ é discreto, $\widehat{q}^{-1}(\{y_0\}) \setminus \{\widehat{y}_0\}$ é fechado.

Da inclusão anterior segue que:

$$f_s^{-1}(\{y_0\}) \setminus \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}) \subset \bigcup_{\widehat{y} \neq \widehat{y}_0} U_{\widehat{y}} \quad \forall s \in J_1, \quad (3.3.2)$$

De fato, como $\widehat{f}_s$ é um levantamento de f_s por $\widehat{q}$, $\widehat{f}_s^{-1}(\widehat{q}^{-1}(\{y_0\})) = f_s^{-1}(\{y_0\})$. Deste modo,

$$f_s^{-1}(\{y_0\}) = \widehat{f}_s^{-1}(\widehat{q}^{-1}(\{y_0\})) = \bigcup_{\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(\{y_0\})} \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}\}). \quad (3.3.3)$$

Assim,

$$f_s^{-1}(\{y_0\}) \setminus \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}) = \bigcup_{\substack{\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(\{y_0\}) \\ \widehat{y} \neq \widehat{y}_0}} \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}\}) \subset \bigcup_{\widehat{y} \neq \widehat{y}_0} U_{\widehat{y}}.$$

Seja $J = J_0 \cap J_1$. Por (3.3.2),

$$f_s^{-1}(\{y_0\}) \setminus \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}) \subset \bigcup_{\widehat{y} \neq \widehat{y}_0} U_{\widehat{y}}.$$

Reunindo ambos os membros da expressão acima com $\widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\})$, segue:

$$f_s^{-1}(\{y_0\}) \subset \bigcup_{\widehat{y} \neq \widehat{y}_0} U_{\widehat{y}} \cup \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}).$$

Como $\widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}) \subset U_{\widehat{y}_0}$ e $U_{\widehat{y}_0} \cap \partial U_{\widehat{y}_0} = \emptyset$, então:

$$f_s^{-1}(\{y_0\}) \cap \partial U_{\widehat{y}_0} = \emptyset,$$

e portanto, pelo item (4) do **Teorema 79**, $(f_s, U_{\widehat{y}_0})$ é admissível para todo $s \in J$.

Intersectando ambos os membros da equação (3.3.3) com $U_{\widehat{y}_0}$ e observando que $\widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}) \subset U_{\widehat{y}_0}$ e que $U_{\widehat{y}_0} \cap \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}\}) = \emptyset$ para todo $\widehat{y} \neq \widehat{y}_0$, temos:

$$U_{\widehat{y}_0} \cap f_s^{-1}(\{y_0\}) = \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}).$$

Agora, $(f_s, U_{\widehat{y}_0})$ e $(f_s, f_s^{-1}(\{y_0\}))$ são pares admissíveis, este último pelo item (3) do **Teorema 79**. Também temos que $f_s^{-1}(\{y_0\}) \cap [U_{\widehat{y}_0} \setminus (U_{\widehat{y}_0} \cap f_s^{-1}(\{y_0\}))] = \emptyset$, de maneira que pela aditividade do índice:

$$\omega(f_s, \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\})) = \omega(f_s, U_{\widehat{y}_0})$$

para todo $s \in J$. Pela propriedade da homotopia do índice,

$$\omega(f_s, U_{\widehat{y}_0})$$

é constante para $s \in J$. Portanto $\omega(f_s, \widehat{f}_s^{-1}(\{\widehat{y}_0\}))$ é constante para todo $s \in J$. Sendo $[0, 1]$ conexo, $\omega(f_0, \alpha_0) = \omega(f_1, \alpha_1)$.

Se α não está f_t -relacionada com nenhuma classe de raízes de f_1 , então pelo **Teorema 82**, $\omega(f_0, \alpha_0) = 0$. $\square$

Corolário 85. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação própria, $y_0 \in Y$, α uma classe de raízes de Nielsen de f em y_0 , e ω um índice próprio de raízes para X, Y e y_0 . Então $\omega(f_0, \alpha_0) \neq 0$ implica que α é propriamente essencial.*

Demonstração. Provaremos por contraposição. Se α é não-essencial, então por definição existe uma homotopia $\{f_t : X \rightarrow Y : t \in [0, 1]\}$ começando em f tal que α não está $\{f_t\}$ -relacionada com qualquer classe de raízes de f_1 , de modo que pelo **Teorema 82**, $\omega(f, \alpha) = 0$. $\square$

O seguinte teorema nos permite construir um índice próprio de raízes ω definindo $\omega(f, A)$ para pares (f, A) propriamente admissíveis nos quais $\text{Cl. } A$ é compacto, e então estendê-lo automaticamente a todos os pares propriamente admissíveis.

Teorema 86. *Sejam X e Y espaços topológicos, $y_0 \in Y$, e seja ω uma função cujo domínio é o conjunto de todos os pares (f, A) propriamente admissíveis para X, Y e y_0 , tais que $\text{Cl. } A$ é compacto, e cujo contradomínio é um grupo abeliano. Suponha que ω satisfaça as condições (1) e (2) da **Definição 81** sempre que A e A_i tiverem fechos compactos. Então ω admite uma única extensão a um índice próprio de raízes para X, Y, y_0 .*

Demonstração. Seja (f, A) um par propriamente admissível para X, Y e y_0 . Então, como $(f, f^{-1}(\{y_0\}))$ também é propriamente admissível devido ao item (3) do **Teorema 79**, pelo item (2) deste mesmo teorema, $(f, f^{-1}(\{y_0\} \cap A))$ é propriamente admissível. Uma vez que

f é própria, $f^{-1}(\{y_0\})$ é compacto, e assim $f^{-1}(\{y_0\}) \cap A$ tem fecho compacto. Assim, $\omega(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A)$ está bem definido, de modo que podemos definir ω' por:

$$\omega'(f, A) := \omega(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A), \quad (3.3.4)$$

para todo par (f, A) que seja propriamente admissível para X, Y, y_0 . Se $\text{Cl. } A$ é compacto, então $\omega(f, A)$ já está definido, e por aditividade (com $n = 1$ e $A_1 = f^{-1}(\{y_0\}) \cap A$), temos $\omega(f, A) = \omega(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A)$ de modo que ω' é, de fato, uma extensão de ω . Além disso, se ω' deve ser um índice de raízes próprio, a aditividade requer que $\omega'(f, A) = \omega'(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A) = \omega(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A)$. Assim, a extensão é única.

Resta-nos mostrar que ω' é um índice de raízes próprio.

A aditividade de ω' segue facilmente da aditividade de ω , de modo que omitimos a prova. Para a homotopia, suponha que $f_t : X \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ seja uma homotopia própria, $A \subset X$ um aberto e que (f_t, A) seja admissível para todo $t \in [0, 1]$. Seja V uma vizinhança aberta de y_0 cujo fecho é compacto, e seja:

$$U = \bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(V).$$

Então para cada $t \in [0, 1]$, U é uma vizinhança aberta de $f_t^{-1}(\{y_0\})$, e portanto, $f_t^{-1}(\{y_0\}) \cap \partial U = \emptyset$, de modo que (f_t, U) , e portanto $(f_t, U \cap A)$ é propriamente admissível para cada $t \in [0, 1]$. Também,

$$U = \bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(V) \subset \bigcup_{t \in [0, 1]} f_t^{-1}(\text{Cl. } V),$$

de modo que pelo **Teorema 11**, U , e portanto $U \cap A$ tem fecho compacto. Assim $\omega(f_t, U \cap A)$ está bem definido para todo $t \in [0, 1]$ e:

$$\begin{aligned} \omega'(f_0, A) &= \omega(f_0, f_0^{-1}(\{y_0\}) \cap A) = \omega(f_0, A \cap U) = \\ &= \omega(f_1, A \cap U) = \omega(f_1, f_1^{-1}(\{y_0\}) \cap A) = \omega'(f_1, A). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

A primeira e a última igualdades seguem da definição de ω' . A segunda igualdade segue da aditividade de ω e do fato que $(A \cap U) \setminus (f_0^{-1}(\{y_0\}) \cap A)$ não tem raízes. A terceira igualdade segue da propriedade de homotopia para ω , já estabelecida uma vez que ω é índice. $\square$

Aplicamos este teorema no caso em que X^n é uma n -variedade orientável (não necessariamente compacta), e Y é um espaço topológico n -euclidiano em um ponto $y_0 \in Y$.

Teorema 87. *Sejam X^n uma n -variedade orientável e Y um espaço topológico que é n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Seja $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$ uma orientação de X^n e seja $v \in H_n(Y, Y \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z})$ uma orientação local de Y em y_0 . Defina um **índice inteiro de raízes próprias** (relativo a estas orientações), λ , para X^n, Y e y_0 como segue:*

Sejam (f, A) um par propriamente admissível para X^n, Y, y_0 com $\text{Cl. } A$ compacto e $N \subset X^n$ uma vizinhança qualquer de $\text{Cl. } A$ tal que $N \setminus A$ não tem raízes, e $K \subset X^n$ um compacto qualquer que contenha A . Fixe $o_K \in H_n(X^n, X^n \setminus K; \mathbb{Z})$, a classe fundamental de X^n em torno de K (relativa à orientação s_{X^n}). Construa o diagrama:

$$(X^n, X^n \setminus K) \xrightarrow{i_K} (X^n, X^n \setminus A) \xleftarrow{e} (N, N \setminus A) \xrightarrow{f'} (Y, Y \setminus \{y_0\}), \quad (3.3.6)$$

onde f' é a aplicação definida por f . Então e é uma excisão e portanto induz isomorfismos em homologia em todas as dimensões, de modo que existe um homomorfismo $f'_n \circ e_n^{-1} \circ i_{K_n} : H_n(X^n, X^n \setminus K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(Y, Y \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z})$. Defina o inteiro $\lambda(f, A)$ como sendo o único

inteiro satisfazendo:

$$f'_n \circ e_n^{-1} \circ \iota_{K_n}(o_K) =: \lambda(f, A)v. \quad (3.3.7)$$

Temos que $\lambda(f, A)$ independe da escolha de K e de N - que estão sujeitos apenas às condições de N ser uma vizinhança de $\text{Cl. } A$ e de que K seja um conjunto compacto que contém A . Além disso, a função a valores inteiros λ , definida no conjunto de todos os pares propriamente admissíveis, (f, A) , para os quais A tem fecho compacto, se estende univocamente a um índice de raízes a valores inteiros para X^n, Y e y_0 , que será chamado de **índice inteiro de raízes para X^n, Y, y_0** .

Demonstração. A aplicação e é uma excisão devido ao **Teorema 71**. Mostremos primeiramente que λ independe de K .

Seja K' um outro conjunto compacto contendo A . Então $K \cap K'$ também é um conjunto compacto que contém A , e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (X^n, X^n \setminus K) & & \\ \downarrow j_K & \searrow \iota_K & \\ (X^n, X^n \setminus (K \cap K')) & \xrightarrow{\iota_{K \cap K'}} & (X^n, X^n \setminus A) \\ j_{K'} \uparrow & \nearrow \iota_{K'} & \\ (X^n, X^n \setminus K') & & \end{array} \quad (3.3.8)$$

Pela caracterização de classe fundamental, temos facilmente $(j_K)_n(o_K) = o_{K \cap K'} = (j_{K'})_n(o_{K'})$. Portanto, pela comutatividade do diagrama (3.3.8),

$$(\iota_K)_n(o_K) = (\iota_{K \cap K'})_n(o_{K \cap K'}) = (\iota_{K'})_n(o'_{K'}), \quad (3.3.9)$$

de maneira que $f'_n \circ e_n^{-1} \circ (\iota_K)_n(o_K) = f'_n \circ e_n^{-1} \circ (\iota_{K'})_n(o_{K'})$. Portanto $\lambda(f, A)$ independe da escolha de K .

Mostremos agora que λ independe da escolha da vizinhança N .

Seja N' uma outra vizinhança de Cl. A tal que $N' \setminus A$ não admite raízes de f em y_0 . Seja $N'' = N \cup N'$, e considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 X^n & \xrightarrow{\iota} & (X^n, X^n \setminus A) & & \\
 & \searrow e & \uparrow e'' & \swarrow e' & \\
 (N, N \setminus A) & \xrightarrow{j} & (N'', N'' \setminus A) & \xleftarrow{j'} & (N', N' \setminus A) \\
 & \searrow f' & \downarrow f''' & \swarrow f'' & \\
 & & (Y, Y \setminus \{y_0\}) & &
 \end{array}$$

no qual f' , f'' e f''' são definidos por f e todas as outras aplicações são inclusões. Pela comutatividade do diagrama, verifica-se que:

$$f'_n \circ e_n^{-1} \circ \iota_n = f'''_n \circ e''_n^{-1} \circ \iota_n = f''_n \circ e'_n^{-1} \circ \iota_n,$$

de modo que $\lambda(f, A)$ não depende da escolha de N .

Para demonstrar a aditividade de λ , sejam (f, A) um par propriamente admissível, $A_1, \dots, A_n$ nas condições da **Definição 81**. Seja N uma vizinhança fechada de Cl. A tal que $(N \setminus A) \cap f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$, de modo que também tenhamos:

$$\left(N \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset,$$

e considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X^n & & \\
 & \swarrow \iota & & \searrow \iota' & \\
 (X^n, X^n \setminus A) & \xrightarrow{j} & (X^n, X^n \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}) & & \\
 \uparrow e & & \uparrow e' & & \\
 (N, N \setminus A) & \xrightarrow{k} & (N, N \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}) & & \\
 & \searrow f' & \swarrow f'' & & \\
 & & (Y, Y \setminus \{y_0\}) & &
 \end{array}$$

Uma simples checagem mostra que:

$$\lambda(f, A) = f'_n \circ e_n^{-1} \circ \iota_n = f''_n \circ e_n'^{-1} \circ \iota'_n = \lambda(f, \cup_\alpha A_\alpha)$$

Para completar a prova da aditividade, devemos mostrar que $\lambda(f, \cup_\alpha U_\alpha) = \sum_\alpha \lambda(f, A_\alpha)$. Usando o fato de X^n ser normal, podemos selecionar para cada α uma vizinhança fechada N_α de $\text{Cl.}(A_\alpha)$ de modo que os N_α sejam mutuamente disjuntos e $N_\alpha \setminus A_\alpha$ não contenha nenhuma raiz de f em y_0 , para cada α .

Sejam $N = \bigcup_\alpha N_\alpha$ e $A' = \bigcup_\alpha A_\alpha$ e considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_*(X^n) & & \\
 & \swarrow \Sigma(\iota_\alpha)_* & & \searrow \iota_* & \\
 \sum_\alpha H_*(X^n, X^n \setminus A_\alpha) & & \xleftarrow{\cong \Sigma(j_\alpha)_*} & & H_*(X^n, X^n \setminus A') \\
 \uparrow \Sigma(e_\alpha)_* \approx & & & & \uparrow \approx e_* \\
 \sum_\alpha H_*(N_\alpha, N_\alpha \setminus A_\alpha) & & \xrightarrow{\cong \Sigma(k_\alpha)_*} & & H_*(N, N \setminus A') \\
 \searrow \Sigma(f'_\alpha)_* & & & \swarrow f'_* & \\
 & & H_*(Y, Y \setminus \{y_0\}) & &
 \end{array}$$

onde as aplicações f'_α e f' são definidas por f , as aplicações $\iota_\alpha, \iota, j_\alpha, k_\alpha e_\alpha, e$ são todas inclusões. Pelo teorema da soma direta das homologias (veja, por exemplo, p. 8 de [25]), $\sum_\alpha (k_\alpha)_*$ é um isomorfismo. As aplicações e_α e e são excisões, e portanto induzem isomorfismos. Logo, pela comutatividade do diagrama, $\sum_\alpha (j_\alpha)_*$ é um isomorfismo. Pela comutatividade, temos ainda:

$$\sum_\alpha (e_\alpha)_* = \left(\sum_\alpha (j_\alpha)_* \right) \circ e_* \circ \left(\sum_\alpha (k_\alpha)_* \right).$$

Resolvendo para e_*^{-1} , obtemos:

$$e_*^{-1} = \sum_\alpha (k_\alpha)_* \circ (e_\alpha)_*^{-1} \circ (j_\alpha)_*.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 \lambda(f, A') &= f'_* \circ e_*^{-1} \circ \iota_* = f'_* \circ \left(\sum_{\alpha} (k_{\alpha})_* \circ (e_{\alpha}^{-1})_* \circ (j_{\alpha})_* \right) \circ \iota_* = \\
 &= \sum_{\alpha} f'_* \circ (k_{\alpha})_* \circ (e_{\alpha}^{-1})_* \circ (j_{\alpha})_* \circ \iota_* = \sum_{\alpha} (f'_{\alpha})_* \circ (e_{\alpha}^{-1})_* \circ (j_{\alpha})_* \circ \iota_* = \sum_{\alpha} (f'_{\alpha})_* \circ (e_{\alpha}^{-1})_* \circ (j_{\alpha})_* \circ (\iota_{\alpha})_* = \\
 &= \sum_{\alpha} \lambda(f, A_{\alpha}),
 \end{aligned}$$

de maneira que λ é aditivo.

Pelo **Teorema 86**, λ admite uma única extensão a um índice de raízes para X^n, Y e y_0 . □

O exemplo a seguir ilustra o fato do número de raízes próprio poder ser estritamente menor que o número de raízes de Nielsen.

Exemplo 88. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação identidade e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Então y_0 é a única raiz de f em y_0 , e portanto $[\{y_0\}]$ é a única classe de raízes de Nielsen de f em y_0 . Escolha uma orientação $s_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^n$ de $\mathbb{R}^n$ e escolha, como orientação local em y_0 , $v = s_{\mathbb{R}^n}(y_0)$. A fim de computar $\lambda(f, y_0)$ relativamente a estas orientações, sejam $N = \mathbb{R}^n$ e $K = \{y_0\}$ na definição acima. Então f' , e e e ι_K são as aplicações identidade em $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y_0\})$, de modo que $f'_n \circ e_n^{-1} \circ \iota_{K_n}$ é a identidade de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$. Também, $o_K = v$. Portanto, $\lambda(f, \{y_0\}) = 1 \neq 0$. Segue do **Corolário 85** que $[\{y_0\}]$ é propriamente essencial, e portanto $PNR(f, y_0) = 1$.*

Por outro lado, sejam $y_1 \in \mathbb{R}^n$ diferente de y_0 e $\{h_t; t \in [0, 1]\}$ a homotopia definida pela linha reta entre f e a aplicação constante igual a y_1 ,

$$h_t(x) = (1 - t)x + ty_1.$$

Então $h_1^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$, de modo que $NR(h_1, y_0) = 0$. Como NR é invariante por homotopias, $h_1 \tilde{f}$ e h_1 não tem raízes em y_0 ,

$$NR(f, y_0) = NR(h_1, y_0) = 0.$$

Observação 89. Se X^n é compacta, podemos tomar $K = X^n$ no **Teorema 87**. Neste caso o homomorfismo $f_{N_n} \circ e_{N_n}^{-1} \circ \iota_{K_n} : H_n(X, X \setminus K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(Y, Y \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z})$ é um homomorfismo nas condições do **Teorema 73**, $L_n(f, A) : H_n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(Y, Y \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z})$, e portanto λ é o índice de raízes do homomorfismo em homologia.

Observação 90. Se Y^n também for uma variedade orientada, então $\lambda(f, f^{-1}(\{y_0\})) = \deg_{y_0}(f)$, o **grau de Brouwer de f em y_0** . Quando Y^n é conexo (como assumimos geralmente), então este número é o mesmo para todo $y_0 \in Y$, e é o **grau de f** , $\deg(f)$. Isto generaliza o grau de Brouwer de aplicações de variedades compactas orientadas para aplicações próprias entre variedades orientadas quaisquer. Por aditividade, $\lambda(f, f^{-1}(\{y_0\})) = \lambda(f, X^n)$. Logo, $\lambda(f, X^n) = \deg(f)$ sempre que Y^n for uma variedade conexa orientada.

O teorema a seguir dá uma descrição alternativa de $\lambda(f, A)$ em termos do grau.

Teorema 91. Suponha que X^n seja uma n -variedade orientável e Y um espaço topológico n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Escolha uma orientação $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$ de X^n e uma orientação local $v \in H_n(Y, Y \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z})$ de Y em y_0 . Seja λ o índice de raízes inteiro para X^n, Y, y_0 relativo a estas orientações. Sejam $E \subset Y$ uma vizinhança euclidiana de y_0 e $s_E : E \rightarrow \tilde{E}$ a orientação de E tal que $j_n(s_E(y_0)) = v$, onde j_n é o homomorfismo induzido em homologia pela inclusão $j_n : (E, E \setminus \{y_0\}) \hookrightarrow (Y, Y \setminus \{y_0\})$. Agora suponha que (f, A) seja propriamente admissível para X, Y, y_0 . Então existe uma vizinhança aberta U de $f^{-1}(\{y_0\}) \cap A$ tal que $f(U) \subset E$ e $U \setminus (f^{-1}(\{y_0\}) \cap A)$ não tem raízes de f em y_0 . Seja $s_U : U \rightarrow \tilde{U}$ a restrição de s_X a U . Então, com respeito às orientações s_U e s_E ,

$$\lambda(f, A) = \deg_{y_0}(f_{UE}), \quad (3.3.10)$$

onde a aplicação $f_{UE} : U \rightarrow E$ é definida por f .

Demonstração. Por aditividade, temos $\lambda(f, A) = \lambda(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A)$.

De fato, pelo item (3) do **Teorema 79**, o par $(f, f^{-1}(\{y_0\}))$ é propriamente admissível, e pelo item (2) do mesmo teorema, segue que $(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A)$ também é propriamente admissível. Observando que $f^{-1}(\{y_0\}) \cap [A \setminus [f^{-1}(\{y_0\}) \cap A]] = \emptyset$, como λ é, em particular, um índice próprio, segue da aditividade que $\lambda(f, A) = \lambda(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A)$.

Observe agora que para qualquer vizinhança U de A nas condições do enunciado, tem-se:

$$f^{-1}(\{y_0\}) \cap A = f_{UE}^{-1}(\{y_0\}). \quad (3.3.11)$$

Com efeito, se $x \in f^{-1}(\{y_0\}) \cap A$, então $x \in A$ e $f(x) = y_0$. Como $U \setminus [f^{-1}(\{y_0\}) \cap A]$ não contém raízes de f em y_0 , $x \in A \cap f^{-1}(\{y_0\}) \subset U$, de modo que $x \in f_{UE}^{-1}(\{y_0\})$. Também, se $x \in f_{UE}^{-1}(\{y_0\})$, então $x \in U$ é raiz de f em y_0 , e como $U \setminus [f^{-1}(\{y_0\}) \cap A]$ não contém raízes de f em y_0 , resta-nos que $x \in A$, de maneira que $x \in f^{-1}(\{y_0\}) \cap A$.

Deste modo, basta mostrarmos que $\lambda(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A) = \deg_{y_0}(f_{UE})$, pois desta forma,

$$\lambda(f, A) = \lambda(f, f^{-1}(\{y_0\}) \cap A) = \deg_{y_0}(f_{UE}).$$

Como f é própria, $f^{-1}(\{y_0\})$ é compacto, sendo (f, A) propriamente admissível, pelo **Teorema 80** temos:

$$f^{-1}(\{y_0\}) \cap A = f^{-1}(\{y_0\}) \cap \text{Cl. } A,$$

que é fechado em X^n e portanto fechado no conjunto compacto $f^{-1}(\{y_0\})$.

Segue-se que $f_{UE}^{-1}(\{y_0\}) = f^{-1}(\{y_0\}) \cap A$ é compacto. Portanto, para computarmos $\lambda(f, f_{UE}^{-1}(\{y_0\}))$ podemos usar $f_{UE}^{-1}(\{y_0\})$ como o conjunto K do **Teorema 87**, que neste caso contém $f^{-1}(\{y_0\}) \cap A$ como compacto. Podemos também usar U no lugar de N .

Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (X^n, X^n \setminus f_{UE}^{-1}(\{y_0\})) & \xleftarrow{\epsilon} & (U, U \setminus f_{UE}^{-1}(\{y_0\})) \xrightarrow{f'} (Y, Y \setminus \{y_0\}) \\
 & & \cup j \\
 & & (U, U \setminus f_{UE}^{-1}(\{y_0\})) \xrightarrow{f'_{UE}} (E, E \setminus \{y_0\}) \\
 & & \cup \\
 U & \xrightarrow{f_{UE}} & E
 \end{array} \tag{3.3.12}$$

onde f' , f'_{UE} e f_{UE} são definidos por f e todas as outras aplicações são indicadas pelas inclusões. Por definição de λ , temos:

$$f'_n \circ e_n^{-1}(o_{X^n, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}) = \lambda(f, f_{UE}^{-1}(\{y_0\}))v, \tag{3.3.13}$$

onde $o_{X^n, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}$ é a classe fundamental de X^n em $f_{UE}^{-1}(\{y_0\})$. Pela definição de $\deg_{y_0} f_{UE}$, temos:

$$f'_{UE_n}(o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}) = (\deg_{y_0}(f_{UE}))s_E(y_0) \tag{3.3.14}$$

onde $o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}$ é a classe fundamental de U em $f_{UE}^{-1}(\{y_0\})$. Aplicando j_n a ambos os membros da equação (3.3.14) e nos utilizando da comutatividade do diagrama,

$$f'_n(o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}) = j_n \circ f'_{UE_n}(o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}) = (\deg_{y_0}(f_{UE}))j_n(s_E(y_0)) = (\deg_{y_0}(f_{UE}))v. \tag{3.3.15}$$

Portanto, resta provar que $o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})} = e_n^{-1}(o_{X^n, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})})$, pois como:

$$\begin{cases} f'_n \circ e_n^{-1}(o_{X^n, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}) = \lambda(f, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})) \cdot v \\ f'_n(o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}) = \deg_{y_0}(f_{UE}) \cdot v \end{cases}$$

seguir-se-á a igualdade $\lambda(f, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})) = \deg_{y_0}(f_{UE})$.

Para mostrar que $o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})} = e_n^{-1}(o_{X^n, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})})$, seja x um ponto arbitrário de $f_{UE}^{-1}(\{y_0\})$ e considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X, X \setminus f_{UE}^{-1}(\{y_0\})) & \xleftarrow{e} & (U, U \setminus f_{UE}^{-1}(\{y_0\})) \\ \cap \iota_x & & \cap k_x \\ (X, X \setminus \{x\}) & \xleftarrow{e_x} & (U, U \setminus \{x\}) \end{array} \quad (3.3.16)$$

Então $\iota_{xn}(e_n(o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})})) = e_{xn}(k_{xn}(o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})})) = e_{xn}(s_U(x)) = s_X(x)$. A primeira igualdade segue da comutatividade do diagrama, a segunda da caracterização da classe fundamental, $o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}$, e a terceira do fato que s_U é a restrição de s_X . Consequentemente, da caracterização da classe fundamental $o_{X, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}$, temos $e_n(o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}) = o_{X, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})}$, e portanto $o_{U, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})} = e_n^{-1}(o_{X, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})})$, de modo que:

$$\lambda(f, A) = \lambda(f, f_{UE}^{-1}(\{y_0\})) = \deg_{y_0}(f_{UE}).$$

□

O índice de raízes a valores inteiros λ é definido usando homologia com coeficientes inteiros. Agora enunciamos um teorema e definição completamente paralelos de um índice a valores em $\mathbb{Z}_2$. A definição se aplica a variedades tanto não $\mathbb{Z}$ -orientáveis quanto $\mathbb{Z}$ -orientáveis X^n - ou seja, toda variedade admite uma $\mathbb{Z}_2$ -orientação. É também mais simples, desde que os grupos locais $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}_2)$ têm geradores únicos para qualquer $x \in X^n$, de modo que não precisaremos nos preocupar com a escolha da orientação.

Teorema 92. *Seja X^n uma n -variedade e Y um espaço topológico que é n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Defina um índice de raízes próprio com valores em $\mathbb{Z}_2$, denotado por λ_2 para X^n, Y e y_0 como segue. Seja (f, A) um par propriamente admissível para X^n, Y e y_0 com $\text{Cl. } A$ compacto. Seja $N \subset X^n$ qualquer vizinhança de $\text{Cl. } A$ tal que $N \setminus A$ não tem raízes de f em y_0 , e seja $K \subset X^n$ qualquer conjunto compacto que contém A . Seja $o_{K2} \in H_n(X^n, X^n \setminus K; \mathbb{Z}_2)$ a classe fundamental de X^n em K . Considere o diagrama:*

$$(X^n, X^n \setminus K) \subset^{\iota_K} (X^n, X^n \setminus A) \supset^e (N, N \setminus A) \xrightarrow{f'} (Y, Y \setminus \{y_0\}), \quad (3.3.17)$$

onde f' é a aplicação definida por f . Então e é uma excisão e portanto induz isomorfismos em homologia de todas as dimensões, de modo que podemos definir um homomorfismo $f'_n \circ e_n^{-1} \circ \iota_{K_n} : H_n(X^n, X^n \setminus K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(Y, Y \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z}_2)$. Defina $\lambda_2(f, A) \in \mathbb{Z}_2$ como o único inteiro módulo 2 que satisfaz:

$$f'_n \circ e_n^{-1} \circ \iota_{K_n}(o_K) = \lambda_2(f, A)v, \quad (3.3.18)$$

onde v é um gerador de $H_n(Y, Y \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z}_2)$. Então $\lambda_2(f, A)$ independe da escolha de K e de N - estando sujeito apenas às condições de ser N uma vizinhança de $\text{Cl. } A$ e de ser K um conjunto compacto contendo A . Além disso, a função a valores em $\mathbb{Z}_2$, λ_2 , definida no conjunto de todos os pares propriamente admissíveis (f, A) para os quais A tem fecho compacto, se estende univocamente a um índice de raízes inteiro módulo 2, λ_2 , para X^n, Y e y_0 , que é chamado **índice inteiro módulo 2 de raízes para X^n, Y e y_0** .

A prova deste teorema é a mesma do **Teorema 87**, uma vez que naquela demonstração não particularizamos o anel comutativo com unidade sobre o qual tomávamos os coeficientes.

Também temos o:

Teorema 93. Suponha que X^n é uma n -variedade (não necessariamente orientável) e Y um espaço topológico n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Escolha uma orientação (sobre $\mathbb{Z}_2$) $s_{X^n} : X^n \rightarrow \tilde{X}$ de X^n e uma orientação local $v \in H_n(Y, Y \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z}_2)$ de Y em y_0 . Seja λ o índice de raízes em $\mathbb{Z}_2$ para X^n, Y, y_0 relativo a estas orientações. Sejam $E \subset Y$ uma vizinhança n -euclidiana de y_0 e $s_E : E \rightarrow \tilde{E}$ a orientação de E tal que $j_n(s_E(y_0)) = v$, onde j_n é o homomorfismo induzido pela inclusão $j_n : (E, E \setminus \{y_0\}) \hookrightarrow (Y, Y \setminus \{y_0\})$. Agora suponha que (f, A) seja propriamente admissível para X^n, Y e y_0 . Então existe uma vizinhança aberta U de $f^{-1}(\{y_0\}) \cap A$ tal que $f(U) \subset E$ e $U \setminus (f^{-1}(\{y_0\}) \cap A)$ não tenha raízes de f em y_0 . Seja $s_U : U \rightarrow \tilde{U}$ a restrição de s_{X^n} a U . Então, com respeito às orientações s_U e s_E ,

$$\lambda(f, A) = \deg_{y_0}(f_{UE}), \quad (3.3.19)$$

onde $f_{UE} : U \rightarrow E$ é definida por f .

A prova deste teorema é inteiramente análoga à do **Teorema 91**.

Valem também, *mutatis mutandis*, as observações 89 e 90 para $\mathbb{Z}_2$.

3.4 Classes de Nielsen na Variedade de Orientação

Nesta seção examinaremos a relação entre as classes de raízes de Nielsen de uma aplicação $f : X^n \rightarrow Y$ de uma n -variedade não orientável X^n e as classes de $f \circ \tilde{p}$, onde $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ é o revestimento de orientação de X^n .

Ao longo desta seção, $f : X^n \rightarrow Y$ será uma aplicação com X^n sendo uma n -variedade conexa não orientável e Y um espaço topológico bem conexo, $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ o revestimento de orientação de X^n , $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$ o revestimento de Hopf e $\hat{f} : X^n \rightarrow \hat{Y}$ o levantamento de Hopf para f e $\bar{q} : \bar{Y} \rightarrow \hat{Y}$ e $\bar{f} : \tilde{X} \rightarrow \bar{Y}$ o revestimento e o levantamento de Hopf para $\hat{f} \circ \tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \hat{Y}$. Ademais Além disso, por orientabilidade entenderemos $\mathbb{Z}$ -orientabilidade.

Escolha um ponto base $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, e considere os grupos fundamentais de $\tilde{X}, X^n, Y, \hat{Y}$ e $\bar{Y}$ com pontos bases em $\tilde{x}_0, \tilde{p}(\tilde{x}_0), f \circ \tilde{p}(\tilde{x}_0), \hat{f} \circ \tilde{p}(\tilde{x}_0)$ e $\bar{f}(\tilde{x}_0)$, respectivamente. Temos então os seguintes diagramas de aplicações e seus homomorfismos induzidos em grupo fundamental:

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{Y} & \\
 \bar{f} \nearrow & \downarrow \bar{q} & \\
 \tilde{X} & & \hat{Y} \\
 \downarrow \tilde{p} & \nearrow \hat{f} & \downarrow \hat{q} \\
 X^n & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \pi_1(\bar{Y}) & \\
 \bar{f}_\# \nearrow & \downarrow \bar{q}_\# & \\
 \pi_1(\tilde{X}) & & \pi_1(\hat{Y}) \\
 \downarrow \tilde{p}_\# & \nearrow \hat{f}_\# & \downarrow \hat{q}_\# \\
 \pi_1(X^n) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y)
 \end{array}
 \tag{3.4.1}$$

Teorema 94. *Com relação ao diagrama (3.4.1), $\widehat{q} \circ \overline{q}$ e $\overline{f}$ são, respectivamente, um revestimento e um levantamento de Hopf para $f \circ \widetilde{p}$, ou seja, tais que o diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} & & \overline{Y} \\ & \nearrow \overline{f} & \downarrow \widehat{q} \circ \overline{q} \\ \widetilde{X} & \xrightarrow{f \circ \widetilde{p}} & Y \end{array}$$

comuta.

Se f é orientável, então $\overline{q}$ é um revestimento duplo. Se f é não orientável, então $\overline{q}$ é um revestimento simples (i.e., um homeomorfismo), de modo que $\widehat{q}$ e $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$ são um revestimento e um levantamento de Hopf, respectivamente, para $f \circ \widetilde{p}$.

Demonstração. Para provar a primeira asserção, temos:

$$\begin{aligned} \text{im}(\widehat{q} \circ \overline{q})_{\#} &= \widehat{q}_{\#}(\text{im } \overline{q}_{\#}) = \widehat{q}_{\#} \left(\text{im}(\widehat{f} \circ \widetilde{p})_{\#} \right) = \text{im}(\widehat{q}_{\#} \circ \widehat{f}_{\#} \circ \widetilde{p}_{\#}) = \text{im}(f_{\#} \circ \widetilde{p}_{\#}) = \\ &= \text{im}(f \circ \widetilde{p})_{\#}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

A segunda igualdade segue do fato de $\overline{q}$ ser um revestimento de Hopf para $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$, e a quarta segue da comutatividade do segundo diagrama em (3.4.1). Assim, $\widehat{q} \circ \overline{q}$ e $\overline{f}$ são um revestimento e um levantamento de Hopf, respectivamente, para $f \circ \widetilde{p}$.

Para provar o restante do teorema, note que a sequência:

$$1 \longrightarrow \ker \widehat{f}_{\#} \xrightarrow{\iota} \pi_1(X^n) \xrightarrow{\widehat{f}_{\#}} \pi_1(\widehat{Y}) \longrightarrow 1 \quad (3.4.3)$$

é exata curta, e portanto induz uma sequência exata curta em grupos fundamentais:

$$1 \longrightarrow \frac{\ker \widehat{f}_{\#}}{\text{im } \widetilde{p}_{\#} \cap \ker \widehat{f}_{\#}} \longrightarrow \frac{\pi_1(X^n)}{\text{im } \widetilde{p}_{\#}} \xrightarrow{[\widehat{f}_{\#}]} \frac{\pi_1(\widehat{Y})}{\text{im}(\widehat{f}_{\#} \circ \widetilde{p}_{\#})} \longrightarrow 1. \quad (3.4.4)$$

Uma vez que $\widehat{q} : \widehat{Y} \rightarrow Y$ é uma aplicação de revestimento, $\widehat{q}_\#$ é um monomorfismo, $\ker \widehat{f}_\# = \ker \widehat{q}_\# \circ \widehat{f}_\# = \ker f_\#$, e como $\overline{q}$ é um revestimento de Hopf para $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$, então, por definição, $\text{im}(\widehat{f}_\# \circ \widetilde{p}_\#) = \text{im} \overline{q}_\#$. Fazendo estas substituições, a sequência exata se torna:

$$1 \longrightarrow \frac{\ker \widehat{f}_\#}{\text{im} \widetilde{p}_\# \cap \ker f_\#} \longrightarrow \frac{\pi_1(X)}{\text{im} \widetilde{p}_\#} \xrightarrow{[\widehat{f}_\#]} \frac{\pi_1(\widehat{Y})}{\text{im} \overline{q}_\#} \longrightarrow 1. \quad (3.4.5)$$

Agora suponha que f seja uma aplicação orientável. Então $\ker f_\# \subset \text{im} \widetilde{p}_\#$.

De fato, se $[A] \in \ker f_\# \subset \pi_1(X^n)$, então $f \circ A$ é homotópico a uma constante de Y , ou seja, é contrátil. Como f é orientável e $f \circ A$ é contrátil, então $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ é um laço que preserva orientação. Assim, seu levantamento por $\widetilde{p}$, $\widetilde{A} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{X}$, é um laço em $\widetilde{X}$, de modo que $[\widetilde{A}] \in \pi(\widetilde{X})$, ou seja, $\widetilde{p}_\#([\widetilde{A}]) = [A]$, e vale a inclusão.

Desta forma, o grupo $\frac{\ker f_\#}{\text{im} \widetilde{p}_\# \cap \ker f_\#}$ é trivial, e portanto, pela exatidão da sequência,

$$[\widehat{f}_\#] : \frac{\pi_1(X^n)}{\text{im} \widetilde{p}_\#} \longrightarrow \frac{\pi_1(\widehat{Y})}{\text{im} \overline{q}_\#}$$

é um isomorfismo, posto que $[\widehat{f}_\#]$ é uma injeção.

Como o revestimento de orientação $\widetilde{p} : \widetilde{X} \rightarrow X^n$ tem duas folhas, segue que:

$$(\pi_1(X^n) : \text{im} \widetilde{p}_\#) = 2$$

de modo que:

$$\left| \frac{\pi_1(X^n)}{\text{im} \widetilde{p}_\#} \right| = (\pi_1(X^n) : \text{im} \widetilde{p}_\#) = 2.$$

Como $\frac{\pi_1(X^n)}{\text{im} \widetilde{p}_\#}$ tem ordem 2 e $[\widehat{f}_\#]$ é um isomorfismo, $\frac{\pi_1(\widehat{Y})}{\text{im} \overline{q}_\#}$ também tem ordem 2, e portanto $\overline{q}$ é um revestimento duplo.

Finalmente, suponha que f seja não orientável. Então $\ker f_\# \not\subset \text{im} \widetilde{p}_\#$.

Com efeito, sendo f não orientável, existe um laço $A_0 : [0, 1] \rightarrow X^n$ que inverte orientação (ou seja, seu levantamento $\widetilde{A}_0 : [0, 1] \rightarrow \widetilde{X}$ não é um laço) e $f \circ A_0$ é contrátil. Deste modo, $[A_0] \in \ker f_\#$ e, não obstante, $[A_0] \notin \pi(\widetilde{X})$. Assim, $\ker f_\# \not\subset \text{im } \widetilde{p}_\#$.

O grupo $\frac{\ker f_\#}{\text{im } \widetilde{p}_\# \cap \ker f_\#}$ não é trivial, e portanto, pela exatidão da sequência, o epimorfismo:

$$[\widehat{f}_\#] : \frac{\pi_1(X^n)}{\text{im } \widetilde{p}_\#} \longrightarrow \frac{\pi_1(\widehat{Y})}{\text{im } \overline{q}_\#}$$

não é um isomorfismo por não ser injetor. Como $\frac{\pi_1(X^n)}{\text{im } \widetilde{p}_\#}$ tem ordem 2, isto implica que $\frac{\pi_1(\widehat{Y})}{\text{im } \overline{q}_\#}$ tem ordem 1, e portanto $\overline{q}$ é um revestimento simples. $\square$

No teorema a seguir, tomamos $y_0 \in Y$.

Teorema 95. *Suponha que a aplicação $f : X^n \rightarrow Y$ seja orientável. Então, para qualquer classe α de raízes de Nielsen de f em $y_0 \in Y$, $\widetilde{p}^{-1}(\alpha) = \widetilde{\alpha} \sqcup (-\widetilde{\alpha})$, onde ambos $\widetilde{\alpha}$ e $-\widetilde{\alpha}$ são classes de raízes de Nielsen de $f \circ \widetilde{p}$ em y_0 . Se $[\widetilde{\alpha}]$ é (propriamente) essencial, então α também o é.*

Demonstração. Como α é uma classe de raízes de Nielsen de f em y_0 , pelo item (2) do **Teorema 64**, existe um $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(\{y_0\})$ tal que $\widehat{f}^{-1}(\{\widehat{y}\}) = \alpha$. Como f é orientável, pelo **Teorema 94**, $\overline{q}$ é um revestimento duplo, de modo que $\overline{q}^{-1}(\{\widehat{y}\}) = \{\overline{y}, \overline{y'}\}$ para dois pontos distintos $\overline{y}$ e $\overline{y'} \in Y$.

Sejam $\widetilde{\alpha} = \overline{f}^{-1}(\{\overline{y}\})$ e $\widetilde{\alpha'} = \overline{f}^{-1}(\{\overline{y'}\})$, de modo que escrevemos:

$$\widetilde{p}^{-1}(\alpha) = \widetilde{\alpha} \sqcup \widetilde{\alpha'} \neq \emptyset,$$

onde $\widetilde{\alpha}$ é classe de raízes de Nielsen ou é vazio, bem como $\widetilde{\alpha'}$.

Para completar a prova da primeira asserção, resta-nos mostrar que $-\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha'}$.

Seja $\tilde{x} \in \tilde{\alpha}$. Então, como $\bar{q}$ é o revestimento de Hopf de $\hat{f} \circ \tilde{p}$, $\bar{q} \circ \bar{f}(-\tilde{x}) = \hat{f} \circ \tilde{p}(-\tilde{x}) = \hat{f} \circ \tilde{p}(\tilde{x}) = \bar{q} \circ \bar{f}(\tilde{x}) = \hat{y}$, de modo que $-\tilde{x} \in \bar{f}^{-1}(\bar{q}^{-1}(\{\hat{y}\})) = \bar{f}^{-1}(\{\bar{y}, \bar{y}'\}) = \bar{f}^{-1}(\{\bar{y}\}) \cup \bar{f}^{-1}(\{\bar{y}'\}) = \tilde{\alpha} \sqcup \tilde{\alpha}'$, ou seja:

$$-\tilde{x} \in \tilde{\alpha} \sqcup \tilde{\alpha}'.$$

Afirmamos primeiramente que $-\tilde{\alpha} \subset \tilde{\alpha}'$.

De fato, como X^n é não orientável, $\tilde{X}$ é uma variedade conexa, e portanto conexa por caminhos. Suponha, por absurdo, que $-\tilde{x} \in \tilde{\alpha}$. Então existe $\tilde{A} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ um caminho qualquer de $\tilde{x}$ até $-\tilde{x}$. Então $\tilde{p} \circ \tilde{A}$ é um laço, pois $\tilde{p} \circ \tilde{A}(0) = \tilde{p}(-\tilde{x}) = \tilde{p}(\tilde{x}) = \tilde{p} \circ \tilde{A}(1)$. Além disso, $\tilde{p} \circ \tilde{A} : [0, 1] \rightarrow X^n$ inverte orientação em X^n , pois $\tilde{A}(0) = \tilde{x} = -\tilde{A}(1)$. Desta forma, uma vez que f é orientável, $f \circ (\tilde{p} \circ \tilde{A})$ não é contrátil, i.e., não podemos ter $[f \circ \tilde{p} \circ \tilde{A}] = [y_0]$, ou seja, $\tilde{x}$ e $-\tilde{x}$ não são Nielsen-equivalentes. Segue-se portanto que não podem pertencer à mesma classe de raízes, de modo que $-\tilde{x} \notin \tilde{\alpha}$. Portanto só pode ocorrer $-\tilde{x} \in \tilde{\alpha}'$. Assim, $-\tilde{\alpha} \subset \tilde{\alpha}'$.

A outra inclusão, $-\tilde{\alpha}' \subset \tilde{\alpha}$ é totalmente similar.

Assim, $\tilde{\alpha}' \subset -\tilde{\alpha}$, de modo que $-\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}'$. Temos:

$$\tilde{p}^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha} \sqcup (-\tilde{\alpha}).$$

Para provar a última asserção, provaremos sua contrapositiva. Assim, suponha que α seja (propriamente) não essencial; mostraremos que $\tilde{\alpha}$ também é (propriamente) não essencial.

Como $\alpha = \hat{f}^{-1}(\{\hat{y}\})$ é (propriamente) não essencial, por definição, existe uma homotopia (própria) $\hat{h}_t : X^n \rightarrow \hat{Y}; t \in [0, 1]$ começando em $\hat{f}$ tal que $\hat{h}_1^{-1}(\{\hat{y}\}) = \emptyset$. Considere a homotopia:

$$\hat{h}_t \circ \tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \hat{Y}; t \in [0, 1],$$

que é própria porque $\tilde{p}$ tem duas folhas.

Levantamos $\hat{h}_t \circ \tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \hat{Y}; t \in [0, 1]$ a uma homotopia (própria) $\bar{h}_t : \tilde{X} \rightarrow \bar{Y}; t \in [0, 1]$ (este levantamento é próprio devido ao **Corolário 15**), começando em $\hat{f} \circ \tilde{p}$. Então $\tilde{\alpha} = \bar{f}^{-1}(\{\bar{y}\})$. Mas $\bar{h}_t^{-1}(\{\bar{y}\}) \subset \bar{f}^{-1}(\bar{q}^{-1}(\{\hat{y}\})) = \tilde{p}^{-1}(\hat{h}_1^{-1}(\{\hat{y}\})) = \emptyset$.

Desta forma, $\tilde{\alpha}$ é (propriamente) não essencial, como prometido. $\square$

O teorema a seguir caracteriza as classes de raízes de Nielsen de aplicações não orientáveis usando o revestimento de orientação e é uma consequência simples do **Teorema 94**.

Teorema 96. *Suponha que a aplicação $f : X^n \rightarrow Y$ seja não orientável. Então, para qualquer classe α de raízes de Nielsen de f em $y_0 \in Y$, $\tilde{\alpha} = \tilde{p}^{-1}(\alpha)$ é uma classe de raízes de $f \circ \tilde{p}$ em $y_0 \in Y$, e para esta classe, $\tilde{\alpha} = -\tilde{\alpha}$.*

Demonstração. Como α é uma classe de raízes de Nielsen de f em y_0 , pelo item (2) do **Teorema 64**, existe um $\hat{y} \in \hat{q}^{-1}(\{y_0\})$ tal que $\hat{f}^{-1}(\{\hat{y}\}) = \alpha$. Mostremos que existe $\bar{y} \in (\hat{q} \circ \bar{q})^{-1}(\{y_0\})$ tal que:

$$\tilde{p}^{-1}(\alpha) = \bar{f}^{-1}(\{\bar{y}\}).$$

Considere $\bar{y}$ tal que $\bar{q}(\bar{y}) = \hat{y}$. Então:

$$\hat{q} \circ \bar{q}(\bar{y}) = \hat{q}(\hat{y}) = y_0.$$

Agora, pela comutatividade do primeiro diagrama em (3.4.1), segue que:

$$\tilde{\alpha} = \tilde{p}^{-1}(\alpha) = \tilde{p}^{-1}(\hat{f}^{-1}(\{\hat{y}\})) = (\hat{f} \circ \tilde{p})^{-1}(\{\hat{y}\}) = (\bar{q} \circ \bar{f})^{-1}(\{\hat{y}\}) = \bar{f}^{-1}(\{\bar{q}^{-1}(\hat{y})\}).$$

Pelo item (2) do **Teorema 64**, segue que $\tilde{\alpha}$ é classe de raízes de Nielsen de $f \circ \tilde{p}$.

Agora, como f é não orientável, $\hat{f} \circ \tilde{p}$ e $\hat{q}$ são um levantamento e um revestimento de Hopf, respectivamente, para $f \circ \tilde{p}$.

Assim, se $\tilde{x} \in \tilde{\alpha}$, então $(\hat{f} \circ \tilde{p})(\tilde{x}) = \hat{y}$. Como $-\tilde{x}$ é tal que $(\hat{f} \circ \tilde{p})(-\tilde{x}) = \hat{f}(\tilde{p}(-\tilde{x})) = \hat{f}(\tilde{p}(x)) = \hat{y}$, segue que $-\tilde{x} \in \tilde{\alpha}$. Desta forma, $\tilde{\alpha} = -\tilde{\alpha}$, como prometido. $\square$

3.5 Multiplicidade e o Grau Absoluto

Nesta seção definiremos mais duas importantes ferramentas, a multiplicidade e o grau absoluto de uma aplicação em um ponto para variedades e aplicações não orientáveis, além de demonstrar alguns resultados bem pertinentes.

