Um Teorema de Compacidade
e a Equação de Korteweg-de Vries

Célia Mônica Guimarães
42.92838

Orientação:
Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de
São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título
de "Mestre em Ciências - Área: Matemática".*

USP - São Carlos
Agosto de 1993

Cad
229 2212

... pois perder é tocar alguma coisa
mais além da vitória, é encontrar-se naquele ponto
onde começa tudo a nascer do perdido, lentamente.

Carlos Drummond de Andrade

Agradecimentos ¹

Ao Wagner pelo incentivo, pelos conselhos, paciência e dedicação durante o desenvolver deste trabalho.

Aos colegas de mestrado, pela amizade e companheirismo.

À minha família, pelo carinho e compreensão.

¹Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

Abstract

We study the problem of the existence of (generalized) solution of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation (KdV) with initial data in $L^2(\mathbf{R})$. The Aubin theorem ([2]) plays an important role for that, as well as the Sobolev spaces and their properties, in particular the Rellich lemma.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de existência de solução (generalizada) para a equação de Korteweg-de Vries (KdV) com dado inicial em $L^2(\mathbf{R})$. O teorema de compacidade de Aubin ([2]) desempenha um papel importante para este fim, bem como os espaços de Sobolev e suas propriedades, em particular, o lema de Rellich.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	3
2 Alguns tipos de Espaços de Sobolev	9
3 O Teorema de Compacidade de Aubin	23
4 Uma Aplicação do teorema de Aubin	29
Bibliografia	48

Introdução

Iniciaremos falando sobre a descoberta da onda solitária.

Russell foi o primeiro a observar a onda solitária em 1834 e chamou-a de "grande onda de translação".

A história é a seguinte: Russell estava observando o deslocamento de um barco que estava sendo puxado rapidamente ao longo de um canal estreito (Canal de Edinburgh-Glasgow) por um par de cavalos e também a massa de água que o barco tinha colocado em movimento, quando, de repente, o barco parou e começou a agitar-se violentamente. Foi aí então que ele notou uma grande elevação de água que continuou caminhando ao longo do canal, aparentemente sem mudar a forma ou diminuir de velocidade. Ele seguiu-a a cavalo e observou que ela preservou sua velocidade e figura original por um bom tempo. Isto motivou-o a realizar algumas experiências de laboratório para gerar tais ondas. Ele deduziu empiricamente que o volume de água na onda é igual ao volume de água deslocado e que a velocidade, c , da onda solitária é

$$c^2 = g(h + a)$$

onde g é a aceleração da gravidade, h é a profundidade não perturbada e a é a amplitude da onda. Uma consequência importante da fórmula acima é que "ondas mais altas viajam mais rápido".

Um pouco mais tarde Boussinesq (1871) e Lord Rayleigh (1876) deduziram a fórmula de Russell para c . Mostraram que o perfil da onda $z = \zeta(x, t)$ é dado por

$$\zeta(x, t) = a \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)) \quad (0.1)$$

Mas estes não escreveram nenhuma equação que admitia a função (0.1) como solução. Isto foi feito em 1895 por Korteweg & de Vries, que escreveram a seguinte equação:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) \quad (0.2)$$

e, fazendo uma mudança de variáveis nesta equação chega-se em

$$\zeta_t = \frac{3}{2} \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\zeta \zeta_x + \frac{1}{3} \sigma \zeta_{xxx} \right) \quad (0.3)$$

denominada "equação de Korteweg-de Vries".

Vamos considerar o problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries com dado inicial em $L^2(\mathbf{R})$, isto é,

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = uu_x, & (t, x) \in \Pi_T \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

Estudaremos a existência de uma solução (generalizada) para este problema. Para isto precisaremos do lema de Rellich e do teorema de Aubin ([2]).

No capítulo 1 temos algumas definições e resultados importantes que nos serão úteis para os capítulos seguintes.

Alguns tipos de espaços de Sobolev são tratados no capítulo 2 e neste encontra-se enunciado e demonstrado o lema de Rellich, bem como outros resultados importantes como o lema de Sobolev.

Deixamos o capítulo 3 para o teorema de compacidade de Aubin e no capítulo 4 faremos sua aplicação para resolver o problema acima.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo inicial faremos um apanhado geral de definições e resultados importantes que serão úteis para os capítulos que se seguem. Estes podem ser encontrados em [7], [10], [5].

Seja E um espaço vetorial topológico e E^* o dual topológico de E , isto é,

$$E^* = \{l : E \rightarrow \mathbb{C} \mid l \text{ é linear e contínuo}\} \quad (1.1)$$

Teorema 1.1 *A seqüência $\{x_n\} \subset E$ é fracamente convergente para $x \in E$ se e somente se $l(x_n)$ converge para $l(x)$ para todo $l \in E^*$.*

Teorema 1.2 *Seja E um espaço de Banach e $\{x_n\}$ uma seqüência fracamente convergente em E . Então $\{x_n\}$ é limitada.*

Teorema 1.3 *Seja E um espaço de Banach. A seqüência limitada $\{x_n\} \subset E$ é fracamente convergente para $x \in E$ se $l(x_n) \rightarrow l(x)$ para todo $l \in \Delta$, onde Δ é um conjunto cujo espaço vetorial gerado é denso em E^* .*

Teorema 1.4 *Uma seqüência de funcionais $\{l_n\} \subset E^*$ converge fraca-* para um funcional $l \in E^*$ se e somente se $\{l_n(x)\}$ converge para $l(x)$ para todo $x \in E$.*

Teorema 1.5 *Seja E um espaço de Banach e $\{l_n\} \subset E^*$ uma seqüência de funcionais lineares contínuos fraca-* convergente. Então $\{l_n\}$ é limitada.*

Teorema 1.6 (Teorema de Banach-Alaoglu) *Seja X^* o dual de um espaço de Banach X . Então a bola unitária em X^* é compacta na topologia fraca-**.

Definição 1.1 *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear limitado $T : X \rightarrow Y$ é chamado compacto se T leva conjuntos limitados em X em conjuntos relativamente compactos em Y . Equivalentemente, T é compacto se e somente se para toda seqüência limitada (x_n) em X , a seqüência (Tx_n) tem uma subseqüência convergente em Y .*

Proposição 1.1 *Seja $X \subset Y$ tal que a inclusão de X em Y seja compacta e (x_n) seqüência fracamente convergente para $x \in X$. Então (x_n) converge para x em Y .*

Proposição 1.2 *Todo subespaço fechado de um espaço de Banach reflexivo é reflexivo.*

Proposição 1.3 *Se o espaço normado X é reflexivo, então ele é fracamente completo.*

Proposição 1.4 *Se X é um espaço reflexivo, todo conjunto infinito limitado $A \subset X$ contém uma seqüência fracamente de Cauchy.*

Definição 1.2 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f é a função $\hat{f}$ dada por*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \quad (1.2)$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j \quad (1.3)$$

é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.7 *A transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função contínua, limitada e satisfaz a desigualdade*

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (1.4)$$

Em particular, a aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é um operador limitado de $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Mais ainda, vale o lema de Riemann-Lebesgue, isto é,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0 \quad (1.5)$$

Definição 1.3 Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a convolução de f e g por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \quad (1.6)$$

Teorema 1.8 (Teorema de Young para a convolução) Sejam $p, q, r \in [1, \infty]$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \quad (1.7)$$

Teorema 1.9 Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então

$$(f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

Consideremos agora o espaço de Schwartz (ou das funções rapidamente decrescentes)

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}; f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \|f\|_{\alpha, \beta} < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\} \quad (1.9)$$

onde

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$\partial^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\beta_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

Observações:

1) O conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções C^∞ de suporte compacto está contido em $S(\mathbb{R}^n)$.

2) $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1, \infty]$. Além disso, $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ se $1 \leq p < \infty$. Logo, o que foi feito anteriormente para as funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$ com relação a $\wedge$ está valendo para as funções de $S(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.10 Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ e valem as fórmulas

$$(-i)^{|\alpha|} (\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \quad (1.10)$$

$$(-i)^{|\alpha|} (x^\alpha f)^\wedge(\xi) = (\partial^\alpha \hat{f})(\xi) \quad (1.11)$$

onde $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$

Definição 1.4 Definimos a transformada inversa de Fourier de $f \in S(\mathbb{R}^n)$ por

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi, \quad f \in S(\mathbb{R}^n) \quad (1.12)$$

Valem as seguintes propriedades para quaisquer $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.13)$$

$$(\hat{f})^\vee = f = (\check{f})^\wedge \quad (1.14)$$

e

$$(f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \quad (f * g)^\vee(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \check{f}(x) \check{g}(x). \quad (1.15)$$

Em $L^2(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier não pode ser definida através da fórmula (1.2), pois a integral que ali aparece não faz sentido se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mas, tanto a transformada de Fourier quanto a sua inversa podem ser estendidas como operadores lineares contínuos de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Em particular, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência em $S(\mathbb{R}^n)$ convergindo para f em $L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n, \quad \check{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{f}_n \quad (1.16)$$

(onde o limite deve ser interpretado no sentido L^2 .) Com isto e (1.14) temos que $(\hat{f})^\vee = f = (\check{f})^\wedge$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim,

Teorema 1.11 A transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \wedge : L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned}$$

definida como única extensão da transformada de Fourier em $S(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um operador unitário.

Definição 1.5 Uma sequência $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge para $f \in S(\mathbb{R}^n)$ no sentido de $S(\mathbb{R}^n)$ se e somente se

$$\|f - f_n\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ e escrevemos

$$f_n \xrightarrow{S} f$$

Lema 1.1 Se $f_n \xrightarrow{S} f$, então $f_n \xrightarrow{L^p} f$, $1 \leq p \leq \infty$.

Consideremos agora $S'(\mathbf{R}^n)$, o dual topológico de $S(\mathbf{R}^n)$.

$$S'(\mathbf{R}^n) = \{T : S(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}, T \text{ linear contínuo}\} \quad (1.17)$$

que é chamado espaço das distribuições temperadas.

Vamos considerar $S'(\mathbf{R}^n)$ munido da topologia fraca-*

Notação:

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle, f \in S'(\mathbf{R}^n), \varphi \in S(\mathbf{R}^n)$$

Vale observar que $L^p(\mathbf{R}^n)$ pode ser identificado como um subconjunto de $S'(\mathbf{R}^n)$.

Definição 1.6 A derivada $\partial^\alpha f$ de $f \in S'(\mathbf{R}^n)$ é definida por

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad (1.18)$$

Definição 1.7 A transformada de Fourier de $f \in S'(\mathbf{R}^n)$ é definida por

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \varphi \in S(\mathbf{R}^n) \quad (1.19)$$

e a transformada inversa por

$$\langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle, \varphi \in S(\mathbf{R}^n) \quad (1.20)$$

Teorema 1.12 Seja $f \in S'(\mathbf{R}^n)$. Então $\hat{f}$ e $\check{f}$ definidas por (1.19) e (1.20) são distribuições temperadas. Além disso, $\hat{\check{f}} = f = \check{\hat{f}}$ e a aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é contínua com inversa contínua (em relação à topologia de $S'(\mathbf{R}^n)$).

Seja $Q(\mathbf{R}^n)$ o conjunto das funções em $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ de crescimento lento, isto é, $\Phi \in Q(\mathbf{R}^n)$ se e somente se $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ e, para todo multi-índice α , existe uma constante $c(\alpha)$ e um inteiro não negativo $N(\alpha)$ satisfazendo

$$|\partial^\alpha \Phi(x)| \leq c(\alpha)(1 + |x|^2)^{N(\alpha)}$$

para todo $x \in \mathbf{R}^n$ com $|x|$ suficientemente grande.

