Sobre a multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos de quarta-ordem via categoria de Lusternik-Schnirelman

Jéssyca Lange Ferreira Melo

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

Sobre a multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos de quarta-ordem via categoria de Lusternik-Schnirelman

Jéssyca Lange Ferreira Melo

Orientador: **Prof. Dr. Ederson Moreira dos Santos**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Junho de 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M528s

Melo, Jéssyca Lange Ferreira
Sobre a multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos de quarta-ordem via categoria de Lusternik-Schnirelman / Jéssyca Lange Ferreira Melo; orientador Ederson Moreira dos Santos. -- São Carlos, 2014.
112 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Operador biharmônico. 2. Problema de quarta-ordem. 3. Regiões crítica e não-crítica. 4. Categoria de Lusternik-Schnirelman. I. Moreira dos Santos, Ederson, orient. II. Título.

"Por vezes
sentimos que
aquilo que
fazemos não é
senão uma gota
de água no mar.
Mas o mar seria
menor se lhe
faltasse uma
gota." Madre
Teresa de Calcutá

Agradecimentos

Aos meus pais, Adeilto e Conceição, pelo amor incondicional e pelo apoio dado durante toda essa trajetória.

Ao prof. Ederson, por toda atenção e paciência durante a orientação no doutorado, serei sempre grata por todo esforço e tempo dedicado para concretização deste trabalho.

Aos professores Marcelo Furtado, Marco Aurélio Souto, Francisco Odair de Paiva e Sérgio Henrique Soares, pela disponibilidade em me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

Aos professores e amigos da UFCG, onde comecei a minha vida acadêmica. Em especial, ao prof. Claudianor Alves pela orientação no mestrado, e pela indicação do artigo [4], bastante útil neste trabalho.

Aos professores e funcionários do ICMC-USP-São Carlos.

Aos amigos feitos em São Carlos.

Aos meus familiares: minha irmã Jussara, meus avós, tios, tias, primos, primas... por todo apoio e torcida que sempre tiveram por mim.

Ao Diego, pelo amor e paciência.

A FAPESP, pelo apoio financeiro.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho, muito obrigada!

Resumo

MELO, J. L. F. **Sobre a multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos de quarta-ordem via categoria de Lusternik-Schnirelman.** 2014. 112 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

Neste trabalho estudamos a existência e a multiplicidade de soluções clássicas positivas para uma classe de problemas de quarta-ordem sob a condição de fronteira de Navier, relacionando o número de soluções com a topologia do domínio, mais precisamente, com sua categoria de Lusternik-Schnirelman. Introduzimos também uma noção de regiões crítica e não-crítica associadas a um de nossos problemas, a fim de garantir condições para existência de solução.

Palavras-chave: Operador biharmônico, Problema de quarta-ordem, Regiões crítica e não-crítica, Categoria de Lusternik-Schnirelman.

Abstract

MELO, J. L. F. **On the multiplicity of positive solutions for a class of fourth-order elliptic problems by Lusternik-Schnirelman category.** 2014. 112 p. Ph.D. thesis - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

In this work we study the existence and multiplicity of positive classical solutions for a class of fourth-order problems under Navier boundary condition, relating the number of solutions to the domain topology, more specifically, to its Lusternik-Schnirelman category. We also introduce the notion of critical and noncritical regions related to one of our problems, in order to ensure conditions to existence of solutions.

Keywords: Biharmonic operator, Fourth-order problem, Critical and noncritical regions, Lusternik-Schnirelman category.

Índice

Índice de Notações **1**

Introdução **3**

1 Multiplicidade de soluções para o problema (P_1) **13**

1.1 Preliminares 14

1.2 Compacidade 15

1.3 Multiplicidade de soluções 19

1.4 Prova do Lema 1.4 27

1.5 Prova do Lema 1.9 31

2 Existência e multiplicidade de soluções para o problema (P_2) **33**

2.1 Preliminares e prova do Teorema 2.1 34

2.2 Um importante resultado de compacidade 39

2.3 Lemas Técnicos 43

2.4 Prova do Teorema 2.2 47

2.5 Prova do Lema 2.6 completa 50

3 Existência de soluções para o problema (P_3) **55**

3.1 Compacidade e prova do Teorema 3.3 60

3.2 Prova do Teorema 3.6 70

3.3 Prova do Lema 3.19 71

3.4 Regiões crítica e não-crítica da hipérbole crítica para um sistema Hamiltoniano 81

4 Multiplicidade de soluções para o problema (P_3') **85**

4.1 Positividade das soluções do problema (P_3') 86

4.2 Compacidade 88

4.3 Multiplicidade de soluções 94

A Sobre o teorema do passo da montanha **105**

Referências Bibliográficas **109**

Índice de Notações

Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$;
$B_r(y)$ bola aberta de centro y e raio r;
$|\Omega|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
$\Omega - y := \{x - y; x \in \Omega\}$;
$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ biharmônico da função u;
$\text{cat}_\Omega(\Omega)$ categoria de Lusternik-Schnirelman de Ω em Ω;
$E(\Omega) = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, quando $p = 1$, $E(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$;
$\mu_1(\Omega)$ primeiro autovalor de $\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu|u|^{\frac{1}{p}-1}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega; \end{cases}$
$2_* = \dfrac{2N}{N-4}$ expoente crítico da imersão de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2_*}(\Omega)$, para $N \geq 5$;
$|u|_r = |u|_{r,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^r dx\right)^{1/r}$ norma de $u \in L^r(\Omega)$;
$\|u\| = |\Delta u|_{\frac{p+1}{p}}$ norma de $u \in E(\Omega)$;
$\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{N-2}{N}$, hipérbole crítica para $N \geq 3$;
$\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{q+1}(\mathbb{R}^N), \Delta u \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)\}$, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{N-2}{N}$; quando $p = 1$, $q+1 = 2_*$;
$S = \inf\left\{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx;\ u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1} dx = 1\right\}$ constante de Sobolev;
$\|\lambda\|$ norma da medida λ;
u^* simetrizada de Schwarz da função u;
$u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ parte positiva da função u;
$u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$ parte negativa da função u;
$\overline{A}$ fecho do conjunto A;
Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\text{supp} u = \overline{\{x \in \Omega, u(x) = 0\}}$;
$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N); \text{supp} u \subset\subset \mathbb{R}^N\}$;
δ_x função de Dirac em torno do ponto x.

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar a existência e a multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos de quarta-ordem sob a condição de Navier em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

No **Capítulo 1** estudamos a existência de múltiplas soluções clássicas para o problema de quarta-ordem envolvendo o operador biharmônico

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu u + u^{2_*-1} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, -\Delta u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 8$, $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$, $\mu_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

$E(\Omega) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, e $2_* = 2N/(N-4)$ é o expoente crítico da imersão de $E(\Omega)$ em $L^{2_*}(\Omega)$. A motivação para o estudo desse problema é dada a seguir.

Brezis e Nirenberg [12] investigaram a questão sobre a existência de solução clássica para o problema de segunda ordem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{2^*-1}, \ \ u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{BN}$$

onde $2^* = 2N/(N-2)$, $N \geq 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado. Seja $\lambda_1(\Omega)$ o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Foi provado em [12] que:

(i) (BN) não possui solução para $\lambda \geq \lambda_1(\Omega)$. Se Ω é também estrelado, então a identidade de Pohožaev [38] garante que (BN) não possui solução para $\lambda \leq 0$.

(ii) Para $N \geq 4$ o problema (BN) possui solução para todo $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)$.

(iii) No caso $N = 3$, também chamado de dimensão crítica, o problema é mais complexo. De fato, no caso em que Ω é estrelado, (BN) não possui solução quando o parâmetro λ é positivo e suficientemente pequeno e, no caso particular em que Ω é uma bola aberta, (BN) possui solução se, e somente se, $\frac{\lambda_1(\Omega)}{4} < \lambda < \lambda_1(\Omega)$.

Em contraste ao caso em que Ω é estrelado, considere $N \geq 3$ e um anel $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Sabemos que a imersão $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é compacta; ver Ni [36, Radial Lemma]. Portanto, (BN) possui uma solução radial para todo $\lambda \in (-\infty, \lambda_1(\Omega))$.

A descrição dada anteriormente mostra que o formato do domínio Ω e a dimensão N interferem no conjunto de soluções de (BN). Rey [41, 43] observou que o número de soluções de (BN) é fortemente influenciado pela topologia de Ω. De fato, usando argumentos baseados na categoria de Lusternik-Schnirelman [30], foi provado por Rey [41] para $N \geq 5$, posteriormente por Lazzo [28] para $N \geq 4$, que (BN) possui, no mínimo, $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções se o parâmetro $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno. A extensão dos resultados de Lazzo [28] para o problema correspondente envolvendo o operador p-Laplaciano foi apresentado por Alves e Ding [3].

No Capítulo 1, inspirados pelos resultados descritos, estudamos a existência de múltiplas soluções clássicas para a equação de quarta-ordem com condição de Navier em (P_1). Em [47], van der Vorst provou que se $N \geq 5$, $\mu \geq \mu_1(\Omega)$ ou, $\mu \leq 0$ e se o domínio Ω é estrelado, então (P_1) não possui solução. No mesmo artigo, supondo que Ω é um domínio regular geral em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 8$ e $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$, foi provado que (P_1) possui solução. Posteriormente, Gazzola et al. [21] provaram que $N = 5, 6, 7$ são as dimensões críticas para o problema (P_1) no sentido de que (P_1) não possui solução se $\mu > 0$ é suficientemente pequeno e Ω é uma bola aberta em $\mathbb{R}^N$.

Nossa principal contribuição no Capítulo 1 deste trabalho é apresentar um resultado de existência de múltiplas soluções clássicas para (P_1) para todas as dimensões não críticas, mais precisamente, para todo $N \geq 8$.

Teorema 1.1. *Se Ω é um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 8$, então existe $0 < \overline{\mu} < \mu_1(\Omega)$ tal que, para cada $0 < \mu < \overline{\mu}$, o problema (P_1) possui, pelo menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções clássicas.*

Mencionamos que El-Mehdi & Selmi [16], inspirados pelos procedimentos empregados em [41, 42, 43] para lidar com (BN), provaram que para $N > 8$ o problema (P_1) possui, pelo menos, $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções se o parâmetro $\mu > 0$ é suficientemente pequeno. Mais recentemente, Abdelhedi [1] usou técnicas similares aquelas em [16] para provar a existência de múltiplas soluções para um problema similar.

Destacamos que a condição $N > 8$ parece essencial nos argumentos em [1] e [16] bem como $N \geq 5$ foi exigido por Rey em [41]. Em particular, ficou como problema em aberto a influência da topologia do domínio na existência de múltiplas soluções para o problema (P_1) no caso $N = 8$; ver [16, Remark 1.4].

Para provar nosso resultado usamos uma abordagem diferente daquela em [1, 16], que aparenta ser mais direta e funciona para $N \geq 8$. Ressaltamos também que em vez de

projeções nós empregamos extensões apropriadas; por exemplo compare [16, p. 419] e (1.34) neste trabalho. Além disso, acreditamos que as técnicas de extensão e simetrização aplicadas aqui para funções em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ serão úteis para tratar outros problemas de quarta-ordem. Em particular, as provas dos Lemas 1.11 e 1.13 e eq. (1.40) exemplificam como nosso procedimento de extensão substitui a extensão por zero convencional usada para tratar problemas de segunda-ordem, ou mesmo problemas de quarta-ordem com condição de Dirichlet na fronteira. Já ressaltamos que essas extensões serão bastante utilizadas ao longo dos próximos capítulos desta tese.

O resultado obtido neste primeiro capítulo encontra-se em forma de artigo, aceito para publicação, cf. [32].

No **Capítulo 2** estudamos a existência e a multiplicidade de soluções para uma versão do problema (P_1), considerando agora também pertubações superlineares, mas precisamente o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu u^s + u^{2_*-1} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, -\Delta u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_2}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, $\mu > 0$, $2 \leq s+1 < 2_*$.

O primeiro resultado que obtivemos neste segundo capítulo foi a existência de solução para (P_2), e o resultado principal desse capítulo afirma que se Ω possui topologia rica, descrita por sua categoria de Lusternik-Schnirelman, então múltiplas soluções para o problema (P_2) existem desde que $\mu > 0$ seja suficientemente pequeno.

Teorema 2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, e $\mu > 0$. No caso $s = 1$ suponha $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$, $\mu_1(\Omega)$ primeiro autovalor do problema (1). Supondo $2 \leq s+1 < 2_*$ se $N \geq 8$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$ para as dimensões críticas $N = 5, 6, 7$, então (P_2) possui uma solução clássica.*

Teorema 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 5$. Suponha $2 \leq s+1 < 2_*$ se $N \geq 8$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$ para as dimensões críticas $N = 5, 6, 7$. Então existe $\overline{\mu} > 0$ tal que, para cada $0 < \mu < \overline{\mu}$, o problema (P_2) possui, pelo menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções clássicas.*

Primeiramente observamos que, cf. [47], se $2 \leq s+1 < 2_*$ e $\mu \leq 0$ então (P_2) não possui solução em domínios estrelados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 5$. Se $s = 1$, então a condição $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$ é necessária para a existência de solução para domínios gerais. Observamos também que o Teorema 2.2, no caso particular em que $s = 1$ se reduz ao Teorema 1.1. Entretanto, a abordagem neste segundo capítulo é baseada em algumas análises da variedade de Nehari associada ao problema (P_2), sendo assim diferente do procedimento adotado no primeiro capítulo deste trabalho.

Mencionamos que o Teorema 2.2 foi provado por Alves e Figueiredo [4] para o contexto do correspondente problema sob condição de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu |u|^{s-1}u + |u|^{2_*-2}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{AF}$$

Theorem 1.1 em [4]. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado com $N \geq 5$. Suponha $2 \leq s+1 < 2_*$ se $N \geq 8$ e, $2_* - 2 < s+1 < 2_*$ para as dimensões críticas $N = 5, 6, 7$. Então existe $\overline{\mu} > 0$ tal que para todo $0 < \mu < \overline{\mu}$ o problema* (AF) *possui, no mínimo, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções clássicas não-triviais.*[*]

Existe uma diferença entre [4, Theorem 1.1] e Teorema 2.2 nesse trabalho, que envolve uma propriedade qualitativa das soluções. Enquanto nenhuma informação sobre o sinal das soluções de (AF) foi dada, pois, como é bem sabido, um princípio de comparação para o operador biharmônico sob a condição de Dirichlet não existe para domínios gerais, cf. [22, Chapter 5], aqui e no Capítulo 1 fazemos uso de um princípio de comparação válido para o operador biharmônico sob a condição de fronteira de Navier, ver Lema 2.4.

Para um resultado de existência de solução para perturbações sublineares, isto é, no caso $1 < s+1 < 2$, mencionamos [8, Theorem 7.1].

Como feito para o resultado obtido no Capítulo 1, os resultados obtidos neste segundo capítulo foram submetidos em forma de artigo, aceito para publicação, cf. [33].

O **Capítulo 3** é dedicado ao estudo da existência de solução para o problema de quarta-ordem não linear

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu |u|^{s-1}u + |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3}$$

satisfazendo

$$u, -\Delta u > 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\mu > 0$. Observe que (P_3) pode ser re-escrito como

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = \mu |u|^{s-1}u + |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{S_3}$$

Assumiremos que (p, q) pertence a hipérbole crítica

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{N-2}{N}, \tag{2}$$

[*]Há um pequeno erro em [4, Theorem 1.1] e, de acordo com a notação nesse artigo, a condição $2_{**} - 2 \leq q < 2_{**}$ deve ser lida como $2_{**} - 2 < q < 2_{**}$. As potências $s+1$ e 2_* nesse trabalho correspondem, respectivamente, as potências q e 2^{**} em [4]. Veja a prova do Lema 2.6 desta tese para mais detalhes.

e $\frac{p+1}{p} \leq s+1 < q+1$. Denotamos agora $E(\Omega) := W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Seja também $\mu_1(\Omega)$ o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu|u|^{\frac{1}{p}-1}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Observe que a condição $\frac{p+1}{p} < s+1$ diz que a perturbação $|u|^{s-1}u$ é do tipo "superlinear" para o operador $\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)$ e no caso $\frac{p+1}{p} = s+1$ então $|u|^{s-1}u$ e $\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)$ têm mesma homogeneidade.

Lembramos que a hipérbole crítica (3.1) é um determinante para a existência de solução positiva para o sistema (S_3) no caso em que $\mu = 0$. Neste caso o sistema (S_3) não tem solução positiva se (p, q) pertence ou está acima da hipérbole crítica, isto é,

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq \frac{N-2}{N}.$$

Este tipo de resultado, baseado em um identidade do tipo Pohozăev foi observado por Clément et al. [15] e van der Vorst [48]; veja também Pucci e Serrin [39], Mitidieri [34] e Peletier e van der Vorst [37].

Para obtermos solução para o problema (P_3), analisamos a existência de pontos críticos não-triviais do funcional

$$I_\mu(u) := \frac{p}{p+1}\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx - \frac{\mu}{s+1}\int_\Omega |u|^{s+1}dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx,\ u \in E(\Omega), \tag{4}$$

e ao constatarmos que o mesmo possui a geometria do passo da montanha, Lema 3.9, procuramos condições nas quais o funcional I_μ satisfaz a condição (PS), Lema 3.18, e onde estaria localizado o nível do passo da montanha, Lema 3.19.

Visando tornar claro a definição que será dada a seguir, voltemos ao problema clássico de Brezis e Nirenberg (BN). Sabemos que as funções que realizam a constante de Sobolev

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx;\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}dx = 1\right\}, \quad N \geq 3,$$

comportam-se no infinito como $r^{-(N-2)}$. Segundo os argumentos de Brezis e Nirenberg [12, Lemma 1.2], a definição de dimensão crítica e não-crítica associada ao problema (BN) surge naturalmente da L^2-integrabilidade de $|x|^{-(N-2)}$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_1(0)$, mais precisamente

$$\begin{aligned} &2(N-2) \geq N \quad \text{corresponde as dimensões não-críticas para (BN), e} \\ &2(N-2) < N \quad \text{corresponde as dimensões críticas para (BN),} \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} &N \geq 4 \quad \text{são as dimensões não-críticas para (BN), e} \\ &N = 3 \quad \text{é a dimensão crítica para (BN).} \end{aligned}$$

Argumentos semelhantes foram introduzidos em [19, §7 e §8] para classificar as dimensões críticas e não-críticas associadas ao problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{p-1} + u^{p^*-1}, & u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P'}$$

onde $p^* = pN/(N-p)$. Sabendo que as funções que realizam

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx;\ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx = 1\right\}, \quad N > p,$$

comportam-se no infinito como $r^{-\frac{N-p}{p-1}}$, a definição de dimensão crítica e não-crítica associada ao problema (P') surge da L^p-integrabilidade de $|x|^{-\frac{N-p}{p-1}}$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_1(0)$, mais precisamente

$$\begin{aligned} &N \geq p^2 \quad \text{são as dimensões não-críticas para (P'), e} \\ &p < N < p^2 \quad \text{são as dimensões críticas para (P').} \end{aligned}$$

Ao analisar o comportamento assintótico dos instantons que realizam a constante de Sobolev

$$S = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx;\ u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1} dx = 1\right\}, \tag{5}$$

ver [25, (1.14), (1.15) e (1.16)], ou (3.5), (3.6) e (3.7) neste trabalho, observamos que, para $p < \frac{N}{N-2}$, o instanton, no infinito, comporta-se como $r^{-[p(N-2)-2]}$. Logo, visando proceder como Brezis e Nirenberg [12, Lemma 1.2], para garantir a existência de solução para o problema (P_3) com perturbação de mesma ordem, isto é, $s = 1/p$, faz-se necessário considerar

$$[p(N-2)-2]\left(\frac{p+1}{p}\right) \geq N, \quad \text{ou equivalentemente,} \quad \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p < \frac{N}{N-2}.$$

Note que $\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} < \frac{N}{N-2}$ se, e somente se, $N \geq 6$. Observe também que

$$[p(N-2)-2]\left(\frac{p+1}{p}\right) \geq N \ \text{ é equivalente a } \ N \geq 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^2.$$

Isto indica a naturalidade desta restrição quando a comparamos com as dimensões não-críticas do biharmônico e fazemos um paralelo da restrição $N \geq p^2$ para o p-Laplaciano com as dimensões não-críticas do Laplaciano. Para $p \geq \frac{N}{N-2}$, o comportamento no infinito dos instantons associados a (5) é descrito por $r^{-(N-2)}$, veja (3.6) e (3.7), e somos induzidos a considerar

$$(N-2)\left(\frac{p+1}{p}\right) \geq N, \quad \text{ou equivalentemente,} \quad \frac{N}{N-2} \leq p \leq \frac{N-2}{2}.$$

Mais uma vez, observe que a desigualdade $\frac{N}{N-2} \leq \frac{N-2}{2}$ é válida se, e somente se, $N \geq 6$.

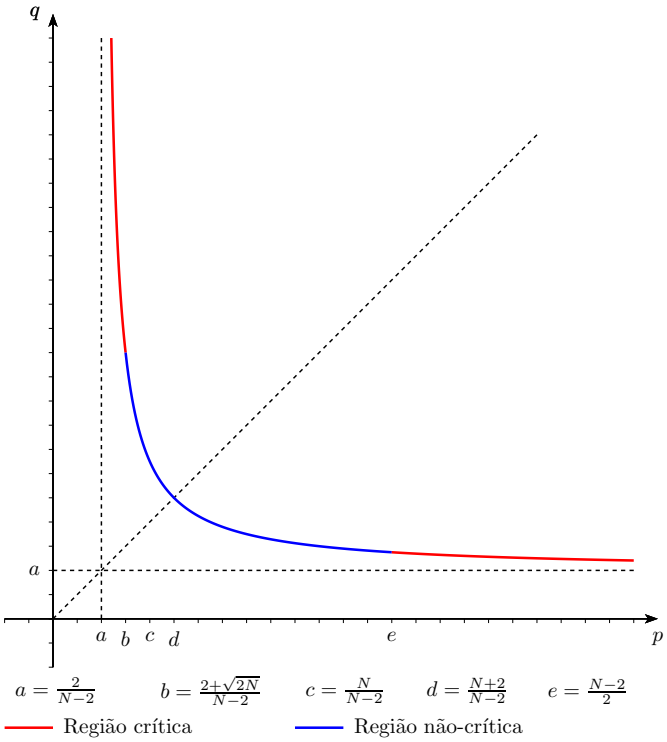
Com isso, introduzimos a noção de região não-crítica e região crítica da hipérbole crítica, dada em (2), associadas ao problema (P_3).

Definição 3.1. *Dizemos que o ponto (p, q) da hipérbole crítica (2) está em uma região:*

(a) Não-crítica se $N \geq 6$ e p satisfaz

$$\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p \leq \frac{N-2}{2}. \tag{6}$$

(b) Crítica, se $N \geq 6$ e p não satisfaz (6); ou $N = 3, 4, 5$ e p qualquer.



Ao longo do terceiro capítulo, a hipótese (H), relativa a potência $s+1$, indica a seguinte situação:

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{(a)}\ \text{Na região não-crítica, i.e., } N \geq 6 \text{ e } \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p \leq \frac{N-2}{2}, \text{ suponha} \\
\qquad\qquad \frac{p+1}{p} \leq s+1 < q+1. \\
\textbf{(b)}\ \text{Nas regiões críticas,} \\
\quad \text{(b1) } N \geq 6 \text{ e } \frac{2}{N-2} < p < \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2}, \text{ suponha } q-p < s+1 < q+1; \\
\quad \text{(b2) } N \geq 6 \text{ e } p > \frac{N-2}{2}, \text{ suponha } \frac{(p-1)(q+1)}{p} < s+1 < q+1; \\
\quad \text{(b3) } N = 3,4,5 \text{ e } \frac{2}{N-2} < p < \frac{N}{N-2}, \text{ suponha } q-p < s+1 < q+1; \\
\quad \text{(b4) } N = 3,4,5 \text{ e } p \geq \frac{N}{N-2}, \text{ suponha } \frac{(p-1)(q+1)}{p} < s+1 < q+1.
\end{array}\right\} \tag{H}$$

Observe que no caso biharmônico, isto é, no caso $p = 1$, a hipótese (H) é reduzida à hipótese sobre $s+1$ do Teorema 2.1, de modo que a hipótese na região não-crítica é equivalente a hipótese nas dimensões não-críticas para o problema (P_2), enquanto as hipóteses relativas as regiões críticas correspondem a hipótese nas dimensões críticas para o problema (P_2).

Também vale ressaltar que hipóteses semelhantes a (H) foram introduzidas em [12, eq. (0.6)] para estudar o problema

$$-\Delta u = \lambda u^{s-1} + u^{2^*-1}, \quad u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

e em [19, §7 e §8] e [20, Section 3] para estudar

$$-\Delta_p u = \lambda u^{s-1} + u^{p^*-1}, \quad u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \quad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega.$$

Teorema 3.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$, $\mu_1(\Omega)$ primeiro autovalor do problema* (3)*. Então, sob a hipótese* (H)*, o problema* (P_3) *admite uma solução clássica $u \in \mathcal{C}^4(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo $u, -\Delta u > 0$ em Ω.*

Na Seção 3.3, onde faremos a demonstração do Lema 3.19 ficará claro onde a condição sob a perturbação $s + 1$ de cada linha na hipótese (H) é necessária; mais especificamente, para cada dimensão $N \geq 3$ a condição sob a perturbação $s + 1$ nas regiões críticas e não-críticas da hipérbole crítica, quando esta última existir. Como consequência direta dos Lemas 3.18 e 3.19, e do teorema clássico do passo da montanha [6], obtivemos um resultado de existência de solução para o problema (P_3).

É importante destacar que o Teorema 3.3 inclui todos os resultados em [24, Theorem 2] para o sistema (S_3), uma vez que [24, Theorem 2] trata o caso particular $s = 1$ e que, neste caso, nossa hipótese (H) é equivalente as hipóteses em [24]. Também acreditamos ser mais natural trabalhar com (S_3) com $s = \frac{1}{p}$ em lugar de $s = 1$.

No Capítulo 3 também apresentamos alguns resultados que descrevem propriedades qualitativas das soluções de energia mínima do problema (P_3); cf. Teorema 3.6.

Ainda no Capítulo 3, indicamos o que devem ser as regiões crítica e não-crítica da hipérbole crítica associada ao sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |v|^{\frac{1}{q}-1} u + |v|^{p-1} v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = \mu |u|^{\frac{1}{p}-1} u + |u|^{q-1} u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{S_1}$$

Por fim, no **Capítulo 4** estudamos a existência de múltiplas soluções para o problema (P_3) no caso em que a perturbação $|u|^{s-1}u$ tem a mesma homogeneidade do operador $\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)$, isto é, no caso $s = 1/p$. Mais precisamente, dedicamos este capítulo ao estudo de múltiplas soluções para o problema de quarta-ordem

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu |u|^{\frac{1}{p}-1} u + |u|^{q-1} u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3'}$$

satisfazendo

$$u, -\Delta u > 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 6$, $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$, onde $\mu_1(\Omega)$ é dado por (3) e (p, q) pertence a região não-crítica da hipérbole crítica dada pela Definição 3.1 (a). Novamente, relacionamos o número de soluções do problema (P_3') com a topologia do domínio Ω, mais precisamente, com a sua categoria de Lusternik-Schnirelman, trabalhando mais uma vez como o parâmetro $\mu > 0$ suficientemente pequeno.

Teorema 4.1. *Sejam Ω um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$ e (p, q) um ponto da hipérbole crítica na região não-crítica associada ao problema (P_3'). Então existe $0 < \overline{\mu} < \mu_1(\Omega)$, $\mu_1(\Omega)$ dado por (3), tal que, para $0 < \mu < \overline{\mu}$, o problema (P_3') possui, no mínimo, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções clássicas.*

Neste quarto capítulo aplicamos um procedimento semelhante àquele aplicado no Capítulo 1 para obter múltiplas soluções para o problema (P_3'). De fato, o caso $p = 1$ no problema (P_3') torna-se o problema (P_1), e a hipótese $\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p$ do Teorema 4.1 é reduzida a $N \geq 8$ (dimensões não-críticas para o biharmônico). Entretanto, ao trabalharmos agora no espaço de Banach $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ em vez do espaço de Hilbert $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, algumas dificuldades extras surgem.

Uma diferença a ser citada é a hipótese (4.18) necessária para a demonstração do Lema de concentração e compacidade 4.4, que é dispensável no Lema de concentração e compacidade 1.4, este último usado nos Capítulos 1 e 2. Com essa hipótese adicional, foram necessários alguns resultados complementares, ver Lemas 4.5 e 4.12, para que o Lema 4.4 pudesse ser aplicado. Outro fato a ser destacado é que, enquanto foi possível, nos Capítulos 1 e 2, aplicarmos um princípio de comparação válido para o operador biharmônico sob a condição de fronteira de Navier, neste quarto capítulo fizemos uso de um argumento de energia, juntamente com o resultado de regularidade Teorema 3.8, para obtermos a positividade das múltiplas soluções; cf. Lema 4.2.

Finalizamos esta tese com o **Apêndice A**, no qual fazemos uma análise sobre os caminhos que caracterizam o nível do passo da montanha do funcional I_μ dado em (4), e assim concluir que o ponto crítico $u \in E(\Omega)$ do funcional I_μ obtido através dessa geometria pode ser tomado, a menos de substituir u por $-u$, de modo que $u, -\Delta u \geq 0$, apresentando assim uma maneira alternativa para concluir a positividade de u e $-\Delta u$ no Teorema 3.3. Ressaltamos que com este argumento não é necessário considerar $\mu > 0$ pequeno.

Capítulo

1

Multiplicidade de soluções para o problema (P_1)

Neste capítulo provamos a existência de múltiplas soluções clássicas para o problema de quarta-ordem envolvendo o operador biharmônico

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu u + u^{2_*-1} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, -\Delta u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 8$, $2_* = 2N/(N-4)$ e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$, onde $\mu_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor de

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Teorema 1.1. *Se Ω é um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 8$, então existe $0 < \overline{\mu} < \mu_1(\Omega)$ tal que, para cada $0 < \mu < \overline{\mu}$, o problema (P_1) possui, pelo menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções clássicas.*

1.1 Preliminares

Primeiramente, fixaremos algumas notações. Consideramos o espaço $E(\Omega) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ munido da norma $\|u\| := |\Delta u|_2$, que por sua vez é induzida pelo produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx, \quad u, v \in E(\Omega). \tag{1.2}$$

Nesta parte, temos as seguintes hipóteses: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, é um domínio suave limitado e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$.

Considere a constante de Sobolev da imersão $E(\Omega) \hookrightarrow L^{2_*}(\Omega)$, dada por

$$S(\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\Delta u|^2 dx;\ u \in E(\Omega), \int_\Omega |u|^{2_*} dx = 1\right\}. \tag{1.3}$$

É sabido que $S(\Omega)$ não depende de Ω e $S(\Omega)$ nunca é atingido, exceto quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ [46]. Mais ainda, $S(\Omega) = S$, onde

$$S = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx;\ u \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_*} dx = 1\right\}, \tag{1.4}$$

que é atingido precisamente pelas funções $S^{\frac{4-N}{8}}\varphi_{\delta,a}$, com

$$\varphi_{\delta,a}(x) = \frac{[(N-4)(N-2)N(N+2)]^{\frac{N-4}{8}}\delta^{\frac{N-4}{2}}}{(\delta^2 + |x-a|^2)^{\frac{N-4}{2}}} = \frac{C_N \delta^{\frac{N-4}{2}}}{(\delta^2 + |x-a|^2)^{\frac{N-4}{2}}}, \tag{1.5}$$

para todo $a \in \mathbb{R}^N$ e $\delta > 0$ [21, Lemma 1]. Lembramos também que as funções dadas por (1.5) são precisamente as soluções positivas e regulares da equação

$$\Delta^2 u = u^{2_*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Defina, para $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$, a norma

$$\|u\|_\mu := \left(|\Delta u|_2^2 - \mu |u|_2^2\right)^{1/2}, \quad \forall\, u \in E(\Omega), \tag{1.6}$$

e observe a equivalência

$$\|u\|_\mu \leq \|u\| \leq c(\Omega)\|u\|_\mu, \quad \forall\, u \in E(\Omega), \tag{1.7}$$

onde $c(\Omega) = \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right)^{-1/2} > 0$.

Para estudar a existência de soluções para o problema (P_1), consideramos o funcional

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega (u^+)^2 dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega (u^+)^{2_*} dx, \quad u \in E(\Omega). \tag{1.8}$$

Definição 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 8$, um domínio suave e limitado e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Dizemos que $u \in E(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (P_1) se u é um ponto crítico de I, isto é, $u \in E(\Omega)$ satisfaz*

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \mu \int_\Omega (u^+) v dx + \int_\Omega (u^+)^{2_*-1} v dx, \quad \forall\, v \in E(\Omega). \tag{1.9}$$

Lema 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 8$, um domínio suave e limitado e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Então as soluções clássicas $C^4(\overline{\Omega})$ de (P_1) são precisamente os pontos críticos não triviais do funcional I definido em* (1.8).

Demonstração. Os resultados em [46, Appendix B], [2, Theorem 12.7] e [22, Theorems 2.19 e 2.20] garantem que os pontos críticos não triviais de I são precisamente as soluções clássicas de (P_1). Argumentamos como em [14, p. 375] para provar que todo ponto crítico não trivial de I satisfaz $u, -\Delta u > 0$ em Ω: se u é ponto crítico não trivial de I, então u satisfaz (1.9), para todo $v \in E(\Omega)$. Como $-\Delta : E(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um isomorfismo isométrico [23, Chapter 9] temos

$$\int_\Omega \Delta u(-w)dx = \mu \int_\Omega (u^+)[(-\Delta)^{-1}w]dx + \int_\Omega (u^+)^{2_*-1}[(-\Delta)^{-1}w]dx, \quad \forall\, w \in L^2(\Omega),$$

e $(-\Delta)^{-1}w \geq 0$, para todo $w \in L^2(\Omega)$, $w \geq 0$. Dessa maneira,

$$\int_\Omega \Delta u(-w)dx \geq 0, \forall\, w \geq 0,$$

e portanto $-\Delta u \geq 0$ e consequentemente $u \geq 0$. Sendo u não trivial, segue do princípio do máximo forte que $u, -\Delta u > 0$ em Ω. □

Estudar o funcional I é equivalente a estudar o funcional

$$I_\mu(u) := \int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \mu \int_\Omega (u^+)^2 dx, \tag{1.10}$$

restrito a variedade

$$V := \{u \in E(\Omega); \psi(u) = 1\} \quad \text{onde} \quad \psi(u) := \int_\Omega (u^+)^{2_*} dx. \tag{1.11}$$

Também definimos

$$m(\mu, \Omega) := \inf\{I_\mu(u); u \in V\} \tag{1.12}$$

e, se $\Omega = B_\rho(0)$, denotamos $m(\mu, \rho) := m(\mu, B_\rho(0))$.

Provaremos que o funcional $I_\mu|_V$ possui, pelo menos, tantos pontos críticos quanto a categoria de Lusternik-Schnirelman de Ω, que a menos de multiplicação por constantes apropriadas serão soluções clássicas para o problema (P_1).

1.2 Compacidade

O próximo lema descreve a falta de compacidade da imersão de $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2_*}(\mathbb{R}^N)$. Um resultado similar para a imersão de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é provado em [49, Lemma 1.40]; ver também [7, 9, 29].

Lema 1.4 (**Concentração e compacidade**). *Seja* $(u_n) \subset \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N), \tag{1.13}$$

$$|\Delta(u_n - u)|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \quad no\ sentido\ das\ medidas\ em \quad \mathbb{R}^N, \tag{1.14}$$

$$|u_n - u|^{2_*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu \quad no\ sentido\ das\ medidas\ em \quad \mathbb{R}^N, \tag{1.15}$$

$$u_n \to u \quad q.t.p.\ em \quad \mathbb{R}^N. \tag{1.16}$$

Defina

$$\lambda_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |\Delta u_n|^2 dx, \quad \nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |u_n|^{2_*} dx.$$

Temos então

$$\|\nu\|^{2/2_*} \leq S^{-1}\|\lambda\|, \tag{1.17}$$

$$\nu_\infty^{2/2_*} \leq S^{-1}\lambda_\infty, \tag{1.18}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Delta u_n|_2^2 = |\Delta u|_2^2 + \|\lambda\| + \lambda_\infty, \tag{1.19}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|_{2_*}^{2_*} = |u|_{2_*}^{2_*} + \|\nu\| + \nu_\infty. \tag{1.20}$$

Mais ainda, se $u = 0$ *e* $\|\nu\|^{2/2_*} = S^{-1}\|\lambda\|$, *então* λ *e* ν *estão concentradas em um único ponto em comum.*

Demonstração. Ver Seção 1.4. □

Lema 1.5. *Suponha* $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. *Toda sequência* (PS) *para* I *é limitada.*

Demonstração. Segue de argumentos padrões, pois

$$\|u\|_\mu = \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \mu \int_\Omega (u^+)^2 dx \right)^{1/2}, \quad u \in E(\Omega),$$

é uma norma em $E(\Omega)$ e $2_* > 2$. □

Lema 1.6. *Suponha* $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. *Toda sequência* $(u_n) \subset E(\Omega)$ *tal que*

$$I(u_n) \to d < c^* := \frac{2}{N} S^{N/4} \quad e \quad I'(u_n) \to 0$$

admite uma subsequência convergente, onde I *é dado em* (1.8).