Definição 97. *Sejam X^n uma n -variedade e Y um espaço topológico bem conexo que é localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Se $f : X^n \rightarrow Y$ é uma aplicação própria, para qualquer classe de raízes de Nielsen, α , de f em y_0 , definimos a **multiplicidade de α** , denotada por $\text{mult}(f, \alpha, y_0)$, como segue:*

(1) *Se X^n é orientável, então:*

$$\text{mult}(f, \alpha, y_0) := |\lambda(f, \alpha)|. \quad (3.5.1)$$

(2) *Se X^n é não orientável, mas f é orientável, então pelo **Teorema 95**, existe uma classe de raízes $[\tilde{\alpha}]$ de $f \circ \tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow Y$ tal que $\tilde{p}^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha} \sqcup (-\tilde{\alpha})$. Então definimos:*

$$\text{mult}(f, \alpha, y_0) := |\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha})| = |\lambda(f \circ \tilde{p}, -\tilde{\alpha})|. \quad (3.5.2)$$

(3) *Se nem X^n nem f são orientáveis, então:*

$$\text{mult}(f, \alpha, y_0) = |\lambda_2(f, \alpha)|. \quad (3.5.3)$$

Observação 98. *Como estamos usando o valor absoluto de λ no caso (1), a definição é feita à revelia da escolha das orientações usadas para definir λ . No segundo caso, como a*

aplicação antipodal:

$$\begin{aligned}\eta: \tilde{X} &\rightarrow \tilde{X} \\ \tilde{x} &\mapsto -\tilde{x}\end{aligned}$$

é um homomorfismo que inverte orientação (cf. **Exemplo 47**), temos que $\lambda(f \circ \tilde{p}, \alpha) = -\lambda(f \circ \tilde{p}, -\alpha)$.

Primeiramente, como $\eta: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ inverte orientação, $-s_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = s_{\tilde{X}}(-\tilde{x})$.

De fato, sejam K um compacto qualquer tal que $K \supset \tilde{\alpha}$, e $o_K \in H_n(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus K)$ sua classe fundamental. Então $-K = \{-\tilde{x}; \tilde{x} \in K\}$ é um compacto tal que $-K \supset -\tilde{\alpha}$. Denotemos por $o_{-K} \in H_n(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus [-K])$ sua classe fundamental, ou seja, o_{-K} é tal que $\iota_{-K}(o_{-K}) = s_{\tilde{X}}(-\tilde{x})$. Assim,

$$\begin{aligned}\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha}) \cdot v &= (f \circ \tilde{p})'_n \circ e_n^{-1} \circ \iota_{Kn}(o_K) = (f \circ \tilde{p})'_n \circ e_n^{-1}(s_{\tilde{X}}(\tilde{x})) = (f \circ \tilde{p})'_n \circ e_n^{-1}(-s_{\tilde{X}}(-\tilde{x})) = \\ &= (f \circ \tilde{p})'_n \circ e_n^{-1} \circ \iota_{-Kn}(-o_{-K}) = -(f \circ \tilde{p})'_n \circ e_n^{-1} \circ \iota_{-Kn}(o_{-K}) = -\lambda(f \circ \tilde{p}, -\tilde{\alpha}) \cdot v.\end{aligned}$$

Disto conclui-se que:

$$\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha}) = -\lambda(f \circ \tilde{p}, -\tilde{\alpha}).$$

Assim, caso f seja orientável, a definição de sua multiplicidade independe da escolha de sua classe de raízes de Nielsen ser $\tilde{\alpha}$ ou $-\tilde{\alpha}$, pois:

$$\text{mult}(f, \alpha, y_0) = |\lambda(f \circ \tilde{p}, \alpha)| = |-\lambda(f \circ \tilde{p}, -\alpha)| = \text{mult}(f, -\alpha, y_0).$$

Destas considerações segue a boa definição da multiplicidade.

Observação 99. Em [3, página 57], Brown e Schrimmer definem multiplicidade usando a noção de grau. Usando o **Teorema 91**, sua definição de multiplicidade pode ser verificada de maneira simples a coincidir com os nossos casos (1) e (3). O caso (2) é um pouco mais complicado. Neste, eles primeiramente provam que α admite uma vizinhança aberta U

não contendo nenhuma raiz de f a não ser as já contidas em α , que são levadas por f em uma vizinhança conexa orientável V de y_0 . Então f define uma aplicação $f_{UV} : U \rightarrow V$. Em geral, entretanto, U não é conexo, de modo que diferentes orientações de U podem diferir em mais do que apenas o sinal. Eles descrevem um "procedimento de orientação" a fim de orientar U , e definem $\text{mult}(f, \alpha, y_0) = |\deg_{y_0}(f_{UV})|$. Pode-se mostrar que seu procedimento para encontrar uma vizinhança orientável U de α é equivalente ao seguinte: como, pelo **Teorema 95**, $\tilde{\alpha} \neq -\tilde{\alpha}$, podemos encontrar uma vizinhança $\tilde{U}$ de $\tilde{\alpha}$ disjunta de $-\tilde{U}$ que é aplicada por $f \circ \tilde{p}$ em uma vizinhança euclidiana E de y_0 . Então, uma vez que $\tilde{p}$ é um revestimento duplo, $\tilde{p}$ aplica $\tilde{U}$ homeomorficamente sobre uma vizinhança U de α . Orientamos U primeiramente restringindo uma orientação de $\tilde{X}$ a $\tilde{U}$ e, então utilizando o homeomorfismo $\tilde{p}|_{\tilde{U}}$, orientamos U . Temos agora (usando o **Teorema 91**), $|\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha})| = |\deg_{y_0}(f \circ \tilde{p})_{\tilde{U}E}| = |\deg_{y_0}(f_{UE})|$, de maneira que estas duas definições de multiplicidade são consistentes.

O teorema a seguir nos diz que as multiplicidades de duas classes de raízes de Nielsen que são $\{h_t\}$ -equivalentes, onde $\{h_t : X^n \rightarrow Y; t \in [0, 1]\}$ é uma homotopia própria, são iguais. Desta forma, poderemos decidir que duas classes de raízes de Nielsen com multiplicidades distintas serão distintas, ou seja, classificar as classes de raízes por meio de suas multiplicidades.

Teorema 100. *Seja $h_t : X^n \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ uma homotopia própria, onde X^n é uma n -variedade conexa e Y é um espaço topológico bem conexo e localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$, e suponha que α_0 seja uma classe de raízes de Nielsen de h_0 em y_0 . Se α_0 está h_t -relacionada a uma classe α_1 de raízes de Nielsen de h_1 em y_0 , então:*

$$\text{mult}(h_0, \alpha_0, y_0) = \text{mult}(h_1, \alpha_1, y_0).$$

Se α_0 não estiver h_t -relacionada a uma classe de raízes de Nielsen de h_1 , então $\text{mult}(h_0, \alpha_0, y_0) = 0$.

Demonstração. No caso em que X^n é orientável, pelo **Teorema 84**, como λ é um índice de raízes próprio:

$$\text{mult}(h_0, \alpha_0, y_0) = |\lambda(h_0, \alpha_0)| = |\lambda(h_1, \alpha_1)| = \text{mult}(h_1, \alpha_1, y_0).$$

Analogamente, no caso em que nem X^n nem f são orientáveis, pelo **Teorema 92**, λ_2 é um índice de raízes próprio e:

$$\text{mult}(h_0, \alpha_0, y_0) = |\lambda_2(f, \alpha_0)| = |\lambda_2(f, \alpha_1)| = \text{mult}(h_1, \alpha_1, y_0).$$

Resta-nos apenas o caso em que X^n é não orientável mas que h_0 (e portanto h_1) é orientável.

Sejam $\widehat{q} : \widehat{Y} \rightarrow Y$ e $\widehat{h}_t : X^n \rightarrow \widehat{Y}$ o revestimento e o levantamento de Hopf de $h_t : X^n \rightarrow Y$, e como no **Teorema 94**, $\widehat{q} \circ \overline{q} : \overline{Y} \rightarrow Y$ e $\overline{h}_t : \widetilde{X} \rightarrow \overline{Y}$ o revestimento e o levantamento de Hopf de $h_t \circ \widetilde{p}$. Como α_0 está $\{h_t\}$ -relacionado a α_1 , então para um certo $\widehat{y} \in \widehat{Y}$ temos:

$$\alpha_0 = \widehat{h}_0^{-1}(\{\widehat{y}\})$$

e

$$\alpha_1 = \widehat{h}_1^{-1}(\{\widehat{y}\}).$$

Sendo $\overline{q} : \overline{Y} \rightarrow \widehat{Y}$ um revestimento duplo (uma vez que X^n é não-orientável), podemos escrever, como na demonstração do **Teorema 95**:

$$\overline{q}^{-1}(\{\widehat{y}\}) = \{\overline{y}, \overline{y'}\}.$$

Pela comutatividade dos diagramas,

$$\widetilde{\alpha}_0 \sqcup (-\widetilde{\alpha}_0) = \widetilde{p}^{-1}(\alpha_0) = \widetilde{p}^{-1}(\widehat{h}_0^{-1}(\{\widehat{y}\})) = \overline{h}_0^{-1}(\{\overline{y}\}) \sqcup \overline{h}_0^{-1}(\{\overline{y'}\})$$

e

$$\widetilde{\alpha}_1 \sqcup (-\widetilde{\alpha}_1) = \widetilde{p}^{-1}(\alpha_1) = \widetilde{p}^{-1}(\widehat{h}_1^{-1}(\{\widehat{y}\})) = \overline{h}_1^{-1}(\{\overline{y}\}) \sqcup \overline{h}_1^{-1}(\{\overline{y'}\}),$$

e desta forma,

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha}_0 = \overline{h_0}^{-1}(\{\overline{y}\}) \\ \widetilde{\alpha}_1 = \overline{h_1}^{-1}(\{\overline{y}\}) \end{cases},$$

de modo que $\widetilde{\alpha}_0$ e $\widetilde{\alpha}_1$ estão $h_t \circ \widetilde{p}$ -relacionadas. Também:

$$\begin{cases} -\widetilde{\alpha}_0 = \overline{h_0}^{-1}(\{\overline{y'}\}) \\ -\widetilde{\alpha}_1 = \overline{h_1}^{-1}(\{\overline{y'}\}) \end{cases}$$

de modo que $-\widetilde{\alpha}_0$ e $-\widetilde{\alpha}_1$ também estão $h_t \circ \widetilde{p}$ -relacionadas.

Como sucede de $\widetilde{\alpha}_0$ estar $h_t \circ \widetilde{p}$ -relacionada com $\widetilde{\alpha}_1$, conclui-se que:

$$\text{mult}(f, \alpha_0, y_0) = |\lambda(h_0 \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha}_0)| = |\lambda(h_1 \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha}_1)| = \text{mult}(f, \alpha_1, y_0).$$

Novamente pelo **Teorema 84**, se α_0 não estiver h_t -relacionada com nenhuma classe de raízes de Nielsen de h_1 , $\lambda(h_0, \alpha_0) = \lambda(h_1, \alpha_1) = 0$ e $\lambda_2(h_0, \alpha_0) = 0$, de modo que, em qualquer dos três casos:

$$\text{mult}(h_0, \alpha_0, y_0) = 0.$$

□

A essência do corolário a seguir é o fato da multiplicidade ser preservada pela h_t -relação.

Corolário 101. *Seja $h_t : X^n \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ uma homotopia própria, onde X^n é uma n -variedade conexa e Y é um espaço topológico bem conexo que é n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Então a h_t -relação define uma bijeção entre o conjunto de classes de raízes de h_0 com multiplicidade não nula sobre o conjunto de classes de raízes de h_1 com multiplicidade não nula.*

Demonstração. Pelo item (4) do **Teorema 64**, a relação "estar h_t -relacionado" induz uma relação biunívoca entre o conjunto das classes de raízes de Nielsen de h_0 em y_0 e as

classes de raízes de Nielsen de h_1 em y_0 .

Pelo **Teorema 100**, esta bijeção também induz uma relação biunívoca entre as classes de Nielsen de multiplicidade não nula de h_0 em y_0 e as classes de Nielsen de multiplicidade não nula de h_1 em y_0 . $\square$

Corolário 102. *Seja α uma classe de raízes de Nielsen em y_0 de uma aplicação própria $f : X^n \rightarrow Y$ de uma n -variedade conexa X^n em um espaço topológico bem conexo Y que é localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Então $\text{mult}(f, [\alpha], y_0) \neq 0$ implica que α é uma classe de raízes propriamente essencial.*

Demonstração. Faremos esta prova por contraposição.

Se α não for uma classe de raízes de Nielsen propriamente essencial, existe uma homotopia própria $\{h_t : X^n \rightarrow Y; t \in [0, 1]\}$ com $h_0 = f : X^n \rightarrow Y$ e $h_1 : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação com $h_1^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$.

Caso X^n seja orientável, pelo **Corolário 85**, $\lambda(f, \alpha) = 0$, e portanto $\text{mult}(f, \alpha, y_0) = |\lambda(f, \alpha)| = 0$.

Se X^n não é orientável mas f o é, então:

$$\text{mult}(f, \alpha, y_0) = |\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha})| = 0.$$

Finalmente, se nem X^n nem f são orientáveis, então:

$$\text{mult}(f, \alpha, y_0) = |\lambda_2(f, \alpha)| = 0.$$

$\square$

Veremos posteriormente que vale uma recíproca parcial deste teorema. Mais adiante, mostraremos que pelo menos para o caso em que a dimensão da variedade, X^n , é $n > 2$,

temos que se α é propriamente essencial, então $\text{mult}(f, \alpha, y_0) \neq 0$.

Até aqui nossas ferramentas serviram para investigar o comportamento de uma aplicação em uma de suas classes de raízes de Nielsen, de modo que nos forneciam informações, a grosso modo, locais. A seguir define-se o *grau absoluto* (que mais adiante provar-se-á ser um invariante por h_t -relações) que reúne informações, agora globais, sobre as raízes de uma aplicação sob certas ressalvas.

Definição 103. *Seja $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria com X^n uma n -variedade conexa e Y um espaço topológico bem conexo que é localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$. O grau absoluto de f em y_0 é a soma das multiplicidades de todas as classes de raízes de f em y_0 . Denotamos o grau absoluto de f em y_0 por $\mathcal{A}(f, y_0)$:*

$$\mathcal{A}(f, y_0) = \sum_{\alpha \in \frac{f^{-1}(\{y_0\})}{N}} \text{mult}(f, \alpha, y_0). \quad (3.5.4)$$

Como uma consequência imediata do exposto acima, temos o seguinte corolário:

Corolário 104. *Seja $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria com X^n uma n -variedade conexa e Y um espaço topológico bem conexo que é localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Se f é propriamente homotópica a $g : X^n \rightarrow Y$, então:*

$$\mathcal{A}(f, y_0) = \mathcal{A}(g, y_0).$$

Demonstração. Como f e g são propriamente homotópicas, então se denotarmos por $\{\alpha_{0i}; i \in I\}$ o conjunto das classes de raízes de Nielsen de f em y_0 , pelo **Corolário 101**, podemos denotar o conjunto das classes de raízes de Nielsen de g em y_0 por $\{\alpha_{1i}; i \in I\}$ e supor que $\alpha_{0i}N\alpha_{1i}$ para todo $i \in I$.

Pelo **Teorema 100**, temos:

$$\text{mult}(f, \alpha_{0i}, y_0) = \text{mult}(g, \alpha_{1i}, y_0),$$

de maneira que:

$$\mathcal{A}(f, y_0) = \sum_{\alpha_{0i} \in \frac{f^{-1}(\{y_0\})}{N}} \text{mult}(f, \alpha_{0i}, y_0) = \sum_{\alpha_{1i} \in \frac{g^{-1}(\{y_0\})}{N}} \text{mult}(g, \alpha_{1i}, y_0) = \mathcal{A}(g, y_0).$$

□

Como uma consequência imediata do fato do revestimento de orientação, $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow X^n$, ser um revestimento duplo, do **Teorema 95** e das definições 97 e 103, temos o seguinte resultado:

Teorema 105. *Sejam $f: X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria orientável com X^n sendo uma n -variedade conexa e Y um espaço topológico bem conexo localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Seja $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow X^n$ o revestimento de orientação. Então:*

$$\#(f \circ \tilde{p})^{-1}(\{y_0\}) = 2 \cdot \#f^{-1}(\{y_0\}),$$

e

$$\mathcal{A}(f \circ \tilde{p}, y_0) = 2\mathcal{A}(f, y_0).$$

Demonstração. Sendo o revestimento de orientação um revestimento duplo, temos:

$$\#(f \circ \tilde{p})^{-1}(\{y_0\}) = \#(\tilde{p}^{-1}(f^{-1}(\{y_0\}))) = 2 \cdot \#f^{-1}(\{y_0\}).$$

Pelo **Teorema 95**, sabemos que as classes de raízes de Nielsen de $f \circ \tilde{p}$ são da forma $-\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ tais que $\tilde{p}(\tilde{\alpha}) = \tilde{p}(-\tilde{\alpha}) = \alpha$, onde α é uma classe de raízes de Nielsen de f . Observe que aqui $f \circ \tilde{p}$ tem o dobro do número de classes de raízes Nielsen do que f em y_0 . Desta forma, como $\tilde{X}$ é sempre orientável, pela **Definição 97**, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f \circ \tilde{p}, y_0) &= \sum_{\tilde{\alpha} \in \frac{\tilde{p}^{-1}(f^{-1}(\{y_0\}))}{N}} \text{mult}(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha}, y_0) = \sum_{\tilde{\alpha} \in \frac{\tilde{p}^{-1}(f^{-1}(\{y_0\}))}{N}} |\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha})| = \\ &= \sum_{\alpha \in \frac{f^{-1}(\{y_0\})}{N}} |\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha})| + \sum_{\alpha \in \frac{f^{-1}(\{y_0\})}{N}} |\lambda(f \circ \tilde{p}, -\tilde{\alpha})| = 2 \cdot \sum_{\alpha \in \frac{f^{-1}(\{y_0\})}{N}} \text{mult}(f, \alpha, y_0) = 2 \cdot \mathcal{A}(f, y_0). \end{aligned}$$

□

Estamos agora em condições de demonstrar que $\mathcal{A}(f, y_0)$ é um limitante inferior do número de raízes dentre as aplicações transversais a y_0 que a esta são homotópicas.

Teorema 106. *Seja $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria com X^n sendo uma n -variedade conexa e Y um espaço topológico bem conexo que é localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$. Então toda aplicação propriamente homotópica a f e transversal a y_0 tem pelo menos $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes.*

Demonstração. Suponha que $g : X^n \rightarrow Y$ seja propriamente homotópica a $f : X^n \rightarrow Y$ e transversal a y_0 . Distinguímos três casos:

Caso 1: X^n é orientável. Seja α uma classe de raízes de Nielsen de g em y_0 . Então:

$$\text{mult}(g, \alpha, y_0) = |\lambda(g, \alpha)| = \left| \sum_{x \in \alpha} \lambda(g, x) \right| \leq \sum_{x \in \alpha} |\lambda(g, x)| = \# \alpha. \quad (3.5.5)$$

A primeira igualdade se deve à definição de λ , a segunda decorre da aditividade de λ (e do fato que $\alpha = \cup_{x \in \alpha} \{x\}$), e a última igualdade segue do fato de g ser um homeomorfismo local em cada $x \in \alpha$ (uma vez que $g \pitchfork y_0$), e portanto $\lambda(g, x) = \pm 1$. Quando somamos a desigualdade em (3.5.5) sobre todas as classes de raízes de Nielsen $[\alpha]$ de g , temos:

$$\mathcal{A}(g, y_0) \leq \# g^{-1}(\{y_0\}).$$

Mas pelo **Corolário 104**, $\mathcal{A}(f, y_0) = \mathcal{A}(g, y_0)$, uma vez que f e g são propriamente homotópicas. Logo,

$$\mathcal{A}(f, y_0) \leq \# g^{-1}(\{y_0\}).$$

Caso 2: X^n é não orientável e f é orientável. Seja $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ revestimento de orientação. Uma vez que $\tilde{p}$ tem apenas duas folhas, esta é uma aplicação própria, de maneira que $f \circ \tilde{p}$ e $g \circ \tilde{p}$ são propriamente homotópicas. Como $\tilde{p}$ é uma aplicação de

revestimento e g é transversal a y_0 , e portanto, como esta é própria, $g \circ \tilde{p}$ é transversal a y_0 . Logo, usando o **Teorema 105** juntamente com o **Caso 1**, temos:

$$\mathcal{A}(f, y_0) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(f \circ \tilde{p}, y_0) \leq \frac{1}{2} \#(g \circ \tilde{p})^{-1}(\{y_0\}) = \#g^{-1}(\{y_0\}). \quad (3.5.6)$$

Caso 3: nem X^n nem f são orientáveis. A prova é a mesma do **Caso 1**, mas usa-se λ_2 no lugar de λ . $\square$

3.6 Isolando Raízes

Esta seção tem o objetivo de, dados uma aplicação própria $f : X^n \rightarrow Y$, onde X^n é uma n -variedade topológica, Y é um espaço topológico bem conexo, $y_0 \in Y$ e N é uma vizinhança qualquer de y_0 , construir uma aplicação $g : X^n \rightarrow Y$ que seja transversal a y_0 ($g \pitchfork y_0$) e uma homotopia própria entre g e f que seja constante fora de $f^{-1}(N)$. Faremos uso da Teoria de Homologia Simplicial para provar estes resultados.

Teorema 107. *Seja $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação com X^n uma n -variedade e Y um espaço topológico bem conexo que é localmente euclidiano em $y_0 \in Y$. Seja $N \subset Y$ uma vizinhança qualquer de y_0 . Então f é homotópica a uma aplicação que é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0 por uma homotopia que é constante fora de $f^{-1}(N)$.*

Demonstração. Seja E uma vizinhança n -euclidiana de y_0 tal que $E \subset N$. A prova é feita em dois passos. No primeiro passo aproximamos $f^{-1}(E)$ por um poliedro e a aplicação f por uma aproximação simplicial, e usamos esta aproximação para obter uma nova aplicação g , homotópica a f , tal que $g^{-1}(\{y_0\})$ é recoberto por uma reunião disjunta de abertos $U \subset g^{-1}(E)$, cada um dos quais contido no interior de uma n -bola B . No segundo passo usamos triangulações das bolas B a fim de obter uma aplicação homotópica a g , e portanto a f , que é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0 . Todas as homotopias serão construídas constantes fora de $f^{-1}(E)$, e portanto, fora de $f^{-1}(N)$.

No que se segue, usaremos as notações explicadas no **Apêndice 8**. Se $s \in \text{Simp}(K)$, então $\text{st}_K(s)$ denota a estrela aberta de s em K - a reunião de todos os simplexos abertos, inclusive s , que tem s como face. Se $v_0, \dots, v_k$ são vértices de simplexos de K , então $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ denota o simplexo aberto cujos vértices são $v_0, \dots, v_k$.

Passo 1. Sejam E uma vizinhança homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ de y_0 e $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ um homeomorfismo de modo que $(K_E, \text{Simp}(K_E))$ seja um complexo simplicial tal que $\mathbb{R}^n = |K_E|$. Assumimos que $\psi^{-1}(\{y_0\})$ pertence a um n -simplexo aberto s de K_E , ou seja,

$$\psi^{-1}(\{y_0\}) \in s, \text{ com } \dim(s) = n.$$

De fato, se y_0 não for imagem de um ponto de um n -simplexo aberto de $\text{Simp}(K_E)$, escolhendo-se z_0 como um ponto que pertence a um n -simplexo aberto, pode-se definir ψ' por $\psi'(z) = \psi(\psi^{-1}(y_0) + z - z_0)$, de modo que $\{\psi', K_E\}$ é uma triangulação de E e $\psi'(z_0) = \psi(\psi^{-1}(y_0) + z_0 - z_0) = \psi(\psi^{-1}(y_0)) = y_0$.

A coleção $\{\text{st}_{K_E} v : v \text{ é vértice de } K_E\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup \{\text{st}_{K_E} v : v \text{ é vértice de } K_E\}.$$

Desta maneira, temos que:

$$f^{-1}(E) = \bigcup \{f^{-1}(\psi(\text{st}_{K_E} v)) : v \text{ é vértice de } K_E\}$$

é uma cobertura aberta de $f^{-1}(E)$.