Teorema 1.13 Sejam $\Phi \in Q(\mathbf{R}^n)$ e $f \in S'(\mathbf{R}^n)$. Então:

(i) Φ define um elemento de $S'(\mathbf{R}^n)$ através de

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(x) \varphi(x) dx, \varphi \in S(\mathbf{R}^n)$$

(ii) O funcional linear Φf definido por

$$\langle \Phi f, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \varphi \rangle, \quad \varphi \in S(\mathbf{R}^n) \quad (1.21)$$

é um elemento de $S'(\mathbf{R}^n)$ (chamado produto da distribuição temperada f com a função Φ).

(iii) Valem as fórmulas

$$\xi^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} (\partial^\alpha f)^\wedge \quad (1.22)$$

$$(\partial^\alpha \hat{f}) = (-i)^{|\alpha|} (x^\alpha f)^\wedge \quad (1.23)$$

onde $x^\alpha f$ (respectivamente ξ^α) denota o produto da função $\Phi(x) = x^\alpha$ (respectivamente $\Phi(\xi) = \xi^\alpha$) com a distribuição f (respectivamente $\hat{f}$).

Capítulo 2

Alguns tipos de Espaços de Sobolev

Neste capítulo trataremos dos espaços de Sobolev de tipo L^2 . Tais espaços serão importantes no desenvolvimento do último capítulo. Começaremos pelos espaços de Sobolev em todo $\mathbf{R}^n$.

Definição 2.1 *Seja $s \in \mathbf{R}$. Os espaços de Sobolev de tipo L^2 em $\mathbf{R}^n$ são os seguintes subconjuntos de $S'(\mathbf{R}^n)$:*

$$H^s(\mathbf{R}^n) = \{f \in S'(\mathbf{R}^n) \mid (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbf{R}^n)\} \quad (2.1)$$

$H^s(\mathbf{R}^n)$ é espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$(f|g)_s = \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi. \quad (2.2)$$

Observemos que, equivalentemente, podemos definir $H^s(\mathbf{R}^n)$ como sendo o completamento de $S(\mathbf{R}^n)$ com relação à norma

$$\|f\|_s = \|\Lambda^s f\|_{L^2} \quad (2.3)$$

onde $\Lambda^s : S(\mathbf{R}^n) \rightarrow S(\mathbf{R}^n)$ é o operador linear definido por

$$(\Lambda^s f)^\wedge(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi).$$

Proposição 2.1 *Se $s, t, r \in \mathbf{R}$, então:*

(i) $H^s(\mathbf{R}^n) \subset H^t(\mathbf{R}^n)$, $s \geq t$ e esta inclusão é contínua e densa,

- (ii) $(H^s(\mathbf{R}^n))^\wedge = L^2(\mathbf{R}^n, (1 + |\xi|^2)^s d\xi)$,
 (iii) o dual topológico de $H^s(\mathbf{R}^n)$, $(H^s(\mathbf{R}^n))'$, é isometricamente isomorfo ao $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$.
 (iv) $S(\mathbf{R}^n) \subset H^s(\mathbf{R}^n)$, $\forall s \in \mathbf{R}$. Além disso, esta inclusão é densa.
 (v) Se $r < s < t$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists 0 < c_\epsilon < \infty$ tal que

$$\|u\|_s^2 \leq \epsilon^2 \|u\|_t^2 + c_\epsilon^2 \|u\|_r^2, \forall u \in H^t(\mathbf{R}^n).$$

A demonstração desta proposição encontra-se em [5] e [4].

Observemos que, se $s \geq 0$, então $H^s(\mathbf{R}^n) \subseteq H^0(\mathbf{R}^n) = L^2(\mathbf{R}^n)$ e, assim, os elementos de $H^s(\mathbf{R}^n)$ são funções de quadrado integrável. Mas, se $s < 0$, isto é falso em geral pois, por exemplo, a distribuição δ de Dirac está em $H^{-r}(\mathbf{R}^n)$, $\forall r > \frac{n}{2}$.

Temos a seguinte caracterização para os espaços de Sobolev:

Teorema 2.1 *Seja k inteiro positivo e $s \in \mathbf{R}$. Uma distribuição temperada f está em $H^s(\mathbf{R}^n)$ se, e somente se, f e suas derivadas (no sentido de distribuições) $\partial^\alpha f$ estão em $H^{s-k}(\mathbf{R}^n)$, $|\alpha| \leq k$. Além disso, as normas*

$$\|\cdot\|_s \text{ e } \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha(\cdot)\|_{s-k} \quad (2.4)$$

são equivalentes.

Demonstração: Se f está em algum espaço de Sobolev, então $f \in S'(\mathbf{R}^n)$ e $\hat{f}$ é uma distribuição temperada. Logo $(\partial^\alpha f)^\wedge$ é também uma distribuição temperada relacionada com $\hat{f}$ pela fórmula

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \quad (2.5)$$

Também temos:

$$|\xi^\alpha| \leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}}, \quad |\alpha| \leq k, \quad (2.6)$$

$$\exists c > 0 \text{ tal que } (1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha| \quad (2.7)$$

Se $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$ e $|\alpha| \leq k$, da proposição 2.1(ii) e de (2.5) e (2.6), temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-k} |(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-k} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-k} ((1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}})^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\partial^\alpha f\|_{s-k} \leq \|f\|_s \quad (2.8)$$

Assim, $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$. Agora vamos supor que $\partial^\alpha f \in H^{s-k}$, $|\alpha| \leq k$. Da proposição 2.1(ii) e de (2.5) e (2.7) temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} ((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}})^2 (1 + |\xi|^2)^{s-k} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} c^2 d_k \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 (1 + |\xi|^2)^{s-k} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-k} |(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)|^2 d\xi < \infty \end{aligned}$$

onde $C = c^2 d_k$ e d_k é uma constante que depende do número de termos da soma $\sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2$. Portanto,

$$\|f\|_s \leq C^{\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k} \quad (2.9)$$

e então $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Segue das desigualdades (2.8) e (2.9) que as normas em (2.4) são equivalentes. ■

Para expoentes inteiros temos a seguinte caracterização para os espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$:

Corolário 2.1 *Seja k inteiro positivo. $H^k(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das distribuições temperadas $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tais que $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq k$. Além disso, as normas*

$$\|\cdot\|_k \text{ e } \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha(\cdot)\|_{L^2} \quad (2.10)$$

são equivalentes.

Observação:

Quando $k = 2$ temos o seguinte resultado interessante:

$$f \in H^2(\mathbb{R}^n) \text{ se, e somente se, } f \text{ e } \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

onde Δ é o operador diferencial (chamado Laplaciano) dado por

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$$

Em outras palavras: se f e Δf são elementos de $L^2(\mathbb{R}^n)$, então as outras derivadas com $|\alpha| \leq 2$ têm esta mesma propriedade.

Para ver que este resultado vale, vamos considerar os conjuntos

$$A = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq 2\}$$

e

$$B = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

e mostrar que $A = B$. Para isto, seja $f \in A$. Então f e $\partial^{\alpha_i} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, onde $\alpha_i = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$ com 2 ocupando a i -ésima posição. Assim, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo $\Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, $f \in B$. Agora, se $f \in B$, então $f, \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Vamos mostrar que as derivadas ∂^α , com $|\alpha| \leq 2$ também estão em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Temos que:

$$\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ e } |\cdot|^2 \hat{f} = (-\Delta f)^\wedge \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (2.11)$$

pois a transformada de Fourier leva $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para α com $|\alpha| \leq 2$ temos os seguintes casos:

1) $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com 1 ocupando a i -ésima posição. Neste caso,

$$|(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)| = |(\frac{\partial}{\partial x_i} f)^\wedge(\xi)| = |i\xi_i \hat{f}(\xi)| \leq |\xi| |\hat{f}(\xi)| \leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} |\hat{f}(\xi)|$$

2) $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com 1 ocupando a i -ésima e a j -ésima posição. Neste caso,

$$|(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)| = |(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f)^\wedge(\xi)| = |i^2 \xi_i \xi_j \hat{f}(\xi)| \leq |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|$$

3) $\alpha = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$ com 2 ocupando a i -ésima posição. Neste caso,

$$|(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)| = |(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f)^\wedge(\xi)| = |i^2 \xi_i^2 \hat{f}(\xi)| \leq |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|$$

De (2.11) concluímos que, nos três casos, as derivadas estão em $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, ∂^α , com $|\alpha| \leq 2$ também estão em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo $f \in A$.

É interessante observar que se s é suficientemente grande então os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ são funções contínuas e, em certos casos, até diferenciáveis. Mais precisamente, vale o seguinte:

Teorema 2.2 (Lema de Sobolev) *Seja $s > k + \frac{n}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Então $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$, onde $C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ tais que a própria função e suas derivadas até ordem k tendem a zero quando $|x| \rightarrow \infty$. Além disso vale a desigualdade*

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{k-s} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_s, \quad (2.12)$$

Demonstração: Vamos provar que, se $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$, $s > k + \frac{n}{2}$ e $|\alpha| \leq k$ então $(\cdot)^\alpha \hat{f}$ é uma função integrável. Para isto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbf{R}^n} |\xi|^k |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{k-s}{2}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{k-s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_s < \infty \end{aligned} \quad (2.13)$$

pois, sendo $s > k + \frac{n}{2}$, então

$$\int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{k-s} d\xi < \infty.$$

Portanto $(\cdot)^\alpha \hat{f}$ é integrável e, como $(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$, temos que $(\partial^\alpha f)^\wedge$ é integrável. Consequentemente, $(\partial^\alpha f)^\wedge e^{i(\cdot)x}$ é integrável. Então podemos escrever

$$\partial^\alpha f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} (\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) e^{i\xi x} d\xi = ((\partial^\alpha f)^\wedge)^\wedge(-x) \quad (2.14)$$

e do lema de Riemann-Lebesgue, temos:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \partial^\alpha f(x) = 0$$

De (2.13) e da primeira igualdade em (2.14) obtemos (2.12). Agora prove-mos a continuidade de $\partial^\alpha f$. Para isto, seja $(x_m) \subset \mathbf{R}^n$ uma sequência tal que $x_m \rightarrow x$. Consideremos a sequência $g_m(\xi) = (\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) e^{i\xi x_m}$ de funções integráveis que converge pontualmente para a função integrável $(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) e^{i\xi x}$ e satisfazem $|g_m(\xi)| \leq |(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)|, \forall m$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\partial^\alpha f(x_m) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} g_m(\xi) d\xi \rightarrow (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} (\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \partial^\alpha f(x)$$

Assim, $H^s(\mathbf{R}^n) \subset C_\infty^k(\mathbf{R}^n)$. ■

Como consequência imediata, temos o

Corolário 2.2 Se $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$, $\forall s$, então $u \in C_\infty^\infty(\mathbf{R}^n)$, onde $C_\infty^\infty(\mathbf{R}^n)$ é o espaço das funções de classe C^∞ de $\mathbf{R}^n$ em $\mathbf{C}$ tais que elas e suas derivadas de todas as ordens tendem a zero quando $|x| \rightarrow \infty$.

Vale observar que se $s > \frac{n}{2}$, então $H^s(\mathbf{R}^n)$ é uma álgebra de Banach, isto é, um espaço de Banach com um produto $\phi, \psi \in H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow \phi\psi \in H^s(\mathbf{R}^n)$

satisfazendo $\|\phi\psi\|_s \leq c_s \|\phi\|_s \|\psi\|_s$. Este fato é não trivial de se demonstrar, por isto sua demonstração será omitida. Para maiores detalhes ver [1] e [11].

Vamos agora à uma versão localizada dos espaços de Sobolev.

Seja Ω um subconjunto aberto não vazio de $\mathbf{R}^n$ e $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções C^∞ cujo suporte é compacto e está em Ω .

