UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Deformações geométricas de curvas no plano Minkowski

Alex Paulo Francisco

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Alex Paulo Francisco

Deformações geométricas de curvas no plano Minkowski

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Farid Tari

USP – São Carlos
Junho de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

F818d Francisco, Alex Paulo
 Deformações geométricas de curvas no plano
Minkowski / Alex Paulo Francisco; orientador Farid
Tari. -- São Carlos, 2019.
 166 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

 1. DEFORMAÇÕES DE SINGULARIDADES. 2. CURVAS NO
PLANO MINKOWSKI. 3. CÂUSTICAS DE CURVAS PLANAS. 4.
GEOMETRIA DIFERENCIAL. 5. SINGULARIDADES. I. Tari,
Farid, orient. II. Título.

Alex Paulo Francisco

Geometric deformations of curves in the Minkowski plane

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Farid Tari

USP – São Carlos
June 2019

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, Silvânia e Paulo, ao meu irmão, Alan e aos meus avós,
Luzia e João, por todo amor e carinho.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos derramadas sob meus caminhos e a possibilidade de realizar este novo trabalho.

Gostaria de agradecer também a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

Ao Prof. Farid, pela esplêndida orientação, pelos conselhos e "puxões de orelha", pelo apoio nas dificuldades e momentos que mais precisei, pela paciência e amizade, pelas formidáveis aulas que me motivaram e por todos esses anos de parceria e muito aprendizado.

À minha família, por todo amor e carinho que dedicam a mim todos os dias, pelo apoio, o incentivo e por me fazer sentir querido por pessoas tão especiais. Sobretudo, agradeço aos meus pais, Silvânia e Paulo, e ao meu irmão Alan por serem meu porto seguro, onde o tempo para, os problemas somem e a alegria e o amor florescem.

À todos meus amigos e colegas que fizeram parte desta caminhada, em especial à Camila, Liliam, Jean e Mariana, pelo convívio diário, pelo apoio e amizade, por estarem sempre ao meu lado me aturando mesmo nos momentos mais difíceis e me ajudarem sempre que precisei. Também gostaria de agradecer à Hellen, pela longa amizade e por todo apoio, pelas risadas e aventuras e pelo ombro amigo em momentos difíceis. Agradeço também ao Rodrigo, um irmão que a vida me deu, e à Monique, que juntos passamos por boas aventuras, que me ajudaram a me adaptar à cidade de São Carlos e pudesse considerá-la também como um lar. Meu muito obrigado.

À Prof^a Luciana por me preparar para o doutorado e me encaminhar para as mãos do Prof. Farid.

Aos professores e funcionários do ICMC, por toda dedicação.

À banca examinadora, pela dedicação em ler e analisar este trabalho, pelas sugestões e correções propostas e pelas discussões esclarecedoras.

À CAPES e à FAPESP pelo suporte financeiro, o qual foi essencial para a realização deste trabalho.

*“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar
seria menor se lhe faltasse uma gota”
(Madre Teresa de Calcutá)*

RESUMO

FRANCISCO, A. P. **Deformações geométricas de curvas no plano Minkowski**. 2019. 166 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Neste trabalho, estendemos o método desenvolvido em ([SALARINOUGHABI, 2016](#)),([SALARINOUGHABI; TARI, 2017](#)) para curvas no plano Minkowski. Tal método propõe um modo de estudar deformações de curvas planas levando em consideração a geometria das mesmas juntamente com suas singularidades. Abordamos detalhadamente todos os fenômenos locais que ocorrem genericamente em famílias de curvas a 2-parâmetros. Em cada caso, obtemos a geometria da curva deformada, ou seja, informações a respeito de inflexões, vértices e pontos lightlike. Obtemos também o comportamento da evoluta/cáustica de uma curva em pontos especiais e as bifurcações que podem aparecer ao deformá-la. Além disso, a fim de obter as deformações genéricas em uma inflexão lightlike de ordem 2, também classificamos submersões de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ por meio de difeomorfismos na fonte que preservam a swallowtail e, utilizando tal classificação, estudamos a geometria plana da swallowtail, a qual provém de seu contato com planos, o qual por sua vez é medido pelas singularidades da função altura sobre a swallowtail.

Palavras-chave: Curvas planas, Plano Minkowski, Inflexões, Vértices, Singularidades.

ABSTRACT

FRANCISCO, A. P. **Geometric deformations of curves in the Minkowski plane**. 2019. 166 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

In this work, we extend the method developed in ([SALARINOUGHABI, 2016](#)),([SALARINOUGHABI; TARI, 2017](#)) to curves in the Minkowski plane. The method proposes a way to study deformations of plane curves taking into consideration their geometry as well as their singularities. We deal in detail with all local phenomena that occur generically in 2-parameters families of curves. In each case, we obtain the geometry of the deformed curve, that is, information about inflections, vertices and lightlike points. We also obtain the behavior of the evolute/caustic of a curve at special points and the bifurcations that can occur when the curve is deformed. Moreover, in order to obtain the generic deformations at a lightlike inflection point of order 2, we also classify submersions from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}$ by diffeomorphisms in the source that preserve the swallowtail and, using such classification, we study the flat geometry of the swallowtail, which comes from its contact with planes, which in turn is measured by the singularities of the height function on the swallowtail.

Keywords: Plane curves, Minkowski plane, Inflections, Vertices, Singularities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_2 .	31
Figura 2	– Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_3 .	31
Figura 3	– Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4 (swallowtail).	31
Figura 4	– Pseudo-círculos $S_1^1(1)$ de vermelho, $H^1(-1)$ de azul e LC^* de amarelo.	36
Figura 5	– Elipse (azul), sua evoluta (vermelho) e a evoluta de sua evoluta (amarelo).	43
Figura 6	– Elipse (azul), sua evoluta (vermelho) e a evoluta de sua evoluta (amarelo) para o caso Euclidiano.	44
Figura 7	– Comportamento da evoluta em um vértice ordinário.	45
Figura 8	– Caso Euclidiano: vértice inward (esquerda) e vértice outward (direita).	47
Figura 9	– Evoluta em uma inflexão ordinária.	48
Figura 10	– Caso Euclidiano: evoluta em uma inflexão ordinária.	49
Figura 11	– Deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de uma cúspide ordinária.	51
Figura 12	– Bifurcação da evoluta em torno de um vértice de ordem 2.	69
Figura 13	– Deformação FR-genérica de uma inflexão de ordem 2.	70
Figura 14	– Caso Euclidiano: deformação FR-genérica de uma inflexão de ordem 2.	73
Figura 15	– Deformação FR-genérica de uma inflexão de ordem 3. A figura central é o conjunto de bifurcação no espaço de parâmetros (s_1, s_2) .	74
Figura 16	– Bifurcações no gráfico de κ_s .	77
Figura 17	– Deformação FRL-genérica de uma inflexão ordinária lightlike.	89
Figura 18	– Seções genéricas da cuspidal edge.	91
Figura 19	– Seção transversal 2-dimensional da estratificação de $J^k(1, 1)$ por I, L, IL, V e a posição relativa da imagem da aplicação de Monge-Taylor de γ_s para $s < 0$ à esquerda, $s = 0$ ao centro e $s > 0$ à direita (caso $c_3 > 0$).	92
Figura 20	– Deformação FRL-genérica de uma inflexão lightlike de ordem 2. A figura central é o conjunto bifurcação no espaço dos parâmetros (s_1, s_2) .	93
Figura 21	– Bifurcações no gráfico de g_s .	96
Figura 22	– Número de soluções de $F(t, u, v, w) = t^4 + ut^2 + vt + w$ em cada região delimitada pela swallowtail.	98
Figura 23	– Deformação FRS-genérica de uma cúspide ordinária não-lightlike.	104
Figura 24	– Bifurcação da cúspide ordinária e sua evoluta (figura obtida usando Maple).	104
Figura 25	– Estratificação do espaço de parâmetros de F .	106
Figura 26	– Seção transversal 2-dimensional da estratificação de $J^k(1, 2)$ por C, L, I, V e a posição relativa da imagem da aplicação de Monge-Taylor de γ_s para $s < 0$ à esquerda, $s = 0$ ao centro e $s > 0$ à direita (caso $b_3 > 0$).	107

Figura 27 – Transição no gráfico da função curvatura de γ_s	109
Figura 28 – Esboço do conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre γ_s (esquerda) e suas seções por planos $s = cte$ (direita).	110
Figura 29 – Relação entre o conjunto bifurcação de d (cáustica de γ) e o conjunto bifurcação de F	114
Figura 30 – Estratificação do espaço dos parâmetros (s_1, s_2)	121
Figura 31 – Deformação FRLS-genérica de uma cúspide ordinária lightlike.	127
Figura 32 – Deformação FRLS-genérica da cáustica de uma cúspide ordinária lightlike.	128
Figura 33 – Posição relativa entre as cúspides da curva γ e de sua cáustica.	129
Figura 34 – Estratificação do espaço dos parâmetros (s_1, s_2)	135
Figura 35 – Deformação FRS-genérica de uma cúspide ramphoid.	140
Figura 36 – Deformação FRS-genérica da cáustica de uma cúspide ramphoid.	141
Figura 37 – A swallowtail, sua curva singular Σ (em vermelho) e sua curva de pontos duplos Υ (em azul).	146
Figura 38 – Os discriminantes $\mathcal{D}_2(F)$ e seu subconjunto $\mathcal{D}_1(F)$ em negrito (esquerda) e o discriminante $\mathcal{D}_3(F)$ (direita) de $F = v + au^2 + a_1u$	155
Figura 39 – O discriminante $\mathcal{D}_2(F)$ e seu subconjunto $\mathcal{D}_1(F)$ em negrito (esquerda) e o discriminante $\mathcal{D}_3(F)$ (direita) de $F = v + au^3 + a_1u + a_2u^2$	156
Figura 40 – O discriminante $\mathcal{D}_2(F)$ (esquerda) e o discriminante $\mathcal{D}_3(F)$ (direita) de $F = \pm w + au^2 + bu^3 + a_1u + a_2v$	157

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Fenômenos de codimensão ≤ 2	56
Tabela 2 – $\mathcal{R}(X)$ -classificação de germes de submersões de $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão ≤ 2 . .	153

SUMÁRIO

Introdução	21
1 PRELIMINARES	25
1.1 Grupos de Mather	25
1.2 $\mathcal{A}_h$ -equivalência	27
1.3 Deformações $\mathcal{G}$ -versais	28
1.4 Deformações versais de germes de funções	29
1.4.1 Deformações $\mathcal{R}^+$ -versais	29
1.4.2 Deformações $\mathcal{R}$ -versais	31
2 CURVAS NO PLANO MINKOWSKI	35
2.1 O plano Minkowski	35
2.2 Curvas no plano Minkowski	36
2.3 Contato com retas e com pseudo-círculos	37
2.3.1 A evoluta e a cáustica de uma curva	39
2.4 Evoluta de uma curva em um vértice ordinário	44
2.5 Evoluta de uma curva em uma inflexão ordinária	47
3 DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CURVAS PLANAS: ASPECTOS GERAIS	51
4 DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CURVAS PLANAS REGULARES: CASO NÃO-LIGHTLIKE	63
4.1 Evoluta de uma curva em um vértice de ordem 2	69
4.2 FR-deformações de uma inflexão de ordem 2	70
4.3 FR-deformações de uma inflexão de ordem 3	72
5 DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CURVAS PLANAS REGULARES: CASO LIGHTLIKE	79
5.1 FRL-deformações de uma inflexão ordinária lightlike	88
5.2 FRL-deformações de uma inflexão lightlike de ordem 2	92
6 DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE UMA CÚSPIDE ORDINÁRIA	99
6.1 FRS-deformações de uma cúspide ordinária (não lightlike)	101
6.2 FRLS-deformações de uma cúspide ordinária (lightlike)	114

7	DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE UMA CÚSPIDE RAMPHOID	131
APÊNDICE A	FUNÇÕES SOBRE A SWALLOWTAIL	145
A.1	Funções sobre variedades analíticas	147
A.2	Classificação de funções sobre a swallowtail	150
A.3	A geometria de funções sobre a swallowtail	154
A.4	Geometria plana da swallowtail	157
APÊNDICE B	CONSIDERAÇÕES FINAIS	161
REFERÊNCIAS		163

INTRODUÇÃO

Considere as projeções ortogonais de uma curva C em $\mathbb{R}^3$ em planos. A classificação das singularidades da projeção foi obtida por David em (DAVID, 1983) (muitos outros autores também trabalharam sobre o tema). Suponha que a curva C é parametrizada por $\gamma(t)$, $t \in I$. A família de projeções ortogonais de C em planos é dada por $P : I \times S^2 \rightarrow TS^2$, com $P(t, u) = (u, \gamma(t) - \langle \gamma(t), u \rangle u)$, onde S^2 é a esfera unitária e TS^2 é seu fibrado tangente.

As $\mathcal{A}$ -singularidades da projeção $P_u(t) = \gamma(t) - \langle \gamma(t), u \rangle u$ captam informações sobre a geometria extrínseca da curva. Por exemplo, a projeção tem uma singularidade $\mathcal{A}$ -equivalente à (t^2, t^5) (cúspide ramphoid) se, e somente se, a direção da projeção é tangente à curva em um ponto onde a torção, mas não a sua derivada, é nula. Para curvas genéricas, a família P é $\mathcal{A}_e$ -versal e, portanto, as bifurcações na curva projetada, quando u varia localmente em S^2 , são modeladas pelas bifurcações no modelo da família $\mathcal{A}_e$ -versal $(t^2, t^5 + at^3 + bt)$.

A relação de equivalência pelo grupo $\mathcal{A}$ é muito importante quando estudamos as singularidades das projeções de uma curva espacial. Porém, difeomorfismos não preservam a geometria da curva projetada. Em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008), Dias e Nuño Ballesteros iniciaram o estudo da geometria plana da projeção de uma curva espacial. Eles consideraram a projeção de uma curva espacial juntamente com o contato da curva projetada com retas no plano projetado (obtendo assim um refinamento da classificação de David em (DAVID, 1983)). Isto significa estudar as singularidades da projeção da curva juntamente com a função altura ao longo do vetor normal da curva projetada. Para o estudo simultâneo da função altura h_v e da projeção P_u , Dias e Nuño Ballesteros estudaram o diagrama divergente $(h_v, P_u) : \mathbb{R}, 0 \xleftarrow{h_v} \mathbb{R}, 0 \xrightarrow{P_u} \mathbb{R}^2, 0$. O problema aqui é que o grupo agindo sobre os pares (h_v, P_u) não é geométrico no sentido de Damon. Portanto, as ferramentas da teoria de singularidades (determinação finita, desdobramentos versais, etc) não se aplicam. Dias e Nuño Ballesteros contornaram este problema fazendo contas diretas. Foi possível fazer as contas em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008) porque as dimensões envolvidas são muito baixas. (As classes de equivalência dos pares (h_v, P_u) são chamadas de $\mathcal{A}_h$ -classes de equivalência em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008).)

Oset-Sinha e Tari reformularam em (OSET SINHA; TARI, 2013) o problema abordado em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008) sem o uso dos diagramas divergentes. Eles fixaram um $\mathcal{A}$ -modelo X da singularidade da curva projetada e estudaram as singularidades de submersões $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ com mudanças de coordenadas na fonte preservando a curva modelo X . A partir disso, eles obtiveram um grupo geométrico $\mathcal{R}(X)$, e pelo fato de ser geométrico, puderam usar as ferramentas da teoria de singularidades para obter a classificação desejada. Em (WALL, 2013), Wall abordou diferentes definições possíveis de uma “equivalência flat”, ou seja, uma

equivalência entre curvas que leva em consideração não somente suas singularidades, mas também suas inflexões. Usando a definição de equivalência entre curvas por meio de difeomorfismos que levam cone tangente em cone tangente, Wall classificou todos os germes e multi-germes de curvas de codimensão ≤ 2 . Para isso ele estudou classificações relativas e obteve fórmulas para os espaços tangentes às órbitas e suas codimensões em termos de alguns invariantes.

Nos trabalhos (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008), (OSET SINHA; TARI, 2013), (WALL, 2013), a direção da projeção é fixa. Mas existe uma família natural de projeções parametrizada por S^2 . A pergunta é como a geometria plana da curva projetada (i.e., a geometria captada pelo seu contato com retas, ou seja, pelas singularidades da função altura) muda com a direção de projeção? De uma forma mais geral, ou seja, supondo que a curva plana não é necessariamente uma projeção de uma curva espacial, (Q): *existe uma teoria de deformações versais que leva em consideração as singularidades de uma curva plana juntamente com a sua geometria plana?*

A questão Q ainda continua sendo um problema em aberto. No entanto, nos trabalhos (SALARINOUGHABI, 2016), (SALARINOUGHABI; TARI, 2017), Salarinoghabi e Tari propuseram um método para estudar as deformações nas singularidades de uma curva no plano Euclidiano que leva em consideração seus pontos de inflexão e seus vértices (ou seja, sua geometria plana e redonda). Eles denominaram tal método por *Flat and Round Singularity theory for plane curves* (FRS). No referido trabalho, eles observam que qualquer família de funções distância ao quadrado sobre uma curva singular não pode ser $\mathcal{R}_e$ -versal, o que indica que a teoria procurada para responder a pergunta (Q) não pode ser através da ação de um subgrupo de Mather sobre os espaços dos germes de curvas planas. Dessa forma, eles definiram o conceito de FRS-genericidade usando a transversalidade de famílias de curvas a uma estratificação do espaço dos k -jatos e multi-jatos. Como pode ser visto nas figuras de (SALARINOUGHABI; TARI, 2017), o trabalho de FRS-deformações de curvas planas revela uma geometria bonita e profunda de curvas regulares e singulares no plano Euclidiano.

Considere uma curva C no espaço Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ (ver (TARI, 2012)). Podemos nos questionar quais são os tipos de singularidades da curva obtida através da projeção ortogonal de C em uma determinada direção. Além disso, quando consideramos uma família de projeções ortogonais, quais são as deformações geométricas que podem ocorrer? Dessa forma, temos 3 situações que podemos considerar: a direção de projeção sendo timelike, spacelike ou lightlike.

Se a direção de projeção for timelike, então o plano ortogonal será composto apenas de direções spacelike e, conseqüentemente, o pseudo produto escalar de $\mathbb{R}_1^3$ restrito a tal plano se torna um produto escalar. Logo, tal observação sugere que, neste caso, os estudos das projeções no plano Euclidiano e das deformações geométricas estudadas em (SALARINOUGHABI; TARI, 2017) podem ser aplicados.

O estudo da projeção relativa a uma direção lightlike foi abordado por Izumiya e Tari em (IZUMIYA; TARI, 2013).

No entanto, se a direção de projeção for spacelike, então o plano ortogonal intersecta

o cone lightlike e, conseqüentemente, teremos duas retas concorrentes de pontos lightlike separando as regiões timelike e spacelike do plano de projeção. Logo, esta observação sugere que o estudo que fazemos neste trabalho poderia ser aplicado para estudar as singularidades e a geometria da curva projetada e de suas deformações.

Podemos variar a direção de projeção e considerar uma família de projeções spacelike indexada na pseudo esfera unitária relativa a vetores spacelike $S_1^2(1)$. Logo, como a dimensão de $S_1^2(1)$ é 2, segue que os únicos fenômenos que podem ocorrer genericamente em deformações são os de codimensão ≤ 2 , o que justifica a nossa escolha de estudar todos os fenômenos de codimensão ≤ 2 .

Neste trabalho, estendemos o método introduzido em (SALARINOUGHABI, 2016), (SALARINOUGHABI; TARI, 2017) para o caso de curvas no plano Minkowski e o aplicamos para todos os fenômenos de codimensão menor ou igual a 2.

A partir do Capítulo 3 trabalhamos sempre com germes de curvas e germes de famílias de curvas, então sempre que mencionarmos curvas e família de curvas estamos considerando os germes dos mesmos.

Nos estudos abordados neste trabalho as curvas deformadas não possuem, localmente, pontos de auto-intersecção triplos. Portanto, sempre que falarmos em multi-germes, multi-jatos e multi-local nos referimos a bi-germes, bi-jatos e bi-local.

Observamos que ao deformarmos uma curva regular, sua direção tangente se deforma, localmente, com pequena variação, ou seja, não há a presença de pontos de auto-intersecção, por isso, neste caso, não consideramos estratos multi-locais. Já ao deformarmos curvas singulares de codimensão 2 levamos em consideração os estratos multi-locais que possam aparecer. No entanto, tais estratos são de codimensão 3 no espaço de multi-jatos, uma vez que ao tomarmos a pré-imagem pela aplicação bi-jato de Monge-Taylor a codimensão passa a ser 2 em $\mathbb{R}^3$. Portanto, no geral consideramos, nos devidos casos, estratos multi-locais de codimensão ≤ 3 e locais de codimensão ≤ 2 .

A fim de uma exposição clara, o desenvolvimento deste trabalho foi seccionado de acordo com as seguintes temáticas:

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares da teoria de singularidades, os quais foram utilizados no decorrer de todo o texto.

No Capítulo 2, abordamos propriedades de curvas no plano Minkowski e, além disso, obtivemos o comportamento da evoluta de curvas planas regulares em pontos especiais como vértice ordinário (Seção 2.4) e inflexão ordinária (Seção 2.5).

No Capítulo 3, desenvolvemos o conceito de FRLS-equivalência entre deformações de curvas planas, juntamente com propriedades e outros conceitos gerais que foram utilizados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 4, obtemos o comportamento da evoluta em um vértice de ordem 2 (Seção

4.1) e estudamos as deformações geométricas de curvas regulares não-lightlike, mais especificamente, de curvas com uma inflexão não-lightlike de ordem 2 (Seção 4.2) e 3 (Seção 4.3).

No Capítulo 5, obtivemos as deformações geométricas de curvas regulares com pontos lightlike, mais especificamente, de curvas com uma inflexão lightlike ordinária (Seção 5.1) e de ordem 2 (Seção 5.2).

No Capítulo 6, abordamos o método para curvas com singularidade cúspide ordinária, tanto o caso não-lightlike (Seção 6.1) quanto o lightlike (Seção 6.2).

No Capítulo 7, finalizamos os estudos de deformações geométricas de fenômenos de codimensão ≤ 2 com o caso de curvas com uma singularidade cúspide ramphoid.

No Apêndice A, classificamos germes de submersões de $\mathbb{R}^3, 0$ em $\mathbb{R}, 0$ a menos de difeomorfismos na fonte que preservam a swallowtail e, além disso, utilizamos tal classificação para estudar a geometria plana da swallowtail. Tal classificação é uma ferramenta essencial para a demonstração do Teorema 5.2.1.

No Apêndice B, apresentamos as considerações finais sobre o trabalho realizado e discutimos sobre as questões pertinentes que surgiram no decorrer deste trabalho e que motivarão trabalhos futuros.

Este trabalho foi fortemente baseado no artigo (SALARINOUGHABI; TARI, 2017). No entanto, ele trás diversos resultados que não possuem uma versão para o caso Euclidiano abordado no referido trabalho, como, por exemplo, todos os resultados do Capítulo 5 e da Seção 6.2. Além disso, mesmo os que possuem uma versão em (SALARINOUGHABI; TARI, 2017) também apresentam riqueza de detalhes e diferenças nas técnicas de demonstração (caso de alguns resultados do Capítulo 6 e 7) e nas deformações obtidas, as quais destacamos ao fim de cada resultado, em particular, os resultados sobre deformações de uma cúspide ordinária não-lightlike (Seção 6.1) e uma cúspide ramphoid (Capítulo 7) descrevem também o comportamento com relação a pontos lightlike, o que não existe no caso Euclidiano. Grande parte das diferenças observadas entre os resultados no plano Euclidiano e Minkowski provém da Proposição 2.3.2. Entretanto, esta diferença local acarreta em grandes diferenças no ponto de vista mais global, como podemos observar, por exemplo, no comportamento da evoluta da elipse descrito no Exemplo 2.3.5. Apresentamos os resultados obtidos neste trabalho com o máximo de detalhes, buscando clareza nas ideias aplicadas.

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho. Para as demonstrações dos resultados aqui mencionados e maiores informações ver (BROCKER; LANDER *et al.*, 1975), (BRUCE; GIBLIN, 1992), (FRANCISCO; MARTINS, 2013), (IZUMIYA *et al.*, 2016), (WALL, 1981).

1.1 Grupos de Mather

Nesta subseção apresentamos os clássicos grupos de Mather, mas para entender sua relação com o estudo de germes de aplicações precisamos de alguns conceitos preliminares como ação de grupo.

Sejam $\mathcal{G}$ um grupo e X um espaço topológico. Uma *ação do grupo* $\mathcal{G}$ sobre X é uma aplicação contínua $\phi : \mathcal{G} \times X \rightarrow X$ tal que $\phi(e, x) = x$ e $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$, para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$ e $x \in X$, onde e é o elemento neutro do grupo $\mathcal{G}$. Geralmente denotamos $\phi(g, x)$ simplesmente por $g \cdot x$.

A ação do grupo $\mathcal{G}$ sobre X induz uma relação de equivalência em X da seguinte forma: $x \sim y$ se, e somente se, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $y = g \cdot x$. A classe de equivalência de um elemento $x \in X$ é o conjunto $\mathcal{G} \cdot x = \{g \cdot x, g \in \mathcal{G}\}$ também chamada de *$\mathcal{G}$ -órbita de x* .

Denotamos por $\mathcal{E}(n, m)$ o conjunto dos germes de aplicações suaves de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ definidos em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n$. Quando $m = 1$ (germes de funções) denotamos tal conjunto simplesmente por $\mathcal{E}_n$. O conjunto $\mathcal{E}_n$ é um anel local, cujo único ideal maximal é denotado por $\mathcal{M}_n$ e consiste dos germes que se anulam na origem.

Seja $\mathcal{R}$ o grupo formado por germes de difeomorfismos $h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$. Tal grupo age sobre $\mathcal{E}(n, m)$ da seguinte forma

$$h \cdot f = f \circ h^{-1}$$

para quaisquer $h \in \mathcal{R}$ e $f \in \mathcal{E}(n, m)$.

Considere $\mathcal{L}$ o grupo de difeomorfismos $k : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^m, 0$, o qual age sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$ da seguinte forma

$$k \cdot f = k \circ f$$

para quaisquer $k \in \mathcal{L}$ e $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$.

Fazendo o produto direto entre os grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ obtemos o grupo denotado por $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$, o qual age sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$ da seguinte forma

$$(h, k) \cdot f = k \circ f \circ h^{-1}$$

para quaisquer $(h, k) \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$.

O grupo de contato $\mathcal{K}$ é o grupo formado por germes de difeomorfismos $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (0, 0)$ que podem ser escritos na forma $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$, com $h \in \mathcal{R}$ e $H_1(x, 0) = 0$ para x próximo de 0. O subgrupo de $\mathcal{K}$ formado por germes de difeomorfismos na forma $H(x, y) = (x, H_1(x, y))$, com $H_1(x, 0) = 0$ para x próximo de 0 é denotado por $\mathcal{C}$.

O grupo $\mathcal{K}$ age sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$ da seguinte forma. Dados $f, g \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$ e $(h, H) \in \mathcal{K}$, temos $g = (h, H) \cdot f$ se, e somente se,

$$(x, g(x)) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))).$$

Logo, o difeomorfismo H manda o gráfico de f no gráfico de g .

Os grupos $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$ são conhecidos como *grupos de Mather*. Os grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ são considerados naturalmente como subgrupos de $\mathcal{A}$ e os grupos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{A}$ (e, consequentemente, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$) como subgrupos de $\mathcal{K}$.

Considere $\mathcal{G}$ um dos grupos de Mather. Dizemos que dois germes f e g são $\mathcal{G}$ -*equivalentes* se ambos estão em uma mesma $\mathcal{G}$ -órbita.

Denotamos por $\mathcal{G}_k$ o subgrupo do grupo de Mather $\mathcal{G}$ formado por elementos de $\mathcal{G}$ cujo k -jato é a identidade. O grupo $\mathcal{G}_k$ é um subgrupo normal de $\mathcal{G}$ e, consequentemente, $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_k}$ é um grupo, o qual é denotado por $J^k \mathcal{G}$ uma vez que seus elementos são k -jatos de elementos de $\mathcal{G}$.

Observamos que os grupos de Mather são compostos por difeomorfismos que preservam a origem. No entanto, quando estamos interessados em estudar deformações, a singularidade pode sair da origem ao deformarmos. Dessa forma, os campos de vetores envolvidos para definir o espaço tangente não precisam preservar a origem. Integrando tais campos de vetores, obtemos os *grupos de Mather estendidos* $\mathcal{G}_e$.

Definimos os *espaços tangentes* $L\mathcal{G} \cdot f$ à $\mathcal{G}$ -órbita de f no germe f como segue:

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{M}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \\ L\mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\} \\ L\mathcal{A} \cdot f &= L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{L} \cdot f \\ L\mathcal{C} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \mathcal{E}_n \cdot \{e_1, \dots, e_m\} \\ L\mathcal{K} \cdot f &= L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{C} \cdot f \end{aligned}$$

e os *espaços tangentes estendidos* $L\mathcal{G}_e \cdot f$ são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} L\mathcal{R}_e \cdot f &= \mathcal{E}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \\ L\mathcal{L}_e \cdot f &= f^*(\mathcal{E}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\} \\ L\mathcal{A}_e \cdot f &= L\mathcal{R}_e \cdot f + L\mathcal{L}_e \cdot f \\ L\mathcal{C}_e \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \mathcal{E}_n \cdot \{e_1, \dots, e_m\} \\ L\mathcal{K}_e \cdot f &= L\mathcal{R}_e \cdot f + L\mathcal{C}_e \cdot f, \end{aligned}$$

onde $e_1, \dots, e_m$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e são considerados como elementos de $\mathcal{E}(n, m)$, e $(x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^n, 0$.

1.2 $\mathcal{A}_h$ -equivalência

A classificação de aplicações por meio da $\mathcal{A}$ -equivalência é muito utilizada quando queremos estudar as singularidades de tais aplicações. No entanto, quando tratamos de curvas, tal equivalência não preserva informações relativas a sua geometria, uma vez que difeomorfismos não as preservam. Pensando nisso, Dias e Nuño Ballesteros em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008) definiram uma equivalência que leva em consideração não só as singularidades de uma curva, mas também sua geometria flat, ou seja, seu contato com retas, ou ainda, as singularidades da função altura sobre a curva (isto é, a função $h : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_v(t) = \langle \gamma(t), v \rangle$, onde γ é a parametrização da curva e v é o vetor normal a γ em $t_0 = 0$). Tal equivalência foi chamada de $\mathcal{A}_h$ -equivalência (para mais detalhes sobre diagramas divergentes e a $\mathcal{A}_h$ -equivalência ver (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008)).

Um *diagrama divergente de curvas planas* é um par de aplicações suaves (f, α) , onde

$$\mathbb{R}, 0 \xleftarrow{f} \mathbb{R}, 0 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2, 0.$$

Dizemos que dois diagramas divergentes de curvas planas (f_1, α_1) e (f_2, α_2) são *equivalentes* se existem germes de difeomorfismos h, H e K tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}, 0 & \xleftarrow{f_1} & \mathbb{R}, 0 & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathbb{R}^2, 0 \\ h \downarrow & & H \downarrow & & K \downarrow \\ \mathbb{R}, 0 & \xleftarrow{f_2} & \mathbb{R}, 0 & \xrightarrow{\alpha_2} & \mathbb{R}^2, 0. \end{array}$$

A partir das definições de diagramas divergentes de curvas planas e da equivalência de tais diagramas podemos definir a $\mathcal{A}_h$ -equivalência como segue.

Sejam α e β dois germes de curvas planas e h_α e h_β as funções altura sobre α e β , respectivamente. Dizemos que α e β são $\mathcal{A}_h$ -equivalentes se os diagramas divergentes (h_α, α) e (h_β, β) são equivalentes, ou seja, se existem germes de difeomorfismos h, H e K tais que o

seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}, 0 & \xleftarrow{h_\alpha} & \mathbb{R}, 0 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^2, 0 \\ h \downarrow & & H \downarrow & & K \downarrow \\ \mathbb{R}, 0 & \xleftarrow{h_\beta} & \mathbb{R}, 0 & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{R}^2, 0 \end{array}$$

1.3 Deformações $\mathcal{G}$ -versais

Definição 1.3.1. Considere $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$. Uma *deformação a p -parâmetros F de f* é um germe $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m, 0$ tal que $F(x, 0) = f(x)$.

Definição 1.3.2. Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Mather e $I \in \mathcal{G}$ sua identidade.

- (i) Considere F e G duas deformações a p e q -parâmetros respectivamente, de um mesmo germe $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$. Um *morfismo* entre F e G é um par (α, ψ) , com $\alpha : \mathbb{R}^p, 0 \rightarrow \mathcal{G}, I$ e $\psi : \mathbb{R}^q, 0 \rightarrow \mathbb{R}^q, 0$, tal que

$$F_u = \alpha(u) \cdot G_{\psi(u)},$$

onde a operação “ $\cdot$ ” acima representa a ação do grupo $\mathcal{G}$ em $\mathcal{E}(n, m)$. Neste caso, dizemos que F é *$\mathcal{G}$ -induzido de G* por (α, ψ) .

- (ii) Considere F e G duas deformações a p -parâmetros, de um mesmo germe $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$. Dizemos que F e G são *$\mathcal{G}$ -equivalentes* se existe um morfismo (α, ψ) entre F e G com ψ inversível.
- (iii) Uma deformação a p -parâmetros F de um germe $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$ é dita *$\mathcal{G}$ -versal* se qualquer deformação a q -parâmetros G de f é $\mathcal{G}$ -induzida de F .

Podemos definir de modo análogo os conceitos de $\mathcal{G}_e$ -induzido, $\mathcal{G}_e$ -equivalência e $\mathcal{G}_e$ -versalidade trocando $\mathcal{G}$ por $\mathcal{G}_e$ na Definição 1.3.2.

Considere F uma deformação a p -parâmetros de um germe $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$, denotamos por $\dot{F}_i$, com $i = 1, \dots, p$, o germe em $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$ dado por

$$\dot{F}_i(x) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0).$$

Teorema 1.3.3. (WALL, 1981) Considere $\mathcal{G}$ um grupo de Mather. Uma deformação a p -parâmetros F de um germe $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$ é $\mathcal{G}$ -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{G} \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\} = \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}(n, m)$$

e é $\mathcal{G}_e$ -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{G}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\} = \mathcal{E}(n, m).$$

1.4 Deformações versais de germes de funções

Nesta seção, apresentamos uma abordagem mais detalhada que a seção anterior para o caso de germes de funções.

1.4.1 Deformações $\mathcal{R}^+$ -versais

Definição 1.4.1. Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma deformação a s -parâmetros de um germe de função $g = G_{y_0}$. Dizemos que uma deformação a r -parâmetros $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ de um germe de uma função $f = F_{x_0}$ é $\mathcal{R}^+$ -**induzida de** G se existem germes de aplicações suaves $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^r, x_0 \rightarrow \mathbb{R}^s, y_0$ e $c : \mathbb{R}^r, x_0 \rightarrow \mathbb{R}$, com $a(t, x_0) = t$, tais que

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x).$$

Se toda deformação de g é $\mathcal{R}^+$ -induzida de G , dizemos que G é uma **deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de g em t_0** .

Observação 1.4.2. Seja $g : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ um germe suave e sejam F, G e H deformações de g em t_0 . A partir da Definição 1.4.1, podemos mostrar que:

- (a) Se F é $\mathcal{R}^+$ -induzida de G e G é $\mathcal{R}^+$ -induzida de H , então F é $\mathcal{R}^+$ -induzida de H .
- (b) Se G é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de g em t_0 e G é $\mathcal{R}^+$ -induzida de H , então H é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de g em t_0 .

Teorema 1.4.3. ((BRUCE; GIBLIN, 1992), p. 137) Seja $g : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \pm t^{k+1}$. Então a deformação $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ de g em 0 dada por

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_{k-1}t^{k-1} + \cdots + x_2t^2 + x_1t$$

é $\mathcal{R}^+$ -versal.

Teorema 1.4.4. ((BRUCE; GIBLIN, 1992), p. 140) Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma deformação de $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$, onde f tem singularidade do tipo A_k ($k \geq 1$) em t_0 (isto é, f é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\pm t^{k+1}$ em t_0). Escrevemos

$$j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \cdots + \alpha_{(k-1)i}t^{k-1},$$

para $i = 1, \dots, r$. Então F é $\mathcal{R}^+$ -versal se, e somente se, a matriz dos coeficientes $(\alpha_{ji})_{(k-1) \times r}$ tem posto $k-1$ (isso requer que $k-1 \leq r$).

Definição 1.4.5. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma deformação de $f = F_{x_0}$. O **conjunto singular** S_F de F é o conjunto dos pontos (t, x) tais que F_x tem singularidade em t , ou seja,

$$S_F = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r; \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \right\}.$$

O conjunto bifurcação de F é o conjunto

$$\text{Bif}(F) = \left\{ x \in \mathbb{R}^r; \exists t \in \mathbb{R}, \text{ onde } \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0 \right\},$$

o t que existe é dito **correspondente** a x .

Proposição 1.4.6. ((BRUCE; GIBLIN, 1992), p. 143) Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de $f = F_{x_0}$ em t_0 . Se $(t_0, x_0) \in S_F$, então existe uma vizinhança U de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $S_F \cap U$ é uma r -variedade suave.

Considere F e f como na Proposição 1.4.6 e G uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal a r -parâmetros de $g = G_{u_0}$ em t_1 . Suponha que f e g têm singularidade A_k , $k \geq 1$, em t_0 e t_1 , respectivamente, o que implica que $(t_0, x_0) \in S_F$ e $(t_1, u_1) \in S_G$. Pela Proposição 1.4.6, existem vizinhanças U de (t_0, x_0) e V de (t_1, u_1) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tais que $S_F \cap U$ e $S_G \cap V$ são r -variedades parametrizadas.

Proposição 1.4.7. ((BRUCE; GIBLIN, 1992), p. 143) (**Unicidade dos conjuntos singular e bifurcação**) Com as notações acima, as vizinhanças U e V podem ser escolhidas tais que exista um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ da forma $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$ com $a(t_0, x_0) = t_1$, $b(x_0) = u_1$ e

- (i) $\phi(S_F \cap U) = S_G \cap V$;
- (ii) b é um difeomorfismo de $\pi(U)$ a $\pi(V)$, onde π é a projeção no espaço dos parâmetros, e $b(\text{Bif}(F) \cap \pi(U)) = \text{Bif}(G) \cap \pi(V)$.

Como $\text{Bif}(F)$ e $\text{Bif}(G)$ são localmente difeomorfos, para F e G deformações $\mathcal{R}^+$ -versais a r -parâmetros de funções tendo singularidade do tipo A_k , então, para estudarmos propriedades do conjunto bifurcação de uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de uma função real com singularidade do tipo A_k , as quais são preservadas por difeomorfismos, basta estudarmos $\text{Bif}(F)$ sendo F deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de t^{k+1} . É claro que devemos tomar $r \geq k - 1$.

Exemplo 1.4.8. Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_2 ($r \geq 1$)

O conjunto bifurcação de uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal a r -parâmetros de uma singularidade A_2 é localmente um espaço linear de dimensão $r - 1$ em $\mathbb{R}^r$. A Figura 1 mostra a estrutura local dos conjuntos S_F e $\text{Bif}(F)$ de uma singularidade A_2 , com $r = 1, 2, 3$. $\square$

Exemplo 1.4.9. Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_3 ($r \geq 2$)

Para $r = 3$, o conjunto bifurcação é uma superfície singular chamada cuspidal edge (isto é, difeomorfa ao conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 4x^3 + 27y^2 = 0\}$). A Figura 2 mostra as estruturas locais de S_F e $\text{Bif}(F)$ de uma singularidade A_3 , com $r = 2, 3$. $\square$

Exemplo 1.4.10. Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4 ($r \geq 3$)

Para $r = 3$ o conjunto bifurcação é uma superfície singular chamada de swallowtail (isto é, difeomorfa a superfície parametrizada por $\chi(x, y) = (x, -4y^3 - 2xy, 3y^4 + xy^2)$) e é dada na Figura 3. $\square$

Figura 1 – Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_2 . Figura 2 – Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_3 . Figura 3 – Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4 (swallowtail).

1.4.2 Deformações $\mathcal{R}$ -versais

Os resultados anteriores são adaptados para o caso $\mathcal{R}$ -versal como segue.

Definição 1.4.11. Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma deformação a s -parâmetros de um germe de função $g = G_{y_0}$. Dizemos que uma deformação a r -parâmetros $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ de um germe de função $f = F_{x_0}$ é **$\mathcal{R}$ -induzida de G** se existem germes de aplicações suaves

$a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{R}^r, x_0 \rightarrow \mathbb{R}^s, y_0$, com $a(t, x_0) = t$, tal que

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x)).$$

Se toda deformação de g é $\mathcal{R}$ -induzida de G , dizemos que G é uma **deformação $\mathcal{R}$ -versal de g em t_0** .

Teorema 1.4.12. ((BRUCE; GIBLIN, 1992), p. 149) Seja $g : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \pm t^{k+1}$. Então a deformação $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_k t^{k-1} + \cdots + x_2 t + x_1$$

é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal de g em 0.

Teorema 1.4.13. ((BRUCE; GIBLIN, 1992), p. 149) Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma deformação de $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$, onde f tem singularidade do tipo A_k ($k \geq 1$) em t_0 . Suponhamos que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t_0, x_0) + j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \cdots + \alpha_{(k-1)i}t^{k-1}$, para $i = 1, \dots, r$. Então F é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal se, e somente se, a matriz dos coeficientes $(\alpha_{ji})_{(k) \times r}$ tem posto k (isso requer que $k \leq r$).

Definição 1.4.14. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma deformação de $f = F_{x_0}$. O **conjunto zero** de F é o conjunto

$$M_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r; F(t, x) = 0\},$$

e o **conjunto discriminante** de F é o conjunto

$$\mathcal{D}_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r; \exists t \in \mathbb{R}, \text{ onde } F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \right\}.$$

Proposição 1.4.15. ((BRUCE; GIBLIN, 1992), p. 150) Seja F uma deformação $\mathcal{R}$ -versal a r -parâmetros de $f = F_{x_0}$ em t_0 . Se $(t_0, x_0) \in M_F$, então existe uma vizinhança U de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $M_F \cap U$ é uma r -variedade suave.

Considere F e f como na proposição acima e G uma deformação $\mathcal{R}$ -versal a r -parâmetros de $g = G_{u_1}$ em t_1 , onde f e g têm singularidades A_k em t_0 e t_1 , respectivamente. Se $(t_0, x_0) \in M_F$ e $(t_1, u_1) \in M_G$ então, pela proposição anterior existem vizinhanças U de (t_0, x_0) e V de (t_1, u_1) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tais que $M_F \cap U$ e $M_G \cap V$ são r -variedades suaves.

Proposição 1.4.16. ((BRUCE; GIBLIN, 1992), p. 150) (**Unicidade dos conjuntos zero e discriminante**) Com as notações acima, as vizinhanças U e V podem ser escolhidas tais que existe um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ da forma $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$, com $a(t_0, x_0) = t_1$, $b(x_0) = u_1$ e

$$(i) \quad \phi(M_F \cap U) = M_G \cap V;$$

$$(ii) \quad b \text{ é um difeomorfismo de } \pi(U) \text{ a } \pi(V), \text{ onde } \pi \text{ é a projecção no espaço dos parâmetros, e } b(\mathcal{D}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{D}_G \cap \pi(V).$$

Assim, como os conjuntos discriminantes de F e G são localmente difeomorfos, para F e G deformações $\mathcal{R}$ -versais a r -parâmetros de funções tendo singularidade do tipo A_k , então, para estudarmos propriedades do conjunto discriminante de uma deformação $\mathcal{R}$ -versal de uma função real com singularidade do tipo A_k , as quais são preservadas por difeomorfismos, basta estudarmos $\mathcal{D}_F$, sendo F uma deformação $\mathcal{R}$ -versal de t^{k+1} . Note que agora requer-se que $k \leq r$.

Exemplo 1.4.17. Conjuntos zero e discriminante de uma singularidade A_k , com $k = 1, 2, 3$.

Seguindo a definição dos conjuntos zero e discriminante podemos concluir que dado uma deformação F , temos $S_F = M_{\frac{\partial F}{\partial t}}$ e $Bif(F) = \mathcal{D}_{\frac{\partial F}{\partial t}}$. Portanto os conjuntos zero e discriminante de uma singularidade A_k , $k \geq 1$, coincidem, respectivamente, com os conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_{k+1} .

Para uma singularidade A_1 , o conjunto discriminante é um ponto em $\mathbb{R}$ para $r = 1$, uma reta em $\mathbb{R}^2$ para $r = 2$ e um plano em $\mathbb{R}^3$ para $r = 3$ (ver Figura 1).

Para uma singularidade A_2 , o conjunto discriminante é uma cúspide ordinária (isto é, uma curva $\mathcal{A}$ -equivalente a (t^2, t^3)) em $\mathbb{R}^2$ para $r = 2$ e uma cuspidal edge em $\mathbb{R}^3$ para $r = 3$ (ver Figura 2).

Para uma singularidade A_3 , o conjunto discriminante é, para $r = 3$, uma swallowtail em $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 3). □

CURVAS NO PLANO MINKOWSKI

Neste capítulo apresentamos diversos conceitos relacionados com o pseudo produto escalar do plano Minkowski, além da geometria diferencial de curvas em tal plano. Para mais detalhes sobre a geometria pseudo-Riemanniana ver, por exemplo, (O'NEILL, 1983). Nas seções 2.1, 2.2 e 2.3 apresentamos conceitos fundamentais e preliminares acerca da geometria no plano Minkowski, para maiores detalhes ver (SALOOM; TARI, 2012). Além disso, na Seção 2.3 elucidamos as diferenças com o caso Euclidiano através de um exemplo, a evoluta da evoluta de uma elipse. Nas seções 2.4 e 2.5, obtemos o comportamento da evoluta de uma curva regular no plano Minkowski em torno de um vértice ordinário e uma inflexão ordinária, respectivamente.

2.1 O plano Minkowski

O plano Minkowski, denotado por $\mathbb{R}_1^2$, é o plano $\mathbb{R}^2$ munido com a pseudo métrica induzida pelo pseudo produto escalar $\langle u, v \rangle = -u_1 v_1 + u_2 v_2$, onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$.

Dizemos que um vetor $u \in \mathbb{R}_1^2$ é:

- **spacelike**, se $\langle u, u \rangle > 0$;
- **lightlike**, se $\langle u, u \rangle = 0$;
- **timelike**, se $\langle u, u \rangle < 0$.

Dado um vetor $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_1^2$, denotamos por $u^\perp$ o vetor dado por $u^\perp = (u_2, u_1)$. Tal vetor é ortogonal a u , já que $\langle u, u^\perp \rangle = -u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0$. Note que se u é lightlike, então $u^\perp = \pm u$ e se u é spacelike (resp. timelike), então $u^\perp$ é timelike (resp. spacelike).

A **norma** de um vetor $u \in \mathbb{R}_1^2$ é dada por $\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$. No plano Minkowski temos

três tipos de pseudo-círculos de centro p e raio $r \geq 0$ (ver Figura 4), os quais são

$$\begin{aligned} S_1^1(p, r) &= \{q \in \mathbb{R}_1^2; \langle q - p, q - p \rangle = r^2\}, \\ H^1(p, -r) &= \{q \in \mathbb{R}_1^2; \langle q - p, q - p \rangle = -r^2\}, \\ LC^*(p) &= \{q \in \mathbb{R}_1^2; \langle q - p, q - p \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Quando p for a origem de $\mathbb{R}_1^2$, denotaremos tais pseudo-círculos respectivamente por $S_1^1(r)$, $H^1(-r)$ e LC^* .

Figura 4 – Pseudo-círculos $S_1^1(1)$ de vermelho, $H^1(-1)$ de azul e LC^* de amarelo.

2.2 Curvas no plano Minkowski

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva suave e regular. Dizemos que γ é **spacelike** (resp. **timelike**) se $\gamma'(t)$ é um vetor spacelike (resp. timelike) para todo $t \in I$. Um ponto $\gamma(t)$ (ou, por simplicidade, t) é dito um **ponto lightlike** se $\gamma'(t)$ é um vetor lightlike.

Considere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva suave e regular. Fora de pontos lightlike (t não é lightlike) denotamos por $T(t)$ o vetor tangente unitário de γ em $t \in I$ e considere $N(t)$ o vetor normal unitário de γ em $t \in I$ de modo que $\{T(t), N(t)\}$ seja uma base orientada positivamente.

Sabemos que $\gamma'(t)^\perp$ é ortogonal a $\gamma'(t)$ e, consequentemente, a $T(t)$. Dessa forma, as possibilidades para $N(t)$ são $\frac{\gamma'(t)^\perp}{\|\gamma'(t)\|}$ ou $-\frac{\gamma'(t)^\perp}{\|\gamma'(t)\|}$. Escrevendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, observamos que

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|} & \frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \\ \frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|} & \frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \end{array} \right| = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2} (x'(t)^2 - y'(t)^2) = \frac{-1}{\|\gamma'(t)\|^2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle,$$

o qual é positivo se γ é timelike e negativo se γ é spacelike.

Logo,

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{e} \quad N(t) = \frac{\pm \gamma'(t)^\perp}{\|\gamma'(t)\|},$$

onde usamos $+$ se $\gamma(t)$ é timelike e $-$ se $\gamma(t)$ é spacelike. Note que se $\gamma(t)$ é spacelike (resp. timelike), então $N(t)$ é timelike (resp. spacelike).

Suponhamos que γ é parametrizada por comprimento de arco (ou seja, $\|\gamma'(t)\| = 1$). Assim, $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \pm 1$, derivando obtemos $\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = 0$, ou seja, $\gamma''(t) = \lambda \gamma'(t)^\perp$, para cada $t \in I$. Logo, $T'(t) = \kappa(t)N(t)$, para uma função $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$, chamada *função curvatura* de γ , de onde obtemos

$$\kappa(t) = \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{\langle N(t), N(t) \rangle} = \pm \langle \gamma''(t), \pm \gamma'(t)^\perp \rangle = \langle \gamma''(t), \gamma'(t)^\perp \rangle.$$

Se a curva γ não é parametrizada por comprimento de arco, então a curvatura de γ em $t \in I$ é dada por

$$\kappa(t) = \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t)^\perp \rangle}{|\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle|^{\frac{3}{2}}}.$$

Dizemos que um ponto $\gamma(t_0)$ (ou, por simplicidade, t_0) é um **vértice** de γ se $\kappa'(t_0) = 0$. Além disso, um vértice é dito

- **vértice ordinário**, se $\kappa'(t_0) = 0$ e $\kappa''(t_0) \neq 0$;
- **vértice de ordem k** (com $k \geq 2$), se $\kappa'(t_0) = \dots = \kappa^{(k)}(t_0) = 0$ e $\kappa^{(k+1)}(t_0) \neq 0$;

Um ponto $\gamma(t_0)$ (ou, por simplicidade, t_0) é dito uma **inflexão** de γ se $\kappa(t_0) = 0$. Além disso, uma inflexão é dita

- **inflexão ordinária**, se $\kappa(t_0) = 0$ e $\kappa'(t_0) \neq 0$;
- **inflexão de ordem k** (com $k \geq 2$), se $\kappa(t_0) = \dots = \kappa^{(k-1)}(t_0) = 0$ e $\kappa^{(k)}(t_0) \neq 0$;

2.3 Contato com retas e com pseudo-círculos

Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva suave. O contato de γ com retas ortogonais a um dado vetor $v \in \mathbb{R}_1^2$ não nulo é captado pelas singularidades da função altura $h_v : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_v(t) = \langle \gamma(t), v \rangle$.

Dizemos que a curva γ tem **contato** A_k ou de **ordem k** (resp. **contato** $A_{\geq k}$ ou de **ordem $\geq k$**) com a reta $l_v(t_0) = \{p \in \mathbb{R}_1^2; \langle p, v \rangle = \langle \gamma(t_0), v \rangle\}$ em $\gamma(t_0)$ se h_v tem uma singularidade A_k (resp. $A_{\geq k}$) em t_0 . Logo, o contato de γ com $l_v(t_0)$ em $\gamma(t_0)$ é do tipo

- A_1 se, e somente se, $v = \lambda \gamma'(t_0)^\perp$ e $\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle \neq 0$, onde $\lambda \in \mathbb{R}^*$;
- A_2 se, e somente se, $v = \lambda \gamma'(t_0)^\perp$, $\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle = 0$ e $\langle \gamma'''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle \neq 0$;

- $A_{\geq 2}$ se $v = \lambda \gamma'(t_0)^\perp$ e $\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle = 0$.