Seja agora $\mathcal{W}$ uma cobertura aberta de $f^{-1}(E)$ que cumpre as seguintes condições:

- (1) $\mathcal{W}$ é um refinamento localmente finito de $\{f^{-1}(\psi(\text{st}_{K_E} v)) : v \text{ vértice de } K_E\}$.
- (2) Para cada $W \in \mathcal{W}$ existe uma n -bola B tal que $\text{Cl. } W \subset \overset{\circ}{B}$.
- (3) O nervo de $\mathcal{W}$, $\mathcal{N}(\mathcal{W})$, tem dimensão menor ou igual a n .

Construímos uma família $\{\gamma_W : W \in \mathcal{W}\}$ de aplicações $\gamma_W : f^{-1}(E) \rightarrow [0, 1]$ com as seguintes propriedades:

- (1) $W = \{x \in f^{-1}(E) : \gamma_W(x) > 0\}$.
- (2) $\sum_{W \in \mathcal{W}} \gamma_W(x) = 1$ para todo $x \in f^{-1}(E)$.

Podemos construir tal família fazendo uso da paracompacidade de X^n , por exemplo, da seguinte forma: dado $x \in f^{-1}(E)$, como $\mathcal{W}$ é uma cobertura aberta, existe $W \in \mathcal{W}$ aberto tal que $x \in W$. Defina, primeiramente:

$$\begin{aligned} \gamma'_W : f^{-1}(E) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto d(x, X \setminus W) \end{aligned}$$

onde podemos utilizar qualquer métrica $d : X^n \times X^n \rightarrow \mathbb{R}$ que induza a topologia de X^n - que é metrizável por ser uma variedade topológica.

A seguir, definimos:

$$\begin{aligned} \gamma_W : f^{-1}(E) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \frac{\gamma'_W(x)}{\sum_{V \in \mathcal{W}} \gamma'_V(x)} . \end{aligned}$$

onde a soma acima se faz sobre um número finito de elementos da cobertura, por ser esta localmente finita.

Agora definimos uma aplicação: $v : f^{-1}(E) \rightarrow |\mathcal{N}(\mathcal{W})|$ por:

$$\begin{aligned} v : f^{-1}(E) &\rightarrow |\mathcal{N}(\mathcal{W})| \\ x &\mapsto \sum_{\{W \in \mathcal{W} : \gamma_W(x) > 0\}} \gamma_W(x) W \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Como $\mathcal{W}$ é uma cobertura de $f^{-1}(E)$ que refina $\{f^{-1}(\psi(\text{st}_{K_E} v)) : v \text{ é vértice de } K_E\}$, podemos escolher para cada $W \in \mathcal{W}$, um vértice v de K_E tal que $W \subset f^{-1}(\psi(\text{st}_{K_E} v))$. Definimos assim $\mu(W) = v$. Por linearidade μ estende-se a uma única aplicação simplicial

$\mu : \mathcal{N}(\mathcal{W}) \rightarrow K_E$.

Seja $|\mu| : |\mathcal{N}(\mathcal{W})| \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação induzida dos poliedros correspondentes.

Agora, para qualquer $x \in f^{-1}(E)$ e $W_0, \dots, W_p \in \mathcal{W}$, como $|\mu|$ é aplicação simplicial,

$$v(x) \in \langle W_0, \dots, W_p \rangle \Rightarrow |\mu| \circ v(x) \in \langle \mu(W_0), \dots, \mu(W_p) \rangle. \quad (3.6.2)$$

Mas $v(x) \in \langle W_0, \dots, W_p \rangle$ significa, por definição de nervo de uma cobertura, que:

$$x \in \bigcap_{i=0}^p W_i,$$

e como $W_i \subset f^{-1}(\psi(\text{st}_{K_E}(\mu(W_i))))$,

$$x \in \bigcap_{i=0}^p W_i \subset \bigcap_{i=0}^p f^{-1}(\psi(\text{st}_{K_E}(\mu(W_i)))) ,$$

de modo que:

$$\psi^{-1} \circ f(x) \in \bigcap_{i=0}^p \text{st}_{K_E}(\mu(W_i)).$$

Assim,

$$v(x) \in \langle W_0, \dots, W_p \rangle \Rightarrow \psi^{-1} \circ f(x) \in \bigcap_{i=0}^p \text{st}_{K_E} \mu(W_i). \quad (3.6.3)$$

Todo ponto em $\bigcap_{i=0}^p \text{st}_{K_E}(\mu(W_i))$ pertence a um simplexo que tem $\mu(W_0), \dots, \mu(W_p)$ como alguns de seus vértices. Assim, $|\mu| \circ v(x)$ é uma face do simplexo aberto que contém $\psi^{-1} \circ f(x)$. Podemos portanto usar a estrutura linear nestes simplexos para definir uma homotopia $k'_t : f^{-1}(E) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ entre $\psi^{-1} \circ (f|_{f^{-1}(E)})$ e $|\mu| \circ v$ como:

$$\begin{aligned} k' : f^{-1}(E) \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto (1 - t)\psi^{-1} \circ f(x) + t|\mu| \circ v(x). \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Por definição, para todo $x \in f^{-1}(E)$, $k'_t(x)$ está no segmento de reta que une um ponto do único simplexo aberto contendo $\psi^{-1} \circ f(x)$, que denotaremos por s , a um ponto em

uma de suas faces. Consequentemente (uma vez que não existem $(n + 1)$ -simplexos), se $k'_t(x) \in s$, também temos $\psi^{-1} \circ f(x) \in s$. A contraposição desta asserção é:

$$k'_t(f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(\psi(s))) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{s\} \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.6.5)$$

Como X^n é um espaço topológico normal, podemos tomar F uma vizinhança fechada de $X^n \setminus f^{-1}(E)$, disjunta de $\text{Cl. } f^{-1}(\psi(s))$ e uma função:

$$\beta : f^{-1}(E) \rightarrow [0, 1]$$

tal que $\beta(x) = 1$ para todo $x \in \text{Cl. } f^{-1}(\psi(s))$ e $\beta(x) = 0$ para todo $x \in F$. Defina uma homotopia $k_t : X^n \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ por:

$$\begin{aligned} k : X^n \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto k_t(x) = \begin{cases} \psi \circ k'_{\beta(x)t}(x), & \text{para } x \in f^{-1}(E), \\ f(x), & \text{para } x \in \overset{\circ}{F} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

As duas fórmulas coincidem no conjunto aberto $\overset{\circ}{F} \cap f^{-1}(E)$, de modo que pelo Lema da Colagem, k é uma aplicação contínua. Além disso, sendo F uma vizinhança de $X^n \setminus f^{-1}(E)$, temos:

$$\overset{\circ}{F} \supseteq X^n \setminus f^{-1}(E),$$

de modo que:

$$X^n \supseteq \overset{\circ}{F} \cup f^{-1}(E) \supseteq X^n \setminus f^{-1}(E) \cup f^{-1}(E) = X^n,$$

e portanto a homotopia $k_t : X^n \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ está bem definida em todo X^n . Note também que a homotopia é constante com relação a t fora de $f^{-1}(E)$, uma vez que:

$$x \notin f^{-1}(E) \Rightarrow x \in X^n \setminus f^{-1}(E) \subset \overset{\circ}{F} \Rightarrow k(x, t) = f(x), \forall t \in [0, 1].$$

Defina:

$$g: X^n \rightarrow Y$$

$$x \mapsto k_1(x) = \begin{cases} \psi \circ k'_{\beta(x)}(x), & x \in f^{-1}(E), \\ f(x), & x \in \overset{\circ}{F} \end{cases}$$

Agora mostraremos que:

$$g^{-1}(\psi(s)) = (|\mu| \circ v)^{-1}(s). \quad (3.6.7)$$

Suponha primeiramente que $x \in g^{-1}(\psi(s))$, então $g(x) \in \psi(s)$. Se ocorresse $x \in \overset{\circ}{F}$, então $g(x) = f(x)$, o que implica que $f(x) \in \psi(s)$, de modo que $x \in f^{-1}(\psi(s))$, o que é impossível uma vez que $\overset{\circ}{F} \cap f^{-1}(\psi(s)) = \emptyset$. Portanto $x \in f^{-1}(E)$, de modo que $g(x) = \psi \circ k'_{\beta(x)}(x)$.

Afirmamos que $x \in f^{-1}(\psi(s))$.

De fato, caso $x \in f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(\psi(s))$, da inclusão (3.6.5), como k'_t aplica $f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(\psi(s))$ sobre $E \setminus \psi(s)$ para todo $t \in [0, 1]$, em particular para $t = \beta(x)$, teríamos $k'_{\beta(x)}(x) \in E \setminus \psi(s)$. No entanto, $\psi \circ k'_{\beta(x)}(x) \in \psi(s)$, de maneira que só podemos ter $x \in f^{-1}(\psi(s))$.

Por conseguinte, como $\beta \Big|_{\text{Cl. } f^{-1}(\psi(s))} = 1$, $\beta(x) = 1$ e $g(x) = \psi \circ k'_1(x) = \psi \circ |\mu| \circ v(x)$, de modo que $\psi \circ |\mu| \circ v(x) \in \psi(s)$, o que implica, pelo fato de ψ ser bijeção, que $x \in (|\mu| \circ v)^{-1}(s)$.

Reciprocamente, suponha que $x \in (|\mu| \circ v)^{-1}(s)$, de modo que $k'_1(x) = |\mu| \circ v(x) \in s$ e portanto $\psi \circ k'_1(x) \in \psi(s)$. Como k'_t aplica, para todo $t \in [0, 1]$, $f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(\psi(s))$ sobre $\mathbb{R}^n \setminus s$ e $k'_1(x) \in s$, isto implica que $x \in f^{-1}(\psi(s))$ e portanto que $\beta(x) = 1$. Portanto $g(x) = k_1(x) = \psi \circ k'_{\beta(x)}(x) = \psi \circ k'_1(x) = \psi \circ |\mu| \circ v(x) \in \psi(s)$, de modo que $x \in g^{-1}(\psi(s))$. Isto prova a igualdade (3.6.7).

Como μ é uma aplicação simplicial, $|\mu|^{-1}(s)$ ou é vazio ou é reunião de n -simplexos abertos da forma $\langle W_0, \dots, W_n \rangle$. No primeiro caso, não há mais nada o que provar, uma vez que g não admite raízes em y_0 . No segundo caso, $g^{-1}(\psi(s)) = (|\mu| \circ v)^{-1}(s)$ é a reunião dis-

junta (os simplexos são abertos) de subconjuntos abertos U , onde cada $U \subset W_0 \cap \cdots \cap W_n$, para certos $(n+1)$ conjuntos $W_0, \dots, W_n \in \mathcal{W}$ - ou seja, n -simplexos de $|\mathcal{N}(\mathcal{W})|$. Seja $\mathcal{U}$ a família de todos estes conjuntos abertos U .

Note que porque:

$$g^{-1}(\{y_0\}) \subset g^{-1}(\psi(s)) \subset \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

e porque cada U é aberto, i.e., $U \cap \partial U = \emptyset$, g não tem raízes em y_0 no conjunto $\partial(\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} U)$.

Como os conjuntos U são abertos e disjuntos,

$$\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} \partial U \subset \partial \left(\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} U \right),$$

de modo que ∂U não tem raízes para todo $U \in \mathcal{U}$, pela construção. Uma vez que cada $U \in \mathcal{U}$ é um subconjunto de $W_0 \cap \cdots \cap W_n$, para certos $n+1$ conjuntos $W_0, \dots, W_n \in \mathcal{W}$, $\text{Cl. } U \subset \text{Cl. } W_0 \subset \overset{\circ}{B}$ para alguma n -bola B . Isto completa a prova do primeiro passo.

Passo 2. Novamente, seja $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ um homeomorfismo sobre uma vizinhança n -euclidiana $E \subset N$ de y_0 . Do primeiro passo, sabemos que a aplicação g é homotópica a f por uma homotopia que é constante fora de $f^{-1}(N)$, e que existe uma família $\mathcal{U}$ de conjuntos abertos disjuntos $U \subset g^{-1}(E)$ que recobrem $g^{-1}(\{y_0\})$, onde para cada $U \in \mathcal{U}$, existe uma n -bola B tal que $\text{Cl. } U \subset \overset{\circ}{B}$ e ∂U não contém nenhuma raiz de g em y_0 .

Sejam $U \in \mathcal{U}$, B uma n -bola com $\text{Cl. } U \subset \overset{\circ}{B}$, e seja $(K_B, \text{Simp}(K_B))$ um complexo simplicial tal que $(\phi : |K_B| \rightarrow B, K_B)$ é uma triangulação de B . Seja $F \subset \overset{\circ}{B}$ uma vizinhança fechada de ∂U disjunta de $g^{-1}(\{y_0\})$.

Desta forma, $\phi^{-1}(F)$ e $\phi^{-1}(g^{-1}(\{y_0\}))$ são subconjuntos compactos disjuntos de $|K_B|$, que estão, portanto, a uma distância positiva, digamos $d > 0$, um do outro. Podemos assumir, subdividindo K_B se necessário for, que a malha de K_B é igual a $\frac{d}{2}$ - ou seja, que

$$\max\{\text{diam } s; s \in \text{Simp}(K_B)\} = \frac{d}{2} < d.$$

Defina os subcomplexos K e L de K_B por:

$$K = \{\sigma \in \text{Simp}(K_B) \mid (\text{st}_{K_B} \sigma) \cap \phi^{-1}(U \cup F) \neq \emptyset\},$$

$$L = \{\sigma \in \text{Simp}(K_B) \mid (\text{st}_{K_B} \sigma) \cap \phi^{-1}(F) \neq \emptyset\}.$$

Claramente, $\phi^{-1}(U \cup F) \subset |K_B| = |K|$ e $\phi^{-1}(F) \subset |K_B| = |L|$, de modo que $\phi^{-1}(\partial U) \subset \overset{\circ}{|L|}$. Agora, se $z \in |L|$, então como $z \in \sigma$ e $(\text{st}_{K_B} \sigma) \cap \phi^{-1}(F) \neq \emptyset$, z está na face de um simplexo que intersecta $\phi^{-1}(F)$, e está, portanto, a uma distância menor que d de $\phi^{-1}(F)$, de modo que como $\text{dist}(\phi^{-1}(F), (g \circ \phi)^{-1}(\{y_0\})) = d$, $z \notin (g \circ \phi)^{-1}(\{y_0\})$. Portanto:

$$|L| \cap (g \circ \phi)^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset.$$

Assim $\psi^{-1} \circ g \circ \phi(|L|)$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ que não contém $\psi^{-1}(\{y_0\})$, de modo que existe uma distância positiva $d' > 0$ entre $\psi^{-1} \circ g \circ \phi(|L|)$ e $\psi^{-1}(\{y_0\})$, i.e.,

$$\text{dist}(\psi^{-1} \circ g \circ \phi(|L|), \psi^{-1}(\{y_0\})) = d'.$$

Seja K'_E um complexo com malha $(K'_E) = \frac{d'}{2}$ e tal que $|K'_E| = \mathbb{R}^n$. Podemos assumir que $\psi^{-1}(\{y_0\})$ está no interior de um n -simplexo aberto s' de K'_E , pois se assim não for, podemos, como no **Passo 1**, modificar ψ por uma translação de modo que o seja. Então $\psi^{-1} \circ g \circ \phi(|L|) \cap s' = \emptyset$, de maneira $\psi^{-1} \circ g \circ \phi(|L|) \subset \mathbb{R}^n \setminus s'$. Assim, $\psi \circ g \circ \phi$ define uma aplicação de pares, $g' : (|K|, |L|) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus s')$.

Pelo **Teorema da Aproximação Simplicial**, existem uma subdivisão (K', L') de (K, L) , uma aproximação simplicial $k : (K', L') \rightarrow (K'_E, K'_E \setminus s')$ de g' , e uma homotopia $k'_t : (|K'|, |L'|) = (|K|, |L|) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus s')$ entre g' e $|k|$. Como $\phi^{-1}(\partial U) \subset \overset{\circ}{|L|}$, os conjuntos fechados $\phi(|K| \setminus \overset{\circ}{|L|})$ e ∂U são disjuntos, de modo que, pelo **Lema de Urysohn**, existe

uma aplicação $\beta : B \rightarrow [0, 1]$ que vale 1 em $\phi(|K| \setminus |\overset{\circ}{L}|)$ e 0 em ∂U .

Defina uma homotopia:

$$\begin{aligned} h_U : \text{Cl. } U \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto h_{U_t}(x) = \psi \circ k'_{\beta(x)t} \circ \phi^{-1}(x). \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Afirmamos o seguinte:

- (1) $h_{U_0} = g \Big|_{\text{Cl. } U}$,
- (2) $\{h_{U_t}\}$ é constante em ∂U ;
- (3) h_{U_1} é um homeomorfismo local em cada $x \in h_{U_1}^{-1}(\{y_0\})$.

As duas primeiras asserções seguem do próprio modo como as construímos, de forma que provaremos apenas a terceira.

Seja $x \in h_{U_1}^{-1}(\{y_0\})$. Então $\psi \circ k'_{\beta(x)} \circ \phi^{-1}(x) = h_{U_1}(x) = y_0$, e por conseguinte $k'_{\beta(x)} \circ \phi^{-1}(x) = \psi^{-1}(y_0) \in s'$. Como $k'_t(|L|) \subset \mathbb{R}^n \setminus s'$ para todo $t \in [0, 1]$, devemos ter $\phi^{-1}(x) \in |K| \setminus |L| \subset |K| \setminus |\overset{\circ}{L}|$, e portanto $\beta(x) = 1$, de modo que $|k| \circ \phi^{-1}(x) = k'_1 \circ \phi^{-1}(x) = \psi^{-1}(y_0) \in s'$. Como $|k|$ é simplicial, isto implica que $\phi^{-1}(x) \in \sigma$ para algum n -simplexo aberto σ em K' , e $|k|$ aplica σ homeomorficamente sobre s' . Isto também implica que $\sigma \subset |K| \setminus |L|$. Seja $V = \phi^{-1}(\sigma) \cap U$. Então V é uma vizinhança de x .

Mostremos que h_{U_1} aplica V homeomorficamente sobre $h_{U_1}(V)$.

De fato, para qualquer $x' \in V$, temos $\phi^{-1}(x') \in \sigma \subset |K| \setminus |\overset{\circ}{L}|$, de modo que $\beta(x') = 1$.

Segue-se que $h_{U_1} \Big|_V = \psi \circ |k| \circ \phi^{-1} \Big|_V$. Além disso, como $\phi^{-1}(V) \subset \sigma$, temos $h_{U_1} \Big|_V = \psi \circ |k| \circ \phi^{-1} \Big|_V = \psi \circ \left(|k| \Big|_{\sigma} \right) \circ \left(\phi^{-1} \Big|_V \right)$.

Como cada uma das aplicações $\phi^{-1}\Big|_V, |k|\Big|_\sigma$, e ψ é um homeomorfismo sobre sua imagem, então $h_{U_1}\Big|_V$ também é um homeomorfismo. Pelo **Teorema da Invariância do Domínio de Brouwer**, $\left(h\Big|_V\right)(V)$ é aberto em E , e portanto homeomorfo ao espaço Y .

Isto prova a terceira asserção.

Fazendo tal construção para cada $U \in \mathcal{U}$, e definindo a homotopia $h_t : X \rightarrow Y$ por:

$$h_t(x) = \begin{cases} h_{U_t}(x), & \text{se } x \in \text{Cl. } U \text{ para certos } U \in \mathcal{U}, t \in [0, 1], \\ g(x), & \text{se } x \in X \setminus \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} U, t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3.6.9)$$

Então h_1 é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0 , e é homotópica a g , sendo portanto homotópica a f por uma homotopia que é constante fora de $f^{-1}(N)$, como desejado. $\square$

Para aplicações próprias, temos o seguinte resultado:

Corolário 108. *Seja $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria com X^n uma n -variedade conexa e Y um espaço topológico bem conexo que é localmente n -euclidiano em y_0 , e seja $N \subset Y$ uma vizinhança qualquer de y_0 . Então f é propriamente homotópica a uma aplicação que é transversal a y_0 por uma homotopia que é constante fora de $f^{-1}(N)$.*

Demonstração. Podemos assumir que N é compacto, pois de outra forma, poderíamos substituir N por uma vizinhança compacta de y_0 contida em N . Pelo teorema, f é homotópica a uma aplicação g que é um homeomorfismo em cada uma de suas raízes em y_0 por uma homotopia que é constante fora de $f^{-1}(N)$. Como f é própria, $f^{-1}(N)$ é compacto, e como a homotopia entre f e g é constante fora do compacto $f^{-1}(N)$, esta homotopia é própria. Assim, f é propriamente homotópica a g , e portanto, g é própria. Segue do **Teorema 28** que g é transversal a y_0 . $\square$

Combinando Raízes Isoladas

Na primeira seção deste capítulo construiremos aplicações cujo número de raízes é igual ao grau absoluto de $f : X^n \rightarrow Y$ em y_0 , sob a ressalva de ser $n > 2$ e apresentamos uma demonstração dos teoremas 1.1 e 1.2. Usaremos a Teoria de Homologia Simplicial para tanto. Na segunda seção apresentamos um exemplo de uma aplicação satisfazendo as hipóteses desses teoremas usando um CW -complexo que é uma generalização do buquê de esferas no lugar de Y .

4.1 Construções de Aplicações e Demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2

Esta seção começa com uma sucessão de lemas que serão necessários para completar as provas dos principais teoremas, a saber os teoremas 1.1 e 1.2, e termina com suas demonstrações. A prova dada aqui, apesar de mais longa, é autossuficiente, lançando mão somente da teoria aqui desenvolvida. Esta demonstração se centra no **Lema 114** abaixo, cuja ideia segue de Epstein [6], pp. 378-380. A prova do **Teorema 1.2** também está centrada no **Lema 114**. Doravante $\mathbb{B}^n$ denotará o disco fechado unitário em $\mathbb{R}^n$.

Definição 109. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo e $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ uma homotopia com $f_0 = f : X \rightarrow Y$. $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ é uma **isotopia** se para todo $t \in [0, 1]$, a aplicação $f_t : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo.*

Lema 110. *Seja Y^n uma n -variedade topológica, $A : [0, 1] \rightarrow Y^n$ um caminho qualquer e $N \supset A([0, 1])$ uma vizinhança. Então existe uma isotopia $h_t : Y^n \rightarrow Y^n, t \in [0, 1]$ tal que $h_0 = \text{id} : Y^n \rightarrow Y^n$, h_t é a aplicação identidade fora de N e:*

$$h_t(A(0)) = A(t), \forall t \in [0, 1].$$

Demonstração. Primeiramente suponha que $A : [0, 1] \rightarrow B$ é um caminho com $A([0, 1]) \subset \overset{\circ}{B}$, onde B é uma n -bola tal que $B \subset N$.

Seja $\phi : \mathbb{B} \rightarrow B$ um homeomorfismo, e seja:

$$\begin{aligned} \psi : \overset{\circ}{\mathbb{B}^n} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{x}{1 - \|x\|} \end{aligned}$$

o homeomorfismo cujo inverso é:

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \overset{\circ}{\mathbb{B}^n} \\ x &\mapsto \frac{x}{1 + \|x\|} \end{aligned}$$

Então, para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \partial \mathbb{B}^n$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi^{-1}(\psi(x) + v) = x_0,$$

de modo que podemos definir a seguinte aplicação contínua:

$$\begin{aligned} h : Y^n \times [0, 1] &\rightarrow Y^n \\ (y, t) &\mapsto \begin{cases} \phi \circ \psi^{-1}(\psi \circ \phi^{-1}(y) + \psi \circ \phi^{-1}(A(t)) - \psi \circ \phi^{-1}(A(0))), & \text{se } y \in \overset{\circ}{B} \\ y, & \text{se } y \in Y \setminus \overset{\circ}{B} \end{cases} \end{aligned}$$

Então $h_0 = \text{id} : Y^n \rightarrow Y^n$, h_t é a identidade fora de N e $h_t(A(0)) = A(t)$, para todo $t \in [0, 1]$, de modo que $\{h_t : Y^n \rightarrow Y^n, t \in [0, 1]\}$ é a isotopia desejada.

Em geral, $A : [0, 1] \rightarrow Y^n$ pode ser decomposto em uma sequência $A^1, \dots, A^m$ de caminhos, que têm traços $\text{tr } A^k = A([\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}])$:

$$\begin{aligned} A^k : [0, 1] &\rightarrow Y^n \\ t &\mapsto A\left(\frac{k-1+t}{m}\right) \end{aligned}$$

tal que $\text{tr } A^k$ está contido inteiramente no interior de alguma n -bola aberta contida em N .