Definição 2.2 Definimos $H_0^s(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Observações:

1) A grosso modo, $H_0^s(\Omega)$ é o conjunto dos elementos de $H^s(\mathbf{R}^n)$ que se anulam na fronteira de Ω .

2) Se $\Omega = \mathbf{R}^n$ então $H_0^s(\Omega)$ coincide com $H^s(\mathbf{R}^n)$.

3) $H_0^s(\Omega) \subset H_0^t(\Omega)$ se $s > t$
(ver [4]).

Quando Ω é limitado, os espaços $H_0^s(\Omega)$ têm uma importante propriedade de compacidade: o **Lema de Rellich**. Antes deste lema, vamos ver dois outros: o primeiro é um lema técnico que usaremos na demonstração do segundo e este será usado na demonstração do lema de Rellich.

Lema 2.1 Para todos $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ e $s \in \mathbf{R}$, temos

$$(1 + |\xi|^2)^s (1 + |\eta|^2)^{-s} \leq 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|} \quad (2.15)$$

Demonstração: Temos que $|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta|$ e, elevando ao quadrado, obtemos $|\xi|^2 \leq 2(|\xi - \eta|^2 + |\eta|^2)$. Assim,

$$1 + |\xi|^2 \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2) \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2)(1 + |\eta|^2) \quad (2.16)$$

Se $s \geq 0$, então $|s| = s$ e

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 2^s (1 + |\xi - \eta|^2)^s (1 + |\eta|^2)^s$$

Se $s < 0$, então $|s| = -s$ e, trocando ξ com η em (2.16), obtemos

$$(1 + |\eta|^2)^{-s} \leq 2^{-s} (1 + |\xi - \eta|^2)^{-s} (1 + |\xi|^2)^{-s}$$

Portanto, temos (2.15). ■

Lema 2.2 Se Ω é limitado, $s \in \mathbf{R}$ e (f_k) é uma seqüência em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|f_k\|_s \leq c < \infty$, $\forall k$, então existe uma subseqüência (f_{k_j}) que converge em $H^t(\mathbf{R}^n)$, $\forall t < s$.

Demonstração: Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tal que $\phi(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$. Então $f_k = \phi f_k$ e, assim, $\hat{f}_k = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{\phi} * \hat{f}_k$. Do lema 2.1 e da desigualdade de Schwarz, temos

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}_k(\xi)| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{\phi}(\xi - \eta)| |\hat{f}_k(\eta)| d\eta = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |\eta|^2)^{-\frac{s}{2}} |\hat{\phi}(\xi - \eta)| (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}_k(\eta)| d\eta \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} 2^{\frac{|\eta|}{2}} (1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|\eta|}{2}} |\hat{\phi}(\xi - \eta)| (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}_k(\eta)| d\eta \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^{\frac{|\eta|}{2}} \|\phi\|_{|s|} \|f_k\|_s \end{aligned}$$

e, para $j = 1, 2, \dots$, como

$$\partial_j \hat{f}_k(\xi) = -i(2\pi)^{-\frac{n}{2}} (x_j \phi)^\wedge * \hat{f}_k(\xi)$$

pela mesma razão anterior, temos

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\partial_j \hat{f}_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^{\frac{|\eta|}{2}} \|x_j \phi\|_{|s|} \|f_k\|_s.$$

Como $\|f_k\|_s \leq c$, $\forall k$, temos

$$|\hat{f}_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^{\frac{|\eta|}{2}} c \|\phi\|_{|s|} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$$

e

$$|\partial_j \hat{f}_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^{\frac{|\eta|}{2}} c \|x_j \phi\|_{|s|} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$$

para todos k, j . Assim, as seqüências $(\hat{f}_k)$ e $(\partial_j \hat{f}_k)$ são uniformemente limitadas em compactos de $\mathbf{R}^n$. Temos que $(\hat{f}_k)$, $\hat{f}_k : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{C}$, é um conjunto equicontínuo, pois as $\hat{f}_k$'s são uniformemente contínuas em compactos (isto vem do fato de $f_k \in C_0^\infty(\Omega) \subset S(\mathbf{R}^n) \xrightarrow{\wedge} S(\mathbf{R}^n)$, ou seja, $\hat{f}_k$'s são todas contínuas) e $\forall \xi \in \bar{\Omega}$, $(\hat{f}_k(\xi))$ é relativamente compacto (pois é limitado). Do teorema de Ascoli temos que $(\hat{f}_k)$ é relativamente compacto. Logo existe uma subseqüência $(\hat{f}_{k_j})$ que converge uniformemente em compactos. Afirmamos que (f_{k_j}) converge em $H^t(\mathbf{R}^n)$, $\forall t < s$. De fato, se $t < s$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^t |\hat{f}_{k_i}(\xi) - \hat{f}_{k_j}(\xi)|^2 d\xi &= \\ &= \int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^t |\hat{f}_{k_i}(\xi) - \hat{f}_{k_j}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^t |\hat{f}_{k_i}(\xi) - \hat{f}_{k_j}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 + R^2)^{\max(t,0)} \sup_{|\xi| \leq R} |\hat{f}_{k_i}(\xi) - \hat{f}_k(\xi)|^2 \int_{|\xi| \leq R} d\xi + \\
&\quad + \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^t (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}_{k_i}(\xi) - \hat{f}_k(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq (1 + R^2)^{\max(t,0)} n^{-1} w_n R^n \sup_{|\xi| \leq R} |\hat{f}_{k_i}(\xi) - \hat{f}_k(\xi)|^2 + \\
&\quad + (1 + R^2)^{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}_{k_i}(\xi) - \hat{f}_k(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

onde $w_n = n R^{-n} \int_{|\xi| \leq R} d\xi$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|f_{k_i} - f_k\|_t^2 &\leq (1 + R^2)^{\max(t,0)} n^{-1} w_n R^n \sup_{|\xi| \leq R} |\hat{f}_{k_i}(\xi) - \hat{f}_k(\xi)|^2 + \\
&\quad + (1 + R^2)^{t-s} \|f_{k_i} - f_k\|_s^2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora, como $t - s < 0$ e $\|f_{k_i} - f_k\|_s \leq 2c$, podemos escolher R suficientemente grande, de modo que o segundo termo à direita de (2.17) seja menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall i, j$. Mas então podemos escolher i, j suficientemente grande, de modo que o primeiro termo seja também menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$, pois (f_{k_i}) converge uniformemente em compactos. Assim, (f_{k_i}) é de Cauchy em $H^t(\mathbb{R}^n)$ para $t < s$ e, como este é completo, temos que (f_{k_i}) converge em $H^t(\mathbb{R}^n)$ para $t < s$. ■

Com isto podemos tratar do:

Teorema 2.3 (Lema de Rellich) *Se $t < s$ e Ω é limitado, a inclusão $H_0^s(\Omega) \rightarrow H_0^t(\Omega)$ é compacta.*

Demonstração: Seja (f_k) uma seqüência limitada em $H_0^s(\Omega)$. Para cada k escolha $(f_k^j)_{j=1}^\infty$ em $C_0^\infty(\Omega)$ convergindo para f_k em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Podemos assumir que

$$\|f_k^j\|_s \leq 2\|f_k\|_s, \forall j, k$$

Assim, (f_k^j) é limitada em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Sendo $t < s$, pelo lema 2.2, alguma subsequência de (f_k^k) é convergente em $H^t(\mathbb{R}^n)$. Então para j, k pertencentes a esta subsequência, temos:

$$\begin{aligned}
\|f_j - f_k\|_t &\leq \|f_j - f_j^j\|_t + \|f_j^j - f_k^k\|_t + \|f_k^k - f_k\|_t \\
&\leq \|f_j - f_j^j\|_s + \|f_j^j - f_k^k\|_t + \|f_k^k - f_k\|_s
\end{aligned}$$

e a expressão à direita tende a zero quando $j, k \rightarrow \infty$. Assim, (f_j) é de Cauchy em $H^t(\mathbb{R}^n)$, que é de Hilbert e, portanto converge em $H^t(\mathbb{R}^n)$. Com isto temos que a inclusão $H_0^s(\Omega) \rightarrow H_0^t(\Omega)$ é compacta. ■

Outros resultados relacionados com os espaços $H_0^s(\Omega)$ podem ser encontrados em [4] e [1].

Para k inteiro não negativo e Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$ vamos definir os espaços $H^k(\Omega)$. Para isto vamos considerar $C^\infty(\bar{\Omega})$, o espaço das $f \in C^\infty(\Omega)$ tal que f e $\partial^\alpha f$, com $|\alpha| \leq k$, se estendem continuamente ao fecho $\bar{\Omega}$.

Definição 2.3 $H^k(\Omega)$ é o completamento de $C^\infty(\bar{\Omega})$ com relação à norma

$$\|f\|_{k,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

Observemos que podemos definir $H^{-k}(\Omega)$ como sendo o dual de $H_0^k(\Omega)$, com k inteiro positivo e a norma é então a norma de funcionais.

Algumas propriedades dos espaços $H^k(\Omega)$ são dadas a seguir na

Proposição 2.2 *Sejam j, k inteiros não negativos.*

(i) *Se $j \leq k$, então $\|\cdot\|_{j,\Omega} \leq \|\cdot\|_{k,\Omega}$ e $H^k(\Omega)$ está contido em $H^j(\Omega)$ como subespaço denso.*

(ii) *Se $|\alpha| \leq k$, ∂^α é uma aplicação limitada de $H^k(\Omega)$ em $H^{k-|\alpha|}(\Omega)$.*

(iii) $H_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$.

Demonstração:

De (i):

Se $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|\alpha| \leq j} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq j} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx + \sum_{j < |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f\|_{j,\Omega} \leq \|f\|_{k,\Omega}$$

e, assim, $H^k(\Omega) \subset H^j(\Omega)$. Por definição, $C^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $H^k(\Omega)$, $\forall k$. Logo $H^k(\Omega)$ é denso em $H^j(\Omega)$.

De (ii):

Se $f \in H^k(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{|\beta| \leq k-|\alpha|} \int_{\Omega} |\partial^{\beta}(\partial^{\alpha} f)(x)|^2 dx &\leq \sum_{|\beta| \leq k-|\alpha|} \int_{\Omega} |\partial^{\beta}(\partial^{\alpha} f)(x)|^2 dx \\
&+ \sum_{k-|\alpha| \leq |\beta| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^{\beta}(\partial^{\alpha} f)(x)|^2 dx \\
&= \sum_{|\beta| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha+\beta} f(x)|^2 dx \\
&\leq \sum_{|\gamma| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^{\gamma} f(x)|^2 dx < \infty
\end{aligned}$$

isto é, $\|\partial^{\alpha} f\|_{k-|\alpha|} \leq \|f\|_{k,\Omega}$.

De (iii):

Se $f \in H_0^k(\Omega)$, então existe uma seqüência (f_n) em $C_0^{\infty}(\Omega) \subset C^{\infty}(\bar{\Omega})$ tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha}(f_n - f)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$$

(aqui estamos usando o corolário (2.1)). Como

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha}(f_n - f)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_{\Omega} |\partial^{\alpha}(f_n - f)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

temos que $\|f_n - f\|_{k,\Omega} \rightarrow 0$, ou seja, existe uma seqüência (f_n) em $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ tal que $f_n \xrightarrow{H^k} f$, isto é, $f \in H^k(\Omega)$. ■

Finalmente consideremos

$$W^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \partial^{\alpha} f \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

Vale observar que, em geral, $W^k(\Omega)$ e $H^k(\Omega)$ não são iguais. Eles serão os mesmos quando tivermos alguma suavidade na fronteira de Ω . Para maiores detalhes sobre isto ver, por exemplo, [4].