Demonstração. Do Lema 1.5 segue que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ E(\Omega), \quad u_n \to u \ \text{ em } \ L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad u_n \to u \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Para todo $\varphi \in E(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega \Delta u_n \Delta\varphi dx - \mu \int_\Omega (u_n^+)\varphi dx = \int_\Omega (u_n^+)^{2_*-1}\varphi dx + o_n(1). \tag{1.21}$$

Da imersão contínua $E(\Omega) \hookrightarrow L^{2_*}(\Omega)$, (u_n^+) é limitada em $L^{2_*}(\Omega)$ e consequentemente $((u_n^+)^{2_*-1})$ é limitada em $L^{\frac{2_*}{2_*-1}}(\Omega)$; temos também $u_n^+ \to u^+$ q.t.p. em Ω. Portanto, como uma consequência do lema de Brezis-Lieb, ver por exemplo [27, Lemma 4.8], $(u_n^+)^{2_*-1} \rightharpoonup (u^+)^{2_*-1}$ em $L^{\frac{2_*}{2_*-1}}(\Omega)$, e obtemos

$$\int_\Omega (u_n^+)^{2_*-1}\varphi dx \to \int_\Omega (u^+)^{2_*-1}\varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in L^{2_*}(\Omega), \tag{1.22}$$

em particular, (1.22) é válido para todo $\varphi \in E(\Omega)$. De $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ obtemos

$$\int_\Omega (u_n^+)\varphi dx \to \int_\Omega (u^+)\varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in E(\Omega). \tag{1.23}$$

Agora, como $u_n \rightharpoonup u$ em $E(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Delta u_n \Delta\varphi dx =: \langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle := \int_\Omega \Delta u \Delta\varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in E(\Omega). \tag{1.24}$$

Dessa maneira, fazendo $n \to \infty$ em (1.21) e usando (1.22)-(1.24) concluímos que

$$\int_\Omega \Delta u \Delta\varphi dx - \mu \int_\Omega (u^+)\varphi dx = \int_\Omega (u^+)^{2_*-1}\varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in E(\Omega), \tag{1.25}$$

ou seja, u é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu(u^+) + (u^+)^{2_*-1} & \text{em } \Omega, \\ u, \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e, argumentando como no Lema 1.3, fazendo uso do princípio do máximo fraco, concluímos que $u, -\Delta u \geq 0$ em Ω.

Fazendo $\varphi = u$ em (1.25) obtemos

$$|\Delta u|_2^2 - \mu |u^+|_2^2 = |u^+|_{2_*}^{2_*} \tag{1.26}$$

e

$$I(u) = \frac{1}{2}\left[|\Delta u|_2^2 - \mu|u^+|_2^2\right] - \frac{1}{2_*}|u^+|_{2_*}^{2_*} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)|u^+|_{2_*}^{2_*} \geq 0. \tag{1.27}$$

Fazendo agora $v_n = u_n - u$, ver [49, p. 33], o lema de Brezis-Lieb [11] nos fornece

$$|u_n^+|_{2_*}^{2_*} = |u^+|_{2_*}^{2_*} + |v_n^+|_{2_*}^{2_*} + o_n(1). \tag{1.28}$$

De $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, temos também

$$|u_n^+|_2^2 = |u^+|_2^2 + |v_n^+|_2^2 + o_n(1). \tag{1.29}$$

Usando (1.28) e (1.29) temos

$$I(u_n) = \frac{1}{2}|\Delta u_n|_2^2 - \frac{\mu}{2}|u_n^+|_2^2 - \frac{1}{2_*}|u_n^+|_{2_*}^{2_*} = I(u) + \frac{1}{2}|\Delta v_n|_2^2 - \frac{\mu}{2}|v_n^+|_2^2 - \frac{1}{2_*}|v_n^+|_{2_*}^{2_*} + o_n(1),$$

pois $v_n \rightharpoonup 0$ em $E(\Omega)$. Assumindo que $I(u_n) \to d < c^*$, obtemos

$$I(u) + \frac{1}{2}|\Delta v_n|_2^2 - \frac{\mu}{2}|v_n^+|_2^2 - \frac{1}{2_*}|v_n^+|_{2_*}^{2_*} \to d. \tag{1.30}$$

Usando novamente (1.28) e (1.29)

$$\begin{aligned} I'(u_n)u_n &= |\Delta u_n|_2^2 - \mu|u_n^+|_2^2 - |u_n^+|_{2_*}^{2_*} \\ &= |\Delta v_n|_2^2 + 2\langle v_n, u\rangle + |\Delta u|_2^2 - \mu|u^+|_2^2 - \mu|v_n^+|_2^2 - |u^+|_{2_*}^{2_*} - |v_n^+|_{2_*}^{2_*} + o_n(1) \end{aligned}$$

e como $I'(u_n)u_n \to 0$, concluímos, agora usando (1.26), que

$$|\Delta v_n|_2^2 - \mu|v_n^+|_2^2 - |v_n^+|_{2_*}^{2_*} \to |\Delta u|_2^2 - \mu|u^+|_2^2 - |u^+|_{2_*}^{2_*} = 0.$$

Dessa forma, podemos assumir que

$$|\Delta v_n|_2^2 - \mu|v_n^+|_2^2 \to b \quad \text{e} \quad |v_n^+|_{2_*}^{2_*} \to b.$$

Como $v_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$, em particular, $v_n^+ \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Então segue que $|\Delta v_n|_2^2 \to b$. Da definição de S, temos

$$|\Delta v_n|_2^2 \geq S|v_n|_{2_*}^2 \geq S|v_n^+|_{2_*}^2$$

o que implica $b \geq Sb^{\frac{2}{2_*}} = Sb^{\frac{N-4}{N}}$. Assim, ou $b = 0$ ou $b \geq S^{\frac{N}{4}}$. De (1.30),

$$I(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)b = I(u) + \frac{2}{N}b = d$$

e de (1.27), $d \geq \frac{2}{N}b$. Se $b \geq S^{\frac{N}{4}}$ então

$$c^* = \frac{2}{N}S^{\frac{N}{4}} \leq \frac{2}{N}b \leq d < c^*,$$

uma contradição. Portanto, $b = 0$, e a prova está completa, pois

$$\|u_n - u\|^2 = \|v_n\|^2 = |\Delta v_n|_2^2 \to 0, \quad \text{isto é,} \quad u_n \to u \quad \text{em} \quad E(\Omega). \qquad \square$$

Lema 1.7. *Suponha $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Toda sequência $(u_n) \subset V$ tal que*

$$I_\mu(u_n) \to c < S, \quad \|I'_\mu(u_n)\|_* \to 0, \tag{1.31}$$

admite uma subsequência convergente, onde $\|.\|_*$ denota a norma da derivada de $I_\mu|_V$, e é dada por

$$\|I'_\mu(u)\|_* = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|I'_\mu(u) - \lambda\psi'(u)\|, \quad \forall\, u \in V.$$

Demonstração. Se (u_n) satisfaz (1.31), então

$$0 \leq I_\mu(u_n) \to c,$$

$$\|I'_\mu(u_n)\|_* = \|I'_\mu(u_n) - \overline{\lambda}_n\psi'(u_n)\| \to 0, \quad \overline{\lambda}_n \in \mathbb{R}.$$

Então, existe $(\sigma_n) \subset [0, +\infty)$, $\sigma_n \to 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega \Delta u_n \Delta w dx - \mu \int_\Omega (u_n^+) w dx - \lambda_n \int_\Omega (u_n^+)^{2_*-1} w dx \right| \leq \sigma_n \|w\|, \quad \forall\, w \in E(\Omega),\ \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

A sequência (u_n) é limitada em $E(\Omega)$. De fato,

$$\|u_n\|^2 = \|u_n\|^2 - \mu |u_n^+|_2^2 + \mu |u_n^+|_2^2 = c + o_n(1) + \mu |u_n^+|_2^2,$$

e da imersão contínua de $L^{2_*}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, segue que (u_n) é limitada em $E(\Omega)$. Dessa maneira

$$\left| \int_\Omega [|\Delta u_n|^2 - \mu (u_n^+)^2] dx - \lambda_n \int_\Omega (u_n^+)^{2_*} dx \right| \leq \sigma_n \|u_n\| \quad \Rightarrow \quad I_\mu(u_n) - \lambda_n \to 0,$$

isto é, $\lambda_n \to c \geq 0$.

Se $c = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 \leq \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right) \|u_n\|^2 &= \|u_n\|^2 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)} \|u_n\|^2 \leq \|u_n\|^2 - \mu |u_n|^2 \leq \|u_n\|^2 - \mu |u_n^+|^2 \\ &= I_\mu(u_n) \to 0, \end{aligned}$$

e (u_n) converge forte para 0 em $E(\Omega)$.

Se $c > 0$, então $\lambda_n > 0$ para n suficientemente grande. Faça $v_n = \lambda_n^{\frac{1}{2_*-2}} u_n$. Tomando I dado por (1.8) temos

$$\begin{aligned} I(v_n) &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\Delta(\lambda_n^{\frac{1}{2_*-2}} u_n)|^2 - \mu (\lambda_n^{\frac{1}{2_*-2}} u_n^+)^2 \right] dx - \frac{1}{2_*} \int_\Omega (\lambda_n^{\frac{1}{2_*-2}} u_n^+)^{2_*} dx \\ &= \frac{1}{2} \lambda_n^{\frac{2}{2_*-2}} I_\mu(u_n) - \frac{1}{2_*} \lambda_n^{\frac{2_*}{2_*-2}} \to \frac{1}{2} c^{\frac{2}{2_*-2}} c - \frac{1}{2_*} c^{\frac{2_*}{2_*-2}} = \frac{2}{N} c^{\frac{N}{4}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |I'(v_n) w| &= \left| \int_\Omega [\Delta(\lambda_n^{\frac{1}{2_*-2}} u_n) \Delta w - \mu (\lambda_n^{\frac{1}{2_*-2}} u_n^+) w] dx - \int_\Omega (\lambda_n^{\frac{1}{2_*-2}} u_n^+)^{2_*-1} w dx \right| \\ &= \lambda_n^{\frac{1}{2_*-2}} \left| \int_\Omega [\Delta u_n \Delta w - \mu (u_n^+) w - \lambda_n (u_n^+)^{2_*-1} w] dx \right| \leq \lambda_n^{\frac{1}{2_*-2}} \sigma_n \|w\|, \quad \forall\, w \in E(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto

$$I(v_n) \to \frac{2}{N} c^{\frac{N}{4}} < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}} = c^* \quad \text{e} \quad I'(v_n) \to 0.$$

Do Lema 1.6, (v_n) admite uma subsequência convergente, e então (u_n) também admite uma subsequência convergente. □

1.3 Multiplicidade de soluções

Primeiramente, recordaremos um resultado clássico da teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman [30].

Teorema 1.8. *[49, Theorem 5.20] Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{C}^2(X,\mathbb{R})$, $V = \{v \in X; \psi(v) = 1\}$, e suponha que para todo $v \in V$, $\psi'(v) \neq 0$. Se $\varphi|_V$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [\inf_V \varphi, d]$, então $\varphi|_V$ possui um mínimo e o conjunto $\varphi^d := \{v \in V; \varphi(v) \leq d\}$ possui, pelo menos, $cat_{\varphi^d}(\varphi^d)$ pontos críticos de $\varphi|_V$.*

No nosso contexto, $X = E(\Omega)$, $\psi(u) = \int_\Omega (u^+)^{2_*} dx$ e $\varphi = I_\mu$.

Lema 1.9. *Sejam $N \geq 8$ e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Existe $v \in E(\Omega)\backslash\{0\}$, com $v > 0$ em Ω tal que*

$$\frac{\|v\|_\mu^2}{|v|_{2_*}^2} = \frac{|\Delta v|_2^2 - \mu |v|_2^2}{|v|_{2_*}^2} < S. \tag{1.32}$$

Demonstração. Ver Seção 1.5. □

Lema 1.10. *Se $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$ e $N \geq 8$, então*

$$m(\mu, \Omega) < S$$

e existe $u \in V$, tal que $u, -\Delta u > 0$ em Ω e $I_\mu(u) = m(\mu,\Omega)$, com $m(\mu,\Omega)$ como definido em (1.12).

Demonstração. Do Lema 1.9, existe $v \in E(\Omega)\backslash\{0\}$ não-negativa tal que

$$\frac{|\Delta v|_2^2 - \mu |v|_2^2}{|v|_{2_*}^2} < S.$$

Fazendo $w = v/|v|_{2_*}$, temos $w \in V$ e

$$I_\mu(w) = |\Delta w|_2^2 - \mu |w^+|_2^2 = |\Delta w|_2^2 - \mu |w|_2^2 = \frac{|\Delta v|_2^2 - \mu |v|_2^2}{|v|_{2_*}^2} < S,$$

e portanto

$$m(\mu,\Omega) = \inf_{u \in V} I_\mu(u) \leq I_\mu(w) < S.$$

Do Lema 1.7, $I_\mu|_V$ satisfaz a condição $(PS)_c$, com $c = m(\mu,\Omega)$. Pelo Teorema 1.8, $I_\mu|_V$ possui um mínimo, isto é, existe $u \in V$ tal que

$$I_\mu(u) = m(\mu,\Omega) = \min_{u \in V} I_\mu(u).$$

Agora mostraremos que $u, -\Delta u > 0$ em Ω. Como u é tal que

$$|u^+|_{2_*}^{2_*} = 1, \quad I_\mu(u) = |\Delta u|_2^2 - \mu |u^+|_2^2 = m(\mu,\Omega) > 0,$$

segue do teorema dos multiplicadores de Lagrange que u satisfaz

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \mu \int_\Omega (u^+) v dx + m(\mu,\Omega) \int_\Omega (u^+)^{2_*-1} v dx, \quad \forall\, v \in E(\Omega).$$

Logo,

$$\int_\Omega \Delta u(-w)dx = \mu \int_\Omega (u^+)[(-\Delta)^{-1}w]dx + m(\mu,\Omega)\int_\Omega (u^+)^{2_*-1}[(-\Delta)^{-1}w]dx, \quad \forall\, w \in L^2(\Omega),$$

e $(-\Delta)^{-1}w \geq 0$, para todo $w \in L^2(\Omega)$, $w \geq 0$. Assim,

$$\int_\Omega \Delta u(-w)dx \geq 0, \quad \forall\, w \geq 0,$$

e então, do princípio do máximo fraco, $-\Delta u \geq 0$ e consequentemente $u \geq 0$. Como u é não trivial e, a menos de multiplicação por constante, é ponto crítico do funcional I dado em (1.8), segue agora do Lema 1.3 que $u, -\Delta u > 0$ em Ω. □

Lema 1.11. *Se Ω_1 e Ω_2 são domínios regulares limitados de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 8$, tais que $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ e $0 < \mu < \mu_1(\Omega_2)$, então $m(\mu,\Omega_1) > m(\mu,\Omega_2)$.*

Demonstração. Primeiro, recordamos que $\mu_1(\Omega_2) < \mu_1(\Omega_1)$. Seja $u \in E(\Omega_1)$ uma função tal que $u, -\Delta u > 0$ em Ω e

$$\int_{\Omega_1} (u^+)^{2_*}dx = 1, \quad \int_{\Omega_1} [|\Delta u|^2 - \mu(u^+)^2]dx = m(\mu,\Omega_1),$$

e tome w solução de

$$\begin{cases} -\Delta w = \widetilde{-\Delta u} & \text{em } \Omega_2, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_2, \end{cases}$$

onde $\sim$ denota a extensão por zero fora de Ω_1. Note que $w > 0$ em Ω_2 e $w > u$ em Ω_1. Fazendo $\overline{w} = \frac{w}{|w|_{2_*,\Omega_2}}$, temos $|\overline{w}^+|_{2_*,\Omega_2} = 1$ e

$$\begin{aligned} m(\mu,\Omega_2) &\leq \int_{\Omega_2} [|\Delta\overline{w}|^2 - \mu(\overline{w}^+)^2]dx = \frac{1}{|w|^2_{2_*,\Omega_2}}\int_{\Omega_2} [|\Delta w|^2 - \mu(w^+)^2]dx \\ &< \int_{\Omega_2} [|\Delta w|^2 - \mu(w^+)]dx < \int_{\Omega_1} [|\Delta u|^2 - \mu(u^+)^2]dx = m(\mu,\Omega_1). \end{aligned}$$

□

Lema 1.12. *Se $\Omega = B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 8$ e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$, então $m(\mu,\rho)$ é atingido por uma função u tal que $u, -\Delta u > 0$ em $B_\rho(0)$ e $u, -\Delta u$ são radialmente simétricas. Mais ainda, tal solução u é única.*

Demonstração. Seja u uma função tal que $u, -\Delta u > 0$ em $B_\rho(0)$ e que realiza $m(\mu,\rho)$. Denote por u^* e $(-\Delta u)^*$ as simetrizações de Schwarz de u e $-\Delta u$, respectivamente. Se v é a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v = (-\Delta u)^* & \text{em } B_\rho(0), \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B_\rho(0), \end{cases}$$

então $v = v^*$. Provaremos que $u = v$. De [5], ver também [10, Lemma 2.8], temos $v \geq u^*$ e

$$|v > u^*| = 0 \Leftrightarrow -\Delta u = (-\Delta u)^*.$$

Se $|v > u^*| > 0$, escreva $w = \frac{v}{|v|_{2_*}}$. Logo, $|w^+|_{2_*} = 1$ e

$$\begin{aligned} m(\mu,\rho) &\leq \int_{B_\rho(0)} [|\Delta w|^2 - \mu(w^+)^2]dx = \frac{1}{|v|_{2_*}^2}\int_{B_\rho(0)} [|\Delta v|^2 - \mu(v^+)^2]dx \\ &< \frac{1}{|v|_{2_*}^2}\int_{B_\rho(0)} [|(-\Delta u)^*|^2 - \mu(u^*)^2]dx < \frac{1}{|u^*|_{2_*}^2}\int_{B_\rho(0)} [|(-\Delta u)^*|^2 - \mu(u^*)^2]dx \\ &= \frac{1}{|u^+|_{2_*}^2}\int_{B_\rho(0)} [|-\Delta u|^2 - \mu(u^+)^2]dx = m(\mu,\rho), \end{aligned}$$

uma contradição. Dessa maneira, $-\Delta u = (-\Delta u)^*$ e como u e v são soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = (-\Delta u)^* \ \text{ em } \ B_\rho(0), \\ w = 0 \ \text{ sobre } \ \partial B_\rho(0), \end{cases}$$

segue que $u = v$.

Finalmente, mencionamos que a unicidade de u pode ser provada argumentando como em [17, Section 3] através do princípio da comparação para funções radiais [31]. □

Defina agora a aplicação baricentro $\beta : V \to \mathbb{R}^N$ por

$$\beta(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\Delta u|^2 x dx}{\displaystyle\int_\Omega |\Delta u|^2 dx}. \tag{1.33}$$

Lema 1.13. *Se $(u_n) \subset V$ é tal que $\|u_n\|^2 = |\Delta u_n|_2^2 \to S$, então dist$(\beta(u_n), \Omega) \to 0$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\text{dist}(\beta(u_n), \Omega) \not\to 0$. Logo, existe $r > 0$ tal que, a menos de subsequência,

$$\text{dist}(\beta(u_n), \Omega) > r.$$

Escreva $v_n = u_n/|\Delta u_n|_2 \in E(\Omega)$ e w_n como o potencial Newtoniano de $|\widetilde{-\Delta v_n}|$, onde $\sim$ denota a extensão por zero fora de Ω. Então, de [23, Theorem 9.9], segue que $w_n \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ e

$$-\Delta w_n = |\widetilde{-\Delta v_n}| \ \text{ q.t.p. in } \ \mathbb{R}^N. \tag{1.34}$$

Em particular, (w_n) é uma sequência limitada em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$. Logo, a menos de subsequência,

$$w_n \rightharpoonup w \ \text{ em } \ \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N),$$

$$|\Delta(w_n - w)|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \ \text{ no sentido das medidas em } \ \mathbb{R}^N,$$

$$|w_n - w|^{2_*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu \ \text{ no sentido das medidas em } \ \mathbb{R}^N,$$

$$w_n \to w \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N.$$

Do Lema 1.4, levando em conta que $\lambda_\infty = \nu_\infty = 0$ (pois Ω é limitado) e $w_n \geq |\widetilde{v_n}|$ em $\mathbb{R}^N$,

$$1 = |\Delta w|_2^2 + \|\lambda\|, \tag{1.35}$$

$$\frac{1}{S^{2_*/2}} \leq |w|_{2_*}^{2_*} + \|\nu\|, \tag{1.36}$$

e

$$\|\nu\|^{2/2_*} \leq \frac{1}{S}\|\lambda\|, \quad |w|_{2_*}^2 \leq \frac{1}{S}|\Delta w|_2^2. \tag{1.37}$$

Segue que o par $(|\Delta w|_2^2, \|\lambda\|) \in \{(1,0),(0,1)\}$. De fato, de (1.36) e (1.37)

$$\frac{1}{S^{2_*/2}} \leq |w|_{2_*}^{2_*} + \|\nu\| \leq \frac{1}{S^{2_*/2}}[|\Delta w|_2^{2_*} + \|\lambda\|^{2_*/2}],$$

isto é,

$$|\Delta w|_2^{2_*} + \|\lambda\|^{\frac{2_*}{2}} \geq 1. \tag{1.38}$$

De (1.35), (1.38) e como $2_*/2 > 1$, obtemos que o par $(|\Delta w|_2^2, \|\lambda\|) \in \{(1,0),(0,1)\}$.

Suponha agora que $|\Delta w|_2^2 = 1$ e $\|\lambda\| = 0$. Logo, de (1.37), $\|\nu\| = 0$, o que implica, de (1.36),

$$\frac{1}{S} \leq |w|_{2_*}^2 \leq \frac{1}{S}|\Delta w|_2^2 = \frac{1}{S}$$

e então $|\Delta w|_2^2/|w|_{2_*}^2 = S$. Assim, a menos de multiplicação, w é uma solução não-trivial e não-negativa para a equação

$$\Delta^2 w = w^{2_*-1} \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

e então, $w, -\Delta w > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Entretanto, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta w_n - \Delta w|^2 \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\lambda = 0,$$

o que implica, em particular,

$$\int_\Omega |\Delta w_n - \Delta w|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} |\Delta w|^2 \varphi dx \to 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \Omega),$$

e então $-\Delta w = 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$, o que gera uma contradição.

Dessa maneira, $|\Delta w|_2^2 = 0$ (e de (1.37), segue que $w = 0$) e $\|\lambda\| = 1$. De (1.36) e (1.37), obtemos $\|\nu\|^{2/2_*} = S^{-1}\|\lambda\|$. Dessa maneira, do Lema 1.4, segue que a medida λ está concentrada em um único ponto $y \in \mathbb{R}^N$.

Afirmamos agora que $y \in \overline{\Omega}$. De fato, suponha por contradição que $y \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. Tome $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi \equiv 1$ em $B_R(y)$, para algum $R > 0$, e $\text{supp}(\psi) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Então,

$$1 = \lambda(\{y\}) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi |\Delta w_n|^2 dx = 0,$$

o que é claramente uma contradição. Portanto, $y \in \overline{\Omega}$ e tomando $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\eta \equiv 1$ em $\overline{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned} \beta(u_n) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\Delta u_n|^2 x dx}{\displaystyle\int_\Omega |\Delta u_n|^2 dx} = \int_\Omega |\Delta v_n|^2 x dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta w_n|^2 x \eta(x) dx \\ &\to \int_{\mathbb{R}^N} x\eta(x) d\lambda = y\eta(y) = y \in \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

o que contradiz a nossa hipótese inicial $\text{dist}(\beta(u_n), \Omega) \not\to 0$. □

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $0 \in \Omega$. Seja $r > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\Omega_r^+ := \{x \in \mathbb{R}^N; \mathrm{dist}(x, \overline{\Omega}) \leq r\} \quad \text{e} \quad \Omega_r^- := \{x \in \Omega; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

sejam homotopicamente equivalentes a Ω e tais que $B_r(0) \subset \Omega$. Definimos também o conjunto

$$I_\mu^{m(\mu,r)} := \{u \in V; I_\mu(u) \leq m(\mu, r)\},$$

que é não-vazio; ver Lema 1.11.

Lema 1.14. *Existe* $0 < \overline{\mu} < \mu_1(\Omega)$ *tal que, para* $0 < \mu < \overline{\mu}$,

$$u \in I_\mu^{m(\mu,r)} \Rightarrow \beta(u) \in \Omega_r^+.$$

Demonstração. Se $u \in V$, então segue da desigualdade de Hölder

$$|u^+|_2^2 \leq |u^+|_{2_*}^2 |\Omega|^{\frac{2_*-2}{2_*}} = |\Omega|^{4/N}. \tag{1.39}$$

Do Lema 1.13, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$u \in V, \quad \|u\|^2 \leq S + \varepsilon \Rightarrow \beta(u) \in \Omega_r^+.$$

Faça $\overline{\mu} := \varepsilon/|\Omega|^{4/N}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $0 < \overline{\mu} < \mu_1(\Omega)$. Logo, se $0 < \mu < \overline{\mu}$ e $u \in I_\mu^{m(\mu,r)}$, obtemos, de (1.39) e Lema 1.10,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|u\|^2 - \mu|u^+|_2^2 + \mu|u^+|_2^2 = I_\mu(u) + \mu|u^+|_2^2 \leq m(\mu, r) + \overline{\mu}|u^+|_2^2 \\ &< S + \frac{\varepsilon}{|\Omega|^{\frac{4}{N}}}|\Omega|^{\frac{4}{N}} = S + \varepsilon, \end{aligned}$$

de modo que $\beta(u) \in \Omega_r^+$. □

Seja $\overline{\mu}$ como no Lema 1.14. Para cada $0 < \mu < \overline{\mu}$ definimos $\gamma_\mu : \Omega_r^- \to I_\mu^{m(\mu,r)}$ por

$$\begin{aligned} \gamma_\mu(y) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \gamma_\mu(y)(x) = \frac{w_y(x)}{|w_y|_{2_*}}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

onde w_y é solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta w_y = z_y \ \text{ em } \ \Omega, \\ w_y = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{com} \quad z_y(x) = \begin{cases} -\Delta v_\mu(x - y), \text{ se } x \in B_r(y), \\ 0, \text{ se } x \in \Omega \backslash B_r(y), \end{cases}$$

onde, ver Lema 1.12, v_μ é radialmente simétrica com respeito a origem, $v_\mu, -\Delta v_\mu > 0$ in $B_r(0)$ e

$$\int_{B_r(0)} (v_\mu^+)^{2_*} dx = 1, \quad \int_{B_r(0)} \left[|\Delta v_\mu|^2 - \mu(v_\mu^+)^2\right] dx = m(\mu, r).$$

Observação 1.15. *Argumentando como na prova do Lema* 1.3, *obtemos* $v_\mu \in C^4(\overline{B_r(0)})$.

Lema 1.16. *Seja $0 < \mu < \overline{\mu}$, onde $\overline{\mu}$ é dado pelo Lema 1.14. Então $\gamma_\mu : \Omega_r^- \to I_\mu^{m(\mu,r)}$ é bem definida, contínua e*

$$(\beta \circ \gamma_\mu)(y) = y, \quad \forall\, y \in \Omega_r^-. \tag{1.41}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que [23, Theorem 9.15] garante que $\gamma_\mu(y) \in E(\Omega)$ e, pelo princípio do máximo forte, temos $w_y(x) > v_\mu(x-y)$, para todo $x \in B_r(y)$ e $y \in \Omega_r^-$. Então

$$\int_\Omega |\Delta w_y|^2 dx = \int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu|^2 dx, \quad \int_\Omega |w_y|^2 dx > \int_{B_r(0)} |v_\mu|^2 dx$$

$$\text{e} \quad \int_\Omega |w_y|^{2_*} dx > \int_{B_r(0)} |v_\mu|^{2_*} dx = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_\mu(\gamma_\mu(y)) = I_\mu\left(\frac{w_y(x)}{|w_y|_{2_*}}\right) &= \frac{1}{|w_y|_{2_*}^2}\left[\int_\Omega |\Delta w_y|^2 dx - \mu \int_\Omega (w_y^+)^2 dx\right] \\ &< \int_\Omega |\Delta w_y|^2 dx - \mu \int_\Omega (w_y^+)^2 dx \le \int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu|^2 dx - \mu \int_{B_r(0)} (v_\mu^+)^2 dx = m(\mu, r), \end{aligned}$$

ou seja, $\gamma_\mu(y) \in I_\mu^{m(\mu,r)}$ para todo $y \in \Omega_r^-$ e daí $\gamma_\mu : \Omega_r^- \to I_\mu^{m(\mu,r)}$ está bem definida.

A continuidade de γ_μ é uma consequência da regularidade de v_μ. Para provar que γ_μ é contínua, é suficiente mostrar que $\overline{\gamma}_\mu : \Omega_r^- \to E(\Omega)$, definida por $\overline{\gamma}_\mu(y)(x) = w_y(x)$, é contínua. Se $y_n \to y$ em Ω_r^-, então

$$\begin{aligned} \|\overline{\gamma}_\mu(y_n) - \overline{\gamma}_\mu(y)\|^2 &= |\Delta(\overline{\gamma}_\mu(y_n) - \overline{\gamma}_\mu(y))|_2^2 = |\Delta w_{y_n} - \Delta w_y|_2^2 = |z_{y_n} - z_y|_2^2 \\ &= |z_{y_n}|_2^2 - 2\int_\Omega z_{y_n}(x) z_y(x) dx + |z_y|_2^2 \\ &= 2\left[\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 dz - \int_\Omega z_{y_n}(x) z_y(x) dx\right] \to 0, \end{aligned}$$

pois $\Delta v_\mu : \overline{B_r(0)} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Finalmente, para todo $y \in \Omega_r^-$

$$\begin{aligned} (\beta \circ \gamma_\mu)(y) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \left|\Delta\left(\frac{w_y}{|w_y|_{2_*}}\right)\right|^2 x dx}{\displaystyle\int_\Omega \left|\Delta\left(\frac{w_y}{|w_y|_{2_*}}\right)\right|^2 dx} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\Delta w_y|^2 x dx}{\displaystyle\int_\Omega |\Delta w_y|^2 dx} = \frac{\displaystyle\int_{B_r(y)} |\Delta v_\mu(x-y)|^2 x dx}{\displaystyle\int_{B_r(y)} |\Delta v_\mu(x-y)|^2 dx} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 (z+y) dz}{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 dz} = \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 z dz}{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 dz} + \frac{y\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 dz}{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 dz} \\ &= y, \end{aligned}$$

pois Δv_μ é radialmente simétrica. □

Lema 1.17. *Se $N \geq 8$ e $0 < \mu < \overline{\mu}$, onde $\overline{\mu}$ é dado pelo Lema 1.14, então $cat_{I_\mu^{m(\mu,r)}}(I_\mu^{m(\mu,r)}) \geq cat_\Omega(\Omega)$.*

Demonstração. Se $\mathrm{cat}_{I_\mu^{m(\mu,r)}}(I_\mu^{m(\mu,r)}) = \infty$, então nada a fazer. Se $\mathrm{cat}_{I_\mu^{m(\mu,r)}}(I_\mu^{m(\mu,r)}) = n$, então

$$I_\mu^{m(\mu,r)} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n,$$

onde A_j é fechado e contrátil em $I_\mu^{m(\mu,r)}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, sejam $h_j : [0,1] \times A_j \to I_\mu^{m(\mu,r)}$ aplicação contínua tal e $w_j \in I_\mu^{m(\mu,r)}$ tais que

$$h_j(0,u) = u, \quad h_j(1,u) = w_j, \quad \forall\, u \in A_j. \tag{1.42}$$

Considere $B_j = \gamma_\mu^{-1}(A_j)$, onde γ_μ é dada por (1.40). Os conjuntos B_j são fechados e $\Omega_r^- = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$. Defina, para $0 < \mu < \overline{\mu}$, a deformação

$$\begin{array}{rcl} g_j : [0,1] \times B_j & \longrightarrow & \Omega_r^+ \\ (t,y) & \longmapsto & g_j(t,y) = \beta(h_j(t, \gamma_\mu(y))). \end{array}$$

Pelo Lema 1.14, a deformação g_j está bem definida, e de (1.41) e (1.42)

$$g_j(0,y) = \beta(h_j(0, \gamma_\mu(y))) = \beta(\gamma_\mu(y)) = y, \quad \forall\, y \in B_j,$$

$$g_j(1,y) = \beta(h_j(1, \gamma_\mu(y))) = \beta(w_j), \quad \forall\, y \in B_j.$$

Portanto, os conjuntos B_j são contráteis em Ω_r^+, donde

$$\mathrm{cat}_\Omega(\Omega) = \mathrm{cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n = \mathrm{cat}_{I_\mu^{m(\mu,r)}}(I_\mu^{m(\mu,r)}). \qquad \square$$

Conclusão da prova do Teorema 1.1

Dos Lemas 1.7 e 1.10, para $c \leq m(\mu,\Omega) < m(\mu,r) < S$, $I_\mu|_V$ satisfaz a condição $(PS)_c$. Pelo Teorema 1.8, com $d = m(\mu,r)$, segue que $I_\mu^{m(\mu,r)}$ possui, no mínimo, $\mathrm{cat}_{I_\mu^{m(\mu,r)}}(I_\mu^{m(\mu,r)})$ pontos críticos de $I_\mu|_V$. Então, pelo Lema 1.17, para $0 < \mu < \overline{\mu}$, segue que $I_\mu|_V$ possui, pelo menos, $n = \mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ diferentes pontos críticos, digamos $v_1, ..., v_n \in V$.

Para cada $j = 1, ..., n$, existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tal que v_j satisfaz

$$\begin{cases} \Delta^2 v_j = \mu(v_j^+) + \lambda_j (v_j^+)^{2_*-1} & \text{em} \quad \Omega, \\ v_j, \Delta v_j = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $v_j \in V$ temos $v_j \neq 0$, e

$$\lambda_j = \lambda_j \int_\Omega (v_j^+)^{2_*} dx = I_\mu(v_j) = \int_\Omega [|\Delta v_j|^2 - \mu(v_j^+)^2] dx > 0.$$

Portanto, para cada $j = 1, \ldots, n$, segue que $u_j := \lambda_j^{1/(2_*-2)} v_j$ é uma solução não-trivial de

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu u^+ + (u^+)^{2_*-1} & \text{em} \quad \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.43}$$

ou seja, u_j é um ponto crítico de I. Como $v_j \neq v_i$ se $j \neq i$, segue que $u_j \neq u_i$ se $j \neq i$. Por fim, aplicamos o Lema 1.3 para finalizar essa demonstração. $\square$

1.4 Prova do Lema 1.4

Demonstração.

Caso particular: $u = 0$. Provaremos (1.17) e (1.18), e que λ e ν são concentradas em um único ponto em comum.

Para cada $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos de (1.4) que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |hu_n|^{2_*} dx\right)^{2/2_*} \leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta(hu_n)|^2 dx. \tag{1.44}$$

Usando (1.14) e (1.15) temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2_*} |u_n|^{2_*} dx\right)^{2/2_*} \to \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2_*} d\nu\right)^{2/2_*} \tag{1.45}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 |\Delta u_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\lambda. \tag{1.46}$$

Note que

$$\Delta(hu_n) - h\Delta u_n = u_n \Delta h + 2\nabla h.\nabla u_n. \tag{1.47}$$

Temos

$$|u_n \Delta h|_2^2 = \int_{B_R(0)} |\Delta h|^2 |u_n|^2 dx \leq C \int_{B_R(0)} |u_n|^2 dx,$$

onde $R > 0$ é tal que $\text{supp}(h) \subset \overline{B}_R(0)$ e $C = \max\limits_{\overline{B}_R(0)} |\Delta h|^2$. Então

$$|u_n \Delta h|_2^2 \to 0, \tag{1.48}$$

pois $u_n \to 0$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Temos também

$$|\nabla h.\nabla u_n|_2^2 \leq \int_{B_R(0)} |\nabla h|^2 |\nabla u_n|^2 dx \leq \overline{C} \int_{B_R(0)} |\nabla u_n|^2 dx,$$

onde $\overline{C} = \max\limits_{\overline{B}_R(0)} |\nabla h|^2$, e consequentemente

$$|\nabla h.\nabla u_n|_2^2 \to 0, \tag{1.49}$$

pois $\nabla u_n \to 0$ em $[L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)]^N$. De (1.47)-(1.49) segue que

$$\begin{aligned} ||\Delta(hu_n)|_2 - |h\Delta u_n|_2| \leq |\Delta(hu_n) - h\Delta u_n|_2 &= |u_n \Delta h + 2\nabla h.\nabla u_n|_2 \\ &\leq |u_n \Delta h|_2 + 2|\nabla h.\nabla u_n|_2 \to 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta(hu_n)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |h\Delta u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\lambda.$$

Portanto, de (1.44)-(1.45) obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2_*} d\nu\right)^{2/2_*} \leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\lambda. \tag{1.50}$$

Tomando agora uma sequência $(h_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$h_n \equiv 1 \text{ em } B_n(0), \quad \text{supp}(h_n) \subset B_{n+1}(0), \quad 0 \leq h_n \leq 1,$$

segue do teorema da convergência dominada que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^{2_*} d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\nu = \|\nu\| \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^2 d\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\lambda = \|\lambda\|.$$

Assim, obtemos (1.17) usando (h_n) em (1.50) e fazendo $n \to \infty$.