Para cada A^k , construímos uma isotopia h_t^k como acima:

$$\begin{aligned} h^k : Y^n \times [0, 1] &\rightarrow Y^n \\ (y, t) &\mapsto \begin{cases} \phi \circ \psi^{-1}(\psi \circ \phi^{-1}(y) + \psi \circ \phi^{-1}(A^k(t)) - \psi \circ \phi^{-1}(A^k(0))), & \text{se } y \in \overset{\circ}{B} \\ y, & \text{se } y \in Y \setminus \overset{\circ}{B} \end{cases} \end{aligned}$$

Concatenamos as isotopias acima para definir:

$$h : Y^n \times [0, 1] \rightarrow Y^n$$

por $h_{mt}^1(y)$ para $0 \leq t \leq \frac{1}{m}$ e por:

$$\begin{cases} [h_{mt-(k-1)}^k \circ h_{k-mt}^{k-1} \circ h_{mt-(k-1)}^{k-2} \circ \dots \circ h_{k-mt}^1](y), & k \text{ par entre } 2 \text{ e } m \\ [h_{mt-(k-1)}^k \circ h_{k-mt}^{k-1} \circ h_{mt-(k-1)}^{k-2} \circ \dots \circ h_{mt-(k-1)}^1](y), & k \text{ ímpar entre } 2 \text{ e } m \end{cases}$$

para $\frac{k-1}{m} \leq t \leq \frac{k}{m}$, a fim de construir a isotopia $h_t : Y^n \rightarrow Y^n$, $t \in [0, 1]$. □

Lema 111. *Seja X^n uma n -variedade topológica com $n > 2$ e $x_0 \in X^n$. Então:*

(1) Para qualquer $x \in X^n \setminus \{x_0\}$, a inclusão:

$$k : X^n \setminus \{x_0\} \hookrightarrow X^n$$

induz um isomorfismo em grupos fundamentais:

$$k_{\#} : \pi_1(X^n \setminus \{x_0\}, x) \rightarrow \pi_1(X^n, x)$$

(2) Se $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ é caminho em X^n com $A(0) \neq x_0$ e $A(1) \neq x_0$, então A é homotópico, com extremidades fixas, a um caminho em $X^n \setminus \{x_0\}$.

Demonstração. Ad (1): Seja B uma n -bola com $x_0 \in \mathring{B}$, e escolha um ponto-base $x \in \mathring{B} \setminus \{x_0\}$. Como $n > 2$, $\mathring{B} \setminus \{x_0\}$, $\mathring{B}$ e $X \setminus \{x_0\}$ são todos conexos por caminhos, de modo que podemos aplicar o teorema de van Kampen a $\mathring{B}$, $\mathring{B} \cap (X \setminus \{x_0\}) = \mathring{B} \setminus \{x_0\}$ e $\mathring{B} \cup X^n \setminus \{x_0\} = X^n$, de modo a obter o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(X^n \setminus \{x_0\}, x) & & \\
 & \nearrow \iota_{\#} & \downarrow \iota_{\ell} & \nwarrow k_{\#} & \\
 \pi_1(\mathring{B} \setminus \{x_0\}, x) & \xrightarrow{F} & \pi_1(X^n \setminus \{x_0\}, y) * \pi_1(\mathring{B}, x) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_1(X^n, x) \\
 & \searrow j_{\#} & \uparrow \iota_r & \swarrow l_{\#} & \\
 & & \pi_1(\mathring{B}, x) & &
 \end{array}$$

onde $\iota_{\#}$, $j_{\#}$, $k_{\#}$ e $l_{\#}$ são os homomorfismos induzidos em grupo fundamental pelas inclusões, ι_{ℓ} e ι_r são as injeções no produto livre, F é uma injeção e Φ é um epimorfismo cujo núcleo é o subgrupo normal gerado pela imagem de F . Como B é simplesmente conexo, $\pi_1(\mathring{B}, x)$ é trivial, de modo que ι_{ℓ} é um isomorfismo. Agora, $\mathring{B} \setminus \{x_0\}$ é um retrato de deformação de $\mathbb{S}^{n-1}$, de modo que quando $n > 2$, $\pi_1(\mathring{B} \setminus \{x_0\}, x)$ também é trivial, e consequentemente $\ker(\Phi)$ é trivial. Desta forma, Φ é isomorfismo, de maneira que $k_{\#} = \Phi \circ \iota_{\ell}$ é também um isomorfismo.

Ad (2): Seja $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ um caminho em X^n tal que $A(0) \neq x_0 \neq A(1)$. Sejam $x = A(0)$ e $A_1 : [0, 1] \rightarrow X^n \setminus \{x_0\}$ um caminho tal que $A_1(0) = A(1)$ e $A_1(1) = x$. Então

AA_1 é um laço em X^n com ponto base em x , de modo que como $k_{\sharp}$ é epimorfismo, existe um laço $C : [0, 1] \rightarrow X^n \setminus \{x_0\}$ tal que $[C] = [AA_1]$. Então CA_1^{-1} é um caminho em $X^n \setminus \{x_0\}$ com $[CA_1^{-1}] = [A]$. $\square$

Lema 112. *Sejam X^n uma n -variedade com $n > 2$, e $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ um caminho com $A(0) = x_0$, $A(1) = x_1$, $x_0 \neq x_1$. Então existe uma n -bola $B \subset X^n$ tal que $x_0, x_1 \in \overset{\circ}{B}$ e, para todo caminho $P : [0, 1] \rightarrow B$ com $P(0) = P(1)$, $[P] = [A]$.*

Demonstração. Sejam B_0 uma n -bola com $x_0 \in \overset{\circ}{B}_0$ e $A_0 : [0, 1] \rightarrow \overset{\circ}{B}_0$ um caminho de x_0 a um ponto $x'_0 \in \overset{\circ}{B}_0 \setminus \{x_0\}$. Então $A_0^{-1}A$ é um caminho em X^n com $A_0^{-1}A(0) \neq x_0 \neq A_0^{-1}A(1)$. Pelo **Lema 111**, existe um caminho $A_1 : [0, 1] \rightarrow X^n \setminus \{x_0\}$ homotópico, com extremidades fixas, a $A_0^{-1}A$, de tal modo que $[A] = [A_0A_1]$. Uma vez que $X^n \setminus \{x_0\}$ é uma vizinhança de $tr A_1$, pelo **Teorema 110**, existe uma isotopia $h_t : X^n \rightarrow X^n, t \in [0, 1]$ tal que $A_1(t) = h_t(x'_0)$, $h_0 = \text{id} : X \rightarrow X$ e h_t é a aplicação identidade fora de $X^n \setminus \{x_0\}$, de modo que $h_t(x_0) = x_0$ para todo $t \in [0, 1]$.

Seja $B = h_1(B_0)$. Ambos $x_0 = h_1(x_0) \in \overset{\circ}{B}$ e $x_1 = h_1(x'_0) \in B$. Agora, seja $P : [0, 1] \rightarrow B$ um caminho com $P(0) = x_0$ e $P(1) = x_1$. Mostraremos que $[P] = [A]$.

Defina a homotopia de caminhos:

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X^n$$

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} h_t \circ A_0(s(2-t)), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h_{(2s-1)(1-t)+t} \circ A_0(1+st-t), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Como $h_t \circ A_0(\frac{1}{2}(2-t)) = h_t \circ A_0(1 - \frac{1}{2}t)$, a homotopia está bem definida. Assim, H é uma homotopia entre A_0A_1 e $h_1 \circ A_0$, de modo que $[A_0A_1] = [h_1 \circ A_0]$. Como $h_1 \circ A_0$ e P têm as mesmas extremidades e estão num espaço simplesmente conexo, a saber, B , então $[h_1 \circ A_0] = [P]$, logo, $[A] = [A_0A_1] = [h_1 \circ A_0] = [P]$. $\square$

Lema 113. *Suponha $n > 2$ e que Y seja localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$.*

- (1) *Qualquer caminho em Y com ponto inicial e ponto final em $Y \setminus \{y_0\}$ é homotópico em Y , relativamente às suas extremidades, a um caminho em $Y \setminus \{y_0\}$.*

(2) *Quaisquer dois caminhos em $Y \setminus \{y_0\}$ que são homotópicos relativamente às suas extremidades em Y também são homotópicos relativamente às extremidades em $Y \setminus \{y_0\}$*

Demonstração. Podemos assumir que Y é conexo por caminhos, pois se não o for, podemos substituir Y por sua componente conexa por caminhos que contém y_0 . Nestas condições, $Y \setminus \{y_0\}$ também é conexo por caminhos. Para ver isto, sejam $y_1, y_2 \in Y \setminus \{y_0\}$; Vamos encontrar um caminho em $Y \setminus \{y_0\}$ que une y_1 a y_2 . Seja A_1 um caminho em Y que une y_1 a y_2 . Se $A_1([0, 1]) \subset Y \setminus \{y_0\}$, não há nada a provar. Suponha agora que A_1 passe por y_0 . Seja B uma n -bola fechada com $y_0 \in \overset{\circ}{B}$. Então $A_1^{-1}(B) \subset [0, 1]$ é compacto, e portanto existe um mínimo em $t_{\min} \in A_1^{-1}(B)$ e um máximo $t_{\max} \in A_1^{-1}(B)$ no conjunto $A_1^{-1}(B)$. Como $y_0 \in \overset{\circ}{B}$, verifica-se facilmente que $t_{\min} < t_{\max}$. Como $n > 2$, B é conexo por caminhos, de maneira que existe um caminho A_2 em $B \setminus \{y_0\}$ que une $A_1(t_{\min})$ e $A_1(t_{\max})$. Podemos conectar y_1 a y_2 pelo caminho A_3 definido por:

$$A_3 : [0, 1] \rightarrow Y \setminus \{y_0\}$$

$$t \mapsto \begin{cases} A_1(t), & \text{para } 0 \leq t \leq t_{\min}, \\ A_2\left(\frac{t - t_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}}\right), & \text{para } t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \\ A_1(t), & \text{para } t_{\max} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Seja E uma vizinhança n -euclidiana de y_0 e seja $y \in E \setminus \{y_0\}$. Como $n > 2$, então ambos E e $E \cap (Y \setminus \{y_0\}) = E \setminus \{y_0\}$ são simplesmente conexos. Portanto, aplicando-se o Teorema de Van Kampen [veja 9, páginas 211 e 217] ao par $Y \setminus \{y_0\}$ e E vemos que a inclusão $\iota : Y \setminus \{y_0\} \hookrightarrow E \cup (Y \setminus \{y_0\}) = Y$ induz um isomorfismo em grupos fundamentais,

$$\iota_{\#} : \pi_1(Y \setminus \{y_0\}, y) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y).$$

Mostremos agora (1).

Para provar esta asserção, seja A um caminho em Y com extremidades em $Y \setminus \{y_0\}$. Sejam A_1 um caminho em $Y \setminus \{y_0\}$ que une y a $A(0)$, e A_2 um caminho em $Y \setminus \{y_0\}$ que

une $A(1)$ a y . Então $(A_1 A) A_2$ é um laço em Y com ponto base em y , de modo que, como $\iota_{\sharp}$ é sobrejetora, $[(A_1 A) A_2] = [A_3]$ para algum laço A_3 em $Y \setminus \{y_0\}$. Então $(A_1^{-1} A_3) A_2^{-1}$ é um caminho em $Y \setminus \{y_0\}$ e $[A] = [(A_1^{-1} A_3) A_2^{-1}]$.

Mostremos agora (2).

A fim de demonstrar a segunda asserção, sejam A e A' caminhos em $Y \setminus \{y_0\}$ que são homotópicos relativamente às suas extremidades em Y . Seja $A(0) = A'(0)$, e sejam A_1 um caminho em $Y \setminus \{y_0\}$ que une y a $A(0) = A'(0)$ e A_2 um caminho em $Y \setminus \{y_0\}$ que une $A(1) = A'(1)$ a y . Então $A_1(AA_2)$ e $A_1(A'A_2)$ são laços em $Y \setminus \{y_0\}$ que são homotópicos com ponto base em Y . Como $\iota_{\sharp}$ é injetivo, então estes laços são homotópicos com relação ao ponto base em $Y \setminus \{y_0\}$, e portanto A e A' são homotópicos relativamente às extremidades em $Y \setminus \{y_0\}$. $\square$

Lema 114. *Sejam $n > 2$, X^n uma n -variedade conexa, Y um espaço topológico bem conexo que é localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação. Suponha também que x_0 e x_1 sejam duas raízes isoladas de f em y_0 que estão Nielsen-relacionadas por um caminho A em X^n com $A(0) = x_0$ e $A(1) = x_1$, com $[f \circ A] = [\varepsilon_{y_0}]$ e que $N \subset X^n$ é uma vizinhança de A não contendo nenhuma raiz de f em y_0 exceto x_0 e x_1 , e que E é uma vizinhança n -euclidiana de y_0 . Então existem uma n -bola $B \subset N$, uma aplicação $g : X^n \rightarrow Y$, e uma homotopia $h_t : X^n \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ entre f e g com as seguintes propriedades:*

- (1) $\{h_t\}$ é constante em uma vizinhança de $f^{-1}(\{y_0\})$ e constante fora de N ,
- (2) $h_t^{-1}(\{y_0\}) = f^{-1}(\{y_0\})$ para todo $t \in [0, 1]$,
- (3) $g = h_1$ aplica o par $(B, \partial B)$ sobre o par $(E, E \setminus \{y_0\})$,
- (4) qualquer caminho em B de x_0 a x_1 é homotópico relativamente às extremidades em N a A .

Demonstração. Tomando uma vizinhança menor, caso necessário, podemos assumir N conexa e aberta (uma vez que X^n é localmente conexa), e portanto, uma n -variedade

conexa. Pelo **Lema 112**, existe uma n -bola $C \subset N$ tal que $x_0, x_1 \in \overset{\circ}{C}$ e qualquer caminho em C que une x_0 e x_1 é homotópico relativamente às extremidades em N a A .

Seja $\phi : \mathbb{B}^n \rightarrow C$ um homeomorfismo e fixe $x'_0 = \phi^{-1}(x_0)$ e $x'_1 = \phi^{-1}(x_1)$.

Figura 4.1: Construção em $\mathbb{B}^n$

Na figura ??, $B' \subset \overset{\circ}{\mathbb{B}^n}$ é uma n -bola euclidiana concêntrica com $\mathbb{B}^n$ que também contenha x'_0 e x'_1 em seu interior. Por bola euclidiana, queremos dizer uma bola da forma $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - z_0\| < \varepsilon\}$, não apenas homeomorfa a $\mathbb{B}^n$. Os conjuntos $C'_0, C'_1 \subset \overset{\circ}{B'}$ são bolas euclidianas centradas em x'_0 e x'_1 , respectivamente, tais que $f \circ \phi(C'_0) \subset E$, ℓ é o segmento de reta unindo x'_0 a x'_1 , respectivamente, os pontos onde ℓ intersecta $\partial C'_0$ e $\partial C'_1$ são denotados por z'_0 e z'_1 , e A' é o caminho que une z'_0 a z'_1 parametrizado por $a'(t) = (1-t)z'_0 + tz'_1$.

Construímos agora uma retração de deformação

$$r'_t : \mathbb{B}^n \setminus (\overset{\circ}{C'_0} \cup \overset{\circ}{C'_1}) \rightarrow \mathbb{B}^n \setminus (\overset{\circ}{C'_0} \cup \overset{\circ}{C'_1}) \quad (4.1.2)$$

Figura 4.2: Construção em Y

de $\mathbb{B}^n \setminus (\overset{\circ}{C}'_0 \cup \overset{\circ}{C}'_1)$ sobre $\partial C'_0 \cup \partial C'_1 \cup a'([0, 1])$. Primeiramente, defina $r'_1(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{B}^n \setminus (\overset{\circ}{C}'_0 \cup \overset{\circ}{C}'_1)$ como sendo o único ponto onde o segmento de reta ligando x ao ponto de ℓ , a ele mais próximo, intersecta $\partial C'_0 \cup \partial C'_1 \cup a'([0, 1])$. Então, para qualquer $t \in [0, 1]$, seja $r'_t(x) = (1 - t)x + tr'_1(x)$.

Usamos ϕ para "transportar" esta construção para a variedade em C , fazendo $B = \phi(B')$, $C_0 = \phi(C'_0)$, $C_1 = \phi(C'_1)$, $z_0 = \phi(z'_0)$, $z_1 = \phi(z'_1)$, $a = \phi \circ a'$, e $\{r_t\} = \{\phi \circ r'_t \circ \phi^{-1}\}$. Assim $\{r_t\}$ é uma deformação de retração de $C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1)$ sobre $\partial C_0 \cup \partial C_1 \cup a([0, 1])$, e a é um arco que une z_0 a z_1 .

Agora seja A_0 um caminho em C_0 unindo x_0 e $z_0 = a(0)$, A_1 um caminho em C_1 unindo $z_1 = a(1)$ e x_1 , e A_3 um caminho em $E \setminus \{y_0\}$ que une $f(z_0)$ e $f(z_1)$. Então consideremos a figura em Y , mostrada na figura ??.

Como $(A_0a)A_1$ é um caminho em C que une x_0 a x_1 , então pelo **Lema 112**, $[(A_0a)A_1] = [A]$, e por conseguinte $[f \circ A_0][f \circ a][f \circ A_1] = [f \circ A] = [\varepsilon_{y_0}]$. Mas $((f \circ A_0)A_3)f \circ A_1$ é um laço no espaço simplesmente conexo E , de modo que também temos $[f \circ A_0][A_3][f \circ A_1] = [\varepsilon_{y_0}]$, o que implica que $[f \circ a] = [A_3]$. Uma vez que $n > 2$ e os caminhos $f \circ a$ e A_3 estão contidos em $Y \setminus \{y_0\}$, então pela asserção (2) do **Lema 113**, estes não são apenas homotópicos relativamente às extremidades em Y , mas também são homotópicos relativamente às suas extremidades em $Y \setminus \{y_0\}$. Assim, existe uma aplicação:

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow Y \setminus \{y_0\} \\ (t, s) &\mapsto H(t, s) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

tal que $H(s, 1) = f(z_1)$, $H(1, t) = A_3(t) \in E \setminus \{y_0\}$, $H(s, 0) = f(z_0)$ e $H(0, t) = f \circ a(t)$.

Defina uma homotopia $h'_s : C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1) \rightarrow Y \setminus \{y_0\}$ por:

$$\begin{aligned} h' : [C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1)] \times [0, 1] &\rightarrow Y \setminus \{y_0\} \\ (x, s) &\mapsto h'_s(x) = \begin{cases} f \circ r_{2s}(x) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, x \in C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1), \\ f \circ r_1(x) & \text{para } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, x \in r_1^{-1}(\partial C_0 \cup \partial C_1), \\ H(2s - 1, a^{-1}(r_1(x))), & \text{para } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, x \in r_1^{-1}(a([0, 1])) \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Na última fórmula, $a^{-1}(r_1(x))$ denota o valor de t para o qual $a(t) = r_1(x)$. Isto faz sentido uma vez que $x \in r_1^{-1}(a([0, 1]))$, e portanto $a^{-1}(r_1(x))$ é uma função contínua de $x \in r_1^{-1}(a([0, 1]))$. As duas últimas fórmulas coincidem na interseção de seus domínios, $(x, s) \in r_1^{-1}(\{z_0, z_1\}) \times [\frac{1}{2}, 1]$, e este conjunto é fechado em $X^n \times [0, 1]$. A primeira fórmula coincide com as duas últimas quando $s = \frac{1}{2}$, e o conjunto $X^n \times \{\frac{1}{2}\}$ também é fechado em $X^n \times [0, 1]$. Assim, pelo **Lema da Colagem**, $h'_s(x)$ é uma função contínua bem definida para $(x, s) \in X^n \times [0, 1]$.

Seja, agora, $\beta : X^n \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação tal que $\beta(x) = 1$ se $x \in B$ e $\beta(x) = 0$ se $x \in X^n \setminus \overset{\circ}{C}$. Defina a homotopia $h_t : X^n \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ por:

$$h : X^n \times [0, 1] \rightarrow Y$$

$$(x, t) \mapsto h_t(x) = \begin{cases} h'_{\beta(x)t}(x), & \text{para } x \in C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1), t \in [0, 1]; \\ f(x), & \text{para } x \in (X \setminus \overset{\circ}{C}) \cup C_0 \cup C_1. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

As duas fórmulas têm o conjunto $(x, t) \in (\partial C \cup \partial C_0 \cup \partial C_1) \times [0, 1]$ como domínio em comum, e facilmente verifica-se que neste conjunto estas coincidem. Assim, $h : X^n \times [0, 1] \rightarrow Y$ está bem definida, e é contínua em todo $(x, t) \in X^n \times [0, 1]$. Seja $g = h_1$. Agora verificaremos as asserções (1), (2), (3) e (4) do lema.

Por sua própria definição, h_t é constante com relação a t em $X^n \setminus (C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1))$, que é uma vizinhança de $f^{-1}(\{y_0\})$. Também, $C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1) \subset N$, de maneira que h_t é constante com relação a t fora de N . Isto prova a asserção (1).

Uma vez que h é definida em termos de h' e de H , como $f \circ r_s$ não tem raízes em y_0 (pois o domínio de r_{2s} exclui todas as raízes de f em y_0 para $s \in [0, \frac{1}{2}]$), e como H tampouco tem raízes em y_0 (pois a imagem de H exclui y_0 [veja (3.6.3)]), segue que a aplicação $h_s : X^n \rightarrow Y$ não tem raízes em $C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1)$. Ademais, como já vimos, $\{h_t\}$ é constante com relação a t em $f^{-1}(\{y_0\})$. Por conseguinte, o único conjunto em que tanto f quanto h_s admitem raízes é $\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1$, e para todo $s \in [0, 1]$, $h_s^{-1}(\{y_0\}) = f^{-1}(\{y_0\})$ para todo $s \in [0, 1]$. Isto verifica a asserção (2).

Da definição de h'_s , vemos que como $C \setminus [\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1] = r_1^{-1}(a([0, 1])) \cup r_1^{-1}(\partial C_0 \cup \partial C_1)$, caso $x \in r_1^{-1}(a([0, 1]))$, $h'_1(x) = H(a^{-1}(r_1(x)), 1) = A_3(a^{-1}(r_1(x))) \in A_3([0, 1])$, e caso $x \in r_1^{-1}(\partial C_0 \cup \partial C_1)$, $h'_1(x) = f \circ r_1(x) \in f(\partial C_0 \cup \partial C_1)$, temos que $h'_1(C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1)) = f(\partial C_0 \cup \partial C_1) \cup A_3([0, 1]) \subset E \setminus \{y_0\}$.

Como $\beta(x) = 1$ para $x \in B$, isto implica que $h_1(B \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1)) = h'_1(B \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1)) \subset h'_1(C \setminus (\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1)) \subset E \setminus \{y_0\}$. Como $\partial B \subset C \setminus [\overset{\circ}{C}_0 \cup \overset{\circ}{C}_1]$, tem-se $h_1(\partial B) \subset E \setminus \{y_0\}$. Também, por (3.6.5), $h_1(C_0 \cup C_1) = f(C_0 \cup C_1) \subset E$. Logo $g = h_1$ aplica o par $(B, \partial B)$ sobre o par $(E, E \setminus \{y_0\})$, o que verifica a asserção (3).

Qualquer caminho D de x_0 a x_1 também é um caminho em C de x_0 a x_1 , portanto, pela construção de C , deve ser homotópico relativamente às extremidades ao caminho A . Isto verifica a asserção (4). $\square$

Lema 115. *Suponha $n \geq 1$, X^n uma n -variedade conexa, Y um espaço topológico bem conexo e localmente euclidiano em $y_0 \in Y$, $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação, B uma n -bola em X^n tal que $f(B) \subset E$ para alguma vizinhança n -euclidiana de y_0 , E , e ∂B não contenha raízes de f em y_0 . Então existe uma homotopia $h_t : X^n \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ tal que:*

$$(1) \ h_0 = f,$$

$$(2) \ h_t \text{ é constante igual a } f \text{ fora de } \overset{\circ}{B},$$

$$(3) \ B \text{ contém exatamente uma raiz de } h_1 \text{ em } y_0.$$

Demonstração. Seja $\phi : \mathbb{B}^n \rightarrow B$ e $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ homeomorfismos com $\psi(0) = y_0$. Defina $h_1 : X^n \rightarrow Y$ por:

$$h_1 : X^n \rightarrow Y$$

$$x \mapsto h_1(x) = \begin{cases} \psi \left(\|\phi^{-1}(x)\| \psi^{-1} \circ f \circ \phi \left(\frac{\phi^{-1}(x)}{\|\phi^{-1}(x)\|} \right) \right), & \text{para } x \in B, \phi^{-1}(x) \neq 0, \\ y_0, & \text{para } x \in B, \phi^{-1}(x) = 0, \\ f(x), & \text{para } x \notin B. \end{cases}$$

$$(4.1.6)$$

Então é fácil ver que h_1 é contínua, uma vez que as leis coincidem nas interseções dos domínios e:

$$\lim_{\phi^{-1}(x) \rightarrow 0} \psi \left(\|\phi^{-1}(x)\| \cdot \psi^{-1} \circ f \circ \phi \left(\frac{\phi^{-1}(x)}{\|\phi^{-1}(x)\|} \right) \right) = \psi(0) = y_0,$$

pois, sendo B compacta e $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$ contínua, existe $K > 0$ tal que

$$\|\psi^{-1} \circ f \circ \phi(x)\| \leq K, \quad \forall x \in B,$$

de maneira que:

$$\lim_{\phi^{-1}(x) \rightarrow 0} \|\phi^{-1}(x)\| \cdot \psi^{-1} \circ f \circ \phi \left(\frac{\phi^{-1}(x)}{\|\phi^{-1}(x)\|} \right) = 0.$$

Além disso, f e h_1 coincidem fora de $\overset{\circ}{B}$, pois para $x \in \partial B$:

$$\psi \left(\overbrace{\|\phi^{-1}(x)\|}^{=1} \cdot \psi^{-1} \circ f \circ \phi \left(\frac{\phi^{-1}(x)}{\|\phi^{-1}(x)\|} \right) \right) = \psi(\psi^{-1} \circ f \circ \phi(\phi^{-1}(x))) = f(x),$$

e para $x \in X \setminus B$ as duas leis coincidem por definição.