Com relação aos espaços $H^k(\Omega)$ temos também os lemas de Rellich e Sobolev, que serão demonstrados mais adiante. Para tanto, precisaremos do:

Lema 2.3 *Sejam $B_r = B_r(0)$, $B_r^- = \{x \in B_r : x_n < 0\}$, $C_0^k(B_r)$ o espaço das funções C^k suportadas em B_r e $C_-^k(B_r^-)$ o espaço das funções C^k sobre $\bar{B}_r^-$ que se anulam perto de $|x| = r$. Para cada inteiro positivo k existe uma aplicação linear*

$$E_k : C_-^k(B_r^-) \rightarrow C_0^k(B_r), \quad E_k f|_{B_r^-} = f \quad (2.19)$$

e $\|E_k f\|_j \leq c_j \|f\|_{j,B_r^-}$ para $0 \leq j \leq k$, onde c_j é independente de f e r .

Demonstração: Considere a matriz

$$((-j)^m)_{m,j}, 1 \leq j \leq k+1, 0 \leq m \leq k$$

a qual é a matriz de Vandermonde dos números $-1, \dots, -(k+1)$ e seu determinante é

$$\prod_{1 \leq i < j \leq k+1} (-j + i) \neq 0.$$

Logo o sistema

$$((-j)^m)_{m,j} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

tem solução. Portanto existem números $c_1, \dots, c_{k+1}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j (-j)^m = 1, m = 0, \dots, k. \quad (2.20)$$

Definimos a aplicação E_k sobre $C_-^k(B_r^-)$ por

$$E_k f(x) = \begin{cases} f(x) & x_n \leq 0 \\ \sum_{j=1}^{k+1} c_j f(x_1, \dots, x_{n-1}, -j x_n) & x_n > 0 \end{cases}$$

Então para $x_n > 0$ e $|\alpha| \leq k$, temos

$$\partial^\alpha E_k f(x) = \sum_{j=1}^{k+1} (-j)^{\alpha_n} c_j (\partial^\alpha f)(x_1, \dots, x_{n-1}, -j x_n)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow 0^+} \partial^\alpha E_k f(x) &= \sum_{j=1}^{k+1} (-j)^{\alpha_n} c_j \lim_{x_n \rightarrow 0} (\partial^\alpha f)(x_1, \dots, x_{n-1}, -j x_n) \\ &= (\partial^\alpha f)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \sum_{j=1}^{k+1} (-j)^{\alpha_n} c_j \\ &= (\partial^\alpha f)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \end{aligned}$$

pois $f \in C_-^k(B_r^-)$ e $\sum_{j=1}^{k+1} (-j)^{\alpha_n} c_j = 1$ (isto vem do fato $\alpha_n \leq |\alpha| \leq k$ e de (2.20)). Também,

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow 0^-} \partial^\alpha E_k f(x) &= \lim_{x_n \rightarrow 0} (\partial^\alpha f)(x) \\ &= (\partial^\alpha f)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \end{aligned}$$

Temos então a continuidade das derivadas até ordem k e, como $E_k f$ está suportada em B_r , segue que $E_k f \in C_0^k(B_r)$. Finalmente, se $0 \leq j \leq k$, usando o teorema de mudança de variáveis e que $\alpha_n \leq |\alpha| \leq j$, temos que

$$\begin{aligned}
\|E_k f\|_j &= \sum_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha E_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{|\alpha| \leq j} \left(\int_{B_r} |\partial^\alpha E_k f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq j} \left(\int_{B_r^-} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{|\alpha| \leq j} \left(\int_{B_r^+} |\partial^\alpha E_k f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|\alpha| \leq j} \int_{B_r^-} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + c^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|\alpha| \leq j} \int_{B_r^+} \left| \sum_{m=1}^{k+1} (-m)^{\alpha_n} c_m (\partial^\alpha f)(x_1, \dots, x_{n-1}, -mx_n) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c^{\frac{1}{2}} \|f\|_{j, B_r^-} + \\
&\quad + c^{\frac{1}{2}} \left((k+1) \sum_{m=1}^{k+1} |c_m|^2 \sum_{|\alpha| \leq j} m^{2\alpha_n} \int_{B_r^+} |(\partial^\alpha f)(x_1, \dots, x_{n-1}, -mx_n)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c^{\frac{1}{2}} \|f\|_{j, B_r^-} + \\
&\quad + c^{\frac{1}{2}} (k+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{k+1} |c_m| (m^{2j} \sum_{|\alpha| \leq j} \int_{B_r^+} |(\partial^\alpha f)(x_1, \dots, x_{n-1}, -mx_n)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\
&= c^{\frac{1}{2}} (\|f\|_{j, B_r^-} + (k+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{k+1} |c_m| m^j \left(\sum_{|\alpha| \leq j} \left(\frac{1}{m} \int_{B_r^-} |(\partial^\alpha f)(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right)) \\
&\leq c^{\frac{1}{2}} (\|f\|_{j, B_r^-} + (k+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{k+1} m^{j-\frac{1}{2}} |c_m| \|f\|_{j, B_r^-}) \\
&= c^{\frac{1}{2}} (1 + (k+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{k+1} m^{j-\frac{1}{2}} |c_m|) \|f\|_{j, B_r^-}
\end{aligned}$$

onde c é uma constante que depende do número de termos da somatória em α . Tomando

$$c_j = c^{\frac{1}{2}} (1 + (k+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{k+1} m^{j-\frac{1}{2}} |c_m|)$$

obtemos o resultado. ■

Proposição 2.3 *Seja Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^∞ e $\tilde{\Omega}$ uma vizinhança limitada de $\bar{\Omega}$. Para cada inteiro positivo k existe uma aplicação limitada*

$$\tilde{E}_k : H^k(\Omega) \rightarrow H_0^k(\tilde{\Omega}) \text{ tal que } \tilde{E}_k f|_\Omega = f \quad (2.21)$$

isto é, $\|\tilde{E}_k f\|_k \leq C_k \|f\|_k$. $\tilde{E}_k : H^j(\Omega) \rightarrow H_0^j(\tilde{\Omega})$ é também limitada se $0 \leq j \leq k$, isto é, $\|\tilde{E}_k f\|_j \leq C_j \|f\|_j$.

Demonstração: Seja $V_0, \dots, V_N$ uma cobertura aberta de $\tilde{\Omega}$ com as seguintes propriedades:

- (a) $V_i \subset \tilde{\Omega}$, $\forall i$ e $\bar{V}_0 \subset \Omega$,
- (b) para $i \geq 1$, V_i pode ser levado bijetivamente a uma bola B_r por uma aplicação $\psi_i \in C^\infty$ tal que $\psi_i(V_i \cap \Omega) = B_r^-$.

Escolha uma partição da unidade $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$ subordinada a esta cobertura. Defina $\tilde{E}_k f$ para $f \in C^\infty(\tilde{\Omega})$ por

$$\tilde{E}_k f = \zeta_0 f + \sum_{i=1}^N E_k((\zeta_i f) \circ \psi_i^{-1}) \circ \psi_i$$

onde a E_k à direita é dada no lema anterior. Então $\tilde{E}_k f$ é C^k e está suportada em $\tilde{\Omega}$, portanto está em $H_0^k(\tilde{\Omega})$. Do lema anterior e como $0 \leq \zeta_i \leq 1$, $\forall i$, temos:

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}_k f\|_j &\leq \|\zeta_0 f\|_j + \sum_{i=1}^N d_i \|E_k((\zeta_i f) \circ \psi_i^{-1})\|_j \|\psi_i\|_j \\ &\leq \|\zeta_0 f\|_j + \sum_{i=1}^N d_i c_j \|(\zeta_i f) \circ \psi_i^{-1}\|_{j, B_r^-} \|\psi_i\|_j \\ &\leq \|\zeta_0 f\|_j + \sum_{i=1}^N d_i c_j e_i \|\zeta_i f\|_{j, B_r^-} \|\psi_i^{-1}\|_{j, B_r^-} \|\psi_i\|_j \\ &\leq \|\zeta_0 f\|_j + \sum_{i=1}^N d_i c_j e_i \|\zeta_i f\|_j \|\psi_i^{-1}\|_j \|\psi_i\|_j \\ &= \|\zeta_0 f\|_j + c_j \sum_{i=1}^N d_i e_i \|\zeta_i f\|_j \\ &\leq \|f\|_j + c_j \sum_{i=1}^N d_i e_i \|f\|_j \\ &\leq C_j \|f\|_j, \quad 0 \leq j \leq k \end{aligned}$$

onde $C_j = \max\{1, c_j \sum_{i=1}^N d_i e_i\}$. Assim, $\tilde{E}_k$ se estende a um operador limitado de $H^j(\Omega)$ em $H_0^j(\tilde{\Omega})$. ■

Agora podemos tratar dos lemas de Sobolev e de Rellich em $H^k(\Omega)$, a saber:

Teorema 2.4 (Lema de Sobolev) Se Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^∞ e $k > j + \frac{n}{2}$, então $H^k(\Omega) \subset C^j(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Seja $f \in H^k(\Omega)$. Da proposição 2.3 temos que $\tilde{E}_k f \in H_0^k(\tilde{\Omega}) \subset H^k(\mathbb{R}^n)$. Como $k > j + \frac{n}{2}$, do lema de Sobolev em $H^k(\mathbb{R}^n)$ segue que $\tilde{E}_k f \in C^j(\mathbb{R}^n)$. Também da proposição 2.3 temos $f = \tilde{E}_k f|_{\Omega}$ e, assim, $f \in C^j(\bar{\Omega})$. ■

Teorema 2.5 (Lema de Rellich) *Se Ω é um aberto limitado com fronteira C^∞ e $j < k$, então a inclusão $H^k(\Omega) \rightarrow H^j(\Omega)$ é compacta.*

Demonstração: Seja (f_i) uma seqüência limitada em $H^k(\Omega)$. Da proposição 2.3, $(\tilde{E}_k f_i)$ é uma seqüência limitada em $H_0^k(\tilde{\Omega})$. Do lema de Rellich em $H_0^k(\tilde{\Omega})$ temos que esta seqüência possui subsequência $(\tilde{E}_k f_{i_m})$ convergindo para f em $H_0^j(\tilde{\Omega})$. Como $\|\cdot\|_{j,\Omega} \leq \|\cdot\|_j$ e $\tilde{E}_k f_{i_m}|_{\Omega} = f_{i_m}$, temos

$$\|f_{i_m} - f\|_{j,\Omega} = \|\tilde{E}_k f_{i_m} - f\|_{j,\Omega} \leq \|\tilde{E}_k f_{i_m} - f\|_j \rightarrow 0$$

isto é, (f_{i_m}) converge em $H^j(\Omega)$. Portanto a inclusão $H^k(\Omega) \rightarrow H^j(\Omega)$ é compacta. ■

Outros resultados relacionados com $H^s(\Omega)$, $W^k(\Omega)$ podem ser encontrados em [4] ou [1]. Existem outros tipos de espaços de Sobolev, por exemplo, os de tipo $L^p(\mathbb{R}^n)$. Resultados a respeito destes podem ser encontrados em [1].

Capítulo 3

O Teorema de Compacidade de Aubin

Neste capítulo enunciaremos e demonstraremos um importante teorema de compacidade, devido a Jean Pierre Aubin ([2]), que será usado no capítulo 4 para a resolução do problema de Cauchy associado à equação de Korteweg-de Vries com dado inicial em $L^2(\mathbf{R})$.