Assim, γ tem um contato $A_{\geq 1}$ com $l_v(t_0)$ em $\gamma(t_0)$ se, e somente se, $l_v(t_0)$ é a reta tangente a γ em t_0 .

Na seção anterior, definimos o que é uma inflexão de γ fora de pontos lightlike. No entanto, usando o contato da curva γ com sua reta tangente podemos definir uma inflexão de maneira geral (incluindo seus pontos lightlike) como segue.

Um ponto $\gamma(t_0)$ (ou por simplicidade t_0) é chamado de **inflexão**, se γ tem contato $A_{\geq 2}$ com sua reta tangente em t_0 . Além disso, uma inflexão é dita

- **inflexão ordinária**, se o contato for de ordem 2 e $\gamma(t_0)$ não é um ponto lightlike.
- **inflexão ordinária lightlike**, se o contato for de ordem 2 e $\gamma(t_0)$ é um ponto lightlike.
- **inflexão de ordem k** (com $k \geq 2$), se o contato for de ordem $k + 1$ e $\gamma(t_0)$ não é um ponto lightlike.
- **inflexão lightlike de ordem k** (com $k \geq 2$), se o contato for de ordem $k + 1$ e $\gamma(t_0)$ é um ponto lightlike.

Fora de pontos lightlike, as duas definições são equivalentes, pois basta considerar o numerador da função curvatura.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva suave. A família de funções distância ao quadrado $d : I \times \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre γ é dada por $d(t, u) = \langle \gamma(t) - u, \gamma(t) - u \rangle$. Denotamos por $d_u : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $d_u(t) = d(t, u)$. As singularidades de d_u em $t_0 \in I$ medem o contato de γ , em $\gamma(t_0)$, com o pseudo-círculo de centro u e raio $\|\gamma(t_0) - u\| \neq 0$. O tipo de pseudo-círculo é determinado pelo sinal de $\langle \gamma(t_0) - u, \gamma(t_0) - u \rangle = d_u(t_0)$.

Dizemos que a curva γ tem **contato** A_k (resp. **contato** $A_{\geq k}$) com o pseudo-círculo de centro u e raio $\|\gamma(t_0) - u\|$ (cujo tipo é determinado pelo sinal de $\langle \gamma(t_0) - u, \gamma(t_0) - u \rangle$) em $\gamma(t_0)$ se d_u tem uma singularidade A_k (resp. $A_{\geq k}$) em t_0 . Logo, o contato de γ com o pseudo-círculo descrito acima em $\gamma(t_0)$ é do tipo

- A_1 se, e somente se, $u = \gamma(t_0) - \lambda \gamma'(t_0)^\perp$ e $\lambda \langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle + \langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle \neq 0$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$;
- A_2 se, e somente se, $u = \gamma(t_0) - \lambda \gamma'(t_0)^\perp$, $\lambda \langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle + \langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0$ e $\lambda \langle \gamma'''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle + 3 \langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle \neq 0$;
- $A_{\geq 3}$ se, e somente se, $u = \gamma(t_0) - \lambda \gamma'(t_0)^\perp$, $\lambda \langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle + \langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0$ e $\lambda \langle \gamma'''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle + 3 \langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle = 0$.

Fora de pontos lightlike, podemos definir o conceito de vértices de modo equivalente ao apresentado anteriormente por meio do contato de γ com pseudo-círculos. Dizemos que

um ponto não-lightlike $\gamma(t_0)$ é um vértice, se a função distância ao quadrado sobre γ possui uma singularidade $A_{\geq 3}$ em t_0 (ou seja, se γ tem contato $A_{\geq 3}$ com o pseudo-círculo de centro $u = \gamma(t_0) + \frac{\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle}{\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle} \gamma'(t_0)^\perp$ e raio $\| \gamma(t_0) - u \|$).

No entanto, diferentemente dos pontos de inflexão, não podemos estender a definição de vértices para pontos lightlike, uma vez que o tipo de singularidade da função distância ao quadrado pode depender do centro do pseudo-círculo, como vemos no Exemplo 2.3.1 a seguir.

Exemplo 2.3.1. Considere $\gamma(t) = (t + t^2 + t^3, t + t^2 + t^3 + t^4)$. Neste caso, temos $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma'(0) = (1, 1)$. Logo, a função distância ao quadrado d_u sobre γ com $u = \lambda(1, 1)$ e $\lambda \neq 0$ é dada por

$$d_u(t) = \langle \gamma(t) - u, \gamma(t) - u \rangle = -2\lambda t^4 + 2t^5 + 2t^6 + 2t^7.$$

Portanto, se $\lambda \neq 0$, então d_u tem uma singularidade A_3 e, caso contrário, a singularidade é do tipo A_4 . $\square$

2.3.1 A evoluta e a cáustica de uma curva

Fora de pontos lightlike, definimos a **evoluta** de γ , com seus pontos de inflexão removidos, como a curva em $\mathbb{R}_1^2$ parametrizada por

$$e(t) = \gamma(t) - \frac{1}{\kappa(t)} N(t).$$

A proposição a seguir garante uma propriedade da evoluta de uma curva regular no plano Minkowski que é observada em todas as figuras obtidas neste trabalho e, além disso, é uma das principais diferenças com o caso Euclidiano.

Proposição 2.3.2. Sejam $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva suave e regular e $t_0 \in I$ um ponto que não é uma inflexão de γ . Então, localmente em t_0 , a evoluta de γ está contida no semiplano, determinado pela reta tangente a γ em t_0 , que não contém a curva γ .

Demonstração. Suponhamos γ parametrizada por comprimento de arco. Mostremos primeiramente que $\gamma''(t_0)$ aponta na direção de concavidade da curva γ .

Note que a reta tangente a γ em t_0 é dada por $r(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$.

Considerando a expansão de γ em série de Taylor, em torno de t_0 , temos

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\gamma''(t_0) + R(t),$$

onde $R(t)$ satisfaz $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R(t)}{(t - t_0)^2} = 0$.

Portanto, $\gamma(t) - r(t) = \frac{(t - t_0)^2}{2}\gamma''(t_0) + R(t)$. Como $\gamma(t) - r(t)$ é um vetor no sentido do semiplano que contém $\gamma(t)$, segue que para todo t suficientemente próximo de t_0 , o vetor $\gamma''(t_0)$

tem sentido do semiplano que contém $\gamma(t)$, ou seja, $\gamma''(t_0)$ aponta na direção da concavidade da curva γ .

Como γ é parametrizada por comprimento de arco, segue que $\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0$, isto é, $\gamma''(t_0) = \lambda \gamma'(t_0)^\perp$ e, conseqüentemente, $\lambda = \frac{\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle}{\langle \gamma'(t_0)^\perp, \gamma'(t_0)^\perp \rangle} = (-1)^w \langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle$, onde $w = 1$ se $\gamma'(t_0)$ é spacelike e $w = 2$ se $\gamma'(t_0)$ é timelike, ou seja,

$$\gamma''(t_0) = (-1)^w \langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle \gamma'(t_0)^\perp. \quad (2.1)$$

Por outro lado, como $e(t_0) = \gamma(t_0) - \frac{1}{\kappa(t_0)} N(t_0)$, segue que

$$e(t_0) - \gamma(t_0) = (-1)^{w+1} \frac{1}{\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle} \gamma'(t_0)^\perp. \quad (2.2)$$

Usando as equações (2.1) e (2.2) analisemos o que ocorre em cada caso.

Se γ é spacelike e $\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle > 0$, então $\gamma''(t_0)$ e $\gamma'(t_0)^\perp$ têm sentidos opostos enquanto que $e(t_0) - \gamma(t_0)$ e $\gamma'(t_0)^\perp$ têm o mesmo sentido.

Se γ é spacelike e $\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle < 0$, então $\gamma''(t_0)$ e $\gamma'(t_0)^\perp$ têm o mesmo sentido enquanto que $e(t_0) - \gamma(t_0)$ e $\gamma'(t_0)^\perp$ têm sentidos opostos.

Se γ é timelike e $\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle > 0$, então $\gamma''(t_0)$ e $\gamma'(t_0)^\perp$ têm o mesmo sentido enquanto que $e(t_0) - \gamma(t_0)$ e $\gamma'(t_0)^\perp$ têm sentidos opostos.

Se γ é timelike e $\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0)^\perp \rangle < 0$, então $\gamma''(t_0)$ e $\gamma'(t_0)^\perp$ têm sentidos opostos enquanto que $e(t_0) - \gamma(t_0)$ e $\gamma'(t_0)^\perp$ têm o mesmo sentido.

Portanto, em todos os casos obtemos que $e(t_0) - \gamma(t_0)$ e $\gamma''(t_0)$ têm sentidos opostos, o que implica que a evoluta de γ está contida, locamente, no semiplano, determinado pela reta tangente a γ em t_0 , que não contém a curva γ . $\square$

Como definimos a evoluta de γ usando a função curvatura, só faz sentido falar sobre a evoluta em pontos que não são lightlike. No entanto, existe um conceito mais geral, chamado de cáustica, que estende o conceito de evoluta para todo tipo de ponto, como vemos a seguir.

Em (SALOOM, 2012), (SALOOM; TARI, 2012), foi estudado a **cáustica** de γ que é dada pelo conjunto bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre γ , o qual é dado por

$$C(\gamma) = \{u \in \mathbb{R}_1^2; \exists t \in I \text{ de modo que } d'_u(t) = d''_u(t) = 0\}.$$

Tal conjunto pode ser visto como o lugar geométrico dos centros de pseudo-círculos que tem contato $A_{\geq 2}$ com γ . Para mais detalhes sobre cáusticas e suas singularidades ver, por exemplo, (ARNOL'D, 1972), (ARNOL'D, 1976), (ARNOL'D, 1978b), (ZAKALYUKIN, 1976).

Podemos obter uma parametrização para a cáustica de γ , como segue. Sabemos que $d_u(t) = \langle \gamma(t) - u, \gamma(t) - u \rangle$, então

$$\frac{1}{2} d'_u(t) = \langle \gamma(t) - u, \gamma'(t) \rangle.$$

Assim, d_u é singular em t se, e somente se, $\gamma(t) - u = \lambda \gamma'(t)^\perp$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\frac{1}{2}d_u'' = \langle \gamma(t) - u, \gamma''(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \lambda \langle \gamma'(t)^\perp, \gamma''(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle.$$

Logo, a singularidade de d_u é degenerada ($d_u'(t) = d_u''(t) = 0$) se, e somente se, $\gamma(t) - u = \lambda \gamma'(t)^\perp$ e

$$\lambda \langle \gamma'(t)^\perp, \gamma''(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0. \quad (2.3)$$

Daí segue que a cáustica de γ é dada por

$$C(\gamma) = \{\gamma(t) - \lambda \gamma'(t)^\perp; t \in I \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \text{ satisfaz 2.3}\}.$$

Fora dos pontos lightlike de γ , podemos escrever $\gamma(t) - u = \lambda (\pm \|\gamma'(t)^\perp\|)N(t)$. Assim, a singularidade de d_u é do tipo $A_{\geq 2}$ em t se, e somente se, $u = \gamma(t) - \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$, o que é precisamente a evoluta das componentes spacelike e timelike de γ . Portanto, fora dos pontos lightlike, a cáustica de γ coincide com a evoluta da mesma.

No parágrafo anterior podemos ver o porquê, diferentemente do caso Euclidiano, aparece um sinal “—” na definição da evoluta.

As proposições a seguir nos dão algumas características da cáustica de uma curva no plano Minkowski.

Proposição 2.3.3. ((SALOOM; TARI, 2012))

- (i) A evoluta de uma curva spacelike (resp. timelike) é uma curva timelike (resp. spacelike).
- (ii) A evoluta de uma curva spacelike ou timelike é singular precisamente em seus vértices.
- (iii) Toda curva spacelike ou timelike conexa não intersecta sua evoluta.

Seja Ω o conjunto formado pelas curvas $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ que satisfazem $\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \neq 0$ sempre que $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ (ou seja, os pontos lightlike de γ não são inflexões lightlike).

Proposição 2.3.4. ((SALOOM; TARI, 2012)) Seja $\gamma \in \Omega$. Então:

- (i) Os pontos lightlike de γ são pontos isolados.
- (ii) A cáustica de γ é uma curva regular em um ponto lightlike de γ e tem tangência ordinária (isto é, tem contato de ordem 2) com γ em tais pontos. Além disso, γ e sua cáustica estão contidas, localmente, em lados opostos da reta tangente comum no ponto lightlike.

Para elucidar ainda mais as diferenças entre a evoluta no plano Euclidiano e a evoluta no plano Minkowski, apresentamos um exemplo da evoluta e da evoluta da evoluta de uma elipse.

Exemplo 2.3.5. Considere a elipse $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ parametrizada por $\gamma(t) = (2\cos(t), \sin(t))$, onde $I = (-\pi + \arctan(\frac{1}{2}), \pi + \arctan(\frac{1}{2})]$. Note que

$$\gamma'(t) = (-2\sin(t), \cos(t)), \quad \gamma''(t) = (-2\cos(t), -\sin(t)) \quad \text{e} \quad \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = -4\sin^2(t) + \cos^2(t).$$

Fazendo o estudo do sinal de $-4\sin^2(t) + \cos^2(t)$, concluímos que γ é

- spacelike, se $t \in (-\arctan(\frac{1}{2}), \arctan(\frac{1}{2})) \cup (\pi - \arctan(\frac{1}{2}), \pi + \arctan(\frac{1}{2}))$;
- lightlike, se $t \in \{-\arctan(\frac{1}{2}), \arctan(\frac{1}{2}), \pi - \arctan(\frac{1}{2}), \pi + \arctan(\frac{1}{2})\}$;
- timelike, se $t \in (-\pi + \arctan(\frac{1}{2}), -\arctan(\frac{1}{2})) \cup (\arctan(\frac{1}{2}), \pi - \arctan(\frac{1}{2}))$.

Assim,

$$T(t) = \frac{(-2\sin(t), \cos(t))}{\sqrt{|-4\sin^2(t) + \cos^2(t)|}}, \quad N(t) = \frac{(-1)^w(\cos(t), -2\sin(t))}{\sqrt{|-4\sin^2(t) + \cos^2(t)|}},$$

onde $w = 1$ se γ é spacelike e $w = 2$ se γ é timelike, e

$$\kappa(t) = \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t)^\perp \rangle}{|\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle|^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{|-4\sin^2(t) + \cos^2(t)|^{\frac{3}{2}}}.$$

Fazendo os cálculos para encontrar a expressão da evoluta de γ nos intervalos em que ela é spacelike e nos que ela é timelike, observamos que a expressão obtida é a mesma e é dada por

$$e(t) = \gamma(t) - \frac{1}{\kappa(t)}N(t) = \left(\frac{5}{2}\cos^3(t), 5\sin^3(t) \right).$$

Além disso, como o limite nos pontos lightlike existem e conectam cada componente obtida, podemos estender a definição de $e(t)$ para todo o intervalo I .

Agora encontremos a expressão da evoluta da evoluta de γ . Para isso, denotamos a evoluta de γ obtida anteriormente por $e_1(t)$, ou seja, $e_1(t) = (\frac{5}{2}\cos^3(t), 5\sin^3(t))$. No entanto, para facilitar a escrita, consideramos e_1 definida no intervalo $[0, 2\pi)$.

Note que

$$e_1'(t) = (-\frac{15}{2}\cos^2(t)\sin(t), 15\sin^2(t)\cos(t)),$$

$$e_1''(t) = (15\cos(t)\sin^2(t) - \frac{15}{2}\cos^3(t), 30\sin(t)\cos^2(t) - 15\sin^3(t))$$

e

$$\langle e_1'(t), e_1'(t) \rangle = -\frac{225}{4}\cos^4(t)\sin^2(t) + 225\sin^4(t)\cos^2(t).$$

Estudando o sinal de $-\frac{225}{4}\cos^4(t)\sin^2(t) + 225\sin^4(t)\cos^2(t)$, concluímos que γ é

- spacelike, se $t \in (\arctan(\frac{1}{2}), \pi - \arctan(\frac{1}{2})) \cup (\pi + \arctan(\frac{1}{2}), 2\pi - \arctan(\frac{1}{2})) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$;

Figura 5 – Elipse (azul), sua evoluta (vermelho) e a evoluta de sua evoluta (amarelo).

- lightlike, se $t \in \{0, \arctan(\frac{1}{2}), \frac{\pi}{2}, \pi - \arctan(\frac{1}{2}), \pi, \pi + \arctan(\frac{1}{2}), \frac{3\pi}{2}, 2\pi - \arctan(\frac{1}{2})\}$;
- timelike, se $t \in (0, \arctan(\frac{1}{2})) \cup (\pi - \arctan(\frac{1}{2}), \pi + \arctan(\frac{1}{2})) \cup (2\pi - \arctan(\frac{1}{2}), 2\pi) \setminus \{\pi\}$.

Assim,

$$T(t) = \frac{(-\frac{15}{2} \cos^2(t) \sin(t), 15 \sin^2(t) \cos(t))}{\sqrt{|-\frac{225}{4} \cos^4(t) \sin^2(t) + 225 \sin^4(t) \cos^2(t)|}},$$

$$N(t) = \frac{(-1)^w (15 \sin^2(t) \cos(t), -\frac{15}{2} \cos^2(t) \sin(t))}{\sqrt{|-\frac{225}{4} \cos^4(t) \sin^2(t) + 225 \sin^4(t) \cos^2(t)|}},$$

onde $w = 1$ se e_1 é spacelike e $n = 2$ se e_1 é timelike, e

$$\kappa(t) = \frac{\langle e_1''(t), e_1'(t)^\perp \rangle}{|\langle e_1'(t), e_1'(t) \rangle|^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{225}{2} \cos^2(t) \sin^2(t)}{|-\frac{225}{4} \cos^4(t) \sin^2(t) + 225 \sin^4(t) \cos^2(t)|^{\frac{3}{2}}}.$$

Novamente, fazendo os cálculos para encontrar a expressão da evoluta de e_1 nos intervalos em que ela é spacelike e nos que ela é timelike, observamos que a expressão obtida é a mesma e é dada por

$$e_2(t) = \left(\frac{5}{2} \cos^3(t)(1 + 3 \sin^2(t)) - 30 \sin^4(t) \cos(t), 5 \sin^3(t)(1 + 3 \cos^2(t)) - \frac{15}{4} \cos^4(t) \sin(t) \right).$$

A Figura 5 mostra a curva γ (azul), sua evoluta e_1 (vermelho) e a evoluta e_2 de sua evoluta (amarelo).

Já no caso Euclidiano, a evoluta e a evoluta da evoluta de γ são como esboça a Figura 6.

□

Figura 6 – Elipse (azul), sua evoluta (vermelho) e a evoluta de sua evoluta (amarelo) para o caso Euclidiano.

Note que, neste exemplo, descrevemos a evoluta de uma curva singular apenas tomando o limite da evoluta ao se aproximar da singularidade. Além disso, observamos que tal limite coincide com o ponto de singularidade da curva original. O conceito de evoluta para curvas singulares e a propriedade observada foram obtidos em (FUKUNAGA; TAKAHASHI, 2014).

Observamos que o modo com que escolhemos o referencial $\{T, N\}$ nos permitiu obter a curvatura e, conseqüentemente, a evoluta da curva somente fora dos pontos lightlike. No entanto, em (IZUMIYA; ROMERO FUSTER; TAKAHASHI, 2018), Izumiya, Romero Fuster e Takahashi utilizaram um outro referencial e, a partir dele, puderam definir a evoluta em qualquer ponto da curva (com exceção de suas inflexões).

Nas seções a seguir estudamos o comportamento da cáustica de uma curva regular na vizinhança de pontos especiais, como um vértice ordinário e uma inflexão ordinária.

Nas figuras que aparecem no decorrer do trabalho, as curvas estão representadas de azul e suas evolutas de vermelho, além disso, vértices são representados por bolas, inflexões por quadrados e pontos lightlike por estrelas.

2.4 Evoluta de uma curva em um vértice ordinário

Iniciamos esta seção com um exemplo que ilustra os diferentes tipos de comportamento da evoluta dentro de uma família de curvas.

Exemplo 2.4.1. Seja $\gamma(t) = (t, t^2 + at^4)$, com $a \in \mathbb{R}$. Encontremos a evoluta de γ .

Note que

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = -1 + (2t + 4at^3)^2 = -1 + 4t^2 + 16at^4 + 16a^2t^6.$$

Aplicando em $t = 0$, concluímos que, localmente, a curva γ é timelike. Assim,

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 - 4t^2 - 16at^4 - 16a^2t^6}}(1, 2t + 4at^3), \\ N(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 - 4t^2 - 16at^4 - 16a^2t^6}}(2t + 4at^3, 1) \quad \text{e} \\ \kappa(t) &= \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t)^\perp \rangle}{|\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle|^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 + 12at^2}{(1 - 4t^2 - 16at^4 - 16a^2t^6)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Note que $\kappa(0) = 2 > 0$. Derivando a função curvatura obtida acima, temos

$$\kappa'(t) = \frac{24(a+1)t + 240at^3 + 1056a^2t^5 + 1344a^3t^7}{(1 - 4t^2 - 16at^4 - 16a^2t^6)^{\frac{5}{2}}},$$

de onde obtemos $\kappa'(0) = 0$. Derivando novamente a função curvatura e avaliando em $t = 0$, obtemos $\kappa''(0) = 24(a+1)$, cujo valor é positivo se $a > -1$ e negativo se $a < -1$.

Portanto, se $a \neq -1$, então $t_0 = 0$ é um vértice ordinário de γ . Além disso, a evoluta de γ é dada por

$$e(t) = \gamma(t) - \frac{1}{\kappa(t)}N(t) = \left(\frac{4(a+1)t^3 + 24at^5 + 48a^2t^7 + 32a^3t^9}{1 + 6at^2}, \frac{-1 + 6t^2 + 30at^4 + 28a^2t^6}{2 + 12at^2} \right),$$

cujo comportamento é dado na Figura 7 esquerda se $a < -1$ ou na Figura 7 direita se $a > -1$. $\square$

O comportamento da evoluta neste exemplo não é algo específico do mesmo. Tais comportamentos ocorrem para qualquer curva regular em um vértice ordinário como vemos na Proposição 2.4.2 a seguir.

Figura 7 – Comportamento da evoluta em um vértice ordinário.

Proposição 2.4.2. Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva suave e regular. Suponha que $t_0 \in I$ é um vértice ordinário de γ que não é uma inflexão, então, localmente em t_0 , a configuração de γ e sua evoluta é como na Figura 7 esquerda se, e somente se, $\kappa(t_0)\kappa''(t_0) < 0$ ou como na Figura 7 direita se, e somente se, $\kappa(t_0)\kappa''(t_0) > 0$.

Demonstração. Considere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco com um vértice ordinário que não é inflexão em t_0 .

Sabemos que a evoluta de γ é dada por $e(t) = \gamma(t) - \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$. Derivando tal parametrização da evoluta, obtemos

$$e'(t) = \frac{\kappa'(t)}{(\kappa(t))^2}N(t).$$

Como t_0 é um vértice, segue que $\kappa'(t_0) = 0$ e então, $e'(t_0) = 0$, ou seja, a evoluta é singular em t_0 . Além disso, derivando novamente a parametrização da evoluta de γ , obtemos

$$e'' = \frac{\kappa'}{\kappa}T + \frac{\kappa''\kappa - 2(\kappa')^2}{(\kappa)^3}N \quad \text{e}$$

$$e''' = \frac{2\kappa\kappa'' - 3(\kappa')^2}{(\kappa)^2}T + \frac{(\kappa)^4\kappa' + (\kappa)^2\kappa''' - 6\kappa\kappa'\kappa'' + 6(\kappa')^3}{(\kappa)^4}N,$$

ambas expressões avaliadas em t . Avaliando em t_0 , temos

$$e''(t_0) = \frac{\kappa''(t_0)}{(\kappa(t_0))^2}N(t_0) \quad \text{e} \quad e'''(t_0) = \frac{2\kappa''(t_0)}{\kappa(t_0)}T(t_0) + \frac{\kappa'''(t_0)}{(\kappa(t_0))^2}N(t_0).$$

Logo, no sistema de coordenadas com base $\{T(t_0), N(t_0)\}$, podemos escrever o 3-jato de $(e(t) - e(t_0))$ em t_0 na forma

$$j^3(e(t) - e(t_0)) = \left(\frac{\kappa''(t_0)}{3\kappa(t_0)}(t - t_0)^3, \frac{\kappa''(t_0)}{2(\kappa(t_0))^2}(t - t_0)^2 + \frac{\kappa'''(t_0)}{6(\kappa(t_0))^2}(t - t_0)^3 \right).$$

Assim, podemos notar que se $\kappa''(t_0) > 0$ a cúspide da evoluta está contida no semiplano superior (isto é, que contém $N(t_0)$) do plano gerado por $\{T(t_0), N(t_0)\}$ e que se $\kappa''(t_0) < 0$ ela estará contida no semiplano inferior do plano gerado por $\{T(t_0), N(t_0)\}$.

Sabemos que $T'(t) = \kappa(t)N(t)$, ou seja, $\gamma''(t) = \kappa(t)N(t)$. Logo, se $\kappa(t) > 0$, então $N(t)$ e $\gamma''(t)$ têm o mesmo sentido e se $\kappa(t) < 0$, então $N(t)$ e $\gamma''(t)$ têm sentidos opostos.

Portanto, se $\kappa(t_0)\kappa''(t_0) > 0$, então a curva e a cúspide da evoluta são como na Figura 7 direita e, se $\kappa(t_0)\kappa''(t_0) < 0$, então a curva e a cúspide da evoluta são como na Figura 7 esquerda. $\square$

Para distinguir os diferentes tipos de comportamento da evoluta em um vértice ordinário fazemos a seguinte definição.

Definição 2.4.3. Um vértice ordinário $t_0 \in I$ é dito:

- **vértice inward**, se as configurações da curva e de sua evoluta em t_0 são como na Figura 7 direita, ou seja, $\kappa(t_0)\kappa''(t_0) > 0$.
- **vértice outward**, se as configurações da curva e de sua evoluta em t_0 são como na Figura 7 esquerda, ou seja, $\kappa(t_0)\kappa''(t_0) < 0$.

Observação 2.4.4. No caso Euclidiano, o conceito de vértice ordinário inward e outward foi introduzido por Salarinoghabi e Tari em (SALARINOUGHABI; TARI, 2017), como mostra a Figura 8. A principal diferença com o caso Minkowski é que, no caso Euclidiano, a cúspide da evoluta sempre está contida no semiplano determinado pela reta tangente à curva no vértice que contém a curva.

Figura 8 – Caso Euclidiano: vértice inward (esquerda) e vértice outward (direita).

2.5 Evoluta de uma curva em uma inflexão ordinária

Iniciamos esta seção com um exemplo que ilustra o comportamento da evoluta de uma curva regular em uma inflexão ordinária.

Exemplo 2.5.1. Considere a curva parametrizada por $\gamma(t) = (t, t^3)$. Temos

$$\gamma'(t) = (1, 3t^2), \quad \gamma''(t) = (0, 6t) \quad \text{e} \quad \gamma'(t)^\perp = (3t^2, 1).$$

Note que $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = -1 + 9t^4$. Assim, para t suficientemente próximo de $t_0 = 0$, temos que γ é timelike. Logo,

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1-9t^4}}(1, 3t^2), \quad N(t) = \frac{1}{\sqrt{1-9t^4}}(3t^2, 1) \quad \text{e} \quad \kappa(t) = \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t)^\perp \rangle}{\sqrt{1-9t^4}^3} = \frac{6t}{\sqrt{1-9t^4}^3}.$$

De onde obtemos a expressão da evoluta de γ :

$$e(t) = \gamma(t) - \frac{1}{\kappa(t)}N(t) = \left(\frac{t+9t^5}{2}, \frac{15t^4-1}{6t} \right),$$

cujo traço é dado pela Figura 9. □

Proposição 2.5.2. Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva suave e regular. Suponha que γ tem uma inflexão ordinária em $t_0 \in I$, então a evoluta de γ tende ao infinito assintoticamente ao longo da normal à γ em t_0 e pode ser modelada por $xy = 1$ em algum sistema de coordenadas. As duas componentes da evoluta estão contidas nos dois quadrantes determinados pelas retas tangentes e normal a γ em t_0 que não contém a curva γ (ver Figura 9).

Figura 9 – Evoluta em uma inflexão ordinária.

Demonstração. Consideremos γ uma curva timelike. Fazendo mudanças de coordenadas, se necessário, podemos supor $t_0 = 0$, $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma'(0) = (1, 0)$ e $\gamma(t) = (t, f(t))$.

Estendendo a função f em série de Taylor em torno de $t_0 = 0$, podemos escrever $f(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + O(t^4)$, onde $c_0 = f(0)$ e $c_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$, para $i = 1, 2, 3$.

Como $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma'(0) = (1, 0)$, segue que $c_0 = c_1 = 0$. Além disso, temos

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \quad \text{e} \quad \gamma''(t) = (0, f''(t)).$$

Note que $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = -1 + (f'(t))^2$ e como $f'(0) = 0$, segue que, para t suficientemente próximo de $t_0 = 0$, a curva γ é timelike.

Logo,

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - (f'(t))^2}}(1, f'(t)) \quad \text{e} \quad N(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - (f'(t))^2}}(f'(t), 1).$$

Além disso, temos

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{1 - (f'(t))^2}^3} \quad \text{e} \quad \kappa'(t) = \frac{f'''(t)(1 - (f'(t))^2) + 3f'(t)(f''(t))^2}{\sqrt{1 - (f'(t))^2}^5}.$$

Como $t_0 = 0$ é uma inflexão ordinária de γ , temos $\kappa(0) = 0$ e $\kappa'(0) \neq 0$, ou seja, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) \neq 0$, ou ainda, $c_2 = 0$ e $c_3 \neq 0$. De onde concluímos que $f(t) = c_3t^3 + O(t^4)$, com $c_3 \neq 0$.

Assim, a expressão da evoluta é

$$e(t) = \gamma(t) - \frac{1}{\kappa(t)}N(t) = (t, f(t)) - \frac{1 - (f'(t))^2}{f''(t)}(f'(t), 1) = \left(\frac{1}{2}t + O(t^2), \frac{1}{6c_3t}(-1 + O(t)) \right),$$

a qual pode ser modelada por $xy = 1$ em algum sistema de coordenadas e cujo comportamento é como mostra a Figura 9.

O caso em que γ é spacelike segue de modo análogo tomando $\gamma(t) = (g(t), t)$. □

Figura 10 – Caso Euclidiano: evoluta em uma inflexão ordinária.

Observação 2.5.3. No caso Euclidiano estudado em ([SALARINOUGHABI; TARI, 2017](#)), as duas componentes da evoluta estão contidas nos dois quadrantes determinados pelas retas tangente e normal à curva na inflexão que contém a curva, como mostra a Figura 10.

DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CURVAS PLANAS: ASPECTOS GERAIS

Em diversas áreas da matemática, o interesse em classificar os objetos com que se trabalha é notório. Tal classificação sempre é feita estabelecendo o tipo de propriedade que queremos preservar (relação de equivalência), ou seja, objetos que possuem a mesma propriedade devem estar na mesma “classe”. Dessa forma, se estivermos interessados em estudar tais objetos com relação a alguma outra propriedade que seja invariante em relação a primeira, basta estudarmos um representante de cada classe. Por exemplo, na Álgebra Linear, é de interesse classificar espaços vetoriais por meio de isomorfismos e na Topologia, classificar espaços topológicos por meio de homeomorfismos.

Seguindo esta linha, David, em (DAVID, 1983), estudou curvas no plano Euclidiano que provinham da projeção de uma curva no espaço. O interesse dele era classificar as singularidades de tais curvas. Para isso ele utilizou a $\mathcal{A}$ -equivalência, a qual é constituída por meio de difeomorfismos.

O uso de difeomorfismos (e, conseqüentemente, do grupo $\mathcal{A}$) é muito importante quando queremos entender o comportamento de uma determinada curva em torno de uma singularidade e como ela se bifurca ao deformarmos. Por exemplo, um $\mathcal{A}$ -modelo para a curva cúspide é (t^2, t^3) e uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal desta singularidade é $(t^2, t^3 + ut)$ (ver (BRUCE; GAFFNEY, 1982)), ver Figura 11.

Figura 11 – Deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de uma cúspide ordinária.

No entanto, existem outras características geométricas de curvas que não são preservadas por difeomorfismos, como, por exemplo, seus vértices, inflexões e pontos lightlike.

Com o intuito de levar em conta as singularidades da curva juntamente com suas inflexões, em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008) Nuño Ballesteros e Dias propuseram um método para encontrar modelos de singularidades de curvas planas assim como seu contato com retas em um ponto singular da curva (ou seja, pontos de inflexão concentrados no ponto singular). Eles fizeram isso classificando germes de diagramas divergentes da forma $(f, \gamma) : \mathbb{R}, 0 \leftarrow \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ a menos de difeomorfismos. O problema nesse tipo de classificação é que não temos um teorema de determinação finita, então os cálculos tiveram que ser feitos de forma “braçal”, o que foi possível ser realizado devido às baixas dimensões.

Uma abordagem alternativa, sem o uso de diagramas divergentes foi proposto em (OSET SINHA; TARI, 2013), onde este estudo é feito através da classificação de submersões por meio de difeomorfismos na fonte que preservam um $\mathcal{A}$ -modelo da singularidade da curva. Neste caso, o grupo que está agindo é um subgrupo geométrico de Damon e, consequentemente, as ferramentas da Teoria de Singularidades podem ser utilizadas. Através deste método, Oset Sinha e Tari puderam recuperar todos os resultados de (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008) sobre a $\mathcal{A}_h$ -classificação para mono-germes. Já para o caso de multi-germes, podemos ter várias $\mathcal{A}_h$ -classes que não podem ser distinguidas pelo número de intersecção de cada ramo com sua reta tangente. Para tais casos, a classificação feita em (OSET SINHA; TARI, 2013) não nos permite recuperar os resultados em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008).

Em (WALL, 2013), Wall abordou diferentes definições possíveis de uma “equivalência flat”, ou seja, uma equivalência entre curvas que leva em consideração não somente suas singularidades, mas também suas inflexões. Tais definições incluem tanto a abordada em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008) quanto em (OSET SINHA; TARI, 2013), mas foi utilizando uma nova definição por meio de difeomorfismos que levam cone tangente em cone tangente, que Wall classificou todos os germes e multi-germes de curvas de codimensão ≤ 2 . Para isso ele estudou classificações relativas e obteve fórmulas para os espaços tangentes às órbitas e suas codimensões em termos de alguns invariantes.

Os diversos métodos propostos em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008), (OSET SINHA; TARI, 2013) e (WALL, 2013) funcionam bem com uma única curva. Portanto, encontrar uma teoria que explique as deformações da singularidade de uma curva em uma família, juntamente com as mudanças em sua geometria ainda é um problema em aberto.

Entretanto, em (SALARINOUGHABI, 2016) e (SALARINOUGHABI; TARI, 2017), foi proposto um método para estudar as deformações de uma singularidade juntamente com sua geometria. Tal método foi chamado de FRS-deformações de curvas planas. O problema de tal método é a necessidade de uma abordagem caso a caso.

Seguindo (SALARINOUGHABI; TARI, 2017), nosso objetivo é apresentar um método similar para estudar a geometria de deformações de curvas planas com uma possível singularidade no plano Minkowski, o qual denotamos por **FRLS-deformações** (F de Flat, R de Round, L de Lightlike e S de Singular). Quando a curva for regular, denotaremos tais deformações por **FRL-deformações** e quando a curva for regular e não for lightlike, por **FR-deformações**.

Neste trabalho, nos referimos a uma *estratificação* como uma segmentação em componentes disjuntas que são variedades suaves.

Definição 3.0.1. Considere dois germes de deformações a m -parâmetros γ_s e α_r de uma curva plana e considere o espaço de parâmetros de γ_s munido de uma estratificação S_1 , de modo que se s_1 e s_2 pertencem ao mesmo estrato, então γ_{s_1} e γ_{s_2}

- (i) são difeomorfas;
- (ii) têm o mesmo número de inflexões, vértices e pontos lightlike;
- (iii) têm a mesma posição relativa de suas singularidades, pontos de auto-intersecção, inflexão, vértices e pontos lightlike.

Considere também o espaço de parâmetros de α_r munido com outra estratificação S_2 com as mesmas propriedades. Dizemos que γ_s e α_r são **FRLS-equivalentes** se existe um germe de homeomorfismo $k : \mathbb{R}^m, (S_1, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m, (S_2, 0)$ tal que γ_s e $\alpha_{k(s)}$ satisfazem (i)-(iii).

Basicamente, FRLS-equivalência significa que a configuração instantânea das curvas γ_s e $\alpha_{k(s)}$ (incluindo suas singularidades, inflexões, vértices, pontos lightlike e suas cáusticas) são as mesmas.

Podemos definir a noção de FRLS-equivalência de deformações de uma curva plana com números distintos de parâmetros. Dizemos que uma deformação a m -parâmetros γ_s e uma deformação a n -parâmetros α_r (digamos que $n \geq m$) de uma curva plana são FRLS-equivalentes se $\tilde{\gamma}_s$ e α_r são FRLS-equivalentes no sentido definido acima, onde $\tilde{\gamma}_s$ é a deformação a n -parâmetros dada por $\tilde{\gamma}_s(t, s_1, \dots, s_m, \tilde{s}_{m+1}, \dots, \tilde{s}_n) = \gamma_s(t, s_1, \dots, s_m)$.

Neste trabalho, estudamos deformações de curvas regulares e singulares. Os casos singulares abordados são *cúspide ordinária* (isto é, quando a curva é $\mathcal{A}$ -equivalente à (t^2, t^3)), *cúspide ordinária lightlike* (isto é, quando a curva é $\mathcal{A}$ -equivalente à (t^2, t^3) e a direção tangente limite é uma direção lightlike) e *cúspide ramphoid* (isto é, quando a curva é $\mathcal{A}$ -equivalente à (t^2, t^5)).

Em cada caso que abordamos, as estratificações do espaço de parâmetros são obtidas a partir de uma estratificação no espaço de certos jatos ou multi-jatos. A estratificação do espaço de jatos ou multi-jatos é dada pelas equações que determinam cada fenômeno, como inflexões (I), inflexões de ordem n ($I(n)$), vértices (V), vértices de ordem n ($V(n)$), pontos lightlike (L), inflexões lightlike (IL), inflexões lightlike de ordem n ($IL(n)$), cúspide (C), cúspide lightlike (CL) e cúspide ramphoid (CR), com $n \geq 2$. Para obter tais estratificações, utilizamos a aplicação de Monge-Taylor, definida como segue.

Considere $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ uma curva plana. Para cada ponto t_0 no domínio de γ podemos escrever

$$\begin{aligned}\gamma(t) = & (\alpha(t_0) + \alpha'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}\alpha''(t_0)(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\alpha^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \cdots, \\ & \beta(t_0) + \beta'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}\beta''(t_0)(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\beta^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \cdots).\end{aligned}$$

No entanto, em cada ponto t_0 , podemos fazer uma translação e tomar $\gamma(t_0) = (\alpha(t_0), \beta(t_0)) = (0, 0)$. Assim, definimos a **aplicação de Monge-Taylor** de modo geral como sendo a aplicação $j^k\phi_\gamma: \mathbb{R}, 0 \rightarrow J^k(1, 2)$ dada por $j^k\phi_\gamma(t) = (j_t^k\alpha, j_t^k\beta)$. Identificando $J^k(1, 2)$ com $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, escrevemos

$$j^k\phi_\gamma(t) = \left(\alpha'(t), \frac{1}{2!}\alpha''(t), \dots, \frac{1}{k!}\alpha^{(k)}(t); \beta'(t), \frac{1}{2!}\beta''(t), \dots, \frac{1}{k!}\beta^{(k)}(t) \right). \quad (3.1)$$

Podemos simplificar a aplicação $j^k\phi_\gamma$ dependendo do caso estudado. Consideramos os seguintes casos.

- (1) Se γ é regular sem pontos lightlike, então podemos fazer mudanças de coordenadas e em cada ponto escrevê-la, em algum sistema de coordenadas, localmente na origem como gráfico de uma função, ou seja, $\gamma(t) = (t, \beta(t))$, com $\beta'(0) = 0$, para o caso timelike e $\gamma(t) = (\alpha(t), t)$, com $\alpha'(0) = 0$, para o caso spacelike. Portanto, a aplicação de Monge-Taylor pode ser reduzida a seguinte aplicação $j^k\phi_\gamma: \mathbb{R}, 0 \rightarrow J^k(1, 1)$ dada por

$$\begin{aligned}j^k\phi_\gamma(t) &= \left(\frac{1}{2!}\beta''(t), \dots, \frac{1}{k!}\beta^{(k)}(t) \right), \text{ se } \gamma \text{ for timelike,} \\ j^k\phi_\gamma(t) &= \left(\frac{1}{2!}\alpha''(t), \dots, \frac{1}{k!}\alpha^{(k)}(t) \right), \text{ se } \gamma \text{ for spacelike.}\end{aligned} \quad (3.2)$$

- (2) Se γ é regular e tem um ponto lightlike, então, no ponto lightlike podemos escrever γ , em algum sistema de coordenadas, localmente como gráfico de uma função, ou seja, $\gamma(t) = (t, \beta(t))$, com $\beta'(0) = \pm 1$. Assim, nesse caso, a aplicação de Monge-Taylor fica da forma $j^k\phi_\gamma: \mathbb{R}, 0 \rightarrow J^k(1, 1)$ dada por

$$j^k\phi_\gamma(t) = \left(\beta'(t), \frac{1}{2!}\beta''(t), \dots, \frac{1}{k!}\beta^{(k)}(t) \right). \quad (3.3)$$

- (3) Se γ é singular, então a aplicação de Monge-Taylor é tomada como em (3.1).

A estratificação no espaço dos bi-jatos ${}_2J^k(1, 2) \subset J^k(1, 2) \times J^k(1, 2)$ (ver (IZUMIYA *et al.*, 2016), p. 47) é utilizada quando há a presença de pontos de auto-intersecção, em que devemos considerar dois ramos da curva ao mesmo tempo. Dessa forma, o valor da curva no ponto de auto-intersecção é importante. Assim, definimos a **aplicação bi-jato de Monge-Taylor** como sendo a

aplicação

${}_2j^k\phi_\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0, 0) \rightarrow {}_2J^k(1, 2)$ dada por

$$\begin{aligned} {}_2j^k\phi_\gamma(t_1, t_2) = & \left((\alpha(t_1), \alpha'(t_1), \dots, \frac{1}{k!}\alpha^{(k)}(t_1); \beta(t_1), \beta'(t_1), \dots, \frac{1}{k!}\beta^{(k)}(t_1)), \right. \\ & \left. (\alpha(t_2), \alpha'(t_2), \dots, \frac{1}{k!}\alpha^{(k)}(t_2); \beta(t_2), \beta'(t_2), \dots, \frac{1}{k!}\beta^{(k)}(t_2)) \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

De modo análogo podemos definir as **aplicações tri-jato, quadri-jato, ..., n-jato de Monge-Taylor**.

Definição 3.0.2. Dizemos que um germe de uma deformação a m -parâmetros γ_s de uma curva plana $\gamma = \gamma_0$ é uma deformação **FRLS-genérica**, se a família de aplicações de Monge-Taylor induzida por γ_s é transversal a todos os estratos do espaço de jatos no ponto $j^k\phi_{\gamma_0}(0)$.

Em cada um dos casos que abordaremos, redefiniremos o conceito de deformações FRLS-genéricas analisando quais os estratos envolvidos e as condições para garantir a transversalidade da família de aplicações de Monge-Taylor com relação a tais estratos. Além disso, mostraremos também, em cada caso, que quaisquer duas deformações FRLS-genéricas a m -parâmetros são FRLS-equivalentes. Isso nos permite obter um modelo de uma FRLS-deformação da singularidade da curva plana.

Consideramos a estratificação no espaço de jatos e multi-jatos e a aplicação de Monge-Taylor pois, uma vez garantida a transversalidade com relação a uma determinada estratificação, então ao deformarmos, localmente, tal transversalidade é preservada, garantindo a genericidade da família nos pontos especiais que aparecem ao deformar a curva inicial.

Cada fenômeno é expresso, em cada um dos casos, por equações no espaço de jatos, ou seja, cada fenômeno define um conjunto algébrico V no espaço de jatos, o qual chamamos de **estrato**. Assim, dizemos que um determinado fenômeno tem **codimensão m** , se ele define um conjunto algébrico V de codimensão $m + 1$ no espaço de jatos. A proposição a seguir lista todos os fenômenos de codimensão ≤ 2 .

Proposição 3.0.3. Todos os fenômenos de codimensão ≤ 2 que ocorrem em curvas no plano Minkowski são dados na tabela abaixo juntamente com suas codimensões.

Demonstração. Seja γ uma curva em $\mathbb{R}_1^2$ regular e timelike (o caso spacelike segue de modo análogo). Como vimos anteriormente, γ pode ser escrita na forma $\gamma(t) = (t, \beta(t))$, com $\beta'(0) = 0$, e sua aplicação de Monge-Taylor como em (3.2). Denotando $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ as coordenadas em $J^k(1, 1)$ e analisando os numeradores de κ e κ' , obtemos as equações que correspondem a cada estrato: $I : a_2 = 0$; $I(2) : a_2 = a_3 = 0$; $I(3) : a_2 = a_3 = a_4 = 0$; $V : a_3(1 - a_1^2) + 2a_1a_2^2 = 0$; $V(2) : a_3(1 - a_1^2) + 2a_1a_2^2 = 0, a_4(1 - a_1^2) + 2a_1a_2a_3 + a_2^2 = 0$ e $V(3) : a_3(1 - a_1^2) + 2a_1a_2^2 = 0, a_4(1 - a_1^2) + 2a_1a_2a_3 + a_2^2 = 0, 5a_5(1 - a_1^2) + 4a_1a_2a_4 + 13a_2^2a_3 + 6a_1a_3^2 = 0$. A partir das equações acima obtemos a codimensão de cada estrato de inflexões e vértices.

Tabela 1 – Fenômenos de codimensão ≤ 2

Fenômeno	Codimensão
I	0
$I(2)$	1
$I(3)$	2
V	0
$V(2)$	1
$V(3)$	2
L	0
IL	1
$IL(2)$	2
C	1
CL	2
CR	2

Observamos que os estratos de ordem maior possuem outras equações e, conseqüentemente, têm codimensão maior.

Se γ é uma curva em $\mathbb{R}_1^2$ regular com um ponto lightlike em $t_0 = 0$, então podemos escrevê-la da forma $\gamma(t) = (t, \beta(t))$, com $\beta'(0) = \pm 1$, e sua aplicação de Monge-Taylor como em (3.3). Denotando $j^k \phi_\gamma(t) = (a_1, \dots, a_k)$ e analisando o numerador de κ , obtemos as equações de cada estrato: $L : a_1 = \pm 1$, $IL : a_1 = \pm 1, a_2 = 0$ e $IL(2) : a_1 = \pm 1, a_2 = a_3 = 0$. Logo, a codimensão de cada um desses estratos é dada na tabela. Os estratos de ordem maior necessitam de outras equações, o que implica que eles têm codimensão maior.

Se γ é uma curva em $\mathbb{R}_1^2$ singular em $t_0 = 0$, então podemos escrevê-la na forma

$$\gamma(t) = (a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots, b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \dots).$$

Suponhamos $\gamma''(0) = 2(a_2, b_2) \neq (0, 0)$. Tomamos $v = (b_2, a_2)$ um vetor ortogonal a $\gamma''(0)$. Assim, a família de funções altura sobre γ ao longo de v é dada por

$$\begin{aligned} h_\gamma(t) &= \langle \gamma(t), v \rangle = -b_2(a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots) + a_2(b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \dots) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) t^3 + (a_2 b_4 - a_4 b_2) t^4 + (a_2 b_5 - a_5 b_2) t^5 + (a_2 b_6 - a_6 b_2) t^6 + \dots \end{aligned}$$

Analisando os primeiros termos de h_γ e utilizando a $\mathcal{A}_h$ -equivalência, podemos concluir que:

Se $a_2 b_3 - a_3 b_2 \neq 0$, então a função altura possui uma singularidade A_2 e, conseqüentemente, γ é $\mathcal{A}_h$ -equivalente a (t^2, t^3) .

Se $a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0$ e $a_2 b_4 - a_4 b_2 \neq 0$, então h_γ tem uma singularidade A_3 e, conseqüentemente, γ é $\mathcal{A}_h$ -equivalente a $(t^2, t^4 + t^5)$.

Se $a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0$ e $a_2 b_5 - a_5 b_2 \neq 0$, então a função altura tem uma singularidade A_4 e, conseqüentemente, γ é $\mathcal{A}_h$ -equivalente a $(t^2, t^5 + t^6)$ ou a (t^2, t^5) .

Sabemos que γ é $\mathcal{A}_h$ -equivalente a $(t^2, t^5 + t^6)$ (para maiores detalhes, ver Observação 2.12 e Teorema 3.3 de (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008)) se

$$\begin{cases} 2a_2(a_2b_6 - a_6b_2) - 5a_3(a_2b_5 - a_5b_2) \neq 0, \text{ para o caso } a_2 \neq 0 \\ 2b_2(a_2b_6 - a_6b_2) - 5b_3(a_2b_5 - a_5b_2) \neq 0, \text{ para o caso } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

e γ é $\mathcal{A}_h$ -equivalente a (t^2, t^5) se

$$\begin{cases} 2a_2(a_2b_6 - a_6b_2) - 5a_3(a_2b_5 - a_5b_2) = 0, \text{ para o caso } a_2 \neq 0 \\ 2b_2(a_2b_6 - a_6b_2) - 5b_3(a_2b_5 - a_5b_2) = 0, \text{ para o caso } b_2 \neq 0 \end{cases}.$$

Logo, obtemos as equações que definem os estratos das $\mathcal{A}_h$ -classes das cúspides ordinária (t^2, t^3) e ramphoids $(t^2, t^4 + t^5)$, $(t^2, t^5 + t^6)$, (t^2, t^5) . A partir de tais equações podemos concluir a codimensão de cada fenômeno singular:

$\mathcal{A}_h$ -modelo	Codimensão do fenômeno
(t^2, t^3)	1
$(t^2, t^4 + t^5)$	2
$(t^2, t^5 + t^6)$	3
(t^2, t^5)	4

Além disso, singularidades mais degeneradas de γ precisam de novas equações, o que aumenta a codimensão de tais fenômenos.

Como nosso interesse está em estudar fenômenos de codimensão menor ou igual a 2, então os únicos estratos que abordaremos são o estrato de cúspide C (dado pelas equações $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$), o estrato de cúspide lightlike CL (dado pelas equações $a_1 = a_2 = 0$ e $a_2 \pm b_2 = 0$) e o estrato de cúspide ramphoid $\mathcal{A}_h$ -equivalente a $(t^2, t^4 + t^5)$ CR (dado pelas equações $a_1 = a_2 = 0$ e $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$). No entanto, como os outros estratos de cúspide ramphoid, incluindo os lightlike, possuem codimensão maior que 2, então, no que segue, nos referimos a tal estrato simplesmente por estrato de cúspide ramphoid. $\square$

Neste trabalho, estudamos as FRLS-deformações de fenômenos que acontecem genericamente em famílias de até dois parâmetros, ou seja, com codimensão menor ou igual a 2.

Conforme Exemplo 2.3.1, vimos que as singularidades da função distância ao quadrado podem depender do centro do pseudo-círculo que estamos considerando. No entanto, observamos que poderíamos definir vértices em um ponto lightlike como sendo um ponto para o qual existe um pseudo-círculo tangente à curva com contato $A_{\geq 3}$. De todo modo, tal ponto seria, claramente, uma inflexão lightlike. Neste trabalho, consideramos apenas vértices fora de pontos lightlike.

Ao definirmos o estrato de vértices, analisamos o numerador de κ' e tomamos o fecho de tal conjunto. Dessa forma, ao estudarmos as deformações em um ponto lightlike as codimensões dos estratos de vértices podem ser menores, uma vez que o estrato de vértice pode ser singular em tais pontos.

O Teorema 3.0.4 a seguir mostra que a relação entre vértices e inflexões lightlike se reflete em seus estratos.

Teorema 3.0.4. Em $J^n(1, 2)$, o estrato de inflexões lightlike de ordem k está contido no estrato de vértices de ordem $2k$, ou seja, $IL(k) \subset V(2k)$, para um inteiro $k \geq 1$. Além disso, $2k$ é o maior inteiro com tal propriedade, ou seja, $IL(k) \subset V(2k) \setminus V(2k+1)$.