Além disso, $\phi(0)$ é a única raiz de h_1 em y_0 em B , uma vez que se $\phi^{-1}(x) \neq 0$, $\frac{\phi^{-1}(x)}{\|\phi^{-1}(x)\|} \in \partial \mathbb{B}^n$, de modo que $\phi(\frac{\phi^{-1}(x)}{\|\phi^{-1}(x)\|}) \in \partial B$, e por hipótese f não tem raízes em y_0 neste conjunto.

Defina uma homotopia $\{h_t : X \rightarrow Y; t \in [0, 1]\}$ entre f e h_1 por:

$$h_t(x) = \begin{cases} \psi((1-t)\psi^{-1} \circ f(x) + t\psi^{-1} \circ h_1(x)), & \text{para } x \in B, t \in [0, 1], \\ f(x), & \text{para } x \notin B, t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4.1.7)$$

Como $f(x) = h_1(x)$ para $x \in \partial B$, então h_t é uma homotopia bem definida entre f e h_1 . A homotopia é evidentemente constante fora de $\overset{\circ}{B}$. $\square$

Lema 116. *Sejam $n > 2$ e $k : (\mathbb{B}^n, \partial \mathbb{B}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ uma aplicação cujo homomorfismo induzido $k_n : H_n(\mathbb{B}^n, \partial \mathbb{B}^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$ seja trivial. Então existe uma homotopia $\ell_t : (\mathbb{B}^n, \partial \mathbb{B}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que:*

$$(1) \quad \ell_0 = k,$$

$$(2) \quad \ell_t \text{ é constante com relação a } t \text{ em } \partial \mathbb{B}^n,$$

(3) $\ell_1(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Demonstração. Escolha um ponto base $b_0 \in \partial\mathbb{B}^n$, seja $e_0 = k(b_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e considere o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0) & \xrightarrow{k_{\pi n}} & \pi_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_0) \\ \text{Hurewicz} \downarrow & & \downarrow \text{Hurewicz} \\ H_n(\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{k_n} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \end{array} \quad (4.1.8)$$

onde $k_{\pi n}$ e k_n são os homomorfismos induzidos por k em grupos de homotopia e em homologia, respectivamente.

Observe que, como $p < n$ e $n > 2$, $\pi_p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_0) \simeq \{0\}$, e sendo a sequência:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_0) \rightarrow \underbrace{\pi_p(\mathbb{R}^n, e_0)}_{\simeq \{0\}} \rightarrow \pi_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_0) \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\partial} \underbrace{\pi_{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_0)}_{\simeq \{0\}} \rightarrow \pi_{p-1}(\mathbb{R}^n, e_0) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

exata, concluímos que:

$$\pi_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_0) \simeq \{0\}, \quad \forall p < n,$$

de modo que o par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é $(n-1)$ -conexo.

Pelo **Teorema 4.37** de [21], segue que o homomorfismo de Hurewicz à direita é, na verdade, um isomorfismo e que $H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) = 0$ para $p < n$.

A identidade $\text{id} : (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0) \rightarrow (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0)$ representa um elemento:

$$[\text{id}] \in \pi_n(\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0),$$

cuja imagem por $k_{\pi n}$ é $[k \circ \text{id}] = [k] \in \pi_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R} \setminus \{0\}, e_0)$. Uma vez que $k_{\pi n}$ é trivial, então pela propriedade funtorial do grupo de homotopia, temos $[k] = [e_0]$, de modo que existe uma homotopia $h_t : (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_0)$ tal que $h_0 = k$ e $h_1(\mathbb{B}^n) = e_0$. Usaremos a homotopia h_t para construir a homotopia desejada, $\{\ell_t\}$.

Pelo **Teorema 11** o conjunto $C = \bigcup_{t \in [0,1]} h_t^{-1}(\{0\})$ é compacto, e portanto fechado em B . Como $h_t(\partial\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para todo $t \in [0,1]$, então $C \cap \partial\mathbb{B}^n = \emptyset$, de modo que existe uma aplicação de Urysohn $\beta : \mathbb{B}^n \rightarrow [0,1]$ que vale 0 em $\partial\mathbb{B}^n$ e vale 1 em C . Defina a homotopia $\ell_t : (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ por $\ell_t(x) = h_{\beta(x)t}$ para todo $(x,t) \in \mathbb{B}^n \times [0,1]$. Claramente, ℓ_t satisfaz as propriedades (1) e (2) do lema. Suponha, contrariando (3), que $\ell_1(x) = 0$ para algum $x \in \mathbb{B}^n$. Então, pela definição de ℓ , temos $h_{\beta(x)}(x) = 0$, de maneira que, pela definição de C , temos $x \in C$. Portanto $\beta(x) = 1$, de modo que $\ell_1(x) = h_1(x) = e_0 \neq 0$. Tal contradição prova a asserção (3). $\square$

Observação 117. *A conclusão do Lema 116 é verdadeira mesmo se $n = 1, 2$. Entretanto, aquela apenas será necessária para $n > 2$.*

Notemos que no lema acima só tratamos da homotopia no interior de uma bola. Vamos usá-lo no lema a seguir para definir uma homotopia entre funções cujo domínio é toda a variedade X^n .

Lema 118. *Sejam $n > 2$, X^n uma n -variedade conexa orientável, Y um espaço topológico bem conexo e $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria. Suponha que $E \subset Y$ é uma vizinhança n -euclidiana de $y_0 \in Y$, e que $B \subset X^n$ é uma n -bola tal que $f(B) \subset E$, $f(\partial B) \subset E \setminus \{y_0\}$, e $\lambda(f, \overset{\circ}{B}) = 0$, onde λ é o índice de raízes inteiro para X^n, Y e y_0 relativamente a alguma orientação s_{X^n} de X^n e uma orientação μ de Y em y_0 . Nestas condições, existe uma homotopia $h_t : X^n \rightarrow Y; t \in [0,1]$ tal que $h_0 = f$, h_t é constante fora de B , e $h_1(B) \subset E \setminus \{y_0\}$.*

Note que, como f é própria e h_t é constante fora de um conjunto compacto B , então h_t é própria.

Demonstração. Usamos o seguinte diagrama, no qual x é um ponto arbitrário em $\overset{\circ}{B}$, N é uma vizinhança de B tal que $N \setminus \overset{\circ}{B}$ não contém raízes, as aplicações f' e f'' são definidas por restrições de f , e todas as outras aplicações são inclusões:

$$\begin{array}{ccccc} (X^n, X^n \setminus B) & \subset & (X^n, X^n \setminus \overset{\circ}{B}) & \supset & (N, N \setminus \overset{\circ}{B}) \xrightarrow{f'} (Y, Y \setminus \{y_0\}) \\ & & \cap_j & & \cup & & \cup \\ & & (X, X \setminus \{x\}) & & (B, B \setminus \partial B) \xrightarrow{f''} (E, E \setminus \{y_0\}) \end{array} \quad (4.1.9)$$

Seja $o_B \in H_n(X^n, X^n \setminus B; \mathbb{Z})$ a classe fundamental em B (usando a orientação s_{X^n}). Então por definição de classe fundamental, $(j \circ \iota)_n(o_B) = s_{X^n}(x) \in H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$. Uma vez que $s_{X^n}(x)$ gera o grupo cíclico infinito $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, então $(j \circ \iota)_n$ é sobrejetor.

Como B é conexo, de acordo com [4, Corolário 3.4, página 260], $H_n(X^n, X^n \setminus B; \mathbb{Z})$ também é cíclico infinito. Segue que $(j \circ \iota)_n$ é um isomorfismo e que o_X gera $H_n(X^n, X^n \setminus B; \mathbb{Z})$. Agora, $X^n \setminus \overset{\circ}{B}$ é um retrato de deformação de $X^n \setminus \{x\}$, de maneira que $j_n : H_n(X^n, X^n \setminus B; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ é um isomorfismo. Logo, $\iota_n : H_n(X^n, X^n \setminus B; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X^n, X^n \setminus \overset{\circ}{B}; \mathbb{Z})$ também é um isomorfismo. Assim $H_n(N, N \setminus \overset{\circ}{B}; \mathbb{Z})$ é cíclico infinito gerado por $e_n^{-1} \circ \iota_n(o_X)$. Uma vez que $f'_n(e_n^{-1} \circ \iota_n(o_X)) = \lambda(f, \overset{\circ}{B})\mu = 0\mu = 0$, segue que $f'_n = 0$. A inclusão $(E, E \setminus \{y_0\}) \hookrightarrow (Y, Y \setminus \{y_0\})$ é uma excisão e, portanto, induz isomorfismos em homologia. Como $f'_n = 0$, também teremos $f''_n = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X^n, X^n \setminus B; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota_n} & H_n(X^n, X^n \setminus \overset{\circ}{B}; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\cong_{e_n}} & H_n(N, N \setminus \overset{\circ}{B}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f'_n} & H_n(Y, Y \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z}) \\ & \searrow \cong_{(j \circ \iota)_n} & \downarrow \cong_{j_n} & & \uparrow & & \uparrow \cong \\ & & H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) & & H_n(B, B \setminus \partial B; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f''_n} & H_n(E, E \setminus \{y_0\}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Como $f_n'' = 0$, podemos usar o **Lema 116** para construir uma homotopia $\{h_t' : (B, \partial B) \rightarrow (E, E \setminus \{y_0\})\}$ tal que $h_0' = f''$, $\{h_t'\}$ é constante em ∂B e h_0' não tem raízes em y_0 . Defina a homotopia desejada por:

$$H : X^n \times [0, 1] \rightarrow Y$$

$$(x, t) \mapsto h_t(x) = \begin{cases} h_t'(x), & \text{para } (x, t) \in B \times [0, 1], \\ f(x), & \text{para } (x, t) \in (X \setminus B) \times [0, 1]. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Observe que H é contínua, já que h_t' coincide com f em ∂B , e é constante igual a f fora de B por construção. $\square$

A seguir, uma demonstração dos teoremas 1.1 e 1.2, os principais teoremas desta dissertação.

Teorema 1.1. *Sejam X^n uma n -variedade topológica conexa, Y um espaço topológico bem conexo e $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria. Se $y_0 \in Y$ admite uma vizinhança homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, então toda aplicação propriamente homotópica a f que é transversal a y_0 tem, no mínimo, $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes. Além disso, se $n > 2$, existe uma aplicação propriamente homotópica a f e transversal a y_0 que admite exatamente $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0 .*

Demonstração. Suponha que $f : X^n \rightarrow Y$ seja uma aplicação própria, X^n seja uma n -variedade conexa, Y é um espaço bem conexo que é n -euclidiano em y_0 . Pelo **Teorema 106**, toda aplicação propriamente homotópica a f e transversal a y_0 tem, pelo menos $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes. Para provar o resto do teorema, assumamos que $n > 2$; mostraremos que existe uma aplicação propriamente homotópica a f e transversal a y_0 que não tem mais do que $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes.

Pelo **Corolário 108** existe pelo menos uma aplicação propriamente homotópica a f e transversal a y_0 , bastando tomar N como a vizinhança n -euclidiana de y_0 . Toda

aplicação propriamente homotópica a f que é transversal a y_0 tem um número finito de raízes neste ponto, já que todas as raízes desta aplicação própria são isoladas. Assim,

$$\emptyset \neq \{\sharp g^{-1}(\{y_0\}) \mid g \text{ é propriamente homotópica a } f \text{ e } g \pitchfork y_0\} \subset \mathbb{N}.$$

Pelo Princípio da Boa Ordenação, este conjunto admite um elemento minimal, ou seja, deve existir uma aplicação $f_{\min}$ propriamente homotópica a f e transversal a y_0 que tem, dentre todas tais aplicações, o menor número de raízes. Chame tal aplicação de **minimal**.

Precisamos mostrar que $\sharp f_{\min}^{-1}(\{y_0\}) \leq \mathcal{A}(f, y_0)$. Para fazer isto, assumiremos que ocorre o contrário, ou seja, que $\sharp f_{\min}^{-1}(\{y_0\}) > \mathcal{A}(f, y_0)$, e mostraremos que $f_{\min}$ não é minimal, o que é uma contradição.

Como:

$$\sum_{\alpha \in \frac{f_{\min}^{-1}(\{y_0\})}{N}} \sharp \alpha = \sharp f_{\min}^{-1}(\{y_0\}) > \mathcal{A}(f_{\min}, y_0) = \sum_{\alpha \in \frac{f_{\min}^{-1}(\{y_0\})}{N}} \text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0),$$

deve existir uma classe de raízes α tal que $\sharp \alpha > \text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0)$. A fim de mostrar que $f_{\min}$ não é minimal, consideraremos três casos: X^n orientável, X^n não orientável mas $f_{\min}$ orientável, e finalmente o caso em que $f_{\min}$ é não orientável.

Caso 1. (X^n é orientável). Uma vez que $f_{\min}$ é transversal a y_0 , $f_{\min}$ é um homeomorfismo local em cada raiz $x \in \alpha$, de modo que $\deg_{y_0}(f_{\min}) = \pm 1$. Pelo **Teorema 91**, segue que $\lambda(f_{\min}, x) = \pm 1$ para cada $x \in \alpha$. Segue-se que, uma vez que $\sharp \alpha > \text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) = |\sum_{x \in \alpha} \lambda(f_{\min}, x)|$, devem existir no mínimo duas raízes, digamos x_0 e x_1 em α tais que $\lambda(f_{\min}, x_0) + \lambda(f_{\min}, x_1) = 0$. Encontraremos uma homotopia de $f_{\min}$ que elimina estas duas raízes. Ressaltamos que é aqui que usamos a hipótese $n > 2$.

Seja E uma vizinhança n -euclidiana de y_0 , e seja A um caminho em X^n que une x_0 a x_1 tal que $[f_{\min} \circ A] = [y_0]$. Como $f_{\min}$ tem apenas um número finito de raízes, podemos

aplicar o enunciado (1) do **Lema 113**, com X^n no lugar de Y , um número finito de vezes para encontrar um caminho homotópico relativamente às extremidades a A que não passa por nenhuma outra raiz a não ser x_0 e x_1 .

De fato, seja $x_3 \in X^n$ uma outra raiz de $f_{\min}$ em y_0 , diferente de x_0 e de x_1 . Como $n > 2$ e as extremidades de $A : [0, 1] \rightarrow X^n$ são $x_0, x_1 \in X^n \setminus \{x_3\}$, pelo **Lema 113**, existe um caminho $A_3 : [0, 1] \rightarrow X^n \setminus \{x_3\}$ homotópico a A . Tomando x_4 uma raiz de $f_{\min}$ em y_0 diferente de x_1 e de x_2 , podemos usar os mesmos argumentos, agora fazendo $Y = X \setminus \{x_3\}$, para deduzir que existe um caminho $A_4 : [0, 1] \rightarrow X \setminus \{x_3, x_4\}$. Continuando este processo até exaurir todas as raízes de $f_{\min}$ (que compõem um conjunto finito de cardinalidade, digamos, k), obtemos um caminho $\bar{A} : [0, 1] \rightarrow X^n \setminus \{x_3, \dots, x_k\}$ homotópico a A .

Devido ao fato de X^n ser espaço de Hausdorff e paracompacto, $\text{Cl.}(A[0, 1])$ admite uma vizinhança compacta, N , que é disjunta do conjunto fechado $f_{\min}^{-1}(\{y_0\}) \setminus \{x_0, x_1\}$. Assim, podemos aplicar o **Lema 114** com $f_{\min}$ no lugar de f para encontrar uma n -bola $B \subset N$, uma aplicação $g : X^n \rightarrow Y$, e uma homotopia h_t entre $f_{\min}$ e g com as propriedades enumeradas naquele lema. Como h_t é constante fora do conjunto compacto N , esta é uma homotopia própria, e como h_t é constante em uma vizinhança de $f^{-1}(\{y_0\}) = g^{-1}(\{y_0\})$, então g também é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes. Uma vez que para cada $t \in [0, 1]$, h_t não tem raízes em ∂B (porque é uma aplicação de pares), temos pelas propriedades de homotopia e aditividade do índice, $\lambda(g, \overset{\circ}{B}) = \lambda(f_{\min}, \overset{\circ}{B}) = \lambda(f_{\min}, x_0) + \lambda(f_{\min}, x_1) = 0$. Agora aplicamos o **Lema 118**, com g no lugar de f para encontrar uma outra homotopia $\{h'_t\}$ que é constante fora de B tal que $h'_0 = g$ e h'_1 não tem raízes em y_0 dentro de B . Então h'_1 coincide com g em $X^n \setminus B$ e não tem nenhuma raiz em B , de modo que tem duas raízes a menos que $f_{\min}$. Esta também é propriamente homotópica a $f_{\min}$ e é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes. Portanto, como h'_1 é própria e transversal a y_0 , concluímos que pelo fato de ter $\#f_{\min}^{-1}(\{y_0\}) - 2$ raízes, $f_{\min}$ não é minimal, o que é um absurdo.

Caso 2. (X^n é não orientável mas $f_{\min}$ é orientável). Seja $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ um revestimento de orientação para X^n , e $\tilde{\alpha}$ uma classe de raízes de $f_{\min} \circ \tilde{p}$ em y_0 . Pelo **Teorema 95**, $\tilde{p}$ é um revestimento e $\tilde{p}^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha} \sqcup (-\tilde{\alpha})$. Desta forma, $\tilde{p} \Big|_{\tilde{\alpha}} : \tilde{\alpha} \rightarrow \alpha$ aplica $\tilde{\alpha}$ de forma biunívoca sobre α , de modo que $\sharp \tilde{\alpha} = \sharp \alpha > \text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) = |\lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha})|$. Como $\tilde{p}$ é um revestimento e $f_{\min}$ é transversal a y_0 , segue que $f_{\min} \circ \tilde{p}$ é um homeomorfismo local em cada $\tilde{x} \in \tilde{\alpha}$.

De fato, como $f_{\min} \pitchfork y_0$, y_0 admite uma vizinhança V para a qual existe uma família:

$$\{V_x \subset X \mid x \in f^{-1}(\{y_0\})\}$$

de subconjuntos mutuamente disjuntos de X^n tal que:

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{x \in f^{-1}(\{y_0\})} V_x,$$

onde cada V_x é uma vizinhança de x aplicada homeomorficamente por f sobre V . Denotemos por $f_x = f \Big|_{V_x} : V_x \rightarrow V$ os homeomorfismos.

Por seu turno, para cada $x \in f^{-1}(\{y_0\})$ existe uma vizinhança W_x e vizinhanças disjuntas, $\widetilde{W}_x$ e $\widetilde{-W}_x$ tais que:

$$\tilde{p} \Big|_{\widetilde{W}_x} : \widetilde{W}_x \rightarrow W_x$$

e

$$\tilde{p} \Big|_{\widetilde{-W}_x} : \widetilde{-W}_x \rightarrow W_x$$

são homeomorfismos. Considere, então, para cada $x \in f^{-1}(\{y_0\})$ a vizinhança $U_x = V_x \cap W_x$, que é aberta e é aplicada homeomorficamente sobre $f(V_x \cap W_x) = f_x(V_x \cap W_x)$, que é um aberto, pelo **Teorema da Invariância do Domínio de Brouwer**. Por outro lado, $\tilde{p}^{-1}(U_x) = \tilde{p}^{-1}(U_x) \cap \widetilde{W}_x \sqcup \tilde{p}^{-1}(U_x) \cap \widetilde{-W}_x$, onde:

$$\tilde{p} \Big|_{\tilde{p}^{-1}(U_x) \cap \widetilde{W}_x} : \tilde{p}^{-1}(U_x) \cap \widetilde{W}_x \rightarrow U_x$$

e

$$\tilde{p} \Big|_{\tilde{p}^{-1}(U_x) \cap \widetilde{-W_x}} : \tilde{p}^{-1}(U_x) \cap \widetilde{-W_x} \rightarrow U_x$$

são homeomorfismos. Considere, então $f_x \circ \tilde{p} \Big|_{\tilde{p}^{-1}(U_x) \cap \widetilde{-W_x}}$ e $f_x \circ \tilde{p} \Big|_{\tilde{p}^{-1}(U_x) \cap \widetilde{-W_x}}$, que são os homeomorfismos locais cujos domínios são vizinhanças dos pontos $\tilde{x}$ e $-\tilde{x}$, como afirmamos.

Então, como $f_{\min} \circ \tilde{p}$ é orientável, devido ao **Caso 1**, encontramos duas raízes, $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1$, digamos, em $\tilde{\alpha}$ tais que $\lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0) + \lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1) = 0$. Como as raízes estão Nielsen-relacionadas, podemos considerar $\tilde{A}$ um caminho em $\tilde{X}$ que une $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$ e tal que $[f_{\min} \circ \tilde{p} \circ \tilde{A}] = [\varepsilon_{y_0}]$. Seja $A = \tilde{p} \circ \tilde{A}$, $x_0 = \tilde{p}(\tilde{x}_0)$ e $x_1 = \tilde{p}(\tilde{x}_1)$, de modo que A é um caminho em X^n que une x_0 e x_1 tal que $[f_{\min} \circ A] = [\varepsilon_{y_0}]$.

Uma vez que $n > 2$, podemos, argumentando como no **Caso 1**, assumir que $\tilde{A}$ não passa por nenhuma das raízes de $f_{\min} \circ \tilde{p}$ diferentes de $\tilde{x}_0$ e de $\tilde{x}_1$, e portanto A não passa por nenhuma raiz de $f_{\min}$ a não ser x_0 e x_1 . Seja N uma vizinhança compacta de $A([0, 1])$ que não contém nenhuma raiz de $f_{\min}$ que não seja x_0 e x_1 , e apliquemos o **Lema 114** com $f_{\min}$ no lugar de f para encontrar uma n -bola $B \subset N$, uma aplicação $g : X^n \rightarrow Y$, e uma homotopia h_t entre $f_{\min}$ e g com as propriedades enumeradas no **Lema 114**. Como B é simplesmente conexa, então é uniformemente revestida. Seja $\tilde{B}$ a componente de $\tilde{p}^{-1}(B)$ que contém $\tilde{x}_0$. Neste caso, $\tilde{x}_1 \in \tilde{B}$. Para ver isto, seja A' um caminho em B que une x_0 a x_1 . Então $[A'] = [A]$. Como $(\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1} \circ A'$ e $\tilde{A}$ são levantamentos de A' e A que começam em $\tilde{x}_0$, segue da unicidade do levantamento que $[(\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1} \circ A'] = [\tilde{A}]$, e portanto segue que $\tilde{x}_1 = \tilde{A}(1) = (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1} \circ A'(1) \in \tilde{B}$. Aplicamos agora o **Lema 118** com $\tilde{B}$ no lugar de B e $g \circ \tilde{p}$ no lugar de f para encontrar uma homotopia $\tilde{h}_t : \tilde{X} \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ que começa em $g \circ \tilde{p}$, é constante fora de $\tilde{B}$ e é tal que $\tilde{h}_1$ não tem raízes em $\tilde{B}$. Defina uma homotopia $h_t : X \rightarrow Y; t \in [0, 1]$ começando em g :

$$H : X^n \times [0, 1] \rightarrow Y$$

$$(x, t) \mapsto h_t(x) = \begin{cases} \tilde{h}_t \circ (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1}(x), & \text{para } (x, t) \in B \times [0, 1], \\ g(x), & \text{para } (x, t) \notin B \times [0, 1] \end{cases} \quad (4.1.11)$$

A homotopia acima é constante fora de B , de modo que é própria. Desta forma, como esta homotopia se inicia em g e termina em h_1 , e g é propriamente homotópica a $f_{\min}$, segue que h_1 é propriamente homotópica a $f_{\min}$.

Como $\tilde{h}_1$ não tem raízes em $\tilde{B}$ (onde originalmente tínhamos duas raízes da aplicação $f_{\min} \circ \tilde{p}$), a aplicação $h_1|_B = \left(\tilde{h}_1|_{\tilde{B}} \circ \tilde{p}|_{\tilde{B}} \right)^{-1} = \left(h_1|_B \circ \tilde{p}|_{\tilde{B}} \right) \circ \left(\tilde{p}|_{\tilde{B}} \right)^{-1} = h_1|_B$ não tem raízes em B . Desta forma, segue que h_1 tem duas raízes a menos que $f_{\min}$. Também temos que $h_1|_B$ é transversal a y_0 por vacuidade. Fora de B , h_1 coincide com g , a qual, por *construção*, coincide com f . *Ipsa facto*, h_1 é transversal a y_0 .