Consideremos três espaços de Banach B_0, B, B_1 com

$$B_0 \subset B \subset B_1, \text{ onde } B_0 \text{ e } B_1 \text{ são reflexivos,} \quad (3.1)$$

" $\subset$ " significa inclusão algébrica e topológica e

$$\text{a injeção } B_0 \rightarrow B \text{ é compacta} \quad (3.2)$$

Definimos

$$W = \{v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1)\} \quad (3.3)$$

onde T é finito, $1 < p_0, p_1 < \infty$ e

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)} \quad (3.4)$$

Observemos que:

$$1) v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t v'(s) ds \text{ em } B_1, \forall v \in W, \forall t_0, t \in [0, T].$$

De fato, consideremos as funções

$$t \mapsto g(t) = v(t) - v(t_0) \text{ e } t \mapsto f(t) = \int_{t_0}^t v'(s) ds$$

onde $t_0, t \in [0, T]$. Como as derivadas são iguais $\forall t \in [0, T]$, então

$$f(t) = g(t) + \text{constante}$$

Calculando em t_0 , obtemos o resultado.

$$2) W \subset C^0([0, T]; B_1).$$

De fato, seja $v \in W$ e $t \rightarrow t_1$. Da igualdade em 1) e da desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \|v(t) - v(t_1)\|_{B_1} &\leq \int_{t_1}^t \|v'(s)\|_{B_1} ds \\ &= \int_0^T \chi_{[t_1, t]}(s) \|v'(s)\|_{B_1} ds \\ &\leq \left(\int_0^T \chi_{[t_1, t]}^{\frac{p_1}{p_1-1}}(s) ds \right)^{\frac{1}{p_1-1}} \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)} \end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que $\|v(t) - v(t_1)\|_{B_1} \rightarrow 0$, logo v é contínua.

3) $\|v(t)\|_{B_1} \leq cT^{\frac{1}{p_0}-1} \|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + T^{\frac{1}{p_1}} \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$, $\forall v \in W$, onde c é a constante de continuidade da inclusão $B_0 \subset B_1$.

De fato, se $v \in W$, então $t \mapsto \|v(t)\|_{B_1}$ é contínua. Do Teorema do Valor Médio para Integrais concluímos que $\exists \xi \in [0, T]$ tal que

$$\|v(\xi)\|_{B_1} = \frac{1}{T} \int_0^T \|v(s)\|_{B_1} ds.$$

De 1) temos que

$$v(t) = v(\xi) + \int_{\xi}^t v'(s) ds \text{ em } B_1, \forall t \in [0, T]$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{B_1} &\leq \|v(\xi)\|_{B_1} + \int_{\xi}^t \|v'(s)\|_{B_1} ds \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \|v(s)\|_{B_1} ds + \int_0^T \|v'(s)\|_{B_1} ds \\ &\leq \frac{c}{T} \int_0^T \|v(s)\|_{B_0} ds + \int_0^T \|v'(s)\|_{B_1} ds \\ &\leq \frac{c}{T} T^{\frac{1}{p_0}} \left(\int_0^T \|v(s)\|_{B_0}^{p_0} ds \right)^{\frac{1}{p_0}} + T^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_0^T \|v'(s)\|_{B_1}^{p_1} ds \right)^{\frac{1}{p_1}} \end{aligned}$$

4) Tomando $c_0 = \max\{cT^{\frac{1}{p_0}-1}, T^{\frac{1}{p_1}}\}$, temos que

$$\|v(t)\|_{B_1} \leq c_0 \|v\|_W \quad (3.5)$$

5) W é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_W$.

6) W é reflexivo.

De fato, como W é subespaço completo de $L^{p_0}(0, T; B_0)$, logo é fechado e, sendo $L^{p_0}(0, T; B_0)$ reflexivo, segue da proposição 1.2 que W é reflexivo.

7) Também da continuidade da inclusão $B_0 \subset B$ temos que

$$W \subset L^{p_0}(0, T; B)$$

e a pergunta que fazemos aqui é:

"Sob quais condições a injeção $W \rightarrow L^{p_0}(0, T, B)$ é compacta?"

A resposta está no

Teorema 3.1 (Teorema de Aubin) *Se B_0, B e B_1 são espaços de Banach que satisfazem às condições (3.1), (3.2) e se $1 < p_0, p_1 < \infty$, então a injeção de W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.*

Antes de demonstrarmos este teorema provemos o seguinte lema técnico que será usado na demonstração do teorema:

Lema 3.1 *Se B_0, B e B_1 satisfazem (3.1) e (3.2) então $\forall \eta > 0, \exists c_\eta$ tal que*

$$\|v\|_B \leq \eta \|v\|_{B_0} + c_\eta \|v\|_{B_1}, \forall v \in B_0. \quad (3.6)$$

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\exists \eta_0 > 0$ tal que $\forall n, \exists v_n \in B_0$ com

$$\|v_n\|_B > \eta_0 \|v_n\|_{B_0} + n \|v_n\|_{B_1}$$

Seja $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{B_0}}$, logo temos:

$$\|w_n\|_B > \eta_0 + n \|w_n\|_{B_1} \quad (3.7)$$

e

$$\|w_n\|_B \leq c \|w_n\|_{B_0} = c$$

(onde c é a constante de continuidade da inclusão $B_0 \subset B$). Concluimos então que $\eta_0 + n\|w_n\|_{B_1} \leq c$ e, como $\eta_0 > 0$, temos $n\|w_n\|_{B_1} \leq c$. Assim

$$\|w_n\|_{B_1} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Como $\|w_n\|_{B_0} = 1$ (ou seja, (w_n) é uma seqüência limitada em B_0) e a injeção $B_0 \rightarrow B$ é compacta, então (w_n) possui uma subsequência convergente em B , a saber (w_μ) , e esta satisfaz (3.8). Por unicidade de limite, $\|w_\mu\|_B \rightarrow 0$, o que contradiz (3.7), pois assim teríamos $\eta_0 < 0$. ■

Demonstração do teorema: Seja (v_n) uma seqüência limitada em W . Temos que mostrar que (v_n) possui uma subsequência convergente em $L^{p_0}(0, T; B)$. Como W é reflexivo, das proposições 1.3 e 1.4 concluimos que (v_n) possui uma subsequência (v_μ) tal que $v_\mu \rightarrow v$ fracamente em W . Sem perda de generalidade, podemos supor que $v = 0$. Mostraremos que se v_n é uma seqüência em W tal que $v_n \rightarrow 0$ fracamente em W , então $v_n \rightarrow 0$ em $L^{p_0}(0, T; B)$. Do lema temos que $\forall \eta > 0, \exists c_\eta > 0$ tal que

$$\|v_n(t)\|_B \leq \frac{\eta}{k_{p_0}} \|v_n(t)\|_{B_0} + c_\eta \|v_n(t)\|_{B_1}, \quad \forall t \in [0, T]$$

onde $k_{p_0} = 2^{1+\frac{1}{p_0}}$. Então, se $d_\eta = k_{p_0} c_\eta$, temos:

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B)} &= \left(\int_0^T \|v_n(t)\|_B^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\leq k_{p_0} \left[\left(\int_0^T \left(\frac{\eta}{k_{p_0}} \|v_n(t)\|_{B_0} \right)^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} + \left(\int_0^T (c_\eta \|v_n(t)\|_{B_1})^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} \right] \\ &= \eta \|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + d_\eta \|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_1)} \end{aligned}$$

Como $\|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} \leq c_1$, pois (v_n) é seqüência limitada em $W \subset L^{p_0}(0, T; B_0)$, temos que:

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B)} \leq \eta c_1 + d_\eta \|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_1)}$$

Seja então $\varepsilon > 0$ dado. Escolhendo η tal que $\eta c_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$, temos:

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + d_\eta \|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_1)}$$

Desta desigualdade vemos que para mostrarmos que $v_n \rightarrow 0$ em $L^{p_0}(0, T; B)$, basta mostrarmos que

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^{p_0}(0, T; B_1) \quad (3.9)$$

ou seja,

$$\int_0^T \|v_n(t)\|_{B_1}^{p_0} dt \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

Como $v_n \rightarrow 0$ fracamente em W , temos que v_n é limitada em W , isto é, $\|v_n\|_W \leq M, M > 0, \forall n$ e, de (3.5), $\|v_n(t)\|_{B_1} \leq c_0 M$. Sendo

$$\int_0^T c_0 M dt < \infty,$$

se mostrarmos que $v_n(s) \rightarrow 0$ em $B_1, \forall s \in [0, T]$, ou seja, $\|v_n(s)\|_{B_1} \rightarrow 0, \forall s \in [0, T]$, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue teremos (3.10). Para isto, basta mostrarmos que:

$$v_n(0) \rightarrow 0 \text{ em } B_1 \quad (3.11)$$

De fato, se isto vale, então para qualquer s fazemos $u_n(s-t) = v_n(t)$ e então temos $u_n(s) = v_n(0) \rightarrow 0$ em B_1 . Vamos introduzir w_n dada por

$$w_n(t) = v_n(\lambda t),$$

onde $0 < \lambda \leq 1$ será fixado mais adiante. Temos:

$$w_n(0) = v_n(0) \quad (3.12)$$

$$\|w_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \leq e_1 \lambda^{\frac{-1}{p_0}} \quad (3.13)$$

$$\|w'_n\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)} \leq e_2 \lambda^{1-\frac{1}{p_1}} \quad (3.14)$$

onde

$$e_1 = \|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \text{ e } e_2 = \|v'_n\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$$

e então teremos que mostrar que

$$w_n(0) \rightarrow 0 \text{ em } B_1 \quad (3.15)$$

Antes mostremos (3.13) e (3.14). Para isto fazemos a mudança de variável $s = \lambda t$ e obtemos

$$\begin{aligned} \|w_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} &= \left(\int_0^{\lambda T} \|v_n(s)\|_{B_0}^{p_0} \frac{ds}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\leq \lambda^{\frac{-1}{p_0}} \left(\int_0^T \|v_n(s)\|_{B_0}^{p_0} ds \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ \|w'_n\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)} &= \left(\int_0^{\lambda T} \lambda^{p_1} \|v'_n(s)\|_{B_1}^{p_1} \frac{ds}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leq \lambda^{1-\frac{1}{p_1}} \left(\int_0^T \|v'_n(s)\|_{B_1}^{p_1} ds \right)^{\frac{1}{p_1}} \end{aligned}$$

de onde obtemos (3.13) e (3.14).

Agora, seja $\varphi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = -1$, $\varphi(T) = 0$, então

$$w_n(0) = \int_0^T (\varphi w_n)'(t) dt = \beta_n + \gamma_n \quad (3.16)$$

onde

$$\beta_n = \int_0^T \varphi(t) w_n'(t) dt, \quad \gamma_n = \int_0^T \varphi'(t) w_n(t) dt$$

Portanto, usando (3.14), (3.16) e a desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned} \|w_n(0)\|_{B_1} &\leq \|\beta_n\|_{B_1} + \|\gamma_n\|_{B_1} \\ &\leq \int_0^T |\varphi(t)| \|w_n'(t)\|_{B_1} dt + \|\gamma_n\|_{B_1} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^{q_1}(0, T; \mathbb{R})} \|w_n'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)} + \|\gamma_n\|_{B_1} \\ &\leq c_2 \lambda^{1 - \frac{1}{p_1}} + \|\gamma_n\|_{B_1} \end{aligned}$$

onde $c_2 = e_2 \|\varphi\|_{L^{q_1}([0, T]; \mathbb{R})}$. Se $\varepsilon > 0$, escolhemos λ de modo que $c_2 \lambda^{1 - \frac{1}{p_1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ e, se mostrarmos que

$$\gamma_n \rightarrow 0 \text{ em } B_1 \quad (3.17)$$

teremos (3.15). Vamos então mostrar (3.17). Para isto, seja $l \in B_0^*$, então

$$l(\gamma_n) = \int_0^T \varphi'(t) l(w_n(t)) dt.$$

Definimos

$$L(w) = \int_0^T \varphi'(t) l(w(t)) dt$$

Afirmamos que $L \in (L^{p_0}(0, T; B_0))^*$. De fato, é fácil ver que L é linear. Para a continuidade basta ver, da desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned} |L(w)| &\leq \int_0^T |\varphi'(t)| \|l\|_{B_0^*} \|w(t)\|_{B_0} dt \\ &\leq \|l\|_{B_0^*} \|\varphi'\|_{L^{q_0}(0, T; \mathbb{R})} \|w\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} \end{aligned}$$

Como $w_n \rightarrow 0$ fracamente em $L^{p_0}(0, T; B_0)$, temos que $L(w_n) \rightarrow 0$, ou seja, $l(\gamma_n) \rightarrow 0$ e, com isto, concluímos que

$$\gamma_n \rightarrow 0 \text{ fracamente em } B_0.$$

Como a injeção $B_0 \rightarrow B$ é compacta, da proposição 1.1 temos que

$$\gamma_n \rightarrow 0 \text{ em } B$$

e como a inclusão $B \subset B_1$ é contínua, temos (3.17). ■

Capítulo 4

Uma Aplicação do teorema de Aubin

Vamos agora a uma aplicação do teorema de Aubin. Para isto vamos estudar o problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries (KdV), isto é,

$$u_t + u_{xxx} = uu_x \quad (4.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (4.2)$$

na faixa $\Pi_T = \{(t, x) : 0 < t < T; x \in \mathbf{R}\}$, onde $T > 0$ é arbitrário.