Demonstração. Seja γ uma curva regular com uma inflexão lightlike de ordem k em t_0 . Fazendo mudanças de coordenadas, podemos supor $\gamma(t) = (t, f(t))$. Considere γ_s uma deformação a m -parâmetros de γ , a qual podemos escrever na forma $\gamma_s(t) = (t, f_s(t))$, e $g_s(t) = f_s'''(t)(1 - f_s'(t)^2) + 3f_s'(t)f_s''(t)^2$, cujo os zeros de multiplicidade n são vértices de ordem n de γ , já que tal equação corresponde ao numerador da derivada da função curvatura de γ . Logo, os estratos de inflexões lightlike de ordem k ($IL(k)$) e de vértices de ordem $2k$ ($V(2k)$) são dados pelas seguintes equações:

$$IL(k) : \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{k+1} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad V(2k) : \begin{cases} g_s = 0 \\ g_s' = 0 \\ \vdots \\ g_s^{(2k-1)} = 0 \end{cases}.$$

Mostremos por indução finita que $IL(k) \subset V(2k)$, para $k \geq 1$.

Primeiramente mostremos para $k = 1$. Neste caso, o estrato de inflexões lightlike é dado por $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$, enquanto que o estrato de vértices de ordem 2 é dado por $g_s = 0$ e $g_s' = 0$, isto é, $a_3(1 - a_1^2) + 2a_1a_2^2 = 0$ e $a_4(1 - a_1^2) + 2a_1a_2a_3 + a_2^3 = 0$. Claramente um ponto que satisfaz $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$ também satisfaz as equações de $V(2)$.

Suponhamos que $IL(k) \subset V(2k)$ e mostremos que $IL(k+1) \subset V(2(k+1))$.

Assumimos que $a_1 = 1$ e $a_2 = \dots = a_{k+2} = 0$ e queremos provar que $g_s = \dots = g_s^{(2k+1)} = 0$. Note que $IL(k+1) \subset IL(k) \subset V(2k)$ devido a hipótese de indução. Assim, as equações $g_s = 0, \dots, g_s^{(2k-1)} = 0$ são satisfeitas. Portanto, basta mostrar que $g_s^{(2k)} = 0$ e $g_s^{(2k+1)} = 0$.

Derivando g_s sucessivas vezes obtemos $g_s^{(n)} = f_s^{(n+3)}$

$$- \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_s^{(i+3)} \left(\sum_{l=0}^{n-i} \binom{n-i}{l} f_s^{(n-i-l+1)} f_s^{(l+1)} \right) + 3 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f_s^{(n-j+1)} \left(\sum_{l=0}^j \binom{j}{l} f_s^{(j-l+2)} f_s^{(l+2)} \right),$$

 ou ainda,

$$\begin{aligned} g_s^{(n)} &= (n+3)!a_{n+3} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (i+3)!a_{i+3} \left(\sum_{l=0}^{n-i} \binom{n-i}{l} (n-i-l+1)!(l+1)!a_{n-i-l+1}a_{l+1} \right) \\ &\quad + 3 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (n-j+1)!a_{n-j+1} \left(\sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (j-l+2)!(l+2)!a_{j-l+2}a_{l+2} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tomando $n = 2k$ na equação (3.5), escrevemos $g_s^{(2k)} = (2k+3)!a_{2k+3} - M + S$, onde

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (i+3)!a_{i+3} \left(\sum_{l=0}^{2k-i} \binom{2k-i}{l} (2k-i-l+1)!(l+1)!a_{2k-i-l+1}a_{l+1} \right) \\ S &= 3 \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (2k-j+1)!a_{2k-j+1} \left(\sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (j-l+2)!(l+2)!a_{j-l+2}a_{l+2} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Analisemos primeiramente os termos não nulos de S . Neste caso, o termo a_{2k-j+1} é nulo para $2 \leq 2k-j+1 \leq k+2$. Assim, resta-nos verificar para $2k-j+1 = 1$ e $2k-j+1 \geq k+3$, ou seja, para $j = 2k$ e $j \leq k-2$.

Para $j = 2k$, o termo a_{2k-l+2} se anula quando $2 \leq 2k-l+2 \leq k+2$, ou seja, quando $k \leq l \leq 2k$. Já o termo a_{l+2} se anula quando $2 \leq l+2 \leq k+2$, ou seja, quando $0 \leq l \leq k$. Portanto, neste caso, todos os termos são nulos.

Para $j \leq k-2$, o termo a_{j-l+2} se anula quando $2 \leq j-l+2 \leq k+2$, ou seja, quando $0 \leq l \leq j$. Portanto, neste caso, todos os termos são nulos.

Como em todos os casos abordados os termos são todos nulos, temos $S = 0$.

Agora analisemos os termos em M . O termo a_{i+3} é nulo para $2 \leq i+3 \leq k+2$, isto é, para $0 \leq i \leq k-1$. Logo, resta-nos o caso $i \geq k$. Neste caso, o termo a_{l+1} é nulo para $2 \leq l+1 \leq k+2$, ou seja, para $1 \leq l \leq k+1$. No entanto, l varia entre 0 e $2k-i \leq k$. Logo, falta verificar o caso $l = 0$. Se $l = 0$, então o termo $a_{2k-i-l+1}$ se anula quando $2 \leq 2k-i+1 \leq k+2$, ou seja, quando $k-1 \leq i \leq 2k-1$. Portanto, o único caso restante é $l = 0$ e $i = 2k$. Logo, $M = \binom{2k}{2k} (2k+3)!a_{2k+3} \left(\binom{0}{0} (1)!(1)!a_1a_1 \right) = (2k+3)!a_{2k+3}$.

Portanto, $g_s^{(2k)} = (2k+3)!a_{2k+3} - M + S = (2k+3)!a_{2k+3} - (2k+3)!a_{2k+3} = 0$.

Mostremos que $g_s^{(2k+1)} = 0$. Para tal, tomamos $n = 2k+1$ em (3.5) e escrevemos $g_s^{(2k+1)} = (2k+4)!a_{2k+4} - M_1 + S_1$, com

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (i+3)!a_{i+3} \left(\sum_{l=0}^{2k+1-i} \binom{2k+1-i}{l} (2k-i-l+2)!(l+1)!a_{2k-i-l+2}a_{l+1} \right) \\ S_1 &= 3 \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} (2k-j+2)!a_{2k-j+2} \left(\sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (j-l+2)!(l+2)!a_{j-l+2}a_{l+2} \right). \end{aligned}$$

Analisemos os termos em S_1 . Neste caso, o termo a_{2k-j+2} é nulo para $2 \leq 2k-j+2 \leq k+2$, ou seja, para $k \leq j \leq 2k$. Assim, resta-nos verificar os casos $0 \leq j \leq k-1$ e $j = 2k+1$.

Para $j = 2k+1$, o termo a_{2k-l+3} é nulo para $2 \leq 2k-l+3 \leq k+2$, ou seja, para $k+1 \leq l \leq 2k+1$ e, além disso, o termo a_{l+2} se anula quando $2 \leq l+2 \leq k+2$, ou seja, quando $0 \leq l \leq k$. Portanto, para $j = 2k+1$ todos os termos em S_1 são nulos.

Para $j \leq k-1$, o termo a_{j-l+2} se anula quando $2 \leq j-l+2 \leq k+2$, ou seja, quando $0 \leq l \leq j$. Logo, para $j \leq k-1$ todos os termos em S_1 são nulos.

Portanto, concluímos que $S_1 = 0$.

Agora analisemos os termos em M_1 . O termo a_{i+3} é nulo para $2 \leq i+3 \leq k+2$, ou seja, para $0 \leq i \leq k-1$. Assim, resta-nos o caso $i \geq k$. Neste caso, o termo a_{l+1} se anula quando $2 \leq l+1 \leq k+2$, ou seja, quando $1 \leq l \leq k+1$. Além disso, sabemos que l varia entre 0 e $2k+1-i \leq k+1$. Logo, falta analisar o caso $l=0$. Para $l=0$, o termo $a_{2k-i-l+2}$ se anula quando $2 \leq 2k-i+2 \leq k+2$, ou seja, quando $k \leq i \leq 2k$. Assim, resta-nos o caso $i = 2k+1$ e $l=0$. Portanto, $M_1 = \binom{2k+1}{2k+1} (2k+4)! a_{2k+4} \left(\binom{0}{0} (1)!(1)! a_1 a_1 \right) = (2k+4)! a_{2k+4}$.

Após estas análises, concluímos que $g_s^{(2k+1)} = (2k+4)! a_{2k+4} - M_1 = (2k+4)! a_{2k+4} - (2k+4)! a_{2k+4} = 0$.

Portanto, por indução, provamos que $IL(k) \subset V(2k)$, para qualquer inteiro $k \geq 1$.

Agora mostremos que $IL(k) \subset V(2k) \setminus V(2k+1)$. Como já provamos que $IL(k) \subset V(2k)$, basta provar que $g_s^{(2k)} \neq 0$ quando $a_1 = 1, a_2 = \dots = a_{k+1} = 0$ e $a_{k+2} \neq 0$.

Primeiramente escrevemos $g_s^{(2k)}$ como em (3.6) e analisemos os termos em S e M .

Em S , o termo a_{2k-j+1} é nulo para $2 \leq 2k-j+1 \leq k+1$, ou seja, para $k \leq j \leq 2k-1$. Assim, resta-nos analisar os casos $j = 2k$ e $j \leq k-1$.

Para $j = 2k$, o termo a_{j-l+2} se anula quando $2 \leq j-l+2 \leq k+1$, ou seja, quando $k+1 \leq l \leq 2k$ e, além disso, o termo $a_{l+2} = 0$ é nulo para $2 \leq l+2 \leq k+1$, ou seja, para $0 \leq l \leq k-1$. Logo, resta-nos analisar o caso $l = k$. Neste caso, temos o termo $3 \binom{2k}{2k} (1)! a_1 \left(\binom{2k}{2k} (k+2)!(k+2)! a_{k+2}^2 \right) = 3(2k)!(k+2)^2(k+1)^2 a_{k+2}^2$.

Para $j \leq k-1$, o termo a_{j-l+2} se anula quando $2 \leq j-l+2 \leq k+1$, ou seja, quando $j-k+1 \leq l \leq j$. Como $j \leq k-1$, segue que $j-k+1 \leq 0$, ou seja, o termo a_{j-l+2} é nulo para $0 \leq l \leq j$ e, portanto, todos os termos de S para o caso $j \leq k-1$ são nulos.

Portanto, $S = 3(2k)!(k+2)^2(k+1)^2 a_{k+2}^2$.

Em M , o termo a_{i+3} é nulo para $2 \leq i+3 \leq k+1$, ou seja, para $0 \leq i \leq k-2$. Logo, resta-nos verificar para $i \geq k-1$. Neste caso, a_{l+1} se anula quando $2 \leq l+1 \leq k+1$, ou seja, quando $1 \leq l \leq k$. Assim, falta verificar os casos: (1) $l=0$ e i qualquer e (2) $l=k+1$ e $i=k-1$.

No caso (1), temos que o termo $a_{2k-i-l+1}$ é nulo para $2 \leq 2k-i+1 \leq k+1$, ou seja, para $k \leq i \leq 2k-1$. Logo, para $l=0$, resta-nos os casos $i=k-1$ e $i=2k$.

No caso (2), o termo $a_{2k-i-l+1} = a_1 = 1 \neq 0$.

Portanto,
$$M = \binom{2k}{k-1} (k+2)! a_{k+2} \left(\binom{k+1}{0} (k+2)!(1)! a_{k+2} a_1 + \binom{k+1}{k+1} (1)!(k+2)! a_1 a_{k+2} \right) + \binom{2k}{2k} (2k+3)! a_{2k+3} \left(\binom{0}{0} (1)!(1)! a_1 a_1 \right) = 2(2k)!(k+2)^2(k+1)k a_{k+2}^2 + (2k+3)! a_{2k+3}.$$

Concluímos que $g_s^{(2k)} = (2k+3)! a_{2k+3} - M + S = (2k+3)! a_{2k+3} - (2(2k)!(k+2)^2(k+1)k a_{k+2}^2 + (2k+3)! a_{2k+3}) + 3(2k)!(k+2)^2(k+1)^2 a_{k+2}^2$.

$1)ka_{k+2}^2 + (2k+3)!a_{2k+3} + 3(2k)!(k+2)^2(k+1)^2a_{k+2}^2 = (2k)!(k+2)^2(k+1)(k+3)a_{k+2}^2$. Como $a_{k+2} \neq 0$, temos que $g_s^{(2k)} \neq 0$ como queríamos provar $\square$

No Capítulo 4, estudamos o caso de curvas regulares fora de pontos lightlike e no Capítulo 5, o caso de curvas regulares em pontos lightlike. Tratamos o caso de curvas singulares nos Capítulos 6 e 7, mais especificamente, cúspide ordinária no Capítulo 6 e cúspide ramphoid no Capítulo 7.

DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CURVAS PLANAS REGULARES: CASO NÃO-LIGHTLIKE

Neste capítulo, definimos o conceito de deformações FR-genéricas de uma curva plana em uma inflexão de ordem finita e, a partir desta definição, estudamos as bifurcações na curva e em sua evoluta em torno de um vértice de ordem 2 (Seção 4.1), uma inflexão de ordem 2 (Seção 4.2) e de ordem 3 (Seção 4.3).

Considere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva suave e regular. Sabemos, da teoria de singularidades, que fora dos pontos de inflexão, as deformações da curva em um vértice de ordem finita podem ser estudadas usando a família de funções distância ao quadrado. Se tal família é $\mathcal{R}^+$ -versal, então, conforme a Proposição 1.4.7, temos um modelo para o conjunto bifurcação desta família, a partir do qual se obtém a evoluta da curva deformada e, consequentemente, os vértices da mesma (ver (BRUCE; GIBLIN, 1983) e (ARNOL'D, 1976)).

Além disso, sabemos também que as deformações da curva em uma inflexão de ordem finita podem ser estudadas usando a família de funções altura. Se tal família é $\mathcal{R}$ -versal, então conforme a Proposição 1.4.16, temos um modelo para o conjunto discriminante desta família, a partir do qual se obtém a curva dual de γ e, consequentemente, as inflexões da mesma (ver (BRUCE; GIBLIN, 1983)). No entanto, se a inflexão for de ordem $k \geq 2$, ou seja, $\kappa = \kappa' = 0$ no ponto, então teremos um vértice concentrado no ponto de inflexão. Dessa forma, ao deformarmos inflexões de ordem ≥ 2 devemos considerar também os vértices que podem aparecer. Logo, precisamos de um método alternativo que considere simultaneamente as deformações de inflexões e vértices.

Note que se a família de funções curvatura é $\mathcal{R}$ -versal, então temos um modelo para seus zeros (inflexões da curva). Da mesma forma, se a família de derivadas das funções curvatura é $\mathcal{R}$ -versal, então temos um modelo para seus zeros (vértices da curva). Logo, o Teorema 4.0.1 abaixo nos permite deformar curvas levando em consideração vértices e inflexões simultaneamente.

Teorema 4.0.1. Seja γ_s um germe de uma família a m -parâmetros de germes de curvas regulares que não possuem pontos lightlike. Suponha que γ_0 tenha uma inflexão de ordem $n \geq 2$ em t_0 , com $m \geq n - 1$.

- (i) A família de funções altura sobre γ_s é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal da função altura sobre γ_0 em t_0 se, e somente se, a família de funções curvatura de γ_s é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal da função curvatura de γ_0 em t_0 .
- (ii) Se a família de funções curvatura de γ_s é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal da função curvatura de γ_0 em t_0 , então a família de derivadas das funções curvatura de γ_s é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal da derivada da função curvatura de γ_0 em t_0 .

Demonstração. Como γ_s é um germe de uma família de curvas que não possuem pontos lightlike, segue que γ_s possui apenas curvas timelike ou spacelike. Suponhamos que γ_0 é timelike, o caso spacelike segue de modo análogo.

Podemos supor $t_0 = 0$ e $\gamma_0(0) = (0, 0)$.

Já que as curvas γ_s são timelike, então podemos fazer reparametrizações e rotações Lorentzianas (que preservam as retas lightlike $\{y = x\}$ e $\{y = -x\}$) se necessário, e supor $\gamma_s(t) = (t, f_s(t))$ com $\gamma'_0(0) = (1, 0)$, ou seja, $f'_0(0) = 0$.

Como γ_0 tem uma inflexão de ordem $n \geq 2$ em $t_0 = 0$, temos $\kappa_0(0) = \kappa'_0(0) = \dots = \kappa_0^{(n-1)}(0) = 0$ e $\kappa_0^{(n)}(0) \neq 0$, ou seja, a função curvatura κ_0 tem uma singularidade A_{n-1} em $t_0 = 0$, equivalentemente, $f''_0(0) = f'''_0(0) = \dots = f_0^{(n+1)}(0) = 0$ e $f_0^{(n+2)}(0) \neq 0$, isto é, a função altura H_{u_0} sobre γ_0 tem singularidade A_{n+1} em $t_0 = 0$, onde $u_0 = N_0(0) = (0, 1)$. Além disso, segue que κ'_0 tem uma singularidade A_{n-2} em $t_0 = 0$.

Temos três famílias de funções a considerar:

A família de funções altura: $H : \mathbb{R} \times S^1_1 \times \mathbb{R}^m, (0, u_0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(t, u, s) = \langle \gamma_s(t), u \rangle.$$

A família de funções curvatura: $\kappa : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, 0$ dada por

$$\kappa(t, s) = \frac{f''_s(t)}{(1 - (f'_s(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A família de derivadas das funções curvatura: $\frac{\partial \kappa}{\partial t} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, 0$ dada por

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s) = \frac{f'''_s(t)(1 - (f'_s(t))^2) + 3f'_s(t)(f''_s(t))^2}{(1 - (f'_s(t))^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Note que $\kappa(t, s) = 0$ se, e somente se, $f''_s(t) = 0$ e $\kappa(t, s) = \frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s) = 0$ se, e somente se, $f''_s(t) = f'''_s(t) = 0$.

Verifiquemos quais são as condições para a família de funções altura H ser $\mathcal{R}^+$ -versal.

Considere a parametrização de S_1^1 em torno de $N_0(0) = (0, 1)$ dada por $(\sinh(r), \cosh(r))$, com r próximo de 0.

Considere $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0, 0, 0) \rightarrow \mathbb{R} \times S_1^1 \times \mathbb{R}^m, (0, N_0(0), 0)$ dada por

$$\varphi(t, r, s) = (t, (\sinh(r), \cosh(r)), s).$$

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0, 0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t, r, s) = H \circ \varphi(t, r, s) = \langle \gamma_s(t), (\sinh(r), \cosh(r)) \rangle = -\sinh(r)t + \cosh(r)f_s(t).$$

Seguindo o Teorema 1.4.4, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r}(t, r, s) &= -\cosh(r)t + \sinh(r)f_s(t) \\ \frac{\partial F}{\partial s_i}(t, r, s) &= \cosh(r) \frac{\partial f}{\partial s_i}(t, s) \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, m$. Logo,

$$j^n \left(\frac{\partial F}{\partial r}(t, 0, 0) \right) (0) = -\cosh(0)t = -t$$

e

$$j^n \left(\frac{\partial F}{\partial s_i}(t, 0, 0) \right) (0) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s_i}(0, 0)t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_i}(0, 0)t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_i}(0, 0)t^n,$$

para $i = 1, \dots, m$.

Portanto, F é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal se, e somente se, a matriz A abaixo possui posto n

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s_m}(0, 0) \\ 0 & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_m}(0, 0) \\ 0 & \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_m}(0, 0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_m}(0, 0) \end{pmatrix}_{n \times (m+1)}.$$

$$\text{Escrevemos } A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(0, 0) \\ 0 & C \end{pmatrix}_{n \times (m+1)}.$$

Verifiquemos agora quais são as condições para que a família de funções curvatura k_s seja uma deformação $\mathcal{R}$ -versal.

Derivando κ_s com relação a cada parâmetro, obtemos

$$\frac{\partial \kappa}{\partial s_i}(t, s) = \frac{\frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_i}(t, s)(1 - (\frac{\partial f}{\partial t}(t, s))^2) + 3 \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) \frac{\partial^2 f}{\partial s_i \partial t}(t, s) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, s)}{(1 - (\frac{\partial f}{\partial t}(t, s))^2)^{\frac{5}{2}}},$$

para $i = 1, \dots, m$.

Como κ_0 tem uma singularidade A_{n-1} em $t_0 = 0$, segue que os graus de $\frac{\partial f}{\partial t}(t, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, 0)$ são maiores ou iguais a $n + 1$ e n , respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial s_i}(0, 0) + j^{n-2} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial s_i}(t, 0) \right) (0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_i}(0, 0) + j^{n-2} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_i}(t, 0) \right) (0) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_i}(0, 0) + \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_i}(0, 0)t + \dots + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_i}(0, 0) \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, m$.

Portanto, seguindo o Teorema 1.4.13, concluímos que a família κ_s é $\mathcal{R}$ -versal se, e somente se, a matriz B abaixo possui posto $n - 1$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_m}(0, 0) \\ \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_m}(0, 0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_m}(0, 0) \end{pmatrix}_{(n-1) \times m}.$$

Verifiquemos quais são as condições para a família de derivadas das funções curvatura $\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s)$ seja uma deformação $\mathcal{R}$ -versal.

Seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t \partial s_i}(0, 0) + j^{n-3} \left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial t \partial s_i}(t, 0) \right) (0) &= \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_i}(0, 0) + j^{n-3} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_i}(t, 0) \right) (0) \\ &= \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_i}(0, 0) + \frac{\partial^5 f}{\partial t^4 \partial s_i}(0, 0)t + \dots + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_i}(0, 0) \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, m$.

Portanto, seguindo o Teorema 1.4.13, temos que a família $\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s)$ é $\mathcal{R}$ -versal se, e somente se, a matriz D abaixo possui posto $n - 2$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_m}(0, 0) \\ \frac{\partial^5 f}{\partial t^4 \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{\partial^5 f}{\partial t^4 \partial s_m}(0, 0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-3)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_1}(0, 0) & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_m}(0, 0) \end{pmatrix}_{(n-2) \times m}.$$

(i) Note que a matriz C pode ser obtida a partir de B através de operações elementares (basta multiplicar cada i -ésima linha de B por $\frac{1}{(i+1)i!}$, com $i = 1, \dots, n - 1$, que obteremos C). Ou seja, o posto de B é igual ao posto de C .

Portanto, H é $\mathcal{R}^+$ -versal se, e somente se, a matriz A tem posto n , o que ocorre se, e somente se, a matriz C tem posto $n - 1$, ou seja, a matriz B tem posto $n - 1$, o que por sua vez

ocorre se, e somente se, a família κ_s é $\mathcal{R}$ -versal.

(ii) Multiplicando cada i -ésima linha de D por $\frac{1}{i}$, com $i = 1, \dots, n-2$, obtemos a matriz B sem a primeira linha, ou seja, $\text{posto}(D) = \text{posto}(B)$ ou $\text{posto}(D) = \text{posto}(B) - 1$.

Sabemos que a família κ_s é $\mathcal{R}$ -versal se, e somente se, o posto de B é $n-1$; e que a família $\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s)$ é $\mathcal{R}$ -versal se, e somente se, o posto de D é $n-2$.

Portanto, se o posto de B é $n-1$, então o posto de D é $n-2$, ou seja, se a família κ_s é $\mathcal{R}$ -versal, então a família $\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s)$ é $\mathcal{R}$ -versal.

Vale notar que a prova para o caso spacelike segue de modo análogo, as únicas diferenças que observamos é que tomamos $\gamma_s(t) = (g_s(t), t)$ e, assim, as matrizes relativas a κ_s e $\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s)$ são as do caso timelike multiplicadas por (-1) e trocamos S_1^1 e sua parametrização $(\sinh(r), \cosh(r))$ por H_1 e sua parametrização $(-\cosh(r), \sinh(r))$. $\square$

O teorema anterior sugere que se a família de funções altura é $\mathcal{R}^+$ -versal, então podemos obter as deformações de vértices e inflexões simultaneamente. Na próxima proposição, mostramos que tal condição é, de fato, uma “boa” condição para se obter tais deformações.

Proposição 4.0.2. Seja γ_s um germe de uma família a m -parâmetros de germes de curvas regulares que não possuem pontos lightlike. Suponha que $\gamma_0 = \gamma$ tenha uma inflexão de ordem $n \geq 2$ em t_0 . Então, a família de funções altura sobre γ_s é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal da função altura sobre γ_0 em t_0 se, e somente se, a família de aplicações de Monge-Taylor $j^k \Phi$, $k \geq n+1$, é transversal aos estratos $I, \dots, I(n), V, \dots, V(n-1)$ em $j^k \phi_{\gamma_0}(0)$.

Demonstração. Podemos supor $t_0 = 0$, γ timelike (o caso spacelike segue de modo análogo) e tomar γ e γ_s , respectivamente, na forma $\gamma(t) = (t, f(t))$ e $\gamma_s(t) = (t, f_s(t))$, com $f_s(0) = f'_s(0) = 0$, $f''(0) = \dots = f^{(n+1)}(0) = 0$ e $f^{(n+2)}(0) = (n+2)!c_{n+2} \neq 0$. Denote por $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ o sistema de coordenadas em $J^k(1, 1)$. Assim, a família de aplicações de Monge-Taylor é como em (3.2), os estratos de inflexões são dados por $I(n) : a_2 = \dots = a_{n+1} = 0$ e os estratos de vértices por $V(n) : g_s = \dots = g_s^{(n-1)} = 0$, onde $g_s(t) = f_s'''(t)(1 - f_s'(t)^2) + 3f_s'(t)f_s''(t)^2$.

Como o estrato de vértice de ordem $n-1$ depende apenas de $a_1, \dots, a_{n+1}$ e o estrato de inflexões de ordem n zera $a_2, \dots, a_{n+1}$, segue que $I(n) \subset V(n-1)$. Logo, para verificar a transversalidade da família de aplicações de Monge-Taylor com relação aos estratos $I, \dots, I(n), V, \dots, V(n-1)$, basta verificar com relação ao estrato $I(n)$, já que todos os outros estratos o contém. Note que o espaço tangente ao estrato $I(n)$ em $J^k(1, 1) \simeq \mathbb{R}^k$ consiste do espaço vetorial $\mathbb{R} \cdot \{e_1, e_{n+2}, \dots, e_k\}$, onde e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^k$. Portanto, $j^k \Phi$ é transversal ao estrato $I(n)$ se, e somente se, $e_2, \dots, e_{n+1} \in \text{Im}(dj^k \Phi(0, 0)) + \mathbb{R} \cdot \{e_1, e_{n+2}, \dots, e_k\}$.

Observe que $j^k \Phi(t, s) = (f'_s(t), \frac{1}{2!}f_s''(t), \dots, \frac{1}{k!}f_s^{(k)}(t))$ e, conseqüentemente, a matriz

jacobiana de $j^k\Phi$ em $(0,0)$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s_m}(0,0) \\ 0 & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_1}(0,0) & \cdots & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_m}(0,0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_1}(0,0) & \cdots & \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_m}(0,0) \\ (n+2)c_{n+2} & \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+2} f}{\partial t^{n+1} \partial s_1}(0,0) & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+2} f}{\partial t^{n+1} \partial s_m}(0,0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^{k+1}}(0,0) & \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^k \partial s_1}(0,0) & \cdots & \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^k \partial s_m}(0,0) \end{pmatrix}_{k \times (m+1)}.$$

Logo, tomando $u = \left(\frac{1}{(n+2)c_{n+2}}, 0, \dots, 0 \right) \in \mathbb{R}^{m+1}$ temos que $dj^k\Phi(0,0)(u) = e_{n+1} + v$, tal que $v \in \mathbb{R} \cdot \{e_{n+2}, \dots, e_k\}$.

Assim, $e_2, \dots, e_n \in \text{Im}(dj^k\Phi(0,0)) + \mathbb{R} \cdot \{e_1, e_{n+2}, \dots, e_k\}$ se, e somente se, a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_1}(0,0) & \cdots & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_m}(0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_1}(0,0) & \cdots & \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^n \partial s_m}(0,0) \end{pmatrix}_{(n-1) \times m}$$

possui posto $n-1$.

Note que a matriz acima é exatamente a matriz B da demonstração do Teorema 4.0.1. Portanto, $j^k\Phi$ é transversal aos estratos $I, \dots, I(n), V, \dots, V(n-1)$ se, e somente se, a família de funções altura de γ_s é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal da função altura sobre γ_0 em $t_0 = 0$. $\square$

Definição 4.0.3. Seguindo a Proposição 4.0.2, dizemos que uma deformação γ_s de uma curva regular γ em uma inflexão de ordem finita é **FR-genérica**, se a família de funções altura sobre γ_s é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal da singularidade da função altura sobre γ ao longo da direção normal.

No Capítulo 2 estudamos o comportamento da evoluta em fenômenos de codimensão 0, ou seja, em um ponto lightlike, em um vértice ordinário e em uma inflexão ordinária. No que segue, consideramos, em detalhes, vértices de ordem 2 (codimensão 1) e inflexões de ordem 2 (codimensão 1) e 3 (codimensão 2).

Observamos que se uma curva regular possui um vértice de ordem finita em um ponto que não é inflexão, então a função curvatura é não nula em tal ponto. Assim, ao deformarmos localmente, a função curvatura continuará sendo não nula, ou seja, ao deformarmos vértices obteremos apenas vértices. Em decorrência deste fato, o conceito de deformações FR-genéricas em um vértice de ordem finita coincide com o conceito de deformações $\mathcal{R}^+$ -versais. Nos casos de inflexões de ordem 2 e 3 estudamos o comportamento da evoluta e suas FR-deformações.

4.1 Evoluta de uma curva em um vértice de ordem 2

O resultado a seguir mostra o comportamento da evoluta em um vértice de ordem 2 e suas bifurcações genéricas.

Proposição 4.1.1. Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva suave e regular. Suponha que $t_0 \in I$ é um vértice de ordem 2 que não é uma inflexão, então a evoluta de γ tem uma singularidade E_6 (isto é, é $\mathcal{A}$ -equivalente a curva parametrizada por (t^3, t^4)) em t_0 e está contida no semiplano determinado pela reta tangente a γ em t_0 que não contém a curva (ver Figura 12 centro). Além disso, se γ_s é uma família genérica a 1-parâmetro com $\gamma_0 = \gamma$, então a evoluta de γ_s se bifurca como a transição da swallowtail conforme mostra a Figura 12, ou seja, temos um vértice inward e outro outward de um lado da transição e nenhum vértice do outro lado.

Figura 12 – Bifurcação da evoluta em torno de um vértice de ordem 2.

Demonstração. É conhecido que, nessas condições, a evoluta de γ possui uma singularidade E_6 em t_0 , ou seja, a evoluta de γ é $\mathcal{A}$ -equivalente a (t^3, t^4) (ver Teorema 3.4 (i) de (REEVE; TARI, 2017) para detalhes). Além disso, pela Proposição 2.3.2, segue que a evoluta de γ está contida no semiplano determinado pela reta tangente a γ em t_0 que não contém a curva.

Como γ_s é uma família genérica, segue que a família de funções distância ao quadrado D de γ_s é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal a 3-parâmetros de uma singularidade A_4 . Logo, o conjunto de bifurcação de D dado por

$$\text{Bif}(D) = \{(u_1, u_2, s) \in \mathbb{R}^3, 0; \exists t \in \mathbb{R}, t_0 \text{ tal que } D'_{(u_1, u_2, s)}(t) = D''_{(u_1, u_2, s)}(t) = 0\} \quad (4.1)$$

é localmente uma swallowtail e, conseqüentemente, a evoluta de γ_s para $s \neq 0$ corresponde a seções genéricas da swallowtail (ver (BRUCE, 1983)). Portanto, as bifurcações da evoluta em um vértice de ordem 2 são dadas na Figura 12. Além disso, como a função curvatura κ , localmente, não muda de sinal e possui um mínimo e um máximo de um lado da transição, segue que os vértices obtidos são um inward e outro outward. $\square$

Observação 4.1.2. No caso Euclidiano estudado em (SALARINOUGHABI; TARI, 2017), ocorre o mesmo tipo de comportamento da evoluta em um vértice de ordem 2, a única diferença é que no caso Euclidiano a evoluta está contida no semiplano determinado pela reta tangente à curva no vértice de ordem 2 que contém a curva.

4.2 FR-deformações de uma inflexão de ordem 2

O resultado a seguir fornece o comportamento da evoluta em uma inflexão de ordem 2, as bifurcações genéricas na mesma e nos dá um modelo de deformação FR-genérica.

Teorema 4.2.1. Seja γ uma curva regular com uma inflexão de ordem 2 em t_0 .

- (i) A evoluta vai para o infinito assintoticamente ao longo da reta normal de γ em t_0 e pode ser modelada por $x^2y = 1$, em algum sistema de coordenadas. As duas componentes da evoluta estão contidas nos dois quadrantes determinados pelas retas tangente e normal a γ em t_0 que não contém a curva γ (ver Figura 13 centro).
- (ii) Considere γ_s uma família FR-genérica a 1-parâmetro com $\gamma_0 = \gamma$. As bifurcações na evoluta são como mostra a Figura 13. Temos duas inflexões e um vértice outward de um lado da transição e um vértice inward e nenhuma inflexão do outro lado.
- (iii) Qualquer família FR-genérica a 1-parâmetro em uma inflexão de ordem 2 é FR-equivalente à família modelo $\alpha_r(t) = (t, t^4 + rt^2)$.

Figura 13 – Deformação FR-genérica de uma inflexão de ordem 2.

Demonstração. Consideremos o caso em que γ é timelike, o caso em que γ é spacelike segue de modo análogo.

- (i) Fazendo reparametrizações e rotações Lorentzianas, se necessário, podemos supor $t_0 = 0$, $\gamma(t_0) = (0, 0)$, $\gamma'(t_0) = (1, 0)$ e $\gamma(t) = (t, f(t))$.

Como t_0 é uma inflexão de ordem 2 de γ , segue que a função altura h sobre γ tem uma singularidade A_3 em $t_0 = 0$, ou seja, em t_0 , temos

$$h' = \langle \gamma', u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \lambda \gamma'^{\perp}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}^*;$$

$$h' = h'' = 0 \Leftrightarrow u - \lambda \gamma'^{\perp} = 0 \text{ e } f'' = 0;$$

$$h' = h'' = h''' = 0 \Leftrightarrow u - \lambda \gamma'^\perp = 0 \text{ e } f'' = f''' = 0;$$

$$h' = h'' = h''' = 0 \text{ e } h^{(4)} \neq 0 \Leftrightarrow u - \lambda \gamma'^\perp = 0, f'' = f''' = 0 \text{ e } f^{(4)} \neq 0.$$

Portanto, a função f pode ser escrita na forma $f(t) = c_4 t^4 + O(t^5)$, com $c_4 \neq 0$.

Temos

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - (f'(t))^2}}(1, f'(t)), \quad N(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - (f'(t))^2}}(f'(t), 1) \quad (4.2)$$

e

$$\kappa(t) = \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t)^\perp \rangle}{|\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle|^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''(t)}{(1 - (f'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.3)$$

Logo,

$$e(t) = \gamma(t) - \frac{1}{\kappa(t)}N(t) = \left(\frac{2}{3}t + O(t^2), \frac{-1}{12c_4 t^2}(1 + O(t)) \right),$$

a qual pode ser modelada por $x^2 y = 1$ em algum sistema de coordenadas, ver Figura 13 central.

(ii) Considere γ_s uma deformação FR-genérica de $\gamma_0 = \gamma$. Podemos supor $\gamma_s(t) = (t, f_s(t))$ com $f_s(t) = \overline{c_1}(s)t + \overline{c_2}(s)t^2 + \overline{c_3}(s)t^3 + (c_4 + \overline{c_4}(s))t^4 + O_s(t^5)$, onde $\overline{c_i}(0) = 0$, com $i = 1, 2, 3, 4$ e $O_s(t^5)$ denota os termos de ordem maior ou igual a 5 em t cujos coeficientes podem depender de s .

Como γ_s é uma deformação FR-genérica, segue da Definição 4.0.3 que a família de funções altura de γ_s é $\mathcal{R}^+$ -versal, ou seja, que a matriz abaixo possui posto 2

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(0, 0) \\ 0 & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \overline{c_1}'(0) \\ 0 & \overline{c_2}'(0) \end{pmatrix},$$

o que ocorre se, e somente se, $\overline{c_2}'(0) \neq 0$.

Portanto, fazendo mudanças de parâmetros, podemos escrever $f_s(t) = st^2 + \overline{c_3}(s)t^3 + (c_4 + \overline{c_4}(s))t^4 + O_s(t^5)$.

Como γ_s é FR-genérica, então, pelo Teorema 4.0.1, as famílias de funções curvatura κ_s e de derivadas das funções curvatura $\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s)$ são deformações $\mathcal{R}$ -versais.

Por hipótese, $\gamma_0 = \gamma$ tem uma inflexão de ordem 2 em $t_0 = 0$, então κ_0 tem singularidade A_1 em $t_0 = 0$.

Portanto, as deformações em κ_s são como as deformações $\mathcal{R}$ -versais de t^2 , ou seja, são equivalentes a $t^2 + u$. De um lado da transição κ_s possui um ponto crítico e nenhum zero, enquanto que do outro lado da transição temos um ponto crítico entre dois zeros de κ_s . Note que cada ponto crítico de κ_s corresponde a um vértice ordinário de γ_s e cada zero de κ_s corresponde a uma inflexão ordinária de γ_s , para $s \neq 0$.

Observamos que nos pontos críticos de κ_s de ambos os lados da transição o sinal de $\frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2}(t, s)$ é o mesmo, mas o sinal de κ_s muda conforme mudamos o lado da transição. Portanto, do lado da transição que não possui inflexões, o vértice de γ_s é um vértice inward e o do outro lado é um vértice outward.

As bifurcações de γ_s e sua evoluta estão descritas na Figura 13. Para obter tal figura, utilizamos o comportamento da evoluta em uma inflexão de ordem 2 dada no item (i), o número e a posição relativa de vértices e inflexões de γ_s obtidos acima e o comportamento da evoluta em um vértice ordinário dado na Proposição 2.4.2 e em uma inflexão ordinária dado na Proposição 2.5.2.

(iii) Note que $\alpha_0(t) = (t, t^4)$ tem uma inflexão de ordem 2 na origem e que a família $\alpha_r(t) = (t, f_r(t)) = (t, rt^2 + t^4)$ é uma família FR-genérica, já que a matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r}(0, 0) \\ 0 & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial r}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

possui posto 2 e, conseqüentemente, a família de funções altura de γ_s é $\mathcal{R}^+$ -versal.

Os cálculos feitos no item (ii) mostram que para qualquer família FR-genérica a 1-parâmetro de curvas que contenha γ , a estratificação do espaço de parâmetros é dada pelos estratos $s < 0$, $s = 0$ e $s > 0$, a curva γ_s possui um vértice inward para $s < 0$ e um vértice outward entre duas inflexões ordinárias para $s > 0$ (ou vice-versa, dependendo do sinal de c_4). Portanto, a identidade (ou a aplicação $s \mapsto -s$ para o caso das deformações terem c_4 com sinais opostos) é o homeomorfismo que satisfaz as condições da Definição 3.0.1. Como vimos acima, $\alpha_r(t) = (t, rt^2 + t^4)$ é uma deformação FR-genérica a 1-parâmetro de uma inflexão de ordem 2 e, conseqüentemente, qualquer família a 1-parâmetro FR-genérica é FR-equivalente a α_r . $\square$

Observação 4.2.2. No caso Euclidiano estudado em (SALARINOGHABI; TARI, 2017), o comportamento da curva e da evoluta são descritos pela Figura 14. Observamos que a diferença entre os casos Euclidiano e Minkowski no comportamento da evoluta em uma inflexão de ordem 2 é que, para o caso Euclidiano, a evoluta está contida no semiplano determinado pela reta tangente à curva na inflexão de ordem 2 que contém a curva. Já as diferenças observadas nos outros estratos provêm das diferenças no comportamento da evoluta em um vértice ordinário e em uma inflexão ordinária, conforme comentamos nas Observações 2.4.4 e 2.5.3.

4.3 FR-deformações de uma inflexão de ordem 3

O resultado a seguir fornece o comportamento da evoluta em uma inflexão de ordem 3, as bifurcações genéricas na mesma e nos dá um modelo de deformação FR-genérica.

Teorema 4.3.1. Seja γ uma curva regular com uma inflexão de ordem 3 em t_0 .

- (i) A evoluta vai para o infinito assintoticamente ao longo da reta normal de γ em t_0 e pode ser modelada por $x^3y = 1$, em algum sistema de coordenadas. As duas componentes da

Figura 14 – Caso Euclidiano: deformação FR-genérica de uma inflexão de ordem 2.

evoluta estão contidas nos dois quadrantes determinados pelas retas tangente e normal a γ em t_0 que não contém a curva γ (ver Figura 15 (1)).

- (ii) Considere γ_s uma família FR-genérica a 2-parâmetros com $\gamma_0 = \gamma$. As bifurcações na evoluta são como mostra a Figura 15. O diagrama de bifurcação consiste de uma curva cúspide correspondendo à inflexões de ordem 2 e uma curva suave correspondendo a vértices de ordem 2. A reta tangente limite da cúspide e a reta tangente à curva são transversais (ver Figura 15 centro).
- (iii) Qualquer família FR-genérica a 2-parâmetros em uma inflexão de ordem 3 é FR-equivalente à família modelo $\alpha_r(t) = (t, t^5 + r_1 t^2 + r_2 t^3)$.

Demonstração. Consideremos o caso em que γ é timelike, o caso em que γ é spacelike segue de modo análogo.

- (i) Fazendo mudanças de coordenadas, se necessário, podemos supor $t_0 = 0$, $\gamma(t_0) = (0, 0)$, $\gamma'(t_0) = (1, 0)$ e $\gamma(t) = (t, f(t))$.

Como t_0 é uma inflexão de ordem 3 de γ , segue que a função altura h sobre γ tem uma singularidade A_4 em $t_0 = 0$, ou seja, em t_0 , temos

$$h' = \langle \gamma', u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \lambda \gamma'^{\perp}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}^*;$$

$$h' = h'' = 0 \Leftrightarrow u - \lambda \gamma'^{\perp} = 0 \text{ e } f'' = 0;$$

$$h' = h'' = h''' = 0 \Leftrightarrow u - \lambda \gamma'^{\perp} = 0 \text{ e } f'' = f''' = 0;$$

$$h' = h'' = h''' = h^{(4)} = 0 \Leftrightarrow u - \lambda \gamma'^{\perp} = 0 \text{ e } f'' = f''' = f^{(4)} = 0;$$

$$h' = h'' = h''' = h^{(4)} = 0 \text{ e } h^{(5)} \neq 0 \Leftrightarrow u - \lambda \gamma'^{\perp} = 0, f'' = f''' = f^{(4)} = 0 \text{ e } f^{(5)} \neq 0.$$

Figura 15 – Deformação FR-genérica de uma inflexão de ordem 3. A figura central é o conjunto de bifurcação no espaço de parâmetros (s_1, s_2) .

Portanto, a função f pode ser escrita na forma $f(t) = c_5 t^5 + O(t^6)$, com $c_5 \neq 0$.

Neste caso, temos T, N e κ como em (4.2) e (4.3), respectivamente. Logo,

$$e(t) = \gamma(t) - \frac{1}{\kappa(t)}N(t) = \left(\frac{3}{4}t + O(t^2), \frac{-1}{20c_5 t^3}(1 + O(t)) \right),$$

a qual pode ser modelada por $x^3 y = 1$ em algum sistema de coordenadas e cujo comportamento geométrico é como mostra a Figura 15 (1).

(ii) Considere γ_s uma deformação FR-genérica a 2-parâmetros de $\gamma_0 = \gamma$, então podemos supor $\gamma(t, s) = (t, f(t, s))$ com $f(t, s) = \bar{c}_1(s)t + \bar{c}_2(s)t^2 + \bar{c}_3(s)t^3 + \bar{c}_4(s)t^4 + (c_5 + \bar{c}_5(s))t^5 + O_s(t^6)$,

onde $\overline{c}_i(0) = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $s = (s_1, s_2)$.

Como γ_s é uma deformação FR-genérica, segue que a família de funções altura de γ_s é $\mathcal{R}^+$ -versal, ou seja, que a matriz abaixo possui posto 3

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s_1}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s_2}(0,0) \\ 0 & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_1}(0,0) & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial s_2}(0,0) \\ 0 & \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_1}(0,0) & \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial s_2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial \overline{c}_1}{\partial s_1}(0,0) & \frac{\partial \overline{c}_1}{\partial s_2}(0,0) \\ 0 & \frac{\partial \overline{c}_2}{\partial s_1}(0,0) & \frac{\partial \overline{c}_2}{\partial s_2}(0,0) \\ 0 & \frac{\partial \overline{c}_3}{\partial s_1}(0,0) & \frac{\partial \overline{c}_3}{\partial s_2}(0,0) \end{pmatrix},$$

o que ocorre se, e somente se, $-\frac{\partial \overline{c}_2}{\partial s_1}(0,0) \frac{\partial \overline{c}_3}{\partial s_2}(0,0) + \frac{\partial \overline{c}_2}{\partial s_2}(0,0) \frac{\partial \overline{c}_3}{\partial s_1}(0,0) \neq 0$.

Assim, fazendo mudanças de parâmetros, podemos escrever $f(t, s_1, s_2) = s_1 t^2 + s_2 t^3 + \overline{c}_4(s) t^4 + (c_5 + \overline{c}_5(s)) t^5 + O_s(t^6)$.

Note que os zeros de κ_s correspondem as inflexões de γ_s , enquanto que os zeros de κ'_s correspondem aos vértices de γ_s . Logo, o estrato de inflexões de ordem 2 é o conjunto discriminante de κ_s (ver Definição 1.4.14), já o estrato de vértices de ordem 2 é o conjunto bifurcação de κ_s (ver Definição 1.4.5). Além disso, temos

$$\kappa_s(t) = \frac{\langle \gamma'_s(t), \gamma'_s(t)^\perp \rangle}{(-\langle \gamma'_s(t), \gamma'_s(t) \rangle)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f'_s(t)}{(1 - f'_s(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad \kappa'_s(t) = \frac{f'''_s(t)(1 - f'_s(t)^2) + 3f'_s(t)f''_s(t)^2}{(1 - f'_s(t)^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Como os denominadores de κ_s e κ'_s só se anulam em pontos lightlike e γ_s não possui pontos desse tipo, então os conjuntos discriminante e bifurcação de κ_s coincidem, respectivamente, com os conjuntos discriminante de G_1 e de G_2 , onde $G_1(t, s) = f'_s(t)$ e $G_2(t, s) = f'''_s(t)(1 - f'_s(t)^2) + 3f'_s(t)f''_s(t)^2$.

Assim, o conjunto discriminante de G_1 é dado pelas equações

$$\begin{cases} G_1(t, s) = 2s_1 + 6s_2 t + O_3(t, s) = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial t}(t, s) = 6s_2 + O_2(t, s) = 0 \end{cases},$$

onde $O_3(t, s)$ denota os termos de ordem maior ou igual a 3 em t e s . Da segunda equação, obtemos $s_2 = -10c_5 t^2 - 4c_{410} s_1 t + O_3(t, s_1)$, onde c_{410} é o coeficiente de s_1 em $\overline{c}_4(s)$. Substituindo na primeira equação, temos $2s_1 - 12c_{410} s_1 t^2 - 40c_5 t^3 + O_4(t, s_1) = 0$. De onde concluímos que $s_1 = \frac{70}{3} c_5 t^3 + O(t^4)$ e, consequentemente, $s_2 = -10c_5 t^2 + O(t^3)$.

Portanto, o conjunto discriminante de κ_s e, consequentemente, o estrato de inflexões de ordem 2 é dado pela curva $(\frac{70}{3} c_5 t^3 + O(t^4), -10c_5 t^2 + O(t^3))$ com $t \in \mathbb{R}, 0$.

O conjunto discriminante de G_2 é dado pelas equações

$$\begin{cases} G_2(t, s) = 6s_2 + 24c_{410} s_1 t + 24c_{401} s_2 t + 60c_5 t^2 + O_3(t, s) = 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial t}(t, s) = 24c_{410} s_1 + 24c_{401} s_2 + 120c_5 t + O_2(t, s) = 0 \end{cases},$$

onde c_{410} e c_{401} são, respectivamente, os coeficientes de s_1 e s_2 em $\overline{c}_4(s)$. Da segunda equação, obtemos $t = -\frac{c_{410}}{5c_5} s_1 - \frac{c_{401}}{5c_5} s_2 + O_2(s)$. Substituindo na primeira equação, temos $6s_2 - \frac{12c_{410}^2}{5c_5} s_1^2 -$

$$\frac{24c_{401}c_{410}}{5c_5}s_1s_2 - \frac{12c_{401}^2}{5c_5}s_2 + O_3(s) = 0. \quad \text{De onde concluímos que}$$

$$s_2 = \frac{2c_{410}}{5c_5}s_1^2 + O(s_1^3).$$

Portanto, o conjunto bifurcação de κ_s e, conseqüentemente, o estrato de vértices de ordem 2 é dado pela curva $\left(s_1, \frac{2c_{410}}{5c_5}s_1^2 + O(s_1^3)\right)$ com $s_1 \in \mathbb{R}, 0$.

Assim, concluímos que a estratificação do espaço de parâmetros (s_1, s_2) de γ_s é como mostra a Figura 15 centro.

Como γ_s é FR-genérica, então, pelo Teorema 4.0.1, as famílias de funções curvatura κ_s e de derivadas das funções curvatura $\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s_1, s_2)$ são deformações $\mathcal{R}$ -versais.

Por hipótese, $\gamma_0 = \gamma$ tem uma inflexão de ordem 3 em $t_0 = 0$, então κ_0 tem uma singularidade A_2 em $t_0 = 0$ e $\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, 0, 0)$ tem uma singularidade A_1 em $t_0 = 0$.

Portanto, os conjuntos zero e discriminante de $\kappa(t, s_1, s_2)$ e de $\frac{\partial \kappa}{\partial t}(t, s_1, s_2)$ são localmente difeomorfos aos conjuntos zero e discriminante de uma A_2 e de uma A_1 (Exemplo 1.4.17), respectivamente.

Usando a estratificação do espaço de parâmetros (s_1, s_2) de γ_s obtido anteriormente e os resultados da Seção 1.4, concluímos que as bifurcações no gráfico da função curvatura κ_s são como mostra a Figura 16.

Descrevemos o que obtemos em cada um dos estratos:

- ① κ_0 tem um zero de multiplicidade 3, ou seja, γ_0 possui uma inflexão de ordem 3;
- ② κ_s tem um zero simples e um ponto crítico de multiplicidade 2, ou seja, γ_s possui uma inflexão ordinária e um vértice de ordem 2;
- ③ κ_s tem um zero simples, ou seja, γ_s possui uma inflexão ordinária;
- ⑤ κ_s tem dois pontos críticos (um máximo e um mínimo local) e um zero simples, ou seja, γ_s possui dois vértices ordinários (um inward e um outward) e uma inflexão ordinária;
- ⑥ κ_s tem um zero de multiplicidade 2, um ponto crítico e um zero simples, ou seja, γ_s possui uma inflexão de ordem 2, um vértice ordinário outward e uma inflexão ordinária;
- ⑦ κ_s tem um zero simples, um ponto crítico, outro zero simples, outro ponto crítico e outro zero simples, ou seja, γ_s possui uma inflexão ordinária, um vértice ordinário outward, outra inflexão ordinária, outro vértice ordinário outward e outra inflexão ordinária;

Os estratos ④, ⑨ e ⑧ possuem o mesmo número e tipo de pontos que os estratos ②, ⑤ e ⑥, respectivamente, invertendo apenas a posição relativa dos mesmos, como mostra a Figura 16, por isso não os descrevemos acima.

Figura 16 – Bifurcações no gráfico de κ_s .

Utilizando o comportamento da evoluta em uma inflexão de ordem 3 dada no item (i), o número e a posição relativa de vértices e inflexões de γ_s obtidos acima, o comportamento da evoluta em um vértice ordinário dado na Proposição 2.4.2 e em uma inflexão ordinária dado na Proposição 2.5.2 e, o comportamento e bifurcação da evoluta em um vértice de ordem 2 dado na Proposição 4.1.1 e em uma inflexão de ordem 2 dado no Teorema 4.2.1, concluímos que as bifurcações de γ_s e sua evoluta são como descreve a Figura 15.