Agora procederemos para provar (1.18). Fixe $R > 0$ e seja $\psi_R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi_R(x) = 1$ para $|x| \geq R+1$, $\psi_R(x) = 0$ para $|x| \leq R$ e $0 \leq \psi_R \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$. Da desigualdade de Sobolev,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_R u_n|^{2_*} dx\right)^{2/2_*} \leq S^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta(\psi_R u_n)|^2 dx. \tag{1.51}$$

Temos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n \Delta\psi_R|^2 dx \leq \int_{|x|\leq R+1} |\Delta\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \leq C_R \int_{|x|\leq R+1} |u_n|^2 dx,$$

onde $C_R = \max_{\overline{B}_{R+1}(0)} |\Delta\psi_R|^2$, e

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi_R . \nabla u_n|^2 dx \leq \int_{|x|\leq R+1} |\nabla\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx \leq D_R \int_{|x|\leq R+1} |\nabla u_n|^2 dx,$$

onde $D_R = \max_{\overline{B}_{R+1}(0)} |\nabla\psi_R|^2$. Dessa maneira

$$||\Delta(\psi_R u_n)|_2 - |\psi_R \Delta u_n|_2| \leq |u_n \psi_R|_2 + |2\nabla\psi_R . \nabla u_n|_2 \to 0,$$

pois $u_n, \nabla u_n \to 0$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $[L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)]^N$, respectivamente. De (1.51) concluímos que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^{2_*} |u_n|^{2_*} dx\right)^{2/2_*} \leq S^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R^2 |\Delta u_n|^2 dx. \tag{1.52}$$

Por outro lado, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u_n|^2 \psi_R^2 dx = \int_{|x|\geq R} |\Delta u_n|^2 \psi_R^2 dx \leq \int_{|x|\geq R} |\Delta u_n|^2 dx$$

e

$$\int_{|x|\geq R+1} |u_n|^{2_*} dx = \int_{|x|\geq R+1} |u_n|^{2_*} \psi_R^{2_*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_*} \psi_R^{2_*} dx$$

e de (1.52) segue que

$$\nu_\infty^{2/2_*} = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\int_{|x|\geq R+1} |u_n|^{2_*} dx\right)^{2/2_*} \leq S^{-1} \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\int_{|x|\geq R} |\Delta u_n|^2 dx\right) = S^{-1}\lambda_\infty,$$

o que prova (1.18).

Suponha agora que $\|\nu\|^{2/2_*} = S^{-1}\|\mu\|$. Mostraremos que λ e ν são concentradas em um único ponto em comum. Dada $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos, de (1.50),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2_*} d\nu\right)^{1/2_*} \leq S^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\lambda\right)^{1/2}, \tag{1.53}$$

e da desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2_*} d\nu \leq S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2_*} d\lambda, \quad \forall\, h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{1.54}$$

o que implica

$$\nu(\Omega) \leq S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}\lambda(\Omega), \quad \forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ mensurável.}$$

Provaremos agora que $\nu(\Omega) = S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}\lambda(\Omega)$, para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mensurável. Suponha que existe $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\nu(\Omega_0) < S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}\lambda(\Omega_0)$. Por hipótese, $\|\nu\|^{2/2_*} = S^{-1}\|\lambda\|$, o que implica

$$\nu(\mathbb{R}^N) = S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}\lambda(\mathbb{R}^N). \tag{1.55}$$

Note então que

$$\begin{aligned} \nu(\mathbb{R}^N) &= \nu(\Omega_0) + \nu(\mathbb{R}^N\backslash\Omega_0) < S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}\lambda(\Omega_0) + S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}\lambda(\mathbb{R}^N\backslash\Omega_0) \\ &= S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}[\lambda(\Omega_0) + \lambda(\mathbb{R}^N\backslash\Omega_0)] = S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}\lambda(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

contradizendo (1.55). Segue de (1.53), $\nu(\Omega) = S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}\lambda(\Omega)$ e $\|\nu\|^{2/2_*} = S^{-1}\|\lambda\|$ que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2_*} d\nu\right)^{1/2_*} \|\nu\|^{2/N} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\nu\right)^{1/2}, \quad \forall\, h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo, para cada conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,

$$\nu(\Omega)^{1/2_*}\nu(\mathbb{R}^N)^{2/N} \leq \nu(\Omega)^{1/2}.$$

Como $\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} = \frac{2}{N}$, temos

$$\nu(\Omega) = 0 \quad \text{ou} \quad \nu(\Omega) \geq \nu(\mathbb{R}^N), \quad \text{para todo conjunto aberto} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

Portanto, ν é concentrada em único ponto, que é o mesmo ponto em que λ está concentrada, pois $\nu = S^{-2_*/2}\|\lambda\|^{4/(N-4)}\lambda$.

Caso geral: u não é necessariamente nula e provaremos (1.17)-(1.20).

Escreva $v_n := u_n - u$. Logo, $v_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, $|\Delta v_n|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ e $|v_n|^{2_*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ no sentido das medidas em $\mathbb{R}^N$, e $v_n \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, e dessa maneira, do caso estudado anteriormente, (1.17) é válido.

Temos

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq R}|\Delta u_n|^2dx &= \int_{|x|\geq R}|\Delta v_n+\Delta u|^2dx\\ &= \int_{|x|\geq R}|\Delta v_n|^2dx+2\int_{|x|\geq R}\Delta v_n\Delta u dx+\int_{|x|\geq R}|\Delta u|^2dx,\end{aligned}$$

o que implica

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|\Delta u_n|^2dx=\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|\Delta v_n|^2dx+2\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}\Delta v_n\Delta u dx+\int_{|x|\geq R}|\Delta u|^2dx$$

e, como $v_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, concluímos que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|\Delta u_n|^2dx=\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|\Delta v_n|^2dx+\int_{|x|\geq R}|\Delta u|^2dx. \tag{1.56}$$

Logo, (1.56) implica que

$$\lambda_\infty=\lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|\Delta u_n|^2dx=\lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|\Delta v_n|^2dx.$$

Pelo lema de Brezis-Lieb [11],

$$\int_{|x|\geq R}|u|^{2_*}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{|x|\geq R}|u_n|^{2_*}dx-\int_{|x|\geq R}|v_n|^{2_*}dx\right),$$

e então

$$\nu_\infty=\lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|u_n|^{2_*}dx=\lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|v_n|^{2_*}dx.$$

Do caso particular estudado anteriormente, segue (1.18).

Agora procederemos para provar (1.19). Primeiramente, afirmamos que

$$|\Delta u_n|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda+|\Delta u|^2. \tag{1.57}$$

De fato, da identidade $|\Delta u_n|^2=|\Delta v_n+\Delta u|^2=|\Delta v_n|^2+2\Delta v_n\Delta u+|\Delta u|^2$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi|\Delta u_n|^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi|\Delta v_n|^2dx+2\int_{\mathbb{R}^N}\Delta v_n\Delta u\varphi dx+\int_{\mathbb{R}^N}\varphi|\Delta u|^2dx,\quad \forall\,\varphi\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N).$$

Como $v_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ e $|\Delta v_n|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi|\Delta u_n|^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi d\lambda+\int_{\mathbb{R}^N}\varphi|\Delta u|^2dx,\quad \forall\,\varphi\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N),$$

que é precisamente (1.57).

Fixe $R>0$ e seja $\psi_R\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi_R(x)=1$ para $|x|\geq R+1$, $\psi_R(x)=0$ para $|x|\leq R$ e $0\leq\psi_R\leq 1$ em $\mathbb{R}^N$. De (1.57) temos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta u_n|^2dx=\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_R|\Delta u_n|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)d\lambda+\int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)|\Delta u|^2dx.$$

Tomando agora $R \to \infty$, segue do teorema da convergência dominada que

$$\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u_n|^2 dx = \lambda_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx$$

e dessa maneira

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Delta u_n|_2^2 = |\Delta u|_2^2 + \|\lambda\| + \lambda_\infty.$$

Para provar (1.20), primeiramente observe que

$$|u_n|^{2_*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu + |u|^{2_*}. \tag{1.58}$$

De fato, para todo $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ temos, do lema de Brezis-Lieb [11] aplicado a f^+ e f^-,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f|u|^{2_*} dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f|u_n|^{2_*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} f|v_n|^{2_*} dx \right),$$

de onde (1.58) segue, pois $|v_n|^{2_*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$.

Fixe $R > 0$ e seja $\psi_R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi_R(x) = 1$ para $|x| \geq R+1$, $\psi_R(x) = 0$ para $|x| \leq R$ e $0 \leq \psi_R \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$. Então,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_*} dx = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R |u_n|^{2_*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R) d\nu + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R)|u|^{2_*} dx.$$

Tomando $R \to \infty$, segue do teorema da convergência dominada que

$$\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_*} dx = \nu_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\nu + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_*} dx$$

e assim

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|_{2_*}^{2_*} = |u|_{2_*}^{2_*} + \|\nu\| + \nu_\infty.$$

□

1.5 Prova do Lema 1.9

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$. Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função tal que $0 \leq \xi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\xi \equiv 1$ em $B(0, \rho/2)$, $\xi \equiv 0$ em $B(0,\rho)^c$, e $B(0,\rho) \subset\subset \Omega$, $\rho > 0$. Escreva

$$U_\delta(x) := \xi(x)\psi_\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < \delta < \rho,$$

onde $\psi_\delta = S^{\frac{4-N}{8}} \varphi_\delta$ e $\varphi_\delta(x) = \varphi_{\delta,0}(x)$ é dado por (1.5). Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta \psi_\delta|^2 dx = S \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\delta|^{2_*} dx = 1,$$

e, ver [35, eq. (6.4) and eq. (6.3)] respectivamente, temos

$$|\Delta U_\delta|_{2,\Omega}^2 = S + O(\delta^{N-4}), \tag{1.59}$$

$$|U_\delta|_{2_*,\Omega}^{2_*} = 1 + O(\delta^N). \tag{1.60}$$

Para obter (1.32), estimaremos $|U_\delta|_{2,\Omega}^2$. Temos

$$|U_\delta|_{2,\Omega}^2 = \int_\Omega |\xi(x)\psi_\delta(x)|^2 dx = \int_{B(0,\rho)} |\psi_\delta(x)|^2 dx + \int_{B(0,\rho)} [|\xi(x)|^2 - 1]|\psi_\delta(x)|^2 dx.$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\rho)} ||\xi(x)|^2 - 1||\psi_\delta(x)|^2 dx &= \int_{B(0,\rho)} ||\xi(x)|^2 - 1||\psi_\delta(x)|^2 dx \leq \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^2 dx \\ &= \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{C\delta^{N-4}}{(\delta^2 + |x|^2)^{N-4}} dx \leq \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{C\delta^{N-4}}{|x|^{2(N-4)}} dx = O(\delta^{N-4}).\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\int_\Omega |U_\delta(x)|^2 dx = \int_{B(0,\rho)} |\psi_\delta(x)|^2 dx + O(\delta^{N-4}). \tag{1.61}$$

Agora,

$$\int_{B(0,\rho)} |\psi_\delta(x)|^2 dx = \int_{B(0,\delta)} |\psi_\delta(x)|^2 dx + \int_{\delta<|x|<\rho} |\psi_\delta(x)|^2 dx. \tag{1.62}$$

Note que

$$\int_{B(0,\delta)} |\psi_\delta(x)|^2 dx = \int_{B(0,\delta)} \frac{C\delta^{N-4}}{(\delta^2 + |x|^2)^{N-4}} dx \geq \int_{B(0,\delta)} \frac{C\delta^{N-4}}{(2\delta^2)^{N-4}} dx = C\delta^4, \tag{1.63}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\delta<|x|<\rho} |\psi_\delta(x)|^2 dx &= \int_{\delta<|x|<\rho} \frac{C\delta^{N-4}}{(\delta^2 + |x|^2)^{N-4}} dx \geq \int_{\delta<|x|<\rho} \frac{C\delta^{N-4}}{(2|x|^2)^{N-4}} dx \\ &= C\delta^{N-4} \int_{\delta<|x|<\rho} \frac{1}{|x|^{2(N-4)}} dx = C\delta^{N-4} \int_\delta^\rho \int_{S_r} \frac{1}{r^{2(N-4)}} dS dr,\end{aligned}$$

o que implica

$$\int_{\delta<|x|<\rho} |\psi_\delta(x)|^2 dx \geq C\delta^{N-4} \begin{cases} \log r\Big|_\delta^\rho, & \text{se } N = 8, \\ -\frac{1}{N-8}\frac{1}{r^{N-8}}\Big|_\delta^\rho, & \text{se } N > 8. \end{cases} \tag{1.64}$$

Finalmente, combinando (1.61), (1.62), (1.63) e (1.64), concluímos que

$$|U_\delta|_{2,\Omega}^2 \geq \begin{cases} C\delta^4|\log\delta| + O(\delta^4), & \text{se } N = 8, \\ C\delta^4 + O(\delta^{N-4}), & \text{se } N > 8. \end{cases} \tag{1.65}$$

Assim, de (1.59), (1.60) e (1.65), existe uma constante $C = C(N) > 0$ tal que

$$\frac{|\Delta U_\delta|_2^2 - \mu|U_\delta|_2^2}{|U_\delta|_{2_*}^2} \leq \left\{ \begin{array}{ll} S - \mu C\delta^4|\log\delta| + O(\delta^4), & N = 8 \\ S - \mu C\delta^4 + O(\delta^{N-4}), & N > 8 \end{array} \right\} < S,$$

para $N \geq 8$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno. □

Capítulo

2

Existência e multiplicidade de soluções para o problema (P_2)

Neste capítulo estudamos a existência de múltiplas soluções clássicas para o problema de quarta-ordem

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu u^s + u^{2_*-1} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, -\Delta u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_2}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, $\mu > 0$, $2 \leq s+1 < 2_*$, e $2_* = 2N/(N-4)$ é o expoente crítico da imersão de $E(\Omega) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ em $L^{2_*}(\Omega)$. Neste capítulo, $\mu_1(\Omega)$ denota o primeiro autovalor do problema (1.1).

Teorema 2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, e $\mu > 0$. No caso $s = 1$ suponha $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Se $N \geq 8$ e $2 \leq s+1 < 2_*$, ou $N = 5, 6, 7$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$, então (P_2) possui uma solução clássica.*

Teorema 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 5$. Suponha $2 \leq s+1 < 2_*$ se $N \geq 8$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$ para as dimensões críticas $N = 5, 6, 7$. Então existe $\overline{\mu} > 0$ tal que, para cada $0 < \mu < \overline{\mu}$, o problema (P_2) possui, pelo menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções clássicas.*

2.1 Preliminares e prova do Teorema 2.1

Primeiramente, enfatizamos que grande parte dos nossos resultados preliminares são válidos para domínios suaves limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 5$. Esta é nossa hipótese geral. Destacaremos nesse capítulo onde as condições $N \geq 5$ ou $N \geq 8$ são suficientes.

Considere o espaço $E(\Omega) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, dotado com a norma $\|u\| := |\Delta u|_2$, induzida pelo produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx,\ u, v \in E(\Omega).$$

Considere a constante de Sobolev da imersão $E(\Omega) \hookrightarrow L^{2_*}(\Omega)$, dada por (1.4),

$$S = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx;\ u \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_*} dx = 1 \right\},$$

que é atingido precisamente pelas funções $S^{\frac{4-N}{8}} \varphi_{\delta,a}$, com

$$\varphi_{\delta,a}(x) = \frac{[(N-4)(N-2)N(N+2)]^{\frac{N-4}{8}} \delta^{\frac{N-4}{2}}}{(\delta^2 + |x-a|^2)^{\frac{N-4}{2}}} = \frac{C_N \delta^{\frac{N-4}{2}}}{(\delta^2 + |x-a|^2)^{\frac{N-4}{2}}}, \tag{2.1}$$

para $a \in \mathbb{R}^N$ e $\delta > 0$ [21, Lemma 1].

Para estudar a existência de soluções para o problema (P_2), consideramos o funcional

$$I_\mu(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \frac{\mu}{s+1} \int_\Omega (u^+)^{s+1} dx - \frac{1}{2_*} \int_\Omega (u^+)^{2_*} dx,\ u \in E(\Omega), \tag{2.2}$$

e a variedade de Nehari associada ao funcional I_μ, dada por

$$\mathcal{N}_\mu := \{u \in E(\Omega) \backslash \{0\}; I'_\mu(u)u = 0\}. \tag{2.3}$$

Definição 2.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 5$ um domínio suave limitado, $2 \leq s+1 < 2^*$ e $\mu > 0$. Dizemos que $u \in E(\Omega)$ é uma solução fraca de (P_2) se u é um ponto crítico de I_μ, isto é, u satisfaz*

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \mu \int_\Omega (u^+)^s v dx + \int_\Omega (u^+)^{2_*-1} v dx,\ \forall v \in E(\Omega).$$

Lema 2.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, um domínio suave e limitado, $2 \leq s+1 < 2^*$ e $\mu > 0$. Então as soluções clássicas $\mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ de (P_2) são precisamente os pontos críticos do funcional I_μ definido em (2.2).*

Demonstração. A equivalência entre os pontos críticos não triviais de I_μ e as soluções clássicas de (P_2) seguem de [46, Appendix B], [2, Theorem 12.7] e [22, Theorems 2.19 e 2.20]. O princípio do máximo forte para operadores elípticos de segunda ordem é aplicado, como em [14, p. 375], para reescrever (P_2) como

$$\begin{cases} -\Delta u = v, & -\Delta v = \mu (u^+)^s + (u^+)^{2_*-1} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, & u \neq 0 \ \text{ em } \ \Omega, \end{cases}$$

e então provar que todo ponto crítico não trivial de I_μ satisfaz $u, -\Delta u > 0$ em Ω. □

Lema 2.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, um domínio suave e limitado. No caso $2 < s+1 < 2_*$ consideramos $\mu > 0$ e, no caso $s = 1$, consideramos $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Então o funcional I_μ satisfaz a geometria do passo da montanha em torno do seu mínimo local em zero, com o associado nível do passo da montanha*

$$c_\mu = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], E(\Omega)); \gamma(0) = 0, I_\mu(\gamma(1)) < 0\}.$$

Mais ainda,

$$c_\mu = \widetilde{c}_\mu = \widehat{c}_\mu, \tag{2.4}$$

onde

$$\widetilde{c}_\mu = \inf_{u \in E(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tu) \quad e \quad \widehat{c}_\mu = \inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} I_\mu(u), \tag{2.5}$$

onde $\mathcal{N}_\mu$ é dada por (2.3).

Demonstração. A prova de que I_μ satisfaz a geometria do passo da montanha é feita usando argumentos padrões e será aqui omitida. Argumentando como [40, Proposition 3.11] prova-se a igualdade (2.4). □

Lema 2.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, um domínio suave e limitado. No caso $2 < s+1 < 2_*$ consideramos $\mu > 0$ e, no caso $s = 1$, consideramos $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Então I_μ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c < \frac{2}{N} S^{N/4}$. Mais ainda, se $N \geq 8$ e $2 \leq s+1 < 2_*$, ou $N = 5, 6, 7$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$, então $c_\mu \in \left(0, \frac{2}{N} S^{N/4}\right)$.*

Demonstração. A demonstração da primeira parte do lema segue de maneira análoga a do Lema 1.6. Para a segunda parte, ver Seção 2.5. □

Destacamos que o próximo resultado é uma consequência direta do Lema 2.6 e do teorema clássico do passo da montanha [6]. Para um resultado para pertubações sublineares, isto é, para o caso $1 < s+1 < 2$, mencionamos [8, Theorem 7.1].

Proposição 2.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, um domínio limitado suave e $\mu > 0$. No caso $s = 1$, assumimos $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Se $N \geq 8$ e $2 \leq s+1 < 2_*$, ou $N = 5, 6, 7$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$, então o nível do passo da montanha c_μ é um valor crítico de I_μ, isto é, existe $u_\mu \in E(\Omega)$ tal que*

$$I_\mu(u_\mu) = c_\mu, \; I'_\mu(u_\mu) = 0.$$

A seguir apresentamos um resultado sobre a monotonicidade de $c_\mu(\Omega)$ com respeito a Ω.

Lema 2.8. *Sejam $N \geq 5$, $\mu > 0$ para $2 < s+1 < 2_*$ e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$ para $s = 1$. Se Ω_1 e Ω_2 são domínios regulares limitados em $\mathbb{R}^N$ tais que $\Omega_1 \subset \Omega_2$ e $\mu > 0$, então $c_{\mu,\Omega_1} \geq c_{\mu,\Omega_2}$. Mais ainda, se $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ e se assumimos as hipóteses extras*

$$N \geq 8 \quad e \quad 2 \leq s+1 < 2_*; \quad ou \quad N = 5, 6, 7 \quad e \quad 2_* - 2 < s+1 < 2_*,$$

então temos a desigualdade estrita $c_{\mu,\Omega_1} > c_{\mu,\Omega_2}$. Aqui, $c_\mu(\Omega)$ é como definido em (2.4) e adicionamos o subíndice Ω para enfatizar sua dependência no domínio considerado.

Demonstração. Primeiramente, observe que o conjunto

$$\Gamma_\Omega = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], E(\Omega)); \gamma(0) = 0,\ I_\mu(\gamma(1)) < 0\}$$

usado para definir $c_{\mu,\Omega}$ pode ser substituído pelo seu subconjunto

$$\overline{\Gamma}_\Omega = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], E(\Omega)); \gamma(0) = 0,\ I_\mu(\gamma(1)) < 0,\ -\Delta(\gamma(t))(x) \geq 0\ \forall\, t \in [0,1],\ q.t.p.\ x \in \Omega\},$$

e note que, pelo princípio do máximo, se $\gamma \in \overline{\Gamma}_\Omega$ então $\gamma(t)(x), -\Delta(\gamma(t))(x) \geq 0$ para todo $t \in [0,1]$ e q.t.p. $x \in \Omega$. De fato, dado $\gamma \in \Gamma_\Omega$, seja para cada $t \in [0,1]$ o elemento $\overline{\gamma}(t) \in E(\Omega)$ definido pelas soluções de

$$\begin{cases} -\Delta(\overline{\gamma}(t)) = |\Delta(\gamma(t))| & \text{em} \quad \Omega, \\ \overline{\gamma}(t) = \Delta(\overline{\gamma}(t)) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $\overline{\gamma} \in \overline{\Gamma}_\Omega$ e $I_\mu(\overline{\gamma}(t)) \leq I_\mu(\gamma(t))$ pois, pelo princípio do máximo, $\overline{\gamma}(t)(x) \geq |\gamma(t)(x)|$ para todo $t \in [0,1]$, q.t.p. $x \in \Omega$.

Dada uma função u definida em Ω_1, denotamos por $\widetilde{u}$ a função definida em Ω_2 por

$$\widetilde{u}(x) = u(x) \quad \text{se} \quad x \in \Omega_1 \quad \text{e} \quad \widetilde{u}(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \in \Omega_2 \backslash \Omega_1.$$

Agora, dada $\gamma \in \overline{\Gamma}_{\Omega_1}$ definimos $\widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}_{\Omega_2}$ escrevendo, para cada $t \in [0,1]$, a solução de

$$\begin{cases} -\Delta(\widehat{\gamma}(t)) = \widetilde{-\Delta\gamma(t)} & \text{em} \quad \Omega_2, \\ \widehat{\gamma}(t) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega_2. \end{cases}$$

Então, pelo princípio do máximo, segue que $\widehat{\gamma}(t)(x) \geq \widetilde{\gamma(t)}(x)$ para todo $t \in [0,1]$ e q.t.p. $x \in \Omega_2$. Portanto

$$\begin{aligned} c_{\mu,\Omega_1} &= \inf_{\gamma \in \overline{\Gamma}_{\Omega_1}} \max_{t \in [0,1]} \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} |\Delta\gamma(t)|^2 dx - \frac{\mu}{s+1}\int_{\Omega_1} (\gamma(t))^{s+1} dx - \frac{1}{2_*}\int_{\Omega_1} (\gamma(t))^{2_*} dx \\ &\geq \inf_{\gamma \in \overline{\Gamma}_{\Omega_1}} \max_{t \in [0,1]} \frac{1}{2}\int_{\Omega_2} |\Delta\widehat{\gamma}(t)|^2 dx - \frac{\mu}{s+1}\int_{\Omega_2} (\widehat{\gamma}(t))^{s+1} dx - \frac{1}{2_*}\int_{\Omega_2} (\widehat{\gamma}(t))^{2_*} dx \\ &\geq \inf_{\widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}_{\Omega_2}} \max_{t \in [0,1]} \frac{1}{2}\int_{\Omega_2} |\Delta\widehat{\gamma}(t)|^2 dx - \frac{\mu}{s+1}\int_{\Omega_2} (\widehat{\gamma}(t))^{s+1} dx - \frac{1}{2_*}\int_{\Omega_2} (\widehat{\gamma}(t))^{2_*} dx = c_{\mu,\Omega_2}. \end{aligned}$$

A afirmação acerca da desigualdade estrita $c_{\mu,\Omega_1} > c_{\mu,\Omega_2}$ segue da Proposição 2.7, Lema 2.4, a caracterização (2.5) para o nível do passo da montanha e, argumentamos como anteriormente, agora usando o princípio do máximo forte. □

Denotamos por c_0 e $\mathcal{N}_0$ o nível do passo da montanha e a variedade de Nehari associados ao funcional

$$I_0(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega (u^+)^{2_*} dx,\ u \in E(\Omega).$$

Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$. Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty$ uma função tal que $0 \leq \xi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\xi \equiv 1$ em $B(0, \rho/2)$, $\xi \equiv 0$ em $B(0,\rho)^c$ e $B(0,\rho) \subset\subset \Omega$, $\rho > 0$. Escreva

$$U_\delta(x) = \xi(x)\psi_\delta(x),\ x \in \mathbb{R}^N,\ 0 < \delta < \rho,$$

onde $\psi_\delta = S^{\frac{4-N}{8}}\varphi_\delta$ e $\varphi_\delta(x) = \varphi_{\delta,0}(x)$ é dada por (2.1). Temos então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta\psi_\delta|^2 dx = S \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\delta|^{2_*} dx = 1,$$

e, ver [35] eq. (6.4) e eq. (6.3) respectivamente,

$$|\Delta U_\delta|_{2,\Omega}^2 = S + O(\delta^{N-4}),$$

$$|U_\delta|_{2_*,\Omega}^{2_*} = 1 + O(\delta^N).$$

Definindo

$$V_\delta(x) = \frac{U_\delta(x)}{|U_\delta|_{2_*}},\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.6}$$

segue que

$$|\Delta V_\delta|_2^2 = S + O(\delta^{N-4}). \tag{2.7}$$

Lema 2.9. *Sejam $N \geq 5$, $\mu > 0$ para $2 < s+1 < 2_*$ e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$ para $s = 1$. Então $c_0 = \frac{2}{N}S^{\frac{N}{4}}$.*

Demonstração. Seja V_δ a função definida em (2.6). Como $|V_\delta|_{2_*} = 1$ temos $S \leq |\Delta V_\delta|_2^2$ e de (2.7) temos

$$|\Delta V_\delta|_2^2 \to S,\ \delta \to 0.$$

Escrevendo

$$g(t) = I_0(tV_\delta) = \frac{t^2}{2}|\Delta V_\delta|_2^2 - \frac{t^{2_*}}{2_*}|V_\delta|_{2_*}^{2_*} = \frac{t^2}{2}|\Delta V_\delta|_2^2 - \frac{t^{2_*}}{2_*},$$

note que g atinge seu máximo em $t_\delta = |\Delta V_\delta|_2^{\frac{2}{2_*-2}}$. Daí,

$$c_0 = \inf_{u \in E(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} I_0(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_0(tV_\delta) = I_0(t_\delta V_\delta) = \frac{t_\delta^2}{2}|\Delta V_\delta|_2^2 - \frac{t_\delta^{2_*}}{2_*} = \frac{2}{N}|\Delta V_\delta|_2^{\frac{2.2_*}{2_*-2}},$$

ou seja,

$$c_0 \leq \frac{2}{N}(|\Delta V_\delta|_2^2)^{\frac{2_*}{2_*-2}} \to \frac{2}{N}S^{\frac{2_*}{2_*-2}} = \frac{2}{N}S^{\frac{N}{4}}$$

e portanto

$$c_0 \leq \frac{2}{N}S^{\frac{N}{4}}. \tag{2.8}$$

Por outro lado, seja $(u_n) \subset E(\Omega)$ tal que

$$I_0(u_n) \to c_0,\ I_0'(u_n) \to 0.$$

A sequência (u_n) é limitada, donde, a menos de subsequência, $\|u_n\|^2 \to l > 0$. Temos também

$$I_0'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - |u_n^+|_{2_*}^{2_*} \to 0$$

e assim $|u_n^+|_{2_*}^{2_*} \to l$. Fazendo $v_n = u_n/|u_n|_{2_*}$, temos $|v_n|_{2_*} = 1$ e

$$S \leq |\Delta v_n|_2^2 = \frac{|\Delta u_n|_2^2}{|u_n|_{2_*}^2} \leq \frac{|\Delta u_n|_2^2}{|u_n^+|_{2_*}^2} = \frac{|\Delta u_n|_2^2}{(|u_n^+|_{2_*}^{2_*})^{2/2_*}} \to \frac{l}{l^{2/2_*}} = l^{4/N},$$

o que implica $S \leq l^{4/N}$. Note que, de

$$I_0(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2_*}|u_n^+|_{2_*}^{2_*} \to c_0,$$

concluímos que $l = (N/2)c_0$; então, $S \leq [(N/2)c_0]^{4/N}$, ou seja

$$c_0 \geq \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}}. \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.9) segue o resultado. □

Observação 2.10. *Se Θ é um domínio limitado e regular de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, o nível do passo da montanha referente ao funcional*

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Theta |\Delta u|^2 dx - \frac{1}{2_*}\int_\Theta (u^+)^{2_*} dx$$

será $(2/N)S^{N/4}$, ou seja, o nível do passo da montanha de I_0 independe do domínio Θ.

Lema 2.11. *Suponha $N \geq 8$ e $2 \leq s+1 < 2_*$, ou $N = 5, 6, 7$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$. Se $\mu_n \to 0^+$ então $c_{\mu_n} \to c_0$.*

Demonstração. Sabemos que $c_{\mu_n} \leq c_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Da Proposição 2.7, seja $(u_n) \subset E(\Omega)$ tal que

$$I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n},\ I'_{\mu_n}(u_n) = 0,$$

e seja $(t_n) \subset (0, \infty)$ tal que $t_n u_n \in \mathcal{N}_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$c_0 = \inf_{u \in E(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} I_0(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_0(tu_n) = I_0(t_n u_n) = I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n t_n^{s+1}}{s+1}|u_n^+|_{s+1}^{s+1};$$

como $u_n \in \mathcal{N}_{\mu_n}$, então

$$I_{\mu_n}(t_n u_n) \leq \max_{t \geq 0} I_{\mu_n}(tu_n) = I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n}$$

e daí

$$c_0 \leq c_{\mu_n} + \frac{\mu_n t_n^{s+1}}{s+1}|u_n^+|_{s+1}^{s+1}. \tag{2.10}$$

Temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s+1}\right)\|u_n\|^2 \leq I_\mu(u_n) - \frac{1}{s+1} I'_\mu(u_n)u_n = c_\mu \leq c_0,$$

e (u_n) é limitada. Mostremos que a sequência (t_n) também é limitada. Suponha, por contradição, que $t_n \to \infty$. Como $c_{\mu_n} \leq c_0$, mostra-se que (u_n) é limitada em $E(\Omega)$. De $t_n u_n \in \mathcal{N}_0$ segue que $\max_{t \geq 0} I_0(tu_n) = I_0(t_n u_n)$, ou seja, $\frac{d}{dt} I_0(tu_n)|_{t=t_n} = 0$, o que implica

$$\|u_n\|^2 = t_n^{2_*-2}|u_n^+|_{2_*}^{2_*},$$

donde $|u_n^+|_{2_*}^{2_*} \to 0$. Por interpolação, segue que $|u_n^+|_{s+1}^{s+1} \to 0$. Como $I'_{\mu_n}(u_n)u_n = 0$ temos

$$\|u_n\|^2 = \mu_n |u_n^+|_{s+1}^{s+1} + |u_n^+|_{2_*}^{2_*},$$

e daí $\|u_n\|^2 \to 0$, e de

$$c_{\mu_n} = I_{\mu_n}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{\mu_n}{s+1}|u_n^+|_{s+1}^{s+1} - \frac{1}{2_*}|u_n^+|_{2_*}^{2_*}$$

segue que $c_{\mu_n} \to 0$, um absurdo, pois

$$\lim_{n\to\infty} c_{\mu_n} \geq c_{\mu_1} > 0.$$

Portanto, (t_n) é limitada, e de (2.10) segue que

$$c_0 \leq \liminf_{n\to\infty}\left(c_{\mu_n} + \frac{\mu_n t_n^{s+1}}{s+1}|u_n^+|_{s+1}^{s+1}\right) = \liminf_{n\to\infty} c_{\mu_n} \leq \limsup_{n\to\infty} c_{\mu_n} \leq c_0,$$

e portanto $\lim_{n\to\infty} c_{\mu_n} = c_0$. □

Prova do Teorema 2.1. Segue do Lema 2.4 e da Proposição 2.7. □

2.2 Um importante resultado de compacidade

Nesta seção enunciaremos e provaremos um resultado de compacidade de extrema importância para demonstração do Teorema 2.2. Para a sua demonstração, faremos uso do Lema 1.4. Através do próximo lema poderemos relacionar a categoria do conjunto Ω com a categoria de um conjunto de nível apropriado do funcional I_μ, a fim de aplicarmos o Teorema 1.8.

Lema 2.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave limitado com $N \geq 5$. Seja $(u_n) \subset E(\Omega)$ uma sequência tal que*

$$|u_n|_{2_*} \geq 1,\ \|u_n\|^2 = |\Delta u_n|_2^2 = S + o_n(1).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja w_n o potencial Newtoniano de $|\widetilde{-\Delta u_n}|$, onde $\sim$ denota a extensão por zero fora de Ω. Então, existem uma sequência $(y_n, \alpha_n) \subset \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ e $v \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$v_n(x) := \alpha_n^{\frac{N-4}{2}} w_n(\alpha_n x + y_n)$$

satisfaz, a menos de subsequência, $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, $y_n \to y \in \overline{\Omega}$ e $\alpha_n \to 0$.

Demonstração. Lembramos que, se w_n é o potencial Newtoniano de $|\widetilde{-\Delta u_n}|$, então de [23, Theorem 9.9] segue que $w_n \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ e

$$-\Delta w_n = |\widetilde{-\Delta u_n}| \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N. \tag{2.11}$$

Considere as funções de concentração de Lévy dadas por

$$Q_n(\alpha) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_\alpha(y)} |w_n|^{2_*} dx,\ \alpha > 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{\alpha \to 0^+} Q_n(\alpha) = 0$, pois $|w_n|^{2_*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda, $\lim_{\alpha \to \infty} Q_n(\alpha) \geq 1$, pois $w_n \geq |\widetilde{u_n}|$ em $\mathbb{R}^N$. Então, como $Q_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínua, existe $\alpha_n > 0$ tal que $Q_n(\alpha_n) = 1/2$ e existe $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\frac{1}{2} = Q_n(\alpha_n) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{\alpha_n}(y)} |w_n|^{2_*} dx = \int_{B_{\alpha_n}(y_n)} |w_n|^{2_*} dx,$$

já que

$$\lim_{|y| \to \infty} \int_{B_{\alpha_n}(y)} |w_n|^{2_*} dx = 0.$$

Definindo então $v_n(x) := \alpha_n^{\frac{N-4}{2}} w_n(\alpha_n x + y_n)$ temos

$$|v_n|_{2_*} = |w_n|_{2_*} \geq |\widetilde{u_n}|_{2_*} = |u_n|_{2_*} \geq 1,$$

$$|\Delta v_n|_2^2 = |\Delta w_n|_2^2 = |\Delta u_n|_2^2 = S + o_n(1),$$

e

$$\int_{B_{\alpha_n}(y_n)} |w_n|^{2_*} dx = \int_{B_1(0)} |v_n|^{2_*} dx = \frac{1}{2} = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_n|^{2_*} dx. \tag{2.12}$$

Como (v_n) é limitada em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência segue que

$$v_n \rightharpoonup v \ \text{ em } \ \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N),$$

$$|\Delta(v_n - v)|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \ \text{ no sentido das medidas em } \ \mathbb{R}^N,$$

$$|v_n - v|^{2_*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu \ \text{ no sentido das medidas em } \ \mathbb{R}^N,$$

$$v_n \to v \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N.$$

Do Lema 1.4 temos

$$S = |\Delta v|_2^2 + \|\lambda\| + \lambda_\infty, \tag{2.13}$$

$$1 \leq |v|_{2_*}^{2_*} + \|\nu\| + \nu_\infty, \tag{2.14}$$

e

$$\|\nu\|^{2/2_*} \leq \frac{1}{S}\|\lambda\|, \nu_\infty^{2/2_*} \leq \frac{1}{S}\lambda_\infty, |v|_{2_*}^2 \leq \frac{1}{S}|\Delta v|_2^2. \tag{2.15}$$

Segue então que $|v|_{2_*}^{2_*}, \|\nu\|, \nu_\infty \in \{0, 1\}$. De fato, de (2.13) e (2.15),

$$S = |\Delta v|_2^2 + \|\lambda\| + \lambda_\infty \geq S[(|v|_{2_*}^{2_*})^{2/2_*} + \|\nu\|^{2/2_*} + \nu_\infty^{2/2_*}],$$

isto é,

$$(|v|_{2_*}^{2_*})^{2/2_*} + \|\nu\|^{2/2_*} + \nu_\infty^{2/2_*} \leq 1. \tag{2.16}$$

Como $2/2_* < 1$, segue de (2.14) e (2.16) que

$$|v|_{2_*}^{2_*}, \|\nu\|, \nu_\infty \in \{0, 1\} \ \text{ e que } \ 1 = |v|_{2_*}^{2_*} + \|\nu\| + \nu_\infty. \tag{2.17}$$

Passo 1: Provemos que $\nu_\infty = 0$.