O que faremos aqui é provar um teorema de existência de uma solução generalizada $u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbf{R}))$ no caso de uma função inicial $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$ (concluiremos também que $u \in L^2(0, T; H^1(-r, r))$, $\forall r > 0$). Tal resultado, bem como a prova que apresentaremos, pode ser encontrado em [8].

Vale observar que a existência de solução generalizada em $L^2(\Pi_T)$ também foi obtida por T. Kato (ver [6]).

Primeiro vamos introduzir o conceito de uma solução generalizada do problema (4.1), (4.2) para um dado inicial $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbf{R})$ arbitrário (aqui "loc" significa que a função em questão pertence ao espaço correspondente em qualquer compacto do seu domínio).

Definição 4.1 Uma função $u \in L^2_{loc}(\Pi_T)$ será chamada uma solução generalizada do problema (4.1), (4.2) na faixa Π_T se satisfaz as seguintes condições:
(1) Para qualquer função $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_T)$

$$\iint_{\Pi_T} [u(t, x)\varphi_t(t, x) + u(t, x)\varphi_{xxx}(t, x) - \frac{1}{2}u^2(t, x)\varphi_x(t, x)] dx dt = 0$$

(2) Existe um conjunto $\mathcal{E} \subset (0, T)$, de medida nula, tal que para qualquer $t \in (0, T) \setminus \mathcal{E}$, a função $u(t, \cdot)$ está definida q.t.p. em $\mathbf{R}$ e para qualquer função $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R})$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in (0, T) \setminus \mathcal{E}}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) \omega(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \omega(x) dx$$

Observemos que se $u = u(t, x)$ é solução clássica de (4.1) e se $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_T)$ então

$$\iint_{\Pi_T} [u_t(t, x) \varphi(t, x) + u_{xxx}(t, x) \varphi(t, x) - u(t, x) u_x(t, x) \varphi(t, x)] dx dt = 0$$

e, integrando por partes, chegamos à equação em (1), justificando esta condição.

Para qualquer função mensurável v definida em $\mathbf{R}$ e qualquer $\alpha > 0$ fixamos

$$\|v\| = \|v\|_{L^2(\mathbf{R})} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad N_\alpha(v) = \int_0^\infty x^\alpha v^2(x) dx$$

Vamos considerar $c(\cdot, \dots, \cdot)$ várias constantes que geralmente vão depender de $\alpha, x_0, T, \|u_0\|$, e $N_\alpha(u_0)$.

Se $v \in L^2(\mathbf{R})$ e, para algum $\alpha \geq 0$, $N_\alpha(v) < \infty$, então para qualquer $x_0 \in \mathbf{R}$,

$$\int_{x_0}^{\infty} (x - x_0)^\alpha v^2(x) dx \leq c(\alpha, x_0) (\|v\|^2 + N_\alpha(v)) \quad (4.3)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} (x - x_0)^\alpha v^2(x) dx &\leq \int_{x_0}^{\infty} |x - x_0|^\alpha v^2(x) dx \\ &\leq \int_{x_0}^{\infty} (|x| + |x_0|)^\alpha v^2(x) dx \\ &\leq k_\alpha \int_{x_0}^{\infty} (|x|^\alpha + |x_0|^\alpha) v^2(x) dx \\ &\leq k_\alpha \left(\int_{x_0}^{\infty} |x|^\alpha v^2(x) dx + |x_0|^\alpha \|v\|^2 \right) \end{aligned}$$

Se $x_0 \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} |x|^\alpha v^2(x) dx &= \int_{x_0}^{\infty} x^\alpha v^2(x) dx \\ &\leq N_\alpha(v) \end{aligned}$$

e tomando-se $c(\alpha, x_0) = k_\alpha \max(1, |x_0|^\alpha)$, obtemos (4.3).

Se $x_0 < 0$, então

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} |x|^\alpha v^2(x) dx &= \int_{x_0}^0 (-x)^\alpha v^2(x) dx + \int_0^{\infty} x^\alpha v^2(x) dx \\ &\leq \sup_{x \in [x_0, 0]} (-x)^\alpha \int_{x_0}^0 v^2(x) dx + N_\alpha(v) \\ &\leq \sup_{x \in [x_0, 0]} (-x)^\alpha \|v\|^2 + N_\alpha(v) \end{aligned}$$

Fazendo $c(\alpha, x_0) = k_\alpha \max(1, |x_0|^\alpha + \sup_{x \in [x_0, 0]} (-x)^\alpha)$, obtemos (4.3).

Seja $\psi_0 \in C^\infty(\mathbf{R})$ uma função não decrescente, isto é, $\psi'_0(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, tal que $\psi_0(x) = 0$ se $x \leq \frac{1}{2}$ e $\psi_0(x) = 1$ se $x \geq 1$. Para $\alpha \geq 0$, consideremos

$$\psi_\alpha(x) = x^\alpha \psi_0(x)$$

Temos que $\psi_\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ e $\psi'_\alpha(x) \geq 0$ pois basta ver que

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2} \\ x^\alpha, & x \geq 1 \\ x^\alpha \psi_0(x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Vamos estabelecer estimativas da solução do problema (4.1), (4.2) quando $u_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Neste caso é possível mostrar que existe uma única solução clássica deste problema em $C^\infty(0, T; S(\mathbf{R}))$, o espaço das funções $v = v(t, x)$ infinitamente diferenciáveis em $\overline{\Pi}_T$ tais que elas e todas as suas derivadas tendem a zero quando $|x| \rightarrow \infty$ mais rápido do que toda potência de $|x|$ uniformemente com relação a $t \in [0, T]$. Na verdade vale mais geral, isto é, quando $u_0 \in S(\mathbf{R})$ então existe uma única solução clássica deste problema em $C^\infty(0, T; S(\mathbf{R}))$ (ver [6]).

Se $u_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, então para $0 \leq t \leq T$, temos

$$\|u(t, \cdot)\| = \|u_0\| \quad (4.4)$$

De fato, observe que o lado direito desta igualdade é constante. Considerando

$$f(t) = \|u(t, \cdot)\|^2$$

se mostrarmos que $f'(t) = 0 \forall t \in [0, T]$, teremos f constante, ou seja, $\|u(t, \cdot)\|$ constante e, calculando em $t = 0$, obtemos o resultado. Vamos então mostrar que $f'(t) = 0$. Temos que

$$f'(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t, x) u(t, x) dx$$

Como u satisfaz (4.1), então

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} (u(t, x)u_x(t, x) - u_{xxx}(t, x))u(t, x)dx \\
 &= 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x)u_x(t, x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}(t, x)u(t, x)dx \right) \\
 &= 2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}u^3(t, x) \right)_x dx - (u(t, x)u_{xx}(t, x))|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(t, x)u_x(t, x)dx \right] \\
 &= 2 \left[\frac{1}{3}u^3(t, x)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u_x^2(t, x) \right)_x dx \right] \\
 &= u_x^2(t, x)|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

pois $u \in C^\infty(0, T; S(\mathbf{R}))$.

Observemos que $N_\alpha(u_0) < \infty$, pois $u_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$.

Lema 4.1 *Seja $u_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ e $u = u(t, x)$ solução do problema (4.1), (4.2). Para qualquer $x_0 \in \mathbf{R}$ e $\alpha \geq 0$ temos*

$$\int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} u_x^2(t, x) dx dt \leq c(T, \|u_0\|) \quad (4.5)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} N_\alpha(u(t, \cdot)) \leq c(\alpha, T, \|u_0\|, N_\alpha(u_0)) \quad (4.6)$$

e, se $\alpha > 0$, então

$$\int_0^T \int_{x_0}^{\infty} (x - x_0 + 1)^{\alpha-1} u_x^2(t, x) dx dt \leq c(\alpha, T, x_0, \|u_0\|, N_\alpha(u_0)) \quad (4.7)$$

Demonstração: Consideremos ψ_α dada anteriormente. Multiplicando ambos os lados de (4.1) por $u(t, x)\psi_\alpha(x - x_0)$ e integrando sobre $\mathbf{R}$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t, x)u(t, x)\psi_\alpha(x - x_0)dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}(t, x)u(t, x)\psi_\alpha(x - x_0)dx = \\
 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x)u_x(t, x)\psi_\alpha(x - x_0)dx \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Como $u \in C^\infty(0, T; S(\mathbf{R}))$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(t, x)u(t, x)\psi_\alpha(x - x_0)dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x)\psi_\alpha(x - x_0)dx$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}(t, x) u(t, x) \psi_{\alpha}(x - x_0) dx = \\
& = - \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(t, x) (u_x(t, x) \psi_{\alpha}(x - x_0) + u(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0)) dx \\
& = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2(t, x) \right)_x \psi_{\alpha}(x - x_0) dx - \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(t, x) u(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx + \\
& \quad + \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t, x) (u_x(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) + u(t, x) \psi''_{\alpha}(x - x_0)) dx \\
& = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2(t, x) \right)_x \psi''_{\alpha}(x - x_0) dx \\
& = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi'''_{\alpha}(x - x_0) dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) u_x(t, x) \psi_{\alpha}(x - x_0) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} u^3(t, x) \right)_x \psi_{\alpha}(x - x_0) dx \\
&= - \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} u^3(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi_{\alpha}(x - x_0) dx + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \\
& = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi'''_{\alpha}(x - x_0) dx - \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} u^3(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi'''_{\alpha}(x - x_0) dx - \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} u^3(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \\
& \leq \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi'''_{\alpha}(x - x_0) dx - \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} u^3(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) |\psi'''_{\alpha}(x - x_0)| dx + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) |u(t, x)| |\psi'_{\alpha}(x - x_0)| dx \\
& = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) |\psi'''_{\alpha}(x - x_0)| dx + \\
& \quad + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x)| \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)} u^2(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)} dx \\
& \leq \frac{1}{3} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)}| \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)} dx + \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) |\psi'''_{\alpha}(x - x_0)| dx
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi_{\alpha}(x - x_0) dx + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \leq \\
& \leq \frac{1}{3} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)}| \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)} dx \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) |\psi''_{\alpha}(x - x_0)| dx
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Para estimar $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)}|$ usaremos a seguinte desigualdade: Se $v \in H^1(\mathbb{R})$, então

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} v^2(x) \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)| |v'(x)| dx$$

De fato, como $v \in H^1(\mathbb{R})$, temos v e $v' \in L^2(\mathbb{R})$. Logo, se $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
v^2(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{d}{ds} (v^2(s)) ds \\
&\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} v(s) v'(s) ds
\end{aligned}$$