(iii) Note que $\alpha_0(t) = (t, t^5)$ tem uma inflexão de ordem 3 na origem e que a família $\alpha_r(t) = (t, f_r(t)) = (t, r_1 t^2 + r_2 t^3 + t^5)$ é uma família FR-genérica, já que a matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r_1}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r_2}(0,0) \\ 0 & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial r_1}(0,0) & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial r_2}(0,0) \\ 0 & \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial r_1}(0,0) & \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial r_2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

possui posto 3 e, consequentemente, a família de funções altura de α_r é $\mathcal{R}^+$ -versal.

Os cálculos feitos no item (ii) dependem somente dos fatos de que a curva possui uma inflexão de ordem 3 e de que a família é FR-genérica. Como vimos acima, $\alpha_r(t) = (t, r_1 t^2 + r_2 t^3 + t^5)$ satisfaz tais condições e, consequentemente, qualquer família a 2-parâmetros FR-genérica é FR-equivalente a α_r . $\square$

Observação 4.3.2. No caso Euclidiano estudado em (SALARINOUGHABI; TARI, 2017), temos uma versão do resultado acima e da Figura 15, mais especificamente, o Teorema 3.7 e a Figura 6 de (SALARINOUGHABI; TARI, 2017). As diferenças entre os dois casos no comportamento da evoluta em uma inflexão de ordem 3 é que, no caso Euclidiano, a evoluta está contida nos quadrantes determinados pelas retas tangente e normal à curva na inflexão de ordem 3 que contém a curva. Já as diferenças nos outros estratos provêm das diferenças no comportamento da evoluta em vértices ordinários e de ordem 2 e em inflexões ordinárias e de ordem 2 como comentado, respectivamente, nas Observações 2.4.4, 4.1.2, 2.5.3 e 4.2.2.

DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CURVAS PLANAS REGULARES: CASO LIGHTLIKE

Neste capítulo, abordamos os mesmos problemas do Capítulo 4, mas em torno de pontos lightlike. Definimos o conceito de deformações FRL-genéricas de uma curva plana em uma inflexão lightlike de ordem finita e, por meio desta, estudamos as bifurcações na curva e em sua evoluta em torno de uma inflexão ordinária lightlike (Seção 5.1) e de uma inflexão lightlike de ordem 2 (Seção 5.2). Observamos que a abordagem e os resultados obtidos neste capítulo não possuem uma versão no caso Euclidiano em ([SALARINOUGHABI; TARI, 2017](#)).

O que ocorre em um ponto lightlike? Primeiramente observe que os pontos lightlike não podem ser evitados, ou seja, não é um fenômeno que dificilmente ocorre, como mostra o seguinte resultado.

Proposição 5.0.1. ([SALOOM; TARI, 2012](#)) Toda curva suave, regular e fechada possui pelo menos quatro pontos lightlike.

Com o intuito de estudar curvas levando em conta seus pontos lightlike, queremos que as mudanças de coordenadas preservem retas diagonais (isto é, retas paralelas a reta $y = x$), uma vez que pontos lightlike são os quais a reta tangente à curva é diagonal. Aqui escolhemos uma das retas lightlike, já que nosso estudo é local. O uso da outra reta lightlike segue de modo análogo. Além disso, ao deformarmos localmente uma curva regular em torno de um ponto lightlike a direção tangente varia suficientemente próxima à direção lightlike inicial, ou seja, não há necessidade de considerarmos as duas direções lightlike simultaneamente.

Primeiramente, podemos tomar γ e sua deformação γ_s parametrizadas por

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad \text{e} \quad \gamma_s(t) = (t, f_s(t)), \quad (5.1)$$

onde $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

Aplicando a transformação $T(x, y) = (x, x - y)$, obtemos a curva $\bar{\gamma}(t) = (t, t - f(t))$ e a família $\bar{\gamma}_s(t) = (t, t - f_s(t))$.

Queremos considerar $\bar{\gamma}$ e $\bar{\gamma}_s$ como pré-imagem de 0 de uma função suave, ou seja, consideramos a função $g : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = y - x + f(x)$$

(localmente, $\bar{\gamma} = g^{-1}(0)$) e a deformação $G : \mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(x, y, s) = y - x + f_s(x)$$

(localmente, $\bar{\gamma}_s = G_s^{-1}(0)$).

Seja $\mathcal{K}^*$ o subgrupo do grupo de contato $\mathcal{K}$ formado por mudanças de coordenadas na fonte que preservam retas paralelas. Para simplificar o espaço tangente à órbita, consideramos $\mathcal{K}^*$ preservando retas horizontais e utilizamos a transformação T para adaptar nosso problema a essa definição de $\mathcal{K}^*$. Para maiores detalhes sobre o grupo $\mathcal{K}^*$ e a classificação de germes de funções $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ sob ação do mesmo, ver (DAMON, 1984), (OLIVEIRA; TARI, 2002).

Dizemos que a deformação γ_s de uma curva regular γ é uma *deformação $\mathcal{K}_e^*$ -versal* de γ , se G é uma deformação $\mathcal{K}_e^*$ -versal de g .

Como $\mathcal{K}^*$ é um subgrupo geométrico de $\mathcal{K}$ (no Apêndice A veremos outro exemplo de subgrupo geométrico), ver (DAMON, 1984), então existe uma versão do Teorema 1.3.3 para $\mathcal{K}^*$, como veremos a seguir. Mas antes de enunciar tal resultado, definimos o *espaço tangente estendido* $L\mathcal{K}_e^* \cdot g$, com $g \in \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{E}_2$, como segue

$$L\mathcal{K}_e^* \cdot g = \mathcal{E}_2 \cdot \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} \right\} + \mathcal{E}_y \cdot \left\{ \frac{\partial g}{\partial y} \right\} + g^*(\mathcal{M}_1) \cdot \mathcal{E}_2,$$

onde $\mathcal{E}_y$ denota o conjunto das funções em $\mathcal{E}_2$ que dependem apenas de y .

Teorema 5.0.2. (DAMON, 1984) Uma deformação a m -parâmetros G de um germe de função $g \in \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{E}_2$ é uma deformação $\mathcal{K}_e^*$ -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{K}_e^* \cdot g + \mathbb{R} \cdot \{\dot{G}_1, \dots, \dot{G}_m\} = \mathcal{E}_2.$$

Lema 5.0.3. Sejam γ uma curva com uma inflexão lightlike de ordem $k - 1$ em $t_0 = 0$ e γ_s uma deformação a m -parâmetros de γ como em (5.1). Então, γ_s é $\mathcal{K}_e^*$ -versal se, e somente se, a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial s_i \partial t}(0, 0) \\ \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial s_i \partial t^2}(0, 0) \\ \vdots \\ \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^k f}{\partial s_i \partial t^{k-1}}(0, 0) \end{pmatrix}_{(k-1) \times m}$$

tem posto $k - 1$.

Demonstração. Como $t_0 = 0$ é uma inflexão lightlike de ordem $k - 1$ de γ , segue que $f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0$ e $f^{(k+1)}(0) \neq 0$. Logo, podemos tomar f e f_s na forma

$$\begin{aligned} f(t) &= t + c_{k+1}t^{k+1} + O(t^{k+2}), \\ f_s(t) &= (1 + \overline{c_1}(s))t + \overline{c_2}(s)t^2 + \overline{c_3}(s)t^3 + \dots + \overline{c_k}(s)t^k + (c_{k+1} + \overline{c_{k+1}}(s))t^{k+1} + O_s(t^{k+2}), \end{aligned}$$

com $c_{k+1} \neq 0$ e $\overline{c_i}(0) = 0$ para $i = 1, \dots, k + 1$.

Por definição, γ_s é uma deformação $\mathcal{K}_e^*$ -versal se, e somente se, $G(x, y, s) = y - x + f_s(x)$ é uma deformação $\mathcal{K}_e^*$ -versal de $g(x, y) = y - x + f(x)$, o que ocorre, pelo Teorema 5.0.2, se, e somente se,

$$L\mathcal{K}_e^* \cdot g + \mathbb{R} \cdot \{\dot{G}_1, \dots, \dot{G}_m\} = \mathcal{E}_2.$$

Note que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x)$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial G}{\partial s_i}(x, y, 0) = \frac{\partial f_s}{\partial s_i}(x, 0)$, $i = 1, \dots, m$. Logo,

$$L\mathcal{K}_e^* \cdot g + \mathbb{R} \cdot \{\dot{G}_1, \dots, \dot{G}_m\} = \mathcal{E}_2 \cdot \left\{ -1 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \mathcal{E}_y \cdot \{1\} + g^*(\mathcal{M}_1) \cdot \mathcal{E}_2 + \mathbb{R} \cdot \left\{ \frac{\partial f_s}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial f_s}{\partial s_m} \right\}.$$

De $\mathcal{E}_y \cdot \{1\}$ podemos obter as constantes e todo monômio da forma y^j , com $j \geq 1$. Além disso, de $g^*(\mathcal{M}_1) \cdot \mathcal{E}_2$ obtemos os monômios da forma $x^i y^j$, com $i, j \geq 1$. Portanto, G é $\mathcal{K}_e^*$ -versal se, e somente se,

$$\mathcal{E}_1 \cdot \left\{ -1 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \mathbb{R} \cdot \left\{ \frac{\partial f_s}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial f_s}{\partial s_m} \right\} = \mathcal{M}_1. \quad (5.2)$$

Observamos que $\mathcal{E}_1 \cdot \left\{ -1 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} = \mathcal{E}_1 \cdot \{(k+1)c_{k+1}x^k + O(x^{k+1})\}$ o qual, pelo Lema de Nakayama, contém $\mathcal{E}_1 \cdot \{x^k\}$.

Assim, (5.2) ocorre se, e somente se, $x, x^2, \dots, x^{k-1} \in \mathbb{R} \cdot \left\{ \frac{\partial f_s}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial f_s}{\partial s_m} \right\} + \mathcal{E}_1 \cdot \{x^k\}$, o que é equivalente a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial s_i \partial t}(0, 0) \\ \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial s_i \partial t^2}(0, 0) \\ \vdots \\ \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^k f}{\partial s_i \partial t^{k-1}}(0, 0) \end{pmatrix}_{(k-1) \times m}$$

ter posto $k - 1$. □

Considere γ_0 uma curva regular em $\mathbb{R}_1^2$ tendo uma inflexão lightlike de ordem $k - 1$ em t_0 , com $k \geq 2$. Seja γ_s uma família a m -parâmetros de curvas regulares em $\mathbb{R}_1^2$ contendo γ_0 . Nosso objetivo é mostrar que a $\mathcal{K}_e^*$ -versalidade de uma deformação γ_s é uma boa condição para a definição de uma deformação FRL-genérica, isto é, tal condição é equivalente a aplicação de Monge-Taylor associada a γ_s ser transversal aos estratos envolvidos. Neste caso, a aplicação de Monge-Taylor é dada como em (3.3).

Dada uma família a m -parâmetros de curvas γ_s temos, associado a ela, uma família de aplicações de Monge-Taylor $j^n\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0,0) \rightarrow J^k(1,1)$ dada por

$$j^n\Phi(t,s) = j^n\phi_{\gamma_s}(t) = (a_1(t,s), \dots, a_n(t,s)).$$

Para estudarmos a transversalidade da família de aplicações de Monge-Taylor em relação aos estratos envolvidos devemos entender quais são tais estratos e as suas configurações. Os diversos estratos locais que precisamos considerar são:

- Lightlike (L): $a_1 = 1$;
- Inflexão (I): $a_2 = 0$;
- Inflexão Lightlike (IL): $a_1 = 1, a_2 = 0$;
- Inflexão de ordem 2 ($I(2)$): $a_2 = a_3 = 0$;
- $\vdots$
- Inflexão de ordem $k-1$ ($I(k-1)$): $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$;
- Inflexão Lightlike de ordem $k-1$ ($IL(k-1)$): $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$;
- $\vdots$
- Vértice (V): $a_3(1 - a_1^2) + 2a_1a_2^2 = 0$;
- Vértice de ordem 2 ($V(2)$): $\begin{cases} a_3(1 - a_1^2) + 2a_1a_2^2 = 0 \\ a_4(1 - a_1^2) + 2a_1a_2a_3 + a_2^3 = 0 \end{cases}$;
- $\vdots$
- Vértice de ordem $k-1$ ($V(k-1)$): $\begin{cases} g_s = 0 \\ g'_s = 0 \\ \vdots \\ g_s^{(k-2)} = 0 \end{cases}$.

onde $g_s(t) = f_s'''(t)(1 - f_s'(t)^2) + 3f_s'(t)f_s''(t)^2$, $\gamma_s(t) = (t, f_s(t))$ e $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$.

Obtemos tais estratos avaliando as condições sobre o tipo de singularidade da função altura para o caso de inflexões e da função curvatura (fora dos pontos lightlike e depois tomando o fecho de tal conjunto) para o caso de vértices.

Observamos que se $j^n\Phi$ é transversal aos estratos de inflexão lightlike de ordem $k-1$ e de vértices de ordem $2(k-1)$ então também será com relação aos outros estratos de menor ordem que estão envolvidos, já que esses dois são subconjuntos dos demais.

O Teorema 5.0.4 a seguir mostra uma condição necessária e suficiente para que $j^n\Phi$ seja transversal ao estrato de inflexões lightlike de ordem $k-1$.

Teorema 5.0.4. Sejam γ_0 uma curva regular em $\mathbb{R}_1^2$ com uma inflexão lightlike de ordem $k - 1$ em t_0 , com $k \geq 2$, e γ_s uma família a m -parâmetros de curvas regulares contendo γ_0 , com $m \geq k - 1$. Então, γ_s é $\mathcal{K}_e^*$ -versal se, e somente se, $j^n\Phi$ é transversal ao estrato de inflexões lightlike de ordem $k - 1$ em $J^n(1, 1)$, com $n \geq k$.

Demonstração. Primeiramente provamos o teorema para γ_s uma família a $(k - 1)$ -parâmetros.

Identificando $J^n(1, 1)$ com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, concluímos que o espaço tangente a $IL(k - 1)$ em $J^n(1, 1)$ é o espaço vetorial real gerado por $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$, onde e_i denota o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Como nosso estudo é local, na vizinhança de uma inflexão lightlike de ordem $k - 1$, segue que nosso interesse é na vizinhança do ponto $p = j^n\Phi(0, 0) = (1, 0, \dots, 0, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n)$, com $c_{k+1} \neq 0$ na $(k + 1)$ -ésima entrada, onde $\gamma_0(t) = (t, t + c_{k+1}t^{k+1} + c_{k+2}t^{k+2} + O(t^{k+3}))$.

Logo, para que $j^n\Phi$ seja transversal a $IL(k - 1)$ devemos ter $Im(d_{(0,0)}j^n\Phi) + T_p(IL(k - 1)) = J^n(1, 1)$, ou seja,

$$Im(d_{(0,0)}j^n\Phi) + \mathbb{R} \cdot \{e_{k+1}, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n.$$

Denotemos $Im(d_{(0,0)}j^n\Phi)$ e $T_p(IL(k - 1))$ respectivamente por U e W .

Portanto, basta mostrar que os vetores $e_1, \dots, e_k$ pertencem a $U + W$, ou seja, que existem vetores $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^k$ tais que

$$\begin{aligned} d_{(0,0)}j^n\Phi(u^1) &= (1, 0, \dots, 0, _); \\ d_{(0,0)}j^n\Phi(u^2) &= (0, 1, \dots, 0, _); \\ &\vdots \\ d_{(0,0)}j^n\Phi(u^k) &= (0, 0, \dots, 1, _). \end{aligned}$$

Neste caso, a matriz jacobiana de $j^n\Phi$ em $(0, 0)$ é dada por

$$Jac(j^n\Phi)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial s_i \partial t}(0, 0) \\ 0 & \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial s_i \partial t^2}(0, 0) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^k f}{\partial s_i \partial t^{k-1}}(0, 0) \\ (k+1)c_{k+1} & \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial s_i \partial t^k}(0, 0) \\ (k+2)c_{k+2} & \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+2} f}{\partial s_i \partial t^{k+1}}(0, 0) \\ \vdots & \vdots \\ (n+1)c_{n+1} & \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial s_i \partial t^n}(0, 0) \end{pmatrix}_{n \times k}.$$

Assim, cada uma das equações descritas anteriormente se transforma em um sistema como o descrito abaixo, para a j -ésima equação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k-1} u_{i+1}^j \frac{\partial^2 f}{\partial s_i \partial t}(0,0) = 0 \\ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{k-1} u_{i+1}^j \frac{\partial^3 f}{\partial s_i \partial t^2}(0,0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{(j-1)!} \sum_{i=1}^{k-1} u_{i+1}^j \frac{\partial^j f}{\partial s_i \partial t^{j-1}}(0,0) = 0 \\ \frac{1}{j!} \sum_{i=1}^{k-1} u_{i+1}^j \frac{\partial^{j+1} f}{\partial s_i \partial t^j}(0,0) = 1 \\ \frac{1}{(j+1)!} \sum_{i=1}^{k-1} u_{i+1}^j \frac{\partial^{j+2} f}{\partial s_i \partial t^{j+1}}(0,0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{k-1} u_{i+1}^j \frac{\partial^k f}{\partial s_i \partial t^{k-1}}(0,0) = 0 \\ (k+1)c_{k+1}u_1^j + \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k-1} u_{i+1}^j \frac{\partial^{k+1} f}{\partial s_i \partial t^k}(0,0) = 0 \end{array} \right. .$$

Logo, para mostrar que $e_1, \dots, e_k$ pertencem a $U + W$ basta mostrar que os sistemas obtidos possuem solução.

Se considerarmos as primeiras $k-1$ equações dos primeiros $k-1$ sistemas, observamos que eles possuem solução se, e somente se, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial s_i \partial t}(0,0) \\ \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial s_i \partial t^2}(0,0) \\ \vdots \\ \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^k f}{\partial s_i \partial t^{k-1}}(0,0) \end{pmatrix}$$

tem posto $k-1$.

Essa parte dos sistemas nos fornece $u_2^j, \dots, u_k^j$, com $j = 1, \dots, k-1$. Utilizando $c_{k+1} \neq 0$ e a última equação do j -ésimo sistema, obtemos u_1^j em função de $u_2^j, \dots, u_k^j$, encontrando assim u^j , com $j = 1, \dots, k-1$. Além disso, o k -ésimo sistema é facilmente solucionado por $u^k = (\frac{1}{(k+1)c_{k+1}}, 0, \dots, 0)$.

Portanto, $j^n \Phi$ é transversal ao estrato $IL(k-1)$ se, e somente se, a matriz A tem posto $k-1$, o que ocorre, de acordo com o Lema 5.0.3, se, e somente se, γ_s é uma deformação $\mathcal{K}_e^*$ -versal de γ_0 .

A demonstração para o caso em que γ_s é uma família a m -parâmetros, com $m \geq k-1$, segue de modo análogo, tomando $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^{m+1}$ de forma que u_i^j , para $i = 1, \dots, k$, é como obtido anteriormente e $u_i^j = 0$, para $i = k+1, \dots, m+1$, e $j = 1, \dots, k$. $\square$

Teorema 5.0.5. A família de aplicações de Monge-Taylor $j^n\Phi$, com $n \geq 2k$, $k \neq 4$, é transversal ao estrato de inflexões lightlike de ordem $k-1$ se, e somente se, é transversal ao estrato de vértices de ordem $2(k-1)$.

Demonstração. A ida vale inclusive para $k=4$, devido ao fato de $IL(k-1) \subset V(2(k-1))$. Já a volta é garantida para $k \neq 4$ como mostramos no que segue.

A ideia é mostrar que o espaço tangente ao estrato de vértices de ordem $2(k-1)$ é o mesmo que o espaço tangente ao estrato de inflexões lightlike de ordem $k-1$.

Note que o estrato de vértices de ordem $2(k-1)$ é dado pelas equações

$$g_s = 0, \quad g'_s = 0, \quad \dots, \quad g_s^{(2k-3)} = 0.$$

Além disso, note também que na equação $g_s^{(r)} = 0$ aparecem $a_1, \dots, a_{r+3}$.

Como nosso estudo é na vizinhança de uma inflexão lightlike de ordem $k-1$, segue que nosso interesse no estrato de vértices de ordem $2(k-1)$ é na vizinhança do ponto $(1, 0, \dots, 0, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n)$, ou seja, $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0, a_{k+1} = c_{k+1} \neq 0$. Neste ponto, observamos que as primeiras $k-2$ equações que definem o estrato de vértices de ordem $2(k-1)$ são singulares e independem de $a_{k+1}, \dots, a_{2k}$.

Portanto, o espaço tangente ao estrato de vértices de ordem $2(k-1)$ é dado pelo espaço tangente da parte regular, ou seja, da superfície definida pelas equações $g_s^{(k-2)} = \dots = g_s^{(2k-3)} = 0$.

Sabemos que o espaço tangente ao estrato de inflexões lightlike de ordem $k-1$ é $\mathbb{R} \cdot \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$, onde e_j são os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Além disso, como $IL(k-1) \subset V(2(k-1))$, segue que o espaço tangente ao estrato de vértices de ordem $2(k-1)$ contém o espaço tangente ao estrato de inflexões lightlike de ordem $k-1$, ou seja, contém $\mathbb{R} \cdot \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$.

Logo, para mostrar que o espaço tangente ao estrato de vértices de ordem $2(k-1)$ é exatamente $\mathbb{R} \cdot \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$, basta mostrar que $e_1, \dots, e_k$ não pertencem ao núcleo da diferencial da aplicação cujas entradas são dadas por $(g_s^{(k-2)}, \dots, g_s^{(2k-3)})$. Portanto, basta mostrar que $\frac{\partial(g_s^{(k-3+r)})}{\partial a_r}(0,0) \neq 0$, para $1 \leq r \leq k$.

Tomando $n = k-3+r$ na equação (3.5), obtemos a expressão de $g_s^{(k-3+r)}$.

Queremos encontrar a derivada de $g_s^{(k-3+r)}$ em relação a a_r . Para tal analisemos quando cada termo pode ser a_r e computamos sua derivada.

O primeiro termo que analisamos é a_{i+3} . Tal termo é a_r se, e só se, $i = r-3$ (para ter este termo devemos ter $r \geq 3$). Neste caso, o termo que obtemos ao derivar é

$$-\binom{k-3+r}{r-3} r! \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (k+1-l)!(l+1)! a_{k+1-l} a_{l+1}.$$

Analisando o termo $a_{k-2+r-i-l}$, observamos que o mesmo coincide com a_r , quando $l = k-2-i$. No entanto, como $0 \leq l \leq k-3+r-i$, segue que devemos ter também $i \leq k-2$ e

$r \geq 1$, este último já ocorre. Assim, o termo obtido ao derivarmos esta parcela é

$$-\sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-3+r}{i} (i+3)! a_{i+3} \binom{k-3+r-i}{k-2-i} r! (k-1-i)! a_{k-1-i}.$$

Ao analisarmos o termo a_{l+1} , obtemos que o mesmo é a_r se, e só se, $l = r - 1$. Além disso, sabemos que $0 \leq l \leq k - 3 + r - i$, então segue que $r \geq 1$ (o que já temos) e $i \leq k - 2$. Logo, o termo obtido ao derivar é

$$-\sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-3+r}{i} (i+3)! a_{i+3} \binom{k-3+r-i}{k-2-i} r! (k-1-i)! a_{k-1-i}.$$

O termo $a_{k-2+r-j}$ coincide com a_r quando $j = k - 2$. Assim o termo resultante da derivação dessa parcela é

$$3 \binom{k-3+r}{k-2} r! \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k-2}{l} (k-l)! (l+2)! a_{k-l} a_{l+2}.$$

Já $a_{j-l+2} = a_r$ se, e só se, $l = j + 2 - r$. Além disso, sabemos que $0 \leq l \leq j$, de onde obtemos que $j \geq r - 2$ e $r \geq 2$. Logo, o termo que obtemos ao derivar esta parcela é

$$3 \sum_{j=r-2}^{k-3+r} \binom{k-3+r}{j} (k-2+r-j)! a_{k-2+r-j} \binom{j}{j+2-r} r! (j+4-r)! a_{j+4-r}.$$

O último termo a_{l+2} coincide com a_r quando $l = r - 2$. Sabemos que $0 \leq l \leq j$, de onde obtemos $r \leq 2$ e $j \geq r - 2$. Assim, o termo obtido ao derivar é

$$3 \sum_{j=r-2}^{k-3+r} \binom{k-3+r}{j} (k-2+r-j)! a_{k-2+r-j} \binom{j}{r-2} r! (j+4-r)! a_{j+4-r}.$$

Note que $\binom{k-3+r-i}{k-2-i} = \frac{(k-3+r-i)!}{(k-2-i)!(r-1)!} = \binom{k-3+r-i}{r-1}$ e $\binom{j}{j+2-r} = \frac{j!}{(j+2-r)!(r-2)!} = \binom{j}{r-2}$.

Portanto, a expressão obtida foi

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_s^{(k-3+r)}}{\partial a_r} = & r! \left(- \binom{k-3+r}{r-3} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (k+1-l)! (l+1)! a_{k+1-l} a_{l+1} \right. \\ & - 2 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-3+r}{i} (i+3)! a_{i+3} \binom{k-3+r-i}{r-1} (k-1-i)! a_{k-1-i} \\ & + 3 \binom{k-3+r}{k-2} \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k-2}{l} (k-l)! (l+2)! a_{k-l} a_{l+2} \\ & \left. + 6 \sum_{j=r-2}^{k-3+r} \binom{k-3+r}{j} (k-2+r-j)! a_{k-2+r-j} \binom{j}{r-2} (j+4-r)! a_{j+4-r} \right), \end{aligned}$$

para $r \geq 3$. Para $r = 2$ não temos o primeiro termo e para $r = 1$ não temos nem o primeiro nem o último termo da expressão acima.

Considere $\frac{\partial g_s^{(k-3+r)}}{\partial a_r} = M + N + O + P$, onde cada letra representa a parcela obtida em cada linha, respectivamente.

Agora queremos avaliar a derivada obtida em $(t, s) = (0, 0)$. No entanto, sabemos que em tal ponto $a_1 = 1, a_2 = \dots = a_k = 0$ e $a_{k+1} = c_{k+1} \neq 0$. Dessa forma, analisemos o que acontece com cada parcela ao aplicarmos tais condições.

Em M , temos $a_{k+1-l} = 0$ para $2 \leq k+1-l \leq k$, ou seja, para $1 \leq l \leq k-1$. Logo, resta-nos $l = 0$ e $l = k$. Analisando M em tais situações obtemos que em ambas o termo obtido é o mesmo, o que implica que $M_{(0,0)} = -2 \binom{k-3+r}{r-3} (k+1)!c_{k+1}$.

Em N , temos $a_{i+3} = 0$ para $2 \leq i+3 \leq k$, ou seja, para $0 \leq i \leq k-3$. Assim, falta analisar o caso $i = k-2$. Neste caso, obtemos $N_{(0,0)} = -2 \binom{k-3+r}{k-2} (k+1)!c_{k+1}$.

Em O , temos $a_{l+2} = 0$ para $2 \leq l+2 \leq k$, ou seja, para $0 \leq l \leq k-2$. Portanto, todos os termos de O são nulos ($O_{(0,0)} = 0$).

Em P , temos $a_{j+4-r} = 0$ para $2 \leq j+4-r \leq k$, ou seja, $r-2 \leq j \leq k-4+r$. Logo, resta-nos o caso $j = k-3+r$. Neste caso, obtemos $P_{(0,0)} = 6 \binom{k-3+r}{r-2} (k+1)!c_{k+1}$.

Logo, para $r \geq 3$, temos

$$\frac{\partial g_s^{(k-3+r)}}{\partial a_r}(0,0) = r!(k+1)!c_{k+1} \left(-2 \binom{k-3+r}{r-3} - 2 \binom{k-3+r}{k-2} + 6 \binom{k-3+r}{r-2} \right).$$

Simplificando o termo $-2 \binom{k-3+r}{r-3} - 2 \binom{k-3+r}{k-2} + 6 \binom{k-3+r}{r-2}$ e igualando a zero, chegamos que tal termo se anula nas soluções inteiras da equação $k^2 - 3kr + r^2 + 2k - 3r + 2 = 0$. No entanto, tal equação não possui solução inteira.

Portanto, $\frac{\partial g_s^{(k-3+r)}}{\partial a_r}(0,0) \neq 0$ para $r \geq 3$.

Para $r = 2$, temos

$$\frac{\partial g_s^{(k-1)}}{\partial a_2}(0,0) = 2!(k+1)!c_{k+1} \left(-2 \binom{k-1}{k-2} + 6 \binom{k-1}{0} \right) = 2(k+1)!c_{k+1} (-2(k-1) + 6).$$

O termo $-2(k-1) + 6$ é não nulo para $k \neq 4$. Logo, para $k \neq 4$, temos $\frac{\partial g_s^{(k-1)}}{\partial a_2}(0,0) \neq 0$.

Para $r = 1$, temos

$$\frac{\partial g_s^{(k-2)}}{\partial a_1}(0,0) = -2(k+1)!c_{k+1} \neq 0.$$

Portanto, mostramos que $\frac{\partial g_s^{(k-3+r)}}{\partial a_r}(0,0) \neq 0$ para $1 \leq r \leq k$ e, consequentemente, o espaço tangente ao estrato de vértices de ordem $2(k-1)$ é o mesmo que o espaço tangente ao estrato de inflexões lightlike de ordem $k-1$, o que garante o resultado. $\square$

Uma vez entendida essa relação entre os estratos de inflexão lightlike e vértices podemos nos perguntar qual a quantia mínima de parâmetros (m) para que a transversalidade da família de aplicações de Monge-Taylor com relação aos estratos envolvidos possa ocorrer.

Para responder essa questão suponha que γ_s é uma família a m -parâmetros de curvas regulares tal que γ_0 possui uma inflexão lightlike de ordem $k - 1$ em t_0 . Neste caso, os estratos envolvidos são os de inflexão lightlike até ordem $k - 1$, de inflexão até ordem $k - 1$, lightlike e, os estratos de vértices até ordem $2(k - 1)$. Além disso, como γ_0 possui uma inflexão lightlike de ordem $k - 1$ em t_0 , segue que a imagem de $j^n\Phi$ intersecta $V(2(k - 1))$ em pelo menos um ponto.

Dentre os estratos envolvidos, os de vértices de ordem $2(k - 1)$ e de inflexões de ordem $k - 1$ são os que possuem maior codimensão em $J^n(1, 1)$, a qual é k (como vimos no Teorema 5.0.5). Portanto, como $j^n\Phi$ intersecta $IL(k - 1)$ e $V(2(k - 1))$, para que a transversalidade entre ambos seja possível devemos ter γ_s uma família a, pelo menos, $k - 1$ parâmetros.

Como corolário dos Teoremas 5.0.4 e 5.0.5 temos o seguinte resultado.

Corolário 5.0.6. Sejam γ_0 uma curva regular em $\mathbb{R}_1^2$ com uma inflexão lightlike de ordem $k - 1$ em t_0 , com $k \geq 2$, e γ_s uma família a m -parâmetros de curvas regulares contendo γ_0 , com $m \geq k - 1$. Então, γ_s é $\mathcal{K}_e^*$ -versal se, e somente se, a aplicação de Monge-Taylor é transversal aos estratos $I, \dots, I(k - 1), L, IL, \dots, IL(k - 1), V, \dots, V(2(k - 1))$.

Assim, com base no Corolário 5.0.6, podemos redefinir o conceito de deformações FRL-genéricas como segue.

Definição 5.0.7. Dizemos que uma deformação γ_s de uma curva regular γ em uma inflexão lightlike de ordem finita é **FRL-genérica** se γ_s é uma deformação $\mathcal{K}_e^*$ -versal de γ .

No que segue, consideramos inflexões lightlike de ordem 1 (codimensão 1) e 2 (codimensão 2). Novamente, em cada caso, estudamos o comportamento da cáustica e suas deformações FRL-genéricas.

5.1 FRL-deformações de uma inflexão ordinária lightlike

O resultado a seguir fornece o comportamento da cáustica em uma inflexão ordinária lightlike, as bifurcações genéricas na mesma e nos dá um modelo de deformação FRL-genérica.

Teorema 5.1.1. Seja γ uma curva regular com uma inflexão ordinária lightlike em t_0 .

- (i) A cáustica de γ é composta pela reta tangente a γ em t_0 (reta lightlike) e por uma curva suave com uma inflexão em $\gamma(t_0)$ e que está contida nos dois quadrantes determinados pelas retas lightlike que não contém a curva γ , como mostra a Figura 17 central.
- (ii) Para uma família FRL-genérica a 1-parâmetro γ_s com $\gamma_0 = \gamma$, as bifurcações na cáustica são como mostra a Figura 17. Temos dois pontos lightlike e uma inflexão ordinária em um lado da transição e dois vértices outward e uma inflexão ordinária do outro lado.

- (iii) Qualquer família FRL-genérica a 1-parâmetro em uma inflexão ordinária lightlike é FRL-equivalente à família modelo $\alpha_r(t) = (t, (1+r)t + t^3)$.

Figura 17 – Deformação FRL-genérica de uma inflexão ordinária lightlike.

Demonstração. (i) Fazendo mudanças de coordenadas se necessário podemos supor $t_0 = 0$, $\gamma(t_0) = (0,0)$ e $\gamma(t) = (t, f(t))$.

De acordo com o apresentado no Capítulo 3, a cáustica de γ é dada pelo conjunto

$$C(\gamma) = \{\gamma(t) - \lambda \gamma'(t)^\perp; t \in I \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \text{ satisfaz } \lambda \langle \gamma'(t)^\perp, \gamma''(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0\}.$$

Como γ tem uma inflexão ordinária lightlike em t_0 , segue que a função f pode ser escrita na forma $f(t) = t + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + O(t^6)$, com $c_3 \neq 0$.

Assim, a equação na definição da cáustica fica

$$0 = \lambda \langle \gamma'(t)^\perp, \gamma''(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \lambda f''(t) - 1 + f'(t)^2.$$

Se $t = t_0 = 0$, segue que $f''(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ e, conseqüentemente, a equação acima é satisfeita para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, $\{\gamma(0) - \lambda \gamma'(0)^\perp\} = \{(0,0) - \lambda(1,1)\} = \{\lambda(-1,-1)\}$ é parte da cáustica de γ .

Agora suponhamos $t \neq 0$. Note que, neste caso, $f''(t) = 6c_3 t + O(t^2) = t(6c_3 + O(t))$ e como $c_3 \neq 0$, então $f''(t) \neq 0$, para t suficientemente próximo de 0. Logo, a equação da cáustica pode ser expressa na forma $\lambda = \frac{1 - (f'(t))^2}{f''(t)}$.

Portanto, a cáustica de γ é dada por

$$C(\gamma) = \left\{ \left(t + \frac{(f'(t))^3 - f'(t)}{f''(t)}, f(t) + \frac{(f'(t))^2 - 1}{f''(t)} \right); t \neq 0 \right\} \cup \{\lambda(-1,-1); \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Substituindo a expressão de f na primeira componente de $C(\gamma)$, obtemos

$$\left\{ \left(t \left(2 - \frac{2c_4}{3c_3} t + \left(9c_3 - \frac{10c_5}{3c_3} + \frac{8c_4^2}{3c_3^2} \right) t^2 + O(t^3) \right), t \left(2 - \frac{2c_4}{3c_3} t + \left(4c_3 - \frac{10c_5}{3c_3} + \frac{8c_4^2}{3c_3^2} \right) t^2 + O(t^3) \right) \right) \right\}.$$

Reparametrizando a curva obtida, concluímos que a primeira componente da cáustica de γ é dada pela seguinte parametrização

$$\left(t, t - \frac{5}{8}c_3t^3 + O(t^4)\right).$$

Note que, neste caso, a curva obtida possui uma inflexão ordinária em $t_0 = 0$, já que ela é dada como gráfico da função $t - \frac{5}{8}c_3t^3 + O(t^4)$.

Portanto, a cáustica de γ é composta pela reta tangente a γ em t_0 (reta lightlike) e pela curva parametrizada por $(t, t - \frac{5}{8}c_3t^3 + O(t^4))$, como mostra a Figura 17 central.

(ii) Como γ_s é uma deformação FRL-genérica de $\gamma_0 = \gamma$, então podemos escrevê-la na forma $\gamma_s(t) = (t, f_s(t))$ com $f_s(t) = (1+s)t + \bar{c}_2(s)t^2 + (c_3 + \bar{c}_3)t^3 + O_s(t^4)$, onde $\bar{c}_i(0) = 0$ para $i = 2, 3$.

Note que a família de funções distância ao quadrado D é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de uma singularidade A_3 . De fato, temos

$$\begin{aligned} D_{(u,s)}(t) &= -(t - u_1)^2 + (f_s(t) - u_2)^2 \\ \frac{1}{2}D'_{(u,s)}(t) &= -(t - u_1) + (f_s(t) - u_2)f'_s(t) \\ \frac{1}{2}D''_{(u,s)}(t) &= -1 + f'_s(t)^2 + (f_s(t) - u_2)f''_s(t) \\ \frac{1}{2}D'''_{(u,s)}(t) &= 3f'_s(t)f''_s(t) + (f_s(t) - u_2)f'''_s(t) \\ \frac{1}{2}D^{(4)}_{(u,s)}(t) &= 3f''_s(t)^2 + 4f'_s(t)f'''_s(t) + (f_s(t) - u_2)f_s^{(4)}(t). \end{aligned}$$

Avaliando em $s = 0$, temos $d'_u(0) = u_1 - u_2$, $d''_u(0) = 0$, $d'''_u(0) = -6u_2c_3$ e $d_u^{(4)}(0) = 18c_3 - 24u_2c_4$. Logo, pra $u = (0, 0)$, temos que d_0 possui uma singularidade A_3 em 0. Além disso,

$$j^2\left(\frac{\partial D}{\partial u_1}(t, 0, 0, 0)\right)(0) = 2t, \quad j^2\left(\frac{\partial D}{\partial u_2}(t, 0, 0, 0)\right)(0) = -2t, \quad j^2\left(\frac{\partial D}{\partial s}(t, 0, 0, 0)\right)(0) = 2t^2,$$

e, conseqüentemente, a matriz dos jatos do Teorema 1.4.4 é $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, a qual possui posto 2 e, portanto, D é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal a 3-parâmetros de uma singularidade A_3 . O que implica que o conjunto de bifurcação de D é, localmente, difeomorfo a cuspidal edge, conforme Teorema 1.4.7 e Exemplo 1.4.9.

O conjunto de bifurcação $Bif(D)$ da família de funções distância ao quadrado D sobre γ_s é dado por

$$Bif(D) = \{(u_1, u_2, s) \in \mathbb{R}^3, 0; \exists t \in \mathbb{R}, 0 \text{ tal que } D'_{(u,s)}(t) = D''_{(u,s)}(t) = 0\}.$$

Considere a projeção de $Bif(D)$ na reta $\pi : Bif(D) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi(u_1, u_2, s) = s$. Assim, nosso objetivo é descrever, a menos de difeomorfismos, as fibras de π quando s varia próximo de 0.

Como $(u_1, u_2, s) \in \text{Bif}(D)$, então temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}D'_{(u,s)}(t) &= -t + u_1 + (f_s(t) - u_2)f'_s(t) = 0, \\ \frac{1}{2}D''_{(u,s)}(t) &= -1 + f'_s(t)^2 + (f_s(t) - u_2)f''_s(t) = 0.\end{aligned}$$

Observe que $\frac{1}{2} \frac{\partial^3 D}{\partial s \partial t^2}(0, 0, 0) = 2 \neq 0$. Logo, escrevemos $s = s(t, u_2) = -12t^2 + 3u_2^2 + O_3(t, u_2)$. Portanto, a aplicação $\pi : \text{Bif}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\pi(u_1(t, u_2), u_2, s(t, u_2)) = s(t, u_2) = -12t^2 + 3u_2^2 + O_3(t, u_2)$ e, conseqüentemente, é uma aplicação com uma singularidade Morse.

Usando a classificação de funções feita em (ARNOL'D, 1976), através de difeomorfismos na fonte preservando a cuspidal edge, obtemos três possibilidades para as fibras de π : regular (Figura 18, esquerda), transição “lips” (Figura 18, direita) ou “beak” (Figura 18, centro). No entanto, a fibra inicial $\pi^{-1}(0)$ é exatamente a cáustica de γ_0 , a qual possui uma singularidade do tipo beaks conforme item (i). Portanto, as bifurcações na cáustica de γ_s são descritas por uma transição do tipo “beaks”, como mostra a Figura 18, centro.

Figura 18 – Seções genéricas da cuspidal edge.

Logo, podemos ver que γ_s possui dois vértices de um lado da transição e nenhum do outro. No entanto, resta-nos calcular o número de inflexões e pontos lightlike e suas posições relativas.

Para isso consideramos a seção 2-dimensional do espaço de jatos dada por $(a_3, \dots, a_k) = (c_3, \dots, c_k)$. Nesta seção, o estrato de pontos lightlike, inflexões e inflexões lightlike não tem restrições em suas equações. Já o estrato de vértices passa a ser dado pela equação $c_3(1 - a_1^2) + 2a_1a_2^2 = 0$. Note que o estrato de vértices consiste em uma curva regular, uma vez que ao derivarmos a equação em relação a a_1 e aplicarmos em $(0, 0)$ obtemos $-2c_3 \neq 0$. Assim, podemos escrever a_1 em função de a_2 obtendo a seguinte parametrização da seção de V : $(1 + \frac{2}{c_3}a_2^2 + O(a_2^3), a_2)$. Além disso, ao restringirmos a aplicação de Monge-Taylor, para $s = 0$, a esta seção, obtemos a curva $(1 + 3c_3t^2 + O(t^3), 3c_3t + O(t^2))$. Logo, podemos reparametrizar tal

curva e escrevê-la na forma $(1 + \frac{1}{3c_3}t^2 + O(t^3), t)$. Comparando tal curva com os estratos obtidos concluímos que tal seção é como descreve a Figura 19.

Figura 19 – Seção transversal 2-dimensional da estratificação de $J^k(1, 1)$ por I, L, IL, V e a posição relativa da imagem da aplicação de Monge-Taylor de γ_s para $s < 0$ à esquerda, $s = 0$ ao centro e $s > 0$ à direita (caso $c_3 > 0$).

Portanto, concluímos que de um lado da transição temos uma inflexão entre dois pontos lightlike e do outro temos uma inflexão entre dois vértices. Além disso, quando γ_s possui dois vértices e uma inflexão entre eles, temos que a função curvatura possui um ponto de máximo e outro de mínimo entre um zero. Consequentemente, $\kappa_s \kappa_s'' < 0$ em ambos pontos críticos de κ_s , ou seja, ambos os vértices de γ_s são outward. Concluindo (ii).

(iii) Note que $\alpha_0(t) = (t, t + t^3)$ possui uma inflexão ordinária lightlike na origem e que a família $\alpha_r(t) = (t, f_r(t)) = (t, (1 + r)t + t^3)$ é uma família FRL-genérica, já que $\frac{\partial f}{\partial r}(t, 0) = t$.

Os cálculos feitos no item (ii) dependem somente dos fatos de que a curva possui uma inflexão ordinária lightlike e de que a família é FRL-genérica. Como vimos acima, $\alpha_r(t) = (t, (1 + r)t + t^3)$ satisfaz tais condições e, consequentemente, qualquer família a 1-parâmetro FRL-genérica é FRL-equivalente a α_r . $\square$

Observação 5.1.2. O item (i) do Teorema 5.1.1 acima pode ser obtido como corolário do Teorema 3.6 de (REEVE; TARI, 2017).

5.2 FRL-deformações de uma inflexão lightlike de ordem 2

O resultado a seguir fornece o comportamento da cáustica em uma inflexão lightlike de ordem 2, as bifurcações genéricas na mesma e nos dá um modelo de deformação FRL-genérica.

Teorema 5.2.1. Seja γ uma curva suave e regular com uma inflexão lightlike de ordem 2 em t_0 .

- (i) A cáustica de γ é composta pela reta tangente a γ em t_0 com multiplicidade 2 e por uma curva suave com uma inflexão lightlike de ordem 2 em $\gamma(t_0)$ e que está contida nos dois quadrantes determinados pelas retas lightlike que contém a curva γ , como mostra a Figura 20 (1).

- (ii) Para uma família FRL-genérica a 2-parâmetros γ_s com $\gamma_0 = \gamma$, as bifurcações na cáustica são mostradas na Figura 20.
- (iii) Qualquer família FRL-genérica a 2-parâmetros em uma inflexão lightlike de ordem 2 é FRL-equivalente à família modelo $\alpha_r(t) = (t, (1 + r_1)t + r_2t^2 + t^4)$.

Figura 20 – Deformação FRL-genérica de uma inflexão lightlike de ordem 2. A figura central é o conjunto bifurcação no espaço dos parâmetros (s_1, s_2) .

Demonstração. Como $t_0 = 0$ é uma inflexão lightlike de ordem 2, então, localmente em t_0 , podemos escrever γ na forma $\gamma(t) = (t, t + c_4t^4 + c_5t^5 + c_6t^6 + c_7t^7 + O(t^8))$, com $c_4 \neq 0$.

(i) A cáustica de γ é dada por

$$C(\gamma) = \{\gamma(t) - \lambda \gamma'(t)^\perp; t \in I \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \text{ satisfazendo } \lambda \langle \gamma'(t)^\perp, \gamma'' \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0\}.$$

Temos

$$\lambda \langle \gamma'(t)^\perp, \gamma'' \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = t^2(12c_4\lambda + O(t)),$$

ou seja, $t = 0$ é uma solução dupla da equação acima. Logo, a reta $\gamma(0) - \lambda \gamma'(0)^\perp = -\lambda(1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (contada duas vezes) faz parte da cáustica de γ .

Se $t \neq 0$, então, por meio de cálculos semelhantes aos feitos na demonstração do Teorema 5.1.1(i) concluímos que a outra componente da cáustica de γ é dada por

$$\left\{ \left(t \left(\frac{5}{3} - \frac{5c_5}{18c_4}t + O(t^2) \right), t \left(\frac{5}{3} - \frac{5c_5}{18c_4}t + O(t^2) \right) \right), t \in \mathbb{R}, 0 \right\},$$

onde a diferença entre as coordenadas é dada por $14c_4t^4 + O(t^5)$. Fazendo uma reparametrização, obtemos que tal componente é dada por

$$\left(t, t + \frac{1134}{625}c_4t^4 + O(t^5) \right),$$

a qual possui uma inflexão de ordem 2 em $t_0 = 0$.

Juntando as duas componentes, concluímos que a cáustica de γ é como mostra a Figura 20 (1).

(ii) Observamos que aqui não podemos usar a classificação de aplicações estáveis de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^2$ feita em (BRUCE; GIBLIN, 1985), porque, neste caso, $\pi: Bif(D) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(a, b, s_1, s_2) = (s_1, s_2)$ não é estável, (segundo nomenclatura do referido trabalho) já que nenhuma das fibras iniciais dos modelos obtidos no Teorema 3.1 de (BRUCE; GIBLIN, 1985) é difeomorfa a nossa fibra inicial obtida no item (i).

Logo, procedemos como segue. Primeiramente, podemos analisar as deformações em relação aos pontos lightlike e de inflexão.

Como γ_s é uma família FRL-genérica, então podemos escrevê-la na forma $\gamma_s(t) = (t, f_s(t))$, com $f_s(t) = (1 + s_1)t + s_2t^2 + \overline{c}_3(s)t^3 + (c_4 + \overline{c}_4(s))t^4 + O_s(t^5)$, com $\overline{c}_i(0) = 0$ para $i = 3, 4$.

Note que os zeros da função $g_s(t) = 1 - f'_s(t)$ nos dão os pontos lightlike de γ_s , já os pontos singulares de g_s nos dão os pontos de inflexão de γ_s .

Como $g_0(t) = 1 - f'_0(t) = -4c_4t^3 + O(t^4)$ possui uma singularidade A_2 em $t_0 = 0$, $\frac{\partial g}{\partial s_1}(t, 0, 0) = -1 + O(t^2)$ e $\frac{\partial g}{\partial s_2}(t, 0, 0) = -2t + O(t^2)$, segue que a matriz dos 1-jatos de g com constantes do Teorema 1.4.13 é

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

a qual possui posto máximo. Portanto, g_s é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal de uma singularidade A_2 .

Além disso, se considerarmos a matriz dos 1-jatos de g_s sem as constantes $\begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}$, concluímos que g_s é também uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de uma singularidade A_2 .

Logo, como apresentado no Capítulo 1, o conjunto zero de g_s (conjunto de pontos lightlike da família γ_s) é localmente uma superfície como mostra a Figura 2 ($r = 2$) e o conjunto singular de g_s (conjunto de inflexões da família γ_s) é localmente uma superfície regular (Figura 1, $r = 2$).

Encontremos as parametrizações dos conjuntos discriminante e bifurcação de g_s . Note que o conjunto discriminante de g_s corresponde ao estrato de inflexões lightlike, enquanto que o conjunto bifurcação de g_s corresponde ao estrato de inflexões de ordem 2.

O conjunto discriminante de g_s consiste dos parâmetros (s_1, s_2) para os quais $g_s = g'_s = 0$ em algum $t \in \mathbb{R}, 0$. Observe que $g_s(t) = -s_1 - 2s_2t + O_3(t, s_1, s_2)$ e $g'_s(t) = -2s_2 - 6c_{310}s_1t - 6c_{301}s_2t - 12c_4t^2 + O_3(t, s_1, s_2)$, onde c_{310} e c_{301} são os coeficientes de s_1 e s_2 em $\overline{c}_3(s)$, respectivamente.

Assim, de $g_s = 0$, obtemos $s_1 = s_1(t, s_2) = -2s_2t - 4c_4t^3 + O_{s_2}(t^4) + O_3(s_2) + O_3(s_2t)$. Substituindo em $g'_s = 0$, temos $-2s_2 - 6c_{301}s_2t - 12c_4t^2 + O_3(t, s_2) = 0$, de onde obtemos $s_2 = s_2(t) = -6c_4t^2 + O(t^3)$. Portanto, o conjunto discriminante de g_s e, conseqüentemente, o estrato de inflexões lightlike de γ_s é parametrizado por $(8c_4t^3 + O(t^4), -6c_4t^2 + O(t^3))$.

O conjunto bifurcação de g_s consiste dos parâmetros (s_1, s_2) para os quais $g'_s = g''_s = 0$ em algum $t \in \mathbb{R}, 0$. Note que $g'_s(t) = -2s_2 - 6c_{310}s_1t - 6c_{301}s_2t - 12c_4t^2 + O_3(t, s_1, s_2)$ e $g''_s(t) = -24c_4t - 6c_{310}s_1 - 6c_{301}s_2 + O_2(t, s_1, s_2)$.

De $g''_s = 0$, obtemos $t = t(s_1, s_2) = -\frac{c_{310}}{4c_4}s_1 - \frac{c_{301}}{4c_4}s_2 + O_2(s_1, s_2)$. Substituindo em $g'_s = 0$, temos $-2s_2 + \frac{3c_{310}^2}{4c_4}s_1^2 + \frac{3c_{301}c_{310}}{2c_4}s_1s_2 + \frac{3c_{301}^2}{4c_4}s_2^2 + O_3(s_1, s_2) = 0$, de onde concluímos que $s_2 = s_2(s_1) = \frac{3c_{310}^2}{4c_4}s_1^2 + O(s_1^3)$. Portanto, o conjunto bifurcação de g_s e, conseqüentemente, o estrato de inflexões de ordem 2 de γ_s é parametrizado por $\left(s_1, \frac{3c_{310}^2}{4c_4}s_1^2 + O(s_1^3)\right)$.

Utilizando a teoria desenvolvida na Seção 1.4 obtemos as bifurcações no gráfico de g_s como ilustra a Figura 21.

Assim, obtemos informações de γ_s em cada estrato da estratificação em relação aos pontos lightlike e inflexões, como descrevemos a seguir (a ordem descrita é a ordem que cada fenômeno aparece na curva). Usaremos o seguinte abuso de notação para o esquema a seguir: L para ponto lightlike; I para inflexão ordinária; IL para inflexão ordinária lightlike; $I(2)$ para inflexão de ordem 2 e $IL(2)$ para inflexão lightlike de ordem 2.

Figura 21 – Bifurcações no gráfico de g_s .

①	:	$IL(2)$
②	:	$L - I(2)$
③	:	L
④	:	$I(2) - L$
⑤	:	$I - I - L$
⑥	:	$IL - I - L$
⑦	:	$L - I - L - I - L$
⑧	:	$L - I - IL$
⑨	:	$L - I - I$

Nosso objetivo agora é encontrar o estrato de vértices de ordem 2 e o número de vértices que aparecem em cada um dos estratos obtidos.