Pelo lema de Brezis-Lieb [11],

$$\int_{B_1(0)} |v|^{2_*} dx + \int_{B_1(0)} |v_n - v|^{2_*} dx = \int_{B_1(0)} |v_n|^{2_*} dx + o_n(1).$$

Tome $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi(x) = 1$ para $x \in B_1(0)$ e $0 \leq \varphi \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$, daí

$$\int_{B_1(0)} |v|^{2_*} \varphi dx + \int_{B_1(0)} |v_n - v|^{2_*} \varphi dx = \int_{B_1(0)} |v_n|^{2_*} dx + o_n(1)$$

e então, de (2.12),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2_*} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v|^{2_*} \varphi dx &\geq \int_{B_1(0)} |v|^{2_*} \varphi dx + \int_{B_1(0)} |v_n - v|^{2_*} \varphi dx \\ &= \int_{B_1(0)} |v_n|^{2_*} + o_n(1) = \frac{1}{2} + o_n(1). \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ na última desigualdade obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2_*} \varphi dx + \langle \nu, \varphi \rangle \geq \frac{1}{2}.$$

Dessa maneira,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2_*} \varphi dx + \|\nu\| \geq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2_*} \varphi dx + \langle \nu, \varphi \rangle \geq \frac{1}{2},$$

o que implica $|v|_{2_*}^{2_*} + \|\nu\| \geq 1/2$. Assim, de (2.17), segue que $\nu_\infty = 0$.

Passo 2: Provemos que $\|\nu\| = 0$ e $|v|_{2_*}^{2_*} = 1$.

Por contradição, de (2.17), suponha que $v = 0$ e $\|\nu\| = 1$. Neste caso, de (2.13),

$$S = \|\lambda\| + \lambda_\infty \geq \|\lambda\| \Rightarrow S^{-1}\|\lambda\| \leq 1 = \|\nu\|^{2/2_*},$$

e de (2.15) temos $\|\nu\|^{2/2_*} = S^{-1}\|\lambda\|$. Então, do Lema 1.4, as medidas λ e ν estão concentradas em um único ponto $z \in \mathbb{R}^N$. Considere $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, |x - z| \leq 1/2, \\ 0, |x - z| \geq 1, \\ 0 \leq \varphi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, |x - z| \leq 1, \\ 0, |x - z| \geq 2, \\ 0 \leq \psi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Obtemos então

$$\int_{B_1(z)} |v_n|^{2_*} dx \geq \int_{B_1(z)} |v_n|^{2_*} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_*} \varphi dx \to \langle \nu, \varphi \rangle = \|\nu\| \varphi(z) = \|\nu\|$$

e

$$\int_{B_1(z)} |v_n|^{2_*} dx = \int_{B_1(z)} |v_n|^{2_*} \psi dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_*} \psi dx \to \langle \nu, \psi \rangle = \|\nu\| \psi(z) = \|\nu\|.$$

Daí,

$$\int_{B_1(z)} |v_n|^{2_*} dx \to \|\nu\| = 1,$$

e assim, de (2.12),

$$\frac{1}{2} = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_n|^{2_*} dx \geq \int_{B_1(z)} |v_n|^{2_*} dx \to \|\nu\| = 1,$$

um absurdo.

Passo 3: Provemos que $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$.

Como $|v|_{2_*} = 1$, pela definição de S, temos $S \leq |\Delta v|_2^2$ e, de (2.13),

$$S = |\Delta v|_2^2 + \|\lambda\| + \lambda_\infty \geq |\Delta v|_2^2.$$

Portanto

$$|v|_{2_*} = 1 \quad \text{e} \quad |\Delta v|_2^2 = S. \tag{2.18}$$

Mostramos então que $\lim_{n\to\infty} |\Delta v_n|_2^2 = S = |\Delta v|_2^2$. Como $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, que é uniformemente convexo, segue que $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$.

Passo 4: Provemos que $\alpha_n \to 0$ e $y_n \to y \in \overline{\Omega}$.

De (2.18), e a menos de multiplicação por constantes apropriadas, segue que v é uma solução não-trivial da equação

$$\Delta^2 v = v^{2_*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{2.19}$$

Mostremos agora que $\alpha_n \to 0$ e $y_n \to y \in \overline{\Omega}$. Primeiro provemos que (α_n) é limitada. Suponha, por contradição, que, a menos de subsequência, $\alpha_n \to \infty$. Como $u_n, \Delta u_n \in L^2(\Omega)$ e $|\Omega| < \infty$, segue que $u_n, \Delta u_n \in L^1(\Omega)$ e de (2.11) segue então que $\Delta w_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n| dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta(\alpha_n^{\frac{N-4}{2}} w_n(\alpha_n x + y_n))| dx = \alpha_n^{\frac{N-4}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta(w_n(\alpha_n x + y_n))| dx \\
&= \alpha_n^{\frac{N-4}{2}} \alpha_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta w_n(\alpha_n x + y_n)| dx = \alpha_n^{\frac{N-4}{2}} \alpha_n^2 \alpha_n^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta w_n(z)| dz = \frac{1}{\alpha_n^{\frac{N}{2}}} |\Delta w_n|_1 \\
&\leq \frac{K}{\alpha_n^{\frac{N}{2}}} \to 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ e do lema de Fatou,

$$0 = \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n| dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \underline{\lim} |\Delta v_n| = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v| dx \geq 0,$$

donde $\Delta v = 0$ em $\mathbb{R}^N$, um absurdo.

Logo, a menos de subsequência, $\alpha_n \to \alpha_0 \geq 0$. Uma vez que (α_n) um sequência limitada, concluímos que (y_n) também é limitada. Com efeito, suponha por contradição, que $|y_n| \to \infty$. Sendo Ω limitado, para n suficientemente grande, temos

$$\alpha_n x + y_n \notin \overline{\Omega}, \quad \forall x \in \Omega,$$

e então $\Delta w_n(\alpha_n x + y_n) = 0$, $\forall x \in \Omega$ e n suficientemente grande. Mas então $\Delta v_n(x) = \alpha_n^{N/2} \Delta w_n(\alpha_n x + y_n) = 0$, para todo $x \in \Omega$, e como $\Delta v_n \to \Delta v$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, segue que

$\Delta v(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$, uma contradição, pois v é uma solução não-trivial da equação (2.19), o que implica que $v, -\Delta v$ são simultaneamente positivas ou negativas em $\mathbb{R}^N$.

Portanto, a menos de subsequência, $y_n \to y \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha_n \to \alpha_0 \geq 0$. Suponha agora que $\alpha_n \to \alpha_0 > 0$. Então, se $\Omega - y_n := \{x - y_n; x \in \Omega\}$,

$$\Omega_n := \frac{\Omega - y_n}{\alpha_n} \to \frac{\Omega - y}{\alpha_0} = \widetilde{\Omega} \subsetneq \mathbb{R}^N.$$

Note que se $x \notin \Omega_n$ então $\Delta v_n(x) = 0$. Seja então $R > 0$ tal que $\Omega_n, \widetilde{\Omega} \subset B_R(0)$, para todo n. Para $x \in B_R(0)^c$ temos $\Delta v_n(x) = 0$ para todo n, donde $\Delta v(x) = 0$, para $x \in B_R(0)^c$, uma contradição. Portanto $\alpha_n \to 0$.

Finalmente, supondo que $y \notin \overline{\Omega}$, obteríamos, para n suficientemente grande $\alpha_n x + y_n \notin \overline{\Omega}$, para todo $x \in \Omega$, e vimos que isso gera uma contradição. Portanto $y \in \overline{\Omega}$ e a prova está concluída. □

2.3 Lemas Técnicos

Seja $r > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\Omega_r^+ := \{x \in \mathbb{R}^N; \operatorname{dist}(x, \Omega) \leq r\},\ \Omega_r^- := \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

são homotopicamente equivalentes a Ω e tal que $B_r = B_r(0) \subset \Omega$. Considere agora a aplicação $I_{\mu,r} : E(B_r) \to \mathbb{R}$ dada por

$$I_{\mu,r}(u) := \frac{1}{2}\int_{B_r} |\Delta u|^2 dx - \frac{\mu}{s+1}\int_{B_r} (u^+)^{s+1} dx - \frac{1}{2_*}\int_{B_r} (u^+)^{2_*} dx,$$

onde $E(B_r) := H^2(B_r) \cap H_0^1(B_r)$, e escreva

$$\mathcal{N}_{\mu,r} := \{u \in E(B_r)\backslash\{0\}; I'_{\mu,r}(u)u = 0\}$$

e

$$m(\mu) := \inf_{u \in \mathcal{N}_{\mu,r}} I_{\mu,r}(u) = \inf_{u \in E(B_r)\backslash\{0\}} \max_{t \geq 0} I_{\mu,r}(tu).$$

Lema 2.13. *Sejam $N \geq 5$ e $\mu > 0$. No caso $s = 1$, assumimos $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Se $N \geq 8$ e $2 \leq s + 1 < 2_*$, ou $N = 5, 6, 7$ e $2_* - 2 < s + 1 < 2_*$, então $m(\mu)$ é atingida por uma função $u \in E(B_r)$. Mais ainda, quaisquer dessas funções satisfazem $u, -\Delta u > 0$ em B_r e $u, -\Delta u$ são radialmente simétricas.*

Demonstração. De acordo com o Lema 2.4 e a Proposição 2.7, seja $u \in E(B_r)\backslash\{0\}$ tal que $u, -\Delta u > 0$ e

$$m(\mu) = I_{\mu,r}(u) = \max_{t \geq 0} I_{\mu,r}(tu).$$

Denote por u^* e $(-\Delta u)^*$ as simetrizações de Schwarz de u e $-\Delta u$, respectivamente. Se v é a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v = (-\Delta u)^* & \text{em } B_r, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B_r, \end{cases}$$

então $v = v^*$. É suficiente provar que $u = v$. De [5], ver também [10, Lemma 2.8], temos $v \geq u^*$ e

$$|v > u^*| = 0 \Leftrightarrow -\Delta u = (-\Delta u)^*.$$

Se $|v > u^*| > 0$, temos

$$\begin{aligned} m(\mu) &\leq \max_{t\geq 0} I_{\mu,r}(tv) = \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2}\int_{B_r}|\Delta v|^2dx - \frac{\mu}{s+1}t^{s+1}\int_{B_r}v^{s+1}dx - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_{B_r}v^{2_*}dx\right\} \\ &< \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2}\int_{B_r}|(-\Delta u)^*|^2dx - \frac{\mu}{s+1}t^{s+1}\int_{B_r}(u^*)^{s+1}dx - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_{B_r}(u^*)^{2_*}dx\right\} \\ &= \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2}\int_{B_r}|-\Delta u|^2dx - \frac{\mu}{s+1}t^{s+1}\int_{B_r}u^{s+1}dx - \frac{t^{2_*}}{2_*}\int_{B_r}u^{2_*}dx\right\} \\ &= \max_{t\geq 0} I_{\mu,r}(tu) = m(\mu) \end{aligned}$$

um absurdo. Dessa maneira, $-\Delta u = (-\Delta u)^*$ e como u e v são soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = (-\Delta u)^* & \text{em } B_r, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B_r, \end{cases}$$

segue que $u = v$. □

Defina agora a aplicação baricentro $\beta : \mathcal{N}_\mu \to \mathbb{R}^N$ por

$$\beta(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\Delta u|^2 x dx}{\displaystyle\int_\Omega |\Delta u|^2 dx}. \tag{2.20}$$

Também definimos o conjunto

$$I_\mu^{m(\mu)} := \{u \in E(\Omega); I_\mu(u) \leq m(\mu)\}.$$

Observação 2.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave limitado. Sejam $N \geq 5$ e $\mu > 0$ e no caso $s = 1$ assumimos $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Se $N \geq 8$ e $2 \leq s+1 < 2_*$, ou $N = 5, 6, 7$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$, então do Lema 2.8 temos*

$$I_\mu^{m(\mu)} \cap \mathcal{N}_\mu \neq \emptyset.$$

Lema 2.15. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave limitado. Sejam $N \geq 5$ e $\mu > 0$ e no caso $s = 1$ assumimos $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Se $N \geq 8$ e $2 \leq s+1 < 2_*$, ou $N = 5, 6, 7$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$ então existe $\overline{\mu} > 0$ tal que, se $\mu \in (0, \overline{\mu})$ e $u \in \mathcal{N}_\mu$ com $I_\mu(u) \leq m(\mu)$, então $\beta(u) \in \Omega_r^+$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem $\mu_n \to 0$, $u_n \in \mathcal{N}_{\mu_n}$, $I_{\mu_n}(u_n) \leq m(\mu_n)$ tais que $\beta(u_n) \notin \Omega_r^+$. Temos

$$c_{\mu_n} \leq I_{\mu_n}(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_n|^2 dx - \frac{\mu_n}{s+1}\int_\Omega (u_n^+)^{s+1}dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega (u_n^+)^{2_*}dx \leq m(\mu_n)$$

e

$$0 = I'_{\mu_n}(u_n)u_n = \int_\Omega |\Delta u_n|^2 dx - \mu_n \int_\Omega (u_n^+)^{s+1} dx - \int_\Omega (u_n^+)^{2_*} dx. \tag{2.21}$$

Então (u_n) é limitada em $E(\Omega)$. Logo

$$c_{\mu_n} + o_n(1) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_n|^2 dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega (u_n^+)^{2_*} dx \leq m(\mu_n) + o_n(1) \tag{2.22}$$

e

$$\int_\Omega |\Delta u_n|^2 dx - \int_\Omega (u_n^+)^{2_*} dx = o_n(1). \tag{2.23}$$

Dos Lemas 2.9 e 2.11 e de (2.22) segue que

$$\frac{2}{N}S^{N/4} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_n|^2 dx - \frac{1}{2_*}\int_\Omega (u_n^+)^{2_*} dx\right) \leq \frac{2}{N}S^{N/4}$$

e, de (2.23), a menos de subsequência,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^2 dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (u_n^+)^{2_*} dx = l,$$

e concluímos que $l = S^{N/4}$. Note que, como $u_n \in \mathcal{N}_{\mu_n}$, segue de (2.21) que $u_n^+ \neq 0$. Se $z_n = u_n/|u_n^+|_{2_*} \in E(\Omega)$, então

$$|z_n|_{2_*} = \frac{|u_n|_{2_*}}{|u_n^+|_{2_*}} \geq \frac{|u_n|_{2_*}}{|u_n|_{2_*}} = 1,$$

$$|\Delta z_n|_2^2 = \frac{|\Delta u_n|_2^2}{|u_n^+|_{2_*}^2} = \frac{|\Delta u_n|_2^2}{(|u_n^+|_{2_*}^{2_*})^{2/2_*}} \to \frac{S^{N/4}}{(S^{N/4})^{\frac{N-4}{N}}} = S.$$

Logo, se w_n é o potencial Newtoniano de $|\widetilde{-\Delta z_n}|$, segue do Lema 2.12 que existe $(y_n, \alpha_n) \subset \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ tal que a sequência $v_n(x) = \alpha_n^{\frac{N-4}{2}} w_n(\alpha_n x + y_n)$ admite uma subsequência que converge forte para v em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, $y_n \to y \in \overline{\Omega}$ e $\alpha_n \to 0$. Fixando $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi(x) = x$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\beta(u_n) &= \frac{\int_\Omega |\Delta u_n(z)|^2 z dz}{\int_\Omega |\Delta u_n(z)|^2 dz} = \frac{\int_\Omega |\Delta u_n(z)|^2 \varphi(z) dz}{\int_\Omega |\Delta u_n(z)|^2 dz} = \frac{|u_n^+|_{2_*}^2}{|\Delta u_n|_2^2}\int_\Omega |\Delta z_n(z)|^2 \varphi(z) dz \\
&= \frac{|u_n^+|_{2_*}^2}{|\Delta u_n|_2^2}\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta w_n(z)|^2 \varphi(z) dz = \frac{|u_n^+|_{2_*}^2}{|\Delta u_n|_2^2}\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta(\alpha_n^{\frac{N-4}{2}} w_n(\alpha_n x + y_n))|^2 \varphi(\alpha_n x + y_n) dx \\
&= \frac{|u_n^+|_{2_*}^2}{|\Delta u_n|_2^2}\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n(x)|^2 \varphi(\alpha_n x + y_n) dx.
\end{aligned}$$

Como $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$, pelo teorema da convergência dominada e (2.18) segue que, a menos de subsequência,

$$\beta(u_n) \to \frac{(S^{N/4})^{2/2_*}}{S^{N/4}} Sy = y \in \overline{\Omega},$$

o que contradiz a nossa hipótese inicial $\beta(u_n) \notin \Omega_r^+$. □

De agora em diante assumimos todas as hipóteses do Lema 2.15 e seja $\overline{\mu}$ como neste lema. Para cada $0 < \mu < \overline{\mu}$ definimos $\gamma_\mu : \Omega_r^- \to I_\mu^{m(\mu)}$ por

$$\begin{array}{rcl} \gamma_\mu(y) : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \gamma_\mu(y)(x) = w_y(x), \end{array} \tag{2.24}$$

onde w_y é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w_y = z_y \ \text{ em } \ \Omega, \\ w_y = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{com} \quad z_y(x) = \begin{cases} -\Delta v_\mu(x-y), \text{ se } x \in B_r(y), \\ 0, \text{ se } x \in \Omega \backslash B_r(y), \end{cases}$$

onde, ver Lema 2.13, v_μ é radialmente simétrica com respeito a origem, $v_\mu, -\Delta v_\mu > 0$ em B_r e

$$I_{\mu,r}(v_\mu) = m(\mu),\ I'_{\mu,r}(v_\mu) = 0.$$

Observação 2.16. *Argumentando como na prova do Lema* 2.4*, obtemos* $v_\mu \in C^4(\overline{B_r(0)})$.

Argumentando como no Lema 1.16, temos γ_μ bem definida e contínua. Pelo princípio do máximo forte temos $w_y(x) > v_\mu(x-y) > 0$, para todo $x \in B_r(y)$ e $y \in \Omega_r^-$. Então

$$\int_\Omega |\Delta w_y|^2 dx = \int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu|^2 dx,\ \int_\Omega (w_y^+)^{s+1} dx > \int_{B_r(0)} (v_\mu^+)^{s+1} dx$$

$$\text{e} \quad \int_\Omega (w_y^+)^{2_*} dx > \int_{B_r(0)} (v_\mu^+)^{2_*} dx.$$

Então, para todo $y \in \Omega_r^-$,

$$\begin{aligned} I'_\mu(\gamma_\mu(y))\gamma_\mu(y) &= \int_\Omega |\Delta w_y|^2 dx - \mu \int_\Omega (w_y^+)^{s+1} dx - \int_\Omega (w_y^+)^{2_*} dx \\ &< \int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu|^2 dx - \mu \int_{B_r(0)} (v_\mu^+)^{s+1} dx - \int_{B_r(0)} (v_\mu^+)^{2_*} dx = I'_{\mu,r}(v_\mu)v_\mu = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\gamma_\mu(y) \notin \mathcal{N}_\mu$. Entretanto, para cada $y \in \Omega_r^-$ existe um único $t_y > 0$ tal que

$$t_y \gamma_\mu(y) \in \mathcal{N}_\mu. \tag{2.25}$$

Observe também que, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned} I_\mu(t\gamma_\mu(y)) &= \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\Delta w_y|^2 dx - \frac{\mu}{s+1} t^{s+1} \int_\Omega (w_y^+)^{s+1} dx - \frac{t^{2_*}}{2_*} \int_\Omega (w_y^+)^{2_*} dx \\ &< \frac{t^2}{2} \int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu|^2 dx - \frac{\mu}{s+1} t^{s+1} \int_{B_r(0)} (v_\mu^+)^{s+1} - \frac{t^{2_*}}{2_*} \int_{B_r(0)} (v_\mu^+)^{2_*} dx \\ &= I_{\mu,r}(tv_\mu) \le I_{\mu,r}(v_\mu) = m(\mu), \end{aligned} \tag{2.26}$$

pois $v_\mu \in \mathcal{N}_{\mu,r}$ implica que $I_{\mu,r}(v_\mu) = \max_{t \ge 0} I_{\mu,r}(tv_\mu)$. Defina então

$$\begin{array}{rcl} \overline{\gamma}_\mu(y) : \Omega_r^- & \longrightarrow & I_\mu^{m(\mu)} \cap \mathcal{N}_\mu \\ y & \longmapsto & \overline{\gamma}_\mu(y) = t_y \gamma_\mu(y), \end{array} \tag{2.27}$$

Lema 2.17. *Suponha todas as hipóteses do Lema 2.15 e seja $\overline{\mu}$ como neste lema. Então, para cada $0 < \mu < \overline{\mu}$, a função $\overline{\gamma}_\mu$ é bem definida, contínua e satisfaz*

$$(\beta \circ \overline{\gamma}_\mu)(y) = y, \quad \forall\, y \in \Omega_r^-. \tag{2.28}$$

Demonstração. De (2.25) e (2.26), segue que $\overline{\gamma}_\mu$ está bem definida. A continuidade de $\overline{\gamma}_\mu$ segue da continuidade de γ_μ e da aplicação

$$E(\Omega)\backslash\{0\} \to (0,\infty) : u \mapsto t(u)$$

onde $t(u) > 0$ é tal que $t(u)u \in \mathcal{N}_\mu$. Por fim, para todo $y \in \Omega_r^-$

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \overline{\gamma}_\mu)(y) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\Delta(t_y\gamma_\mu(y))|^2 x dx}{\displaystyle\int_\Omega |\Delta(t_y\gamma_\mu(y))|^2 dx} = \frac{t_y^2 \displaystyle\int_\Omega |\Delta w_y|^2 x dx}{t_y^2 \displaystyle\int_\Omega |\Delta w_y|^2 dx} = \frac{\displaystyle\int_{B_r(y)} |\Delta v_\mu(x-y)|^2 x dx}{\displaystyle\int_{B_r(y)} |\Delta v_\mu(x-y)|^2 dx} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 (z+y) dz}{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 dz} = \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 z dz}{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 dz} + \frac{y \displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 dz}{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^2 dz} \\
&= y,
\end{aligned}$$

pois Δv_μ é radialmente simétrica. □

2.4 Prova do Teorema 2.2

Os lemas desta seção auxiliarão na demonstração do Teorema 2.2.

Lema 2.18. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, um domínio suave e limitado. No caso $2 < s+1 < 2_*$ consideramos $\mu > 0$ e, no caso $s = 1$, supomos $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Se u_μ é um ponto crítico de I_μ restrito a $\mathcal{N}_\mu$, então u é um ponto crítico de I_μ em $E(\Omega)$.*

Demonstração. Fazendo

$$J_\mu(u) = I'_\mu(u)u = \|u\|^2 - \mu|u^+|_{s+1}^{s+1} - |u^+|_{2_*}^{2_*}, \tag{2.29}$$

do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\mu(u_\mu) = \theta J'_\mu(u_\mu). \tag{2.30}$$

Observe que

$$J'_\mu(u_\mu)u_\mu = 2\|u_\mu\|^2 - \mu(s+1)|u_\mu^+|_{s+1}^{s+1} - 2_*|u_\mu^+|_{2_*}^{2_*}$$

e como

$$0 = I'_\mu(u_\mu)u_\mu = J_\mu(u_\mu) = \|u_\mu\|^2 - \mu|u_\mu^+|_{s+1}^{s+1} - |u_\mu^+|_{2_*}^{2_*}$$

temos

$$\begin{aligned} J'_\mu(u_\mu)u_\mu &= 2(\mu|u_\mu^+|_{s+1}^{s+1} + |u_\mu^+|_{2_*}^{2_*}) - \mu(s+1)|u_\mu^+|_{s+1}^{s+1} - 2_*|u_\mu^+|_{2_*}^{2_*} \\ &= \mu(2-(s+1))|u_\mu^+|_{s+1}^{s+1} + (2-2_*)|u_\mu^+|_{2_*}^{2_*} < 0 \end{aligned}$$

donde, de

$$0 = I'_\mu(u_\mu)u_\mu = \theta J'_\mu(u_\mu)(u_\mu)$$

segue que $\theta = 0$, ou seja, de (2.30), $I'_\mu(u_\mu) = 0$ e u_μ é ponto crítico de I_μ em $E(\Omega)$. □

Lema 2.19. *Nas hipóteses do Lema 2.18, o funcional I_μ restrito a variedade $\mathcal{N}_\mu$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para $c < (2/N)S^{N/4}$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(\mathrm{PS})_c$ para I_μ restrita a $\mathcal{N}_\mu$, com $c < (2/N)S^{N/4}$. Então $I_\mu(u_n) \to c$ e do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange existe $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\mu(u_n) = \theta_n J'_\mu(u_n) + o_n(1),$$

onde J_μ é dada em (2.29). Na demonstração do Lema 2.18 vimos que $J'_\mu(u)u < 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$. Como (u_n) é limitada podemos supor $J'_\mu(u_n)u_n \to l \leq 0$. Se $J'_\mu(u_n)u_n \to 0$, então de

$$\|u_n\|^2 = \mu|u_n^+|_{s+1}^{s+1} + |u_n^+|_{2_*}^{2_*}$$

segue que

$$J'_\mu(u_n)u_n = 2\|u_n\|^2 - \mu(s+1)|u_n^+|_{s+1}^{s+1} - 2_*|u_n^+|_{2_*}^{2_*} = \mu(2-(s+1))|u_n^+|_{s+1}^{s+1} + (2-2_*)|u_n^+|_{2_*}^{2_*} \to 0,$$

o que implica $|u_n^+|_{s+1}^{s+1}, |u_n^+|_{2_*}^{2_*} \to 0$ e consequentemente $\|u_n\|^2 \to 0$. Por outro lado, das imersões contínuas,

$$\|u_n\|^2 = \mu|u_n^+|_{s+1}^{s+1} + |u_n^+|_{2_*}^{2_*} \leq \mu C\|u_n\|^{s+1} + C\|u_n\|^{2_*}$$

e assim

$$1 \leq C(\mu\|u_n\|^{(s+1)-2} + \|u_n\|^{2_*-2}) \to 0,$$

um absurdo. Logo, $l < 0$ e assim de

$$0 = I'_\mu(u_n)u_n = \theta_n J'_\mu(u_n)u_n + o_n(1)$$

segue que $\theta_n \to 0$ e consequentemente

$$I_\mu(u_n) \to c < \frac{2}{N}S^{N/4},\ I'_\mu(u_n) \to 0,$$

e a conclusão segue da primeira parte do Lema 2.6. □

O próximo lema estabelece a relação entre $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ e a categoria de um conjunto de nível apropriado, a fim de aplicarmos o resultado clássico da teoria de Lusternik-Schnirelman.

Lema 2.20. *Suponha todas as hipóteses do Lema 2.15 e seja $\overline{\mu}$ como naquele lema. Então, para cada $\mu \in (0, \overline{\mu})$, temos*

$$cat_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}) \geq cat_\Omega(\Omega),$$

onde

$$I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)} := \{u \in \mathcal{N}_\mu; I_\mu(u) \leq m(\mu)\}.$$

Demonstração. Primeiramente, do Lema 2.14, segue que $I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)} \neq \emptyset$.

Se $\text{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}) = \infty$, nada a demonstrar. Se $\text{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}) = n$, então

$$I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n,$$

onde A_j é fechado e contrátil em $I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$, para todo $j = 1, ..., n$, ou seja, existem $h_j : [0,1] \times A_j \to I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ contínuas tais que

$$h_j(0, u) = u,\ h_j(1, u) = w_j,\ \forall u \in A_j, \tag{2.31}$$

onde $w_j \in I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ é fixo, para cada $j = 1, ..., n$. Considere $B_j = \overline{\gamma}_\mu^{-1}(A_j)$, onde $\overline{\gamma}_\mu$ é dada por (2.27). Os conjuntos B_j são fechados e $\Omega_r^- = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$. Defina, para $0 < \mu < \overline{\mu}$, a deformação

$$\begin{array}{rcl} g_j : [0,1] \times B_j & \longrightarrow & \Omega_r^+ \\ (t, y) & \longmapsto & g_j(t, y) = \beta(h_j(t, \overline{\gamma}_\mu(y))), \end{array}$$

onde β é dada por (2.20). Do Lema 2.15, a deformação g_j está bem definida e de (2.28) e (2.31)

$$g_j(0, y) = \beta(h_j(0, \overline{\gamma}_\mu(y))) = \beta(\overline{\gamma}_\mu(y)) = y, \quad \forall\, y \in B_j,$$

$$g_j(1, y) = \beta(h_j(1, \overline{\gamma}_\mu(y))) = \beta(w_j), \quad \forall\, y \in B_j.$$

Portanto, os conjuntos B_j são contráteis em Ω_r^+, e então

$$\text{cat}_\Omega(\Omega) = \text{cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n = \text{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}).$$

□

Conclusão da prova do Teorema 2.2

Denote por $I_{\mathcal{N}_\mu}$ a restrição de I_μ a $\mathcal{N}_\mu$. Do Lema 2.6 sabemos que

$$c_\mu, m(\mu) < \frac{2}{N} S^{N/4},$$

se $N \geq 8$ e $2 \leq s + 1 < 2_*$, ou $N = 5, 6, 7$ e $2_* - 2 < s + 1 < 2_*$. Além disso, do Lema 2.19, $I_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(\text{PS})_c$, para todo $c \in (0, (2/N)S^{N/4})$. Da teoria padrão de categoria de Lusternik-Schnirelman, Teorema 1.8, concluímos que $I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ contém, pelo menos, $\text{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)})$ pontos críticos de $I_{\mathcal{N}_\mu}$, ou seja, do Lema 2.20, $I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ contém, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos de $I_{\mathcal{N}_\mu}$. Agora, do Lema 2.18, concluímos enfim que I_μ contém, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos e resultado segue portanto do Lema 2.4. □

2.5 Prova do Lema 2.6 completa

Demonstração. Mostremos que, considerando $\mu > 0$ se $2 < s+1 < 2_*$ e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$ se $s = 1$, se $N \geq 8$ e $2 \leq s+1 < 2_*$ ou $5 \leq N \leq 7$ e $2_* - 2 \leq s+1 < 2_*$, então o nível do passo da montanha c_μ pertence ao intervalo $(0, (2/N)S^{N/4})$. Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$. Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função tal que $0 \leq \xi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\xi \equiv 1$ em $B(0, \rho/2)$, $\xi \equiv 0$ em $B(0,\rho)^c$ e $B(0,\rho) \subset\subset \Omega$, $\rho > 0$. Escreva

$$U_\delta(x) := \xi(x)\psi_\delta(x),\ x \in \mathbb{R}^N,\ 0 < \delta < \rho/2,$$

onde $\psi_\delta = S^{\frac{4-N}{8}}\varphi_\delta$ e $\varphi_\delta(x) = \varphi_{\delta,0}(x)$ é dado por (2.1). Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta\psi_\delta|^2 dx = S \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\delta|^{2_*} dx = 1,$$

e, ver [35] eq. (6.4) and eq. (6.3) respectivamente, temos

$$|\Delta U_\delta|_{2,\Omega}^2 = S + O(\delta^{N-4}), \tag{2.32}$$

$$|U_\delta|_{2_*,\Omega}^{2_*} = 1 + O(\delta^N). \tag{2.33}$$

Fazendo

$$V_\delta(x) = \frac{U_\delta(x)}{|U_\delta|_{2_*}},\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.34}$$

segue que

$$|\Delta V_\delta|_2^2 = S + O(\delta^{N-4}). \tag{2.35}$$

O nosso objetivo é mostrar que para δ suficientemente pequeno temos

$$\max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta) < \frac{2}{N}S^{N/4}. \tag{2.36}$$

Para isto, estimaremos $|V_\delta|_{s+1}^{s+1}$. Observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx &= \int_\Omega |\xi(x)\psi_\delta(x)|^{s+1}dx \\ &= \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx + \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx,\end{aligned}$$

e por sua vez, do teorema da convergência dominada,

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}} \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{|\xi(x)|^{s+1}}{(\delta^2+|x|^2)^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}}dx \\ &= C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}} \left(\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{|\xi(x)|^{s+1}}{|x|^{(N-4)(s+1)}}dx + o(1)\right) = C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}} + o(\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}})\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx + C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}} + o(\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}). \tag{2.37}$$

A seguir, consideramos 3 casos distintos:

Caso 1: $s+1<\frac{N}{N-4}$.

Segue, do teorema da convergência dominada, que

$$\int_{B(0,\rho/2)}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}\int_{B(0,\rho/2)}\frac{1}{(\delta^2+|x|^2)^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}}dx$$
$$= C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}\left[\int_{B(0,\rho/2)}\frac{1}{|x|^{(N-4)(s+1)}}+o(1)\right]dx = C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}+o(\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}),$$

e de (2.37) segue então que

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}+o(\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}). \tag{2.38}$$

Caso 2: $s+1>\frac{N}{N-4}$.

Temos

$$\int_{B(0,\rho/2)}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = \int_{B(0,\delta)}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx+\int_{\delta<|x|<\rho/2}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx; \tag{2.39}$$

por sua vez,

$$\int_{B(0,\delta)}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}\int_{B(0,\delta)}\frac{1}{(\delta^2+|x|^2)^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}}dx$$
$$= C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}\int_{B(0,\delta)}\frac{1}{\delta^{(N-4)(s+1)}(1+|\frac{x}{\delta}|^2)^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}}dx$$
$$= C\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}\int_{B(0,1)}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}}dx = C\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}. \tag{2.40}$$

Temos também

$$\int_{\delta<|x|<\rho/2}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}\int_{\delta<|x|<\rho/2}\frac{1}{(\delta^2+|x|^2)^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}}dx$$
$$= C\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}\int_{1<|x|<\rho/(2\delta)}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}}dx$$
$$= C\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}\int_{|x|>1}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}}dx$$
$$-C\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}\int_{|x|>\rho/(2\delta)}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}}dx = C\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}+o(\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}})$$

Logo, de (2.37),

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}+o(\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}), \tag{2.41}$$

pois $s+1>N/(N-4)$.

Caso 3: $s+1=\frac{N}{N-4}$.