Assim, $f_{\min}$ não é minimal, o que completa a prova do **Caso 2**.

Caso 3 ($f_{\min}$ é não orientável). Neste caso, $\text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) = |\lambda_2(f, \alpha)|$, de modo que $\text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0)$ ou é 0 ou é 1. Como $f_{\min}$ é um homeomorfismo local em cada raiz, então $\lambda_2(x) = [1] \in \mathbb{Z}_2$ para cada $x \in \alpha$. Assim, se $\text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) = 0$, $[\alpha]$ contém um número par maior que 0 de raízes. Por outro lado, como $\sharp\alpha > \text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0)$, se $\text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) = 1$, α contém duas raízes ou mais. Portanto, neste caso, podemos encontrar duas raízes distintas $x_0, x_1 \in \alpha$. Seja $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow X^n$ o revestimento de orientação de X^n . Seja $\tilde{x}_0 \in \tilde{p}^{-1}(\{x_0\})$ e $\tilde{x}_1 \in \tilde{p}^{-1}(\{x_1\})$. Assim, como $f_{\min}$ é não orientável, o **Teorema 96** implica que todos os quatro pontos $\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0, \tilde{x}_1$ e $-\tilde{x}_1$ são raízes Nielsen-relacionadas de $f_{\min} \circ \tilde{p}$ em y_0 . Também $f_{\min} \circ \tilde{p}$ é um homeomorfismo local em cada raiz, de modo que o índice de raízes inteiro em cada uma destas raízes é ± 1 . Como $\tilde{x} \mapsto -\tilde{x}$ é um homeomorfismo que inverte orientação de $\tilde{X}$, então $\lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1) = -\lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, -\tilde{x}_1)$. Portanto, ou bem $\lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0) + \lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1) = 0$ ou bem $\lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0) + \lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, -\tilde{x}_1) = 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0) + \lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1) = 0$ (se não for este o caso, substituimos $\tilde{x}_1$ por $-\tilde{x}_1$). A prova agora prossegue exatamente como no **Caso 2**. $\square$

Para f não orientável, o **Teorema 1.1** tem o seguinte corolário:

Corolário 119. *Sejam $n > 2$, X^n uma n -variedade conexa não orientável, Y um espaço topológico bem conexo que é localmente n -euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria não orientável. Então:*

$$(1) \text{ } PNR(f, y_0) = \mathcal{A}(f, y_0),$$

$$(2) \text{ } \text{Uma classe } \alpha \text{ de raízes de Nielsen de } f \text{ em } y_0 \text{ é propriamente essencial se, e somente se } \text{mult}(f, \alpha, y_0) \neq 0$$

Demonstração. Seja:

$$S_{\neq 0} = \{\alpha; \text{mult}(f, \alpha, y_0) \neq 0\},$$

ou seja, $S_{\neq 0}$ é o conjunto de todas as classes de raízes de Nielsen de f em y_0 que têm multiplicidade não nula. Seja também:

$$S_{\text{ess}} = \{\alpha; \alpha \text{ é classe de Nielsen propriamente essencial de } f \text{ em } y_0\}.$$

Primeiramente, provamos que:

$$PNR(f, y_0) \leq \mathcal{A}(f, y_0) = \#S_{\neq 0} \leq \#S_{\text{ess}} = PNR(f, y_0). \quad (4.1.12)$$

De fato, $PNR(f, y_0)$ é um limitante inferior do número de raízes de f que é invariante por homotopias próprias. De acordo com o teorema anterior, existe uma aplicação propriamente homotópica a f que tem $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0 . Isto justifica a primeira desigualdade (não estrita). Uma vez que f é não orientável, cada uma de suas classes de raízes tem multiplicidade 0 ou 1, e como o grau absoluto é a soma destas multiplicidades, temos a primeira igualdade acima. Como toda classe de Nielsen com multiplicidade não nula é essencial, segue que $S_{\neq 0} \subset S_{\text{ess}}$. Isto justifica a segunda desigualdade. A última igualdade é a própria definição de $PNR(f, y_0)$.

Desta forma,

$$PNR(f, y_0) = \mathcal{A}(f, y_0).$$

Também, de (4.1.12), temos $\sharp S_{\neq 0} = \sharp S_{\text{ess}}$, e como $S_{\neq 0} \subset S_{\text{ess}}$ e os conjuntos são finitos, isto prova que $S_{\neq 0} = S_{\text{ess}}$, que é a segunda asserção. $\square$

Teorema 1.2 *Sejam X^n uma n -variedade topológica conexa, Y um espaço bem conexo e $f : X^n \rightarrow Y$ uma aplicação própria. Se $y_0 \in Y$ admite uma vizinhança homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, então toda aplicação propriamente homotópica a f e transversal a y_0 admite, no mínimo, $\text{PNR}(f, y_0)$ raízes em y_0 , e toda classe de raízes de Nielsen de f em y_0 com multiplicidade não nula é propriamente essencial. Ademais, se $n > 2$, então existe uma aplicação propriamente homotópica a f que tem exatamente $\text{PNR}(f, y_0)$ raízes em y_0 , e uma classe de raízes de f é propriamente essencial apenas quando tiver multiplicidade não zero.*

Demonstração. Mais uma vez, assuma que $f : X^n \rightarrow Y$ seja uma aplicação própria. Já vimos que toda aplicação propriamente homotópica a f tem, no mínimo, $\text{PNR}(f, y_0)$ raízes em y_0 (**Teorema 1.1** e **Corolário 119**) e toda classe de raízes de Nielsen de f em y_0 com multiplicidade não nula é propriamente essencial (**Corolário 102**). Resta mostrar que se $n > 2$, então:

- (1) existe uma aplicação propriamente homotópica a f que tem exatamente $\text{PNR}(f, y_0)$ raízes em y_0 ,
- (2) uma classe de raízes de f é propriamente essencial somente se tiver multiplicidade não nula.

Para aplicações não orientáveis, estas duas asserções seguem do **Teorema 1.1** e do **Corolário 119**, de modo que precisamos considerar apenas aplicações orientáveis.

Chamaremos uma aplicação de **minimal** se nenhuma outra aplicação propriamente homotópica a ela tiver um número menor de raízes. Então, uma vez que existem aplicações propriamente homotópicas a f com apenas um número finito de raízes, sabemos que existe uma aplicação minimal, $f_{\min}$, e que esta tem somente finitas raízes.

Primeiramente mostremos que cada classe de raízes de $f_{\min}$ tem apenas um elemento. Suponha, por absurdo, que uma classe de raízes α admita duas raízes distintas, digamos $x_0, x_1 \in \alpha$. Seja A um caminho em X^n que une x_0 a x_1 tal que $[f \circ A] = [\varepsilon_{y_0}]$. Como $n > 2$ e $f_{\min}^{-1}(\{y_0\})$ é finito, podemos aplicar o enunciado (1) do **Lema 113** um número finito de vezes para garantir que A não "passa" por nenhuma raiz de f diferente de x_0 e x_1 . Existe então uma vizinhança compacta N de $A([0, 1])$ que não contém nenhuma raiz de f a não ser x_0 ou x_1 . Agora aplicamos o **Lema 114** com $f_{\min}$ no lugar de f para encontrar uma n -bola $B \subset N$, uma aplicação $g : X^n \rightarrow Y$ e uma homotopia $\{h_t\}$ que começa em g e é constante fora de B tal que h_1 tem apenas uma raiz em B . Então h_1 é propriamente homotópica a $f_{\min}$ e tem menos raízes que esta - o que contraria sua minimalidade. Este absurdo prova que toda classe de raízes de f tem exatamente um elemento.

Agora mostraremos que cada classe de raízes de $f_{\min}$ tem multiplicidade não nula. Seja $\alpha = \{x\}$ uma classe de raízes de $f_{\min}$ e suponha, por absurdo, que tenhamos $\text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) = 0$. Seja E uma vizinhança n -euclidiana de $y_0 \in Y$. Nestas condições, x admite uma n -bola B como vizinhança tal que $f_{\min}(B) \subset E$ e $f_{\min}(\partial B) \subset E \setminus \{y_0\}$. Consideraremos dois casos: X^n orientável e X^n não orientável mas f orientável. (O caso em que f é não orientável é contemplado pelo corolário anterior).

Caso 1 (X^n orientável.) Como $|\lambda(f_{\min}, \alpha)| = \text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) = 0$, por aditividade temos $\lambda(f_{\min}, \overset{\circ}{B}) = \lambda(f_{\min}, \alpha) = 0$. Assim, podemos aplicar o **Lema 118** com $f_{\min}$ no lugar de f para encontrar uma homotopia $\{h_t\}$ que é constante fora de B tal que $h_0 = f_{\min}$ e h_1 não tem raízes de y_0 em B . Então h_1 coincide com $f_{\min}$ em $X \setminus B$ e não tem raízes em B , de modo que tem menos raízes que $f_{\min}$. Esta aplicação também é propriamente homotópica a $f_{\min}$, uma vez que $f_{\min}$ é própria e $\{h_t\}$ é constante fora do conjunto compacto B . Isto contraria a minimalidade de $f_{\min}$ e mostra portanto que o que realmente temos é que $\text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) \neq 0$.

Caso 2 (X^n é não orientável e $f_{\min}$ é orientável). Sejam $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X^n$ um revestimento de orientação de X^n . Como B é simplesmente conexo, este é uniformemente revestido por

$\tilde{p}$, de modo que existe uma n -bola $\tilde{B} \subset \tilde{X}$ tal que $\tilde{p}$ aplica $\tilde{B}$ e $-\tilde{B}$ homeomorficamente sobre B . Sejam $\tilde{\alpha} = (\tilde{p}|\tilde{B})^{-1}(\alpha)$, de modo que $\tilde{\alpha} = \{(\tilde{p}|\tilde{B})^{-1}(\alpha)\}$ e $-\tilde{\alpha}$ são duas classes de raízes de Nielsen de $f_{\min} \circ \tilde{p}$ que são aplicadas por $\tilde{p}$ sobre α . Então $|\lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha})| = \text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) = 0$, de modo que temos, por aditividade, $\lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \tilde{\tilde{B}}) = \lambda(f_{\min} \circ \tilde{p}, \alpha) = 0$. Podemos usar o **Lema 118** $f_{\min} \circ \tilde{p}$ no lugar de f e $\tilde{B}$ no lugar de B para encontrar uma homotopia $\{\tilde{h}_t\}$ que é constante fora de $\tilde{B}$ tal que $\tilde{h}_0 = f_{\min} \circ \tilde{p}$ e $\tilde{h}_1$ não tem nenhuma raiz de y_0 em B . Defina $\{h_t : X^n \rightarrow Y; t \in [0, 1]\}$ por:

$$H : X^n \times [0, 1] \rightarrow Y$$

$$(x, t) \mapsto h_t(x) = \begin{cases} \tilde{h}_t \circ (\tilde{p}|\tilde{B})^{-1}(x), & \text{para } (x, t) \in B \times [0, 1], \\ f_{\min}(x), & \text{para } (x, t) \notin B \times [0, 1]. \end{cases} \quad (4.1.13)$$

Então h_1 é propriamente homotópica a $f_{\min}$, tem o mesmo número de raízes que $f_{\min}$ fora de B , mas não admite raízes em B . Isto contradiz a minimalidade de $f_{\min}$ e completa a prova de que $\text{mult}(f_{\min}, \alpha, y_0) \neq 0$ para todas as classes de raízes de Nielsen de $f_{\min}$.

Como cada classe de raízes de $f_{\min}$ tem multiplicidade não nula, então cada classe de raízes é propriamente essencial. Assim, $f_{\min}$ tem apenas $PNR(f_{\min}, y_0) = PNR(f, y_0)$ classes de raízes. Como cada classe de raízes tem apenas uma raiz, então $f_{\min}$ tem apenas $PNR(f_{\min}, y_0) = PNR(f, y_0)$ raízes. Isto prova a primeira asserção.

Agora seja $S_{\neq 0}(f)$ o conjunto das classes de raízes de f que têm multiplicidade não nula, e seja $S_{\text{ess}}(f)$ o conjunto das classes de raízes essenciais de f , e similarmente sejam definidos estes mesmos objetos para $f_{\min}$. Então:

$$PNR(f, y_0) = \sharp f_{\min}^{-1}(\{y_0\}) = \sharp S_{\neq 0}(f_{\min}) = \sharp S_{\neq 0}(f) \leq \sharp S_{\text{ess}}(f) = PNR(f, y_0). \quad (4.1.14)$$

Aqui, as primeiras duas igualdades são exatamente o que nós provamos, a terceira segue do **Corolário 101**, a desigualdade segue do **Corolário 102**, que implica que $S_{\neq 0}(f) \subset S_{\text{ess}}(f)$, e a última igualdade é a própria definição de PNR . Assim, os dois conjuntos

finitos $S_{\neq 0}(f) \subset S_{\text{ess}}$ têm a mesma cardinalidade, portanto, devem ser iguais. Isto prova a segunda asserção. $\square$

4.2 Um exemplo.

Esta seção tem o objetivo de ilustrar a teoria desenvolvida nas seções anteriores por meio de um exemplo. Claramente que a teoria aqui desenvolvida abrange o caso em que Y^n é variedade. A fim de ilustrar o poder da teoria desenvolvida por Brooks em [20], vamos considerar uma aplicação própria cujo contradomínio não é uma n -variedade topológica, mas apresenta singularidades, ou seja, pontos que não admitem vizinhanças n -euclidianas. Este exemplo também mostra o fato de que, enquanto na teoria clássica de raízes os números de raízes de Reidemeister e de Nielsen coincidem quando este é não-nulo, na teoria desenvolvida em [20], o número de Reidemeister pode ser maior que o de Nielsen. Também quando o contradomínio não é uma n -variedade, classes de Nielsen podem apresentar essencialidades distintas.

Exemplo 120. *Seja $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$, e sejam $S = (0, \dots, 0, -1)$ e $N = (0, \dots, 0, 1)$ seus pólos sul e norte, respectivamente. Suponha $n \geq 2$. Para cada inteiro positivo k , seja $k\mathbb{S}^n$ o espaço obtido tomando k cópias de $\mathbb{S}^n$ e identificando o polo norte de cada uma ao polo sul da seguinte. Mais formalmente, defina uma relação de equivalência $\approx$ em $\{1, \dots, k\} \times \mathbb{S}^n$ por $(z, N) \approx (z+1, S)$ para $z = 1, \dots, k-1$ e seja $k\mathbb{S}^n = (\{1, \dots, k\} \times \mathbb{S}^n) / \approx$. Assim, em particular, $2\mathbb{S}^n$ é o buquê de duas esferas.*

Existe uma aplicação natural de $\mathbb{S}^n$ em $2\mathbb{S}^n$ obtida por colapsar o equador de $\mathbb{S}^n$ em um ponto. Generalizamos isto para uma aplicação $g : \mathbb{S}^n \rightarrow k\mathbb{S}^n$. Primeiramente, para cada $z = 1, \dots, k$, seja:

$$X_z = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid \frac{2(z-1)}{k} - 1 \leq x_{n+1} \leq \frac{2z}{k} - 1\}. \quad (4.2.1)$$

Defina $g_z : X_z \rightarrow \mathbb{S}^n$ por:

$$g_z : \begin{array}{ccc} X_z & \rightarrow & \mathbb{S}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto & \begin{cases} (0, \dots, 0, -1), & \text{se } z = 1, x_{n+1} = -1, \\ (0, \dots, 0, 1), & \text{se } z = k, x_{n+1} = 1, \\ \left(\sqrt{\frac{1 - \alpha_z^2(x_{n+1})}{1 - x_{n+1}^2}}(x_1, \dots, x_n), \alpha_z(x_{n+1}) \right) & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{array} \quad (4.2.2)$$

onde $\alpha_z(x) = k(x+1) - 2z + 1$. Desta forma g_z leva X_z sobre $\mathbb{S}^n$ por colapsar as latitudes $x_{n+1} = 2(z-1)/k - 1$ e $x_{n+1} = 2z/k - 1$ nos pólos sul e norte, respectivamente, e aplicando o resto de X_z homeomorficamente sobre o resto de $\mathbb{S}^n$. Agora defina:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^n &\rightarrow k\mathbb{S}^n \\ x &\mapsto [(z, g_z(x))] \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

para $x \in X_z, z = 1, \dots, k$, onde os colchetes denotam a classe de equivalência de $(z, g_z(x))$ em $k\mathbb{S}^n = \{1, \dots, k\} \times \mathbb{S}^n / \approx$.

Para todo inteiro $d \in \mathbb{Z}$, seja $h_d : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma aplicação com grau de Brouwer d que deixam os pólos norte e sul fixados. Então, para qualquer sequência $(d_1, \dots, d_k)$ de inteiros, a aplicação $(z, x) \mapsto (z, h_{d_z}(x))$ de $\{1, \dots, k\} \times \mathbb{S}^n$ em si próprio induz uma auto-aplicação de $k\mathbb{S}^n$, que denotamos por $h_{d_1, \dots, d_k} : k\mathbb{S}^n \rightarrow k\mathbb{S}^n$.

Seja agora $\mathbb{Z}\mathbb{S}^n = \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^n / \approx$, onde $(z, N) \approx (z+1, S)$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. A inclusão $\{1, \dots, k\} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^n$ induz uma injeção $i : k\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{S}^n$.

Denote por $\mathbb{S}^n / \{S, N\}$ o espaço quociente formado por $\mathbb{S}^n$ identificando seus pólos norte e sul. Então a projeção $(z, x) \mapsto x$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{S}^n$ sobre $\mathbb{S}^n$ induz uma aplicação $\hat{q} : \mathbb{Z}\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / \{S, N\}$, que é facilmente verificada como sendo uma aplicação de revestimento. De fato, $\hat{q}$ é o revestimento universal de $\mathbb{S}^n / \{S, N\}$.

Seja $\widehat{f} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{Z}\mathbb{S}^n$ a composição $\widehat{f} = i \circ h_{d_1, \dots, d_k} \circ g$, e seja $f = \widehat{q} \circ \widehat{f}$. Desta forma, $\widehat{f}$ é um levantamento de f por $\widehat{q}$, ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{Z}\mathbb{S}^n \\ & \nearrow \widehat{f} & \downarrow \widehat{q} \\ \mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & k\mathbb{S}^n \end{array}$$

Escolha um ponto $y_0 \in \mathbb{Z}/\{S, N\} \setminus \{S, N\}$ e denote os pontos em $\widehat{q}^{-1}(\{y_0\})$ por $\widehat{y}_z$, onde $\widehat{y}_z \in \{z\} \times \mathbb{S}^n$ para cada $z \in \mathbb{Z}$. Uma ilustração para $k = 3$ é mostrado na figura 4.3.

Uma vez que tanto $\mathbb{S}^n$ quanto $\mathbb{Z}\mathbb{S}^n$ são simplesmente conexos, as imagens de seus grupos fundamentais por $f_{\sharp}$ e $\widehat{q}_{\sharp}$, respectivamente, são (trivialmente) iguais, de modo que $\widehat{q}$ é um **revestimento de Hopf** e $\widehat{f}$ é um **levantamento de Hopf** para f . Assim, cada um dos conjuntos $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_z)$ ou é vazio ou é uma classe de raízes de Nielsen de f em y_0 . Suponha $d_z \neq 0$ para $z = 1, \dots, \ell \leq k$ e $d_z = 0$ para $z = \ell + 1, \dots, k$.

Como $k\mathbb{S}^n$ é uma n -variedade conexa orientável, o índice de raízes inteiro coincide com o grau de Brouwer, de modo que:

$$\lambda(f, \widehat{f}^{-1}(\{\widehat{y}_z\})) = d_z \neq 0,$$

e por conseguinte cada uma das classes $\widehat{f}^{-1}(\{\widehat{y}_z\})$ para $1 \leq z \leq \ell$ é essencial. Para outros valores de z , ou bem $\widehat{f}^{-1}(\{\widehat{y}_z\}) = \emptyset$ ou $\ell < z \leq k$ e $d_z = 0$. Neste último caso, existe uma homotopia entre $\widehat{f}$ e uma aplicação $\widehat{f}'$ tais que: $\widehat{f}'^{-1}(\{\widehat{y}_z\}) = \emptyset$. Assim $\widehat{f}^{-1}(\{\widehat{y}_z\})$ é não-essencial (ou vazia). Segue que o **número de raízes de Nielsen de f** é $NR(f, y_0) = \ell$. Como $\mathbb{S}^n$ é compacto, este número é também o **número próprio de raízes de Nielsen de f** , $PNR(f, y_0)$.

O índice para o espaço $\mathbb{S}^n$ é

$$\lambda(f, \mathbb{S}^n) = \sum_{z=1}^k \lambda(f, \widehat{f}^{-1}(\{\widehat{y}_z\})) = d_1 + \dots + d_k.$$

A **multiplicidade** da classe $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_z)$ é $\text{mult}(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_z), y_0) = |\lambda(f, \widehat{f}^{-1}(\{\widehat{y}_z\}))| = |d_z|$, e o **grau absoluto de f em y_0** é a soma das multiplicidades:

$$\mathcal{A}(f, y_0) = |d_1| + \cdots + |d_k|.$$

Toda aplicação homotópica a f tem, pela definição do número de Nielsen, *no mínimo* $NR(f, y_0) = \ell$ raízes em y_0 . Por outro lado, partindo do que sabemos para aplicações de esferas, para todo $d \neq 0$, existe uma aplicação homotópica a $h_d : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ por uma homotopia constante em S e em N que tem apenas uma raiz em $\widehat{y}_0$. Estas aplicações podem ser usadas para definir uma aplicação homotópica a f que tem exatamente $\ell = NR(f, y_0) = PNR(f, y_0)$ raízes. Vimos que toda aplicação homotópica a f e **transversal** a y_0 tem, no mínimo, $\mathcal{A}(f, y_0) = |d_1| + \cdots + |d_k|$ raízes. Por outro lado, cada aplicação $h_d : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ é homotópica por uma homotopia constante em S e N a uma aplicação que é transversal a $\widehat{y}_0$ e tem exatamente $|d|$ raízes. Estas aplicações podem ser usadas a fim de definir uma aplicação homotópica a f e transversal a y_0 que tem exatamente $\sum_{z=1}^k |d_z| = \mathcal{A}(f, y_0)$ raízes.

O **número de raízes de Reidemeister**, $RR(f)$ de f é o índice da imagem do grupo fundamental de $\mathbb{S}^n$ por f no grupo fundamental de $\mathbb{S}^n \setminus \{S, N\}$. Neste exemplo $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa e $\mathbb{S}^n/\{S, N\}$ tem grupo fundamental cíclico infinito, de modo que $RR(f) = \infty$.

Este exemplo nos é de interesse particular, uma vez que como as aplicações são de n -variedades com $n > 2$, $NR(f, y_0)$ é um limitante inferior estrito para o número de raízes de f' em y_0 sobre todas as aplicações f' homotópicas a f e transversais a y_0 . Porém, diferentemente de aplicações de variedades, as classes de raízes podem ter multiplicidades diferentes, e algumas podem ser essenciais enquanto outras podem não o ser. Além disso, neste exemplo, $RR(f) > NR(f, y_0)$, enquanto para aplicações de variedades, $RR(f) = NR(f, y_0)$ sempre que $NR(f, y_0) > 0$.

Figura 4.3: Exemplo com $k = 3$.

Homologia Simplicial

Esta seção serve ao propósito de apresentar importantes conceitos e resultados da teoria de homologia simplicial. A principal referência usada para desenvolver esta seção é [22].

A ideia da Teoria de Homologia Simplicial é associar uma sequência de R -módulos a um dado espaço topológico, chamada **homologia simplicial**, e usá-la para investigar as propriedades topológicas e geométricas destes espaços.

Definição 121. *Os pontos $x_0, x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ são geometricamente independentes se os vetores $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_r - x_0$ são linearmente independentes.*

A motivação da definição de independência geométrica é dada na seguinte:

Observação 122. *Um conjunto $A = \{a_0, a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{R}^n$ é geometricamente independente se, e somente se, todos os seus pontos são distintos, quaisquer três deles não estão em uma mesma reta, quaisquer quatro deles não estão em um mesmo plano e, assim por diante, quaisquer r pontos não estão contidos em um mesmo $(r - 2)$ -hiperplano.*

Definição 123. Dados os pontos $x_0, x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$, uma **combinação afim** destes pontos é uma expressão do tipo:

$$p = \alpha_0 \cdot x_0 + \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_r \cdot x_r$$

com $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = 1$. Se além disso tivermos $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_r \geq 0$, então p é uma **combinação convexa** dos pontos $x_0, x_1, \dots, x_r$.