Note primeiramente que um vértice de ordem 2 é descrito por duas equações:

$$f_s'''(1 - (f_s')^2) + 3f_s'(f_s'')^2 = 0 \quad \text{e} \quad f_s^{(4)}(1 - (f_s')^2) + 4f_s'f_s''f_s''' + 3(f_s'')^3 = 0.$$

Logo, se considerarmos $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(t, s_1, s_2) = f_s'''(t, s_1, s_2)(1 - (f_s'(t, s_1, s_2))^2) + 3f_s'(t, s_1, s_2)(f_s''(t, s_1, s_2))^2,$$

a qual é uma deformação de $G(t, 0, 0)$, então o conjunto discriminante de G é exatamente os pontos do espaço de parâmetros $s = (s_1, s_2)$ para os quais γ_s tem um vértice de ordem 2 em algum t próximo de 0.

Como $t_0 = 0$ é uma inflexão lightlike de ordem 2 de γ , segue que $f'(0) = 1, f''(0) = f'''(0) = 0$ e $f^{(4)}(0) \neq 0$. Assim, concluímos que G_0 tem uma singularidade A_3 em $t_0 = 0$.

No entanto, como G é uma deformação a 2-parâmetros de uma singularidade A_3 , segue que G não é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal. Mas sabemos que G é induzida da deformação $\mathcal{R}$ -versal $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, u, v, w) = x^4 + ux^2 + vx + w$. Logo, existem germes de aplicações suaves $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ tais que $a(t, 0) = \varphi(t)$, onde φ é o difeomorfismo que leva G_0 a x^4 , e

$$G(t, s) = F(a(t, s), b(s)) = (a(t, s))^4 + b_1(s)(a(t, s))^2 + b_2(s)a(t, s) + b_3(s),$$

onde $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Note que se s pertence ao discriminante de G , então $b(s)$ pertence ao discriminante de F , o qual é a swallowtail (Figura 3). Assim, basta conhecer, a menos de difeomorfismos, a imagem de b , que é uma seção da swallowtail.

Para encontrar a imagem de b , a consideramos como a pré-imagem de 0 por uma submersão $h : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$. Assim, podemos usar a classificação de submersões sobre a swallowtail dada pelo Teorema A.2.6 para obter um modelo simplificado de h .

Podemos escrever

$$j^k G(0) = \alpha_k(s)t^k + \dots + \alpha_4(s)t^4 + \alpha_3(s)t^3 + \alpha_2(s)t^2 + \alpha_1(s)t + \alpha_0(s),$$

com $\alpha_4 \in \mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{M}_2$, $\alpha_i \in \mathcal{M}_2$, para $i = 1, 2, 3$ e $\alpha_0 \in \mathcal{M}_2$.

Fazendo mudanças de coordenadas da forma $t \mapsto (t - \frac{\alpha_j}{4\alpha_4}t^{j-3})$, reduzimos o k -jato de G à

$$j^k G(0) = t^4 + b_1(s)t^2 + b_2(s)t + b_3(s).$$

Agora, aplicando mudanças de parâmetros em s , temos $b_1(s_1, s_2) = s_2$, $b_2(s_1, s_2) = s_1$ e $b_3(s_1, s_2) = \beta_1 s_1^2 + \beta_2 s_1 s_2 + \frac{5}{4} s_2^2 + \beta_3 s_1^3 + \beta_4 s_1^2 s_2 + \beta_5 s_1 s_2^2 - \left(\frac{88c_4 c_6 - 149c_5^2}{16c_4^2} \right) s_2^3 + O_4(s_1, s_2)$.

Portanto, a imagem de b é dada como gráfico da função $b_3(s_2, s_1)$ que, conseqüentemente, pode ser vista como a imagem inversa de 0 por $h(x, y, z) = z - b_3(x, y)$, com

$$b_3(x, y) = \beta_1 y^2 + \beta_2 xy + \frac{5}{4} x^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 xy^2 + \beta_5 x^2 y - \left(\frac{88c_4 c_6 - 149c_5^2}{16c_4^2} \right) x^3 + O_4(x, y).$$

Como o coeficiente de x^2 é diferente de $0, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{1}{4}$, segue, pelo Teorema A.2.6, que h é $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a

$$\bar{h}(x, y, z) = z - \frac{5}{4} x^2 + \left(\frac{88c_4 c_6 - 149c_5^2}{16c_4^2} \right) x^3.$$

Logo, a fibra $\bar{h}^{-1}(0)$ é dada por $\{(x, -4t^3 - 2xt, 3t^4 + xt^2); 3t^4 + xt^2 - \frac{5}{4}x^2 + \left(\frac{88c_4 c_6 - 149c_5^2}{16c_4^2} \right) x^3 = 0, t \in \mathbb{R}\}$.

Podemos verificar facilmente que a função $g_1(t, x) = 3t^4 + xt^2 - \frac{5}{4}x^2$ é 4- $\mathcal{R}$ -determinada. Logo, considerando $g_2(t, x) = 3t^4 + xt^2 - \frac{5}{4}x^2 + \left(\frac{88c_4c_6 - 149c_5^2}{16c_4^2}\right)x^3$ podemos fazer as seguintes mudanças de coordenadas $x \mapsto x + \frac{2}{5}\left(\frac{88c_4c_6 - 149c_5^2}{16c_4^2}\right)x^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{88c_4c_6 - 149c_5^2}{16c_4^2}\right)^2 x^3$ e $t \mapsto t - \frac{1}{5}\left(\frac{88c_4c_6 - 149c_5^2}{16c_4^2}\right)tx$ e, após tais mudanças, obter $j^4 g_2 = g_1$. Portanto, o termo $\left(\frac{88c_4c_6 - 149c_5^2}{16c_4^2}\right)x^3$ não interfere na fibra $\bar{h}^{-1}(0)$. Logo, a intersecção entre a swallowtail e a fibra $\bar{h}^{-1}(0)$ é dada por

$$\{(x, -4t^3 - 2xt, 3t^4 + xt^2); 3t^4 + xt^2 = \frac{5}{4}x^2, t \in \mathbb{R}\}.$$

Note que a equação $\frac{5}{4}x^2 - xt^2 - 3t^4 = 0$ possui duas soluções $x_1(t) = 2t^2$ e $x_2(t) = -\frac{6}{5}t^2$.

Portanto, o conjunto discriminante de G é difeomorfo ao conjunto

$$\{(2t^2, -8t^3, 5t^4); t \in \mathbb{R}\} \cup \left\{ \left(-\frac{6}{5}t^2, -\frac{8}{5}t^3, \frac{9}{5}t^4 \right); t \in \mathbb{R} \right\}$$

o qual é formado por duas curvas tangentes na origem.

Segue do Teorema 3.0.4 que o estrato de bifurcação relativo as inflexões ordinárias lightlike é parte do estrato de bifurcação relativo aos vértices de ordem 2. Como a swallowtail é o discriminante de um polinômio de grau 4, segue que em cada região delimitada por ela, tal polinômio possui um determinado número de soluções conforme Figura 22.

Figura 22 – Número de soluções de $F(t, u, v, w) = t^4 + ut^2 + vt + w$ em cada região delimitada pela swallowtail.

Plotando a fibra de $\bar{h}$ juntamente com a swallowtail obtemos o número de vértices em cada estrato. Utilizando o número de vértices de cada estrato, a Proposição 4.1.1, os Teoremas 4.2.1 e 5.1.1, podemos concluir que as FRL-deformações de γ são dadas na Figura 20.

O item (iii) segue do fato de $\alpha_r(t) = (t, (1 + r_1)t + r_2t^2 + t^4)$ ser FRL-genérica e os cálculos em (ii) dependerem apenas do fato da curva tem uma inflexão lightlike de ordem 2 e da deformação ser FRL-genérica. $\square$

Observação 5.2.2. O item (i) do Teorema 5.2.1 pode ser obtido como corolário do Teorema 3.6 de (REEVE; TARI, 2017).

DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE UMA CÚSPIDE ORDINÁRIA

Nos capítulos anteriores estudamos as deformações geométricas para o caso de curvas planas regulares. Nosso objetivo nesse e no próximo capítulo é analisar o caso singular. Mais especificamente, neste capítulo, redefinimos o conceito de deformações FRS-genérica e FRLS-genérica para curvas com uma singularidade cúspide ordinária não lightlike e lightlike, respectivamente, e, por meio desta, estudamos as deformações e bifurcações da curva e sua cáustica em uma cúspide ordinária não lightlike (Seção 6.1) e em uma cúspide ordinária lightlike (Seção 6.2).

Para curvas no plano Minkowski temos uma versão da Proposição 2.1 de (SALARI-NOGHABI; TARI, 2017) como vemos a seguir.

Proposição 6.0.1. Considere $\gamma_s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0,0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família a m -parâmetros de curvas planas com γ_0 singular em $t = 0$. Então, a família de funções distância ao quadrado $D : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m, (0,0,0) \rightarrow \mathbb{R}, 0$ sobre γ dada por $D(t, u, s) = \langle \gamma_s(t) - u, \gamma_s(t) - u \rangle$ não é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal da singularidade de $D_0(t) = D(t, 0, 0)$ em $t = 0$, para qualquer $m \geq 1$.

Demonstração. Se γ_0 for infinitamente flat (isto é, γ_0 tem todas as derivadas na origem se anulando, mas não é nula), então D_0 também é infinitamente flat e, conseqüentemente, D_0 não pode ser deformada $\mathcal{R}^+$ -versalmente. Agora suponha que γ_0 possua alguma derivada não nula e que tal derivada seja de ordem k , com $k \geq 2$. Fazendo mudanças de coordenadas, podemos supor $\gamma_s(t) = (t^k, \beta_s(t))$ com $j^k \beta_0(0) \equiv 0$, se γ_0 for timelike, $\gamma_s(t) = (\alpha_s(t), t^k)$ com $j^k \alpha_0(0) \equiv 0$, se γ_0 for spacelike e $\gamma_s(t) = (t^k, t^k + \delta_s(t))$ com $j^k \delta_0(0) \equiv 0$, se γ_0 for lightlike. Considere $u = (u_1, u_2)$. Temos três casos para analisar:

Caso timelike: $D(t, u, s) = -(t^k - u_1)^2 + (\beta_s(t) - u_2)^2$. A função $D_0 = D(t, 0, 0) = -t^{2k} +$

$O(t^{2k+2})$ possui uma singularidade A_{2k-1} em $t = 0$ e

$$j^2\left(\frac{\partial D}{\partial u_1}(t, 0, 0)\right)(0) = \begin{cases} 2t^2 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{se } k > 2 \end{cases}, \quad j^2\left(\frac{\partial D}{\partial u_2}(t, 0, 0)\right)(0) = 0, \quad j^2\left(\frac{\partial D}{\partial s_i}(t, 0, 0)\right)(0) = 0,$$

para $i = 1, \dots, m$. Logo, a matriz dos jatos do Critério 1.4.4 é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \text{ se } k = 2 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \text{ se } k > 2.$$

Caso spacelike: $D(t, u, s) = -(\alpha_s(t) - u_1)^2 + (t^k - u_2)^2$. A função $D_0 = D(t, 0, 0) = t^{2k} + O(t^{2k+2})$ possui uma singularidade A_{2k-1} em $t = 0$ e

$$j^2\left(\frac{\partial D}{\partial u_1}(t, 0, 0)\right)(0) = 0, \quad j^2\left(\frac{\partial D}{\partial u_2}(t, 0, 0)\right)(0) = \begin{cases} -2t^2 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{se } k > 2 \end{cases}, \quad j^2\left(\frac{\partial D}{\partial s_i}(t, 0, 0)\right)(0) = 0,$$

para $i = 1, \dots, m$. Logo, a matriz dos jatos do Critério 1.4.4 é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \text{ se } k = 2 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \text{ se } k > 2.$$

Caso lightlike: $D(t, u, s) = -(t^k - u_1)^2 + (t^k + \delta_s(t) - u_2)^2$. A função $D_0 = D(t, 0, 0) = O(t^{2k+1})$ possui uma singularidade $A_{\geq 2k}$ em $t = 0$ e

$$j^2\left(\frac{\partial D}{\partial u_j}(t, 0, 0)\right)(0) = \begin{cases} (-1)^{j+1}2t^2, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{cases}, \quad j^2\left(\frac{\partial D}{\partial s_i}(t, 0, 0)\right)(0) = 0,$$

para $j = 1, 2$ e $i = 1, \dots, m$. Logo, a matriz dos jatos do Critério 1.4.4 é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \text{ se } k = 2 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \text{ se } k > 2.$$

Em todos os casos a matriz dos jatos do Critério 1.4.4 possui pelo menos uma linha nula e, conseqüentemente, não possui posto $2(k-1)$, ou seja, D não é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de D_0 em $t = 0$. $\square$

Observação 6.0.2. Note que a matriz dos jatos do Critério 1.4.13 é a matriz dos jatos do Critério 1.4.4 acrescida de uma linha, ou seja, de modo análogo, podemos mostrar que, nas condições da Proposição 6.0.1, a família de funções distância ao quadrado não é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal da singularidade D_0 em $t = 0$.

A Proposição 6.0.1 acima diz que para qualquer deformação de uma curva singular, a família de funções distância ao quadrado correspondente não é versal. Tal resultado, assim como sua versão no caso Euclidiano, indica que a teoria geral para descrever singularidades juntamente com a geometria de curvas pode não vir da ação de um subgrupo do grupo de contato $\mathcal{K}$ sobre o conjunto de germes sobre a curva.

Na seção a seguir analisamos as deformações geométricas de uma cúspide ordinária não-lightlike (fenômeno de codimensão 1) e, posteriormente, na Seção 6.2, analisamos as deformações geométricas de uma cúspide ordinária lightlike (fenômeno de codimensão 2).

6.1 FRS-deformações de uma cúspide ordinária (não lightlike)

Considere γ uma curva plana não lightlike dada por $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, $t \in I$, singular em $0 \in I$.

Para cada $t_0 \in I$ podemos fazer mudanças de coordenadas se necessário, e supor $\gamma(t_0) = 0$ e escrever

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \left(\alpha'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}\alpha''(t_0)(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3); \right. \\ & \left. \beta'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}\beta''(t_0)(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3) \right). \end{aligned}$$

A partir de γ , obtemos a aplicação de Monge-Taylor como em (3.1), ou seja, dada por

$$j^k \phi_\gamma(t_0) = \left(\alpha'(t_0), \frac{1}{2!}\alpha''(t_0), \dots, \frac{1}{k!}\alpha^{(k)}(t_0); \beta'(t_0), \frac{1}{2!}\beta''(t_0), \dots, \frac{1}{k!}\beta^{(k)}(t_0) \right).$$

Usando a identificação de $J^k(1, 2)$ com $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, denotamos por $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k)$ as coordenadas em $J^k(1, 2)$. Os estratos de interesse são os seguintes:

$$\begin{aligned} \text{Cúspide (C):} & \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases} \\ \text{Lightlike (L):} & \quad a_1 \pm b_1 = 0 \\ \text{Inflexões (I):} & \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \\ \text{Vértices (V):} & \quad (a_1^2 - b_1^2)(a_1 b_3 - a_3 b_1) + 2(b_1 b_2 - a_1 a_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \end{aligned}$$

Os estratos de inflexões e vértices foram obtidos, respectivamente, tomando o numerador de $\kappa = 0$ e $\kappa' = 0$ e ignorando os denominadores, os quais se anulam somente nos pontos singulares e lightlike.

Suponhamos γ uma curva timelike (o caso spacelike segue de modo análogo) que tenha uma singularidade do tipo cúspide ordinária em $t_0 = 0$, ou seja, γ é $\mathcal{A}$ -equivalente à curva parametrizada por (t^2, t^3) . Logo, podemos fazer mudanças de coordenadas e escrever

$$\gamma(t) = (t^2, \beta(t)) = (t^2, c_3 t^3 + O(t^4)), \quad (6.1)$$

com $c_3 \neq 0$. Assim, $\gamma''(0) = (2, 0) \neq (0, 0)$. Os estratos I, V e L são subvariedades de $J^k(1, 2)$ de codimensão 1 que contém a subvariedade C de codimensão 2. O estrato I é suave ao longo de C , o estrato L é composto por duas componente ortogonais L_1 e L_2 , representadas, respectivamente, pelas equações $a_1 + b_1 = 0$ e $a_1 - b_1 = 0$, e o estrato V é a união de duas subvariedades suaves V_1 e V_2 que se intersectam transversalmente ao longo de C . De fato, considere o estrato V dado pela equação

$$(a_1^2 - b_1^2)(a_1 b_3 - a_3 b_1) + 2(b_1 b_2 - a_1 a_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

Estamos interessados na análise de tais estratos em uma vizinhança do ponto $j^k \phi_\gamma(0) = (0, 1, 0, \dots, 0; 0, 0, c_3, \dots, c_k)$, com $c_3 \neq 0$ e em tal vizinhança, $\langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle = -a_2^2 + b_2^2$ está próximo de -1 e, portanto, é não nulo. Dessa forma, podemos fazer a seguinte mudança de coordenadas descrita na forma matricial (juntamente com sua inversa)

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-a_2^2 + b_2^2} \begin{pmatrix} b_2 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

e escrever a equação do estrato V da seguinte forma:

$$2A_1 B_1 + \frac{((b_2 A_1 + a_2 B_1)^2 - (a_2 A_1 + b_2 B_1)^2)(b_3(b_2 A_1 + a_2 B_1) - a_3(a_2 A_1 + b_2 B_1))}{(-a_2^2 + b_2^2)^3} = 0.$$

Tomando $A_1 = \overline{A}_1 + \overline{B}_1$ e $B_1 = \overline{A}_1 - \overline{B}_1$, temos

$$-\overline{A}_1^2((-a_2^2 + b_2^2)^2 + 2\overline{B}_1(a_2 + b_2)(b_3 - a_3)) + \overline{B}_1^2((-a_2^2 + b_2^2)^2 - 2\overline{A}_1(-a_2 + b_2)(a_3 + b_3)) = 0.$$

Como $(-a_2^2 + b_2^2)^2 + 2\overline{B}_1(a_2 + b_2)(b_3 - a_3)$ e $(-a_2^2 + b_2^2)^2 - 2\overline{A}_1(-a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$ estão próximos de 1, podemos fazer mudanças de coordenadas e escrever a equação de V na forma

$$-\widetilde{A}_1^2 + \widetilde{B}_1^2 = (\widetilde{A}_1 + \widetilde{B}_1)(-\widetilde{A}_1 + \widetilde{B}_1) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1^2 &= \overline{A}_1^2((-a_2^2 + b_2^2)^2 + 2\overline{B}_1(a_2 + b_2)(b_3 - a_3)), \\ \widetilde{B}_1^2 &= \overline{B}_1^2((-a_2^2 + b_2^2)^2 - 2\overline{A}_1(-a_2 + b_2)(a_3 + b_3)). \end{aligned}$$

Logo, o estrato V é composto pelas subvariedades V_1 e V_2 , dadas pelas equações $\widetilde{A}_1 + \widetilde{B}_1 = 0$ e $\widetilde{A}_1 - \widetilde{B}_1 = 0$, respectivamente.

Portanto, o cone tangente de V_1 ao longo de C é dado pela equação $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ e o de V_2 por $a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0$. Logo, V_1 é tangente a I ao longo de C e V_2 é transversal a I .

Podemos escrever qualquer família de curvas γ_s a 1-parâmetro contendo $\gamma = \gamma_0$ da forma

$$\gamma_s(t) = (t^2, \beta(t, s)) = (t^2, \overline{c}_1(s)t + \overline{c}_2(s)t^2 + \overline{c}_3(s)t^3 + O_s(t^4)), \quad (6.2)$$

com $\overline{c}_1(0) = \overline{c}_2(0) = 0$, $\overline{c}_3(0) = c_3 \neq 0$, $\overline{c}_k(0) = c_k$, com $k \geq 4$, e $s \in \mathbb{R}, 0$.

A família a 1-parâmetro γ_s induz uma família de aplicações de Monge-Taylor $j^k\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0,0) \rightarrow J^k(1,2)$ dada por $j^k\Phi(t,s) = j^k\phi_{\gamma_s}(t)$.

Queremos definir o conceito de FRS-genericidade para o caso de uma cúspide ordinária não-lightlike. Para isso, usamos a família de aplicações de Monge-Taylor. Se a imagem de tal família para o parâmetro inicial for transversal aos estratos envolvidos, então, ao deformar, a transversalidade com relação a tais estratos é preservada. Note que se a imagem de $d(j^k\Phi)(0,0)$ é transversal ao estrato C , então também é transversal aos estratos I, L e V .

Note que o espaço tangente ao estrato C no ponto $j^k\phi_{\gamma}(0)$ é gerado pelos vetores $e_2, \dots, e_k, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$, onde e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{2k}$. Logo, para γ_s como em (6.2), a transversalidade entre $j^k\Phi$ e o estrato C ocorre se, e somente se, os vetores e_1 e e_{k+1} pertencem ao conjunto $Im(dj^k\Phi(0,0)) + \mathbb{R} \cdot \{e_2, \dots, e_k, e_{k+2}, \dots, e_{2k}\}$. Por outro lado, $j^k\Phi(t,s) = (2t, 1, 0, \dots, 0; \beta'_s(t), \frac{1}{2}\beta''_s(t), \dots, \frac{1}{k!}\beta_s^{(k)}(t))$. Então, a matriz jacobiana de $j^k\Phi$ em $(0,0)$ é dada por

$$Jac(j^k\Phi)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial^2 \beta}{\partial s \partial t}(0,0) \\ 3c_3 & \frac{\partial^3 \beta}{\partial s \partial t^2}(0,0) \\ \vdots & \vdots \\ (k+1)c_{k+1} & \frac{\partial^{k+1} \beta}{\partial s \partial t^k}(0,0) \end{pmatrix}.$$

Claramente $e_1 \in Im(dj^k\Phi(0,0)) + \mathbb{R} \cdot \{e_2, \dots, e_k, e_{k+2}, \dots, e_{2k}\}$. No entanto, temos $e_{k+1} \in Im(dj^k\Phi(0,0)) + \mathbb{R} \cdot \{e_2, \dots, e_k, e_{k+2}, \dots, e_{2k}\}$ se, e somente se, $\frac{\partial^2 \beta}{\partial s \partial t}(0,0) \neq 0$, a qual é exatamente a condição para que a família γ_s seja uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal da singularidade cúspide ordinária de γ (ver Teorema 1.3.3). Por esta razão, definimos o conceito de FRS-genericidade de deformações de uma cúspide ordinária como segue.

Definição 6.1.1. Sejam γ um germe de uma cúspide ordinária não-lightlike e γ_s uma família de curvas a 1-parâmetro com $\gamma_0 = \gamma$. Dizemos que γ_s é uma deformação **FRS-genérica** de γ se γ_s é uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de γ .

Teorema 6.1.2. Seja γ uma curva plana não-lightlike com uma singularidade cúspide ordinária em t_0 .

- (i) A cáustica de γ é composta pela reta normal limite a γ em t_0 com multiplicidade 2 e por uma curva suave que tem tangência ordinária em $\gamma(t_0)$ com a reta normal limite de γ em t_0 . Além disso, tal curva está contida no semiplano determinado pela reta normal a γ em t_0 que não contém a curva γ , como mostra a Figura 23 centro.
- (ii) Para uma família FRS-genérica γ_s a 1-parâmetro, com $\gamma_0 = \gamma$, as bifurcações na curva e em sua cáustica são mostradas na Figura 23.

- (iii) Qualquer família FRS-genérica a 1-parâmetro que contém γ é FRS-equivalente à família modelo $\alpha_r(t) = (t^2, rt + t^3)$.

Figura 23 – Deformação FRS-genérica de uma cúspide ordinária não-lightlike.

Figura 24 – Bifurcação da cúspide ordinária e sua evoluta (figura obtida usando Maple).

Demonstração. Suponhamos que a curva γ seja timelike, o caso spacelike é análogo.

- (i) Seja γ uma curva com singularidade cúspide ordinária em t_0 . Então podemos escrevê-la como em (6.1).

A cáustica de γ é formada pelos pontos $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que a função distância ao quadrado sobre γ tem uma singularidade $A_{\geq 2}$, ou seja, $d'_u(t) = d''_u(t) = 0$, onde

$$d_u(t) = d(t, u) = -(t^2 - u_1)^2 + (\beta(t) - u_2)^2 = -t^4 + 2u_1t^2 - u_1^2 + \beta^2(t) - 2u_2\beta(t) + u_2^2.$$

Usando a equação $d''_u(t) = 0$ obtemos $u_1 = 3t^2 - \frac{1}{2}\beta'^2(t) - \frac{1}{2}\beta(t)\beta''(t) + \frac{1}{2}u_2\beta''(t)$. Substituindo em $d'_u(t) = 0$ temos

$$t^2 \left(4t + u_2 \frac{(-\beta'(t) + \beta''(t)t)}{t^2} + \frac{\beta(t)(\beta'(t) - \beta''(t)t) - \beta'^2(t)t}{t^2} \right) = 0.$$

Assim, $t = 0$ é uma raiz dupla da equação acima, ou seja, a reta $u_1 = 0$ deve ser considerada com multiplicidade 2 na cáustica de γ .

Para $t \neq 0$, temos

$$u_2 = \frac{4t^3 + (-\beta(t)\beta''(t) - \beta'^2(t))t + \beta(t)\beta''(t)}{\beta'(t) - \beta''(t)t}.$$

Portanto, a cáustica de γ é formada pela reta $u_1 = 0$ (com multiplicidade 2) e pela curva parametrizada por $\left(-t^2 + O(t^3), \frac{-4}{3c_3}t + O(t^2)\right)$ como ilustra a Figura 23 centro.

(ii) Seja γ_s uma família FRS-genérica a 1-parâmetro com $\gamma_0 = \gamma$. Tal família pode ser tomada na forma

$$\gamma_s(t) = (t^2, \beta(t, s)) = (t^2, \bar{c}_1(s)t + \bar{c}_2(s)t^2 + \bar{c}_3(s)t^3 + O_s(t^4)),$$

com $\bar{c}_1(0) = \bar{c}_2(0) = 0, \bar{c}_3(0) = c_3 \neq 0$ e $\bar{c}_k(0) = c_k$, para $k \geq 4$.

Como γ_s é uma família FRS-genérica, segue que $\bar{c}_1'(0) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial s \partial t}(0, 0) \neq 0$. Logo, podemos fazer mudanças de parâmetros e supor $\bar{c}_1(s) = s$. Assim, $\gamma_s(t) = (t^2, \beta(t, s)) = (t^2, st + \bar{c}_2(s)t^2 + \bar{c}_3(s)t^3 + O_s(t^4))$.

Investiguemos γ_s , para $s \neq 0$, com relação a pontos lightlike, inflexões e vértices.

Pontos lightlike: Note que γ_s possui um ponto lightlike em t quando $\beta'_s(t) = \frac{\partial \beta}{\partial t}(t, s) = \pm 2t$.

Considere as famílias $h^\mp(t, s) = \beta'_s(t) \mp 2t = s + 2(\bar{c}_2(s) \mp 1)t + 3\bar{c}_3(s)t^2 + O_s(t^3)$, os quais são deformações de $h_0^\mp(t) = \mp 2t + 3c_3t^2 + O(t^3)$. Note que $h_0^\mp$ é regular em $t = 0$. Assim, para cada $s \neq 0$ fixo, a deformação h_s^- possui um zero e h_s^+ possui outro zero. Usando o Teorema da função implícita, obtemos que os zeros de $h_s^\mp$ e, consequentemente, os pontos lightlike de γ_s , são dados por $t = \pm \frac{1}{2}s + O(s^2)$, ou seja, para cada $s \neq 0$, existem dois pontos lightlike sobre γ_s .

Inflexões: Analisando a expressão de κ_s observamos que seu denominador só se anula em pontos lightlike e singulares de γ . No entanto, para $s \neq 0$ a curva γ_s é regular próximo de $t_0 = 0$ e os pontos lightlike que encontramos anteriormente não anulam o numerador. Logo, para encontrarmos as inflexões de γ_s , basta encontrar os zeros do numerador da função curvatura κ_s .

Para isso considere a família $G(t, s) = -\beta'_s(t) + t\beta''_s(t)$, a qual é metade do numerador de $\kappa_s(t)$. Logo, $G_s(t) = -s + 3\bar{c}_3(s)t^2 + O_s(t^3)$. Note que $\frac{\partial G}{\partial s}(0, 0) = -1 \neq 0$, ou seja, G_s é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal de $G_0(t) = 3c_3t^2 + O(t^3)$, a qual é uma singularidade A_1 . Portanto, se $c_3 > 0$, G_s possui 2 zeros para $s > 0$ e nenhum para $s < 0$, e se $c_3 < 0$, G_s possui 2 zeros para $s < 0$ e nenhum para $s > 0$.

Vértices: Os vértices de γ_s são dados pela equação $\kappa'_s(t) = 0$. No entanto, o denominador de κ'_s só se anula nos pontos lightlike e singulares de γ_s . Como o numerador de κ'_s não é anulado pelos pontos lightlike já encontrados e γ_s é regular para $s \neq 0$, segue que para encontrarmos os vértices de γ_s basta encontrar os zeros do numerador de κ'_s .

Considere $H(t, s) = 2t\beta'''_s(t)(-4t^2 + (\beta'_s(t))^2) + 3(\beta'_s(t) - t\beta''_s(t))(-8t + 2\beta'_s(t)\beta''_s(t)) = 12\bar{c}_2(s)s^2 + 24((\bar{c}_2(s))^2 - 1)s + 2\bar{c}_3(s)s^2)t + 120(\bar{c}_2(s)\bar{c}_3(s)s + \bar{c}_4(s)s^2)t^2 + 24(\bar{c}_3(s)(1 - \bar{c}_2(s)^2) +$

$3(\overline{c_3}(s)^2 + 4\overline{c_2}(s)\overline{c_4}(s))s)t^3 + O_s(t^4)$, o qual corresponde ao numerador de κ'_s . Note que H é uma deformação de $H_0(t) = 24c_3t^3 + O(t^5)$, a qual é uma singularidade A_2 .

Como H é uma deformação a 1-parâmetro de uma singularidade A_2 , segue que H não é $\mathcal{R}$ -versal. No entanto, sabemos que $F(t, s_1, s_2) = t^3 + s_1t + s_2$ é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal de t^3 . Portanto, existem germes de aplicações suaves $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, 0$ e $b : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ tais que $a(t, 0) = \varphi(t)$, onde φ é o difeomorfismo que leva H_0 em t^3 , e

$$H(t, s) = F(a(t, s), b(s)) = a(t, s)^3 + b_1(s)a(t, s) + b_2(s),$$

onde $b(s) = (b_1(s), b_2(s))$.

Note que o conjunto zero de H nos fornece os vértices de γ_s e é levado por (a, b) dentro do conjunto zero de F , ou seja, o conjunto zero de H pode ser visto como uma seção do conjunto zero de F . Além disso, a aplicação b também leva conjunto discriminante em conjunto discriminante, ou seja, a estratificação do espaço de parâmetros é preservada. Conhecemos a estratificação do espaço de parâmetros de F , como descrito na Figura 25. Tal figura inclui o número de pontos no conjunto zero para parâmetros fixados em cada estrato.

Figura 25 – Estratificação do espaço de parâmetros de F .

Vamos estudar a imagem de b . Para isso, precisamos dos 1-jatos de b_1 e b_2 para calcular a reta tangente, mas para provar que a curva $b(s)$ entra na região de 3 soluções, comparamos a segunda entrada de $b(s)$ com a segunda entrada da cúspide, para tal usamos o 1-jato de b_1 e o 2-jato de b_2 .

Escrevendo $j^k H(t, s) = \alpha_k(s)t^k + \dots + \alpha_3(s)t^3 + \alpha_2(s)t^2 + \alpha_1(s)t + \alpha_0(s)$, com $\alpha_0 \in \mathcal{M}_1^3, \alpha_1 \in \mathcal{M}_1, \alpha_2 \in \mathcal{M}_1^2$ e $\alpha_3 \in \mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{M}_1$, e usando as mudanças de coordenadas da forma $t \mapsto t - \frac{\alpha_j}{3\alpha_3}t^{j-2}$, podemos eliminar os termos de ordem maior.

Investigando quais termos em $j^k H(t, s)$ contribuem para $j^2 \alpha_0$ e $j^1 \alpha_1$, concluímos que tais termos são $j^2 \alpha_0, j^1 \alpha_1, j^1 \alpha_2, j^0 \alpha_3$ e $j^0 \alpha_4$. Assim, considerando em $j^k H(t, s)$ apenas tais termos, obtemos, após as mudanças de coordenadas descritas anteriormente, $H(t, s) = -24st + 24c_3t^3$. Como $H_0(t) = 24c_3t^3 + O(t^4)$, segue que $a(t, s) = \sqrt[3]{24c_3}t + O(t^2)$ e, assim, $b(s) = \left(\frac{-24}{\sqrt[3]{24c_3}}s + O(s^2), O(s^3) \right)$. Portanto, a imagem de b é uma curva regular com tangente $(-1, 0)$. Logo, para concluirmos que tal curva adentra a região de 3 soluções, a comparamos com o conjunto discriminante de F , descrito pela curva $(-3t^2, 2t^3)$. Assim, se fixarmos a primeira entrada, temos $\frac{-24}{\sqrt[3]{24c_3}}s + O(s^2) = -3t^2$, então, pelo Teorema da Função implícita, $s = O(t^2)$ e,

consequentemente, substituindo na segunda entrada de b , temos $O(t^6)$, o que é, para t suficientemente próximo de zero, bem menor que a segunda entrada de $\mathcal{D}_F$ dada por $2t^3$. Portanto, a curva $b(s)$ adentra a região de 3 soluções, provando que há 1 vértice em um lado da transição e 3 do outro. Note que se $b_3 > 0$, então γ_s possui 1 vértice para $s < 0$ e 3 para $s > 0$, e se $b_3 < 0$, segue que γ_s possui 3 vértices para $s < 0$ e 1 para $s > 0$.

Portanto, mostramos que γ_s possui 1 vértice e 2 pontos lightlike de um lado da transição e 3 vértices, 2 inflexões e 2 pontos lightlike do outro. No entanto, resta-nos concluir sobre a posição relativa de cada um desses pontos.

Posição relativa de pontos lightlike, inflexões e vértices:

Primeiramente encontremos uma seção 2-dimensional da estratificação de $J^k(1,2)$ por C, L, I, V . Para isso, fixamos $(a_2, a_3, \dots, a_k; b_2, b_3, \dots, b_k) = (1, 0, \dots, 0; 0, c_3, \dots, c_k)$, com $c_3 \neq 0$. Neste caso, os estratos C e L continuam sendo expressos pelas mesmas equações, ou seja, $a_1 = 0$ e $b_1 = 0$ definem C e $a_1 \pm b_1 = 1$ define L . Já o estrato I é descrito por $b_1 = 0$ e V é dado por $a_1 = 0$ ou $\lambda(a_1^2 - b_1^2) + 2b_1 = 0$, essa segunda equação do estrato V descreve uma curva regular cujo vetor tangente é paralelo ao vetor $(1, 0)$. Portanto, tal seção 2-dimensional é como descreve a Figura 26 centro.

Além disso, $(j^k \phi_{\gamma_0})'(t_0) = (2a_2(t_0), \dots, (k+1)a_{k+1}(t_0); 2b_2(t_0), \dots, (k+1)b_{k+1}(t_0))$. Logo, $(j^k \phi_{\gamma_0})'(0) = (2, 0, \dots, 0; 0, 3c_3, \dots, (k+1)c_{k+1})$, a qual é tangente aos estratos I e V_1 e transversal a V_2 e L . Portanto, a posição relativa de $j^k \phi_{\gamma_s}$ com relação aos estratos C, L, I, V é dada na Figura 26.

Figura 26 – Seção transversal 2-dimensional da estratificação de $J^k(1,2)$ por C, L, I, V e a posição relativa da imagem da aplicação de Monge-Taylor de γ_s para $s < 0$ à esquerda, $s = 0$ ao centro e $s > 0$ à direita (caso $b_3 > 0$).

A partir da Figura 26, obtemos a posição relativa dos pontos lightlike, inflexões e vértices. No entanto, tal figura não nos dá a posição relativa de tais pontos com o ponto de auto-intersecção, o que investigamos no que segue.

Auto-intersecções: Note que as auto-intersecções de γ_s são dadas pelo sistema

$$\begin{cases} t_1^2 = t_2^2 \\ \beta_s(t_1) = \beta_s(t_2) \end{cases},$$

com $t_1 \neq t_2$.

Como $t_1^2 = t_2^2$ e $t_1 \neq t_2$, segue que $t_1 = -t_2 = t$. Logo, os pontos de auto-intersecção de γ_s são dados pela equação $\beta_s(t) = \beta_s(-t)$.

Considere $h(t, s) = \frac{1}{2}(\beta_s(t) - \beta_s(-t)) = st + \bar{c}_3(s)t^3 + O_s(t^5)$ (somente potências ímpares de t). Escrevendo $h(t, s) = t\bar{h}(t, s) = t(s + \bar{c}_3(s)t^2 + O_s(t^4))$ e $u = t^2$, temos $\bar{h}(u, s) = s + \bar{c}_3(s)u + O_s(u^2)$. Assim, os pontos de auto-intersecção de γ_s são determinados pelos zeros de $\bar{h}$. Como $\bar{c}_3(0) = c_3 \neq 0$, segue, pelo Teorema da Função Implícita, que $u = -\frac{1}{c_3}s + O(s^2)$, ou seja, $t^2 = -\frac{1}{c_3}s + O(s^2)$. As duas soluções desta equação são simétricas e dão os valores de t_1 e t_2 para os quais $\gamma_s(t_1) = \gamma_s(t_2)$.

Portanto, se $c_3 > 0$, segue que γ_s possui 1 ponto de auto-intersecção para $s < 0$ e nenhum para $s > 0$, e se $c_3 < 0$, então β_s não possui auto-intersecção para $s < 0$ e possui 1 para $s > 0$. Logo, concluímos que γ_s possui uma auto-intersecção na etapa da transição que aparece 1 vértice e 2 pontos lightlike.

Resta-nos concluir sobre a posição relativa do ponto de auto-intersecção com relação ao vértice e aos pontos lightlike.

Sabemos que o vértice está entre os dois pontos lightlike, os quais são dados pela equação $t^2 = \frac{1}{4}s^2 + O(s^3)$, enquanto que o ponto de auto-intersecção é dado pela equação $t^2 = -\frac{1}{c_3}s + O(s^2)$. Portanto, para s suficientemente próximo de zero, os pontos lightlike estão entre os pontos de auto-intersecção.

Tipo dos vértices: Para decidir sobre o tipo dos vértices que obtivemos anteriormente precisamos estudar o sinal de $\kappa_s \kappa_s''$ sobre tais vértices, para isso, analisaremos o comportamento do gráfico de k_s . Suponhamos $c_3 > 0$, o caso $c_3 < 0$ é análogo.

Para $s > 0$, temos que γ_s possui 2 inflexões ($k_s = 0$), 3 vértices ($\kappa_s' = 0$) e 2 pontos lightlike (pontos onde κ_s vai para o infinito). Observamos que entre os pontos lightlike a curva γ_s é spacelike e fora desse intervalo é timelike. Note também que o sinal de κ_s é determinado pelo sinal de $\langle \gamma_s'', \gamma_s^\perp \rangle$, ou seja, independe se a curva γ_s é timelike ou spacelike. Além disso, como $t = 0$ está entre os pontos lightlike (uma vez que tais pontos são simétricos), segue que $k_s > 0$ entre as inflexões e $k_s < 0$ fora deste intervalo. Logo, o gráfico de k_s tem o comportamento descrito na Figura 27 direta. Portanto, o vértice central é inward, já que sobre ele temos $\kappa_s \kappa_s'' > 0$ e os dois extremos são outward, já que sobre eles $\kappa_s \kappa_s'' < 0$.

Para $s = 0$, temos $\kappa_0(t) = \frac{6c_3 t^2 + O(t^3)}{|4t^2 - 9c_3^2 t^4 + O(t^5)|^{\frac{3}{2}}} = \frac{3b_3}{4} \frac{1}{|t|} (1 + O(t))$. Logo, o gráfico de κ_s tem o comportamento descrito na Figura 27 centro.

Para $s < 0$, temos 1 vértice ($\kappa_s' = 0$), 2 pontos lightlike (onde κ_s vai para o infinito) e não temos inflexões, ou seja, $\kappa_s \neq 0$. Além disso, observamos que a curva γ_s é spacelike entre os 2 pontos lightlike e é timelike fora deste intervalo. No entanto, o sinal de k_s é constante e como $k_s(0) < 0$ concluímos que $k_s < 0$. Logo, o gráfico de κ_s tem o comportamento descrito na Figura

27 esquerda. Portanto, temos $\kappa_s \kappa_s'' > 0$, o que implica que o vértice é inward.

Figura 27 – Transição no gráfico da função curvatura de γ_s .

A partir de todas as análises feitas anteriormente e do estudo descrito nos capítulos anteriores sobre o comportamento da evoluta em inflexões e vértices, podemos concluir que as bifurcações na cáustica de γ_s são descritas na Figura 23.

(iii) Os cálculos feitos em (ii) dependem somente do fato de que a curva tem uma singularidade cúspide ordinária não-lightlike e a família que a contém é FRS-genérica. A família $\alpha_r(t) = (t^2, rt + t^3)$ satisfaz tais condições, e, conseqüentemente, serve como um modelo FRS-genérico. $\square$

Observação 6.1.3. No caso Euclidiano, estudado em (SALARINOUGHABI; TARI, 2017), também temos uma versão do resultado acima e da Figura 23, mais especificamente, o Teorema 4.4 e a Figura 9 de (SALARINOUGHABI; TARI, 2017). As diferenças entre os casos são a presença de pontos lightlike na Figura 23 e as cáusticas obtidas tem posicionamento diferente do caso Euclidiano devido as diferenças já observadas em torno de pontos lightlike, inflexões e vértices.

A proposição a seguir mostra que podemos obter as deformações da cáustica de γ_s tomando seções do conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado D sobre γ . Além disso, ela mostra uma relação entre o conjunto bifurcação da função distância ao quadrado com o conjunto bifurcação de uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de uma singularidade A_3 . Tal proposição coincide exatamente com parte do Teorema 4.4 de (SALARINOUGHABI; TARI, 2017), mas a demonstração é feita para curvas no plano Minkowski.

Proposição 6.1.4. Seja γ uma curva plana com uma singularidade cúspide ordinária não-lightlike em t_0 .

- (i) A função distância ao quadrado d_u sobre γ tem uma singularidade A_3 em t_0 se $u = \gamma(t_0) = (0, 0)$; uma singularidade A_2 se $u \neq \gamma(t_0)$ está sobre a reta normal limite de γ em t_0 e uma singularidade A_1 em t_0 caso contrário.
- (ii) Seja γ_s uma família FRS-genérica a 1-parâmetro, com $\gamma_0 = \gamma$. Então, o conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre γ é como mostra a Figura 28,

esquerda. Além disso, suas seções por planos $s = \text{constante}$, as quais são modelos para bifurcações genéricas na evolva de γ_s (como já mostramos no Teorema 6.1.2), são como mostra a Figura 28 direita.

- (iii) O morfismo entre a família de funções distância ao quadrado sobre γ e a deformação $\mathcal{R}^+$ -versal $F(t, v, w) = t^4 + vt^2 + wt$, com $(v, w) \in \mathbb{R}^2, 0$, de t^4 (singularidade A_3) induz um germe $b : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ com $b(u) = (v, w)$, que é $\mathcal{A}$ -equivalente ao germe da aplicação cúspide $(x, y) \mapsto (x, xy + y^3)$.

Figura 28 – Esboço do conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre γ_s (esquerda) e suas seções por planos $s = \text{cte}$ (direita).

Demonstração. Suponhamos que a curva γ é timelike, o caso spacelike segue de modo análogo.

- (i) Considere a curva γ como em (6.1). Assim, a função distância ao quadrado é dada por

$$\begin{aligned} d(t, u_1, u_2) &= \langle \gamma(t) - u, \gamma(t) - u \rangle \\ &= -(t^2 - u_1)^2 + (\beta(t) - u_2)^2 \\ &= -u_1^2 + u_2^2 + 2u_1t^2 - 2u_2\beta(t) - t^4 + \beta(t)^2. \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, suas derivadas com relação a t são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d'_u &= -2t^3 + 2u_1t + \beta(t)\beta'(t) - u_2\beta'(t) \\ \frac{1}{2}d''_u &= -6t^2 + 2u_1 + \beta'(t)^2 + \beta(t)\beta''(t) - u_2\beta''(t) \\ \frac{1}{2}d'''_u &= -12t + 3\beta'(t)\beta''(t) + \beta(t)\beta'''(t) - u_2\beta'''(t) \\ \frac{1}{2}d^{(4)}_u &= -12 + 3\beta''(t)^2 + 4\beta'(t)\beta'''(t) + \beta(t)\beta^{(4)}(t) - u_2\beta^{(4)}(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}d'_u(0) = 0, \quad \frac{1}{2}d''_u(0) = 2u_1, \quad \frac{1}{2}d'''_u(0) = -6c_3u_2, \quad \frac{1}{2}d^{(4)}_u(0) = -12 - 24c_4u_2.$$

Portanto, se $u_1 \neq 0$, então d_u tem uma singularidade A_1 em $t = 0$; se $u_1 = 0$ e $u_2 \neq 0$, então d_u tem uma singularidade A_2 em $t = 0$, e se $u = (u_1, u_2) = (0, 0)$, então d_u tem uma singularidade A_3 em $t = 0$.

(ii) Considere γ_s como em (6.2), com $\overline{c_1}(s) = s$. O conjunto de bifurcação $Bif(D)$ da família de funções distância ao quadrado D sobre γ_s é dado pela projeção $\pi(S)$, onde $\pi(t, u_1, u_2, s) = (u_1, u_2, s)$ e $S = \{(t, u_1, u_2, s) \in \mathbb{R}^4; D'_{(u,s)}(t) = D''_{(u,s)}(t) = 0\}$.

Como $Bif(D)$ é visto como a projeção ortogonal da superfície S , segue que $Bif(D)$ é singular somente nos pontos em que a direção de projeção $(1, 0, 0, 0)$ é tangente a S , o que ocorre quando $D'''_{(u,s)}(t) = 0$. Temos,

$$\begin{aligned} D(t, u_1, u_2, s) &= -(t^2 - u_1)^2 + (\beta_s(t) - b)^2; \\ \frac{1}{2}D'_{(u,s)}(t) &= -2t^3 + 2u_1t + \beta'_s(t)(\beta_s(t) - u_2); \\ \frac{1}{2}D''_{(u,s)}(t) &= -6t^2 + 2u_1 + \beta''_s(t)(\beta_s(t) - u_2) + \beta'_s(t)^2; \\ \frac{1}{2}D'''_{(u,s)}(t) &= -12t + \beta'''_s(t)(\beta_s(t) - u_2) + 3\beta'_s(t)\beta''_s(t); \\ \frac{1}{2}D^{(4)}_{(u,s)}(t) &= -12 + \beta^{(4)}_s(t)(\beta_s(t) - u_2) + 4\beta'_s(t)\beta'''_s(t) + 3\beta''_s(t)^2. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Calculemos os pontos singulares de $Bif(D)$. Como $\beta'''_0(0) = 6c_3 \neq 0$, segue que $\beta'''_s(t) \neq 0$ para t e s próximos de 0. Logo, de $D''' = 0$, obtemos $u_2 = u_2(t, s)$. De $D'' = 0$, obtemos $u_1 = u_1(t, s)$. Finalmente, a equação $D' = 0$ se torna do tipo $f(t, s) = 0$, com $j^2 f = \frac{2}{b_3}ts$. Portanto, o conjunto singular de $Bif(D)$ é formado por duas curvas. Tais curvas são parametrizadas por germes com 2-jatos da forma $\left(-3t^2, -\frac{2}{c_3}t + \frac{8c_4}{c_3^2}t^2, c_3t^2\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}s^2, 0, s\right)$, as quais são suaves e têm direções tangentes ao longo de $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, respectivamente.

Uma das curvas é tangente ao plano $s = 0$ e a outra transversal ao mesmo. A tangência é ordinária ($c_3 \neq 0$), o que implica que tal curva intersecta o plano $s = \text{constante} > 0$ em 2 pontos e $s = \text{constante} < 0$ em nenhum ou vice-versa (dependendo do sinal de c_3). Já a intersecção entre a outra curva e planos paralelos a $s = 0$ é formada por um único ponto.

Fora da origem, o conjunto $Bif(D)$ é uma cuspidal edge ao longo de suas curvas singulares. De fato, pelas contas acima, D_0 possui uma singularidade A_3 na origem e, portanto, as singularidades de $D_{(u,s)}$ são do tipo $A_{\leq 3}$. Além disso, sobre os pontos singulares de $Bif(D)$ temos $D' = D'' = D''' = 0$, ou seja, são pontos (u, s) tais que $D_{(u,s)}$ tem uma singularidade A_3 para algum t próximo de 0.

Agora mostremos que sobre as curvas de singularidades de $Bif(D)$ e fora da origem, a família de funções distância ao quadrado D é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de uma singularidade A_3 .

Sobre a curva $\alpha_1(t) = \left(-3t^2 + O(t^3), -\frac{2}{c_3}t + \frac{8c_4}{c_3^2}t^2 + O(t^3), c_3t^2 + O(t^3)\right)$:

Considere $p_1 = \alpha_1(t_0)$, para algum $t_0 \neq 0$.

Derivando D com relação aos parâmetros, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial u_1}(t, u_1, u_2, s) &= t^2 - u_1 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial u_2}(t, u_1, u_2, s) &= -\beta_s(t) + u_2 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial s}(t, u_1, u_2, s) &= \frac{\partial \beta}{\partial s}(t, s)(\beta_s(t) - u_2). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Substituindo $u_1 = -3t_0^2 + O(t_0^3)$, $u_2 = -\frac{2}{c_3}t_0 + \frac{8c_4}{c_3^2}t_0^2 + O(t_0^3)$, $s = c_3t_0^2 + O(t_0^3)$ nas equações acima e tomando seus 2-jatos em torno de t_0 , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} j^2 \left(\frac{\partial D}{\partial u_1}(t, p_1) \right) (t_0) &= (t - t_0)^2 + 2t_0(t - t_0) \\ \frac{1}{2} j^2 \left(\frac{\partial D}{\partial u_2}(t, p_1) \right) (t_0) &= (-3c_3t_0 + O(t_0^2))(t - t_0)^2 + (-4c_3t_0^2 + O(t_0^3))(t - t_0) \\ \frac{1}{2} j^2 \left(\frac{\partial D}{\partial s}(t, p_1) \right) (t_0) &= \left(\frac{2c_{21}}{c_3}t_0 + O(t_0^2) \right) (t - t_0)^2 + \left(\frac{2}{c_3}t_0 + O(t_0^2) \right) (t - t_0), \end{aligned}$$

onde c_{21} é o coeficiente de s em $\overline{c_2}(s)$. Logo, a matriz dos jatos do Critério 1.4.4 é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -3c_3t_0 + O(t_0^2) & \frac{2c_{21}}{c_3}t_0 + O(t_0^2) \\ 2t_0 & -4c_3t_0^2 + O(t_0^3) & \frac{2}{c_3}t_0 + O(t_0^2) \end{pmatrix},$$

a qual possui posto 2, uma vez que o menor

$$\begin{pmatrix} 1 & -3c_3t_0 + O(t_0^2) \\ 2t_0 & -4c_3t_0^2 + O(t_0^3) \end{pmatrix},$$

tem determinante igual a $2c_3t_0^2 + O(t_0^3) \neq 0$, já que $c_3 \neq 0$ e $t_0 \neq 0$.

Sobre a curva $\alpha_2(s) = (-\frac{1}{2}s^2 + O(s^3), O(s^3), s + O(s^3))$:

Considere $p_2 = \alpha_2(s_0)$, para algum $s_0 \neq 0$. O parâmetro t para o qual D_{p_2} tem uma singularidade A_3 é dado por $t_0 = \frac{c_{21}}{2}s_0^2 + O(s_0^3)$.