É válido (2.39) e (2.40). Temos

$$\begin{aligned}\int_{\delta<|x|<\rho/2}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx &= C\delta^{N/2}\int_{1<|x|<\rho/(2\delta)}\frac{1}{(1+|x|^2)^{N/2}}dx\\ &= C\delta^{N/2}\int_1^{\rho/(2\delta)}\int_{S_r}\frac{1}{(1+r^2)^{N/2}}dSdr\\ &= C\delta^{N/2}\int_1^{\rho/(2\delta)}\frac{1}{r}dr+C\delta^{N/2}\int_1^{\rho/(2\delta)}\left[\frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{N/2}}-\frac{1}{r}\right]dr\\ &= C\delta^{N/2}|\log\delta|+O(\delta^{N/2}),\end{aligned}$$

e assim, de (2.37),

$$\int_\Omega|U_\delta|^{s+1}dx=C\delta^{N/2}|\log\delta|+O(\delta^{N/2}). \tag{2.42}$$

Portanto, usando (2.38), (2.41) e (2.42), e a estimativa (2.33), concluímos que

$$|V_\delta|_{s+1}^{s+1}=\begin{cases}C\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}+o(\delta^{\frac{(N-4)(s+1)}{2}}), & \text{se } s+1<\frac{N}{N-4},\\ C\delta^{N/2}|\log\delta|+O(\delta^{N/2}), & \text{se } s+1=\frac{N}{N-4},\\ C\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}+o(\delta^{N-\frac{(N-4)(s+1)}{2}}), & \text{se } s+1>\frac{N}{N-4}.\end{cases} \tag{2.43}$$

Note que

$$I_\mu(tV_\delta)=\frac{t^2}{2}|\Delta V_\delta|_2^2-\frac{\mu}{s+1}t^{s+1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}-\frac{t^{2_*}}{2_*},\qquad \lim_{t\to\infty}I_\mu(tV_\delta)=-\infty,$$

e então $\max_{t\geq 0}I_\mu(tV_\delta)$ é atingido em algum $t_\delta>0$. Dessa maneira,

$$\frac{d}{dt}I_\mu(tV_\delta)\Big|_{t=t_\delta}=0\Rightarrow|\Delta V_\delta|_2^2-\mu t_\delta^{s-1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}-t_\delta^{2_*-2}=0,$$

ou seja,

$$|\Delta V_\delta|_2^2=\mu t_\delta^{s-1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}+t_\delta^{2_*-2}\geq t_\delta^{2_*-2}$$

donde

$$t_\delta\leq|\Delta V_\delta|_2^{\frac{2}{2_*-2}}. \tag{2.44}$$

A última desigualdade implica que

$$|\Delta V_\delta|_2^2 = t_\delta^{2_*-2}+\mu t_\delta^{s-1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}\leq t_\delta^{2_*-2}+\mu|\Delta V_\delta|_2^{\frac{2(s-1)}{2_*-2}}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}$$

donde

$$t_\delta^{2_*-2}\geq|\Delta V_\delta|_2^2-\mu|\Delta V_\delta|_2^{\frac{2(s-1)}{2_*-2}}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}=|\Delta V_\delta|_2^2\left[1-\mu|\Delta V_\delta|_2^{\frac{2(s-1)}{2_*-2}-2}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}\right];$$

usando agora as estimativas em (2.35) e em (2.43), e a desigualdade (3.62), concluímos que

$$t_\delta\to S^{\frac{1}{2_*-2}},\ \delta\to 0. \tag{2.45}$$

Considere agora função

$$g(t) = \frac{t^2}{2}|\Delta V_\delta|_2^2 - \frac{t^{2_*}}{2_*},\ t \geq 0,$$

e observe que g atinge máximo em $t_0 = |\Delta V_\delta|_2^{\frac{2}{2_*-2}}$ e que g é crescente no intervalo $[0, |\Delta V_\delta|_2^{\frac{2}{2_*-2}}]$. Dessa maneira, de (2.35) e (3.62),

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta) = I_\mu(t_\delta V_\delta) &= g(t_\delta) - \mu\frac{t_\delta^{s+1}}{s+1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1} \\
&\leq \frac{(|\Delta V_\delta|_2^{\frac{2}{2_*-2}})^2}{2}|\Delta V_\delta|_2^2 - \frac{(|\Delta V_\delta|_2^{\frac{2}{2_*-2}})^{2_*}}{2_*} - \mu\frac{t_\delta^{s+1}}{s+1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1} \\
&= \frac{2}{N}(|\Delta V_\delta|_2^2)^{N/4} - \mu\frac{t_\delta^{s+1}}{s+1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1} = \frac{2}{N}S^{N/4} + O(\delta^{N-4}) - \mu\frac{t_\delta^{s+1}}{s+1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}.
\end{aligned}$$

Então, para δ suficientemente pequeno, segue de (2.45) que

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta) &\leq \frac{2}{N}S^{N/4} + O(\delta^{N-4}) - \frac{\mu}{s+1}\left(\frac{S^{\frac{1}{2_*-2}}}{2}\right)^{s+1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1} \\
&= \frac{2}{N}S^{N/4} + O(\delta^{N-4}) - \widehat{C}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}.
\end{aligned}$$

Usamos agora as estimativas (2.43) para concluir que (2.36) é válido, se $N \geq 8$ e $2 \leq s+1 < 2_*$ ou $5 \leq N \leq 7$ e $2_* - 2 < s+1 < 2_*$. Em particular, observe que $2_* - 2 < s+1$, no caso $N = 5, 6, 7$ é necessário a fim de obter $c_\mu < (2/N)S^{N/4}$ quando aplicamos a terceira linha de (2.43). $\square$

Capítulo

3

Existência de soluções para o problema (P_3)

Neste capítulo estudamos a existência de solução para o problema de quarta-ordem não linear

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu|u|^{s-1}u + |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3}$$

satisfazendo

$$u, -\Delta u > 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\mu > 0$.

Vale observar que (P_3) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = \mu|u|^{s-1}u + |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{S_3}$$

e a condição $u, -\Delta u > 0$ em Ω é equivalente a $u, v > 0$ em Ω.

Neste capítulo assumiremos que (p, q) pertence a hipérbole crítica

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{N-2}{N}, \tag{3.1}$$

e

$$\frac{p+1}{p} \leq s+1 < q+1.$$

Observe que a condição $\frac{p+1}{p} < s+1$ diz que a perturbação $|u|^{s-1}u$ é do tipo "superlinear" para o operador $\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)$ e no caso $\frac{p+1}{p} = s+1$ então $|u|^{s-1}u$ e $\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)$ têm mesma homogeneidade.

Lembramos que a hipérbole crítica (3.1) é um determinante para a existência de solução positiva para o sistema (S_3) no caso em que $\mu = 0$. Neste caso o sistema (S_3) não tem solução positiva se (p, q) pertence ou está acima da hipérbole crítica, isto é,

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq \frac{N-2}{N}.$$

Este tipo de resultado, baseado em um identidade do tipo Pohozǎev foi observado por Clément et al. [15] e van der Vorst [48]; veja também Pucci e Serrin [39], Mitidieri [34] e Peletier e van der Vorst [37].

Visando tornar claro a definição a seguir lembremos o problema clássico de Brezis e Nirenberg [12]

$$-\Delta u = \lambda u + u^{2^*-1}, \quad u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \tag{BN}$$

Sabemos que as funções que realizam a constante de Sobolev

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx;\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = 1\right\}, \quad N \geq 3,$$

comportam-se no infinito como $r^{-(N-2)}$. Segundo os argumentos de Brezis e Nirenberg [12, Lemma 1.2], a definição de dimensão crítica e não-crítica associada ao problema (BN) surge naturalmente da L^2-integrabilidade de $|x|^{-(N-2)}$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_1(0)$, mais precisamente

$$\begin{aligned} &2(N-2) \geq N \quad \text{corresponde as dimensões não-críticas para (BN), e} \\ &2(N-2) < N \quad \text{corresponde as dimensões críticas para (BN)} \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} &N \geq 4 \quad \text{são as dimensões não-críticas para (BN), e} \\ &N = 3 \quad \text{é a dimensão crítica para (BN).} \end{aligned}$$

Argumentos semelhantes foram introduzidos em [19, §7 e §8] para classificar as dimensões críticas e não-críticas associadas ao problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{p-1} + u^{p^*-1}, \quad u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{P'}$$

Sabendo que as funções que realizam

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx;\ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx = 1\right\}, \quad N > p,$$

comportam-se no infinito como $r^{-\frac{N-p}{p-1}}$, a definição de dimensão crítica e não-crítica associada ao problema (P') surge da L^p-integrabilidade de $|x|^{-\frac{N-p}{p-1}}$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_1(0)$, mais precisamente

$$\begin{aligned} &N \geq p^2 \quad \text{são as dimensões não-críticas para (P') e,} \\ &p < N < p^2 \quad \text{são as dimensões críticas para (P').} \end{aligned}$$

Voltemos para o problema (P_3). Considere o espaço $E(\Omega) := W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, dotado da norma $\|u\| := |\Delta u|_{\frac{p+1}{p}}$. Considere a constante de Sobolev para a imersão $E(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, dada por

$$S(\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx;\ u \in E(\Omega), \int_\Omega |u|^{q+1} dx = 1\right\}. \tag{3.2}$$

É sabido que $S(\Omega)$ não depende de Ω e $S(\Omega)$ nunca é atingido, exceto quando $\Omega = \mathbb{R}^N$. Mais ainda, $S(\Omega) = S$, onde

$$S = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx;\ u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1} dx = 1\right\}. \tag{3.3}$$

Lions [29] provou que S é atingida e que toda solução de S tem sinal definido e é radialmente simétrica em relação a algum ponto e que, as soluções positivas, são radialmente decrescentes em relação ao ponto de simetria.

Seja $\varphi \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ radialmente simétrica em relação à origem, $\varphi > 0$ em $\mathbb{R}^N$, onde S é atingida. Lions [29, Corollary I.1] provou que todas as funções positivas que realizam S são dadas por

$$\varphi_{\delta,a}(x) = \delta^{-\frac{N}{q+1}} \varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.4}$$

onde $a \in \mathbb{R}^N$ e $\delta > 0$. Podemos então escolher φ com $\varphi(0) = 1$. Recordamos também que as funções dadas por $S^\alpha \varphi_{\delta,a}$, com $\varphi_{\delta,a}$ como em (3.4) e $\alpha = \frac{p(p(N-2)-2)}{2(p+1)^2}$, são precisamente as soluções positivas regulares de

$$\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = u^q \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Segundo [25, (1.14), (1.15) e (1.16)], a função φ possui o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{r\to\infty} r^{p(N-2)-2}\varphi(r) = b, \quad \text{se} \quad p < \frac{N}{N-2}, \tag{3.5}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^{N-2}}{\log r}\varphi(r) = b, \quad \text{se} \quad p = \frac{N}{N-2}, \tag{3.6}$$

e

$$\lim_{r\to\infty} r^{N-2}\varphi(r) = b, \quad \text{se} \quad p > \frac{N}{N-2}, \tag{3.7}$$

onde $b > 0$ é uma constante.

Observe que, para $p < \frac{N}{N-2}$, a função φ, no infinito, comporta-se como $r^{-[p(N-2)-2]}$. Logo, visando proceder como Brezis e Nirenberg [12, Lemma 1.2], para garantir a existência

de solução para o problema (P_3) com perturbação de mesma ordem, isto é, $s = 1/p$, faz-se necessário considerar

$$[p(N-2)-2]\left(\frac{p+1}{p}\right) \geq N, \quad \text{ou equivalentemente,} \quad \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p < \frac{N}{N-2}.$$

Note que $\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} < \frac{N}{N-2}$ se, e somente se, $N \geq 6$.

Observe também que

$$[p(N-2)-2]\left(\frac{p+1}{p}\right) \geq N \ \text{ é equivalente a } \ N \geq 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^2.$$

Isto indica a naturalidade desta restrição quando a comparamos com as dimensões não-críticas do biharmônico, cf. van der Vorst [47], e fazemos um paralelo da restrição $N \geq p^2$ para o p-Laplaciano com as dimensões não críticas do Laplaciano.

Para $p \geq \frac{N}{N-2}$, o comportamento de φ no infinito está relacionado com $r^{-(N-2)}$, veja (3.6) e (3.7), e somos induzidos a considerar

$$(N-2)\left(\frac{p+1}{p}\right) \geq N, \quad \text{ou equivalentemente} \quad \frac{N}{N-2} \leq p \leq \frac{N-2}{2}.$$

Mais uma vez, observe que a desigualdade $\frac{N}{N-2} \leq \frac{N-2}{2}$ é válida se, e somente se, $N \geq 6$.

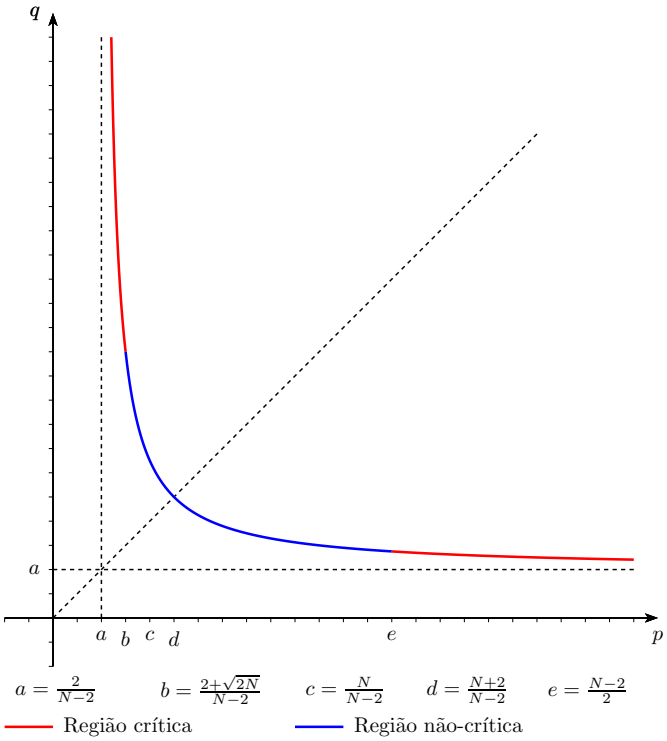
Com isto, introduzimos a noção de região não-crítica e região crítica da hipérbole crítica associadas ao problema (P_3).

Definição 3.1. *Considere o problema* (P_3). *Dizemos que o ponto* (p, q) *da hipérbole crítica* (3.1) *está em uma região:*

(a) Não-crítica se $N \geq 6$ *e* p *satisfaz*

$$\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p \leq \frac{N-2}{2}. \tag{3.8}$$

(b) Crítica, se $N \geq 6$ *e* p *não satisfaz* (3.8)*; ou* $N = 3, 4, 5$ *e* p *qualquer.*



Note que a região não-crítica associada à equação (P_3) não é necessariamente simétrica em relação ao eixo $p = q$ pois (P_3), isto é (S_3), não é uma perturbação simétrica do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste capítulo, $\mu_1(\Omega)$ denota o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu u^{\frac{1}{p}} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Ao longo deste capítulo a hipótese (H), relativa a potência $s+1$, indica a seguinte situação:

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{(a)} \ \text{Na região não-crítica, i.e., } N \geq 6 \text{ e } \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p \leq \frac{N-2}{2}, \text{ suponha} \\ \qquad \frac{p+1}{p} \leq s+1 < q+1. \\ \textbf{(b)} \ \text{Nas regiões críticas,} \\ \quad \text{(b1) } N \geq 6 \text{ e } \frac{2}{N-2} < p < \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2}, \text{ suponha } q-p < s+1 < q+1; \\ \quad \text{(b2) } N \geq 6 \text{ e } p > \frac{N-2}{2}, \text{ suponha } \frac{(p-1)(q+1)}{p} < s+1 < q+1; \\ \quad \text{(b3) } N = 3,4,5 \text{ e } \frac{2}{N-2} < p < \frac{N}{N-2}, \text{ suponha } q-p < s+1 < q+1; \\ \quad \text{(b4) } N = 3,4,5 \text{ e } p \geq \frac{N}{N-2}, \text{ suponha } \frac{(p-1)(q+1)}{p} < s+1 < q+1. \end{array}\right\} \tag{H}$$

Vale observar que nos casos (b1) e (b3) tem-se

$$\frac{p+1}{p} < q-p,$$

e nos casos (b2) e (b4) tem-se

$$\frac{p+1}{p} < \frac{(p-1)(q+1)}{q};$$

cf. (3.64) e (3.67) para mais detalhes.

Vale dizer que no caso biharmônico, isto é, no caso $p = 1$, a hipótese (H) é reduzida à hipótese sobre $s+1$ do Teorema 2.1, de modo que a hipótese na região não-crítica é equivalente a hipótese nas dimensões não-críticas para o problema (P_2), enquanto as hipóteses relativas as regiões críticas correspondem a hipótese nas dimensões críticas para o problema (P_2).

Definição 3.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Dizemos que u é uma solução clássica de (P_3) se $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, $|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ e u satisfaz (P_3) pontualmente.*

Teorema 3.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Então, sob a hipótese* (H)*, o problema (P_3) admite uma solução clássica satisfazendo $u, -\Delta u > 0$ em Ω.*

Na Seção 3.3, onde faremos a demonstração do Lema 3.19, ficará claro onde a condição sob a perturbação $s+1$ em cada item na hipótese (H) é necessária; mais especificamente, para cada dimensão $N \geq 3$ a condição sob a perturbação $s+1$ nas regiões críticas e não-críticas da hipérbole crítica, quando esta última existir.

Observação 3.4. *Salientamos que o Teorema 3.3 inclui todos os resultados em [24, Theorem 2] para o sistema (S_3), uma vez que [24, Theorem 2] trata o caso particular $s = 1$ e que, neste caso, nossa hipótese* (H) *é equivalente as hipóteses em [24]. Também acreditamos ser mais natural trabalhar com (S_3) com $s = \frac{1}{p}$ em lugar de $s = 1$.*

Definição 3.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Dizemos que $u \in E(\Omega)$ é solução de energia mínima para o problema (P_3) se u é solução não-trivial de (P_3) e tem menor energia*

$$I_\mu(u) := \frac{p}{p+1}\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx - \frac{\mu}{s+1}\int_\Omega |u|^{s+1}dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx$$

entre as soluções não-triviais de (P_3).

Teorema 3.6 (Solução de energia mínima). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado, $\mu > 0$ e no caso $s = 1/p$, suponha também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Suponha* (H) *satisfeita. Então:*

(i) O problema (P_3) tem uma solução u de energia mínima.

(ii) As soluções de energia mínima de (P_3) são soluções do tipo Passo da Montanha para o funcional I_μ.

(iii) Se u é solução de energia mínima de (P_3) então, a menos de substituir u por $-u$, tem-se $u, -\Delta u > 0$ em Ω.

(iv) Se Ω é uma bola centrada na origem de $\mathbb{R}^N$, então toda solução de energia mínima de (P_3) é tal que u e $-\Delta u$ são radiais.

3.1 Compacidade e prova do Teorema 3.3

Defina, para $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$, $\mu_1(\Omega)$ dado por (3.9),

$$\|u\|_\mu := \left(|\Delta u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}}, \quad \forall\, u \in E(\Omega). \tag{3.10}$$

Assim $\|\cdot\|_\mu$ satisfaz

$$\|u\|_\mu \leq \|u\| \leq c(\Omega,\mu)\|u\|_\mu \quad \text{e} \quad \|tu\|_\mu = |t|\|u\|_\mu \;\; \forall\, u \in E(\Omega), \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

onde $c(\Omega,\mu) = \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right)^{-\frac{p}{p+1}} > 0$.

Para estudar a existência de solução para o problema (P_3), consideramos o funcional

$$I_\mu(u) := \frac{p}{p+1}\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx - \frac{\mu}{s+1}\int_\Omega |u|^{s+1} dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1} dx,\; u \in E(\Omega), \tag{3.12}$$

e a variedade de Nehari associada ao funcional I_μ, dada por

$$\mathcal{N}_\mu := \{u \in E(\Omega)\backslash\{0\}; I'_\mu(u)u = 0\}. \tag{3.13}$$

Definição 3.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Dizemos que $u \in E(\Omega)$ é uma solução fraca de (P_3) se u é um ponto crítico de I_μ, isto é, u satisfaz*

$$\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u \Delta v dx = \mu \int_\Omega |u|^{s-1} uv dx + \int_\Omega |u|^{q-1} uv dx,\; \forall\, v \in E(\Omega).$$

Lema 3.8. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Então as soluções clássicas de (P_3) são precisamente os pontos críticos do funcional I_μ. Além disso, no caso em que $u, -\Delta u > 0$ em Ω temos $u \in \mathcal{C}^4(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. O problema

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu |u|^{s-1}u + |u|^{q-1}u \;\text{ em }\; \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v \;\text{ em }\; \Omega, \\ -\Delta v = \mu |u|^{s-1}u + |u|^{q-1}u \;\text{ em }\; \Omega, \\ u, v = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{S_3}$$

Então usamos os argumentos em [26, Section 3] para mostrar que o par (u, v) solução do sistema (S_3) está em $L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r < \infty$. Logo, aplicando os resultados clássicos de regularidade para operador elípticos de segunda ordem ao sistema (S_3) obtemos $(u, v) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum α que depende de p e q. Observe que no caso em que $-\Delta u = |v|^{p-1}v > 0$ em Ω então $|v|^{p-1}v$ é $C^2(\Omega)$ e portanto, podemos aplicar os resultados clássicos da teoria de regularidade para operadores elípticos de segunda ordem para obter que $u \in \mathcal{C}^4(\Omega)$. □

Lema 3.9. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado, $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Então o funcional I_μ satisfaz a geometria do passo da montanha em torno do seu mínimo local em zero, com o associado nível do passo da montanha*

$$c_\mu = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma(t)), \tag{3.14}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], E(\Omega)); \gamma(0) = 0, I_\mu(\gamma(1)) < 0\}. \tag{3.15}$$

Mais ainda,

$$c_\mu = \widetilde{c}_\mu = \widehat{c}_\mu, \tag{3.16}$$

onde

$$\widetilde{c}_\mu = \inf_{u \in E(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tu) \quad e \quad \widehat{c}_\mu = \inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} I_\mu(u), \tag{3.17}$$

onde $\mathcal{N}_\mu$ é dada por (3.13).

Demonstração. A prova de que I_μ satisfaz a geometria do passo da montanha é feita usando argumentos padrões e será aqui omitida. Argumentando como [40, Proposition 3.11] prova-se a igualdade (3.16). □

Para contornar a falta de compacidade da imersão de $E(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$, o seguinte resultado devido a Lions [29] será extremamente útil para demonstração de alguns resultados desse trabalho.

Lema 3.10. *Dada uma sequência limitada $(u_n) \subset E(\Omega)$, temos, a menos de subsequência:*

(1) $u_n \rightharpoonup u$ em $E(\Omega)$;

(2) $u_n \to u$ q.t.p. em Ω e em $L^\theta(\Omega)$, para todo $1 \leq \theta < q+1$;

(3) $|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ no sentido das medidas em $\overline{\Omega}$;

(4) $|u_n|^{q+1} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ no sentido das medidas em $\overline{\Omega}$;

(5) existem um conjunto de índices J no máximo enumerável, uma família de pontos $\{x_j; j \in J\} \subset \overline{\Omega}$ e duas sequências $\{\lambda_j; j \in J\}, \{\nu_j; j \in J\} \subset (0, +\infty)$ tais que

$$\lambda \geq |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} + \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{x_j}, \quad \nu = |u|^{q+1} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

$$S\nu_j^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} \leq \lambda_j, \quad \textit{para todo} \quad j \in J, \quad \textit{em particular} \quad \sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} < +\infty;$$

(6) $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ *em* $(W^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega))^N$*;*

(7) $\nabla u_n \to \nabla u$ *q.t.p. em* Ω *e em* $(L^\sigma(\Omega))^N$*, para todo* $1 \leq \sigma < \sigma^*$*, com* $\sigma^* > \frac{p+1}{p}$ *dependendo da imersão crítica de Sobolev de* $W^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$*.*

Demonstração. Ver [29, Lemma I.1]. □

Lema 3.11. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*,* $N \geq 3$*, um domínio suave limitado e* $\mu > 0$*. No caso* $s = 1/p$*, supomos também* $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$*. Então toda sequência* (PS) *para* I_μ *é limitada.*

Demonstração. Suponha que

$$I_\mu(u_n) \to d, \quad I'_\mu(u_n) \to 0.$$

Caso 1: $s = \frac{1}{p}$ e $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$.

Existem $C > 0$ e $(\sigma_n) \subset [0, +\infty)$, $\sigma_n \to 0$, tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $w \in E(\Omega)$

$$|I_\mu(u_n)| = \left| \frac{p}{p+1} \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx - \mu \frac{p}{p+1} \int_\Omega |u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega |u_n|^{q+1} dx \right| \leq C$$

e

$$|I'_\mu(u_n)w| = \left| \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_n \Delta w dx - \mu \int_\Omega |u_n|^{\frac{1}{p}-1} u_n w dx - \int_\Omega |u_n|^{q-1} u_n w dx \right| \leq \sigma_n \|w\|.$$

De (3.10) e (3.11) segue que

$$\begin{aligned} (q+1)I_\mu(u_n) - I'_\mu(u_n)u_n &= \left[\frac{p}{p+1}(q+1) - 1 \right] \int_\Omega [|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u_n|^{\frac{p+1}{p}}] dx \\ &= \frac{pq-1}{p+1} \|u_n\|_\mu^{\frac{p+1}{p}} \geq \frac{1}{c(\Omega)} \frac{pq-1}{p+1} \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{1}{c(\Omega)} \frac{pq-1}{p+1} \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} \leq (q+1)I_\mu(u_n) - I'_\mu(u_n)u_n \leq (q+1)C + \sigma_n \|u_n\|$$

o que prova que (u_n) é limitada em $E(\Omega)$.

Caso 2: $\frac{p}{p+1} < s+1 < q+1$ e $\mu > 0$.

Existem $C > 0$ e $(\sigma_n) \subset [0, +\infty)$, $\sigma_n \to 0$, tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $w \in E(\Omega)$

$$|I_\mu(u_n)| = \left| \frac{p}{p+1} \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx - \frac{\mu}{s+1} \int_\Omega |u_n|^{s+1} dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega |u_n|^{q+1} dx \right| \leq C$$

e

$$|I'_\mu(u_n)w| = \left| \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_n \Delta w dx - \mu \int_\Omega |u_n|^{s-1} u_n w dx - \int_\Omega |u_n|^{q-1} u_n w dx \right| \leq \sigma_n \|w\|.$$

Segue que

$$\begin{aligned} I_\mu(u_n) - \frac{1}{s+1} I'_\mu(u_n)u_n &= \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{s+1}\right) \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} + \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{q+1}\right) |u_n|_{q+1}^{q+1} \\ &\geq \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{s+1}\right) \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{s+1}\right) \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} \leq I_\mu(u_n) - \frac{1}{s+1} I'_\mu(u_n)u_n \leq C + \frac{1}{s+1}\sigma_n \|u_n\|$$

o que prova que (u_n) é limitada em $E(\Omega)$. □

Lema 3.12. *(i) Se $u \in E(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, então $u\varphi \in E(\Omega)$.*

(ii) Seja (u_n) uma sequência em $E(\Omega)$. Então $u_n \rightharpoonup u$ em $E(\Omega)$ se, e somente se, $\Delta u_n \rightharpoonup \Delta u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [35], Lemas 3.4 e 2.4, respectivamente. □

A fim de aplicarmos o teorema clássico do passo da montanha [6], é preciso mostrar para quais níveis o funcional I_μ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$. É esse o objetivo dos Lemas 3.13 a 3.18 a seguir, cujas demonstrações foram baseadas nos argumentos em [35], que por sua vez foram inspirados nos argumentos em [44].

Lema 3.13. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Se (u_n) é uma sequência (PS) para I_μ, então (u_n) satisfaz (1)-(7) do Lema 3.10, com o adicional de que J é, no máximo, finito.*

Demonstração. Do Lema 3.11, segue (u_n) é limitada, donde vale (1)-(7) do Lema 3.10. Supondo $J \neq \emptyset$ seja $x_k \in \overline{\Omega}$ um ponto no suporte singular de λ e ν. Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$, $\xi \equiv 1$ em $B_1(0)$ e $\mathrm{supp}(\xi) \subset B_2(0)$; para cada $\theta > 0$ defina $\xi_\theta(x) = \xi\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)$. Existem então constantes $C_1, C_2 > 0$ independentes de θ tais que $|\nabla \xi_\theta(x)| \leq C_1/\theta$ e $|\Delta \xi_\theta(x)| \leq C_2/\theta^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, e do Lema 3.12-(i) segue que $\xi_\theta u_n \in E(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $\theta > 0$.

Fixe $\theta > 0$. A sequência $(\xi_\theta u_n)$ é limitada em $E(\Omega)$, donde $I'_\mu(u_n)(\xi_\theta u_n) = o_n(1)$, ou seja,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} \xi_\theta dx + \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_n u_n \Delta \xi_\theta dx + 2\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_n \nabla u_n . \nabla \xi_\theta dx \\ &- \mu \int_\Omega |u_n|^{s+1} \xi_\theta dx - \int_\Omega |u_n|^{q+1} \xi_\theta dx. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Do item (2) do Lema 3.10, segue que $u_n \to u$ em $L^{s+1}(\Omega)$ e, consequentemente, $\xi_\theta u_n \to \xi_\theta u$ em $L^{s+1}(\Omega)$; por outro lado, $\xi_\theta(x) \to \delta_{x_k}(x)$ para todo $x \in \Omega$, quando $\theta \to 0$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{s+1} \xi_\theta dx = \int_\Omega |u|^{s+1} \xi_\theta dx \tag{3.19}$$

e do teorema da convergência dominada segue que

$$\lim_{\theta\to 0}\int_\Omega |u|^{s+1}\xi_\theta dx = 0. \tag{3.20}$$

Da desigualdade de Hölder, existe uma constante $C > 0$ independente de θ e n tal que

$$\left|\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n u_n \Delta\xi_\theta dx\right| \le C\left(\int_\Omega |u_n|^{q+1}\left|\Delta\xi\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)^{\frac{q+1}{2}}\right| dx\right)^{\frac{1}{q+1}}. \tag{3.21}$$

Da definição de convergência fraco-* temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{q+1}\left|\Delta\xi\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{q+1}{2}} dx = \int_\Omega \left|\Delta\xi\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{q+1}{2}} d\nu, \tag{3.22}$$

e como $|\Delta\xi(\frac{x-x_k}{\theta})|^{\frac{q+1}{2}} \to 0$ quando $\theta \to 0$ para todo $x \in \Omega$, segue novamente do teorema da convergência dominada que

$$\lim_{\theta\to 0}\int_\Omega \left|\Delta\xi\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{q+1}{2}} d\nu = 0. \tag{3.23}$$

Agora, note que

$$\left|\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n \nabla u_n.\nabla\xi_\theta dx\right| \le C\left(\int_\Omega \frac{1}{\theta^{\frac{p+1}{p}}}\left|\nabla\xi\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} |\nabla u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p+1}}, \tag{3.24}$$

e que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{1}{\theta^{\frac{p+1}{p}}}\left|\nabla\xi\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} |\nabla u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx = \int_\Omega \frac{1}{\theta^{\frac{p+1}{p}}}\left|\nabla\xi\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} |\nabla u|^{\frac{p+1}{p}} dx, \tag{3.25}$$

e como $N > \frac{p+1}{p}$, de [18, Theorem 8.15] segue que

$$\int_\Omega \frac{1}{\theta^{\frac{p+1}{p}}}\left|\nabla\xi\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} |\nabla u|^{\frac{p+1}{p}} dx = O(\theta^{N-\frac{p+1}{p}}). \tag{3.26}$$

Logo, fazendo $n \to \infty$ em (3.18), e depois $\theta \to 0$, segue de (3.19)-(3.26) que

$$0 = \lambda_k - \nu_k, \quad \forall\, k \in J. \tag{3.27}$$

Como $\lambda_k \ge S\nu_k^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}}$, obtemos $\nu_k \ge S\nu_k^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}}$ para todo $k \in J$, ou seja, para todo $k \in J$ temos $\nu_k = 0$ ou $\nu_k \ge S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$. Por fim, como $\sum_{j\in J}\nu_j^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} < \infty$ segue então que J deve ser, no máximo, finito. □

Lema 3.14. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \ge 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Suponha (u_n) uma sequência (PS) para I_μ. Se $K \subset\subset \Omega\backslash\{x_j; j \in J\}$ é compacto, então $u_n \to u$ em $L^{q+1}(K)$.*

Demonstração. Do Lema 3.13, as hipóteses do Lema 3.10 são verificadas com J, no máximo, finito. Seja $\delta = \text{dist}(K, \{x_j; j \in J\})$. Para cada $\theta \in (0, \delta)$, considere $A_\theta = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, K) < \theta\}$ e $\xi_\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi_\theta \leq 1$, $\xi_\theta \equiv 1$ em $A_{\theta/2}$ e $\xi_\theta \equiv 0$ em $\Omega \backslash A_\theta$. Então

$$\int_K |u_n|^{q+1} dx = \int_K |u_n|^{q+1} \xi_\theta dx \leq \int_{A_\theta} |u_n|^{q+1} \xi_\theta dx = \int_\Omega |u_n|^{q+1} \xi_\theta dx$$

e daí

$$\limsup_n \int_K |u_n|^{q+1} dx \leq \int_\Omega \xi_\theta d\nu = \int_\Omega \xi_\theta |u|^{q+1} dx = \int_{A_\theta} \xi_\theta |u|^{q+1} dx \leq \int_{A_\theta} |u|^{q+1} dx. \tag{3.28}$$

Fazendo $\theta \to 0$ em (3.28), segue do teorema da convergência dominada que

$$\limsup_n \int_K |u_n|^{q+1} dx \leq \int_K |u|^{q+1} dx.$$

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{q+1}(K)$, obtemos

$$\int_K |u|^{q+1} dx \leq \limsup_n \int_K |u_n|^{q+1} dx.$$

donde $|u_n|_{q+1,K} \to |u|_{q+1,K}$. Sendo $L^{q+1}(K)$ uniformemente convexo, segue por fim que $u_n \to u$ em $L^{q+1}(K)$. □

Lema 3.15. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Suponha (u_n) uma sequência (PS) para I_μ. Se $K \subset\subset \Omega \backslash \{x_j; j \in J\}$ é compacto, então $\Delta u_n \to \Delta u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$.*

Demonstração. Para cada $r > 1$ existe uma constante $C_r > 0$ tal que

$$(|t|^{r-2}t - |s|^{r-2}s)(t-s) \geq \begin{cases} C_r |t-s|^r, & \text{se } r \geq 2, \\ C_r \dfrac{|t-s|^2}{(|t|+|s|)^{2-r}}, & \text{se } 1 < r < 2, \end{cases} \tag{3.29}$$

(ver [45, (2.2)]). Considere ξ_θ como no lema anterior. De (3.29) temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_K (|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_n - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u)(\Delta u_n - \Delta u) dx \\ &= \int_K (|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_n - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u)(\Delta u_n - \Delta u) \xi_\theta dx \\ &\leq \int_\Omega (|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_n - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u)(\Delta u_n - \Delta u) \xi_\theta dx \\ &= \int_\Omega [|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} \xi_\theta - |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_n \xi_\theta - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u (\Delta(u_n - u)) \xi_\theta] dx \end{aligned} \tag{3.30}$$

Fixe $\theta > 0$. Como $I'_\mu(u_n) \to 0$ e (ξ_θ) é limitada em $E(\Omega)$, então $I'_\mu(u_n)(\xi_\theta u_n) = o_n(1)$ e $I'_\mu(u_n)(\xi_\theta u) = o_n(1)$, ou seja,

$$\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_n (u \Delta \xi_\theta + 2 \nabla u \nabla \xi_\theta + \xi_\theta \Delta u) dx - \int_\Omega |u_n|^{s-1} u_n \xi_\theta u dx - \int_\Omega |u_n|^{q-1} u_n \xi_\theta u dx = o_n(1) \tag{3.31}$$

e

$$\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(u_n\Delta\xi_\theta + 2\nabla u_n\nabla\xi_\theta + \xi_\theta\Delta u_n)dx - \int_\Omega |u_n|^{s+1}\xi_\theta dx - \int_\Omega |u_n|^{q+1}\xi_\theta dx = o_n(1). \tag{3.32}$$

De (3.31) e (3.32) segue que

$$\int_\Omega [|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(u_n-u)\Delta\xi_\theta + 2|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(\nabla u_n-\nabla u)\nabla\xi_\theta + |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(\Delta u_n-\Delta u)\xi_\theta]dx$$

$$- \int_\Omega |u_n|^{s-1}u_n(\xi_\theta u_n - \xi_\theta u)dx - \int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n(\xi_\theta u_n - \xi_\theta u)dx = o_n(1),$$

e como $\xi_\theta u_n \rightharpoonup \xi_\theta u$ em $L^{s+1}(\Omega)$ e em $L^{q+1}(\Omega)$ temos

$$o_n(1) = \int_\Omega \Big[|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(u_n - u)\Delta\xi_\theta + 2|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(\nabla u_n - \nabla u)\nabla\xi_\theta + |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(\Delta u_n - \Delta u)\xi_\theta\Big]\, dx$$

o que implica

$$\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(\Delta u_n - \Delta u)\Delta\xi_\theta dx = \int_\Omega [|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(u - u_n)\Delta\xi_\theta + 2|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(\nabla u - \nabla u_n)\nabla\xi_\theta]dx + o_n(1)$$

e então

$$\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(\Delta u_n - \Delta u)\Delta\xi_\theta - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u(\Delta u_n - \Delta u)\Delta\xi_\theta dx = \int_\Omega [|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(u - u_n)\Delta\xi_\theta + 2|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n(\nabla u - \nabla u_n)\nabla\xi_\theta]dx - \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u(\Delta u_n - \Delta u)\Delta\xi_\theta dx + o_n(1)$$

Logo, de (3.30), do Lema 3.12-(ii), do Lema 3.14 e do fato de que $\xi_\theta u_n \rightharpoonup \xi_\theta u$ em $E(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_K (|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)(\Delta u_n - \Delta u)dx \\
&\leq \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n\Delta\xi_\theta(u - u_n)dx + 2\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n\nabla\xi_\theta(\nabla u - \nabla u_n)dx \\
&- \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u(\Delta u_n - \Delta u)\xi_\theta dx + o_n(1) \\
&\leq C\left(\int_{A_\theta} |u - u_n|^{q+1}dx\right)^{\frac{1}{q+1}} + C\left(\int_{A_\theta} |\nabla u - \nabla u_n|^{\frac{p+1}{p}}dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \\
&- \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u(\Delta u_n - \Delta u)\xi_\theta dx + o_n(1) \\
&= -\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u(\Delta u_n - \Delta u)\xi_\theta dx + o_n(1) = o_n(1).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_K (|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)(\Delta u_n - \Delta u)dx \to 0,\ n \to 0. \tag{3.33}$$

No caso em que $(p+1)/p \geq 2$, obtemos de (3.29) e (3.33) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_K |\Delta u_n - \Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx = 0,$$

e no caso em que $1 < (p+1)/p < 2$, segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}\int_K |\Delta u_n - \Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx &= \int_K \frac{|\Delta u_n - \Delta u|^{\frac{p+1}{p}}}{(|\Delta u_n| + |\Delta u|)^{\frac{\frac{p+1}{p}\frac{p-1}{p}}{2}}} (|\Delta u_n| + |\Delta u|)^{\frac{\frac{p+1}{p}\frac{p-1}{p}}{2}} dx \\ &\leq \left(\int_K \frac{|\Delta u_n - \Delta u|^2}{(|\Delta u_n| + |\Delta u|)^{1-\frac{1}{p}}} dx\right)^{\frac{p+1}{2p}} \left(\int_K (|\Delta u_n| + |\Delta u|)^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p-1}{2p}} \to 0,\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Em ambos os casos concluímos que $\Delta u_n \to \Delta u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$. □

Uma vez que

$$\Omega \backslash \{x_j; j \in J\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

onde cada conjunto K_n é compacto, aplicamos um argumento diagonal para obter o seguinte resultado.