(onde usamos o lema de Sobolev) e, passando o módulo,

$$v^2(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |v(s)| |v'(s)| ds$$

Assim,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} v^2(x) \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)| |v'(x)| dx$$

Tomando $v(x) = u(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)}$, temos que $v \in H^1(\mathbb{R})$. Logo, da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)}| &= \sqrt{\sup_{x \in \mathbb{R}} (u(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)})^2} \\
&\leq \sqrt{2 \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)}| |(u(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)})_x| dx} \\
&\leq \sqrt{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)}| u_x(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)} dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) |\psi''_{\alpha}(x - x_0)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \right)^{\frac{1}{4}} \\
&\quad + \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) |\psi''_{\alpha}(x - x_0)| dx \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi_{\alpha}(x - x_0) dx + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \leq \\ & \leq \frac{1}{3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) |\psi''_{\alpha}(x - x_0)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)} dx + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \sqrt{\psi'_{\alpha}(x - x_0)} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) |\psi''_{\alpha}(x - x_0)| dx \quad (4.10) \end{aligned}$$

Suponhamos que $0 \leq \alpha \leq 1$, então $|\psi_{\alpha}^{(k)}(x)| \leq c(k)$, para $k \geq 1$ (pois $\psi_{\alpha}^{(k)} \in C_0^{\infty}(\mathbf{R})$, $k \geq 1$). Disto e de (4.10) chegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi_{\alpha}(x - x_0) dx + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \\ & \leq c(\|u_0\|) + c(\|u_0\|) \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.11) \end{aligned}$$

onde $c(\|u_0\|) = \max(\frac{1}{3}(c(1)c(2))^{\frac{1}{2}}\|u_0\|^3 + \frac{1}{2}c(3)\|u_0\|^2; \sqrt{2}c(1)^{\frac{3}{4}}\|u_0\|^{\frac{5}{4}})$ (observemos que esta constante é uma função crescente com relação à $\|u_0\|$).

Agora precisaremos usar a seguinte desigualdade:

$$ab^{\frac{1}{4}} \leq 3.4^{-\frac{4}{3}} a^{\frac{4}{3}} + b, \quad \forall a, b \geq 0$$

Esta desigualdade segue imediatamente do teorema que diz que se $A, B \geq 0$ e p, q são reais tais que $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$ (ver [3]), quando tomamos $A = \frac{a}{4}$, $B = b^{\frac{1}{4}}$, $p = \frac{4}{3}$ e $q = 4$. Tomando

$$a = c(\|u_0\|) \text{ e } b = \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx$$

em (4.11), chegamos a

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi_{\alpha}(x - x_0) dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx \leq c(\|u_0\|) \quad (4.12)$$

Integrando esta equação com relação a t , de 0 a t_0 arbitrário, $0 < t_0 \leq T$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t_0, x) \psi_{\alpha}(x - x_0) dx + \int_0^{t_0} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0) dx dt \\ & \leq c(t_0, \|u_0\|) + \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2(x) \psi_{\alpha}(x - x_0) dx \quad (4.13) \end{aligned}$$

(observemos que também aqui a constante é uma função crescente nas suas variáveis).

Tomando $\alpha = 0$ e $t_0 = T$ em (4.13) e sabendo que $\psi_0(x - x_0) \leq 1$, vemos que

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_0(x - x_0) dx dt \leq c(T, \|u_0\|)$$

Observe que $\psi'_0(\cdot - x_0)$ tem suporte em $[x_0 + \frac{1}{2}, x_0 + 1]$, logo

$$\int_0^T \int_{x_0 + \frac{1}{2}}^{x_0 + 1} u_x^2(t, x) \psi'_0(x - x_0) dx dt = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_0(x - x_0) dx dt \leq c(T, \|u_0\|)$$

Vamos considerar ψ_0 tal que $\psi_0(x) = x$ se $x \in [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$. Como

$$\int_{x_0 + \frac{2}{3}}^{x_0 + \frac{5}{6}} u_x^2(t, x) dx \leq \int_{x_0 + \frac{1}{2}}^{x_0 + 1} u_x^2(t, x) \psi'_0(x - x_0) dx$$

portanto

$$\int_0^T \int_{x_0 + \frac{2}{3}}^{x_0 + \frac{5}{6}} u_x^2(t, x) dx dt \leq c(T, \|u_0\|)$$

Sendo a constante $c(T, \|u_0\|)$ independente de x_0 , tomando $y_0 = x_0 + \frac{2}{3}$ teremos, $\forall y_0$,

$$\int_0^T \int_{y_0}^{y_0 + \frac{1}{6}} u_x^2(t, x) dx dt \leq c(T, \|u_0\|) \quad (4.14)$$

e, como

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{x_0}^{x_0 + 1} u_x^2(t, x) dx dt &= \\ &= \int_0^T \int_{x_0}^{x_0 + \frac{1}{6}} u_x^2(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{x_0 + \frac{1}{6}}^{x_0 + \frac{1}{3}} u_x^2(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{x_0 + \frac{1}{3}}^{x_0 + \frac{1}{2}} u_x^2(t, x) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{x_0 + \frac{1}{2}}^{x_0 + \frac{2}{3}} u_x^2(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{x_0 + \frac{2}{3}}^{x_0 + \frac{5}{6}} u_x^2(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{x_0 + \frac{5}{6}}^{x_0 + 1} u_x^2(t, x) dx dt \end{aligned}$$

então, usando (4.14) nas parcelas acima, temos

$$\int_0^T \int_{x_0}^{x_0 + 1} u_x^2(t, x) dx dt \leq c(T, \|u_0\|)$$

isto é, temos (4.5).

Fazendo $t_0 = t$ e $x_0 = 0$ em (4.13), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi_\alpha(x) dx \leq c(t, \|u_0\|) + \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2(x) x^\alpha \psi_0(x) dx$$

e, como $\psi_0(x) \leq 1$ e $t \leq T$, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) \psi_{\alpha}(x) dx \leq c(\alpha, T, \|u_0\|, N_{\alpha}(u_0))$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} u^2(t, x) x^{\alpha} \psi_0(x) dx \leq c(\alpha, T, \|u_0\|, N_{\alpha}(u_0))$$

Como

$$\begin{aligned} N_{\alpha}(u(t, .)) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha} u^2(t, x) dx \\ &= \int_0^1 x^{\alpha} u^2(t, x) dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha} u^2(t, x) \psi_0(x) dx \\ &\leq c(\alpha, T, \|u_0\|, N_{\alpha}(u_0)), \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

(onde usamos o fato que $x^{\alpha} \leq 1$ se $0 \leq x \leq 1$), concluímos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} N_{\alpha}(u(t, .)) \leq c(\alpha, T, \|u_0\|, N_{\alpha}(u_0))$$

isto é, obtemos (4.6).

Agora, em (4.13), vamos tomar $t_0 = T$ e trocar x_0 por $x_0 - 1$. Logo

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \psi'_{\alpha}(x - x_0 + 1) dx dt \leq c(T, \|u_0\|) + \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2(x) \psi_{\alpha}(x - x_0 + 1) dx$$

donde

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x) \alpha (x - x_0 + 1)^{\alpha-1} \psi_0(x - x_0 + 1) dx dt \leq \\ &\leq c(T, \|u_0\|) + \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2(x) (x - x_0 + 1)^{\alpha} \psi_0(x - x_0 + 1) dx dt \end{aligned}$$

Observe que $\psi_0(x - x_0 + 1) = 0$ se $x \leq x_0 - \frac{1}{2}$, $\psi_0(x - x_0 + 1) \leq 1$. Logo

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} u_0^2(x) (x - x_0 + 1)^{\alpha} \psi_0(x - x_0 + 1) dx dt = \\ &= \int_{x_0 - \frac{1}{2}}^{\infty} u_0^2(x) (x - x_0 + 1)^{\alpha} \psi_0(x - x_0 + 1) dx \\ &= \int_{x_0 - 1}^{\infty} u_0^2(x) (x - x_0 + 1)^{\alpha} \psi_0(x - x_0 + 1) dx \\ &\leq \int_{x_0 - 1}^{\infty} u_0^2(x) (x - (x_0 - 1))^{\alpha} dx \\ &\leq c(\alpha, x_0) (\|u_0\|^2 + N_{\alpha}(u_0)) \end{aligned}$$

(nesta última passagem usamos a desigualdade (4.3) para $x_0 - 1$). Com isto temos que

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t, x)(x - x_0 + 1)^{\alpha-1} \psi_0(x - x_0 + 1) dx dt \leq c(\alpha, x_0, T, \|u_0\|, N_\alpha(u_0))$$

e, sendo $\psi_0(x - x_0 + 1) = 1$ se $x \geq x_0$, logo,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{x_0}^{\infty} (x - x_0 + 1)^{\alpha-1} u_x^2(t, x) dx dt &= \\ &= \int_0^T \int_{x_0}^{\infty} (x - x_0 + 1)^{\alpha-1} u_x^2(t, x) \psi_0(x - x_0 + 1) dx dt \\ &\leq c(\alpha, x_0, T, \|u_0\|, N_\alpha(u_0)) \end{aligned}$$

A prova de (4.6) e (4.7) para $\alpha > 1$ é feita por indução. De fato, suponha que para um número natural n essas estimativas são válidas para $0 < \alpha \leq n$. Como

$$|\psi'_\alpha(x)| \leq c(\alpha)(\psi_{\alpha-1}(x) + 1) \text{ para } \alpha \geq 1,$$

de (4.10) obtemos (4.11) para $n < \alpha \leq n + 1$, agora com uma constante c no lado direito dependendo de $\alpha, t, x_0, \|u_0\|$, e $N_{\alpha-1}(u_0)$. A prova é completada como no caso $0 < \alpha \leq 1$. ■

Agora vamos aplicar essas estimativas para provar a existência de uma solução generalizada no caso de um dado inicial em $L^2(\mathbf{R})$.

Teorema 4.1 (Existência de uma solução generalizada) *Seja $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$, então existe uma solução generalizada do problema (4.1), (4.2) no sentido da definição (4.1). Além disto,*

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbf{R})) \cap L^2(0, T; H^1(-r, r)),$$

para qualquer $r > 0$, onde

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(t, \cdot)\| \leq \|u_0\| \quad (4.15)$$

enquanto que para qualquer $x_0 \in \mathbf{R}$

$$\int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} u_x^2(t, x) dx dt \leq c(T, \|u_0\|) < \infty \quad (4.16)$$

e quando $t \rightarrow 0$

$$\sup_{\tau \in (0, t]} \|u(\tau, \cdot) - u_0\| \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

Mais ainda, se $N_\alpha(u_0) < \infty$ para algum $\alpha \geq 0$, então

$$\sup_{t \in (0, T)} N_\alpha(u(t, \cdot)) \leq c(\alpha, T, \|u_0\|, N_\alpha(u_0)) < \infty \quad (4.18)$$

Finalmente, se $\alpha > 0$, então para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^T \int_{x_0}^\infty (x - x_0 + 1)^{\alpha-1} u_x^2(t, x) dx dt \leq c(\alpha, T, x_0, \|u_0\|, N_\alpha(u_0)) < \infty \quad (4.19)$$

Demonstração: Seja u_0^h uma "função suavizada" para u_0 , isto é,

$$\begin{aligned} u_0^h(x) &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^\infty \lambda\left(\frac{x-y}{h}\right) u_0(y) dy \\ &= \frac{1}{h} (\lambda(\frac{\cdot}{h}) * u_0)(x) \end{aligned}$$

onde $h > 0$, $\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \lambda(x) \leq 1$, $\text{supp } \lambda \subseteq [-1, 1]$ e

$$\int_{-\infty}^\infty \lambda(x) dx = 1 \quad (4.20)$$

Construiremos uma solução $u = u(t, x)$ do problema presente como o limite de soluções $u_h = u_h(t, x)$ dos problemas "regularizados"

$$u_{ht} + u_{hxxx} = u_h u_{hx} \quad (4.21)$$

$$u_h|_{t=0} = u_{0h} \quad (4.22)$$

onde $u_{0h}(x) = u_0^h(x) \psi_0(x + \frac{1}{h}) \psi_0(\frac{1}{h} - x)$, $0 < h < 1$. Observemos que $u_{0h} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (basta ver que $\text{supp}[\psi_0(\cdot + \frac{1}{h}) \psi_0(\frac{1}{h} - \cdot)] = [\frac{1}{2} - \frac{1}{h}, \frac{1}{h} - \frac{1}{2}]$) e então, para as soluções u_h , as estimativas do lema anterior são válidas. Vale observar também que $\{u_{0h}\}$ converge para u_0 em $L^2(\mathbb{R})$.