Tomando $u_1 = -\frac{1}{2}s_0^2 + O(s_0^3)$, $u_2 = O(s_0^3)$, $s = s_0 + O(s_0^3)$ em (6.4) e calculando os 2-jatos das três derivadas em (6.4) em torno de t_0 , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} j^2 \left(\frac{\partial D}{\partial u_1}(t, p_2) \right) (t_0) &= (t - t_0)^2 + c_{21}s_0^2(t - t_0); \\ \frac{1}{2} j^2 \left(\frac{\partial D}{\partial u_2}(t, p_2) \right) (t_0) &= (-c_{21}s_0 + O(s_0^2))(t - t_0)^2 + (-s_0 + O(s_0^2))(t - t_0); \\ \frac{1}{2} j^2 \left(\frac{\partial D}{\partial s}(t, p_2) \right) (t_0) &= (s_0 + O(s_0^2))(t - t_0)^2 + (c_{21}s_0^3 + O(s_0^4))(t - t_0), \end{aligned}$$

onde c_{21} é o coeficiente que acompanha s em $\overline{c_2}(s)$. Assim, a matriz dos jatos do Teorema 1.4.4 é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_{21}s_0 + O(s_0^2) & s_0 + O(s_0^2) \\ c_{21}s_0^2 & -s_0 + O(s_0^2) & c_{21}s_0^3 + O(s_0^4) \end{pmatrix},$$

a qual possui posto 2, uma vez que o menor

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_{21}s_0 + O(s_0^2) \\ c_{21}s_0^2 & -s_0 + O(s_0^2) \end{pmatrix},$$

tem determinante igual a $-s_0 + O(s_0^2) \neq 0$, já que $s_0 \neq 0$.

Portanto, em ambas as situações, pelo Teorema 1.4.4, temos que D é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal sobre os pontos das curvas de singularidades de $Bif(D)$. Consequentemente, pelo Teorema 1.4.7, temos que $Bif(D)$ é localmente difeomorfo a uma cuspidal edge.

Observamos que, fora da origem, $Bif(D)$ é tangente ao plano $s = 0$ ao longo de uma curva suave. De fato, pelos mesmos cálculos feitos na demonstração do item (i) do Teorema 6.1.2, podemos concluir que a intersecção entre $Bif(D)$ e o plano $s = 0$ é dado pela reta $\gamma_1(b) = (0, u_2, 0)$ juntamente com a curva $\gamma_2(t) = (-t^2 + O(t^3), -\frac{4}{3c_3}t + O(t^2), 0)$. Tomando uma seção de $Bif(D)$ através do plano $u_2 = u_{2_0}$, podemos obter $s = s(t, u_1)$ da primeira equação de $Bif(D)$ e, posteriormente, $u_1 = u_1(t)$ da segunda equação de $Bif(D)$. Concluímos que a intersecção de $Bif(D)$ com o plano $u_2 = u_{2_0}$ é a curva parametrizada por $\gamma_3(t) = (3u_{2_0}c_3t + O(t^2), u_{2_0}, 3c_3t^2 + O(t^3))$, com direção tangente igual a $\gamma'_3(t) = (3u_{2_0}c_3 + O(t), 0, 6c_3t + O(t^2))$. A curva γ_3 intersecta as curvas γ_1 e γ_2 . Claramente o ponto de intersecção entre as curvas γ_3 e γ_1 é dado por $t = 0$. Note que γ'_1 e γ'_3 no ponto de intersecção gera o plano tangente a $Bif(D)$ em tal ponto, o mesmo vale para o ponto de intersecção entre as curvas γ_2 e γ_3 . Assim, $\gamma'_1(0) = (0, 1, 0)$ e $\gamma'_3(0) = 3u_{2_0}c_3(1, 0, 0)$ são os geradores do plano tangente a $Bif(D)$ em $(0, u_{2_0}, 0)$, o qual é $s = 0$. Portanto, $Bif(D)$ é tangente ao plano $s = 0$ ao longo da reta γ_1 . Além disso, como o ponto de intersecção entre γ_2 e γ_3 é para $t \neq 0$, segue que o plano gerado por γ'_2 e γ'_3 em tal ponto não é o plano $s = 0$, ou seja, $Bif(D)$ não é tangente ao plano $s = 0$ ao longo de γ_2 .

A Figura 28 esboça a superfície $Bif(D)$ e suas seções por planos $s = \text{constante}$.

(iii) De (i), temos que a família de funções distância ao quadrado d_u tem uma singularidade A_3 em $t = 0$ para $u = (0, 0)$. Como $F(t, v, w) = t^4 + vt^2 + wt$ é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de t^4 , então a família d é $\mathcal{R}^+$ -induzida de F , ou seja,

$$d(t, u_1, u_2) = F(a(t, u_1, u_2), b(u_1, u_2)) + c(u_1, u_2),$$

para germes suaves a, b e c , tais que $a(t, 0, 0) = \phi(t)$ e $b(0, 0) = 0$, onde ϕ é o difeomorfismo entre d_0 e t^4 .

A aplicação b leva o conjunto bifurcação de d (o qual é exatamente a cáustica de γ) no conjunto bifurcação de F , o qual é a cúspide parametrizada por $(-6t^2, 8t^3)$.

Analisando a expressão de d e avaliando quais jatos contribuem para o 3-jato de b , podemos fazer mudanças de coordenadas e concluir que

$$\begin{aligned} j^3 b(u_1, u_2) = & \left(-2c_3 u_1 u_2 + 5c_3 c_4 u_1 u_2^2 + (-4c_3^3 - 2c_5) u_1^2 u_2 - c_3^3 u_2^3 + 2c_3 c_4 u_1^3, \right. \\ & 2u_1 - 2u_1 c_4 u_2 + \frac{3}{2} c_3^2 u_2^2 + u_1^2 c_3^2 + (3c_4^2 + \frac{27}{4} c_3^4 + 6c_3 c_5) u_2^2 u_1 + \\ & \left. (-14c_3^2 c_4 - 2c_6) u_2 u_1^2 - \frac{9}{2} c_3^2 u_2^3 c_4 + (2c_3^4 + 2c_3 c_5 + c_4^2) u_1^3 \right). \end{aligned}$$

Como $c_3 \neq 0$, segue que o $j^3 b$ é $\mathcal{A}^{(3)}$ -equivalente a $(u_1, u_1 u_2 + u_2^3)$.

Por outro lado, a aplicação cúspide $(u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_1 u_2 + u_2^3)$ é 3- $\mathcal{A}$ -determinada, então b é $\mathcal{A}$ -equivalente a $(u_1, u_1 u_2 + u_2^3)$.

Podemos visualizar a aplicação cúspide b como a composta da parametrização da superfície $(u_2, b(u_1, u_2))$ com a projeção ortogonal π de tal superfície na direção $(1, 0, 0)$ como mostra a Figura 29.

Figura 29 – Relação entre o conjunto bifurcação de d (cáustica de γ) e o conjunto bifurcação de F .

A cúspide ordinária do conjunto bifurcação de F coincide com o conjunto discriminante de π , e o conjunto bifurcação de d (i.e, a cáustica de γ) é a pré-imagem da cúspide pela aplicação cúspide b . Na Figura 29 podemos ver que a pré-imagem da cúspide por π possui duas componentes que destacamos com as cores azul e vermelho, as quais têm suas pré-imagens destacadas, com as mesmas cores, na composição da cáustica de γ . $\square$

6.2 FRLS-deformações de uma cúspide ordinária (lightlike)

Nesta seção, consideramos γ uma curva plana com uma singularidade cúspide ordinária lightlike em $t_0 = 0$. Como o fenômeno cúspide ordinária lightlike é de codimensão 2, segue que os estratos multilocais devem ser considerados. Logo, nossa estratificação é no espaço de multi-jatos ${}_2J^k(1, 2) \subset J^k(1, 2) \times J^k(1, 2)$.

Observamos que os estratos locais em $J^k(1, 2)$ podem ser vistos como estratos de ${}_2J^k(1, 2)$ por meio de um produto e, conseqüentemente, basta calculá-los em $J^k(1, 2)$. Os estratos locais de codimensão 2 ou 3, neste caso, são: Cúspide lightlike (CL) (codimensão 3), Cúspide (C), Inflexão de ordem 2 ($I(2)$), Inflexão lightlike (IL) e Vértice de ordem 2 ($V(2)$) (todos de codimensão 2), os quais são dados pelas seguintes equações

$$\begin{aligned}
 CL : & \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \end{cases} \\
 C : & \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases} \\
 I(2) : & \quad \begin{cases} a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0 \end{cases} \\
 IL : & \quad \begin{cases} a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \\ a_1 \pm b_1 = 0 \end{cases} \\
 V(2) : & \quad \begin{cases} (a_1^2 - b_1^2)(a_1 b_3 - a_3 b_1) + 2(b_1 b_2 - a_1 a_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \\ (-a_1^2 + b_1^2)(2(a_1 b_4 - a_4 b_1) + a_2 b_3 - a_3 b_2) - (a_1 b_3 - a_3 b_1)(b_1 b_2 - a_1 a_2) - \\ -(a_1 b_2 - a_2 b_1)(3(b_1 b_3 - a_1 a_3) + 2(b_2^2 - a_2^2)) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Para singularidades multilocais precisamos considerar o valor da curva γ no parâmetro t . Assim, se $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, então a aplicação bi-jato de Monge-Taylor é como em (3.4), ou seja, dada por

$$\begin{aligned}
 {}_2j^k \phi_\gamma(t_1, t_2) = & \left((\alpha(t_1), \alpha'(t_1), \dots, \frac{1}{k!} \alpha^{(k)}(t_1); \beta(t_1), \beta'(t_1), \dots, \frac{1}{k!} \beta^{(k)}(t_1)); \right. \\
 & \left. (\alpha(t_2), \alpha'(t_2), \dots, \frac{1}{k!} \alpha^{(k)}(t_2); \beta(t_2), \beta'(t_2), \dots, \frac{1}{k!} \beta^{(k)}(t_2)) \right).
 \end{aligned}$$

Denotamos por $((a_0, a_1, \dots, a_k; b_0, b_1, \dots, b_k); (a'_0, a'_1, \dots, a'_k; b'_0, b'_1, \dots, b'_k))$ as coordenadas em $J^k(1, 2) \times J^k(1, 2)$. Os estratos multilocais de codimensão 3 são: Inflexão transversal (IT), correspondente a pontos de intersecção transversal entre dois ramos em que em um deles tal ponto é uma inflexão; Lightlike transversal (LT), correspondente a pontos de intersecção transversal entre dois ramos em que em um deles tal ponto é lightlike; Vértice transversal (VT), correspondente a pontos de intersecção transversal entre dois ramos em que em um deles tal ponto é um vértice e Tacnode (Tc), correspondente a pontos de intersecção tangencial entre dois

ramos. Abaixo expressamos as equações que os definem:

$$\begin{aligned}
 IT : \quad & \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \end{cases} \\
 LT : \quad & \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1 \pm b_1 = 0 \end{cases} \\
 VT : \quad & \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ (a_1^2 - b_1^2)(a_1 b_3 - a_3 b_1) + 2(b_1 b_2 - a_1 a_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \end{cases} \\
 Tc : \quad & \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1 b'_1 - a'_1 b_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Suponhamos γ uma curva timelike (o caso spacelike segue de modo análogo) que tenha uma singularidade do tipo cúspide ordinária lightlike em $t_0 = 0$. Então, fazendo mudanças de coordenadas se necessário, podemos supor

$$\gamma(t) = (t^2, t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + O(t^5)),$$

com $c_3 \neq 0$. Nosso interesse está na vizinhança do ponto $j^k \phi_\gamma(0) = (0, 1, \dots, 0; 0, 1, c_3, \dots, c_k)$.

A Proposição 6.2.1 a seguir fornece uma propriedade do estrato de vértices.

Proposição 6.2.1. O estrato de vértices se escreve como a união de duas componentes tangentes cujo cone tangente comum é dado por $a_1 - b_1 = 0$.

Demonstração. Considere o estrato de vértices $V: (a_1^2 - b_1^2)(a_1 b_3 - a_3 b_1) + 2(b_1 b_2 - a_1 a_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$. Note que tal estrato depende apenas de elementos em $J^3(1, 2)$. Logo, podemos supor $k = 3$ e provar a proposição em $J^3(1, 2)$.

Usando a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} A_1 = a_1 - b_1 \\ B_1 = a_1 + b_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}(A_1 + B_1) \\ b_1 = \frac{1}{2}(B_1 - A_1) \end{cases}$$

a equação de V fica da forma

$$-A_1^2(-B_1(b_3 + a_3) + (a_2 + b_2)^2) + B_1^2(A_1(b_3 - a_3) + (a_2 - b_2)^2) = 0. \quad (6.5)$$

De modo geral se temos uma equação na forma

$$-(a - by)x^2 + (cy^2)x + dy^2 = 0,$$

então podemos completar quadrado em x e obter

$$(2(a - by)x - cy^2)^2 - y^2(c^2y^2 - 4bdy + 4ad) = 0.$$

Completando quadrado em y obtemos

$$(2(a - by)x - cy^2)^2 - y^2((cy - \frac{2bd}{c})^2 - \frac{4b^2d^2}{c^2} + 4ad) = 0.$$

Multiplicando essa equação por c^2 , chegamos a seguinte equação

$$(2c(a - by)x - c^2y^2)^2 - y^2((c^2y - 2bd)^2 - 4d(b^2d - ac^2)) = 0.$$

Tomando $x = A_1, y = B_1, a = (a_2 + b_2)^2, b = b_3 + a_3, c = b_3 - a_3$ e $d = (a_2 - b_2)^2$ nos cálculos feitos acima, a equação (6.5) se torna

$$\widetilde{A}_1^2 - B_1^2(B^2 - 4(a_2 - b_2)^2[(b_3 + a_3)^2(a_2 - b_2)^2 - (a_2 + b_2)^2(b_3 - a_3)^2]) = 0,$$

com

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1 &= 2(b_3 - a_3)((a_2 + b_2)^2 - (b_3 + a_3)B_1)A_1 - (b_3 - a_3)^2B_1^2, \\ B &= (b_3 - a_3)^2B_1 - 2(b_3 + a_3)(a_2 - b_2)^2. \end{aligned}$$

Simplificando a expressão entre colchetes obtemos

$$\widetilde{A}_1^2 - B_1^2(B^2 - 4(a_2 - b_2)^2(b_3a_2 - a_3b_2)(b_3b_2 - a_2a_3)) = 0.$$

Como $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ está próximo de $(0, 1, 0, 0, 1, c_3)$, segue que o termo $(b_3a_2 - a_3b_2)(b_3b_2 - a_2a_3)$ está próximo de c_3^2 , o qual é estritamente positivo. Portanto, podemos denotar

$$\widetilde{B}_1^2 = B_1^2(B^2 - 4(a_2 - b_2)^2(b_3a_2 - a_3b_2)(b_3b_2 - a_2a_3))$$

e concluir que o estrato V pode ser escrito na forma

$$\widetilde{A}_1^2 - \widetilde{B}_1^2 = (\widetilde{A}_1 + \widetilde{B}_1)(\widetilde{A}_1 - \widetilde{B}_1) = 0.$$

Logo, V é formado por duas componentes, cujas equações são $\widetilde{A}_1 + \widetilde{B}_1 = 0$ e $\widetilde{A}_1 - \widetilde{B}_1 = 0$. Calculando o cone tangente de ambas as componentes, obtemos que o mesmo é dado pela equação $a_1 - b_1 = 0$. $\square$

Seja γ_s uma deformação a 2-parâmetros de γ . Por meio de mudanças de coordenadas, podemos tomar a família γ_s na forma

$$\gamma_s(t) = (t^2, \overline{c}_1(s)t + (\overline{c}_2(s) + 1)t^2 + \overline{c}_3(s)t^3 + \overline{c}_4(s)t^4 + O_s(t^5)), \quad (6.6)$$

com $\overline{c}_1(0) = \overline{c}_2(0) = 0, \overline{c}_3(0) = c_3 \neq 0$ e $\overline{c}_k(0) = c_k$, para $k \geq 4$.

Associado à deformação γ_s temos a família de aplicações bi-jato de Monge-Taylor ${}_2j^k\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (0, 0) \rightarrow {}_2J^k(1, 2)$ dada por ${}_2j^k\Phi(t_1, t_2, s) = {}_2j^k\phi_{\gamma_s}(t_1, t_2)$. A Proposição 6.2.2 a seguir nos dá condições sobre a deformação γ_s para que a aplicação ${}_2j^k\Phi$ seja transversal aos estratos envolvidos.

Proposição 6.2.2. Considere γ_s uma deformação a 2-parâmetros de γ como em (6.6). Então a família de aplicações bi-jato de Monge-Taylor ${}_2j^k\Phi$ é transversal aos estratos $CL, C, I(2), IL, V(2), IT, LT, VT$ e Tc se, e somente se, $\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0,0) \neq 0$ e

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0,0) & \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_2}(0,0) \\ \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_1}(0,0) & \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_2}(0,0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. Quando γ é uma cúspide ordinária lightlike, pelo Teorema 6.2.4, os estratos $I(2), IT$ e Tc são vazios. Logo, verificamos a transversalidade com relação aos estratos $CL, C, IL, V(2), LT$ e VT .

Primeiramente mostraremos a transversalidade de ${}_2j^k\Phi$ com relação aos estratos locais CL, C, IL e $V(2)$. Para isso, basta mostrar a transversalidade de $j^k\Phi$ com relação aos estratos locais, já que a estratificação de $J^k(1,2)$ fornece uma estratificação produto em ${}_2J^k(1,2)$.

Note que o estrato CL está contido nos estratos C, IL e $V(2)$. Assim, se $j^k\Phi$ é transversal a CL , então também é transversal aos outros estratos locais.

O espaço tangente a CL em $J^k(1,2)$ é gerado pelos vetores $e_3, \dots, e_k, e_{k+3}, \dots, e_{2k}, e_2 + e_{k+2}$, onde e_i é o vetor canônico de $\mathbb{R}^{2k}$, $i = 1, \dots, 2k$.

Por outro lado,

$$d(j^k\Phi)(0,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial t} & \frac{\partial a_1}{\partial s_1} & \frac{\partial a_1}{\partial s_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial a_k}{\partial t} & \frac{\partial a_k}{\partial s_1} & \frac{\partial a_k}{\partial s_2} \\ \frac{\partial b_1}{\partial t} & \frac{\partial b_1}{\partial s_1} & \frac{\partial b_1}{\partial s_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial b_k}{\partial t} & \frac{\partial b_k}{\partial s_1} & \frac{\partial b_k}{\partial s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0,0) & \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_2}(0,0) \\ 3c_3 & \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_1}(0,0) & \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_2}(0,0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (k+1)c_{k+1} & \frac{\partial \bar{c}_k}{\partial s_1}(0,0) & \frac{\partial \bar{c}_k}{\partial s_2}(0,0) \end{pmatrix}.$$

Logo, para que $d(j^k\Phi)(0,0,0)$ seja transversal ao estrato CL devemos mostrar que $Im(d(j^k\Phi)(0,0,0)) + T_p CL = J^k(1,2)$, com $p = j^k\phi_{\gamma_0}(0) \in \mathbb{R}^{2k}$. Claramente $Im(d(j^k\Phi)(0,0,0)) + T_p CL \subset J^k(1,2)$. Para mostrarmos a outra inclusão, basta provar que cada vetor da base canônica de $J^k(1,2) \simeq \mathbb{R}^{2k}$ pertence a $Im(d(j^k\Phi)(0,0,0)) + T_p CL$.

Obviamente $e_i \in Im(d(j^k\Phi)(0,0,0)) + T_p CL$ para $i = 3, \dots, k, k+3, \dots, 2k$. Logo, restamos verificar tal propriedade para e_1, e_2, e_{k+1} e e_{k+2} . No entanto, como $e_2 + e_{k+2} \in T_p CL$, então é suficiente considerar apenas um dos dois vetores, e_2 ou e_{k+2} . Devido ao fato da segunda linha da matriz de $d(j^k\Phi)(0,0,0)$ ser nula, escolhemos o vetor e_{k+2} . Assim, nosso objetivo é provar que $e_1, e_{k+1}, e_{k+2} \in Im(d(j^k\Phi)(0,0,0)) + T_p CL$, ou seja, mostrar que existem vetores $u^1, u^2, u^3 \in \mathbb{R}^3$

tais que

$$\begin{aligned} e_1 &= d(j^k \Phi)(0, 0, 0) \cdot u^1 + v^1; \\ e_{k+1} &= d(j^k \Phi)(0, 0, 0) \cdot u^2 + v^2; \\ e_{k+2} &= d(j^k \Phi)(0, 0, 0) \cdot u^3 + v^3, \end{aligned}$$

onde $v^1, v^2, v^3 \in T_p CL$.

Analisando cada uma das equações, concluímos que as mesmas são satisfeitas se, e somente se, existem vetores $(u_2^i, u_3^i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$ tais que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_2}(0, 0) \\ \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_2}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^1 \\ u_3^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2}c_3 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_2}(0, 0) \\ \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_2}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_2}(0, 0) \\ \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_2}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^3 \\ u_3^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

o que ocorre se, e somente se, a matriz $\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_2}(0, 0) \\ \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_2}(0, 0) \end{pmatrix}$ tem posto máximo, ou seja, tem determinante não nulo.

Resta-nos verificar a transversalidade de ${}_2j^k \Phi$ com relação aos estratos multilocais LT e VT . Primeiramente, analisamos o espaço tangente a imagem de ${}_2j^k \Phi$ no ponto ${}_2j^k \phi_{\gamma_0}(0)$. Para isso, precisamos do espaço tangente a imagem de $j^k \Phi$ no ponto $j^k \phi_{\gamma_0}(0)$, o qual é gerado pelos vetores v_1, v_2, v_3 , onde

$$\begin{aligned} v_1 &= (2, 0, \dots, 0; 2, 3c_3, \dots, (k+1)c_{k+1}); \\ v_2 &= (0, 0, \dots, 0; \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0), \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_1}(0, 0), \dots, \frac{\partial \bar{c}_k}{\partial s_1}(0, 0)); \\ v_3 &= (0, 0, \dots, 0; \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_2}(0, 0), \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_2}(0, 0), \dots, \frac{\partial \bar{c}_k}{\partial s_2}(0, 0)). \end{aligned}$$

Para o caso multilocal o espaço tangente a imagem de ${}_2j^k \Phi$ no ponto ${}_2j^k \phi_{\gamma_0}(0)$ é gerado por

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{\partial {}_2j^k \phi_{\gamma_s}}{\partial t_1}(0) = ((0, v_{11}; 0, v_{12}), (0, 0; 0, 0)); \\ \bar{v}_2 &= \frac{\partial {}_2j^k \phi_{\gamma_s}}{\partial t_2}(0) = ((0, 0; 0, 0), (0, v_{11}; 0, v_{12})); \\ \bar{v}_3 &= \frac{\partial {}_2j^k \phi_{\gamma_s}}{\partial s_1}(0) = ((0, v_{21}; 0, v_{22}), (0, v_{12}; 0, v_{22})); \\ \bar{v}_4 &= \frac{\partial {}_2j^k \phi_{\gamma_s}}{\partial s_2}(0) = ((0, v_{31}; 0, v_{32}), (0, v_{32}; 0, v_{32})), \end{aligned}$$

onde $v_1 = (v_{11}; v_{12})$, $v_2 = (v_{12}; v_{22})$ e $v_3 = (v_{31}; v_{32})$,

Agora analisemos a transversalidade em relação a cada estrato multilocal.

LT: Neste caso, o espaço tangente a *LT* no ponto ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$ é dado pela intersecção dos núcleos das 1-formas $\xi_1 = da_0 - da'_0$, $\xi_2 = db_0 - db'_0$ e $\xi_3 = da_1 \pm db_1$. Além disso, observe que a aplicação ${}_2j^k\Phi$ restrita ao espaço (a_0, b_0, a'_0, b'_0) é dada por $((t_1^2, \beta_s(t_1)), (t_2^2, \beta_s(t_2)))$, a qual é singular. Logo, usamos a segunda derivada para encontrar o espaço tangente limite, o qual é gerado por $((1, 0), (0, 0))$ e $((0, 0), (1, 0))$.

Note que $\xi_1((1, 0), (0, 0)) \neq 0$ e $\xi_1((0, 0), (1, 0)) \neq 0$, ou seja, ${}_2j^k\Phi$ é transversal a subvariedade de codimensão 2 dada pelas duas primeiras equações de *LT*.

Por outro lado,

$$\xi_3(\bar{v}_1) = 2 \pm 2 = \begin{cases} 4 \\ 0 \end{cases}; \quad \xi_3(\bar{v}_2) = 0; \quad \xi_3(\bar{v}_3) = \pm \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0); \quad \xi_3(\bar{v}_4) = 0.$$

Logo, para garantir a transversalidade do espaço tangente limite da imagem de ${}_2j^k\Phi$ com relação as duas componentes de *LT* (uma relativa ao sinal + e outra ao sinal -) devemos ter $\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0) \neq 0$.

VT: Pelo item anterior, o espaço tangente limite a imagem de ${}_2j^k\Phi$ em ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$ é transversal a subvariedade de codimensão 2 dada pelas duas primeiras equações de *VT*.

Por outro lado, pela Proposição 6.2.1, o cone tangente às duas componentes do estrato de vértices é dado pela equação $a_1 - b_1 = 0$, ou seja, pelo núcleo da 1-forma $\xi_3 = da_1 - db_1$. Logo, como no caso *LT*, $\xi_3(\bar{v}_i) \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, 4$ se, e somente se, $\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0) \neq 0$. Portanto, a transversalidade de *VT* com relação ao espaço tangente limite a imagem de ${}_2j^k\Phi$ em ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$ ocorre se, e somente se, $\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0) \neq 0$. $\square$

Observamos que a condição $\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0) \neq 0$ é exatamente a condição para que γ_s seja uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de γ . Logo, pela Proposição 6.2.2 tal condição é necessária, mas não suficiente para garantir a transversalidade da família de aplicações bi-jato de Monge-Taylor com relação aos estratos envolvidos.

Tendo em vista a Proposição 6.2.2, definimos o conceito de deformação FRLS-genérica de uma cúspide ordinária lightlike como segue.

Definição 6.2.3. Sejam γ uma cúspide ordinária lightlike e γ_s uma deformação a 2-parâmetros de $\gamma_0 = \gamma$ como em (6.6). Dizemos que γ_s é uma deformação **FRLS-genérica** se γ_s é uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de γ_0 e

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_2}(0, 0) \\ \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_1}(0, 0) & \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial s_2}(0, 0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Seguindo a Definição 6.2.3, se γ_s é uma deformação a 2-parâmetros como em (6.6) e FRLS-genérica, então podemos fazer mudanças de parâmetros e tomar $\bar{c}_1(s_1, s_2) = s_1$ e

$\overline{c}_2(s_1, s_2) = s_2$, ou seja, $\gamma_s(t) = (t^2, \beta_s(t))$, com

$$\beta_s(t) = s_1 t + (s_2 + 1)t^2 + \overline{c}_3(s)t^3 + \overline{c}_4(s)t^4 + O_s(t^5). \quad (6.7)$$

Teorema 6.2.4. Seja γ_s uma deformação FRLS-genérica a 2-parâmetros de uma cúspide lightlike γ como em (6.7). Então, a estratificação do espaço de parâmetros $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, 0$ de γ_s (dada na Figura 30) consiste da origem (CL) e das seguintes curvas:

$$C: s_1 = 0$$

$$I(2): \emptyset$$

$$IL: (s_1, s_2) = (3c_3 t^2 + O(t^3), -3c_3 t + O(t^2))$$

$$V(2): \begin{cases} (s_1, s_2) = \left(-\frac{2\sqrt{5}-5}{25c_3} t^2 + O(t^3), t + O(t^2) \right) \\ (s_1, s_2) = \left(\frac{2\sqrt{5}+5}{25c_3} t^2 + O(t^3), t + O(t^2) \right) \end{cases}$$

$$IT: \emptyset$$

$$LT: (s_1, s_2) = (-c_3 t^2 + c_3 c_{301} t^3 + O(t^4), -c_3 t + (c_3 c_{301} - 2c_4) t^2 + O(t^3))$$

$$VT: (s_1, s_2) = (-c_3 t^2 + c_3 c_{301} t^3 + O(t^4), -c_3 t + (c_3 c_{301} + 2c_3 - 2c_4) t^2 + O(t^3))$$

$$TC: \emptyset$$

onde c_{301} é o coeficiente de s_2 em $\overline{c}_3(s)$.

Figura 30 – Estratificação do espaço dos parâmetros (s_1, s_2) .

Demonstração. A estratificação do espaço de parâmetros de γ_s é obtida tomando a imagem inversa, pela aplicação de Monge-Taylor, da estratificação do espaço de jatos relativa a fenômenos de codimensão ≤ 2 e, posteriormente, projetando em relação a s . Dessa forma, usando as equações que definem os estratos de interesse, ou seja, relativo a fenômenos de codimensão ≤ 2 , podemos encontrar as parametrizações dos estratos no espaço de parâmetros de γ_s .

$$CL: \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \end{cases}$$

Tomando a pré-imagem de CL por ${}_2j^k\Phi$ obtemos, respectivamente, as equações $2t = 0$, $\beta'_s(t) = 0$ e $1 - \frac{1}{2}\beta''_s(t) = 0$. Da primeira equação, obtemos $t = 0$. Aplicando na segunda equação, concluímos que $s_1 = 0$ e, finalmente, substituindo na terceira equação obtemos $s_2 = 0$. Portanto, o estrato CL consiste da origem.

$$C: \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

Novamente tomando a pré-imagem de C por ${}_2j^k\Phi$, obtemos $2t = 0$ e $\beta'_s(t) = 0$, as quais, como vimos no item anterior, resultam nas equações $t = 0$ e $s_1 = 0$. Portanto, C é formado pela reta $s_1 = 0$ no espaço de parâmetros de γ_s .

$$I(2): \begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_1b_3 - a_3b_1 = 0 \end{cases}$$

Podemos isolar b_1 na primeira equação, obtendo $b_1 = \frac{a_1b_2}{a_2}$, e substituir na segunda, resultando em $a_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$. No entanto, se $a_1 = 0$, pela primeira equação e o fato de $a_2 \neq 0$, temos $b_1 = 0$, o que implica que estamos sobre o estrato de cúspide, mas o estrato $I(2)$ corresponde somente a pontos regulares de γ_s . Portanto, podemos reescrever as equações de $I(2)$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_2b_3 - a_3b_2 = 0 \end{cases}.$$

Tomando a pré-imagem de $I(2)$ por ${}_2j^k\Phi$ obtemos $t\beta''_s(t) - \beta'_s(t) = 0$ e $\beta'''_s(t) = 0$. Note que $\beta'''_0(0) = c_3 \neq 0$, o que implica que, suficientemente próximo de 0, $\beta'''_s(t) \neq 0$. Portanto, neste caso, $I(2) = \emptyset$.

$$IL: \begin{cases} a_1 \pm b_1 = 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \mp a_1 \\ a_1(b_2 \pm a_2) = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $a_1 = 0$ ou $b_2 \pm a_2 = 0$. Se $a_1 = 0$, então $b_1 = 0$ e, consequentemente, estamos sobre o estrato de cúspide, mas IL é formado apenas por pontos regulares de γ_s .

Logo, $b_2 \pm a_2 = 0$ e, portanto, o estrato IL é composto por duas componentes:

$$IL: \{a_1 + b_1 = 0, a_2 + b_2 = 0\} \cup \{a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0\}.$$

No entanto, tomando a pré-imagem da segunda equação da primeira componente por ${}_2j^k\Phi$ obtemos $a_2 + b_2 = 1 + \frac{1}{2}\beta_s''(t)$ e tomando $t = 0$ e $s = 0$ temos $1 + \frac{1}{2}\beta_0''(0) = 2 \neq 0$. Logo, $1 + \frac{1}{2}\beta_s''(t) \neq 0$, o que implica que a primeira componente é vazia. Portanto,

$$IL: \{2t - \beta_s'(t) = 0, 1 - \frac{1}{2}\beta_s''(t) = 0\}.$$

Isolando s_1 na primeira equação, substituindo na segunda e, posteriormente, isolando s_2 , obtemos $(s_1, s_2) = (3c_3t^2 + O(t^3), -3c_3t + O(t^2))$.

$V(2)$: Neste caso, usamos uma técnica diferente para obter a parametrização do estrato, já que não conseguimos isolar as variáveis a fim de eliminar a componente cúspide e obter a parametrização das outras componentes.

O estrato de vértices de ordem 2 é dado pelos zeros de multiplicidade 2 da família $G(t, s)$ expressa pelo numerador de $\kappa_s'(t)$.

Note que $G(t, 0, 0) = -180c_3^2t^4 + O(t^5)$. Logo, como $c_3 \neq 0$, G é uma deformação de uma singularidade A_3 e, conseqüentemente, é $\mathcal{R}$ -induzida da deformação $\mathcal{R}$ -versal $F(t, u_0, u_1, u_2) = u_0 + u_1t + u_2t^2 + t^4$, ou seja, podemos fazer mudanças de coordenadas em t e escrever

$$G(t, s_1, s_2) = a_0(s_1, s_2) + a_1(s_1, s_2)t + a_2(s_1, s_2)t^2 + t^4. \quad (6.8)$$

Assim, o estrato de vértices de ordem 2 é formado pelos zeros do resultante R de G e $\frac{\partial G}{\partial t}$ em relação a t , que expresso em função de a_0, a_1 e a_2 é

$$R(s_1, s_2) = 16a_0a_2^4 - 4a_1^2a_2^3 - 128a_0^2a_2^2 + 144a_0a_1^2a_2 - 27a_1^4 + 256a_0^3.$$

Queremos mostrar que R é equivalente a $s_1^3R_1(s_1, s_2)$, com R_1 sendo 6-determinado. Então, para isso queremos obter o 9-jato do resultante R . Para tal, observamos quais os termos de a_0, a_1 e a_2 que contribuem para o 9-jato de R . Analisando a expressão de R , concluímos que tais termos são o 5-jato de a_0 , o 3-jato de a_1 e o 3-jato de a_2 .

Supondo inicialmente

$$G(t, s_1, s_2) = \alpha_0(s_1, s_2) + \alpha_1(s_1, s_2)t + \alpha_2(s_1, s_2)t^2 + \cdots + \alpha_k(s_1, s_2)t^k + O_s(t^{k+1})$$

queremos saber quais os jatos de cada coeficiente $\alpha_i(s_1, s_2)$ que contribuem para os jatos j^5a_0, j^3a_1 e j^3a_2 ao fazermos as mudanças de coordenadas para escrever G na forma (6.8). Utilizando o Maple, podemos observar que ao eliminarmos os termos de ordem k do coeficiente α_i , com $k \geq 0$ e $i \geq 3$, os termos que são alterados são os de grau $k+2$ de α_{i-3} , de grau $k+1$ de

α_{i-2} e de grau $k+1$ de α_{i-1} . Portanto, os jatos dos coeficientes α_i que contribuem para os jatos $j^5 a_0, j^3 a_1$ e $j^3 a_2$ são

$$j^5 \alpha_0, j^3 \alpha_1, j^3 \alpha_2, j^3 \alpha_3, j^2 \alpha_4, j^2 \alpha_5, j^1 \alpha_6, j^1 \alpha_7, j^0 \alpha_8 \text{ e } j^0 \alpha_9.$$

Finalmente, podemos analisar os termos de $\beta(t, s_1, s_2)$ e verificar quais os graus de $\bar{c}_j(s_1, s_2)$, com $j \geq 3$, que devemos considerar para obter o 9-jato de R . Com a ajuda do Maple concluímos que os termos de β que precisam ser considerados são os de grau 2 de $\bar{c}_3$, de grau 2 de $\bar{c}_4$, de grau 1 de $\bar{c}_5$, de grau 1 de $\bar{c}_6$, de grau 0 de $\bar{c}_7$ e de grau 0 de $\bar{c}_8$. Os termos de $\bar{c}_9, \bar{c}_{10}, \dots$ não contribuem para $j^9 R$.

A partir desta análise, podemos fazer os diversos cálculos e obter o 9-jato de R , o qual tem a seguinte forma $j^9 R(s_1, s_2) = s_1^3(R_1(s_1, s_2))$, onde $R_1(s_1, s_2)$ é uma singularidade $J_{2,0}$ conforme a notação de (ARNOL'D; GUSEIN ZADE; VARCHENKO, 1985). Como o estrato de vértices de ordem 2 é dado pelos zeros de R , temos que $s_1 = 0$ ou $R_1 = 0$. No entanto, $s_1 = 0$ implica que estamos sob o estrato de cúspide, mas o estrato de vértices de ordem 2 ocorre apenas para pontos regulares de γ_s . Logo, o estrato de vértices de ordem 2 é dado pelos zeros de R_1 .

Fazendo mudanças de coordenadas e usando o fato que a singularidade $J_{2,0}$ é 6-determinada podemos escrever R_1 na seguinte forma

$$R_1(s_1, s_2) = \lambda c_3^6 (3c_3 s_1 - s_2^2)(125c_3^2 s_1^2 - 50c_3 s_1 s_2^2 + s_2^4),$$

onde λ é um número não nulo. Como $c_3 \neq 0$, segue que R_1 é descrito pela união dos zeros de $3c_3 s_1 - s_2^2$ e $125c_3^2 s_1^2 - 50c_3 s_1 s_2^2 + s_2^4$.

Podemos fazer mudanças de coordenadas e escrever a segunda expressão na forma $125c_3^2 s_1^2 - 4s_2^4$, cujo conjunto de zeros é descrito por duas componentes $s_1 = \pm \frac{2\sqrt{5}}{25c_3} s_2^2$.

Portanto, o estrato dos vértices de ordem 2 é formado por 3 curvas regulares e tangentes.

Para obtermos o 2-jato da parametrização de tais curvas no sistema de coordenadas original precisamos fazer as mudanças de coordenadas inversas em s_1, s_2 até grau 2. A partir das quais obtemos as parametrizações das três componentes do estrato de vértices de ordem 2:

$$\begin{aligned} (s_1, s_2) &= \left(-\frac{2\sqrt{5}-5}{25c_3} t^2 + O(t^3), t + O(t^2) \right); \\ (s_1, s_2) &= \left(\frac{2\sqrt{5}+5}{25c_3} t^2 + O(t^3), t + O(t^2) \right); \\ (s_1, s_2) &= \left(\frac{1}{3c_3} t^2 + O(t^3), t + O(t^2) \right). \end{aligned}$$

Tais curvas são 3 parábolas tangentes ao eixo $s_1 = 0$, como mostra a Figura 30 (componentes $V(2)$ e IL).

No entanto, sabemos que o estrato de inflexões lightlike está contido no estrato de vértices de ordem 2 pelo Teorema 3.0.4 e podemos observar que a última componente descrita acima

é uma reparametrização do estrato de inflexões lightlike. Portanto, as componentes exclusivas de vértices de ordem 2 são as duas primeiras curvas descritas acima.

$$IT: \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \end{cases}$$

Tomando a pré-imagem de IT por ${}_2j^k\Phi$ obtemos, respectivamente, as equações $t_1^2 - t_2^2 = 0$, $\beta_s(t_1) - \beta_s(t_2) = 0$ e $t_1\beta_s''(t_1) - \beta_s'(t_1) = 0$. Da primeira equação e do fato que $t_1 \neq t_2$, obtemos $t_1 = -t_2 = t$. Substituindo nas outras equações, temos $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 0$ e $t\beta_s''(t) - \beta_s'(t) = 0$. Note que $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 2t(s_1 + \overline{c}_3(s)t^2 + O_s(t^4))$. Logo, $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 0$ implica $t = 0$ ou $s_1 + \overline{c}_3(s)t^2 + O_s(t^4) = 0$. No entanto, como IT é um estrato multilocal não podemos ter $t = 0$, já que isso implicaria em $t_1 = t_2$. Assim, temos $s_1 + \overline{c}_3(s)t^2 + O_s(t^4) = 0$. Além disso, $t\beta_s''(t) - \beta_s'(t) = -s_1 + 3\overline{c}_3(s)t^2 + O_s(t^3)$. Assim,

$$IT: \begin{cases} s_1 + \overline{c}_3(s)t^2 + O_s(t^4) = 0 \\ -s_1 + 3\overline{c}_3(s)t^2 + O_s(t^3) = 0 \end{cases}.$$

Observe que, para t suficientemente próximo de 0, devemos ter $\text{sgn}(s_1) = -\text{sgn}(\overline{c}_3(s)t^2)$, onde $\text{sgn}(x)$ é o sinal de x , para satisfazer a primeira equação e $\text{sgn}(s_1) = \text{sgn}(\overline{c}_3(s)t^2)$ para satisfazer a segunda equação. Logo, $\text{sgn}(s_1) = -\text{sgn}(s_1)$. Portanto, $IT = \emptyset$.

$$LT: \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1 \pm b_1 = 0 \end{cases}$$

Tomando a pré-imagem de LT por ${}_2j^k\Phi$ obtemos, respectivamente, as equações $t_1^2 - t_2^2 = 0$, $\beta_s(t_1) - \beta_s(t_2) = 0$ e $2t_1 \pm \beta_s'(t_1) = 0$. Da primeira equação e do fato que $t_1 \neq t_2$, obtemos $t_1 = -t_2 = t$. Substituindo nas outras equações, temos $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 0$ e $2t \pm \beta_s'(t) = 0$. Primeiramente consideremos o sistema acima com o sinal $+$. Neste caso, temos $2t + \beta_s'(t) = s_1 + 2(s_2 + 2)t + O_3(t, s_1, s_2)$. Assim, isolando s_1 na terceira equação e substituindo na segunda, obtemos $t(-4 - 2s_2 + O_2(t, s_2)) = 0$, o que implica que $t = 0$, o que não pode ocorrer em estratos multilocais. Portanto, devemos considerar apenas o sinal $-$. Neste caso, temos $2t - \beta_s'(t) = -s_1 - 2s_2t - 3\overline{c}_3(s)t^2 - O_s(t^3) = 0$. De onde podemos isolar s_1 obtendo $s_1 = -2s_2t - 3\overline{c}_3(s)t^2 + O_3(t, s_2)$ e substituir na segunda equação, resultando em $t(-2s_2 - 2\overline{c}_3(s)t + O_2(t, s_2)) = 0$ e, como $t \neq 0$, segue que $-2s_2 - 2\overline{c}_3(s)t + O_2(t, s_2) = 0$. De onde obtemos $s_2 = -\overline{c}_3(s) + O_2(t, s_2)$ e, consequentemente, $s_1 = -c_3t^2 + c_3c_{301}t^3 + O(t^4)$, onde c_{301} é o coeficiente de s_2 em $\overline{c}_3(s)$.

$$VT: \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ (a_1^2 - b_1^2)(a_1 b_3 - a_3 b_1) + 2(b_1 b_2 - a_1 a_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \end{cases}$$

Tomando a pré-imagem de VT por ${}_2j^k\Phi$ e simplificando a primeira equação obtemos, respectivamente, $t_1 = -t_2 = t$, $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 0$ e $\frac{1}{3}\beta_s'''(t)(4t^2 - \beta_s'(t)^2) + (\beta_s'(t)\beta_s''(t) - 4t)(t\beta_s''(t) - \beta_s'(t)) = 0$.

$\beta_s(t) = 0$. Isolando s_1 na segunda equação e substituindo na terceira, obtemos $-8t^2(2c_3s_2 + 2c_3^2t + O_2(t, s_2)) = 0$ e, como $t \neq 0$, segue que $2c_3s_2 + 2c_3^2t + O_2(t, s_2) = 0$, de onde obtemos $s_2 = -c_3t + (c_3c_{301} + 2c_3 - 2c_4)t^2 + O(t^3)$ e, consequentemente, $s_1 = -c_3t^2 + c_3c_{301}t^3 + O(t^4)$, onde c_{301} é o coeficiente de s_2 em $\overline{c_3}(s)$.

$$Tc: \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1b'_1 - a'_1b_1 = 0 \end{cases}$$

Tomando a pré-imagem de Tc por $2j^k\Phi$ e simplificando as equações, obtemos $t_1 = -t_2 = t$, $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 0$ e $\beta'_s(t) + \beta'_s(-t) = 0$. Note que $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 2t(s_1 + \overline{c_3}(s)t^2 + O_s(t^4))$ e $\beta'_s(t) + \beta'_s(-t) = 2(s_1 + 3\overline{c_3}(s)t^2 + O_s(t^4))$. Então, como $t \neq 0$ em estratos multilocais,

$$Tc: \begin{cases} s_1 + \overline{c_3}(s)t^2 + O_s(t^4) = 0 \\ s_1 + 3\overline{c_3}(s)t^2 + O_s(t^4) = 0 \end{cases}.$$

Se tal sistema tivesse solução, então a diferença entre suas equações também possuiria solução. No entanto, a diferença entre as equações é dada por $t^2(2\overline{c_3}(s) + O_s(t^2)) = 0$ e, como $t \neq 0$, segue que deveríamos ter $2\overline{c_3}(s) + O_s(t^2) = 0$, mas para $s = 0$ e $t = 0$, tal equação resulta em $2c_3 = 0$, o que não ocorre. Portanto, $Tc = \emptyset$. $\square$

Teorema 6.2.5. Seja γ uma curva suave com uma singularidade cúspide ordinária lightlike em t_0 .

- (i) A cáustica de γ é composta pela reta tangente a γ em t_0 com multiplicidade 2 e por uma curva suave com uma singularidade cúspide ordinária lightlike em $\gamma(t_0)$ que está contida no interior da região delimitada por γ como mostra a Figura 32 (1).
- (ii) As bifurcações de uma família FRLS-genérica a 2-parâmetros γ_s com $\gamma_0 = \gamma$ são como mostra a Figura 31.
- (iii) Para uma família FRLS-genérica a 2-parâmetros γ_s com $\gamma_0 = \gamma$, as bifurcações na cáustica são como mostra a Figura 32.
- (iv) Qualquer família FRLS-genérica a 2-parâmetros com uma singularidade cúspide ordinária lightlike é FRLS-equivalente à família modelo $\alpha_r(t) = (t^2, r_1t + (1 + r_2)t^2 + t^3)$.

Demonstração. (i) Sabemos que a cáustica de uma curva é dada por

$$C(\gamma) = \{u \in \mathbb{R}_1^2; \exists t \in \mathbb{R}, 0 \text{ de modo que } d'_u(t) = d''_u(t) = 0\},$$

onde $d_u(t) = \langle \gamma(t) - u, \gamma(t) - u \rangle$ é a função distância ao quadrado sobre γ .

Suponhamos $t_0 = 0$. Como γ tem uma cúspide ordinária lightlike em $t_0 = 0$, então podemos tomar $\gamma(t) = (t^2, \beta(t)) = (t^2, t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + O(t^5))$. Assim, $d_u(t) =$

Figura 31 – Deformação FRLS-genérica de uma cúspide ordinária lightlike.

$$\langle \gamma(t) - u, \gamma(t) - u \rangle = -(t^2 - u_1)^2 + (\beta(t) - u_2)^2 \text{ e}$$

$$\frac{1}{2}d'_u(t) = -2t(t^2 - u_1) + \beta'(t)(\beta(t) - u_2) = 0$$

$$\frac{1}{2}d''_u(t) = -6t^2 + 2u_1 + \beta''(t)(\beta(t) - u_2) + \beta'(t)^2 = 0.$$

Da segunda equação, obtemos $u_1 = 3t^2 - \frac{1}{2}\beta''(t)(\beta(t) - u_2) - \frac{1}{2}\beta'(t)^2$, substituindo na primeira equação, temos

$$t^2 \left(4t + \frac{(\beta''(t)t - \beta'(t))}{t^2} u_2 - \frac{(\beta''(t)t - \beta'(t))}{t^2} \beta(t) - \frac{\beta'(t)^2 t}{t^2} \right) = 0.$$

Figura 32 – Deformação FRLS-genérica da cáustica de uma cúspide ordinária lightlike.

Logo, $t = 0$ é uma raiz dupla da equação acima, o que implica que a reta $u_1 = u_2$ deve ser considerada com multiplicidade 2 na cáustica de γ .

Já para $t \neq 0$, obtemos $u_2 = \frac{-4t^3 + (\beta''(t)t - \beta'(t))\beta(t) + \beta'(t)^2 t}{\beta''(t)t - \beta'(t)}$. Portanto, a cáustica de γ é composta pela reta lightlike $u_1 = u_2$ (com multiplicidade 2) e a curva parametrizada por

$$\left(5t^2 + \left(9c_3 - \frac{16c_4}{3c_3}\right)t^3 + O(t^4), 5t^2 + \left(4c_3 - \frac{16c_4}{3c_3}\right)t^3 + O(t^4)\right).$$

Note que $u_1(t) = t^2(5 + O(t))$. Logo, podemos fazer mudanças de coordenadas e escrever a curva obtida na forma $\left(t^2, t^2 - \frac{c_3\sqrt{5}}{5}t^3 + O(t^4)\right)$. Comparando tal curva com γ temos que fixado t^2 a seguinte igualdade é satisfeita $\beta(t) - u_2(\pm t) = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{5}c_3t^3 + O(t^4)$. Portanto, supondo $c_3 > 0$ (o caso $c_3 < 0$ é análogo), segue que $\beta(t) > u_2(\pm t)$, para $t > 0$ e $\beta(t) < u_2(\pm t)$, para $t < 0$, como mostra as Figuras 33 e 32 (1).

Figura 33 – Posição relativa entre as cúspides da curva γ e de sua cáustica.

Observamos que $d'_u(0) = 0$, $d''_u(0) = 2u_1 - 2u_2$, $d'''_u(0) = -6c_3u_2$, $d^{(4)}_u(0) = -24c_4u_2$ e $d^{(5)}_u(0) = -120c_5u_2 + 120c_3$, ou seja, a função distância ao quadrado d_u possui uma singularidade A_1 em $t = 0$ para $u_1 \neq u_2$, A_2 para $u_1 = u_2 \neq 0$ e A_4 para $u_1 = u_2 = 0$.

(ii) Primeiramente queremos estipular um número máximo de pontos lightlike, inflexões e vértices que podem ocorrer em γ_s .

Os pontos lightlike são dados pelas equações $\beta'_s(t) \pm 2t = 0$. Assim, podemos considerar duas famílias a 2-parâmetros $h^+(t, s) = \beta'_s(t) + 2t$ e $h^-(t, s) = \beta'_s(t) - 2t$. Observamos que $h^+(t, 0, 0) = 4t + c_3t^2 + O(t^3)$, ou seja, h^+ é uma deformação de uma singularidade A_0 (regular) e, conseqüentemente, como $h^+(0, 0, 0) = 0$, h^+ possui um zero para qualquer parâmetro s . Para h^- , temos $h^-(t, 0, 0) = 3c_3t^2 + O(t^3)$, ou seja, h^- é uma deformação $\mathcal{R}$ -versal de uma singularidade A_1 e, conseqüentemente, possui no máximo 2 zeros. Portanto, o número máximo de pontos lightlike de γ_s é 3.

Para as inflexões, basta observar que o numerador da curvatura de γ_s é dado por

$$G(t, s) = -2\beta'_s(t) + 2t\beta''_s(t) = -2s_1 + 6\overline{c_3}(s)t^2 + O_s(t^3)$$

que é uma deformação de $G(t, 0, 0) = 6c_3t^2 + O(t^3)$, a qual é uma singularidade A_1 . Portanto, γ_s possui no máximo 2 inflexões.

Quanto aos vértices, observamos que o numerador da derivada da função curvatura de γ_s é dado por

$$H(t, s) = -8t^3 \beta_s'''(t) + 2t \beta_s'(t)^2 \beta_s'''(t) - 24t \beta_s'(t) + 24t^2 \beta_s''(t) + 6\beta_s'(t)^2 \beta_s''(t) - 6t \beta_s'(t) \beta_s''(t)^2.$$

Avaliando em $s = 0$, temos $H(t, 0, 0) = -180c_3^2 t^4 + O(t^5)$, ou seja, H é uma deformação de uma singularidade A_3 e, portanto, γ_s possui no máximo 4 vértices.

Para obter a configuração dos pontos lightlike, inflexão e vértices em γ_s usamos os resultados obtidos nas seções e capítulos anteriores e o fato que mudanças só podem ocorrer ao cruzarmos uma curva da estratificação do espaço de parâmetros obtida no Teorema 6.2.4. Para iniciar, encontremos a configuração sobre o estrato de cúspide, ou seja, quando $s_1 = 0$.