Corolário 3.16. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Se (u_n) uma sequência (PS) para I_μ, então, a menos de subsequência, (u_n) satisfaz (1)-(7) do Lema 3.10 com J no máximo finito e*

(8) $u_n \to u$ em $L^{q+1}(K)$, $\forall K \subset\subset \Omega\backslash\{x_j; j \in J\}$;

(9) $\Delta u_n \to \Delta u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$, $\forall K \subset\subset \Omega\backslash\{x_j; j \in J\}$;

(10) $\Delta u_n \to \Delta u$ q.t.p em Ω.

Lema 3.17. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Se (u_n) é uma sequência (PS) para I_μ, então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $E(\Omega)$ e u é solução fraca de (P_3), com $I_\mu(u) \geq 0$.*

Demonstração. A sequência (u_n) satisfaz todas as propriedades do Corolário 3.16. Usando a imersão contínua de $E(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$, concluímos, usando o lema de Brezis-Lieb [11], que $|u_n|^{q-1}u_n \rightharpoonup |u|^{q-1}u$ em $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$; em particular,

$$\int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n\varphi dx \to \int_\Omega |u|^{q-1}u\varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in E(\Omega). \tag{3.34}$$

Analogamente, mostra-se que

$$\int_\Omega |u_n|^{s-1}u_n\varphi dx \to \int_\Omega |u|^{s-1}u\varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in E(\Omega). \tag{3.35}$$

Como Δu_n é limitada em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, e $\Delta u_n \to \Delta u$ q.t.p. em Ω, usamos novamente o lema de Brezis-Lieb para concluir que $|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n \rightharpoonup |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u$ em $L^{p+1}(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n z dx \to \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u z dx, \quad \forall\, z \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega),$$

e usamos agora o isomorfismo isométrico $-\Delta : E(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ (ver [23, Chapter 9]) para concluir finalmente que

$$\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n \Delta\varphi dx \to \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u \Delta\varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in E(\Omega). \tag{3.36}$$

Se (u_n) é uma sequência (PS) para I_μ, temos

$$I'_\mu(u_n)\varphi = \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n \Delta\varphi dx - \mu\int_\Omega |u_n|^{s-1}u_n\varphi dx - \int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n\varphi dx = o_n(1), \ \forall\, \varphi \in E(\Omega),$$

e fazendo $n \to \infty$ e usando (3.34)-(3.36), obtemos

$$\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u \Delta\varphi dx - \mu\int_\Omega |u|^{s-1}u\varphi dx - \int_\Omega |u|^{q-1}u\varphi dx = 0, \quad \varphi \in E(\Omega), \tag{3.37}$$

ou seja, u é solução fraca do problema (P_3). Fazendo $\varphi = u$ em (3.37), temos

$$\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx = \mu\int_\Omega |u|^{s+1}dx + \int_\Omega |u|^{q+1}dx,$$

donde

$$\begin{aligned}
I_\mu(u) &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx - \frac{\mu}{s+1}\int_\Omega |u|^{s+1}dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx \\
&= \frac{p}{p+1}\left[\mu\int_\Omega |u|^{s+1}dx + \int_\Omega |u|^{q+1}dx\right] - \frac{\mu}{s+1}\int_\Omega |u|^{s+1}dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx \\
&= \mu\left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{s+1}\right)\int_\Omega |u|^{s+1}dx + \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega |u|^{q+1}dx \\
&\geq \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega |u|^{q+1}dx = \frac{2}{N}|u|_{q+1}^{q+1} \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.18. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Então I_μ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c < \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para I_μ, com $d < \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$, isto é

$$I_\mu(u_n) \to d, \quad I'_\mu(u_n) \to 0.$$

Podemos supor (1)-(7) do Lema 3.10 e (8)-(10) do Corolário 3.16, com J no máximo finito, e $\lambda_k = \nu_k$, para todo $k \in J$, $\nu_k = 0$ ou $\nu_k \geq S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$ (ver demonstração do Lema 3.13). Suponha

que existe $k \in J$ tal que $\nu_k \neq 0$. Então

$$d = \lim_{n\to\infty} I_\mu(u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{p+1}\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}dx - \frac{\mu}{s+1}\int_\Omega |u_n|^{s+1}dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u_n|^{q+1}dx\right)$$
$$\geq \frac{p}{p+1}\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx + \frac{p}{p+1}\sum_{j\in J}\nu_j - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \frac{1}{q+1}\sum_{j\in J}\nu_j - \frac{\mu}{s+1}\int_\Omega |u|^{s+1}dx$$
$$= I(u) + \left[\frac{p}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right]\sum_{j\in J}\nu_j \geq I(u) + \frac{2}{N}\nu_k \geq I(u) + \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}};$$

como u é solução fraca do problema (P_3), temos $I(u) \geq 0$, donde

$$d \geq I(u) + \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}} \geq \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}},$$

uma contradição. Portanto, $\nu_k = 0$, para todo $k \in J$, e como $L^{q+1}(\Omega)$ é uniformemente convexo, segue que $u_n \to u$ em $L^{q+1}(\Omega)$. Escreva agora $v_n := u_n - u$. Então $v_n \rightharpoonup 0$ em $E(\Omega)$, $\Delta v_n \to 0$ q.t.p. em Ω e $v_n \to 0$ em $L^{q+1}(\Omega)$. Mostremos agora $v_n \to 0$ em $E(\Omega)$, ou equivalentemente, que $\Delta v_n \to 0$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Do lema de Brezis-Lieb [11]

$$|\Delta u_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = |\Delta u + \Delta v_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = |\Delta u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + |\Delta v_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + o_n(1);$$

sendo u é solução fraca de (P_3), temos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'(u_n)u_n = |\Delta u_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu|u_n|_{s+1}^{s+1} - |u_n|_{q+1}^{q+1} \\ &= |\Delta u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + |\Delta v_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu|u|_{s+1}^{s+1} - |u|_{q+1}^{q+1} + o_n(1) = |\Delta v_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + o_n(1), \end{aligned}$$

ou seja, $v_n \to 0$ em $E(\Omega)$, e portanto, $u_n \to u$ em $E(\Omega)$, se $d < \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$. □

Lema 3.19. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Então, sob a hipótese* (H)*, o nível do passo da montanha do funcional I_μ, dado por* (3.14) *é tal que*

$$c_\mu \in \left(0, \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}}\right).$$

Demonstração. Ver Seção 3.3. □

Destacamos que o próximo resultado é uma consequência direta dos Lemas 3.18 e 3.19, e do teorema clássico do passo da montanha [6].

Proposição 3.20. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave limitado e $\mu > 0$. No caso $s = 1/p$, supomos também $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$. Então, sob a hipótese* (H)*, o nível do passo da montanha c_μ é um valor crítico de I_μ, isto é, existe $u_\mu \in E(\Omega)$ tal que*

$$I_\mu(u_\mu) = c_\mu,\ I'_\mu(u_\mu) = 0.$$

Prova do Teorema 3.3

A existência de solução clássica não trivial para o problema (P_3) segue do Lema 3.8 e Proposição 3.20, como consequência do teorema do passo da montanha. Na Seção 3.2 veremos que toda solução u do tipo passo da montanha do problema (P_3), a menos de substituir u por $-u$, satisfaz $u, -\Delta u > 0$ em Ω; veja prova do Teorema 3.6 (iii). No Apêndice A deste trabalho, mostramos uma prova alternativa para este fato. □

3.2 Prova do Teorema 3.6

Nesta parte nossos argumentos serão baseados nas caracterizações do nível do passo da montanha c_μ dadas pelo Lema 3.9.

Prova do Teorema 3.6 (i) e (ii). Provamos no Teorema 3.3 a existência de uma solução do tipo passo da montanha para o problema (P_3) associada ao nível crítico c_μ. Das igualdades dadas por (3.16) segue que toda solução passo da montanha de (P_3) é de energia mínima e vice-versa. □

Prova do Teorema 3.6 (iii). Seja u uma solução de energia mínima de (P_3). Segundo o Lema 3.8 sabemos que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Assim, usando o princípio do máximo forte para operadores elípticos de segunda ordem, basta provar que Δu não troca de sinal em Ω.

Por contradição suponha que Δu muda de sinal em Ω. Seja w a solução de

$$\begin{cases} -\Delta w = |\Delta u| & \text{em} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, do princípio do máximo forte, tem-se $w > |u|$ em Ω. Como $w \in E(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} c_\mu &\leq \max_{t\geq 0} I_\mu(tw) \\ &= \max_{t\geq 0}\left\{\frac{p}{p+1}t^{\frac{p+1}{p}}\int_\Omega |\Delta w|^{\frac{p+1}{p}}dx - \frac{\mu}{s+1}t^{s+1}\int_\Omega |w|^{s+1}dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega |w|^{q+1}dx\right\} \\ &< \max_{t\geq 0}\left\{\frac{p}{p+1}t^{\frac{p+1}{p}}\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx - \frac{\mu}{s+1}t^{s+1}\int_\Omega |u|^{s+1}dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx\right\} \\ &= \max_{t\geq 0} I_\mu(tu) = c_\mu, \end{aligned}$$

um absurdo. □

Prova do Teorema 3.6 (iv). Suponha $\Omega = B_r = B_r(0)$. Seja u uma solução de energia mínima de (P_3). Segundo o item (iii) deste teorema, podemos admitir que $u, -\Delta u > 0$ em B_r.

Denote por u^* e $(-\Delta u)^*$ as simetrizações de Schwarz de u e $-\Delta u$, respectivamente. Se w é a solução de

$$\begin{cases} -\Delta w = (-\Delta u)^* & \text{em } B_r, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B_r, \end{cases}$$

então $w = w^*$ e $w \in E(B_r)$. Para a prova deste item basta mostrar que $u = w$.

De [5], ver também [10, Lemma 2.8], temos $w \geq u^*$ e

$$|w > u^*| = 0 \Leftrightarrow -\Delta u = (-\Delta u)^*.$$

Se $|w > u^*| > 0$, então

$$\begin{aligned}
c_\mu &\leq \max_{t\geq 0} I_\mu(tv) \\
&= \max_{t\geq 0}\left\{\frac{p}{p+1}t^{\frac{p+1}{p}}\int_{B_r}|\Delta w|^{\frac{p+1}{p}}dx - \frac{\mu}{s+1}t^{s+1}\int_{B_r}|w|^{s+1}dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_{B_r}|w|^{q+1}dx\right\} \\
&< \max_{t\geq 0}\left\{\frac{p}{p+1}t^{\frac{p+1}{p}}\int_{B_r}|(-\Delta u)^*|^{\frac{p+1}{p}}dx - \frac{\mu}{s+1}t^{s+1}\int_{B_r}|u^*|^{s+1}dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_{B_r}|u^*|^{q+1}dx\right\} \\
&= \max_{t\geq 0}\left\{\frac{p}{p+1}t^{\frac{p+1}{p}}\int_{B_r}|-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx - \frac{\mu}{s+1}t^{s+1}\int_{B_r}|u|^{s+1}dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_{B_r}|u|^{q+1}dx\right\} \\
&= \max_{t\geq 0} I_\mu(tu) = c_\mu
\end{aligned}$$

um absurdo. Dessa maneira, $-\Delta u = (-\Delta u)^*$ e como u e w são soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta z = (-\Delta u)^* & \text{em } B_r, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial B_r, \end{cases}$$

segue que $u = w$. □

3.3 Prova do Lema 3.19

Mostremos que, sob a hipótese (H), o nível do passo da montanha c_μ, dado por (3.14), pertence ao intervalo $(0, (2/N)S^{\frac{pN}{2(p+1)}})$. Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$. Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função tal que $0 \leq \xi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\xi \equiv 1$ em $B(0, \rho/2)$, $\xi \equiv 0$ em $B(0,\rho)^c$ e $B(0,\rho) \subset\subset \Omega$, $\rho > 0$. Escreva

$$U_\delta(x) := \xi(x)\psi_\delta(x),\ x \in \mathbb{R}^N,\ 0 < \delta < \rho/2,$$

onde $\psi_\delta = S^{\frac{p[p(2-n)+2]}{2(p+1)^2}}\varphi_\delta$ e $\varphi_\delta(x) = \varphi_{\delta,0}(x)$ é dado por (3.4). Então

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta\psi_\delta|^{\frac{p+1}{p}}dx = S \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N}|\psi_\delta|^{q+1}dx = 1,$$

e, ver [35] eq. (6.4) and eq. (6.3) respectivamente, temos

$$|\Delta U_\delta|_{\frac{p+1}{p},\Omega}^{\frac{p+1}{p}} = \begin{cases} S + O(\delta^{p(N-2)-2}), & \text{se } p < \frac{N}{N-2}, \\ S + |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}}O(\delta^{\frac{N}{p}}), & \text{se } p = \frac{N}{N-2}, \\ S + O(\delta^{\frac{N}{p}}), & \text{se } p > \frac{N}{N-2}, \end{cases} \tag{3.38}$$

e

$$|U_\delta|_{q+1,\Omega}^{q+1} = \begin{cases} 1 + O(\delta^{pN}), & \text{se } p < \frac{N}{N-2}, \\ 1 + |\log\delta|^{q+1}O(\delta^{q(N-2)-2}), & \text{se } p = \frac{N}{N-2}, \\ 1 + O(\delta^{q(N-2)-2}), & \text{se } p > \frac{N}{N-2}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Fazendo

$$V_\delta(x) = \frac{U_\delta(x)}{|U_\delta|_{q+1}},\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.40}$$

segue que

$$|\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p},\Omega}^{\frac{p+1}{p}} = \begin{cases} S + O(\delta^{p(N-2)-2}), & \text{se } \ p < \frac{N}{N-2}, \\ S + |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}} O(\delta^{\frac{N}{p}}), & \text{se } \ p = \frac{N}{N-2}, \\ S + O(\delta^{\frac{N}{p}}), & \text{se } \ p > \frac{N}{N-2}, \end{cases} \tag{3.41}$$

Vamos agora estimar $|V_\delta|_{s+1}^{s+1}$.

Lema 3.21. *Suponha* $\frac{p+1}{p} \leq s+1 < q+1$. *Então*

(i) Se $p < \frac{N}{N-2}$ *então*

$$|V_\delta|_{s+1}^{s+1} = \begin{cases} C\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]} + o(\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]}), & se \ \ s+1 < \frac{N}{p(N-2)-2}, \\ C\delta^{\frac{Np}{p+1}}|\log\delta| + O(\delta^{\frac{Np}{p+1}}), & se \ \ s+1 = \frac{N}{p(N-2)-2}, \\ C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}} + o(\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}), & se \ \ s+1 > \frac{N}{p(N-2)-2}. \end{cases} \tag{3.42}$$

(ii) Se $p > \frac{N}{N-2}$ *então*

$$|V_\delta|_{s+1}^{s+1} = \begin{cases} C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}} + o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}), & se \ \ s+1 < \frac{N}{N-2}, \\ C\delta^{\frac{N^2}{(p+1)(N-2)}}|\log\delta| + O(\delta^{\frac{N^2}{(p+1)(N-2)}}), & se \ \ s+1 = \frac{N}{N-2}, \\ C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}} + o(\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}), & se \ \ s+1 > \frac{N}{N-2}. \end{cases} \tag{3.43}$$

(iii) Se $p = \frac{N}{N-2}$

$$|V_\delta|_{s+1}^{s+1} = \begin{cases} C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}|\log\delta|^{s+1} + |\log\delta|^{s+1} o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}), & se \ \ s+1 < \frac{N}{N-2}, \\ C\delta^{\frac{N^2}{(p+1)(N-2)}}|\log\delta| + |\log\delta|^{s+1} O(\delta^{\frac{N^2}{(p+1)(N-2)}}), & se \ \ s+1 = \frac{N}{N-2}, \\ C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}} + o(\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}), & se \ \ s+1 > \frac{N}{N-2}. \end{cases} \tag{3.44}$$

Demonstração.

Caso 1: $p < \frac{N}{N-2}$.

De (3.5), existem constantes $C, D > 0$ tais que

$$\frac{D\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]}}{(\delta^{p(N-2)-2} + |x|^{p(N-2)-2})^{s+1}} \leq \frac{1}{\delta^{\frac{N(s+1)}{q+1}}}\varphi^{s+1}\left(\frac{x}{\delta}\right) \leq \frac{C\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]}}{(\delta^{p(N-2)-2} + |x|^{p(N-2)-2})^{s+1}},\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Observe que

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = \int_\Omega |\xi(x)\psi_\delta(x)|^{s+1}dx$$
$$= \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx + \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx,$$

e por sua vez

$$\begin{aligned} D\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]} & \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{|\xi(x)|^{s+1}}{(\delta^{p(N-2)-2}+|x|^{p(N-2)-2})^{s+1}}dx \\ & \leq \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx \\ & \leq C\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]} \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{|\xi(x)|^{s+1}}{(\delta^{p(N-2)-2}+|x|^{p(N-2)-2})^{s+1}}dx \end{aligned}$$

donde, do teorema da convergência dominada,

$$\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]} + o(\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]})$$

e portanto

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx + C\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]} + o(\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]}). \quad (3.45)$$

A seguir, consideramos 3 casos distintos.

Caso 1.1: $s+1 < \frac{N}{p(N-2)-2}$.

Segue que

$$\begin{aligned} D\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]} & \int_{B(0,\rho/2)} \frac{1}{(\delta^{p(N-2)-2}+|x|^{p(N-2)-2})^{s+1}}dx \leq \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx \\ & \leq C\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]} \int_{B(0,\rho/2)} \frac{1}{(\delta^{p(N-2)-2}+|x|^{p(N-2)-2})^{s+1}}dx \end{aligned}$$

donde, do teorema da convergência dominada,

$$\int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]} + o(\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]})$$

e de (3.45) segue então que

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]} + o(\delta^{(s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2]}). \quad (3.46)$$

Caso 1.2: $s+1 > \frac{N}{p(N-2)-2}$.

Temos

$$\int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = \int_{B(0,\delta)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx + \int_{\delta<|x|<\rho/2} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx; \quad (3.47)$$

por sua vez,

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\delta)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx &= \frac{C}{\delta^{\frac{N(s+1)}{q+1}}} \int_{B(0,\delta)} \varphi^{s+1}\left(\frac{x}{\delta}\right)dx \\ &= C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}} \int_{B(0,1)} \varphi^{s+1}(x)dx = C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Temos também

$$\begin{aligned}
&\int_{\delta<|x|<\rho/2} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = \frac{C}{\delta^{\frac{N(s+1)}{q+1}}}\int_{\delta<|x|<\rho/2} \varphi^{s+1}\left(\frac{x}{\delta}\right)dx \\
&= C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}\int_{1<|x|<\rho/(2\delta)} \varphi^{s+1}(x)dx \\
&= C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}\int_{|x|>1} \varphi^{s+1}(x)dx - C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}\int_{|x|>\rho/(2\delta)} \varphi^{s+1}(x)dx \\
&= C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}} + o(\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Logo, de (3.45),

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}} + o(\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}), \tag{3.50}$$

pois $s+1 > \frac{N}{p(N-2)-2}$.

Caso 1.3: $s+1 = \frac{N}{p(N-2)-2}$.

É válido (3.47) e (3.48). Temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\delta<|x|<\rho/2} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}\int_{1<|x|<\rho/(2\delta)} \varphi^{s+1}(x)dx \\
&= C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}\int_1^{\rho/(2\delta)}\int_{S_r} \varphi^{s+1}(x)dSdr \\
&= C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}\int_1^{\rho/(2\delta)} \varphi^{s+1}(x)r^{N-1}dr \\
&= C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}\int_1^{\rho/(2\delta)} \frac{1}{r}dr + C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}\int_1^{\rho/(2\delta)}\left[\varphi^{s+1}(r)r^{N-1} - \frac{1}{r}\right]dr \\
&= C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}|\log\delta| + o(\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

e assim, de (3.45),

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{Np}{p+1}}|\log\delta| + O(\delta^{\frac{Np}{p+1}}). \tag{3.52}$$

Caso 2: $p > \frac{N}{N-2}$.

De (3.7), existem constantes $C, D > 0$ tais que

$$\frac{D\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}} \le \frac{1}{\delta^{\frac{N(s+1)}{q+1}}}\varphi^{s+1}\left(\frac{x}{\delta}\right) \le \frac{C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^N.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx &= \int_\Omega |\xi(x)\psi_\delta(x)|^{s+1}dx \\
&= \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx + \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx,
\end{aligned}$$

e por sua vez

$$\begin{aligned}
D\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{|\xi(x)|^{s+1}}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}dx &\le \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx \\
&\le C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{|\xi(x)|^{s+1}}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}dx
\end{aligned}$$

donde, do teorema da convergência dominada,

$$\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}} + o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}})$$

e portanto

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx + C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}} + o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}). \tag{3.53}$$

Novamente, consideramos 3 casos distintos.

Caso 2.1: $s+1 < \frac{N}{N-2}$.

Segue que

$$\begin{aligned} D\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}} \int_{B(0,\rho/2)} \frac{1}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}dx &\leq \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx \\ &\leq C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}} \int_{B(0,\rho/2)} \frac{1}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}dx \end{aligned}$$

donde, do teorema da convergência dominada,

$$\int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}} + o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}})$$

e de (3.53) segue então que

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}} + o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}). \tag{3.54}$$

Caso 2.2: $s+1 > \frac{N}{N-2}$.

É válido (3.47), (3.48) e (3.49). Logo, de (3.53),

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}} + o(\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}), \tag{3.55}$$

pois $s+1 > \frac{N}{N-2}$.

Caso 2.3: $s+1 = \frac{N}{N-2}$.

É válido (3.47), (3.48) e (3.51). Logo, de (3.53)

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{N^2}{(p+1)(N-2)}}|\log\delta| + O(\delta^{\frac{N^2}{(p+1)(N-2)}}). \tag{3.56}$$

Caso 3: $p = \frac{N}{N-2}$.

De (3.6), existem constantes $C, D > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{D(|\log|x||^{s+1}+1)|\log\delta|^{s+1}\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}} &\leq \frac{1}{\delta^{\frac{N(s+1)}{q+1}}}\varphi^{s+1}\left(\frac{x}{\delta}\right) \\ &\leq \frac{C(|\log|x||^{s+1}+1)|\log\delta|^{s+1}\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

se $|\log\delta| \geq 1$.

Observe que

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = \int_\Omega |\xi(x)\psi_\delta(x)|^{s+1}dx$$
$$= \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx + \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx,$$

e por sua vez

$$D\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}|\log\delta|^{s+1}\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{(|\log|x||^{s+1}+1)|\xi(x)|^{s+1}}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}dx$$
$$\leq \int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx$$
$$\leq C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}|\log\delta|^{s+1}\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} \frac{(|\log|x||^{s+1}+1)|\xi(x)|^{s+1}}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}dx$$

donde, do teorema da convergência dominada,

$$\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,\rho/2)} |\xi(x)|^{s+1}|\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}|\log\delta|^{s+1} + |\log\delta|^{s+1}o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}})$$

e portanto

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx + C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}|\log\delta|^{s+1} + |\log\delta|^{s+1}o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}). \tag{3.57}$$

Mais uma vez, consideramos 3 casos distintos.

Caso 3.1: $s+1 < \frac{N}{N-2}$.

Segue que

$$D\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}|\log\delta|^{s+1}\int_{B(0,\rho/2)} \frac{|\log|x||^{s+1}+1}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}dx \leq \int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx$$
$$\leq C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}|\log\delta|^{s+1}\int_{B(0,\rho/2)} \frac{|\log|x||^{s+1}+1}{(\delta^{N-2}+|x|^{N-2})^{s+1}}dx$$

donde, do teorema da convergência dominada,

$$\int_{B(0,\rho/2)} |\psi_\delta(x)|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}|\log\delta|^{s+1} + |\log\delta|^{s+1}o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}})$$

e de (3.57) segue então que

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}|\log\delta|^{s+1} + |\log\delta|^{s+1}o(\delta^{\frac{N(s+1)}{p+1}}). \tag{3.58}$$

Caso 3.2: $s+1 > \frac{N}{N-2}$.

É válido (3.47), (3.48) e (3.49). Logo, de (3.57),

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}} + o(\delta^{N-\frac{N(s+1)}{q+1}}), \tag{3.59}$$

pois $s+1 > \frac{N}{N-2}$.

Caso 3.3: $s+1=\frac{N}{N-2}$.

É válido (3.47), (3.48) e (3.51). Logo, de (3.57)

$$\int_\Omega |U_\delta|^{s+1}dx = C\delta^{\frac{N^2}{(p+1)(N-2)}}|\log\delta| + |\log\delta|^{s+1}O(\delta^{\frac{N^2}{(p+1)(N-2)}}). \tag{3.60}$$

□

Conclusão da prova do Lema 3.19

O nosso objetivo é mostrar que para δ suficientemente pequeno temos

$$\max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta) < \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}}. \tag{3.61}$$

Note que

$$I_\mu(tV_\delta) = \frac{p}{p+1}t^{\frac{p+1}{p}}|\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{\mu}{s+1}t^{s+1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1} - \frac{t^{q+1}}{q+1}, \qquad \lim_{t\to\infty} I_\mu(tV_\delta) = -\infty,$$

e então $\max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta)$ é atingido em algum $t_\delta > 0$. Dessa maneira,

$$\frac{d}{dt}I_\mu(tV_\delta)\Big|_{t=t_\delta} = 0 \Rightarrow |\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu t^{s-\frac{1}{p}}|V_\delta|_{s+1}^{s+1} - t_\delta^{q-\frac{1}{p}} = 0,$$

ou seja,

$$|\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = \mu t^{s-\frac{1}{p}}|V_\delta|_{s+1}^{s+1} + t_\delta^{q-\frac{1}{p}} \geq t_\delta^{q-\frac{1}{p}}$$

donde

$$t_\delta \leq |\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{pq-1}}. \tag{3.62}$$

A última desigualdade implica que

$$|\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = t_\delta^{q-\frac{1}{p}} + \mu t_\delta^{s-\frac{1}{p}}|V_\delta|_{s+1}^{s+1} \leq t_\delta^{q-\frac{1}{p}} + \mu|\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{pq-1}\frac{ps-1}{p}}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}$$

e então

$$t_\delta^{q-\frac{1}{p}} \geq |\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu|\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{pq-1}\frac{ps-1}{p}}|V_\delta|_{s+1}^{s+1} = |\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}\left[1 - \mu|\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{pq-1}\frac{ps-1}{p}-\frac{p+1}{p}}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}\right].$$

Usando agora as estimativas em (3.41), as estimativas em (3.42), (3.43) e (3.44), e a desigualdade (3.62), concluímos que

$$t_\delta \to S^{\frac{p}{pq-1}},\ \delta\to 0. \tag{3.63}$$

Considere agora função

$$g(t) = \frac{p}{p+1}t^{\frac{p+1}{p}}|\Delta V_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{t^{q+1}}{q+1},\ t\geq 0,$$

e observe que g atinge máximo em $t_0 = |\Delta V_\delta|^{\frac{\frac{p+1}{pq-1}}{\frac{p+1}{p}}}$ e que g é crescente no intervalo $[0, |\Delta V_\delta|^{\frac{\frac{p+1}{pq-1}}{\frac{p+1}{p}}}]$. Dessa maneira, de (3.62),

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta) &= I_\mu(t_\delta V_\delta) = g(t_\delta) - \frac{\mu}{s+1} t_\delta^{s+1} |V_\delta|_{s+1}^{s+1} \\
&\leq \frac{p}{p+1} (|\Delta V_\delta|^{\frac{\frac{p+1}{pq-1}}{\frac{p+1}{p}}})^{\frac{p+1}{p}} |\Delta V_\delta|^{\frac{\frac{p+1}{p}}{\frac{p+1}{p}}} - \frac{(|\Delta V_\delta|^{\frac{\frac{p+1}{pq-1}}{\frac{p+1}{p}}})^{q+1}}{q+1} - \frac{\mu}{s+1} t_\delta^{s+1} |V_\delta|_{s+1}^{s+1} \\
&= \frac{2}{N} (|\Delta V_\delta|^{\frac{\frac{p+1}{p}}{\frac{p+1}{p}}})^{\frac{pN}{2(p+1)}} - \frac{\mu}{s+1} t_\delta^{s+1} |V_\delta|_{s+1}^{s+1}.
\end{aligned}$$

Caso 1: $p < \frac{N}{N-2}$.

Segue de (3.41) que

$$\max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta) \leq \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}} + O(\delta^{p(N-2)-2}) - \frac{\mu}{s+1} t_\delta^{s+1} |V_\delta|_{s+1}^{s+1},$$

e então, para δ suficientemente pequeno, segue de (3.63) que

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta) &\leq \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}} + O(\delta^{p(N-2)-2}) - \frac{\mu}{s+1} \left(\frac{S^{\frac{p}{pq-1}}}{2} \right)^{s+1} |V_\delta|_{s+1}^{s+1} \\
&= \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}} + O(\delta^{p(N-2)-2}) - \widehat{C} |V_\delta|_{s+1}^{s+1}.
\end{aligned}$$

Note que a 1ª linha em (3.42) não é útil para os nossos propósitos pois, da hipótese geral,

$$s+1 \geq \frac{p+1}{p} \Rightarrow (s+1)\frac{p}{p+1} \geq 1 \Rightarrow (s+1)\frac{p}{p+1}[p(N-2)-2] \geq [p(N-2)-2].$$

Agora, a 3ª linha (3.42) será útil se

$$N - \frac{N(s+1)}{q+1} < p(N-2) - 2,$$

e como $q+1 = \frac{N(p+1)}{p(N-2)-2}$, a última desigualdade é equivalente a

$$N - \frac{N(s+1)}{q+1} < \frac{N(p+1)}{q+1}, \quad \text{isto é,} \quad q - p < s+1.$$

Lembrando que $\frac{p+1}{p} \leq s+1$ é hipótese geral, temos

$$q - p > \frac{p+1}{p} \Leftrightarrow p < \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2}. \tag{3.64}$$

De fato, observe que se p e q satisfazem (3.1) então

$$q+1 = \frac{N(p+1)}{p(N-2)-2}. \tag{3.65}$$

Logo,

$$q-p>\frac{p+1}{p}\Leftrightarrow q>\frac{1}{p}+1+p\Leftrightarrow q+1>(p+1)\left(\frac{p+1}{p}\right);$$

de (3.65),

$$\frac{N(p+1)}{p(N-2)-2}>(p+1)\left(\frac{p+1}{p}\right)\Leftrightarrow\frac{N}{p(N-2)-2}>\frac{p+1}{p}\Leftrightarrow(N-2)p^2-4p-2<0,$$

ou seja,

$$q-p>\frac{p+1}{p}\Leftrightarrow p<\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2}.$$

Ressaltamos também que

$$\min\left\{\frac{N}{N-2},\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2}\right\}=\begin{cases}\frac{N}{N-2}, & \text{se } N=3,4,5,\\ \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2}, & \text{se } N\geq 6.\end{cases}\tag{3.66}$$

Portanto,

(i) se $N\geq 6$

(i.1) e $\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2}\leq p<\frac{N}{N-2}$, e considerando também a 2ª linha de (3.42), temos (3.61) válido para todo $\frac{p+1}{p}\leq s+1<q+1$;

(i.2) e $\frac{2}{N-2}<p<\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2}$, segue de (3.64) e (3.66) que (3.61) é válido se $q-p<s+1<q+1$;

(ii) se $N=3,4,5$ e $\frac{2}{N-2}<p<\frac{N}{N-2}$, segue de (3.64) e (3.66) que (3.61) é válido se $q-p<s+1<q+1$.

Caso 2: $p>\frac{N}{N-2}$.

Segue de (3.41) que

$$\max_{t\geq 0}I_\mu(tV_\delta)\leq\frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}}+O(\delta^{\frac{N}{p}})-\frac{\mu}{s+1}t_\delta^{s+1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1},$$

e então, para δ suficientemente pequeno, segue de (3.63) que

$$\begin{aligned}\max_{t\geq 0}I_\mu(tV_\delta) &\leq \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}}+O(\delta^{\frac{N}{p}})-\frac{\mu}{s+1}\left(\frac{S^{\frac{p}{pq-1}}}{2}\right)^{s+1}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}\\ &= \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}}+O(\delta^{\frac{N}{p}})-\widehat{C}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}.\end{aligned}$$

Note que a 1ª linha em (3.43) não é útil para os nossos propósitos pois, da hipótese geral,

$$s+1\geq\frac{p+1}{p}\Rightarrow\frac{s+1}{p+1}\geq\frac{1}{p}\Rightarrow\frac{N(s+1)}{p+1}\geq\frac{N}{p}.$$

Agora, a 3ª linha (3.43) será útil se

$$N-\frac{N(s+1)}{q+1}<\frac{N}{p},$$

e a última desigualdade é equivalente a

$$\frac{(p-1)(q+1)}{p} < s+1.$$

Lembrando que $\frac{p+1}{p} \leq s+1$ é hipótese geral, temos

$$\frac{(p-1)(q+1)}{p} > \frac{p+1}{p} \Leftrightarrow p > \frac{N-2}{2}. \tag{3.67}$$

De fato, de (3.65),

$$(p-1)\frac{N(p+1)}{p(N-2)-2} > p+1 \Leftrightarrow p-1 > \frac{p(N-2)-2}{N},$$

ou seja,

$$\frac{(p-1)(q+1)}{p} > \frac{p+1}{p} \Leftrightarrow p > \frac{N-2}{2}.$$

Ressaltamos também que

$$\max\left\{\frac{N}{N-2}, \frac{N-2}{2}\right\} = \begin{cases} \frac{N}{N-2}, & \text{se } N = 3,4,5, \\ \frac{N-2}{2}, & \text{se } N \geq 6. \end{cases} \tag{3.68}$$

Portanto,

(i) se $N \geq 6$

(i.1) e $\frac{N}{N-2} < p \leq \frac{N-2}{2}$, e considerando também a 2ª linha de (3.43), temos (3.61) válido para todo $\frac{p+1}{p} \leq s+1 < q+1$;

(i.2) e $p > \frac{N-2}{2}$, segue de (3.67) e (3.68) que (3.61) é válido se $\frac{(p-1)(q+1)}{p} < s+1 < q+1$;

(ii) se $N = 3,4,5$ e $p > \frac{N}{N-2}$, segue de (3.67) e (3.68) que (3.61) é válido se $\frac{(p-1)(q+1)}{p} < s+1 < q+1$.

Caso 3: $p = \frac{N}{N-2}$.

Segue de (3.41) que

$$\max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta) \leq \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}} + |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}} O(\delta^{\frac{N}{p}}) - \frac{\mu}{s+1} t_\delta^{s+1} |V_\delta|_{s+1}^{s+1},$$

e então, para δ suficientemente pequeno, segue de (3.63) que

$$\begin{aligned} \max_{t\geq 0} I_\mu(tV_\delta) &\leq \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}} + |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}} O(\delta^{\frac{N}{p}}) - \frac{\mu}{s+1}\left(\frac{S^{\frac{p}{pq-1}}}{2}\right)^{s+1} |V_\delta|_{s+1}^{s+1} \\ &= \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}} + |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}} O(\delta^{\frac{N}{p}}) - \widehat{C}|V_\delta|_{s+1}^{s+1}. \end{aligned}$$

A análise nesse caso é análoga a do Caso 2, usando agora as estimativas em (3.44).

Portanto,

(i) se $N \geq 6$

(i.1) e $\frac{N}{N-2} = p \leq \frac{N-2}{2}$, e considerando também a 2ª linha de (3.44), temos (3.61) válido para todo $\frac{p+1}{p} \leq s+1 < q+1$;

(i.2) e $p > \frac{N-2}{2}$, segue de (3.67) e (3.68) que (3.61) é válido se $\frac{(p-1)(q+1)}{p} < s+1 < q+1$;

(ii) se $N = 3, 4, 5$ e $p \geq \frac{N}{N-2}$, segue de (3.67) e (3.68) que (3.61) é válido se $\frac{(p-1)(q+1)}{p} < s+1 < q+1$.

Por fim, combinando os itens (i.1) nos 3 casos obtemos (a) da hipótese (H). Os itens (i.2) e (ii) no Caso 1 equivalem a (b1) e (b3) de (H), enquanto os itens (i.2) e (ii) nos Casos 2 e 3 equivalem a (b2) e (b4) de (H). □

3.4 Regiões crítica e não-crítica da hipérbole crítica para um sistema Hamiltoniano

Neste capítulo introduzimos na Definição 3.1 a noção de região não-crítica e região crítica da hipérbole crítica associadas ao operador $\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)$. No caso particular

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu|u|^{\frac{1}{p}-1}u + |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3'}$$

$|u|^{\frac{1}{p}-1}u$ tem a mesma homogeneidade do operador $\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)$. Tenhamos em mente os resultados clássicos de Brezis e Nirenberg [12] para o $-\Delta$, Garcia Azorero e Peral Alonso [19] para o $-\Delta_p$ e van der Vorst [47] para Δ^2, conforme já apresentados na introdução deste capítulo.