Definição 124. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **convexo** se, e somente se, toda combinação convexa de elementos de X ainda pertence a X .

Definição 125. A **envoltória convexa** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário, $\text{Conv}(X)$, é a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm X , ou seja,

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{\substack{X \subset A \\ A \text{ convexo}}} A$$

Neste sentido, $\text{Conv}(X)$ é o menor conjunto convexo que contém X .

Teorema 126. Sejam $x_0, x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $x_0, x_1, \dots, x_r$ são geometricamente independentes;
- (2) Se as combinações afins

$$p = \sum_{i=0}^r \alpha_i x_i$$

e

$$q = \sum_{i=0}^r \beta_i x_i$$

são iguais, então $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_r = \beta_r$.

Uma boa demonstração deste teorema pode ser encontrada em [8].

Definição 127. Sejam $a_0, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$ pontos geometricamente independentes. O **simplexo geométrico r -dimensional** que tem estes pontos como vértices é o conjunto $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$ de todas as combinações convexas $p = \sum_{i=0}^r \alpha_i a_i$, ou seja, é a envoltória convexa do conjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_r\}$.

Definição 128. A **dimensão** de um r -simplexo s é definida como:

$$\dim s = r.$$

Definição 129. Se $p = \sum_{i=0}^r \alpha_i a_i \in s$ com $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_r \geq 0$, e $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$. Os números $\alpha_0, \dots, \alpha_r$ chamam-se **as coordenadas baricêntricas do ponto** $p \in s$. Se todas as coordenadas do ponto $p \in s$ são estritamente positivas, o ponto p é um **ponto interior de** s . O conjunto dos pontos interiores de s é convexo e constitui o que se chama um **simplexo aberto**. Os pontos de s que não são interiores, ou seja, que têm alguma coordenada baricêntrica nula, formam o **bordo de** s .

Definição 130. Fixado um subconjunto $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, \dots, r\}$, o simplexo $\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \rangle$ é chamado uma **face de** s . Em particular, cada vértice de s é uma face (de dimensão zero). Para cada $i = 0, 1, \dots, r$, a face $s_{(i)} = \langle a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_r \rangle$ chama-se **face oposta ao vértice** a_i (aqui $\hat{a}_i$ significa omissão do vértice a_i).

Definição 131. Dado um subconjunto convexo arbitrário $C \subset \mathbb{R}^n$, o ponto $p \in C$ é um **ponto extremo de** C quando p não pertence a segmento de reta aberto algum contido em C .

Exemplo 132. Se B é uma bola fechada, em relação à norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ e a esfera S é o bordo de B , então todo ponto de S é um ponto extremo do conjunto B .

Teorema 133. Os pontos extremos do r -simplexo geométrico $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$ são seus vértices.

Demonstração. Em primeiro lugar, se $p \neq q$ pertencem a s , um ponto interior do segmento de reta $[p, q]$ é da forma $(1 - t)p + tq$ com $t \in]0, 1[$, de maneira que nenhuma de suas coordenadas baricêntricas pode ser igual a 1. Portanto, esse ponto não é vértice de s e assim todo a_i é extremo. Reciprocamente, se $p \in s$ não é vértice de s , então, chamando de t a face de s de menor dimensão que contém o ponto p , temos $\dim t > 0$ e p pertence ao interior de t . Logo p não é ponto extremo de s . $\square$

O teorema acima caracteriza, de forma intrínseca e unívoca, os vértices de um simplexo.

Definição 134. *Sejam s e t dois simplexes. Se o conjunto de todos os vértices de s for subconjunto do conjunto de todos os vértices de t , então s é **uma face de t** , e denotamos $s < t$.*

Definição 135. *Um **poliedro** é um par $(K, \text{Simp}(K))$, onde $K \subset \mathbb{R}^n$ e $\text{Simp}(K)$ é uma coleção finita de simplexes geométricos de $\mathbb{R}^n$, os quais chamaremos **simplexes geométricos de K** , de modo que as condições abaixo são satisfeitas:*

- (1) *Todo ponto de K pertence a algum simplexo de K , ou seja, K é a reunião dos seus simplexes - em outras palavras, se $x \in K$, então existe $s \in \text{Simp}(K)$ tal que $x \in s$. Assim,*

$$K = \bigcup_{s \in \text{Simp}(K)} s;$$

- (2) *Toda face de um simplexo de K é ainda um simplexo de K - em outras palavras, se $s < t$ para algum $t \in \text{Simp}(K)$, então $s \in \text{Simp}(K)$;*

- (3) *Se $s, t \in \text{Simp}(K)$ são simplexes de K , então $s \cap t$ ou é vazio ou é uma face comum a s e a t (e portanto é um simplexo de K). Em outras palavras, $\forall s, t \in \text{Simp}(K)$, tem-se ou $s \cap t = \emptyset$ ou $s \cap t < s$ e $s \cap t < t$.*

Observação 136. *A condição (3) da definição acima também é expressa dizendo-se que s e t estão **propriamente ligados**.*

Definição 137. *A **dimensão** de um poliedro $(K, \text{Simp}(K))$ é a maior dimensão de um dos seus simplexes. Assim,*

$$\dim(K, \text{Simp}(K)) = \max\{\dim s; s \in \text{Simp}(K)\}.$$

Definição 138. *Um **subpoliedro** do poliedro $(K, \text{Simp}(K))$ é um poliedro $(L, \text{Simp}(L))$ tal que $K \subset L$ e $\text{Simp}(K) \subset \text{Simp}(L)$.*

Definição 139. *Se s é um simplexo geométrico, o **simplexo aberto**, $o(s)$ associado a s consiste dos pontos de s cujas coordenadas baricêntricas são todas positivas. Pela **Definição 129**, $o(s)$ é o conjunto de todos os pontos interiores de s .*

Definição 140. *Seja $(K, \text{Simp}(K))$ um complexo simplicial. A **malha** de K é:*

$$\text{malha}(K) = \max\{\text{diam } s; s \in \text{Simp}(K)\}$$

Exemplo 141. *Se a é um vértice, $o(\langle a \rangle) = \{a\}$. Para um 1-simplexo $s^1 = \langle a_0 a_1 \rangle$, $o(s^1)$ é o segmento aberto que une a_0 a a_1 (excluindo-se a_0 e a_1), i.e.,*

$$o(s^1) = \{(1-t)a_0 + ta_1; t \in]0, 1[\}.$$

Para um 2-simplexo $s^2 = \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ é o interior do triângulo gerado por seus três vértices, ou seja:

$$o(\langle a_0 a_1 a_2 \rangle) = \{t_0 a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2; t_0, t_1, t_2 \in]0, 1[\text{ e } t_0 + t_1 + t_2 = 1\}.$$

Definição 142. *Seja v um dos vértices do poliedro $(K, \text{Simp}(K))$, ou seja v é vértice de algum elemento $s \in \text{Simp}(K)$. A **estrela de v** , denotada por $\text{st}_K(v)$ é a família de todos os simplexos de K que têm v como vértice.*

Exemplo 143. *Na figura 5.1 (onde o triângulo hachurado é "cheio"), a estrela do vértice v_0 é:*

$$\text{st}_K(v_0) = \{\langle v_0 \rangle, \langle v_0 v_1 \rangle, \langle v_0 v_2 \rangle, \langle v_0 v_3 \rangle, \langle v_0 v_4 \rangle, \langle v_0 v_1 v_2 \rangle\}$$

Definição 144. *Seja X um espaço topológico. Uma **triangulação de (X, τ)** é um par:*

$$\{\psi, (K, \text{Simp}(K))\},$$

onde $\psi : K \rightarrow X$ é um homeomorfismo.

Exemplo 145. *Consideremos a esfera S^2 . O complexo simplicial:*

$$K = \{\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_0, a_1, a_3 \rangle, \langle a_0, a_2, a_3 \rangle, \langle a_1 a_2 a_3 \rangle, \langle a_1, a_3 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_0, a_2 \rangle, \langle a_0, a_3 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \\ \langle a_2, a_3 \rangle, \langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle\}$$

Figura 5.1: Complexo simplicial do Exemplo 143

tem poliedro associado homeomorfo à esfera S^2 .

Definição 146. Seja $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ um k -simplexo. O **baricentro** ou **centro de gravidade** do simplexo σ é o ponto:

$$b = \sum_{i=0}^k t_i v_i$$

cujas coordenadas t_i são, para todo $i = 0, \dots, k$:

$$t_i = \frac{1}{k+1}$$

Definição 147. Seja $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ um k -simplexo. A **subdivisão baricêntrica** de $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ é a decomposição de $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ nos k -simplexos $\langle b, w_0, \dots, w_{k-1} \rangle$ onde, indutivamente, $\langle w_0, \dots, w_{k-1} \rangle$ é um $(k-1)$ -simplexo na subdivisão baricêntrica de uma face $\langle v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k \rangle$. A indução começa com o caso $k=0$, onde a divisão baricêntrica de $\langle v_0 \rangle$ é definida simplesmente como $\langle v_0 \rangle$. Segue da definição que os vértices dos simplexos na subdivisão baricêntrica de $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ são exatamente os baricentros de todas as suas faces k -dimensionais, $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_n} \rangle$ de $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ para $0 \leq n \leq k$.

Definição 148. Uma aplicação entre poliedros $f : (K, \text{Simp}(K)) \rightarrow (L, \text{Simp}(L))$ é **simplicial** quando para todo simplexo $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle \in \text{Simp}(K)$, as imagens

$f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_r)$ são vértices de um mesmo simplexo $t \in \text{Simp}(L)$ e, além disso, para todo ponto $p = \sum_i \alpha_i \cdot a_i$ em s , tem-se $f(p) = \sum_i \alpha_i \cdot f(a_i) \in t$.

Observação 149. Toda aplicação simplicial $f : (K, \text{Simp}(K)) \rightarrow (L, \text{Simp}(L))$ é contínua, pois K é uma reunião finita de conjuntos compactos (seus simplexos), restrita a cada um dos quais f é afim, e portanto contínua.

A fim de definir uma aplicação simplicial $f : (K, \text{Simp}(K)) \rightarrow (L, \text{Simp}(L))$, basta especificar a imagem $f(a)$ de cada vértice $a \in K$ contanto que, para todo simplexo $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle \in \text{Simp}(K)$ os pontos $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_r)$ sejam vértices (não necessariamente distintos) de um mesmo simplexo $t \in \text{Simp}(L)$.

O teorema a seguir será muito importante para provar que se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação satisfazendo certas condições, então f é homotópica a uma aplicação que é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em um ponto por uma homotopia que é constante fora de um compacto.

Teorema 150. Aproximação Simplicial. Se $(K, \text{Simp}(K))$ é um complexo simplicial finito e $(L, \text{Simp}(L))$ é um complexo simplicial qualquer, então qualquer aplicação contínua $f : K \rightarrow L$ é homotópica a uma aplicação que é simplicial com respeito a alguma subdivisão baricêntrica iterada de K .

Definição 151. Sejam $(K, \text{Simp}(K))$ um poliedro e $0 \leq r \leq \dim(K, \text{Simp}(K))$. O **esqueleto r -dimensional** de um poliedro $(K, \text{Simp}(K))$ é o subpoliedro $(K^{(r)}, \text{Simp}(K^{(r)}))$, constituído por todos os elementos de $\text{Simp}(K)$ que têm dimensão menor ou igual a r . Assim,

$$K^{(r)} \subseteq K$$

e

$$\text{Simp}(K^{(r)}) = \{s \in \text{Simp}(K); \dim s \leq r\}.$$

Observe que para $r \geq \dim(K, \text{Simp}(K))$, temos $(K^{(r)}, \text{Simp}(K^{(r)})) = (K, \text{Simp}(K))$. Convencionaremos assim que um poliedro de dimensão n não admite r -esqueleto para $r > n$.

Exemplo 152. Consideremos o complexo simplicial do **Exemplo 145**. Neste caso, o 1-esqueleto de K é:

$$K^{(1)} = \{\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_0 a_3 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_1 a_3 \rangle, \langle a_2 a_3 \rangle\}$$

Definição 153. Dois poliedros $(K, \text{Simp}(K))$ e $(L, \text{Simp}(L))$ são isomorfos quando existem aplicações simpliciais $f : (K, \text{Simp}(K)) \rightarrow (L, \text{Simp}(L))$ e $g : (L, \text{Simp}(L)) \rightarrow (K, \text{Simp}(K))$ tais que $g \circ f = \text{id}_{(K, \text{Simp}(K))}$ e $f \circ g = \text{id}_{(L, \text{Simp}(L))}$. Então f e g são isomorfismos, um inverso do outro.

A fim de obter um isomorfismo entre os poliedros $(K, \text{Simp}(K))$ e $(L, \text{Simp}(L))$, basta estabelecer uma bijeção entre os vértices de $(K, \text{Simp}(K))$ e os vértices de $(L, \text{Simp}(L))$, de tal modo que a vértices de K pertencentes ao mesmo simplexo correspondam vértices de L que também estão num mesmo simplexo.

Assim, um poliedro fica determinado (a menos de um isomorfismo) pelo "esquema simplicial" por ele definido. Introduzimos esta noção na seguinte:

Definição 154. Um **esquema simplicial** é um conjunto finito $\mathcal{K}$, cujos elementos são chamados **vértices**, juntamente com uma família Φ de subconjuntos não vazios de $\mathcal{K}$, chamados **simplexos**, com as seguintes propriedades:

$$(1) \mathcal{K} = \bigcup_{s \in \Phi} s;$$

$$(2) \text{ Se } s \in \Phi \text{ e } t \text{ é um subconjunto não-vazio de } s, \text{ então } t \in \Phi.$$

Definição 155. Se $s \in \Phi$ tem $r + 1$ elementos, dizemos que o simplexo s tem dimensão r . Se $(\mathcal{K}, \Phi)$ e $(\mathcal{L}, \Psi)$ são esquemas simpliciais, uma aplicação $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ é simplicial quando $f(\Phi) \subset \Psi$. Um isomorfismo entre os esquemas $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ é uma aplicação simplicial bijetora $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$. A inversa, $f^{-1} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ é necessariamente simplicial.

Definição 156. *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ uma cobertura finita do espaço. O **nervo** da cobertura $\mathcal{U}$ é o esquema simplicial $N(\mathcal{U})$ cujos vértices são os elementos U_i da cobertura, ou seja, $K = \{U_i, i = 1, \dots, n\}$ e $\text{Simp}(K) = \{s = \{U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_r}\} \text{ tais que } U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r} \neq \emptyset\}$.*

A definição de nervo de uma cobertura foi introduzida em 1928 por Pavel Alexandroff em "Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung" (Mathematische Annalen 98 (1928), p. 617 - 635).

Observação 157. *Quando (X, τ) é compacto e $\mathcal{U}$ é aberta, a realização geométrica do nervo $N(\mathcal{U})$ é pensada como uma aproximação poliedral de X , tanto mais aproximada quanto mais fina for a cobertura $\mathcal{U}$.*

Dado um r -simplexo s com $r \geq 1$, podemos dar-lhe uma orientação simplesmente escolhendo uma ordem para os seus vértices. Faremos isto na definição a seguir.

Definição 158. *Existem $(r + 1)!$ maneiras de ordenar os vértices de um simplexo de dimensão r . Consideremos equivalentes duas destas ordenações quando uma delas puder ser obtida da outra por meio de uma permutação par dos $r + 1$ vértices. Há duas classes de equivalência segundo esta relação. Cada uma destas classes chama-se uma **orientação** do simplexo. Orientar um simplexo é dotá-lo de uma dessas duas orientações possíveis (Isto pressupõe $r > 0$. Se $r = 0$, orientar um ponto é apenas precedê-lo do sinal $+$ ou do sinal $-$.)*

Escreveremos $s = [a_0, a_1, \dots, a_r]$ para indicar o simplexo $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$ munido da orientação determinada pela ordem $a_0 < a_1 < \dots < a_r$. O mesmo simplexo, quando munido da outra orientação (chamada *orientação oposta*) será indicado por $-s$.

Os exemplos a seguir foram extraídos de [23].

Exemplo 159. *Seja $s^1 = \langle a_0 a_1 \rangle$. Tomando-se a orientação $a_0 < a_1$, temos $+s^1 = \langle a_0 a_1 \rangle$ e $-s^1 = \langle a_1 a_0 \rangle$. Seja $s^2 = \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ com orientação dada por $a_0 < a_1 < a_2$. Usando as*

permutações associadas a s^2 , obtemos três permutações pares:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Portanto

$$+s^2 = [a_2a_0a_1] = \{\langle a_2a_0a_1 \rangle, \langle a_1a_2a_0 \rangle, \langle a_0a_1a_2 \rangle\}e$$

$$-s^2 = [a_0a_2a_1]\{\langle a_0a_2a_1 \rangle, \langle a_1a_0a_2 \rangle, \langle a_2a_1a_0 \rangle\}.$$

Quando orientamos um simplexo r -dimensional, suas faces de dimensão $r-1$ herdam as orientações induzidas. O mesmo não se dá com as faces de dimensão $r-2$, conforme esclarece o teorema seguinte.

Teorema 160. *Num simplexo r -dimensional orientado s , toda face $(r-2)$ -dimensional t pertence a duas faces de dimensão $r-1$, as quais, com as orientações nelas induzidas por s , induzem orientações opostas em t .*

Demonstração. Sejam $s = [a_0, a_1, \dots, a_r]$ e $t = \langle a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_r \rangle$ com $i < j$. As faces $(r-1)$ -dimensionais de s (com as orientações induzidas) que contêm t são:

$$s_{(i)} = (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_j, \dots, a_r]$$

e

$$s_{(j)} = (-1)^j [a_0, \dots, a_i, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_r].$$

As orientações que $s_{(i)}$ e $s_{(j)}$ induzem em t são, respectivamente,

$$(s_{(i)})_{(j)} = (-1)^{i+j-1} [a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_r]$$

e

$$(s_{(j)})_{(i)} = (-1)^{i+j} [a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_r]$$

as quais são opostas uma da outra. □

O **Teorema 160** é o ponto de partida para a definição do complexo de cadeias que associaremos a cada poliedro.

Definição 161. Dados o poliedro K e o anel comutativo com unidade $(R, +, \cdot)$, consideraremos, para cada inteiro $r \geq 0$ o R -módulo $C_r(K; R)$. Os elementos de $C_r(K)$ são as **cadeias r -dimensionais**, constituídos por todas as combinações R -lineares formais $x = \sum_i x_i s_i$ de simplexes r -dimensionais orientados $s_i \in K$ com coeficientes $x_i \in R$.

Observação 162. Cada $C_r(K; R)$, $r = 0, 1, \dots$ é um R -módulo livre: escolhendo em cada r -simplexo $s \in K$ uma orientação, as r -cadeias s assim obtidas formam uma base para $C_r(K)$.

A fim de definir o operador bordo:

$$\partial : C_r(K; R) \rightarrow C_{r-1}(K; R)$$

basta dar o significado de ∂s para cada r -simplexo orientado s . Poremos então:

$$\partial s = \sum_{i=0}^r s_{(i)},$$

onde $s_{(i)}$ é a i -ésima face de s com a orientação induzida.

Se $s = [a_0, a_1, \dots, a_r]$, então $s_{(i)} = (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_r]$. Portanto:

$$\partial[a_0, a_1, \dots, a_r] = \sum_{i=0}^r (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_r].$$

Segue-se do **Teorema 160** que $\partial \circ \partial = 0$ e, se $\dim K = n$, a sequência:

$$\mathcal{C}(K) : C_n(K; R) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(K; R) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(K; R) \xrightarrow{\partial} C_0(K; R) \rightarrow 0$$

é um complexo de cadeias. Por completeza, ponhamos $\partial x = 0$ para toda cadeia de dimensão 0, $x = \sum_{i=0}^r x_i a_i$, combinação linear dos vértices a_i do poliedro K . Mais geralmente, se $x = \sum_{i=0}^r x_i s_i$ é uma combinação linear de r -simplexos orientados $s_i \in K$ com coeficientes $x_i \in R$, por definição tem-se $\partial x = \sum_{i=0}^r x_i \partial s_i$.

Estando em posse dos módulos $C_n(K; R)$ e dos R -homomorfismos satisfazendo a propriedade de bordo, $\partial \circ \partial = 0$, temos que a sequência abaixo é exata longa:

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_{n+1}(K; R) \xrightarrow{\partial} C_n(K; R) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(K; R) \xrightarrow{\partial} \dots$$

Existem dois submódulos de $C_n(K; R)$ de especial interesse nesta teoria, que definimos em seguida. Nestas definições, K denotará um poliedro e R um anel comutativo.

Definição 163. Um elemento $s \in C_n(K; R)$ é um n -ciclo caso $\partial s = 0$. Denotamos o R -módulo dos n -ciclos por $Z_n(K; R)$. Note que $Z_n(K; R)$ tem estrutura de R -módulo por ser o núcleo de um R -homomorfismo, a saber ∂ .

Definição 164. Um elemento $s \in C_n(K; R)$ é um n -bordo caso exista $w \in C_{n+1}(K; R)$ tal que $s = \partial w$. Denotaremos o R -módulo dos n -bordos por $B_n(K; R)$.

Com estes elementos definimos os R -módulos de homologia simplicial de um poliedro.

Definição 165. Sejam K um poliedro e R um anel comutativo. O n -ésimo R -módulo de homologia simplicial de K é o R -módulo quociente: $H_n(K; R) = \frac{Z_n(K; R)}{B_n(K; R)}$.

Com o conceito de homologia podemos explorar muitos aspectos da teoria de raízes de Nielsen, especialmente para provar teoremas construtivos, como o **Teorema 1.1** e o **Teorema 1.2**.

Referências Bibliográficas

- [1] BROOKS, R. Nielsen root theory. Handbook of Topological Fixed Point Theory (L. Gorniewicz, ed.), in press.
- [2] BROOKS, R., BROWN F., SCHIRMER. The absolute degree and Nielsen root number of a fibre-preserving map. Topology Appl. 125, no. 1. p. 49-80. 2001.
- [3] BROWN, R. F., SCHIRMER, H. Nielsen root theory and Hopf degree theory. Pacific J. Math. 198, no. 1, p. 49-80, 2001.
- [4] DOLD, A. Lectures on Algebraic Topology. 2nd ed. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1980. 377p.
- [5] EILENBERG, S., STEENROD, N. Foundations of Algebraic Topology. New Jersey: Princeton University Press 1952. 357p.
- [6] D.B.A. EPSTEIN, The degree of a map, Proc. London Math. Soc. (3) 16 , p. 369-383. 1966.
- [7] M.A. KERVAIRE, Geometric and algebraic intersection numbers, Comment. Math. Helv. 39. p. 271-280. 1965.
- [8] LIMA, E. L. Homologia Básica.
- [9] FORSTER, O., Lectures on Riemann Surfaces. New York: Springer Verlag, 1981. 254p.

-
- [10] J. M. LEE, Introduction to Topological Manifolds. New York: Springer-Verlag New York Inc., 2000. 433 p.
- [11] X. LIN. On the root classes of mappings. Acta Math. Sinica (N.S.) 2, no. 3, p. 199-206. 1986.
- [12] MUNKRES J. R. Topology. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 537p.
- [13] LIMA, E.L. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA. Projeto Euclides, 1998. 214pp.
- [14] SANTOS, H. A. Teoria de Nielsen de raízes para aplicações equivariantes. 15/3/2007. 46 f. Tese. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo, 18/3/2009.
- [15] SPANIER, E.H. Algebraic topology. New York, San Francisco, St. Louis, Toronto, London, Sydney: McGraw-Hill Book Co. 1966. 528p.
- [16] FROLKINA, O. Minimizing the number of Nielsen preimage classes. Geometry and Topology Monographs, 14, p. 193-217, 2008.
- [17] SZE-TSEN, Hu. Homotopy Theory. New York and London: Academic Press, 1959. 347 p.
- [18] <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0245/survey.pdf>
- [19] TANEDA, P. T. Teoria de Nielsen de Raízes e Teoria do Grau de Hopf. 15/3/2007. 189 f. Dissertação. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 21/3/2007.
- [20] BROOKS, R., Roots of mappings from manifolds, Fixed Point Theory Appl., 2004, no. 4, 273-307.
- [21] HATCHER, A. Algebraic Topology. New York: Cambridge University Press, 2001. 544p.

-
- [22] ARMSTRONG, A. M. Basic Topology. Springer Edition, New York: Springer Verlag 1983. 251 p.
- [23] LIBARDI, A., VIEIRA, J. P., MELO, T. Invariantes Topológicos. 1ª edição. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. 76p.
- [24] BROWN, R. Fixed Point Theory, History of Topology - edited by James, I. M. - Oxford University - Elsevier, 1999.
- [25] VICK, J. W. Homology Theory. Springer Verlag. 1994. 242 p.
- [26] GUILLEMIN, V., POLLACK A. Differential Topology. AMS Chelsea Edition. AMS Chelsea Publishing. 2010. 222 p.