Neste caso, $h^+(t, s_2) = t(2(s_2 + 2) + 3\overline{c_3}(s_2)t + O_{s_2}(t^2))$ e $h^-(t, s_2) = t(2s_2 + 3\overline{c_3}(s_2)t + O_{s_2}(t^2))$. Como $2(s_2 + 2) + 3\overline{c_3}(s_2)t + O_{s_2}(t^2)$ está próximo de 4, então $h^+ = 0$ se, e somente se, $t = 0$, a qual é a singularidade cúspide, ou seja, γ_s não possui pontos lightlike advindos de h^+ sobre o estrato de cúspide. Por outro lado, $h^- = 0$ se, e somente se, $t = 0$ ou $2s_2 + 3\overline{c_3}(s_2)t + O_{s_2}(t^2) = 0$, ou ainda, se $t = 0$ ou $t = -\frac{2}{3\overline{c_3}}s_2 + O(s_2^2)$. Portanto, $t = -\frac{2}{3\overline{c_3}}s_2 + O(s_2^2)$ é o único ponto lightlike de γ_{s_2} sobre o estrato de cúspide (os outros 2 pontos lightlike se concentram no ponto de cúspide). Observe que ao deformarmos sobre o estrato de cúspide, estamos deformando a direção tangente limite, a qual para $s_2 > 0$ passa a ser spacelike e, então, o ramo inferior possui um ponto lightlike e, para $s_2 < 0$ passa a ser timelike e, então, o ramo superior possui um ponto lightlike.

Com relação a inflexões, temos $G(t, s_2) = t^2(6\overline{c_3}(s_2) + O_{s_2}(t))$. Como $6\overline{c_3}(s_2) + O_{s_2}(t)$ está próximo de $6c_3 \neq 0$, segue que as duas inflexões estão concentradas no ponto de cúspide, ou seja, γ_{s_2} não possui inflexões sobre o estrato de cúspide.

Sobre os vértices, temos $H(t, s_2) = t^3(-48c_3s_2 - 180c_3^2t + O_2(t, s_2))$, ou seja, γ_{s_2} possui 3 vértices concentrados no ponto de cúspide e outro dado por $t = -\frac{4}{15c_3}s_2 + O(s_2^2)$.

Analisando os coeficientes dos pontos obtidos, concluímos que a posição relativa entre eles é $L - V - C$ quando $s_2 > 0$ e $C - V - L$ quando $s_2 < 0$. Além disso, o vértice obtido é inward, já que $\text{sgn}(\kappa_{s_2}(t)) = \text{sgn}(G(t, s_2)) = \text{sgn}(c_3)$, para todo t suficientemente próximo de 0, e κ tende ao infinito quando nos aproximamos de um ponto lightlike.

Agora percorrendo, no espaço de parâmetros de γ_s , em torno da origem e usando os resultados das seções e capítulos anteriores, obtemos as configurações de γ_s em cada um dos estratos obtidos como mostra a Figura 31.

(iii) Utilizando as configurações da curva com relação a seus pontos lightlike, inflexões e vértices que obtivemos em (ii) e as deformações geométricas da cáustica obtidas nas seções e capítulos anteriores, podemos concluir que as bifurcações na cáustica de γ são como mostra a Figura 32.

(iv) Segue do Teorema 6.2.4 que os estratos correspondentes do espaço de parâmetros de γ_s e do espaço de parâmetros da família modelo são homeomorfos, ver Figura 31 centro. Além disso, os cálculos feitos nos itens (ii) e (iii) dependeram apenas do fato da família conter uma cúspide ordinária lightlike e ser FRLS-genérica, condições que a família modelo satisfaz. $\square$

DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE UMA CÚSPIDE RAMPHOID

Neste capítulo redefinimos o conceito de deformações FRS-genérica para uma curva com uma singularidade cúspide ramphoid e, a partir desta, estudamos as deformações e bifurcações de uma cúspide ramphoid $\mathcal{A}_h$ -equivalente a $(t^2, t^4 + t^5)$ a qual possui codimensão 2, como vimos no Capítulo 3. Além disso, estudamos apenas o caso não-lightlike, já que o caso lightlike é um fenômeno de codimensão 3.

Em (OSET SINHA; TARI, 2013) é feito um estudo das deformações da cúspide ramphoid $(t^2, t^4 + t^5)$ com respeito a singularidades e inflexões no plano Euclidiano. Em tal estudo observamos a existência de pontos de auto-intersecção da curva deformada, ou seja, a existência de singularidades multilocais. Portanto, uma abordagem multilocal se faz necessária.

Assim como no Capítulo 6, consideramos uma estratificação do espaço dos multi-jatos ${}_2J^k(1, 2) \subset J^k(1, 2) \times J^k(1, 2)$. Neste caso, para singularidades multilocais precisamos levar em consideração os valores da curva $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ em cada ponto t . Dessa forma, consideramos a aplicação bi-jato de Monge-Taylor como em (3.4), ou seja, dada por

$${}_2J^k\phi_\gamma(t_1, t_2) = \left((\alpha(t_1), \alpha'(t_1), \dots, \frac{1}{k!}\alpha^{(k)}(t_1); \beta(t_1), \beta'(t_1), \dots, \frac{1}{k!}\beta^{(k)}(t_1)), \right. \\ \left. (\alpha(t_2), \alpha'(t_2), \dots, \frac{1}{k!}\alpha^{(k)}(t_2); \beta(t_2), \beta'(t_2), \dots, \frac{1}{k!}\beta^{(k)}(t_2)) \right).$$

Denotamos por $((a_0, a_1, a_2, \dots, a_k; b_0, b_1, b_2, \dots, b_k); (a'_0, a'_1, a'_2, \dots, a'_k; b'_0, b'_1, b'_2, \dots, b'_k))$ as coordenadas em $J^k(1, 2) \times J^k(1, 2)$.

Os estratos locais em $J^k(1, 2)$ podem ser considerados como estratos produtos em ${}_2J^k(1, 2)$. Logo, basta avaliá-los em $J^k(1, 2)$.

Os estratos de codimensão 2 são: Cúspide (C), Inflexão de ordem 2 ($I(2)$), Vértice de ordem 2 ($V(2)$), Inflexão lightlike (IL); e os de codimensão 3 são: Cúspide ramphoid (CR), Inflexão transversal (IT), correspondente a pontos de intersecção transversal entre dois ramos

em que em um deles tal ponto é uma inflexão; Vértice transversal (VT), correspondente a pontos de intersecção transversal entre dois ramos em que em um deles tal ponto é um vértice; Lightlike transversal (LT), correspondente a pontos de intersecção transversal entre dois ramos em que em um deles tal ponto é lightlike; e Tacnode (Tc), correspondente a pontos de intersecção tangencial entre dois ramos. Abaixo expressamos as equações que os descrevem:

$$\begin{aligned}
 CR : & \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_2b_3 - a_3b_2 = 0 \end{cases} \\
 C : & \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases} \\
 I(2) : & \quad \begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_1b_3 - a_3b_1 = 0 \end{cases} \\
 V(2) : & \quad \begin{cases} (a_1^2 - b_1^2)(a_1b_3 - a_3b_1) + 2(b_1b_2 - a_1a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \\ 2(a_1b_2 - a_2b_1)[-(-a_1^2 + b_1^2)(-a_2^2 + b_2^2) + 5(b_1b_2 - a_1a_2)^2] + \\ + (-a_1^2 + b_1^2)[(4a_2b_3 + 4a_3b_2)a_1^2 - 9(a_2a_3 + b_2b_3)a_1b_1 + \\ + (4a_2b_3 + 5a_3b_2)b_1^2] + 2(-a_1^2 + b_1^2)^2(a_1b_4 - a_4b_1) = 0 \end{cases} \\
 IL : & \quad \begin{cases} a_1 \pm b_1 = 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \end{cases} \\
 IT : & \quad \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \end{cases} \\
 VT : & \quad \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ (a_1^2 - b_1^2)(a_1b_3 - a_3b_1) + 2(b_1b_2 - a_1a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \end{cases} \\
 LT : & \quad \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1 \pm b_1 = 0 \end{cases} \\
 Tc : & \quad \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1b'_1 - a'_1b_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Considere γ uma curva com uma singularidade do tipo cúspide ramphoid $(t^2, t^4 + t^5)$ não lightlike. Consideramos γ timelike, o caso spacelike segue de modo análogo. Fazendo mudanças de coordenadas se necessário, podemos tomar $\gamma(t) = (t^2, \beta(t)) = (t^2, c_4t^4 + c_5t^5 + O(t^6))$, com $c_4, c_5 \neq 0$. Além disso, consideramos γ_s uma deformação de γ a 2-parâmetros que, através de mudanças de coordenadas, pode ser tomada na forma $\gamma_s(t) = (t^2, \beta_s(t))$, onde

$$\beta_s(t) = \bar{c}_1(s)t + \bar{c}_2(s)t^2 + \bar{c}_3(s)t^3 + \bar{c}_4(s)t^4 + \bar{c}_5(s)t^5 + O_s(t^6) \quad (7.1)$$

com $\bar{c}_1(0) = \bar{c}_2(0) = \bar{c}_3(0) = 0$, $\bar{c}_4(0) = c_4 \neq 0$, $\bar{c}_5(0) = c_5 \neq 0$ e $\bar{c}_k(0) = c_k$, com $k \geq 6$.

Buscamos condições sobre γ_s para que a imagem da família de aplicações bi-jatos de Monge-Taylor ${}_2j^k\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow {}_2J^k(1,2)$ dada por ${}_2j^k\Phi(t_1, t_2, s) = {}_2j^k\phi_{\gamma_s}(t_1, t_2)$ seja transversal aos estratos envolvidos.

Note que os estratos CR, C e Tc são todos os estratos de ${}_2J^k(1,2)$ de codimensão menor ou igual a 3 que provêm da $\mathcal{A}$ -equivalência. Logo, segue do Teorema de Mather (ver Teorema 1.3.3) que para garantir a transversalidade com relação a esses estratos precisamos da $\mathcal{A}_e$ -versalidade de γ_s .

Proposição 7.0.1. Seja γ_s uma deformação a 2-parâmetros de uma curva γ_0 com uma singularidade cúspide ramphoid $\mathcal{A}_h$ -equivalente a $(t^2, t^4 + t^5)$ em $t = 0$ como em (7.1). Então a deformação γ_s é $\mathcal{A}_e$ -versal se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_1}(0) & \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial s_2}(0) \\ \frac{\partial \bar{c}_3}{\partial s_1}(0) & \frac{\partial \bar{c}_3}{\partial s_2}(0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.3, γ_s é $\mathcal{A}_e$ -versal se, e somente se, $L\mathcal{A}_e \cdot \gamma + \mathbb{R} \cdot \left\{ \frac{\partial \gamma_s}{\partial s_1}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial s_2} \right\} = \mathcal{E}(1,2)$. Onde

$$L\mathcal{A}_e \cdot \gamma = L\mathcal{R}_e \cdot \gamma + L\mathcal{L}_e \cdot \gamma = \mathcal{E}_1 \cdot \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\} + \gamma^*(\mathcal{E}_2) \cdot \{e_1, e_2\}.$$

No entanto, γ é 5- $\mathcal{A}$ -determinada e, conseqüentemente, $\mathcal{M}_1^6\mathcal{E}(1,2) \subset L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$ (ver (WALL, 1981)). Logo, para verificar a transversalidade, basta verificar até grau 5.

Mostremos que $(1,0), (t^2,0), (t^3,0), (t^4,0), (t^5,0), (0,1), (0,t^2), (0,t^4), (0,t^5) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$.

Note que $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = (2t, 4c_4t^3 + 5c_5t^4 + O(t^5))$.

Para obter $(1,0)$ e $(0,1)$, basta tomar $\gamma^*(1) \cdot e_1$ e $\gamma^*(1) \cdot e_2$, respectivamente. Já os termos $(t^2,0), (0,t^2), (t^4,0)$ e $(0,t^4)$ são obtidos tomando $\gamma^*(x) \cdot e_1, \gamma^*(x) \cdot e_2, \gamma^*(x^2) \cdot e_1$ e $\gamma^*(x^2) \cdot e_2$, respectivamente.

Note que $\frac{1}{2}t^4 \frac{\partial \gamma}{\partial t} = (t^5, O(t^7)) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$. Logo, $(t^5,0) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$.

Sabemos que $\gamma^*\left(\frac{1}{b_5}y\right) \cdot e_2 = \left(0, \frac{b_4}{b_5}t^4 + t^5 + O(t^6)\right) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$ e, como já mostramos que $(0,t^4) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$, segue que $(0,t^5) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$.

Finalmente, $\frac{1}{2}t^2 \frac{\partial \gamma}{\partial t} = (t^3, 2b_4t^5 + O(t^6)) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$ e, como $(0,t^5) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$, concluímos que $(t^3,0) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$.

Portanto, os únicos termos que faltam são $(t,0), (0,t)$ e $(0,t^3)$. No entanto, como $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = (2t, 4c_4t^3 + 5c_5t^4 + O(t^5)) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$, temos $2(t,0) + 4c_4(0,t^3) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$. Logo, $(t,0) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$ se, e somente se, $(0,t^3) \in L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$. Assim, o espaço transversal a $L\mathcal{A}_e \cdot \gamma$ é gerado por $(0,t)$ e $(0,t^3)$.

Concluimos que γ_s é uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal se, e somente se, $\mathbb{R} \cdot \left\{ \frac{\partial \gamma_s}{\partial s_1}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial s_2} \right\} = \mathbb{R} \cdot \{(0, t), (0, t^3)\}$, o que ocorre se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \overline{c_1}}{\partial s_1}(0) & \frac{\partial \overline{c_1}}{\partial s_2}(0) \\ \frac{\partial \overline{c_3}}{\partial s_1}(0) & \frac{\partial \overline{c_3}}{\partial s_2}(0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

Portanto, suponhamos γ_s uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal e, fazendo mudanças de coordenadas se necessário, podemos tomar $\overline{c_1}(s_1, s_2) = s_2$ e $\overline{c_3}(s_1, s_2) = s_1$. Assim, tomamos

$$\beta_s(t) = s_2 t + \overline{c_2}(s) t^2 + s_1 t^3 + \overline{c_4}(s) t^4 + \overline{c_5}(s) t^5 + O_s(t^6).$$

Observamos que para encontrar os estratos no espaço de parâmetros de γ_s , basta projetar sobre tal espaço a imagem inversa por ${}_2j^k\Phi$ de cada um dos estratos em ${}_2J^k(1, 2)$. Tendo em vista esta ideia, no próximo teorema encontramos os termos iniciais da parametrização de cada um dos estratos de codimensão 2 ou 1 no espaço de parâmetros de γ_s .

Teorema 7.0.2. Seja γ_s uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal a 2-parâmetros de uma cúspide ramphoid γ $\mathcal{A}_h$ -equivalente a $(t^2, t^4 + t^5)$. Então, a família de aplicações bi-jatos de Monge-Taylor ${}_2j^k\Phi$ é transversal aos estratos envolvidos e, além disso, a estratificação do espaço de parâmetros de γ_s (dada na Figura 34) consiste da origem (CR) e das seguintes curvas:

$$C: s_2 = 0$$

$$I(2): (s_1, s_2) = (-4c_4 t + O(t^2), -4c_4 t^3 + O(t^4))$$

$$V(2): (s_1, s_2) = (10c_5 t^2 + 40c_6 t^3 + O(t^4), 5c_5 t^4 + 24c_6 t^5 + O(t^6))$$

$$IL: \emptyset$$

$$IT: (s_1, s_2) = (-2c_4 t + O(t^2), 2c_4 t^3 + O(t^4))$$

$$VT: (s_1, s_2) = (2c_5 t^2 + 8c_6 t^3 + O(t^4), -3c_5 t^4 - 8c_6 t^5 + O(t^6))$$

$$LT: \emptyset$$

$$Tc: (s_1, s_2) = (-2c_5 t^2 + O(t^3), c_5 t^4 + O(t^5))$$

Demonstração. Primeiramente encontremos os termos iniciais das parametrizações dos estratos no espaço de parâmetros de γ_s .

$$CR: \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0 \end{cases}$$

Figura 34 – Estratificação do espaço dos parâmetros (s_1, s_2) .

Tomando a pré-imagem de CR por ${}_2j^k\Phi$ obtemos as equações $2t = 0$, $\beta'_s(t) = 0$ e $\beta'''_s(t) = 0$. Da primeira equação, obtemos $t = 0$. Aplicando na segunda equação, concluímos que $s_2 = 0$ e, finalmente, substituindo na terceira equação obtemos $s_1 = 0$. Portanto, o estrato CR consiste da origem.

$$C: \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

Novamente tomando a pré-imagem de C por ${}_2j^k\Phi$, obtemos $2t = 0$ e $\beta'_s(t) = 0$, as quais, como vimos no item anterior, resultam nas equações $t = 0$ e $s_2 = 0$. Portanto, C é formado pela reta $s_2 = 0$ no espaço de parâmetros de γ_s .

$$I(2): \begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_1b_3 - a_3b_1 = 0 \end{cases}$$

Cada uma das equações que definem $I(2)$ definem uma variedade. A primeira é regular, uma vez que $a_2 \neq 0$, enquanto que a segunda é singular. Para resolver esse problema, aplicamos a mesma ideia feita para o estrato $I(2)$ no Teorema 6.2.4, resultando em

$$I(2): \begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_2b_3 - a_3b_2 = 0 \end{cases}.$$

Obtendo assim, uma variedade suave.

Tomando a pré-imagem por ${}_2j^k\Phi$ obtemos $t\beta''_s(t) - \beta'_s(t) = 0$ e $\beta'''_s(t) = 0$. Note que ao derivarmos a segunda equação em relação a s_1 e avaliarmos em $(0, 0, 0)$ obtemos $1 \neq 0$. Logo, da segunda equação podemos obter $s_1 = s_1(t, s_2) = -4c_4t + O_{s_2}(t^2)$. Substituindo na primeira equação, obtemos $-s_2 - 4c_4t^3 + O_4(t, s_2) = 0$, de onde resulta $s_2 = s_2(t) = -4c_4t^3 + O(t^4)$ e, conseqüentemente, $s_1 = s_1(t) = -4c_4t + O(t^2)$.

$V(2)$: Note que o estrato $V(2)$ depende apenas de termos em $J^4(1, 2)$. Logo, podemos restringir nossa análise ao espaço $J^4(1, 2)$. Além disso, observamos que nosso interesse está na vizinhança do ponto $j^4\phi_{\gamma_0}(0) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, c_4)$, com $c_4 \neq 0$.

Como estamos interessados na intersecção entre $V(2)$ e a imagem de $j^k\Phi$, cujo espaço tangente é gerado por

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial j^k\phi_{\gamma_s}}{\partial t}(0) = (2, 0, \dots, 0; 0, 0, 4c_4, 5c_5, \dots, kc_k) \\ v_2 &= \frac{\partial j^k\phi_{\gamma_s}}{\partial s_1}(0) = (0, 0, \dots, 0; 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ v_3 &= \frac{\partial j^k\phi_{\gamma_s}}{\partial s_2}(0) = (0, 0, \dots, 0; 1, 0, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

então, podemos tomar $k = 4$ e $a_3 = a_4 = b_2 = 0$. Dessa forma, o estrato $V(2)$ restrito a esse espaço é definido pelas seguintes equações

$$\begin{cases} a_1(a_1^2b_3 - b_1^2b_3 + 2a_2^2b_1) = 0 \\ -2a_2b_1[a_2^2(-a_1^2 + b_1^2) + 5a_1^2a_2^2] + (-a_1^2 + b_1^2)[5a_1^2a_2b_3 + 4a_2b_1^2b_3] + 2a_1b_4(-a_1^2 + b_1^2)^2 = 0 \end{cases}.$$

Da primeira equação, temos $a_1 = 0$ ou $a_1^2b_3 - b_1^2b_3 + 2a_2^2b_1 = 0$. No entanto, se $a_1 = 0$, então substituindo na segunda equação, obtemos $2a_2b_1^3(-a_2^2 + 2b_1b_3) = 0$, o que implica que $b_1 = 0$, já que a_2 e $-a_2^2 + 2b_1b_3$ são não nulos. Logo, se $a_1 = 0$, então $b_1 = 0$, o que implica que estamos sob o estrato de cúspide, mas $V(2)$ é definido somente para pontos regulares de γ_s . Assim, segue que $a_1^2b_3 - b_1^2b_3 + 2a_2^2b_1 = 0$ e o sistema que define $V(2)$ fica da forma

$$\begin{cases} a_1^2b_3 - b_1^2b_3 + 2a_2^2b_1 = 0 \\ -2a_2b_1[a_2^2(-a_1^2 + b_1^2) + 5a_1^2a_2^2] + (-a_1^2 + b_1^2)[5a_1^2a_2b_3 + 4a_2b_1^2b_3] + 2a_1b_4(-a_1^2 + b_1^2)^2 = 0 \end{cases}.$$

Note que se derivarmos a primeira equação em relação a b_1 , obtemos $2a_2^2 \neq 0$, ou seja, podemos escrever $b_1 = \varphi(a_1, a_2, b_3) = a_2^2b_3 + O_4(a_1, a_2, b_3)$. Substituindo na segunda equação, obtemos $a_1^4(2a_1b_4 - 5a_2b_3 + O_3(a_1, a_2, b_3, b_4)) = 0$. Como $a_1 = 0$ nos leva ao estrato de cúspide, segue que devemos ter $2a_1b_4 - 5a_2b_3 + O_3(a_1, a_2, b_3, b_4) = 0$, de onde podemos escrever $b_3 = \psi(a_1, a_2, b_4) = 2a_1b_4 + O_3(a_1, a_2, b_4)$.

Portanto, restrito ao espaço $(a_1, a_2, b_1, b_3, b_4)$ temos que $V(2)$ é uma superfície parametrizada por $(a_1, a_2, \xi(a_1, a_2, b_4), \psi(a_1, a_2, b_4), b_4)$, onde $\xi(a_1, a_2, b_4) = \varphi(a_1, a_2, \psi(a_1, a_2, b_4))$. Além disso, o espaço tangente a $V(2)$ é gerado por $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 0, 1)$, os quais juntamente com v_2 e v_3 formam uma base para $\mathbb{R}^5$, ou seja, $j^4\Phi$ é transversal a $V(2)$.

Logo, $\text{codim}(Im j^4\Phi \cap V(2)) = \text{codim}(Im j^4\Phi) + \text{codim}(V(2)) = 2 + 2 = 4$. Dessa forma, concluímos que a intersecção entre a imagem de $j^4\Phi$ e $V(2)$ no ponto $j^4\phi_{\gamma_0}(0)$ é uma curva suave.

Uma vez que sabemos que tal estrato é uma curva, podemos tomar $(s_1, s_2) = (s_{11}t + s_{12}t^2 + s_{13}t^3 + O(t^4), s_{21}t + s_{22}t^2 + s_{23}t^3 + O(t^4))$. Substituindo nas equações dadas pelos numeradores de κ' e κ'' , obtemos dois polinômios $p_1(t) = 0$ e $p_2(t) = 0$. No entanto, como essa

igualdade vale para todo t próximo de zero, segue que devemos ter $p_1 \equiv 0$ e $p_2 \equiv 0$, de onde obtemos $s_1 = 10c_5t^2 + 40c_6t^3 + O(t^4)$ e $s_2 = 5c_5t^4 + 24c_6t^5 + O(t^6)$.

$$IL: \begin{cases} a_1 \pm b_1 = 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \mp a_1 \\ a_1(b_2 \pm a_2) = 0 \end{cases}$$

Como $b_2 \pm a_2$ está próximo de ± 1 e, portanto, é não nulo, segue da segunda equação, que $a_1 = 0$ e, consequentemente, $b_1 = 0$. Logo, os pontos que satisfazem as equações de IL são os do estrato de cúspide. No entanto, o estrato IL corresponde apenas a pontos regulares de γ_s . Portanto, $IL = \emptyset$.

$$IT: \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \end{cases}$$

Tomando a pré-imagem de IT por ${}_2j^k\Phi$ obtemos, respectivamente, as equações $t_1^2 - t_2^2 = 0$, $\beta_s(t_1) - \beta_s(t_2) = 0$ e $t_1\beta_s''(t_1) - \beta_s'(t_1) = 0$. Da primeira equação e do fato que $t_1 \neq t_2$, obtemos $t_1 = -t_2 = t$. Substituindo nas outras equações, temos $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 0$ e $t\beta_s''(t) - \beta_s'(t) = 0$. Note que $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 2t(s_2 + s_1t^2 + \overline{c_5}(s)t^4 + O_s(t^6))$. Logo, $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 0$ implica $t = 0$ ou $s_2 + s_1t^2 + \overline{c_5}(s)t^4 + O_s(t^6) = 0$. No entanto, como IT é um estrato multilocal não podemos ter $t = 0$, já que isso implicaria em $t_1 = t_2$. Assim, temos $s_2 + s_1t^2 + \overline{c_5}(s)t^4 + O_s(t^6) = 0$, de onde podemos escrever $s_2 = s_2(t, s_1) = -s_1t^2 + O_4(t, s_1)$. Substituindo na terceira equação de IT , obtemos $\frac{4t^2}{c_{501}t^4 + 1}(s_1 + O_2(t, s_1)) = 0$, onde c_{501} é o coeficiente de s_2 em $\overline{c_5}(s)$. Como $t \neq 0$, segue que $s_1 = s_1(t) = -2c_4t + O(t^2)$ e, consequentemente, $s_2 = s_2(t) = 2c_4t^3 + O(t^4)$.

$$VT: \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ (a_1^2 - b_1^2)(a_1b_3 - a_3b_1) + 2(b_1b_2 - a_1a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, utilizando as duas primeiras equações, concluímos que $s_2 + s_1t^2 + \overline{c_5}(s)t^4 + O_s(t^6) = 0$, de onde podemos escrever $s_2 = s_2(t, s_1) = -s_1t^2 + O_4(t, s_1)$. Substituindo na terceira equação de VT , obtemos $8t^3(-s_1 + O_2(t, s_1)) = 0$. Como $t \neq 0$ em estratos multilocais, segue que $s_1 = s_1(t) = 2c_5t^2 + 8c_6t^3 + O(t^4)$ e, consequentemente, $s_2 = s_2(t) = -3c_5t^4 - 8c_6t^5 + O(t^6)$.

$$LT: \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1 \pm b_1 = 0 \end{cases}$$

Tomando a pré-imagem de LT por ${}_2j^k\Phi$ e simplificando a primeira equação obtemos, $t_1 = -t_2 = t$, $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 0$ e $2t \pm \beta_s'(t) = 0$. Novamente como vimos anteriormente, utilizando as duas primeiras equações, concluímos que $s_2 + s_1t^2 + \overline{c_5}(s)t^4 + O_s(t^6) = 0$, de onde podemos escrever $s_2 = s_2(s_1, t) = -s_1t^2 + O_4(t, s_1)$. Substituindo na terceira equação de LT , obtemos $t(2 \mp s_1t + O_3(t, s_1)) = 0$, a qual só é satisfeita se $t = 0$, o que não pode ocorrer em um estrato

multilocal. Portanto, $LT = \emptyset$.

$$Tc: \begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1 b'_1 - a'_1 b_1 = 0 \end{cases}$$

Tomando a pré-imagem de Tc por ${}_2j^k\Phi$ e simplificando as equações, obtemos $t_1 = -t_2 = t$, $\beta_s(t) - \beta_s(-t) = 0$ e $\beta'_s(t) + \beta'_s(-t) = 0$. Novamente utilizando as duas primeiras equações, obtemos $s_2 = s_2(s_1, t) = -s_1 t^2 + O_4(t, s_1)$. Substituindo na terceira equação de Tc , temos $\frac{4t^2}{c_{501}t^4 + 1}(s_1 + O_2(t, s_1)) = 0$, onde c_{501} é o coeficiente de s_2 em $\overline{c_5}(s)$, de onde concluímos que $s_1 = s_1(t) = -2c_5 t^2 + O(t^3)$ e, conseqüentemente, $s_2 = s_2(t) = c_5 t^4 + O(t^5)$.

Agora nosso objetivo é mostrar a transversalidade de ${}_2j^k\Phi$ em relação aos estratos envolvidos.

Como γ_s é uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal, segue que ${}_2j^k\Phi$ é transversal aos estratos CR, C e Tc . Além disso, a transversalidade com relação ao estrato $V(2)$ já foi verificada anteriormente. Logo, basta mostrar a transversalidade para os estratos $I(2), IT$ e VT . Primeiramente vamos analisar o espaço tangente a imagem de ${}_2j^k\Phi$ no ponto ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$.

Vimos anteriormente que o espaço tangente a imagem de $j^k\Phi$ no ponto $j^k\phi_{\gamma_0}(0)$ é gerado pelos vetores v_1, v_2, v_3 . Já para o caso multilocal utilizamos ${}_2j^k\Phi$, cujo espaço tangente a sua imagem no ponto ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$ é gerado por

$$\begin{aligned} \overline{v_1} &= \frac{\partial {}_2j^k\phi_{\gamma_s}}{\partial t_1}(0) = ((0, v_{11}; 0, v_{12}), (0, 0; 0, 0)) \\ \overline{v_2} &= \frac{\partial {}_2j^k\phi_{\gamma_s}}{\partial t_2}(0) = ((0, 0; 0, 0), (0, v_{11}; 0, v_{12})) \\ \overline{v_3} &= \frac{\partial {}_2j^k\phi_{\gamma_s}}{\partial s_1}(0) = ((0, v_{21}; 0, v_{22}), (0, v_{21}; 0, v_{22})) \\ \overline{v_4} &= \frac{\partial {}_2j^k\phi_{\gamma_s}}{\partial s_2}(0) = ((0, v_{31}; 0, v_{32}), (0, v_{31}; 0, v_{32})) \end{aligned}$$

onde $v_1 = (v_{11}; v_{12}), v_2 = (v_{21}; v_{22})$ e $v_3 = (v_{31}; v_{32})$.

Verifiquemos a transversalidade com relação a cada um dos estratos.

$I(2)$: Na primeira parte da demonstração vimos que o estrato $I(2)$ pode ser expresso pelo sistema

$$\begin{cases} a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0 \end{cases}$$

de onde podemos ver que $I(2)$ é uma subvariedade suave de codimensão 2. Além disso, o espaço tangente a $I(2)$ pode ser obtido através da intersecção dos núcleos das 1-formas $\xi_1 = db_1$ e $\xi_2 = db_3$. Como $\xi_1(v_3) \neq 0$ e $\xi_2(v_2) \neq 0$, segue que $j^k\Phi$ é transversal a $I(2)$.

IT : Neste caso, o espaço tangente a IT no ponto ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$ é dado pela intersecção dos núcleos das 1-formas $\xi_1 = da_0 - da'_0, \xi_2 = db_0 - db'_0$ e $\xi_3 = db_1$. De modo análogo ao feito para o

estrato LT na Proposição 6.2.2, podemos mostrar que ${}_2j^k\Phi$ é transversal a subvariedade de codimensão 2 dada pelas duas primeiras equações.

Por outro lado, $\xi_3(\overline{v_4}) \neq 0$ e, consequentemente, o espaço tangente limite da imagem de ${}_2j^k\Phi$ é transversal a IT no ponto ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$.

VT : Neste caso, podemos tomar $a_3 = a_4 = b_2 = 0$ a partir da análise dos vetores $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ e $\overline{v_4}$, obtendo assim o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1(a_1^2b_3 - b_1^2b_3 + 2a_2^2b_1) = 0. \end{cases}$$

Note que se $a_1 = 0$, então temos $t = 0$, o que não pode ocorrer em um estrato multilocal. Portanto, consideramos apenas o sistema

$$\begin{cases} a_0 - a'_0 = 0 \\ b_0 - b'_0 = 0 \\ a_1^2b_3 - b_1^2b_3 + 2a_2^2b_1 = 0. \end{cases}$$

Logo, o espaço tangente a VT no ponto ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$ é dado pela intersecção dos núcleos das 1-formas $\xi_1 = da_0 - da'_0$, $\xi_2 = db_0 - db'_0$ e $\xi_3 = db_1$.

Como vimos no item anterior, o espaço tangente limite a imagem de ${}_2j^k\Phi$ em ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$ é transversal a subvariedade de codimensão 2 dada pelas duas primeiras equações de VT .

Por outro lado, $\xi_3(\overline{v_4}) \neq 0$, garantindo assim a transversalidade de VT com relação ao espaço tangente limite a imagem de ${}_2j^k\Phi$ em ${}_2j^k\phi_{\gamma_0}(0)$. $\square$

Da demonstração do Teorema 7.0.2 podemos ver que para γ_s ser FRS-genérica, precisamos que γ_s seja uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal e que c_6 seja não nulo. A condição $c_6 \neq 0$ é obtida quando analisamos as parametrizações dos estratos $V(2)$ e VT , pois para que duas deformações sejam FRS-equivalentes, devemos ter os estratos correspondentes homeomorfos, o que não ocorre se uma tem $c_6 \neq 0$ e outra $c_6 = 0$ e, como a condição $c_6 = 0$ faz a codimensão aumentar, segue que devemos impor a condição $c_6 \neq 0$.

Definição 7.0.3. Considere $\gamma_0(t) = (t^2, \beta_0(t)) = (t^2, c_4t^4 + c_5t^5 + c_6t^6 + O(t^7))$ uma curva suave e suponha $c_4 \neq 0, c_5 \neq 0$ e $c_6 \neq 0$. Dizemos que uma deformação γ_s de γ_0 a 2-parâmetros é **FRS-genérica** se γ_s é uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal da singularidade cúspide ramphoid de γ_0 em $t = 0$.

Teorema 7.0.4. Seja γ uma curva suave com uma singularidade cúspide ramphoid $\mathcal{A}_h$ -equivalente a $(t^2, t^4 + t^5)$ em t_0 .

- (i) A cáustica de γ é composta pela reta tangente a γ em t_0 com multiplicidade 3 e por uma curva suave com uma inflexão ordinária como mostra a Figura 36 (1).

- (ii) As bifurcações de uma família FRS-genérica a 2-parâmetros γ_s com $\gamma_0 = \gamma$ são como mostra a Figura 35.
- (iii) Para uma família FRS-genérica a 2-parâmetros γ_s com $\gamma_0 = \gamma$, as bifurcações na cáustica são como mostra a Figura 36.
- (iv) Qualquer família FRS-genérica a 2-parâmetros com uma singularidade cúspide ramphoid $\mathcal{A}_h$ -equivalente a $(t^2, t^4 + t^5)$ é FRS-equivalente à família modelo $\alpha_r(t) = (t^2, r_2 t + r_1 t^3 + t^4 + t^5 + t^6)$.

Figura 35 – Deformação FRS-genérica de uma cúspide ramphoid.

Figura 36 – Deformação FRS-genérica da cáustica de uma cúspide ramphoid.

Demonstração. (i) Sabemos que a cáustica de uma curva γ é dada pelo conjunto dos parâmetros $u \in \mathbb{R}_1^2$ tais que $d'_u(t) = d''_u(t) = 0$ para algum $t \in \mathbb{R}, 0$, onde d_u é a função distância ao quadrado dada por $d_u(t) = \langle \gamma(t) - u, \gamma(t) - u \rangle$.

Para $\gamma(t) = (t^2, \beta(t))$, temos $d_u(t) = \langle \gamma(t) - u, \gamma(t) - u \rangle = -(t^2 - u_1)^2 + (\beta(t) - u_2)^2$ e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d'_u(t) &= -2t(t^2 - u_1) + \beta'(t)(\beta(t) - u_2) = 0, \\ \frac{1}{2}d''_u(t) &= -6t^2 + 2u_1 + \beta''(t)(\beta(t) - u_2) + \beta'(t)^2 = 0. \end{aligned}$$

Da segunda equação, obtemos $u_1 = 3t^2 - \frac{1}{2}\beta''(t)(\beta(t) - u_2) - \frac{1}{2}\beta'(t)^2$, substituindo na primeira equação, temos

$$t^3 \left(4 + \frac{(\beta''(t)t - \beta'(t))}{t^3} u_2 - \frac{(\beta''(t)t - \beta'(t))}{t^3} \beta(t) - \frac{\beta'(t)^2 t}{t^3} \right) = 0.$$

Logo, $t = 0$ é uma raiz tripla da equação acima, o que implica que a reta $u_1 = 0$ deve ser considerada com multiplicidade 3 na cáustica de γ .

$$\text{Já para } t \neq 0, \text{ obtemos } u_2 = \frac{-4t^3 + (\beta''(t)t - \beta'(t))\beta(t) + \beta'(t)^2 t}{\beta''(t)t - \beta'(t)}.$$

Portanto, a cáustica de γ é formada pela reta $u_1 = 0$ (com multiplicidade 3) e a curva dada por $\left(\frac{5c_5}{8c_4}t^3 + O(t^4), -\frac{1}{2c_4} + \frac{15c_5}{16c_4^2}t + O(t^2) \right)$ como mostra a Figura 36 (1).

Observamos que $d_u'(0) = 0$, $d_u''(0) = 4u_1$, $d_u'''(0) = 0$, $d_u^{(4)}(0) = -24 - 48c_4u_2$ e $d_u^{(5)}(0) = -240c_5 \neq 0$, ou seja, a função distância ao quadrado d_u possui uma singularidade A_1 em $t = 0$ para $u_1 \neq 0$, A_3 para $u_1 = 0$ e $u_2 \neq -\frac{1}{2c_4}$ e A_4 para $u_1 = 0$ e $u_2 = -\frac{1}{2c_4}$.

(ii) Analisemos o número máximo de pontos lightlike, inflexões e vértices.

Primeiramente analisamos os pontos lightlike, os quais são dados pelas equações $\beta_s'(t) \pm 2t = 0$.

Considere as seguintes famílias: $h^+(t, s) = \beta_s'(t) + 2t$ e $h^-(t, s) = \beta_s'(t) - 2t$. Note que $h^+(t, 0) = 2t + O(t^3)$ e $h^-(t, 0) = -2t + O(t^3)$, ou seja, são singularidades A_0 (regular), o que implica que h^+ e h^- possuem apenas um zero para cada $s \in \mathbb{R}^2$, 0 fixo, os quais são $t_1 = -\frac{1}{2}s_2 + O_2(s_1, s_2)$ e $t_2 = \frac{1}{2}s_2 + O_2(s_1, s_2)$, respectivamente.

Utilizando o Maple, podemos verificar que $t_1 - t_2 = s_2(-1 + O_1(s_1, s_2))$, o que significa que $t_1 = t_2$ somente sobre o estrato de cúspide ($s_2 = 0$). Portanto, γ_s possui dois pontos lightlike para todo $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, 0$, com $s_2 \neq 0$.

Agora analisemos com relação as inflexões. Para tal, precisamos do numerador da curvatura de γ_s , o qual é dado por

$$G(t, s) = -2\beta_s'(t) + 2t\beta_s''(t) = -2s_2 + 6s_1t^2 + 8\overline{c_4}(s)t^3 + 15\overline{c_5}(s)t^4 + 24\overline{c_6}(s)t^5 + O_s(t^6).$$

Note que $G(t, 0, 0) = 8c_4t^3 + O(t^4)$, ou seja, é uma singularidade A_2 , o que significa que γ_s pode ter no máximo 3 inflexões.

Quanto aos vértices, precisamos do numerador da derivada da função curvatura de γ_s , o qual é dado por

$$H(t, s) = 2t\beta_s'''(t)(-4t^2 + \beta_s'(t)^2) - 3(-2\beta_s'(t) + 2t\beta_s''(t))(-4t + \beta_s'(t)\beta_s''(t)).$$

Utilizando o Maple, obtemos $H(t, s) = 12s_2^2O(s) - 24s_2(1 + O(s^2))t + 120s_2O(s)t^2 + 24(s + O(s^2))t^3 + 60O(s^2)t^4 + (-120c_5 + O(s))t^5 + O_s(t^6)$. Logo, $H(t, 0) = -120c_5t^5 + O(t^6)$, ou seja, é uma singularidade A_4 , o que significa que γ_s tem no máximo 5 vértices.

Para obter a posição relativa dos pontos lightlike, inflexão e vértices em γ_s usamos os resultados obtidos nas seções e capítulos anteriores e o fato que mudanças só podem ocorrer ao cruzarmos uma curva da estratificação do espaço de parâmetros obtida no Teorema 7.0.2. Para iniciar avaliamos tal configuração sobre o estrato de cúspide, ou seja, quando $s_2 = 0$.

Note que, neste caso, $h^+(t, s_1) = t[2(\overline{c_2}(s_1) + 1) + 3s_1t + 4\overline{c_4}(s_1)t^2 + O_{s_1}(t^3)]$ e $h^-(t, s_1) = t[2(\overline{c_2}(s_1) - 1) + 3s_1t + 4\overline{c_4}(s_1)t^2 + O_{s_1}(t^3)]$, cujos termos entre colchetes estão próximos de 2 e -2 , respectivamente. Logo, para que h^+ e h^- se anulem, devemos ter $t = 0$, ou seja, os dois pontos lightlike se concentram no ponto de cúspide quando s pertence ao estrato de cúspide.

Agora com relação a inflexões, temos $G(t, s_1) = t^2(6s_1 + 8\overline{c_4}(s_1)t + 15\overline{c_5}(s_1)t^2 + O_s(t^3))$, ou seja, temos duas inflexões concentradas no ponto de cúspide e uma dada por $t_0 = -\frac{3}{8c_4}s_1 + O(s_1^2)$. Logo, γ_s possui uma inflexão $t_0 > 0$ para $s_1 < 0$ e $t_0 < 0$ para $s_1 > 0$.

Sobre os vértices, temos $H(t, s_1) = 12t^3(2s_1 + O(s_1)s_1 - 10c_5t^2 + O(s_1)t^2 + O_{s_1}(t^3))$, de onde concluímos que os vértices são dados pela equação $s_1 = 5c_5t^2 + O(t^3)$. Logo, para $s_1 > 0$ temos 2 vértices e nenhum para $s_1 < 0$. Além disso, como c_4 e c_5 são fixos (e supomos positivos), então $\frac{3s_1}{8c_4} < \sqrt{\frac{s_1}{5c_5}}$, o que nos diz que a posição relativa é dada por $V - I - C - V$, para $s_1 > 0$ e $C - I$, para $s_1 < 0$. Além disso, o primeiro vértice é outward e o segundo é inward. De fato, a função curvatura é dada por $\kappa_{s_1}(t) = \frac{6s_1t^2 + O_{s_1}(t^3)}{|4t^2(-1 + \overline{c_2}(s_1)) + O_{s_1}(t^3)|^{\frac{3}{2}}} = \frac{3s_1}{4} \frac{1}{|t|} (1 + O_{s_1}(t))$ e como $s_1 > 0$, temos que quando t tende a 0, a função curvatura vai para o infinito. Como as inflexões de γ_s são zeros de κ_s e os vértices de γ_s são pontos de máximo ou de mínimo de κ_s , então podemos concluir que os dois vértice são pontos de mínimo de κ_s (ou seja, $\kappa_s'' > 0$) e, consequentemente, temos $\kappa_s \kappa_s'' < 0$ no primeiro vértice e $\kappa_s \kappa_s'' > 0$ no segundo.

Agora podemos percorrer, no espaço de parâmetros, em torno da origem e usar a configuração obtida sob o estrato de cúspide, as deformações de uma cúspide ordinária, de uma inflexão de ordem 2 e de um vértice de ordem 2 para obter as configurações de γ_s em cada um dos estratos obtidos como mostra a Figura 35.

(iii) Utilizando as configurações da curva com relação a seus pontos lightlike, inflexões e vértices que obtivemos em (ii) e as deformações geométricas da cáustica obtidas nos capítulos anteriores, podemos concluir que as bifurcações na cáustica de γ são dadas como mostra a Figura 36.

(iv) Segue do Teorema 7.0.2 que os estratos correspondentes do espaço de parâmetros de γ_s e do espaço de parâmetros da família modelo são homeomorfos, ver Figura 35 centro. Além disso, os cálculos feitos nos itens (ii) e (iii) dependeram apenas do fato da família conter uma cúspide ramphoid $\mathcal{A}_H$ -equivalente a $(t^2, t^4 + t^5)$ e ser FRS-genérica, condições que a família modelo satisfaz. $\square$

Observação 7.0.5. No caso Euclidiano estudado em (SALARINOGHABI; TARI, 2017), também há uma versão do resultado acima e das Figuras 35 e 36, mais especificamente, os Teoremas

5.3 e 5.4 e as Figuras 12 e 13 de (SALARINOUGHABI; TARI, 2017). As diferenças observadas são: a presença de pontos lightlike na Figura 35 e a diferença de posições da cáustica na Figura 36, as quais são advindas das diferenças observadas no comportamento da evoluta em vértices, inflexões e pontos lightlike.

FUNÇÕES SOBRE A SWALLOWTAIL

Em todas as áreas da matemática é sempre interessante classificar os objetos com que trabalhamos, e para isso usamos algumas ferramentas que preservam as principais propriedades envolvidas. Muitas classificações em teoria de singularidades são feitas usando difeomorfismos, mas às vezes é de nosso interesse que tais difeomorfismos preservem uma determinada variedade X . Existem vários trabalhos nessa direção, por exemplo, em (ARNOL'D, 1976) e (BRUCE, 1984) é feito uma classificação de funções estáveis por meio de difeomorfismos que preservam um discriminante cilíndrico, em (BRUCE; WEST, 1998), (OSET SINHA; TARI, 2018) e (OSET SINHA; SAJI, 2018) são feitas classificações de submersões por meio de difeomorfismos que preservam o cross-cap, a cuspidal edge e o cuspidal cross-cap, respectivamente. Neste apêndice, usamos a mesma abordagem desses últimos trabalhos e classificamos germes de submersões $f : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ por meio de difeomorfismos na fonte que preservam a swallowtail. Usamos tal classificação no Capítulo 5 para obter um modelo simplificado de uma submersão cuja fibra pela origem consiste do estrato de vértices de ordem 2 de uma deformação FRL-genérica de uma curva em uma inflexão lightlike de ordem 2. Os resultados apresentados neste apêndice estão no artigo (FRANCISCO, 2018).

Observamos que em (BRUCE; KIRK; DU PLESSIS, 1997) é feita uma classificação de submersões por meio de difeomorfismos que preservam a swallowtail. No entanto, tal classificação é feita em um contexto mais geral e no artigo citado não é apresentado sua demonstração como fazemos aqui, nem o estudo da geometria envolvida.

Recordemos que uma *swallowtail* é a imagem de um germe $g : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ que é $\mathcal{A}$ -equivalente a $f(x, y) = (x, -4y^3 - 2xy, 3y^4 + xy^2)$, ou seja, existem germes de difeomorfismos ϕ e ψ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Nos referimos a swallowtail parametrizada por f como *swallowtail padrão* (ver Figura 37) e à swallowtail parametrizada por g simplesmente como *swallowtail*. A swallowtail padrão é o conjunto discriminante de uma singularidade A_3 , como ilustrado no Exemplo 1.4.17. Em (SAJI, 2018) é dado uma forma normal para uma swallowtail obtida usando mudanças de coordenadas na fonte e isometrias na meta, portanto, mudanças que preservam a

geometria da imagem.

Figura 37 – A swallowtail, sua curva singular Σ (em vermelho) e sua curva de pontos duplos Υ (em azul).

Superfícies com singularidades do tipo swallowtail surgem de um modo natural. Por exemplo, dada uma curva espacial regular γ com curvatura que não se anula, podemos considerar seu conjunto focal, o qual é o lugar geométrico dos centros de esferas que tem um contato de ordem maior que 2 com a curva γ . O conjunto focal de γ é uma superfície que pode ser singular, e é uma swallowtail em pontos em que a família de funções distância ao quadrado tem uma singularidade A_4 (ver (BRUCE; GIBLIN, 1987) para mais detalhes). Podemos definir também o conjunto focal de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ e estudar sua geometria. Em (ARNOL'D; GUSEIN ZADE; VARCHENKO, 1985) é mostrado que o conjunto focal de uma superfície regular é uma swallowtail nos pontos em que a família de funções distância ao quadrado tem uma singularidade A_4 . Outro exemplo é o dual de γ , o qual é um modelo para o conjunto de todos os planos tangentes à curva γ . O dual de γ é uma swallowtail em pontos em que a família estendida de funções altura tem uma singularidade A_3 (ver (BRUCE; GIBLIN, 1987) para mais detalhes). De forma geral os conjuntos focais, duais e discriminantes de curvas e superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ podem ter singularidades do tipo swallowtail. Portanto há boas razões para estudar a geometria diferencial da swallowtail.

Neste apêndice, além de classificarmos germes de submersões $f : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ a menos de difeomorfismos na fonte que preservam a swallowtail, também estudamos a geometria plana da swallowtail, a qual provém de seu contato com planos (objetos planos) que é medido pelas singularidades da função altura sobre a swallowtail.

Este trabalho faz parte de um estudo em andamento sobre a geometria de superfícies singulares do ponto de vista da teoria de singularidades. Ver, por exemplo, para o cross-cap: (BARAJAS SICHACÁ; KABATA, 2018), (BRUCE; WEST, 1998), (DIAS; TARI, 2016), (FUKUI; HASEGAWA, 2012), (HASEGAWA *et al.*, 2014), (HASEGAWA *et al.*, 2015), (HONDA *et al.*, 2019), (NUÑO BALLESTEROS; TARI, 2007), (OLIVER, 2011), (OSET SINHA; TARI, 2015), (WEST, 1995), para a cuspidal edge: (BRUCE; WILKINSON, 1991), (KOKUBU *et al.*, 2005), (MARTINS; SAJI, 2016), (MARTINS; SAJI, 2018), (NAOKAWA; UMEHARA; YAMADA, 2016), (OSET SINHA; TARI, 2018), (SAJI; UMEHARA; YAMADA, 2009), (TERAMOTO, 2016), (WILKINSON, 1991), para a swallowtail: (SAJI, 2018), para o cuspidal cross-cap: (OSET SINHA; SAJI, 2018) e para superfícies em $\mathbb{R}^3$ com singularidades de corank

1: (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015).

Seguimos a abordagem de (BRUCE; WEST, 1998) : fixamos a swallowtail padrão $X = f(\mathbb{R}^2, 0)$ e consideramos seu contato com fibras de submersões.

Este capítulo é organizado como segue. Na Seção A.1 apresentamos alguns conceitos e resultados sobre classificação de germes de funções sobre uma variedade analítica. Na Seção A.2 damos algumas propriedades da swallowtail padrão e classificamos submersões de $\mathbb{R}^3, 0$ a $\mathbb{R}, 0$ a menos de mudanças de coordenadas na fonte que preservam a swallowtail padrão. Na Seção A.3 calculamos os discriminantes de desdobramentos versais de cada forma normal obtida na classificação e analisamos o contato entre a fibra zero e a swallowtail padrão em cada caso. E, finalmente, na Seção A.4, usando a classificação estudamos a geometria plana de uma swallowtail.

A.1 Funções sobre variedades analíticas

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e resultados de (BRUCE; KIRK; DU PLESSIS, 1997), (BRUCE; ROBERTS, 1988), (BRUCE; WEST, 1998), (DAMON, 1984) e (OSET SINHA; TARI, 2018), os quais são ferramentas muito úteis para classificar funções sobre variedades analíticas.

Seja $\mathcal{E}_n$ o anel local de germes de funções suaves $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{M}_n$ seu único ideal maximal. Considere $X, 0 \subset \mathbb{R}^n, 0$ sendo um germe reduzido de uma subvariedade analítica de $\mathbb{R}^n$ em 0. Dizemos que um germe de difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ preserva X se $\varphi(X)$ e X são iguais como germes em 0, ou seja, $(\varphi(X), 0) = (X, 0)$. O grupo formado por tais difeomorfismos é um subgrupo de $\mathcal{R}$ e será denotado por $\mathcal{R}(X)$.

Dados dois germes de funções $f, g \in \mathcal{E}_n$, dizemos que eles são $\mathcal{R}(X)$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\varphi \in \mathcal{R}(X)$ tal que $g \circ \varphi^{-1} = f$.

Denotamos por $\Theta(X)$ o $\mathcal{E}_n$ -módulo dos germes de campos de vetores tangentes a X em 0. Definimos $\Theta(X) \cdot f = \{\xi \cdot f \in \mathcal{E}_n \mid \xi \in \Theta(X), \xi(0) = 0\}$, o qual é um $\mathcal{E}_n$ -módulo.

Seja $\Theta_1(X) = \{\xi \in \Theta(X) \mid j^1 \xi = 0\}$, o qual é um $\mathcal{E}_n$ -módulo. Integrando os campos de vetores em $\Theta_1(X)$ obtemos um grupo denotado por $\mathcal{R}_1(X)$, o qual é o conjunto formado pelos germes de difeomorfismos em $\mathcal{R}(X)$ com 1-jato igual a identidade. Também podemos definir o subgrupo $\mathcal{R}_k(X)$ dos germes de difeomorfismos em $\mathcal{R}(X)$ com k -jato igual a identidade, o qual é um subgrupo normal de $\mathcal{R}(X)$ e, conseqüentemente, podemos definir o grupo $\mathcal{R}^{(k)}(X) = \frac{\mathcal{R}(X)}{\mathcal{R}_k(X)}$. Os elementos de $\mathcal{R}^{(k)}(X)$ são k -jatos de elementos de $\mathcal{R}(X)$. A ação de $\mathcal{R}(X)$ em $\mathcal{M}_n$ induz uma ação suave do grupo $\mathcal{R}^{(k)}(X)$ sobre o espaço de k -jatos de germes de funções $J^k(n, 1)$.