Observamos que a região não-crítica associada ao problema (P_3') não é necessariamente simétrica em relação ao eixo $p = q$, pois o sistema associado ao problema (P_3'), dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = \mu|u|^{\frac{1}{p}-1}u + |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{S_3'}$$

não é uma perturbação simétrica do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{S}$$

Se (p, q) pertence a região não-crítica associada ao problema (P_3'), isto é,

$$N \geq 6 \quad \text{e} \quad \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p \leq \frac{N-2}{2}, \tag{3.69}$$

segue de $q+1=\frac{N(p+1)}{p(N-2)-2}$ que

$$\frac{4}{N-4} \leq q \leq \frac{N^2+2\sqrt{2N}}{\sqrt{2N}(N-2)}. \tag{3.70}$$

De forma semelhante, obtemos que a região não-crítica associada ao sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{\frac{1}{q}-1}u + |v|^{p-1}v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{S_3''}$$

é

$$N \geq 6 \quad \text{e} \quad \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq q \leq \frac{N-2}{2}. \tag{3.71}$$

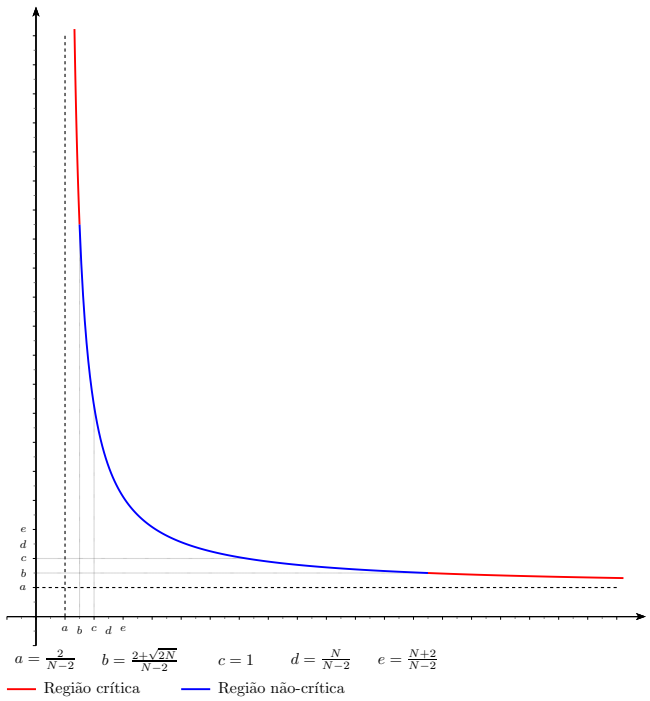
Considere o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |v|^{\frac{1}{q}-1}u + |v|^{p-1}v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = \mu |u|^{\frac{1}{p}-1}u + |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{S_1}$$

o qual é uma perturbação simétrica do sistema (S). Então é de se esperar que a região não-crítica associada ao sistema (S_1) seja dada pela interseção das regiões não-críticas associadas a (S_3') e (S_3''), isto é, que a região não-crítica associada a (S_1) seja dada por

$$\begin{cases} \frac{4}{N-4} \leq p, q \leq \frac{N-2}{2}, \quad \text{se} \quad N = 6, 7, 8, \\ \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p, q \leq \frac{N^2+2\sqrt{2N}}{\sqrt{2N}(N-2)}, \quad \text{se} \quad N \geq 9, \end{cases} \tag{3.72}$$

e que a região complementar seja crítica.



Resultados sobre o sistema do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |v|^{r-1}u + |v|^{p-1}v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = \mu |u|^{s-1}u + |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{S_2}$$

sob as hipóteses

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{N-2}{N}, \quad \frac{q+1}{q} \leq r+1 < p+1, \quad \frac{p+1}{p} \leq s+1 < q+1$$

estão sendo estudados pela autora.

Capítulo

4

Multiplicidade de soluções para o problema (P_3')

No Capítulo 3 estudamos a existência de soluções para o problema (P_3). Dedicamos este capítulo ao estudo de múltiplas soluções para o problema (P_3) no caso em que a perturbação $|u|^{s-1}u$ tem a mesma homogeneidade do operador $\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)$, isto é, no caso $s = 1/p$. Mais precisamente, dedicamos este capítulo ao estudo de múltiplas soluções para o problema de quarta-ordem

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu|u|^{\frac{1}{p}-1}u + |u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3'}$$

satisfazendo

$$u, -\Delta u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$, onde $\mu_1(\Omega)$ denota o primeiro autovalor do problema (3.9), e

$$(p, q) \ \text{ é um ponto da hipérbole crítica } \ \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{N-2}{N}$$

na região não-crítica associada ao problema (P_3') conforme apresentado pela Definição 3.1, isto é,

$$N \geq 6 \quad \text{e} \quad \frac{2+\sqrt{2N}}{N-2} \leq p \leq \frac{N-2}{2}.$$

Teorema 4.1. *Sejam Ω um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$ e (p,q) um ponto da hipérbole crítica na região não-crítica associada ao problema (P_3'). Então existe $0<\overline{\mu}<\mu_1(\Omega)$ tal que, para $0<\mu<\overline{\mu}$, o problema (P_3') possui, no mínimo, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções clássicas que satisfazem $u,-\Delta u>0$ em Ω.*

Observe que no caso $p=1$ no problema (P_3') torna-se o problema (P_1), e a hipótese $\frac{2+\sqrt{2N}}{N-2}\leq p$ do Teorema 4.1 é reduzida a $N\geq 8$ (dimensões não-críticas para o biharmônico). Isto diz que o Teorema 4.1 estende o Teorema 1.1.

Como já definido no Capítulo 3, considere para $0<\mu<\mu_1(\Omega)$

$$\|u\|_\mu := \left(|\Delta u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu|u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}}, \quad \forall\, u\in E(\Omega)=W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)\cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega). \tag{4.1}$$

Lembremos também da seguinte equivalência

$$\|u\|_\mu \leq \|u\| \leq c(\Omega)\|u\|_\mu, \quad \forall\, u\in E(\Omega), \tag{4.2}$$

onde $c(\Omega)=\left(1-\frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right)^{-\frac{p}{p+1}}>0$. Trabalharemos com o funcional

$$J_\mu(u) := \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx - \mu\int_\Omega |u|^{\frac{p+1}{p}}dx \tag{4.3}$$

na variedade

$$V_q := \{u\in E(\Omega); \psi(u)=1\} \quad \text{onde} \quad \psi(u) := \int_\Omega |u|^{q+1}dx. \tag{4.4}$$

Definimos

$$m(\mu,\Omega) := \inf\{J_\mu(u); u\in V_q\}, \tag{4.5}$$

e se $\Omega=B_\rho(0)$, denotamos $m(\mu,\rho):=m(\mu,B_\rho(0))$.

Provaremos que o funcional $J_\mu|_{V_q}$ possui, pelo menos, tantos pontos críticos quanto a categoria de Lusternik-Schnirelman de Ω, que a menos de multiplicação por constantes apropriadas são soluções clássicas para o problema (P_3').

4.1 Positividade das soluções do problema (P_3')

Como veremos nas seções que seguem, as soluções obtidas no Teorema 4.1 serão, a menos de multiplicação por constantes apropriadas, pontos críticos de $J_\mu|_{V_q}$ com nível crítico menor que S, onde S é a constante de Sobolev associada a imersão $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$. O lema a seguir mostra que tais soluções são positivas.

Lema 4.2. *Seja (p,q) um ponto sobre a hipérbole crítica. Então existe $0<\widetilde{\mu}<\mu_1(\Omega)$ tal que se $u\in V_q$ é um ponto crítico de $J_\mu|_{V_q}$ com $J_\mu(u)<S$ então, a menos de substituir u por $-u$, tem-se $u,-\Delta u>0$ em Ω.*

Demonstração. Seja $u \in V_q$ é um ponto crítico de $J_\mu|_{V_q}$ com

$$J_\mu(u) < S. \tag{4.6}$$

Logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u \Delta v dx = \mu \int_\Omega |u|^{\frac{1}{p}-1}|u|v dx + \lambda \int_\Omega |u|^{q-1}uv dx, \quad \forall\, v \in E(\Omega). \tag{4.7}$$

Como $u \in V_q$ temos $u \neq 0$ e

$$\lambda = \lambda \int_\Omega |u|^{q+1}dx = \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx - \mu \int_\Omega |u|^{\frac{p+1}{p}}dx = J_\mu(u) < S, \tag{4.8}$$

e também

$$\lambda = \lambda \int_\Omega |u|^{q+1}dx = J_\mu(u) = \int_\Omega [|\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u|^{\frac{p+1}{p}}]dx > 0. \tag{4.9}$$

Portanto, usando (4.7), segue que $w := \lambda^{\frac{p}{pq-1}}u$ é solução de (P_3'). Pelo Lema 3.8, sabemos que w e portanto $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Suponha, por contradição, que $-\Delta u$ troca de sinal em Ω. Sejam u_1 e u_2 tais que

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = (-\Delta u)^+ & \text{em } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta u_2 = -(-\Delta u)^- & \text{em } \Omega, \\ u_2 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $(-\Delta u)^+ = \max\{-\Delta u, 0\}$ e $(-\Delta u)^- = \max\{-(-\Delta u), 0\}$. Segue então que $u_1, u_2 \in E(\Omega)$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \leq 0$ em Ω. Temos também

$$\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx = \int_\Omega |\Delta u_1|^{\frac{p+1}{p}}dx + \int_\Omega |\Delta u_2|^{\frac{p+1}{p}}dx, \tag{4.10}$$

e, para $i = 1, 2$, são válidas as desigualdades

$$|u(x)|^{\frac{1}{p}-1}u(x)u_i(x) \leq |u_i(x)|^{\frac{p+1}{p}}, \quad |u(x)|^{q-1}u(x)u_i(x) \leq |u_i(x)|^{q+1} \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.11}$$

Veja [21, p. 126] onde um argumento semelhante foi utilizado.

Logo, de (3.2), (4.7), (4.8) e (4.11), e da imersão $L^{q+1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} S|u_i|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}} &\leq |\Delta u_i|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u \Delta u_i dx = \mu \int_\Omega |u|^{\frac{1}{p}-1}uu_i dx + \lambda \int_\Omega |u|^{q-1}uu_i dx \\ &\leq \mu \int_\Omega |u_i|^{\frac{p+1}{p}}dx + \lambda \int_\Omega |u_i|^{q+1}dx < \mu C |u_i|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}} + S|u_i|_{q+1}^{q+1}, \end{aligned}$$

donde

$$|u_i|_{q+1}^{\frac{pq-1}{p}} > \frac{S - \mu C}{S}, \quad i = 1, 2. \tag{4.12}$$

Assim, usando novamente (3.2), (4.10) e (4.12) temos

$$\begin{aligned} J_\mu(u) = |\Delta u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} &= |\Delta u_1|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + |\Delta u_2|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \geq S|u_1|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}} + S|u_2|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \\ &> 2S\left(\frac{S - \mu C}{S}\right)^{\frac{p+1}{pq-1}} - \mu |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \to 2S, \end{aligned}$$

quando $\mu \to 0$, ou seja, para μ suficientemente pequeno $J_\mu(u) \geq S$, o que contradiz (4.6). Portanto, $-\Delta u$ possui sinal definido em Ω, digamos, $-\Delta u \geq 0$ e consequentemente, pelo princípio do máximo forte, $-\Delta u > 0$ em Ω. Segue então do princípio do máximo forte para o operador Laplaciano aplicado ao sistema associado a (P_3') e do Lema 3.8 que $u > 0$ em Ω. $\square$

4.2 Compacidade

O Lema 4.4 descreve a falta de compacidade da imersão de $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$. O caso em que $p = 1$ foi provado no Lema 1.4, sem a necessidade da hipótese (4.18). Destacamos que as sequências minimizantes para as quais aplicaremos o Lema 4.4, mostraremos que essas satisfazem (4.18). Em relação a hipótese extra (4.18) lembramos também do seguinte resultado de Browder e de Figueiredo [13, Proposition 2.1].

Observação 4.3. *Sejam $r, s > 1$ tais que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. O operador de Nemytskii $\mathfrak{N} : L^r(\Omega) \to L^s(\Omega)$ definido por $\mathfrak{N}(w) = |w|^{r-2}w$ não é fracamente sequencialmente contínuo se $r \neq 2$. Isto diz que dada uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ com $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ não tem-se necessariamente*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n \Delta\varphi dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u \Delta\varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N). \tag{4.13}$$

No caso $p = 1$, a convergência $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ é precisamente (4.13), e foi esse fato utilizado na demonstração do Lema 1.4. Para a validade da convergência integral (4.13) para p qualquer faz-se necessário assumir $\Delta u_n \to \Delta u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Mas, nesse caso, podemos também aplicar o lema de Brezis-Lieb [11] para prosseguir com a demonstração.

Lema 4.4 (Concentração e compacidade). *Seja (p, q) um ponto da hipérbole crítica. Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \tag{4.14}$$

$$|\Delta(u_n - u)|^{\frac{p+1}{p}} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \quad no\ sentido\ das\ medidas\ em\ \ \mathbb{R}^N, \tag{4.15}$$

$$|u_n - u|^{q+1} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu \quad no\ sentido\ das\ medidas\ em\ \ \mathbb{R}^N, \tag{4.16}$$

$$u_n \to u \quad q.t.p.\ em\ \ \mathbb{R}^N, \tag{4.17}$$

$$\Delta u_n \to \Delta u \quad q.t.p.\ em\ \ \mathbb{R}^N. \tag{4.18}$$

Defina

$$\lambda_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|>R} |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx, \quad \nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|>R} |u_n|^{q+1} dx.$$

Temos então

$$\|\nu\|^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} \leq S^{-1}\|\lambda\|, \tag{4.19}$$

$$\nu_\infty^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} \leq S^{-1}\lambda_\infty, \tag{4.20}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p}} = |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p}} + \|\lambda\| + \lambda_\infty, \tag{4.21}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|u_n|^{q+1}_{q+1} = |u|^{q+1}_{q+1} + \|\nu\| + \nu_\infty. \tag{4.22}$$

Mais ainda, se $u = 0$ e $\|\nu\|^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} = S^{-1}\|\lambda\|$, então λ e ν são concentradas em um único ponto em comum.

Demonstração.

Caso particular: $u = 0$. Provaremos (4.19) e (4.20), e que λ e ν são concentradas em um único ponto em comum.

A prova segue de maneira idêntica à demonstração do Lema 1.4.

Caso geral: u não é necessariamente nula e provaremos (4.19)-(4.22).

Escreva $v_n := u_n - u$. Então $v_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$, $|\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ e $|v_n|^{q+1} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ no sentido das medidas em $\mathbb{R}^N$, e $v_n \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, donde, do caso particular, segue (4.19).

Usando a hipótese (4.18), segue do lema de Brezis-Lieb [11] que

$$\int_{|x|\geq R}|\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{|x|\geq R}|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}dx - \int_{|x|\geq R}|\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}}dx\right),$$

donde

$$\lambda_\infty = \lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}dx = \lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}}dx.$$

Usando agora a hipótese (4.17) e novamente o lema de Brezis-Lieb, obtemos

$$\int_{|x|\geq R}|u|^{q+1}dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{|x|\geq R}|u_n|^{q+1}dx - \int_{|x|\geq R}|v_n|^{q+1}dx\right),$$

donde

$$\nu_\infty = \lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|u_n|^{q+1}dx = \lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|x|\geq R}|v_n|^{q+1}dx.$$

Do estudo feito no caso particular, segue (4.20).

Agora procederemos para provar (4.21). Temos

$$|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda + |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}. \tag{4.23}$$

Com efeito, para toda $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ temos, do lema de Brezis-Lieb aplicado a f^+ e f^-,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f|\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}dx - \int_{\mathbb{R}^N} f|\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}}dx\right).$$

donde (4.23) segue pois $|\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$.

Fixe $R > 0$ e considere $\psi_R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi_R(x) = 1$ se $|x| \geq R+1$, $\psi_R(x) = 0$ se $|x| \leq R$ e $0 \leq \psi_R \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$. De (4.23) temos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}dx = \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_R|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}dx + \int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)d\lambda + \int_{\mathbb{R}^N}(1-\psi_R)|\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}dx.$$

Fazendo agora $R \to \infty$, segue do teorema da convergência dominada que

$$\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx = \lambda_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx$$

e portanto

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Delta u_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = |\Delta u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + \|\lambda\| + \lambda_\infty,$$

que é precisamente (4.21).

Para provar (4.22), primeiramente observe que

$$|u_n|^{q+1} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu + |u|^{q+1}. \tag{4.24}$$

Basta notar que para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ temos, de Brezis-Lieb,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f|u|^{q+1} dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f|u_n|^{q+1} dx - \int_{\mathbb{R}^N} f|v_n|^{q+1} dx \right).$$

e argumentar como anteriormente, usando o fato de que $|v_n|^{q+1} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$.

Fixe $R > 0$ e considerando, $\psi_R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi_R(x) = 1$ se $|x| \geq R+1$, $\psi_R(x) = 0$ se $|x| \leq R$ e $0 \leq \psi_R \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$. De (4.24) temos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q+1} dx = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R |u_n|^{q+1} dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R) d\nu + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R)|u|^{q+1} dx,$$

e portanto

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|_{q+1}^{q+1} = |u|_{q+1}^{q+1} + \|\nu\| + \nu_\infty,$$

que é exatamente (4.22), encerrando a demonstração do lema. □

Lema 4.5. *Seja (p,q) um ponto da hipérbole crítica. Se $(u_n) \subset V_q$ é tal que $\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} = |\Delta u_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \to S$, então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $E(\Omega)$ e $\Delta u_n \to \Delta u$ q.t.p. em Ω.*

Demonstração. Se $(u_n) \subset V_q$ é tal que $\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} = |\Delta u_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \to S$, então do princípio variacional de Ekeland [49, Theorem 8.5] segue que existe $(v_n) \subset V_q$ tal que

(a) $F(v_n) := |\Delta v_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \to S$;

(b) $\|u_n - v_n\| = |\Delta u_n - \Delta v_n|_{\frac{p+1}{p}} \to 0$;

(c) $\|F'(v_n)\|_* = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} \|F'(v_n) - \alpha\psi'(v_n)\| \to 0$, onde ψ é dada em (4.4),

ou seja, (v_n) é uma sequência $(PS)_S$ para o funcional $F|_{V_q}$.

Como (u_n) e (v_n) são limitadas em $E(\Omega)$, existem $u, v \in E(\Omega)$ tais que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ em $E(\Omega)$. Segue então de (b) que $u = v$. Para provar o nosso lema, é suficiente mostrar que $\Delta v_n \to \Delta v$ q.t.p. em Ω, pois assim

$$\Delta u_n - \Delta v_n \to 0 \text{ em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \Rightarrow \Delta u_n - \Delta v_n \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \Rightarrow \Delta u_n \to \Delta v = \Delta u \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Do item (c), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} |F'(v_n)w - \alpha_n \psi'(v_n)w| &= \left| \frac{p+1}{p} \int_\Omega |\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta v_n \Delta w dx - \alpha_n (q+1) \int_\Omega |v_n|^{q-1} v_n w dx \right| \\ &\leq o_n(1)\|w\|, \, \forall \, w \in E(\Omega). \end{aligned}$$

Como a sequência (v_n) é limitada temos

$$\begin{aligned} F'(v_n)v_n - \alpha_n \psi'(v_n)v_n &= \frac{p+1}{p} \int_\Omega |\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}} dx - \alpha_n (q+1) \int_\Omega |v_n|^{q+1} dx \\ &= \frac{p+1}{p}[S + o_n(1)] - \alpha_n (q+1) = o_n(1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha_n = \frac{p+1}{p} \frac{1}{q+1} S + o_n(1)$$

e assim concluímos que

$$\left| \int_\Omega |\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta v_n \Delta w dx - [S + o_n(1)] \int_\Omega |v_n|^{q-1} v_n w dx \right| \leq o_n(1)\|w\|, \, \forall \, w \in E(\Omega). \tag{4.25}$$

Do Lema 3.10, podemos supor que:
$v_n \rightharpoonup v$ em $E(\Omega)$,
$v_n \to v$ q.t.p. em Ω e em $L^\theta(\Omega)$ para todo $1 \leq \theta < q+1$,
$|\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ no sentido das medidas de $\overline{\Omega}$,
$|v_n|^{q+1} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ no sentido das medidas de $\overline{\Omega}$,
e existem um conjunto de índices J no máximo enumerável, $\{x_j; j \in J\} \subset \overline{\Omega}$, $\{\nu_j; j \in J\}, \{\lambda_j; j \in J\} \subset (0, \infty)$ tais que

$$\nu = |v|^{q+1} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \lambda \geq |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} + \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{x_j},$$

$$S \nu_j^{\frac{p+1}{p} \frac{1}{q+1}} \leq \mu_j, \, \forall j \in J, \quad \text{e} \quad \sum_{j \in J} \nu_j^{\frac{p+1}{p} \frac{1}{q+1}} < \infty.$$

Para dar continuidade a nossa demonstração, provaremos três afirmações.

Afirmação 1: Se (v_n) satisfaz (4.25) então J é, no máximo, finito.

Seja $x_k \in \overline{\Omega}$ um ponto no suporte singular de λ e ν. Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \xi \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$, $\xi \equiv 1$ em $B_1(0)$, supp$\xi \subset B_2(0)$; para $\theta > 0$ defina $\xi_\theta(x) = \xi\left(\frac{x - x_k}{\theta}\right)$. Do Lema 3.12 (i), $\xi_\theta u_n \in E(\Omega)$ e é limitada. Fixado $\theta > 0$, temos, de (4.25),

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \int_\Omega |\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta v_n \Delta(\xi_\theta v_n) dx - [S + o_n(1)] \int_\Omega |v_n|^{q-1} v_n (\xi_\theta v_n) dx \\ &= \int_\Omega |\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta v_n (\xi_\theta \Delta v_n + 2\nabla \xi_\theta . \nabla v_n + v_n \Delta \xi_\theta) dx - [S + o_n(1)] \int_\Omega |v_n|^{q+1} \xi_\theta dx \\ &= \int_\Omega |\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}} \xi_\theta dx - [S + o_n(1)] \int_\Omega |v_n|^{q+1} \xi_\theta dx \\ &+ \int_\Omega [|\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta v_n v_n \Delta \xi_\theta + 2|\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1} \Delta v_n \nabla \xi_\theta . \nabla v_n] dx. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Logo, argumentando como no Lema 3.13, ao tomarmos o limite quando $n \to \infty$ em (4.26) e depois fazendo $\theta \to 0$, obtemos

$$0 = \lambda_k - S\nu_k, \ \forall k \in J.$$

Como $S\nu_k^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} \leq \lambda_k$, obtemos $\nu_k \geq \nu_k^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}}$ para todo $k \in J$, donde $\nu_k = 0$ ou $\nu_k^{1-\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} \geq 1$, e consequentemente $\nu_k \geq 1$. Por fim, como $\sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} < \infty$ segue que J deve ser, no máximo, finito.

Afirmação 2: Se $K \subset\subset \Omega\backslash\{x_j; j \in J\}$ é compacto, então $v_n \to v$ em $L^{q+1}(K)$.

O argumento é idêntico ao do Lema 3.14.

Afirmação 3: Se $K \subset\subset \Omega\backslash\{x_j; j \in J\}$ é compacto, então $\Delta v_n \to \Delta v$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$.

Seja ξ_θ como na demonstração do Lema 3.14. Então, de (3.29)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_K (|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)(\Delta u_n - \Delta u)dx \\ &\leq \int_\Omega (|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u)(\Delta u_n - \Delta u)\xi_\theta dx \\ &= \int_\Omega [|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}\xi_\theta - |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n \xi_\theta - |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u(\Delta(u_n - u))\xi_\theta]dx. \end{aligned}$$

Fixe $\theta > 0$. Como $(\xi_\theta v_n)$ é limitada em $E(\Omega)$, segue de (4.25) que

$$o_n(1) = \int_\Omega |\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta v_n(v_n\Delta\xi_\theta + 2\nabla v_n.\nabla\xi_\theta + \xi_\theta\Delta v_n)dx - [S + o_n(1)]\int_\Omega |v_n|^{q+1}\xi_\theta dx$$

e

$$o_n(1) = \int_\Omega |\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta v_n(v\Delta\xi_\theta + 2\nabla v.\nabla\xi_\theta + \xi_\theta\Delta v)dx - [S + o_n(1)]\int_\Omega |v_n|^{q-1}v_n\xi_\theta v dx.$$

Então

$$\begin{aligned} o_n(1) = \int_\Omega &|\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta v_n(v_n - v)\Delta\xi_\theta + 2|\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta v_n(\nabla v_n - \nabla v).\nabla\xi_\theta \\ &+ |\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta v_n(\Delta v_n - \Delta v)\xi_\theta - [S + o_n(1)]\int_\Omega |v_n|^{q-1}v_n(\xi_\theta v_n - \xi_\theta v)dx, \end{aligned}$$

e como $\xi_\theta v_n \rightharpoonup \xi_\theta v$ em $L^{q+1}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} o_n(1) = \int_\Omega &|\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta v_n(v_n - v)\Delta\xi_\theta + 2|\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta v_n(\nabla v_n - \nabla v).\nabla\xi_\theta \\ &+ |\Delta v_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta v_n(\Delta v_n - \Delta v)\xi_\theta dx \end{aligned}$$

e argumentando como no Lema 3.15, usando a Afirmação 2, concluímos então que $\Delta v_n \to \Delta v$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$. Consequentemente, a menos de subsequência, $\Delta v_n \to \Delta v$ q.t.p. em Ω. $\square$

Lema 4.6. *Seja (p,q) um ponto da hipérbole crítica. Toda sequência $(u_n) \subset V_q$ tal que*

$$J_\mu(u_n) \to c < S, \quad \|J'_\mu(u_n)\|_* \to 0 \tag{4.27}$$

admite subsequência convergente, onde $\|.\|_*$ denota a norma da derivada da restrição do funcional J_μ à variedade V_q, e é dada por

$$\|J'_\mu(u)\|_* = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|J'_\mu(u) - \lambda\psi'(u)\|, \quad \forall\, u \in V_q$$

e S é a constante de Sobolev para a imersão $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Se (u_n) satisfaz (4.27), então

$$0 \le J_\mu(u_n) \to c,$$

e existe sequência $(\overline{\lambda}_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\|J'_\mu(u_n)\|_* = \|J'_\mu(u_n) - \overline{\lambda}_n\psi'(u_n)\| \to 0.$$

Logo existe $(\sigma_n) \subset \mathbb{R}$, com $\sigma_n \to 0$, tal que

$$\left|\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n \Delta w dx - \mu\int_\Omega |u_n|^{\frac{1}{p}-1}u_n w dx - \lambda_n\int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n w dx\right| \le \sigma_n\|w\|, \ \forall\, w \in E(\Omega).$$

A sequência (u_n) é limitada em $E(\Omega)$. De fato,

$$\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} = \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - \mu|u_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + \mu|u_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = c + o_n(1) + \mu|u_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}.$$

Como $(u_n) \subset V_q$, segue da imersão de $L^{q+1}(\Omega)$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ que (u_n) é limitada em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e portanto a limitação de (u_n) em $E(\Omega)$.

Assim

$$\left|\int_\Omega [|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} - \mu|u_n|^{\frac{p+1}{p}}]dx - \lambda_n\int_\Omega |u_n|^{q+1}dx\right| \le \sigma_n\|u_n\| \Rightarrow J_\mu(u_n) - \lambda_n \to 0,$$

ou seja, $\lambda_n \to c \ge 0$.

Se $c = 0$, então

$$0 \le \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right)\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} = \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} \le \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - \mu|u_n|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = J_\mu(u_n) \to 0,$$

donde (u_n) converge fortemente para 0 em $E(\Omega)$.

Se $c > 0$ então $\lambda_n > 0$ para n suficientemente grande. Faça então $v_n = \lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n$. Temos

$$\begin{aligned} I_\mu(v_n) &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega [|\Delta(\lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n)|^{\frac{p+1}{p}} - \mu|\lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n|^{\frac{p+1}{p}}]dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |\lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n|^{q+1}dx \\ &= \frac{p}{p+1}\lambda_n^{\frac{p+1}{pq-1}}J_\mu(u_n) - \frac{1}{q+1}\lambda_n^{\frac{p(q+1)}{pq-1}} \to \frac{p}{p+1}c^{\frac{p+1}{pq-1}}c - \frac{1}{q+1}c^{\frac{p(q+1)}{pq-1}} = \frac{2}{N}c^{\frac{pN}{2(p+1)}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_\mu'(v_n)w| &= \Big|\int_\Omega [|\Delta(\lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n)|^{\frac{1}{p}-1}\Delta(\lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n)\Delta w - \mu|\lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n|^{\frac{1}{p}-1}(\lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n)w]dx \\
&- \int_\Omega |\lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n|^{q-1}(\lambda_n^{\frac{p}{pq-1}}u_n)wdx\Big| \\
&= \lambda_n^{\frac{1}{pq-1}}\Big|\int_\Omega [|\Delta u_n|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u_n\Delta w - \mu|u_n|^{\frac{1}{p}-1}u_n w - \lambda_n|u_n|^{q-1}u_n w]dx\Big| \\
&\leq \sigma_n\|w\| \to 0, \quad \forall\, w \in E(\Omega),
\end{aligned}$$

com I_μ dado por (3.12). Logo

$$I_\mu(v_n) \to \frac{2}{N}c^{\frac{pN}{2(p+1)}} < \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}} \quad \text{e} \quad I_\mu'(v_n) \to 0.$$

Do Lema 3.18 segue então que (v_n) admite uma subsequência convergente, donde (u_n) também admite subsequência convergente, ficando provada a condição $(PS)_c$ para o funcional J_μ, se $c < S$. □

4.3 Multiplicidade de soluções

Nesta seção, faremos novamente uso do Teorema 1.8. Em nosso contexto, $X = E(\Omega)$, $\psi(u) = \int_\Omega |u|^{q+1}dx$ and $\varphi = J_\mu$.

Lema 4.7. *Sejam $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$ e (p,q) um ponto da hipérbole crítica na região não-crítica associada ao problema (P_3'). Então existe $v \in E(\Omega)\backslash\{0\}$, com $v > 0$ em Ω, tal que*

$$\frac{\|v\|_\mu^{\frac{p+1}{p}}}{|v|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \frac{|\Delta v|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu|v|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{|v|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} < S. \tag{4.28}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$. Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função tal que $0 \leq \xi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\xi \equiv 1$ em $B(0,\rho/2)$, $\xi \equiv 0$ em $B(0,\rho)^c$ e $B(0,\rho) \subset\subset \Omega$, $\rho > 0$. Escreva

$$U_\delta(x) := \xi(x)\psi_\delta(x),\ x \in \mathbb{R}^N,\ 0 < \delta < \rho/2,$$

onde $\psi_\delta = S^{\frac{p[p(2-n)+2]}{2(p+1)^2}}\varphi_\delta$ e $\varphi_\delta(x) = \varphi_{\delta,0}(x)$ é dado por (3.4). Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta\psi_\delta|^{\frac{p+1}{p}}dx = S \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\delta|^{q+1}dx = 1,$$

e, ver [35] eq. (6.4) and eq. (6.3) respectivamente, temos

$$|\Delta U_\delta|_{\frac{p+1}{p},\Omega}^{\frac{p+1}{p}} = \begin{cases} S + O(\delta^{p(N-2)-2}), & \text{se } p < \frac{N}{N-2}, \\ S + |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}}O(\delta^{\frac{N}{p}}), & \text{se } p = \frac{N}{N-2}, \\ S + O(\delta^{\frac{N}{p}}), & \text{se } p > \frac{N}{N-2}, \end{cases} \tag{4.29}$$

e

$$|U_\delta|_{q+1,\Omega}^{q+1} = \begin{cases} 1 + O(\delta^{pN}), & \text{se } p < \frac{N}{N-2}, \\ 1 + |\log\delta|^{q+1} O(\delta^{q(N-2)-2}), & \text{se } p = \frac{N}{N-2}, \\ 1 + O(\delta^{q(N-2)-2}), & \text{se } p > \frac{N}{N-2}. \end{cases} \tag{4.30}$$

Fazendo $s = 1/p$ no Lema 3.21 obtemos das estimativas (3.42), (3.43) e (3.44) que

$$|U_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = \begin{cases} C\delta^{p(N-2)-2} + o(\delta^{p(N-2)-2}), & \text{se } N < 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^2, \\ C\delta^{2\frac{p+1}{p}}|\log\delta| + O(\delta^{2\frac{p+1}{p}}), & \text{se } N = 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^2, \\ C\delta^{2\frac{p+1}{p}} + o(\delta^{2\frac{p+1}{p}}), & \text{se } N > 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^2, \end{cases} \tag{4.31}$$

se $p < \frac{N}{N-2}$; que

$$|U_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = \begin{cases} C\delta^{\frac{N}{p}} + o(\delta^{\frac{N}{p}}), & \text{se } N < 2(p+1), \\ C\delta^{2\frac{p+1}{p}}|\log\delta| + O(\delta^{2\frac{p+1}{p}}), & \text{se } N = 2(p+1), \\ C\delta^{2\frac{p+1}{p}} + o(\delta^{2\frac{p+1}{p}}), & \text{se } N > 2(p+1), \end{cases} \tag{4.32}$$

se $p > \frac{N}{N-2}$; e que

$$|U_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = \begin{cases} C|\log\delta|^{\frac{p+1}{p}}\delta^{\frac{N}{p}} + |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}} o(\delta^{\frac{N}{p}}), & \text{se } N < 2(p+1), \\ C\delta^{2\frac{p+1}{p}}|\log\delta| + |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}} O(\delta^{2\frac{p+1}{p}}), & \text{se } N = 2(p+1), \\ C\delta^{2\frac{p+1}{p}} + o(\delta^{2\frac{p+1}{p}}), & \text{se } N > 2(p+1), \end{cases} \tag{4.33}$$

se $p = \frac{N}{N-2}$.

No caso em que $p < \frac{N}{N-2}$, segue de (4.29), (4.30) e (4.31) que existe uma constante $C = C(N) > 0$ tal que

$$\frac{|\Delta U_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu|U_\delta|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{|U_\delta|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left.\begin{cases} S - \mu C\delta^{p(N-2)-2} + O(\delta^{p(N-2)-2}), & \text{se } N < 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^2, \\ S - \mu C\delta^{2\frac{p+1}{p}}|\log\delta| + O(\delta^{2\frac{p+1}{p}}), & \text{se } N = 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^2, \\ S - \mu C\delta^{2\frac{p+1}{p}} + O(\delta^{2\frac{p+1}{p}}), & \text{se } N > 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^2 \end{cases}\right\} < S,$$

para $N \geq 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^2$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Uma conclusão análoga é obtida para o caso em que $p > N/(N-2)$ e $N \geq 2(p+1)$, usando-se (4.29), (4.30) e (4.32), e para o caso em que $p = N/(N-2)$ e $N \geq 2(p+1)$, usando-se (4.29), (4.30) e (4.33). □

Lema 4.8. *Se $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$ e (p,q) um ponto da hipérbole crítica na região não-crítica associada ao problema (P_3'), então*

$$m(\mu,\Omega) < S$$

e existe $u \in V_q$ tal que $J_\mu(u) = m(\mu,\Omega)$, com $m(\mu,\Omega)$ dado por (4.5). Além disso, qualquer $u \in V_q$ satisfazendo $J_\mu(u) = m(\mu,\Omega)$ é, a menos de substituir u por $-u$, tal que $u, -\Delta u > 0$ em Ω.

Demonstração. Do Lema 4.7, existe $v \in E(\Omega)\backslash\{0\}$ não negativa tal que

$$\frac{|\Delta v|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu |v|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{|v|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} < S.$$

Definindo $w = v/|v|_{q+1}$, temos $w \in V_q$ e

$$J_\mu(w) = |\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu |w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = \frac{|\Delta v|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu |v|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{|v|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} < S,$$

donde

$$m(\mu, \Omega) = \inf_{u \in V_q} J_\mu(u) \leq J_\mu(w) < S.$$

Pelo Lema 4.6, $J_\mu|_{V_q}$ satisfaz a condição $(PS)_c$, com $c = m(\mu, \Omega)$. Do Teorema 1.8, J_μ assume um mínimo, isto é, existe $u \in V_q$ tal que

$$J_\mu(u) = m(\mu, \Omega) = \min_{u \in V_q} J_\mu(u).$$

Mostremos agora que, a menos de substituir u por $-u$, temos $u, -\Delta u > 0$ em Ω. Como $u \in E(\Omega)$ é tal que

$$|u|_{q+1} = 1, \quad |\Delta u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = m(\mu, \Omega) > 0,$$

segue do teorema dos multiplicadores de Lagrange que u é solução da equação

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = \mu |u|^{\frac{1}{p}-1} u + m(\mu, \Omega)|u|^{q-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u, \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Considere então w a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = |-\Delta u| \ \text{ em } \ \Omega, \\ w = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $-\Delta u \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, segue que $w \in E(\Omega)$ [23, Theorem 9.15] e do princípio do máximo segue que $w \geq |u|$ em Ω. Logo, $-\Delta u$ tem sinal definido em Ω ou $w > |u|$ em Ω. Suponha então $w > |u|$ em Ω e tome $\overline{w} = w/|w|_{q+1}$; então $|\overline{w}|_{q+1} = 1$ e

$$\begin{aligned} m(\mu, \Omega) &\leq \int_\Omega [|\Delta \overline{w}|^{\frac{p+1}{p}} - \mu |\overline{w}|^{\frac{p+1}{p}}] dx = \frac{1}{|w|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} \int_\Omega [|\Delta w|^{\frac{p+1}{p}} - \mu |w|^{\frac{p+1}{p}}] dx \\ &< \int_\Omega [|\Delta w|^{\frac{p+1}{p}} - \mu |w|^{\frac{p+1}{p}}] dx < \int_\Omega [|\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u|^{\frac{p+1}{p}}] dx = m(\mu, \Omega), \end{aligned}$$

uma contradição. Portanto, $-\Delta u$ tem sinal definido em Ω, digamos, $-\Delta u \geq 0$ em Ω, e consequentemente $u \geq 0$ em Ω. É fácil verificar então que $v = m(\mu, \Omega)^{\frac{p}{pq-1}} u$ é ponto crítico não negativo do funcional I_μ dado em (3.12), e do Lema 3.8 e do princípio do máximo forte temos $v, -\Delta v > 0$ em Ω, e o resultado segue. $\square$

Lema 4.9. *Se Ω_1 e Ω_2 são domínios regulares limitados em $\mathbb{R}^N$ tais que $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$, $0 < \mu < \mu_1(\Omega_2)$ e (p,q) é um ponto da hipérbole crítica na região não-crítica associada ao problema (P_3'), então $m(\mu,\Omega_1) > m(\mu,\Omega_2)$.*

Demonstração. Primeiramente observe que $\mu_1(\Omega_2) < \mu_1(\Omega_1)$. A prova deste fato pode ser feita usando argumentos de extensão exatamente como o que segue nesta demonstração.