Para $f \in \mathcal{E}_n$ os espaços tangentes a $\mathcal{R}(X)$ e $\mathcal{R}_1(X)$ -órbitas de f são, respectivamente

$$L\mathcal{R}(X) \cdot f = \Theta(X) \cdot f \quad \text{e} \quad L\mathcal{R}_1(X) \cdot f = \Theta_1(X) \cdot f.$$

As ferramentas para classificar germes de funções $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$, a menos de $\mathcal{R}(X)$ -

equivalência, são generalizações dos resultados clássicos sobre ações de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{E}_n$. O grupo $\mathcal{R}(X)$ é um subgrupo geométrico de Damon ((DAMON, 1984)), então os teoremas sobre deformações versais e determinação finita se aplicam a essa configuração.

Definição A.1.1. Um germe de função $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ é $k - \mathcal{R}(X)$ -**determinado** se todo germe de função com o mesmo k -jato de f é $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a f . Dizemos que f é $\mathcal{R}(X)$ -**finitamente determinado** se f é $k - \mathcal{R}(X)$ -determinado para algum $k \in \mathbb{N}^*$.

Teorema A.1.2. ((DAMON, 1984)) Considere $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de função. Se existe $k \in \mathbb{N}^*$, tal que

$$\mathcal{M}_n^k \subset L\mathcal{R}(X) \cdot f,$$

então f é $(k+1) - \mathcal{R}(X)$ -determinado.

Definimos o *pseudo-grupo estendido* de difeomorfismos que preservam X , denotado por $\mathcal{R}_e(X)$, como sendo o pseudo-grupo obtido integrando campos de vetores $\xi \in \Theta(X)$, mas excluindo a condição $\xi(0) = 0$. Portanto, para $f \in \mathcal{E}_n$ o espaço tangente estendido a $\mathcal{R}_e(X)$ -órbita de f é $L\mathcal{R}_e(X) \cdot f = \{\xi \cdot f \in \mathcal{E}_n \mid \xi \in \Theta(X)\}$.

Note que quando X é uma swallowtail, todo campo de vetores se anula na origem, ou seja, neste caso $\mathcal{R}_e(X) = \mathcal{R}(X)$.

A $\mathcal{R}(X)$ -classificação de germes finitamente determinados é feita indutivamente sobre os níveis de jatos. O método usado aqui é o da transversal completa (BRUCE; KIRK; DU PLESSIS, 1997) adaptado para a $\mathcal{R}(X)$ -ação em (BRUCE; WEST, 1998).

Teorema A.1.3. (Transversal Completa) Sejam $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe suave e $\{h_1, \dots, h_r\}$ uma coleção de polinômios homogêneos de grau $k+1$ tais que

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset L\mathcal{R}_1(X) \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{h_1, \dots, h_r\} + \mathcal{M}_n^{k+2}.$$

Então todo germe $g : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ com $j^k g(0) = j^k f(0)$ é $\mathcal{R}_1(X)$ -equivalente a um germe da forma

$$f(x) + \sum_{i=1}^r \lambda_i h_i(x) + \varphi(x),$$

onde $\varphi(x) \in \mathcal{M}_n^{k+2}$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$. O espaço vetorial real $T = \mathbb{R} \cdot \{h_1, \dots, h_r\}$ é chamado de uma $(k+1)$ -transversal completa de f .

Proposição A.1.4. (i) Um germe $f \in \mathcal{M}_n$ é $k - \mathcal{R}_1(X)$ -determinado se, e somente se,

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset L\mathcal{R}_1(X) \cdot f + \mathcal{M}_n^{k+2}.$$

(ii) Em particular, se todo campo de vetores em $\Theta(X)$ se anula na origem e

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset L\mathcal{R}(X) \cdot f + \mathcal{M}_n^{k+2},$$

então f é $(k+1) - \mathcal{R}(X)$ -determinado.

Demonstração. Este resultado é uma consequência dos Teoremas A.1.3 e 2.5 de (BRUCE; DU PLESSIS; WALL, 1987) aplicado a nossa configuração. $\square$

Uma *deformação a s -parâmetros* de $f \in \mathcal{E}_n$ é uma família de germes de funções $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, (0,0) \rightarrow \mathbb{R}, 0$ tal que $F_0(x) = F(x, 0) = f(x)$. Uma deformação a s -parâmetros F é dita *$P\text{-}\mathcal{R}^+(X)$ -induzida* por uma deformação a r -parâmetros G se existem um germe $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, (0,0) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)$ da forma $\phi(x, u) = (\varphi(x, u), \psi(u))$ e um germe de função $c : \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $F(x, u) = G(\phi(x, u)) + c(u)$. Quando ϕ é um germe de difeomorfismo, dizemos que F e G são *$P\text{-}\mathcal{R}^+(X)$ -equivalentes* (ver, por exemplo, (BRUCE; GIBLIN, 1992) para a noção de (p) -desdobramentos).

Dizemos que uma deformação F de f é uma *deformação $\mathcal{R}^+(X)$ -versal* de f se qualquer outra deformação de f é $P\text{-}\mathcal{R}^+(X)$ -induzido de F .

Proposição A.1.5. ((BRUCE; WEST, 1998)) Uma deformação a s -parâmetros F de um germe de função f sobre X é uma deformação $\mathcal{R}^+(X)$ -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{R}_e(X) \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{1, \dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{E}_n,$$

onde $\dot{F}_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)$, para $i = 1, \dots, s$.

Definimos a $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão de f como $\text{cod}(f, \mathcal{R}_e^+(X)) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{M}_n}{L\mathcal{R}_e(X) \cdot f} \right)$, o qual é o menor número de parâmetros necessários para a existência de uma deformação $\mathcal{R}^+(X)$ -versal de f .

Outra ferramenta importante na classificação é o Lema de Mather.

Lema A.1.6. (MATHER, 1969) (**Lema de Mather**) Seja $\alpha : G \times M \rightarrow M$ uma ação suave de um grupo de Lie G sobre uma variedade suave M , e seja V uma subvariedade conexa de M . Então as condições necessárias e suficientes para V pertencer a uma única órbita são as seguintes:

- (i) $T_v V \subset T_v(G.v)$, para todo $v \in V$.
- (ii) $\dim(T_v(G.v))$ independe de $v \in V$.

Outro conceito que utilizaremos é o de modalidade apresentado abaixo.

Definição A.1.7. Seja M uma variedade suave e G um grupo de Lie agindo suavemente sobre M . A **modalidade** de um ponto $p \in M$ sobre a ação de G é o menor número m tal que uma vizinhança pequena de p em M pode ser coberta por um número finito de famílias a m -parâmetros de G -órbitas. O ponto p é dito **simples** se a modalidade de p é 0, ou seja, se uma vizinhança de p intersecta somente um número finito de G -órbitas.

A.2 Classificação de funções sobre a swallowtail

Nesta seção, usamos os resultados da seção anterior para classificar germes de submersões suaves de $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ a menos de mudanças de coordenadas na fonte que preservam a swallowtail padrão. Note que quando X é uma swallowtail, todo campo de vetores se anula na origem, ou seja, neste caso $\mathcal{R}_e(X) = \mathcal{R}(X)$.

Consideramos aqui X como sendo a swallowtail padrão parametrizada por $f(x, y) = (x, -4y^3 - 2xy, 3y^4 + xy^2)$ ou com equação

$$16u^4w - 4u^3v^2 - 128u^2w^2 + 144uv^2w - 27v^4 + 256w^3 = 0.$$

Chamamos esses germes de *funções sobre a swallowtail*. Note que a função f é uma parametrização do conjunto discriminante da deformação $\mathcal{R}$ -versal $F(t, u_0, u_1, u_2) = t^4 + u_2t^2 + u_1t + u_0$ da A_3 -singularidade t^4 em 0.

Proposição A.2.1. ((BRUCE, 1984)) O $\mathcal{E}_3$ -módulo de germes na origem de campos de vetores em $\mathbb{R}^3$ tangentes a swallowtail padrão é gerado pelos campos de vetores θ_1, θ_2 e θ_3 com

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 2u \frac{\partial}{\partial u} + 3v \frac{\partial}{\partial v} + 4w \frac{\partial}{\partial w}, \\ \theta_2 &= 6v \frac{\partial}{\partial u} + (8w - 2u^2) \frac{\partial}{\partial v} - uv \frac{\partial}{\partial w}, \\ \theta_3 &= (16w - 4u^2) \frac{\partial}{\partial u} - 8uv \frac{\partial}{\partial v} - 3v^2 \frac{\partial}{\partial w}.\end{aligned}$$

Integrando as partes lineares de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ na Proposição A.2.1, obtemos os seguintes 1-jatos de mudanças de coordenadas em $\mathcal{R}(X)$:

$$\begin{aligned}h_1(u, v, w) &= (e^{2\lambda}u, e^{3\lambda}v, e^{4\lambda}w), \\ h_2(u, v, w) &= (u + 3\beta v, v + 4\gamma w, w), \\ h_3(u, v, w) &= (u + \alpha w, v, w),\end{aligned}$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$.

Considere o 1-jato $j^1g = au + bv + cw$ de uma submersão $g : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, com a, b ou c não nulo.

- Se $a \neq 0$: Usando h_3 com $\alpha = \frac{-c}{a}$, h_2 com $\gamma = 0$ e $\beta = \frac{-b}{3a}$ e h_1 com $\lambda = \frac{-1}{2} \ln |a|$, obtemos

$$j^1g(h_3(h_2(h_1(u, v, w)))) = \pm u.$$

Portanto, neste caso, j^1g é $\mathcal{R}^{(1)}(X)$ -equivalente a $\pm u$.

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$: Usando h_2 com $\gamma = \frac{-c}{4b}$ e $\beta = 0$, e h_1 com $\lambda = \frac{-1}{3} \ln |b|$ obtemos

$$j^1g(h_2(h_1(u, v, w))) = \pm v.$$

Além disso, usando a equação da swallowtail padrão podemos mostrar que o difeomorfismo $(u, v, w) \mapsto (u, -v, w)$ pertence a $\mathcal{R}(X)$, ou seja, ele preserva a swallowtail padrão. Portanto, neste caso, j^1g é $\mathcal{R}^{(1)}(X)$ -equivalente a v .

- Se $a = b = 0$ e $c \neq 0$: Usando h_1 com $\lambda = \frac{-1}{4} \ln |c|$, obtemos

$$j^1g(h_1(u, v, w)) = \pm w.$$

Portanto, neste caso, j^1g é $\mathcal{R}^{(1)}(X)$ -equivalente a $\pm w$.

Logo, obtemos o seguinte resultado.

Proposição A.2.2. As $\mathcal{R}^{(1)}(X)$ -órbitas de submersões de $\mathbb{R}^3, 0$ em $\mathbb{R}, 0$ são

$$\begin{cases} \pm u & , \text{ se } a \neq 0 \\ v & , \text{ se } a = 0 \text{ e } b \neq 0 \\ \pm w & , \text{ se } a = b = 0 \text{ e } c \neq 0 \end{cases}$$

Agora investigamos cada um dos casos que aparecem na Proposição A.2.2.

Lema A.2.3. O germe $g(u, v, w) = \pm u$ é 1- $\mathcal{R}(X)$ -determinado e tem $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão 0.

Demonstração. Temos

$$L\mathcal{R}(X) \cdot g = \mathcal{E}_3 \cdot \{u, v, 4w - u^2\} = \mathcal{M}_3$$

e o resultado segue. $\square$

Lema A.2.4. Qualquer germe $\mathcal{R}(X)$ -finitamente determinado em $\mathcal{E}_3$ com 1-jato $\mathcal{R}^{(1)}(X)$ -equivalente a v é $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a $v + au^{k+1}$ para algum $k \geq 1$ e $a \neq 0$. O germe $v + au^{k+1}$, $a \neq 0$, é $(k+1)$ - $\mathcal{R}(X)$ -determinado e tem $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão k .

Demonstração. Observe que o germe v não é $\mathcal{R}(X)$ -finitamente determinado. Prosseguimos por indução sobre os k -jatos ($k \geq 1$) de germes g com 1-jato igual a v .

Primeiramente, encontramos uma $(k+1)$ -transversal completa de $g(u, v, w) = v$.

Note que

$$L\mathcal{R}_1(X) \cdot g = \mathcal{M}_3 \cdot \{v, 4w - u^2\} = \mathcal{E}_3 \cdot \{uv, v^2, vw, 4uw - u^3, 4w^2 - u^2w\}.$$

Logo,

$$\mathcal{M}_3^{(k+1)} \subset L\mathcal{R}_1(X) \cdot g + \mathbb{R} \cdot \{u^{k+1}\} + \mathcal{M}_3^{(k+2)},$$

então $T = \mathbb{R} \cdot \{u^{k+1}\}$ é uma $(k+1)$ -transversal completa de g . Assim, pelo Teorema da Transversal Completa A.1.3, qualquer $(k+1)$ -jato com k -jato igual a v é $\mathcal{R}_1(X)$ -equivalente a $v + au^{k+1}$, $a \in \mathbb{R}$.

Para $a \neq 0$, usando a Proposição A.1.4, concluímos que o germe $\bar{g}(u, v, w) = v + au^{k+1}$ é $(k+2) - \mathcal{R}(X)$ -determinado. No entanto, podemos usar o Teorema A.1.3 e o Lemma A.1.6 para concluir que $\bar{g}$ é $(k+1) - \mathcal{R}(X)$ -determinado.

De fato, note que

$$\mathcal{M}_3^{(k+2)} \subset L\mathcal{R}_1(X) \cdot \bar{g} + \mathbb{R} \cdot \{u^{k+2}\} + \mathcal{M}_3^{(k+3)}.$$

Logo, $T = \mathbb{R} \cdot \{u^{k+2}\}$ é uma $(k+2)$ -transversal completa de $\bar{g}$ e, consequentemente, qualquer $(k+2)$ -jato com $(k+1)$ -jato igual a $v + au^{k+1}$ é $\mathcal{R}_1(X)$ -equivalente a $\tilde{g}(u, v, w) = v + au^{k+1} + bu^{k+2}$.

Considere o conjunto $V_a = \{v + au^{k+1} + bu^{k+2}, b \in \mathbb{R}\}$, para cada $a \in \mathbb{R}^*$. Observe que

$$T_{\tilde{g}}V_a = \mathbb{R} \cdot \{u^{k+2}\} \subset L\mathcal{R}^{(k+2)}(X) \cdot \tilde{g}$$

e que $\dim(L\mathcal{R}^{(k+2)}(X) \cdot \tilde{g})$ independe de b . Logo, tomando $G = \mathcal{R}^{(k+2)}(X)$, $M = J^{k+2}(3, 1)$ e $V = V_a$ no Lema de Mather A.1.6, concluímos que V_a está contida em uma única $\mathcal{R}(X)$ -órbita, ou seja, $\tilde{g}$ é $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a $\bar{g}$, de onde concluímos que $\bar{g}$ é $(k+1) - \mathcal{R}(X)$ -determinado.

Além disso, $\frac{\mathcal{M}_3}{L\mathcal{R}(X) \cdot \bar{g}} = \mathbb{R} \cdot \{u, u^2, \dots, u^k, u^{k+1}\}$ o que implica que a $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão de $\bar{g}$ é $k+1$ e a codimensão do estrato desta singularidade é k . $\square$

Lema A.2.5. Todo germe $\mathcal{R}(X)$ -finitamente determinado em $\mathcal{E}_3$ com 1-jato $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a $\pm w$ e $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão ≤ 2 é $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a $\pm w + au^2 + bu^3$, com $a \neq 0, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{1}{4}$ e $b \neq 0$. Além disso, o germe $\pm w + au^2 + bu^3$, com a e b nas condições anteriores, é $3 - \mathcal{R}(X)$ -determinado e tem $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão 2 (no estrato).

Demonstração. Para $g(u, v, w) = \pm w$ temos

$$L\mathcal{R}(X) \cdot g = \mathcal{E}_3 \cdot \{w, uv, v^2\}.$$

Observe que g não é $\mathcal{R}(X)$ -finitamente determinado. Prosseguimos por indução sobre os k -jatos de germes com 1-jato igual a $\pm w$.

Note que

$$\mathcal{M}_3^2 \subset L\mathcal{R}_1(X) \cdot g + \mathbb{R} \cdot \{u^2, uv, v^2\} + \mathcal{M}_3^3,$$

então $T = \mathbb{R} \cdot \{u^2, uv, v^2\}$ é uma 2-transversal completa de g . Portanto, qualquer 2-jato com 1-jato igual a $\pm w$ é $\mathcal{R}_1(X)$ -equivalente a $g(u, v, w) = \pm w + au^2 + buv + cv^2$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Quando $a \neq 0$, usando a mudança linear de coordenadas h_2 com $\gamma = 0$ e $\beta = \frac{-b}{6a}$, obtemos $g(h_2(u, v, w)) = \pm w + au^2 + c'v^2$.

Podemos mostrar, usando o Lema de Mather, que $\pm w + au^2 + c'v^2$ é $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a $\pm w + au^2$.

Considere $f(u, v, w) = \pm w + au^2$, com $a \neq 0$. Então

$$L\mathcal{R}(X) \cdot f = \mathcal{E}_3 \cdot \{au^2 \pm w, (12a \mp 1)uv, 32auw - 8au^3 \mp 3v^2\}.$$

Uma 3-transversal completa de f é dada por

$$T = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \{u^3\} & \text{se } a \neq \pm \frac{1}{12} \\ \mathbb{R} \cdot \{u^3, u^2v\} & \text{se } a = \pm \frac{1}{12} \end{cases}.$$

Portanto, quando $a \neq 0, \pm \frac{1}{12}$, todo 3-jato com 2-jato igual a $\pm w + au^2$ é $\mathcal{R}_1(X)$ -equivalente a $\pm w + au^2 + bu^3$, $b \in \mathbb{R}$.

Para $\bar{f}(u, v, w) = \pm w + au^2 + bu^3$, com $a \neq 0, \pm \frac{1}{12}$, temos

$$\mathcal{M}_3^4 \subset L\mathcal{R}_1(X) \cdot \bar{f} + \mathcal{M}_3^5,$$

se, e somente se, $a \neq \pm \frac{1}{4}$, ou seja, pela Proposição A.1.4, $\bar{f}$ é 3- $\mathcal{R}(X)$ -determinado se, e somente se, $a \neq \pm \frac{1}{4}$.

Além disso,

$$\frac{\mathcal{M}_3}{L\mathcal{R}(X) \cdot \bar{f}} = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \{u, v, u^2, u^3\} & \text{se } b \neq 0 \\ \mathbb{R} \cdot \{u, v, u^2, u^3, v^2\} & \text{se } b = 0 \end{cases},$$

o que implica que a $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão do estrato da singularidade de $\bar{f}$ é 2 se $b \neq 0$ e 4 se $b = 0$.

Quando $a = 0$ ($a = \pm \frac{1}{12}$, resp.), todo germe $\mathcal{R}(X)$ -finitamente determinado em $\mathcal{E}_3$ com 2-jato $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a $\pm w + buv + cv^2$ ($\pm w + au^2 + bu^2v + cu^3$, resp.) tem $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão > 2 . $\square$

Teorema A.2.6. Seja X a swallowtail parametrizada por $f(x, y) = (x, -4y^3 - 2xy, 3y^4 + xy^2)$. Denote por (u, v, w) as coordenadas na meta. Então qualquer germe $g : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ de uma submersão $\mathcal{R}(X)$ -finitamente determinada com $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão ≤ 2 do estrato na presença de moduli é $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a um dos germes da Tabela 2.

Tabela 2 – $\mathcal{R}(X)$ -classificação de germes de submersões de $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão ≤ 2 .

Forma normal	$\text{cod}(f, \mathcal{R}_e^+(X))$	deformação $\mathcal{R}^+(X)$ -versal
$\pm u$	0	$\pm u$
$v + au^2, a \neq 0$	1	$v + au^2 + a_1u$
$v + au^3, a \neq 0$	2	$v + au^3 + a_1u + a_2u^2$
$\pm w + au^2 + bu^3, a \neq 0, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{1}{4}; b \neq 0$	2	$\pm w + au^2 + bu^3 + a_1u + a_2v$

Demonstração. A demonstração segue da Proposição A.2.2 e dos Lemas A.2.3, A.2.4, A.2.5. $\square$

Observação A.2.7. A $\mathcal{K}(X)$ -classificação de germes de submersões $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ com $\mathcal{K}_e(X)$ -codimensão ≤ 2 pode ser obtida do Teorema A.2.6 tomando $a = \pm 1$. Além disso, observamos que se estamos interessados nas fibras dessas submersões, então ambas classificações podem ser usadas, uma vez que as fibras são difeomorfas.

A.3 A geometria de funções sobre a swallowtail

A swallowtail padrão tem equação $16u^4w - 4u^3v^2 - 128u^2w^2 + 144uv^2w - 27v^4 + 256w^3 = 0$. Por Shafarevich (SHAFAREVICH, 1977), se X é uma variedade afim irredutível em $\mathbb{R}^n$ definida pelo ideal I , então as equações do cone tangente de X é formada pelos termos de menor grau dos polinômios em I . Portanto, o cone tangente a swallowtail padrão é o plano repetido $w^3 = 0$. A reta tangencial à swallowtail padrão na origem é a reta com direção $(1, 0, 0)$ passando pela origem. O germe $f(x, y) = (x, -4y^3 - 2xy, 3y^4 + xy^2)$ é singular ao longo da curva Σ parametrizada por $\alpha(t) = f(-6t^2, t) = (-6t^2, 8t^3, -3t^4)$. Além disso, f tem uma curva de pontos duplos Υ parametrizada por $\beta(t) = f(-2t^2, t) = (-2t^2, 0, t^4)$ que termina no ponto de swallowtail. Ver Figura 37.

Estudamos aqui os conjuntos discriminantes das deformações dadas no Teorema A.2.6. Seja $g : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe sobre $X = f(\mathbb{R}^2, 0)$ e $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, 0$ uma deformação de g . Consideramos as famílias $G(x, y, a_1, a_2) = F(f(x, y), a_1, a_2)$, $H_1(t, a_1, a_2) = F(\alpha(t), a_1, a_2)$ e $H_2(t, a_1, a_2) = F(\beta(t), a_1, a_2)$.

O discriminante da família G é o conjunto

$$\mathcal{D}_1(F) = \left\{ (a_1, a_2, G(x, y, a_1, a_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \text{ em } (x, y, a_1, a_2) \right\},$$

o discriminante da família G restrito à curva singular Σ é dado por

$$\mathcal{D}_2(F) = \left\{ (a_1, a_2, H_1(t, a_1, a_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; \frac{\partial H_1}{\partial t} = 0 \text{ em } (t, a_1, a_2) \right\}$$

e o discriminante da família G restrita à curva de pontos duplos Υ é o conjunto

$$\mathcal{D}_3(F) = \left\{ (a_1, a_2, H_2(t, a_1, a_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; \frac{\partial H_2}{\partial t} = 0 \text{ em } (t, a_1, a_2) \right\}.$$

Se F_1 e F_2 são duas deformações $P\text{-}\mathcal{R}^+(X)$ -equivalentes de um germe g , então não é difícil mostrar que os conjuntos $\mathcal{D}_i(F_1)$ e $\mathcal{D}_i(F_2)$ são difeomorfos para $i = 1, 2, 3$. Portanto, é suficiente computar os conjuntos $\mathcal{D}_i(F)$ para as deformações dadas no Teorema A.2.6.

- O caso $g(u, v, w) = \pm u$.

Neste caso, uma deformação $\mathcal{R}^+(X)$ -versal de g é $F(u, v, w, a_1, a_2) = \pm u$. Então as outras famílias são

$$G(x, y, a_1, a_2) = \pm x \quad H_1(t, a_1, a_2) = \mp 6t^2 \quad H_2(t, a_1, a_2) = \mp 2t^2.$$

Logo, $\mathcal{D}_1(F)$ é vazio e $\mathcal{D}_2(F) = \mathcal{D}_3(F)$ é um plano.

Aqui, a fibra $g = 0$ é um plano transversal à reta tangencial e ao cone tangente de X .

- O caso $g(u, v, w) = v + au^2, a \neq 0$.

Neste caso, uma deformação $\mathcal{R}^+(X)$ -versal é $F(u, v, w, a_1, a_2) = v + au^2 + a_1u$. Então as outras famílias são

$$G(x, y, a_1, a_2) = -4y^3 - 2xy + ax^2 + a_1x,$$

$$H_1(t, a_1, a_2) = 8t^3 + 36at^4 - 6a_1t^2,$$

$$H_2(t, a_1, a_2) = 4at^4 - 2a_1t^2.$$

Note que H_2 é uma deformação versal da singularidade de fronteira B_2 segundo a terminologia de (ARNOL'D, 1978a). Temos

$$\mathcal{D}_1(F) = \{(2y + 12ay^2, a_2, -4y^3 - 36ay^4)\},$$

$$\mathcal{D}_2(F) = \{(a_1, a_2, 0)\} \cup \{(2t + 12at^2, a_2, -4t^3 - 36at^4)\},$$

$$\mathcal{D}_3(F) = \{(a_1, a_2, 0)\} \cup \{(4at^2, a_2, -4at^4)\}.$$

Estes discriminantes são ilustrados na Figura 38.

Figura 38 – Os discriminantes $\mathcal{D}_2(F)$ e seu subconjunto $\mathcal{D}_1(F)$ em negrito (esquerda) e o discriminante $\mathcal{D}_3(F)$ (direita) de $F = v + au^2 + a_1u$.

O plano tangente a fibra $g = 0$ contém a reta tangencial e é transversal ao cone tangente de X . O contato da reta tangencial com a fibra $g = 0$ é medido pelas singularidades de $g(f(x, 0)) = ax^2$ e é do tipo A_1 .

- O caso $g(u, v, w) = v + au^3, a \neq 0$.

Neste caso, uma deformação $\mathcal{R}^+(X)$ -versal é $F(u, v, w, a_1, a_2) = v + au^3 + a_1u + a_2u^2$ e as outras famílias são

$$G(x, y, a_1, a_2) = -4y^3 - 2xy + ax^3 + a_1x + a_2x^2,$$

$$H_1(t, a_1, a_2) = 8t^3 - 216at^6 - 6a_1t^2 + 36a_2t^4,$$

$$H_2(t, a_1, a_2) = -8at^6 - 2a_1t^2 + 4a_2t^4.$$

Note que H_2 é uma deformação versal da singularidade de fronteira B_3 , segundo a terminologia de (ARNOL'D, 1978a). Logo,

$$\mathcal{D}_1(F) = \{(2y - 108ay^4 + 12a_2y^2, a_2, -4y^3 + 432ay^6 - 36a_2y^4)\},$$

$$\mathcal{D}_2(F) = \{(a_1, a_2, 0)\} \cup \{(2t - 108at^4 + 12a_2t^2, a_2, -4t^3 + 432at^6 - 36a_2t^4)\},$$

$$\mathcal{D}_3(F) = \{(a_1, a_2, 0)\} \cup \{(-12at^4 + 4a_2t^2, a_2, 16at^6 - 4a_2t^4)\}.$$

Ver Figura 39.

A segunda componente do discriminante $\mathcal{D}_3(F)$ é uma superfície singular ao longo do conjunto $\{(0, a_2, 0)\} \cup \{(12at^4, 6at^2, -8at^6)\}$. A singularidade ao longo de $(12at^4, 6at^2, -8at^6)$ é uma cuspidal edge quando $t \neq 0$.

Figura 39 – O discriminante $\mathcal{D}_2(F)$ e seu subconjunto $\mathcal{D}_1(F)$ em negrito (esquerda) e o discriminante $\mathcal{D}_3(F)$ (direita) de $F = v + au^3 + a_1u + a_2u^2$.

Aqui, como no caso anterior, o plano tangente à fibra $g = 0$ contém a reta tangencial e é transversal ao cone tangente de X . No entanto, o contato da reta tangencial com a fibra $g = 0$ é medido pelas singularidades de $g(f(x, 0)) = ax^3$ e é do tipo A_2 .

- O caso $g(u, v, w) = \pm w + au^2 + bu^3$, $a \neq 0, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{1}{4}$, $b \neq 0$.

Neste caso, uma deformação $\mathcal{R}^+(X)$ -versal é $F(u, v, w, a_1, a_2) = \pm w + au^2 + bu^3 + a_1u + a_2v$, e as outras famílias são

$$G(x, y, a_1, a_2) = \pm 3y^4 \pm xy^2 + ax^2 + bx^3 + a_1x - 4a_2y^3 - 2a_2xy,$$

$$H_1(t, a_1, a_2) = \mp 3t^4 + 36at^4 - 216bt^6 - 6a_1t^2 + 8a_2t^3,$$

$$H_2(t, a_1, a_2) = \pm t^4 + 4at^4 - 8bt^6 - 2a_1t^2.$$

Portanto, o discriminante $\mathcal{D}_1(F)$ é a união de duas superfícies $S1, S2$, com $S1$ parametrizada por

$$(x, y) \mapsto (\pm y^2 - 2ax - 3bx^2, \pm y, \mp y^4 - ax^2 - 2bx^3)$$

e S_2 parametrizada por

$$(a_2, t) \mapsto (\mp t^2 + 12at^2 - 108bt^4 + 2a_2t, a_2, \pm 3t^4 - 36at^4 + 432bt^6 - 4a_2t^3).$$

A primeira superfície S_1 é regular e seu plano tangente na origem é $w = 0$. A segunda superfície S_2 é singular ao longo da curva parametrizada por $(\pm t^2 - 12at^2 + 324bt^4, \pm t - 12at + 216bt^3, \mp t^4 + 12at^4 - 432bt^6)$. Usando o Corolário 1.5 de (FUJIMORI *et al.*, 2008) provamos que S_2 é uma *cuspidal cross cap* (isto é, ela é $\mathcal{A}$ -equivalente a superfície parametrizada por (x, y^2, xy^3)).

A intersecção entre essas duas componentes S_1 e S_2 é uma curva plana com uma singularidade Z_{17} se $a = \mp \frac{1}{18}$ (ou seja, ela é $\mathcal{R}$ -equivalente a $x^3y + y^8 + \lambda xy^6$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$) ou com uma singularidade Z_{13} caso contrário (ou seja, ela é $\mathcal{R}$ -equivalente a $x^3y + y^6 + \lambda xy^5$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$). Portanto, esta intersecção é a imagem pela parametrização da primeira componente das duas curvas, que são, a menos de difeomorfismos, uma reta ($y = 0$) e a fibra zero de uma singularidade E_{12} ($x^3 + y^7 + \delta xy^5 = 0$) se $a = \mp \frac{1}{18}$ e uma reta ($y = 0$) e a fibra zero de uma singularidade E_8 ($x^3 + y^5 = 0$) caso contrário.

O discriminante $\mathcal{D}_2(F)$ é a união do plano $\{(a_1, a_2, 0)\}$ e da superfície S_2 de $\mathcal{D}_1(F)$.

Finalmente, $\mathcal{D}_3(F) = \{(a_1, a_2, 0)\} \cup \{(\pm t^2 + 4at^2 - 12bt^4, a_2, \mp t^4 - 4at^4 + 16bt^6)\}$.

O discriminante $\mathcal{D}_2(F)$ e $\mathcal{D}_3(F)$ são ilustrados na Figura 40.

Figura 40 – O discriminante $\mathcal{D}_2(F)$ (esquerda) e o discriminante $\mathcal{D}_3(F)$ (direita) de $F = \pm w + au^2 + bu^3 + a_1u + a_2v$.

O plano tangente à fibra $g = 0$ coincide com o cone tangente à swallowtail na origem. O contato da reta tangencial com a fibra $g = 0$ é medido pelas singularidades de $g(f(x, 0)) = ax^2 + bx^3$ e é do tipo A_1 .

A.4 Geometria plana da swallowtail

Usamos a classificação dada no Teorema A.2.6 para estudar a geometria plana de uma swallowtail M . A geometria plana é capturada pelo contato da swallowtail M com planos e é medida pelas singularidades da função altura $h_v(p) = p \cdot v$, com $v \in S^2$ ortogonal ao plano dado. Variando v localmente em S^2 obtemos a família de funções altura $H : M \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $H(p, v) = h_v(p)$.

Seja g uma parametrização da swallowtail. Então g é $\mathcal{A}$ -equivalente a f (a parametrização da swallowtail padrão). Ou seja, existem germes de difeomorfismos $\phi : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ e $\psi : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ tais que $g \circ \phi = \psi \circ f$.

Queremos estudar o contato entre a swallowtail $\psi(X)$ e o plano $h_v^{-1}(0)$ para algum $v \in S^2$. Este contato é medido pelas singularidades da função $h_v \circ g : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, mas essas singularidades são as mesmas das de $h_v \circ g \circ \phi = h_v \circ \psi \circ f$, as quais, por sua vez, medem o contato entre a swallowtail padrão $X = f(\mathbb{R}^2, 0)$ e a superfície $(h_v \circ \psi)^{-1}(0)$.

Note que se existem outros germes de difeomorfismos ϕ_1 e ψ_1 tais que $g \circ \phi_1 = \psi_1 \circ f$, então $h_v \circ \psi_1 = h_v \circ \psi \circ (\psi^{-1} \circ \psi_1)$ e $\psi^{-1} \circ \psi_1(X) = \psi^{-1} \circ \psi_1 \circ f(\mathbb{R}^2, 0) = \psi^{-1} \circ g \circ \phi_1(\mathbb{R}^2, 0) = f \circ \phi^{-1} \circ \phi_1(\mathbb{R}^2, 0) = X$. O germe $\psi^{-1} \circ \psi_1$ é um germe de difeomorfismo que preserva a swallowtail padrão X , ou seja, $\psi^{-1} \circ \psi_1 \in \mathcal{R}(X)$. Portanto, a função $h_v \circ \psi$ está bem definida a menos de elementos em $\mathcal{R}(X)$ (ver (BRUCE; WEST, 1998)).

Seguindo o teorema de transversalidade do Apêndice de (BRUCE; WEST, 1998), para uma swallowtail genérica, a função altura h_v , para qualquer $v \in S^2$, pode ter somente singularidades de $\mathcal{R}_e^+(X)$ -codimensão ≤ 2 na origem. Além disso, como a função altura $h_v : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ é uma submersão, a função $h_v \circ \psi$ também é uma submersão. Portanto, $h_v \circ \psi$ é $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a uma das formas normais dadas no Teorema A.2.6, ou seja, existe um germe de difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ que preserva a swallowtail padrão X tal que $h_v \circ \psi = \widehat{g} \circ \phi$, onde $\widehat{g}$ é uma das formas normais dadas no Teorema A.2.6. Logo, o contato entre a swallowtail $\psi(X)$ e o plano $h_v^{-1}(0)$ coincide com o contato da swallowtail padrão X e da fibra $\widehat{g}^{-1}(0)$ (o qual é medido pelas singularidades da função $\widehat{g} \circ f$).

Temos as seguintes consequências sobre a geometria plana de uma swallowtail genérica, onde tangente/transversal à swallowtail (respectivamente à curva singular e à curva de pontos duplos) significa tangente/transversal ao seu cone tangente (respectivamente à reta tangencial).

Proposição A.4.1. As possíveis singularidades de $\widehat{g} \circ f$ tem as seguintes interpretações geométricas:

- (i) $\pm u$: o plano correspondente é transversal à swallowtail, à sua curva singular e à sua curva de pontos duplos;
- (ii) $v + au^2$: o plano é transversal à swallowtail e está em uma coleção de planos tangentes limites à curva de pontos duplos (que coincide com a mesma da curva singular);
- (iii) $v + au^3$: o plano é transversal à swallowtail e está na coleção de planos tangentes limites à curva singular e é o plano osculador à curva de pontos duplos;
- (iv) $\pm w + au^2 + bu^3$: o plano é o cone tangente à swallowtail.

Demonstração. A demonstração segue das análises feitas na Seção A.3 para cada caso.

□

Considere uma swallowtail genérica com a parametrização g e sejam λ e γ parametrizações de suas curvas singular e de pontos duplos, respectivamente. Para a família de funções altura H definimos

$$\mathcal{D}_1(H) = \left\{ (v, h_v \circ g(x, y)) \in S^2 \times \mathbb{R}; \frac{\partial h_v \circ g}{\partial x} = \frac{\partial h_v \circ g}{\partial y} = 0 \text{ em } (x, y, v) \right\};$$

$$\mathcal{D}_2(H) = \left\{ (v, h_v \circ \lambda(t)) \in S^2 \times \mathbb{R}; \frac{\partial h_v \circ \lambda}{\partial t} = 0 \text{ em } (t, v) \right\};$$

$$\mathcal{D}_3(H) = \left\{ (v, h_v \circ \gamma(t)) \in S^2 \times \mathbb{R}; \frac{\partial h_v \circ \gamma}{\partial t} = 0 \text{ em } (t, v) \right\}.$$

Os conjuntos $\mathcal{D}_1(H)$, $\mathcal{D}_2(H)$ e $\mathcal{D}_3(H)$ correspondem às duais da swallowtail, da curva singular e da curva de pontos duplos, respectivamente.

Como já discutimos, o contato entre uma swallowtail e um plano $h_v^{-1}(0)$ é descrito pelo contato entre a fibra $\widehat{g} = 0$ e a swallowtail padrão, com $\widehat{g}$ como no Teorema A.2.6. Usando este fato, podemos mostrar que $\mathcal{D}_i(H)$ é difeomorfo a $\mathcal{D}_i(F)$, para $i = 1, 2, 3$, onde F é uma deformação $\mathcal{R}^+(X)$ -versal de $\widehat{g}$ com 2-parâmetros. Portanto, os cálculos e figuras da Seção A.3 nos dão modelos, a menos de difeomorfismos, de $\mathcal{D}_i(H)$ para $i = 1, 2, 3$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste apêndice, apresentamos algumas considerações finais e elencamos algumas questões que provieram dos trabalhos realizados nesta tese.

Primeiramente, gostaríamos de ressaltar que este trabalho estuda todas as deformações geométricas de curvas no plano Minkowski em fenômenos de codimensão ≤ 2 . No entanto, como já comentado na introdução deste texto, a existência de uma teoria geral (sem a necessidade de estudar caso a caso) de deformações versais que leve em conta as singularidades da curva juntamente com sua geometria (pontos lightlike, inflexões e vértices) ainda é um problema aberto.

Além disso, outras questões provenientes deste trabalho também estão abertas, as quais serão abordadas pelo autor em trabalhos futuros e elencamos no que segue.

- Entender as projeções ortogonais de curvas do espaço Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ em planos (ver Introdução) e as relações entre as singularidades da curva projetada e a geometria da curva inicial, como feito em (DAVID, 1983) para o caso Euclidiano. Além disso, tentar aplicar o estudo realizado neste trabalho para obter os tipos de deformações geométricas que podem ocorrer em uma família de projeções, como feito em (DIAS; NUÑO BALLESTEROS, 2008), (OSET SINHA; TARI, 2013) e (SALARINOUGHABI, 2018) para o caso Euclidiano.
- Estudar invariantes, buscando relacionar os que provierem da FRLS-classificação com os obtidos com Wall em (WALL, 2013). Além disso, tentar obter uma fórmula que conta o número de inflexões e vértices concentrados em uma singularidade e relacioná-los, como feito em (DIAS; TARI, 2018) para o caso Euclidiano.
- Analisar a $\mathcal{R}(X)$ -classificação, com X sendo a swallowtail, o cross-cap, a cuspidal edge e o cuspidal cross-cap, com respeito a trivialidade topológica, ou seja, se reduzirmos a exigência de difeomorfismos para homeomorfismos na classificação, ainda obteremos as mesmas classes?

- No Apêndice A, estudamos a geometria flat da swallowtail, ou seja, através de seu contato com planos. Mas o que ocorre se ao invés disso estudarmos seu contato com retas, como é feito em ([OSET SINHA; TARI, 2018](#)) para a cuspidal edge?

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001, e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - Brasil (FAPESP) - processo 2015/16177-2.

REFERÊNCIAS

ARNOL'D, V. I. Normal forms for functions near degenerate critical points, the weyl groups of a_k , d_k , e_k and lagrangian singularities. **Functional Analysis and its applications**, Springer, v. 6, n. 4, p. 254–272, 1972. Citado na página [40](#).

_____. Wave front evolution and equivariant Morse lemma. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 29, n. 6, p. 557–582, 1976. Citado nas páginas [40](#), [63](#), [91](#) e [145](#).

_____. Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k , C_k , F_4 and singularities of evolutes. **Uspekhi Mat. Nauk**, v. 33, n. 5(203), p. 91–105, 237, 1978. Citado nas páginas [155](#) e [156](#).

_____. Mathematical methods of classical mechanics. **Ann Arbor**, v. 1001, p. 48109, 1978. Citado na página [40](#).

ARNOL'D, V. I.; GUSEIN ZADE, S. M.; VARCHENKO, A. N. **Singularities of differentiable maps. Vol. I**. [S.l.]: Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. v. 82. xi+382 p. (Monographs in Mathematics, v. 82). The classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds. Citado nas páginas [124](#) e [146](#).

BARAJAS SICHACÁ, M.; KABATA, Y. Projection of crosscap. **arXiv preprint arXiv:1806.02270**, 2018. Citado na página [146](#).

BROCKER, T.; LANDER, L. *et al.* **Differentiable germs and catastrophes**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1975. v. 17. Citado na página [25](#).

BRUCE, J. W. Wavefronts and parallels in Euclidean space. **Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.**, v. 93, n. 2, p. 323–333, 1983. Citado na página [69](#).

_____. Functions on discriminants. **J. London Math. Soc. (2)**, v. 30, n. 3, p. 551–567, 1984. Citado nas páginas [145](#) e [150](#).

BRUCE, J. W.; DU PLESSIS, A. A.; WALL, C. T. C. Determinacy and unipotency. **Invent. Math.**, v. 88, n. 3, p. 521–554, 1987. Citado na página [149](#).

BRUCE, J. W.; GAFFNEY, T. J. Simple singularities of mappings $C, 0 \rightarrow C^2, 0$. **J. London Math. Soc. (2)**, v. 26, n. 3, p. 465–474, 1982. Citado na página [51](#).

BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. Generic geometry. **Amer. Math. Monthly**, v. 90, n. 8, p. 529–545, 1983. Citado na página [63](#).

_____. Smooth stable maps of discriminant varieties. **Proc. London Math. Soc. (3)**, v. 50, n. 3, p. 535–551, 1985. Citado na página [94](#).

_____. Generic isotopies of space curves. **Glasgow Math. J.**, v. 29, n. 1, p. 41–63, 1987. Citado na página [146](#).

- _____. **Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1992. Citado nas páginas 25, 29, 30, 32 e 149.
- BRUCE, J. W.; KIRK, N. P.; DU PLESSIS, A. A. Complete transversals and the classification of singularities. **Nonlinearity**, v. 10, n. 1, p. 253–275, 1997. Citado nas páginas 145, 147 e 148.
- BRUCE, J. W.; ROBERTS, R. M. Critical points of functions on analytic varieties. **Topology**, v. 27, n. 1, p. 57–90, 1988. Citado na página 147.
- BRUCE, J. W.; WEST, J. M. Functions on a crosscap. **Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.**, v. 123, n. 1, p. 19–39, 1998. Citado nas páginas 145, 146, 147, 148, 149 e 158.
- BRUCE, J. W.; WILKINSON, T. C. Folding maps and focal sets. In: **Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)**. [S.l.]: Springer, Berlin, 1991, (Lecture Notes in Math., v. 1462). p. 63–72. Citado na página 146.
- DAMON, J. The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$. **Mem. Amer. Math. Soc.**, v. 50, n. 306, p. x+88, 1984. Citado nas páginas 80, 147 e 148.
- DAVID, J. M. S. Projection-generic curves. **J. London Math. Soc. (2)**, v. 27, n. 3, p. 552–562, 1983. Citado nas páginas 21, 51 e 161.
- DIAS, F. S.; NUÑO BALLESTEROS, J. J. Plane curve diagrams and geometrical applications. **Q. J. Math.**, v. 59, n. 3, p. 287–310, 2008. Citado nas páginas 21, 22, 27, 52, 57 e 161.
- DIAS, F. S.; TARI, F. On the geometry of the cross-cap in Minkowski 3-space and binary differential equations. **Tohoku Math. J. (2)**, v. 68, n. 2, p. 293–328, 2016. Citado na página 146.
- _____. On vertices and inflections of plane curves. **J. Singul.**, v. 17, p. 70–80, 2018. Citado na página 161.
- FRANCISCO, A. P. Functions on a swallowtail. **arXiv preprint arXiv:1804.09664**, 2018. Citado na página 145.
- FRANCISCO, A. P.; MARTINS, L. F. Uma ferramenta para o estudo local de curvas e superfícies singulares no espaço euclidiano. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, p. 1–16, 2013. Citado na página 25.
- FUJIMORI, S.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Singularities of maximal surfaces. **Math. Z.**, v. 259, n. 4, p. 827–848, 2008. Citado na página 157.
- FUKUI, T.; HASEGAWA, M. Fronts of Whitney umbrella—a differential geometric approach via blowing up. **J. Singul.**, v. 4, p. 35–67, 2012. Citado na página 146.
- FUKUNAGA, T.; TAKAHASHI, M. Evolutes of fronts in the euclidean plane. **J. Singul.**, v. 10, p. 92–107, 2014. Citado na página 44.
- HASEGAWA, M.; HONDA, A.; NAOKAWA, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Intrinsic invariants of cross caps. **Selecta Math. (N.S.)**, v. 20, n. 3, p. 769–785, 2014. Citado na página 146.
- HASEGAWA, M.; HONDA, A.; NAOKAWA, K.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Intrinsic properties of surfaces with singularities. **Internat. J. Math.**, v. 26, n. 4, p. 1540008, 34, 2015. Citado na página 146.

HONDA, A.; NAOKAWA, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Isometric realization of cross caps as formal power series and its applications. **Hokkaido Math. J.**, v. 48, n. 1, p. 1–44, 2019. Citado na página 146.

IZUMIYA, S.; ROMERO FUSTER, M. C.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. *et al.* **Differential geometry from a singularity theory viewpoint**. [S.l.]: World Scientific, 2016. Citado nas páginas 25 e 54.

IZUMIYA, S.; ROMERO FUSTER, M. C.; TAKAHASHI, M. Evolutes of curves in the lorentz-minkowski plane. In: **Singularities in Generic Geometry**. [S.l.]: Mathematical Society of Japan, 2018. p. 313–330. Citado na página 44.

IZUMIYA, S.; TARI, F. Apparent contours in minkowski 3-space and first order ordinary differential equations. **Nonlinearity**, v. 26, n. 4, p. 911, 2013. Citado na página 22.

KOKUBU, M.; ROSSMAN, W.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Singularities of flat fronts in hyperbolic space. **Pacific J. Math.**, v. 221, n. 2, p. 303–351, 2005. Citado na página 146.

MARTINS, L. F.; NUÑO BALLESTEROS, J. J. Contact properties of surfaces in $\mathbb{R}^3$ with corank 1 singularities. **Tohoku Math. J. (2)**, v. 67, n. 1, p. 105–124, 2015. Citado na página 147.

MARTINS, L. F.; SAJI, K. Geometric invariants of cuspidal edges. **Canad. J. Math.**, v. 68, n. 2, p. 445–462, 2016. Citado na página 146.

_____. Geometry of cuspidal edges with boundary. **Topology Appl.**, v. 234, p. 209–219, 2018. Citado na página 146.

MATHER, J. N. Stability of C^∞ mappings. IV. Classification of stable germs by R -algebras. **Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.**, n. 37, p. 223–248, 1969. Citado na página 149.

NAOKAWA, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Isometric deformations of cuspidal edges. **Tohoku Math. J. (2)**, v. 68, n. 1, p. 73–90, 2016. Citado na página 146.

NUÑO BALLESTEROS, J. J.; TARI, F. Surfaces in $\mathbb{R}^4$ and their projections to 3-spaces. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A**, v. 137, n. 6, p. 1313–1328, 2007. Citado na página 146.

OLIVEIRA, R. D. S.; TARI, F. On pairs of regular foliations in the plane. **Hokkaido Math. J.**, v. 31, n. 3, p. 523–537, 2002. Citado na página 80.

OLIVER, J. M. On pairs of foliations of a parabolic cross-cap. **Qual. Theory Dyn. Syst.**, v. 10, n. 1, p. 139–166, 2011. Citado na página 146.

O’NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. [S.l.]: Pure and Applied Mathematics. Academic press, 1983. v. 103. Citado na página 35.

OSET SINHA, R.; SAJI, K. On the geometry of folded cuspidal edges. **Rev. Mat. Complut.**, v. 31, n. 3, p. 627–650, 2018. Citado nas páginas 145 e 146.

OSET SINHA, R.; TARI, F. Projections of space curves and duality. **Q. J. Math.**, v. 64, n. 1, p. 281–302, 2013. Citado nas páginas 21, 22, 52, 131 e 161.

_____. Projections of surfaces in $\mathbb{R}^4$ to $\mathbb{R}^3$ and the geometry of their singular images. **Rev. Mat. Iberoam.**, v. 31, n. 1, p. 33–50, 2015. Citado na página 146.

- _____. On the flat geometry of the cuspidal edge. **Osaka J. Math.**, v. 55, n. 3, p. 393–421, 2018. Citado nas páginas 145, 146, 147 e 162.
- REEVE, G. M.; TARI, F. Minkowski symmetry sets of plane curves. **Proc. Edinb. Math. Soc.** (2), v. 60, n. 2, p. 461–480, 2017. Citado nas páginas 69, 92 e 98.
- SAJI, K. Normal form of the swallowtail and its applications. **Internat. J. Math.**, v. 29, n. 7, p. 1850046, 17, 2018. Citado nas páginas 145 e 146.
- SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. The geometry of fronts. **Ann. of Math.** (2), v. 169, n. 2, p. 491–529, 2009. Citado na página 146.
- SALARINOUGHABI, M. **Flat and Round Singularity theory**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado nas páginas 11, 13, 22, 23 e 52.
- SALARINOUGHABI, M. On vertices and evolute of orthogonal projection of space curves. **Topology Appl.**, v. 234, p. 269–284, 2018. Citado na página 161.
- SALARINOUGHABI, M.; TARI, F. Flat and round singularity theory of plane curves. **Q. J. Math.**, v. 68, n. 4, p. 1289–1312, 2017. Citado nas páginas 11, 13, 22, 23, 24, 47, 49, 52, 69, 72, 78, 79, 99, 109, 143 e 144.
- SALOOM, A. **Curves in the Minkowski plane and Lorentzian surfaces**. Tese (Doutorado) — Durham University, 2012. Citado na página 40.
- SALOOM, A.; TARI, F. Curves in the Minkowski plane and their contact with pseudo-circles. **Geom. Dedicata**, v. 159, p. 109–124, 2012. Citado nas páginas 35, 40, 41 e 79.
- SHAFAREVICH, I. R. **Basic algebraic geometry**. Study. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. xv+439 p. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Revised printing of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 213, 1974. Citado na página 154.
- TARI, F. Caustics of surfaces in the Minkowski 3-space. **Q. J. Math.**, v. 63, n. 1, p. 189–209, 2012. Citado na página 22.
- TERAMOTO, K. Parallel and dual surfaces of cuspidal edges. **Differential Geom. Appl.**, v. 44, p. 52–62, 2016. Citado na página 146.
- WALL, C. T. C. Finite determinacy of smooth map-germs. **Bull. London Math. Soc.**, v. 13, n. 6, p. 481–539, 1981. Citado nas páginas 25, 28 e 133.
- _____. Flat singularity theory. **J. Lond. Math. Soc.** (2), v. 87, n. 2, p. 622–640, 2013. Citado nas páginas 21, 22, 52 e 161.
- WEST, J. M. **The differential geometry of the crosscap**. Tese (Doutorado) — University of Liverpool, 1995. Citado na página 146.
- WILKINSON, T. C. **The geometry of folding maps**. Tese (Doutorado) — University of Newcastle upon Tyne, 1991. Citado na página 146.
- ZAKALYUKIN, V. M. Lagrangian and legendrian singularities. **Functional analysis and its applications**, Springer, v. 10, n. 1, p. 23–31, 1976. Citado na página 40.