Do Lema 4.8, seja $u \in E(\Omega_1)$ tal que $u, -\Delta u > 0$ em Ω_1 e

$$\int_{\Omega_1} |u|^{q+1}dx = 1, \quad \int_{\Omega_1} [|\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} - \mu|u|^{\frac{p+1}{p}}]dx = m(\mu,\Omega_1),$$

e seja w solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \widetilde{-\Delta u} \ \text{ em } \ \Omega_2, \\ w = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega_2, \end{cases}$$

onde $\sim$ denota a extensão por zero fora de Ω_1. Note que $w > 0$ em Ω_2 e $w > u$ em Ω_1. Escrevendo $\overline{w} = w/|w|_{q+1,\Omega_2}$ temos $|\overline{w}|_{q+1,\Omega_2} = 1$ e

$$\begin{aligned} m(\mu,\Omega_2) &\leq \int_{\Omega_2} [|\Delta\overline{w}|^{\frac{p+1}{p}} - \mu|\overline{w}|^{\frac{p+1}{p}}]dx = \frac{1}{|w|_{q+1,\Omega_2}^{\frac{p+1}{p}}} \int_{\Omega_2} [|\Delta w|^{\frac{p+1}{p}} - \mu|w|^{\frac{p+1}{p}}]dx \\ &< \int_{\Omega_2} [|\Delta w|^{\frac{p+1}{p}} - \mu|w|^{\frac{p+1}{p}}]dx < \int_{\Omega_1} [|\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} - \mu|u|^{\frac{p+1}{p}}]dx = m(\mu,\Omega_1), \end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Lema 4.10. *Se $\Omega = B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^N$, $0 < \mu < \mu_1(B_\rho(0))$ e (p,q) é um ponto da hipérbole crítica na região não-crítica associada ao problema (P_3'), então $m(\mu,\rho)$ é atingido por uma função u. Além disso, qualquer função u nestas condições é tal que u e $-\Delta u$ são radialmente simétricas e, a menos de substituir u por $-u$, tem-se $u, -\Delta u > 0$ em $B_\rho(0)$.*

Demonstração. Ver Teorema 3.6 (iv). □

De acordo com [23, Theorem 9.9], se $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$, $1 < r < \infty$, e w é o potencial Newtoniano de f então $w \in \mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ e $-\Delta w = f$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. A partir disso podemos construir uma isometria entre os espaços $L^r(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 4.11. *Se $1 < r < \infty$, então $-\Delta : \mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^N) \to L^r(\mathbb{R}^N)$ é um isomorfismo isométrico.*

Demonstração. Observe que $-\Delta$ está bem definida e é linear. É uma isometria, pois

$$|-\Delta u|_r = \|u\|_{\mathcal{D}^{2,r}};$$

e é injetora, pois

$$-\Delta u = 0 \Leftrightarrow \|u\|_{\mathcal{D}^{2,r}} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Para mostrar que $-\Delta$ é sobrejetiva, basta mostrar que $-\Delta(\mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^N))$ é denso em $L^r(\mathbb{R}^N)$. Para isso, é suficiente mostar que

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset -\Delta(\mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^N))$$

ou seja, que dada $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ existe $u \in \mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$-\Delta u = f \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Mas isto é garantido por [23, Theorem 9.9]. □

Lema 4.12. *Sejam $1 < r < \infty$ e (u_n) uma sequência em $\mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^N)$. Então $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $\Delta u_n \rightharpoonup \Delta u$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. A demonstração segue o mesmo raciocínio do Lema 3.12 (ii), usando-se agora o resultado do Lema 4.11. □

Defina agora a aplicação baricentro $\beta : V_q \to \mathbb{R}^N$ por

$$\beta(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} x dx}{\displaystyle\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} dx}. \tag{4.34}$$

Lema 4.13. *Seja (p, q) um ponto da hipérbole crítica. Se $(u_n) \subset V_q$ é tal que $\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} \to S$, então dist$(\beta(u_n), \Omega) \to 0$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\text{dist}(\beta(u_n), \Omega) \not\to 0$; existe então $r > 0$ tal que, a menos de subsequência,

$$\text{dist}(\beta(u_n), \Omega) > r.$$

Sejam $v_n = u_n / |\Delta u_n|_{\frac{p+1}{p}} \in E(\Omega)$ e w_n o potencial newtoniano de $|\widetilde{-\Delta v_n}|$, onde $\sim$ denota a extensão por zero fora de Ω. Então, de [23, Theorema 9.9] sabemos que $w_n \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ e

$$-\Delta w_n = |\widetilde{-\Delta v_n}| \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Em particular, (w_n) é limitada em $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$, donde, a menos de subsequência,

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N),$$

$$|\Delta(w_n - w)|^{\frac{p+1}{p}} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \quad \text{no sentido das medidas em} \quad \mathbb{R}^N,$$

$$|w_n - w|^{q+1} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu \quad \text{no sentido das medidas em} \quad \mathbb{R}^N,$$

$$w_n \to w \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N;$$

combinando agora os resultados dos Lemas 4.5 e 4.12 concluímos também que

$$\Delta w_n \to \Delta w \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Então como $w_n \geq |\widetilde{v}_n|$ em $\mathbb{R}^N$, temos do Lema 4.4 que (por Ω ser limitado $\lambda_\infty = \nu_\infty = 0$)

$$1 = |\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + \|\lambda\|, \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{S^{(q+1)\frac{p}{p+1}}} \leq |w|_{q+1}^{q+1} + \|\nu\|, \tag{4.36}$$

e

$$\|\nu\|^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} \leq \frac{1}{S}\|\lambda\|, \quad |w|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}} \leq \frac{1}{S}|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}. \tag{4.37}$$

Com isso segue que o par $(|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}, \|\lambda\|) \in \{(1,0),(0,1)\}$. Com efeito, de (4.37) temos

$$\|\nu\| \leq \frac{1}{S^{(q+1)\frac{p}{p+1}}}\|\lambda\|^{(q+1)\frac{p}{p+1}}, \quad |w|_{q+1}^{q+1} = (|w|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}})^{(q+1)\frac{p}{p+1}} \leq \frac{1}{S^{(q+1)\frac{p}{p+1}}}|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{q+1},$$

e então de (4.36)

$$\frac{1}{S^{(q+1)\frac{p}{p+1}}} \leq |w|_{q+1}^{q+1} + \|\nu\| \leq \frac{1}{S^{(q+1)\frac{p}{p+1}}}[|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{q+1} + \|\lambda\|^{(q+1)\frac{p}{p+1}}]$$

ou seja,

$$|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{q+1} + \|\lambda\|^{(q+1)\frac{p}{p+1}} \geq 1. \tag{4.38}$$

De (4.35) e (4.38) e como $(q+1)\frac{p}{p+1} > 1$, segue que $(|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}, \|\lambda\|) \in \{(1,0),(0,1)\}$.

Suponha agora que $|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = 1$ e $\|\lambda\| = 0$. Então, de (4.37), segue que $\|\nu\| = 0$, o que implica, de (4.36),

$$\frac{1}{S} \leq |w|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}} \leq \frac{1}{S}|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = \frac{1}{S}$$

e então $|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}/|w|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}} = S$. Logo, a menos de multiplicação por escalar, w é uma solução não trivial e positiva da equação

$$\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}\Delta u) = u^q \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

e então, $w, -\Delta w > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Mas, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta w_n - \Delta w|^{\frac{p+1}{p}}\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\lambda = 0$$

o que implica, em particular,

$$\int_\Omega |\Delta w_n - \Delta w|^{\frac{p+1}{p}}\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega} |\Delta w|^{\frac{p+1}{p}}\varphi dx \to 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\Omega),$$

e então $-\Delta w = 0$ em $\mathbb{R}^N\backslash\Omega$, o que é uma contradição.

Dessa maneira, $|\Delta w|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = 0$ (e de (4.37) segue que $w = 0$) e $\|\lambda\| = 1$. De (4.36) e (4.37) segue que $\|\nu\|^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} = S^{-1}\|\lambda\|$. Portanto, do Lema 4.4, segue que λ está concentrada em um único ponto $y \in \mathbb{R}^N$. Afirmamos agora que $y \in \overline{\Omega}$.

De fato, supondo que $y \in \mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$, tome $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi \equiv 1$ em $B_R(y)$, para algum $R > 0$ e $\text{supp}(\psi) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Então,

$$1 = \lambda(\{y\}) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi|\Delta w_n|^{\frac{p+1}{p}} dx = 0,$$

o que é claramente uma contradição. Portanto, $y \in \overline{\Omega}$ e tomando $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\eta \equiv 1$ em $\overline{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned}\beta(u_n) &= \frac{\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} x dx}{\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} dx} = \int_\Omega |\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}} x dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta w_n|^{\frac{p+1}{p}} x\eta(x) dx \\ &\to \int_{\mathbb{R}^N} x\eta(x) d\lambda = y\eta(y) = y \in \overline{\Omega},\end{aligned}$$

o que contradiz nossa hipótese inicial. □

Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$. Seja $r > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\Omega_r^+ := \{x \in \mathbb{R}^N; \operatorname{dist}(x, \overline{\Omega}) \leq r\} \quad \text{e} \quad \Omega_r^- := \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

são homotopicamente equivalentes a Ω e tal que $B_r(0) \subset \Omega$. Defina também o conjunto

$$J_\mu^{m(\mu,r)} =: \{u \in V_q; J_\mu(u) \leq m(\mu, r)\},$$

que é não vazio; ver Lema 4.9.

Lema 4.14. *Seja (p, q) um ponto da hipérbole crítica na região não-crítica associada ao problema (P_3'). Então existe $0 < \overline{\mu} < \mu_1(\Omega)$ tal que, para $0 < \mu < \overline{\mu}$,*

$$u \in J_\mu^{m(\mu,r)} \Rightarrow \beta(u) \in \Omega_r^+.$$

Demonstração. Se $u \in V_q$, da desigualdade de Hölder segue que

$$|u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq |u|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}} |\Omega|^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = |\Omega|^{\frac{2(p+1)}{pN}}. \tag{4.39}$$

Do Lema 4.13, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$u \in V_q, \quad \|u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq S + \varepsilon \Rightarrow \beta(u) \in \Omega_r^+.$$

Tome então $\overline{\mu} := \varepsilon / |\Omega|^{\frac{2(p+1)}{pN}}$, para $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \overline{\mu} < \mu_1(\Omega)$. Logo, se $0 < \mu < \overline{\mu}$ e $u \in J_\mu^{m(\mu,r)}$, obtemos, de (4.39) e do Lema 4.8,

$$\begin{aligned}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} &= \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + \mu |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = J_\mu(u) + \mu |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \\ &\leq m(\mu, r) + \overline{\mu} |u|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} < S + \frac{\varepsilon}{|\Omega|^{\frac{2(p+1)}{pN}}} |\Omega|^{\frac{2(p+1)}{pN}} = S + \varepsilon\end{aligned}$$

de modo que $\beta(u) \in \Omega_r^+$. □

Considere as hipóteses e $\overline{\mu}$ como no Lema 4.14. Para $0 < \mu < \overline{\mu}$ defina $\gamma_\mu : \Omega_r^- \to J_\mu^{m(\mu,r)}$ por

$$\begin{aligned}\gamma_\mu(y) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \gamma_\mu(y)(x) = \frac{w_y(x)}{|w_y|_{q+1}},\end{aligned} \tag{4.40}$$

onde w_y é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w_y = z_y \ \text{ em } \ \Omega, \\ w_y = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{com} \quad z_y(x) = \begin{cases} -\Delta v_\mu(x-y), \text{ se } x \in B_r(y), \\ 0, \text{ se } x \in \Omega \backslash B_r(y), \end{cases}$$

onde, ver Lema 4.10, v_μ é radialmente simétrica, $v_\mu, -\Delta v_\mu > 0$ em $B_r(0)$ e

$$\int_{B_r(0)} |v_\mu|^{q+1} dx = 1, \quad \int_{B_r(0)} [|\Delta v_\mu|^{\frac{p+1}{p}} - \mu |v_\mu|^{\frac{p+1}{p}}] dx = m(\mu, r).$$

Lema 4.15. *Seja (p,q) um ponto da hipérbole crítica na região não-crítica associada ao problema (P_3'). Seja $0 < \mu < \overline{\mu}$, onde $\overline{\mu}$ é dado pelo Lema 4.14. Então $\gamma_\mu : \Omega_r^- \to J_\mu^{m(\mu,r)}$ está bem definida, é contínua e*

$$(\beta \circ \gamma_\mu)(y) = y, \ \forall y \in \Omega_r^-. \tag{4.41}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que [23, Theorem 9.15] garante que $\gamma_\mu(y) \in E(\Omega)$ e, pelo princípio do máximo forte, temos $w_y(x) > v_\mu(x-y)$, para todo $x \in B_r(y)$ e $y \in \Omega_r^-$. Então

$$\int_\Omega |\Delta w_y|^{\frac{p+1}{p}} dx = \int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu|^{\frac{p+1}{p}} dx, \quad \int_\Omega |w_y|^{\frac{p+1}{p}} dx > \int_{B_r(0)} |v_\mu|^{\frac{p+1}{p}} dx$$

$$\text{e} \quad \int_\Omega |w_y|^{q+1} dx > \int_{B_r(0)} |v_\mu|^{q+1} dx = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} J_\mu(\gamma_\mu(y)) &= J_\mu\left(\frac{w_y(x)}{|w_y|_{q+1}}\right) = \frac{1}{|w_y|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} \left[\int_\Omega |\Delta w_y|^{\frac{p+1}{p}} dx - \mu \int_\Omega |w_y|^{\frac{p+1}{p}} dx\right] \\ &< \int_\Omega |\Delta w_y|^{\frac{p+1}{p}} dx - \mu \int_\Omega |w_y|^{\frac{p+1}{p}} dx \le \int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu|^{\frac{p+1}{p}} dx - \mu \int_{B_r(0)} |v_\mu|^{\frac{p+1}{p}} dx \\ &= m(\mu, r), \end{aligned}$$

ou seja, $\gamma_\mu(y) \in J_\mu^{m(\mu,r)}$ para todo $y \in \Omega_r^-$ e daí $\gamma_\mu : \Omega_r^- \to J_\mu^{m(\mu,r)}$ está bem definida.

A continuidade de γ_μ é uma consequência da regularidade de v_μ. Para provar que γ_μ é contínua, é suficiente mostrar que $\overline{\gamma}_\mu : \Omega_r^- \to E(\Omega)$, definida por $\overline{\gamma}_\mu(y)(x) = w_y(x)$, é contínua. Se $y_n \to y$ em Ω_r^-, então

$$\begin{aligned} &\|\overline{\gamma}_\mu(y_n) - \overline{\gamma}_\mu(y)\|^{\frac{p+1}{p}} = |\Delta(\overline{\gamma}_\mu(y_n) - \overline{\gamma}_\mu(y))|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = |\Delta w_{y_n} - \Delta w_y|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} = |z_{y_n} - z_y|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \\ &= \int_{B_r(y_n) \cap B_r(y)} |\Delta v_\mu(x-y_n) - \Delta v_\mu(x-y)|^{\frac{p+1}{p}} dx + \int_{B_r(y_n) \backslash B_r(y)} |\Delta v_\mu(x-y_n)|^{\frac{p+1}{p}} dx \\ &+ \int_{B_r(y) \backslash B_r(y_n)} |\Delta v_\mu(x-y)|^{\frac{p+1}{p}} dx \to 0, \end{aligned}$$

pois $\Delta v_\mu : \overline{B_r(0)} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Finalmente, para todo $y \in \Omega_r^-$

$$(\beta \circ \gamma_\mu)(y) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \left|\Delta\left(\frac{w_y}{|w_y|_{q+1}}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} x dx}{\displaystyle\int_\Omega \left|\Delta\left(\frac{w_y}{|w_y|_{q+1}}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} dx} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\Delta w_y|^{\frac{p+1}{p}} x dx}{\displaystyle\int_\Omega |\Delta w_y|^{\frac{p+1}{p}} dx} = \frac{\displaystyle\int_{B_r(y)} |\Delta v_\mu(x-y)|^{\frac{p+1}{p}} x dx}{\displaystyle\int_{B_r(y)} |\Delta v_\mu(x-y)|^{\frac{p+1}{p}} dx}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^{\frac{p+1}{p}} (z+y) dz}{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^{\frac{p+1}{p}} dz} = \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^{\frac{p+1}{p}} z dz}{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^{\frac{p+1}{p}} dz} + \frac{y\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^{\frac{p+1}{p}} dz}{\displaystyle\int_{B_r(0)} |\Delta v_\mu(z)|^{\frac{p+1}{p}} dz} = y,$$

pois Δv_μ é radialmente simétrica. □

Lema 4.16. *Se (p,q) é um ponto da hipérbole crítica na região não-crítica associada ao problema (P_3') e $0 < \mu < \overline{\mu}$, onde $\overline{\mu}$ é dado no Lema 4.14, então $cat_{J_\mu^{m(\mu,r)}}(J_\mu^{m(\mu,r)}) \geq cat_\Omega(\Omega)$.*

Demonstração. Se $\text{cat}_{J_\mu^{m(\mu,r)}}(J_\mu^{m(\mu,r)}) = \infty$, nada a fazer. Se $\text{cat}_{J_\mu^{m(\mu,r)}}(J_\mu^{m(\mu,r)}) = n$, então

$$J_\mu^{m(\mu,r)} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n,$$

onde A_j é fechado e contrátil em $J_\mu^{m(\mu,r)}$, para todo $j = 1, ..., n$, ou seja, existem aplicações $h_j : [0,1] \times A_j \to J_\mu^{m(\mu,r)}$ contínuas tais que

$$h_j(0,u) = u, \quad h_j(1,u) = w_j, \quad \forall\, u \in A_j. \tag{4.42}$$

Considere então $B_j = \gamma^{-1}(A_j)$, onde γ é dada em (4.40). Os conjuntos B_j são fechados e $\Omega_r^- = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$. Defina, para $0 < \mu < \overline{\mu}$, as funções

$$\begin{array}{rcl} g_j : [0,1] \times B_j & \longrightarrow & \Omega_r^+ \\ (t,y) & \longmapsto & g_j(t,y) = \beta(h_j(t,\gamma(y))). \end{array}$$

Do Lema 4.14, as funções g_j estão bem definidas, e de (4.41) e de (4.42) segue que

$$g_j(0,y) = \beta(h_j(0,\gamma(y))) = \beta(\gamma(y)) = y, \quad \forall\, y \in B_j,$$

$$g_j(1,y) = \beta(h_j(1,\gamma(y))) = \beta(w_j), \quad \forall\, y \in B_j,$$

Portanto, os conjuntos B_j são contráteis em Ω_r^+, donde

$$\text{cat}_\Omega(\Omega) = \text{cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n = \text{cat}_{J_\mu^{m(\mu,r)}}(J_\mu^{m(\mu,r)}).$$

□

Conclusão da prova do Teorema 4.1

Dos Lemas 4.6 e 4.8, para $c \leq m(\mu, \Omega) \leq m(\mu, r) < S$, $J_\mu|_{V_q}$ satisfaz a condição $(PS)_c$. Do Teorema 1.8, com $d = m(\mu, r)$, segue que $J_\mu^{m(\mu,r)}$ contém, pelo menos, $\text{cat}_{J_\mu^{m(\mu,r)}}(J_\mu^{m(\mu,r)})$ pontos críticos de $J_\mu|_{V_q}$, ou seja, do Lema 4.16, para $0 < \mu < \overline{\mu}$, temos a existência de, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos de $J_\mu|_{V_q}$.

Seja $n = \text{cat}_\Omega(\Omega)$. Sejam $u_1, u_2, ..., u_n \in V_q$ pontos críticos do funcional $J_\mu|_{V_q}$ tais que

$$J_\mu(u_j) \leq m(\mu, r) < S, \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.43}$$

descritos no parágrafo anterior. Pelo Lema 4.2 sabemos que, a menos de substituir u_j por $-u_j$, temos $u_j, -\Delta u_j > 0$ em Ω.

Por outro lado, para cada $j = 1, ..., n$, existem $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tais que u_j satisfazem

$$\int_\Omega |\Delta u_j|^{\frac{1}{p}-1} \Delta u_j \Delta v dx = \mu \int_\Omega |u_j|^{\frac{1}{p}-1} |u_j| v dx + \lambda_j \int_\Omega |u_j|^{q-1} u_j v dx, \quad \forall\, v \in E(\Omega).$$

Como $u_j \in V_q$ temos $u_j \neq 0$ e

$$\lambda_j = \lambda_j \int_\Omega |u_j|^{q+1} dx = J_\mu(u_j) = \int_\Omega [|\Delta u_j|^{\frac{p+1}{p}} - \mu |u_j|^{\frac{p+1}{p}}] dx > 0. \tag{4.44}$$

Portanto, para cada $j = 1, ..., n$, $w_j := \lambda_j^{\frac{p}{pq-1}} u_j$ é ponto crítico não-negativo do funcional I_μ dado em (3.12), e como $u_j \neq u_i$ se $j \neq i$, segue que $w_j \neq w_i$ se $j \neq i$, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

Apêndice

A

Sobre o teorema do passo da montanha

No Capítulo 3, mostramos a existência de solução para o problema (P_3) através da geometria do passo da montanha do funcional I_μ, dado por (3.12); ver Proposição 3.20. O objetivo deste apêndice é apresentar uma prova alternativa, sem exigir que $\mu > 0$ seja pequeno, de que ponto crítico $u \in E(\Omega)$ do funcional I_μ obtido através dessa geometria pode ser tomado de modo que $u, -\Delta u \geq 0$ em Ω.

Teorema A.1 (Teorema do passo da montanha, Ambrosetti-Rabinowitz, 1973)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^N)$, $e \in X$ e $r > 0$ tais que $\|e\| > r$ e*

$$b := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e).$$

Se I satisfaz a condição $(PS)_c$ com

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X); \gamma(0) = 0,\ I(\gamma(1)) < 0\},$$

então c é um valor crítico de I.

Defina agora

$$c_\mu^+ := \inf_{\gamma \in \Gamma^+} \max_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma(t)),$$

$$\Gamma^+ := \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], E(\Omega)); \gamma(0) = 0,\ I_\mu(\gamma(1)) < 0, -\Delta\gamma(t)(x) \geq 0, \forall t \in [0,1], \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega\};$$

então

$$\Gamma^+ \subset \Gamma \Rightarrow c_\mu \leq c_\mu^+,$$

onde Γ é dado por (3.15) e c_μ por (3.14).

Agora, dado $\gamma \in \Gamma$, para cada $t \in [0,1]$ defina $\gamma^+(t)$ por

$$\begin{cases} -\Delta\gamma^+(t) = |-\Delta\gamma(t)| \ \text{ em } \ \Omega, \\ \gamma^+(t) = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue então que:

(i) $\gamma^+(t) \in E(\Omega)$ e $-\Delta\gamma^+(t) \geq 0$ em Ω, para todo $t \in [0,1]$.

(ii) $\gamma^+ \in \mathcal{C}([0,1], E(\Omega))$:

$$\begin{aligned} \|\gamma^+(t) - \gamma^+(t')\| &= |\Delta(\gamma^+(t)) - \Delta(\gamma^+(t'))|_{\frac{p+1}{p}} = ||\Delta(\gamma(t))| - |\Delta(\gamma(t'))||_{\frac{p+1}{p}} \\ &\leq ||\Delta(\gamma(t)) - \Delta(\gamma(t'))||_{\frac{p+1}{p}} = |\Delta(\gamma(t)) - \Delta(\gamma(t'))|_{\frac{p+1}{p}} \\ &= \|\gamma(t) - \gamma(t')\|, \end{aligned}$$

e a continuidade segue, pois $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], E(\Omega))$.

(iii) Temos

$$\begin{cases} -\Delta\gamma^+(0) = |-\Delta\gamma(0)| = 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \gamma^+(0) = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

e da unicidade de solução segue que $\gamma^+(0) = 0$; do princípio do máximo, $\gamma^+(t) \geq |\gamma(t)| \geq 0$ em Ω, para todo $t \in [0,1]$, donde

$$\begin{aligned} I_\mu(\gamma^+(t)) &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |\Delta(\gamma^+(t))|^{\frac{p+1}{p}} dx - \mu\frac{p}{p+1}\int_\Omega |\gamma^+(t)|^{\frac{p+1}{p}} dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |\gamma^+(t)|^{q+1} dx \\ &\leq \frac{p}{p+1}\int_\Omega |\Delta(\gamma(t))|^{\frac{p+1}{p}} dx - \mu\frac{p}{p+1}\int_\Omega |\gamma(t)|^{\frac{p+1}{p}} dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |\gamma(t)|^{q+1} dx \\ &= I_\mu(\gamma(t)), \quad \forall t \in [0,1], \end{aligned} \tag{A.1}$$

e segue que

$$I_\mu(\gamma^+(1)) \leq I_\mu(\gamma(1)) < 0.$$

Assim, concluímos que $\gamma^+ \in \Gamma^+$. Logo, se $\gamma \in \Gamma$, segue de (A.1) que

$$\max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma^+(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma(t)),$$

e portanto

$$c_\mu = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma(t)) \geq \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma^+(t)) \geq \inf_{\beta\in\Gamma^+} \max_{t\in[0,1]} I_\mu(\beta(t)) = c_\mu^+,$$

e $c_\mu = c_\mu^+$. Concluímos então que os caminhos γ do passo da montanha para definir o nível c_μ (ínfimo em relação aos caminhos) podem ser tomados, sem perda de generalidade, de modo que

$$-\Delta\gamma(t)(x) \geq 0, \forall t \in [0,1], \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega.$$

Teorema A.2 (Princípio Minimax Geral). *Seja X um espaço de Banach. Sejam M_0 um subespaço fechado do espaço métrico M e $\Gamma_0 \subset \mathcal{C}(M_0, X)$. Defina*

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathcal{C}(M, X), \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Se $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz

$$\infty < c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u)),$$

então, para todo $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$ tais que

$$\sup_M (\varphi \circ \gamma) \leq c + \varepsilon,$$

existe $u \in X$ tal que

a) $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$,

b) $dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$,

c) $\|\varphi'(u)\| \leq 8\varepsilon/\delta$.

Demonstração. Ver [49], Theorem 2.8. □

A demonstração do Teorema A.1 segue do Teorema A.2, fazendo $M = [0,1]$, $M_0 = \{0,1\}$, $\Gamma_0 = \{\gamma_0 : \{0,1\} \to X; \gamma_0(0) = 0, \varphi(\gamma_0(1)) < 0\}$. Além disso, o item (b) do Teorema A.2 fornece uma localização da sequência $(\mathrm{PS})_c$ obtida pela geometria do passo da montanha.

Do exposto anteriormente, podemos substituir Γ por Γ^+. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(u_n) \subset E(\Omega)$ uma sequência $(\mathrm{PS})_{c_\mu}$ e $\gamma_n \in \Gamma^+$ com $\sup_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma_n(t)) \leq c + o_n(1)$ tal que

$$\mathrm{dist}(u_n, \gamma_n([0,1])) = \min_{t \in [0,1]} \|u_n - \gamma_n(t)\| = \|u_n - \gamma_n(t_n)\| = |\Delta u_n - \Delta\gamma_n(t_n)|_{\frac{p+1}{p}} \leq \frac{1}{n}. \quad \text{(A.2)}$$

Como I_μ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_{c_\mu}$, ver Lemas 3.18 e 3.19, a menos de subsequência, existe $u \in E(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ E(\Omega), \ \text{ o que implica } \ \Delta u_n \to \Delta u \ \text{ em } \ L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega),$$

e então, de (A.2),

$$\Delta\gamma_n(t_n) \to \Delta u \ \text{ em } \ L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega),$$

e como $-\Delta\gamma_n(t_n) \geq 0$ q.t.p. em Ω, segue que $-\Delta u \geq 0$ q.t.p. em Ω e, por fim, do princípio do máximo temos então $u \geq 0$ q.t.p. em Ω.

Temos ainda $\gamma_n(t_n)$ uma sequência $(\mathrm{PS})_{c_\mu}$ para I_μ. De fato

$$\gamma_n(t_n) \to u \ \text{ em } \ E(\Omega) \Rightarrow I_\mu(\gamma_n(t_n)) \to I_\mu(u) = c_\mu;$$

e

$$\begin{aligned}
\|I'_\mu(\gamma_n(t_n))\| &= \|I'_\mu(\gamma_n(t_n)) - I'_\mu(u_n) + I'_\mu(u_n) - I'_\mu(u) + I'_\mu(u_n)\| \\
&\leq \|I'_\mu(\gamma_n(t_n)) - I'_\mu(u)\| + \|I'_\mu(u) - I'_\mu(u_n)\| + \|I'_\mu(u_n)\| \\
&= o_n(1),
\end{aligned}$$

pois $I_\mu \in \mathcal{C}^1(E(\Omega), \mathbb{R})$.

Observação A.3. *Para operadores elípticos de segunda ordem um argumento semelhante pode ser usado. Desta vez substituindo o caminho $\gamma(t)$ por $|\gamma(t)|$.*

Mais geralmente, o argumento anterior também pode ser empregado para o poliharmônico Δ^k com condição de contorno de Navier.

Referências Bibliográficas

[1] W. Abdelhedi. On a fourth-order elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the graph topology. Nonlinear Anal. 82 (2013), 82–99.

[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. Comm. Pure Appl. Math. 12 1959 623–727.

[3] C.O. Alves, Y.H. Ding. Multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation involving critical nonlinearity. J. Math. Anal. Appl. 279 (2003), no. 2, 508–521.

[4] C.O. Alves, G.M. Figueiredo. Multiplicity of nontrivial solutions to a biharmonic equation via Lusternik-Schnirelman theory. Math. Methods Appl. Sci. 36 (2013), no. 6, 683–694.

[5] A. Alvino, P.-L. Lions, G. Trombetti. A remark on comparison results via symmetrization. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 102 (1986), no. 1-2, 37–48.

[6] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis 14 (1973), 349–381.

[7] A.K. Ben-Naoum, C. Troestler, M. Willem. Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains. Nonlinear Anal. 26 (1996), no. 4, 823–833.

[8] F. Bernis, J. García Azorero, I. Peral. Existence and multiplicity of nontrivial solutions in semilinear critical problems of fourth order. Adv. Differential Equations 1 (1996), no. 2, 219–240.

[9] G. Bianchi, J. Chabrowski, A. Szulkin. On symmetric solutions of an elliptic equation with a nonlinearity involving critical Sobolev exponent. Nonlinear Anal. 25 (1995), no. 1, 41–59.

[10] D. Bonheure, E. Moreira dos Santos, M. Ramos. Ground state and non-ground state solutions of some strongly coupled elliptic systems. Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), no. 1, 447–491.

[11] H. Brezis, E. Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no. 3, 486–490.

[12] H. Brezis, L. Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), no. 4, 437–477.

[13] F.E. Browder, D.G. de Figueiredo. J-Monotone nonlinear operators in Banach spaces. Nederl. Akad. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. 28 (1966), 412–420.

[14] P. Clément, P. Felmer, E. Mitidieri. Homoclinic orbits for a class of infinite-dimensional Hamiltonian systems. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 24 (1997), no. 2, 367–393.

[15] P. Clément, D. G. de Figueiredo, E. Mitidieri. Positive solutions of semilinear elliptic systems. Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), no. 5-6, 923–940.

[16] K. El Mehdi, A. Selmi. Concentration and multiplicity of solutions for a fourth-order equation with critical nonlinearity. Nonlinear Anal. 64 (2006), no. 3, 417–439.

[17] A. Ferrero, F. Gazzola, T. Weth. Positivity, symmetry and uniqueness for minimizers of second-order Sobolev inequalities. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 186 (2007), no. 4, 565–578.

[18] G.B. Folland. Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications. 2nd edn. (Wiley-Interscience, 1999).

[19] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso. Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: nonlinear eigenvalues. Comm. Partial Differential Equations 12 (1987), no. 12, 1389–1430.

[20] J. García Azorero, I. Peral Alonso. Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term. Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), no. 2, 877–895.

[21] F. Gazzola, H.-C. Grunau, M. Squassina. Existence and nonexistence results for critical growth biharmonic elliptic equations. Calc. Var. Partial Differential Equations 18 (2003), no. 2, 117–143.

[22] F. Gazzola, H.-C. Grunau, G. Sweers. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. Lecture Notes in Mathematics 1991. Springer-Verlag (2010).

[23] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag (1977).

[24] J. Hulshof, E. Mitidieri, R.C.A.M. van der Vorst. Strongly indefinite systems with critical Sobolev exponents. Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), no. 6, 2349–2365.

[25] J. Hulshof, R.C.A.M. van der Vorst. Asymptotic behaviour of ground states. Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 8, 2423–2431.

[26] J. Hulshof, R.C.A.M. van der Vorst. Differential systems with strongly indefinite variational structure. J. Funct. Anal. 114 (1993), no. 1, 32–58.

[27] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. Mathématiques & Applications 13, Springer-Verlag (1993).

[28] M. Lazzo. Solutions positives multiples pour une équation elliptique non linéaire avec l'exposant critique de Sobolev. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 314 (1992), no. 1, 61–64.

[29] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), no. 1, 145–201.

[30] L. Lusternik, L. Schnirelman. Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels. Hermann, Paris (1934).

[31] P.J. McKenna, W. Reichel. Radial solutions of singular nonlinear biharmonic equations and applications to conformal geometry. Electron. J. Differential Equations 2003, no. 37, 13 pp.

[32] J.L.F. Melo, E. Moreira dos Santos. A fourth-order equation with critical growth: the effect of the domain topology. To appear in Topol. Methods Nonlinear Anal..

[33] J.L.F. Melo, E. Moreira dos Santos. Positive solutions to a fourth-order elliptic problem by Lusternik-Schnirelmann category. J. Math. Anal. Appl. (2014).

[34] E. Mitidieri. A Rellich type identity and applications. Comm. Partial Differential Equations 18 (1993), no. 1-2, 125–151.

[35] E. Moreira dos Santos. Positive solutions for a fourth-order quasilinear equations with critical Sobolev exponent. Commun. Contemp. Math. 12 (2010), no. 1, 1–33.

[36] W.M. Ni. A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications. Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), no. 6, 801–807.

[37] L.A. Peletier, R.C.A.M. van der Vorst. Existence and nonexistence of positive solutions of nonlinear elliptic systems and the biharmonic equation. Differential Integral Equations 5 (1992), no. 4, 747–767.

[38] S.I. Pohožaev. On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965) 36–39.

[39] P. Pucci, J. Serrin. A general variational identity. Indiana Univ. Math. J. 35 (1986), no. 3, 681–703.

[40] P.H. Rabinowitz. On a class of nonlinear Schrödinger equations. Z. Angew. Math. Phys. 43 (1992), no. 2, 270–291.

[41] O. Rey. A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness. Nonlinear Anal. 13 (1989), no. 10, 1241–1249.

[42] O. Rey. Proof of two conjectures of H. Brezis and L. A. Peletier. Manuscripta Math. 65 (1989), no. 1, 19–37.

[43] O. Rey. The role of the Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent. J. Funct. Anal. 89 (1990), no. 1, 1–52.

[44] E.A. de B. e Silva, S.H.M. Soares. Quasilinear Dirichlet problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth. Nonlinear Anal. 43 (2001), no. 1, 1–20.

[45] J. Simon. Regularité de la solution d'une équation no linéarie das $\mathbb{R}^N$. Lecture Notes in Math., Vol. 665 (Springer, 1978).

[46] R.C.A.M. van der Vorst. Best constant for the embedding for the space $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ into $L^{2N/(N-4)}(\Omega)$. Differential Integral Equations 6 (1993), no. 2, 259–276.

[47] R.C.A.M. van der Vorst. Fourth order elliptic equations with critical growth. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 320 (1995), no. 3, 295–299.

[48] R.C.A.M. van der Vorst. Variational identities and applications to differential systems. Arch. Rational Mech. Anal. 116 (1991) 375–398.

[49] M. Willem. Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser (1996).