Consideremos a seqüência de intervalos $I_n = (-n, n)$ e os retângulos correspondentes $Q_n = (0, T) \times I_n$, $n = 1, 2, \dots$.

De (4.4) temos que

$$\|u_h(t, \cdot)\| = \|u_{0h}\|, \quad \forall t \in [0, T]$$

e da desigualdade de Young e (4.20) temos

$$\begin{aligned}
 \|u_{0h}\| &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u_0^h(x) \psi_0(x + \frac{1}{h}) \psi_0(\frac{1}{h} - x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u_0^h(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left\| \frac{1}{h} \left(\lambda \left(\frac{\cdot}{h} \right) * u_0 \right) \right\| \\
 &\leq \frac{1}{h} \left\| \lambda \left(\frac{\cdot}{h} \right) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} \|u_0\| \\
 &= \|u_0\|
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_h(t, \cdot)\| = \|u_{0h}\| \leq \|u_0\| \quad (4.23)$$

Como

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx dt &= \int_0^T \int_{-n}^{-n+1} u_{hx}^2(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{-n+1}^{-n+2} u_{hx}^2(t, x) dx dt + \dots \\
 &\dots + \int_0^T \int_{n-1}^n u_{hx}^2(t, x) dx dt
 \end{aligned}$$

de (4.5) concluimos que

$$\iint_{Q_n} u_{hx}^2(t, x) dx dt \leq c(T, n, \|u_{0h}\|) \leq c(T, n, \|u_0\|) \quad (4.24)$$

Vale observar que se $v \in H^1(a, b)$, onde $a, b \in \mathbf{R}$, então

$$\sup_{x \in (a, b)} |v(x)| \leq c(a, b) \left[\left(\int_a^b v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b v_x^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

De fato, seja $y \in (a, b)$ tal que $\int_a^b v(s) ds = v(y)(b - a)$ e, como $v, v_x \in L^2(a, b)$, então para $x \in (a, b)$,

$$v^2(x) = v^2(y) + \int_y^x \frac{d}{ds} (v^2)(s) ds = v^2(y) + 2 \int_y^x v(s) v_s(s) ds$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 |v(x)|^2 &\leq \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b |v(s)| ds \right)^2 + 2 \int_y^x |v(s) v_s(s)| ds \\
 &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b v^2(s) ds + 2 \left(\int_a^b v^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b v_s^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Logo

$$|v(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left(\int_a^b v^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} \left(\int_a^b v^2(s) ds \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b v_s^2(s) ds \right)^{\frac{1}{4}}$$

e, tomando $c(a, b) = \max\{(b-a)^{-\frac{1}{2}}, \sqrt{2}\}$, obtemos o resultado.

Em consequência disto, de (4.23) e de (4.24) temos, para $v = u_h(t, \cdot) \in S(\mathbf{R}) \subset H^1(I_n)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\sup_{x \in I_n} |u_h(t, x)| \right)^4 dt &\leq \\ &\leq c(n) \int_0^T \left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) dx \int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx + \left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) dx \right)^2 \right) dt \\ &\leq c(n) \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_h(t, \cdot)\|^2 \int_0^T \int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx dt + \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_h(t, \cdot)\|^4 T \right) \\ &\leq c(T, n, \|u_0\|) \end{aligned} \quad (4.25)$$

e de (4.24), (4.25) e da desigualdade de Hölder ($p = 3$, $q = \frac{3}{2}$) temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) u_{hx}^2(t, x) dx \right)^{\frac{2}{3}} dt &\leq \\ &\leq \int_0^T \left(\sup_{x \in I_n} |u_h(t, x)| \right)^{\frac{4}{3}} \left(\int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx \right)^{\frac{2}{3}} dt \\ &\leq \left[\int_0^T \left(\left(\sup_{x \in I_n} |u_h(t, x)| \right)^{\frac{4}{3}} \right)^3 dt \right]^{\frac{1}{3}} \left[\int_0^T \left(\left(\int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} dt \right]^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\int_0^T \left(\sup_{x \in I_n} |u_h(t, x)| \right)^4 dt \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^T \int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx dt \right)^{\frac{2}{3}} \\ &\leq c(T, n, \|u_0\|) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Consideremos o conjunto

$$W_n = \{v : v \in L^2(0, T; H^1(I_n)), v_t \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; H^{-2}(I_n))\}$$

Afirmamos que o conjunto de funções $\{u_h\}$ é limitado em W_n , $\forall n$. De fato, temos que

a) $u_h \in L^2(0, T; H^1(I_n))$

pois, como $u_h(t, \cdot) \in H^1(I_n)$ e

$$\|u_h(t, \cdot)\|_{H^1(I_n)} = \|u_h(t, \cdot)\|_{L^2(I_n)} + \|u_{hx}(t, \cdot)\|_{L^2(I_n)}$$

de (4.23) e (4.24) temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u_h(t, \cdot)\|_{H^1(I_n)}^2 dt &\leq 2 \int_0^T (\|u_h(t, \cdot)\|_{L^2(I_n)}^2 + \|u_{hx}(t, \cdot)\|_{L^2(I_n)}^2) dt \\ &\leq 2 \left[\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_h(t, \cdot)\| \right)^2 \int_0^T dt + \int_0^T \int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx dt \right] \\ &\leq c(T, n, \|u_0\|) < \infty\end{aligned}$$

b) $u_{ht} \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; H^{-2}(I_n))$,

onde $H^{-2}(I_n) = (H_0^2(I_n))^*$. Para mostrar isto vamos definir, para cada $t \in (0, T)$, o funcional $u_{ht}(t, \cdot) : H_0^2(I_n) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$u_{ht}(t, \cdot)(\phi) = \int_{-n}^n u_{ht}(t, x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in H_0^2(I_n) \quad (4.27)$$

De (4.21) e sabendo que $u_h(t, \cdot) \in S(\mathbb{R})$, $\phi \in H_0^2(I_n) \subset C_\infty^1(\mathbb{R})$ (do lema de Sobolev) e usando a desigualdade de Schwarz, temos

$$\begin{aligned}|u_{ht}(t, \cdot)(\phi)| &= \left| \int_{-n}^n u_h(t, x) u_{hx}(t, x) \phi(x) dx - \int_{-n}^n u_{hxx}(t, x) \phi(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_{-n}^n (u_h^2(t, x))_x \phi(x) dx + \int_{-n}^n u_{hxx}(t, x) \phi_x(x) dx \right| \\ &= \left| -\frac{1}{2} \int_{-n}^n u_h^2(t, x) \phi_x(x) dx - \int_{-n}^n u_{hx}(t, x) \phi_{xx}(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-n}^n |u_h^2(t, x) \phi_x(x)| dx + \int_{-n}^n |u_{hx}(t, x) \phi_{xx}(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{-n}^n u_h^4(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-n}^n \phi_x^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \left(\int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-n}^n \phi_{xx}^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) u_h^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|\phi\|_{H_0^2(I_n)} \\ &\leq [\|u_h(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \|u_{hx}(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}] \|\phi\|_{H_0^2(I_n)}\end{aligned}$$

e com isto vemos que $u_{ht}(t, \cdot)$ está bem definido e é contínuo.

Agora, como

$$\begin{aligned}u_{ht}(t, \cdot)(\phi) &\leq \left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) u_{hx}^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-n}^n \phi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} - \int_{-n}^n u_{hx}(t, x) \phi_{xx} dx \\ &\leq \left[\left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) u_{hx}^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|\phi\|_{H_0^2(I_n)}\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\|u_{ht}(t, \cdot)\|_{H^{-2}(I_n)} &= \sup_{\|\phi\|_{H_0^2(I_n)}=1} |u_{ht}(t, \cdot)(\phi)| \\ &\leq \left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) u_{hx}^2(t, x) dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Assim, de (4.26), (4.24) e desigualdade de Hölder com $p = \frac{3}{2}$, $q = 3$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u_{ht}(t, \cdot)\|_{H^{-2}(I_n)}^{\frac{4}{3}} dt &\leq 2^{\frac{4}{3}} \int_0^T \left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) u_{hx}^2(t, x) dx\right)^{\frac{2}{3}} dt + \\ &\quad + 2^{\frac{4}{3}} \int_0^T \left(\int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx\right)^{\frac{2}{3}} dt \\ &\leq 2^{\frac{4}{3}} \int_0^T \left(\int_{-n}^n u_h^2(t, x) u_{hx}^2(t, x) dx\right)^{\frac{2}{3}} dt + \\ &\quad + 2^{\frac{4}{3}} \left(\int_0^T \int_{-n}^n u_{hx}^2(t, x) dx dt\right)^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}} \\ &\leq c(T, n, \|u_0\|)\end{aligned}$$

De a) e b) temos

$$\|u_h\|_{W_n} = \|u_h\|_{L^2(0, T; H^1(I_n))} + \|u_{ht}\|_{L^{\frac{4}{3}}(0, T; H^{-2}(I_n))} \leq c(T, n, \|u_0\|) < \infty, \forall h$$

e assim concluímos que, para cada n , $\{u_h\}$ é um conjunto limitado em W_n . Considerando $B_0 = H^1(I_n)$, $B = L^2(I_n)$ e $B_1 = H^{-2}(I_n)$, temos:

1) $B_0 \subset B \subset B_1$ com B_0 e B_1 reflexivos (pois são espaços de Hilbert) e a inclusão é algébrica e topológica

2) a injeção $B_0 \rightarrow B$ é compacta (do lema de Rellich).

Com isto vemos que as hipóteses do teorema de Aubin estão satisfeitas. Portanto, $\forall n$, a injeção

$$W_n \rightarrow L^2(0, T; L^2(I_n)) = L^2(Q_n)$$

é compacta.

Por um processo de diagonalização com relação ao sistema de expansão dos retângulos Q_n e sabendo que convergência L^2 implica em convergência *q.t.p.* para uma subsequência, obtemos uma seqüência $h_m > 0$ com $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0$ tal que quando $m \rightarrow \infty$

$$u_{h_m} \rightarrow u \text{ em } L^2(Q_n), \forall n \quad (4.28)$$

$$u_{h_m} \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Pi_T \quad (4.29)$$

Vamos explicar o processo anterior. Quando $n = 1$, sendo a injeção $W_1 \rightarrow L^2(Q_1)$ compacta e $\{u_h\}$ limitado em W_1 , temos que este é relativamente compacto em $L^2(Q_1)$. Logo existe uma subsequência $\{u_{h_p}\} \subset \{u_h\}$ tal que

$$u_{h_p} \rightarrow u \text{ em } L^2(Q_1) \quad (4.30)$$

e, como convergência L^2 implica em convergência q.t.p. em Q_1 para uma subsequência, temos

$$u_{h_p}(t, x) \rightarrow u(t, x) \text{ para } (t, x) \in Q_1 \setminus \mathcal{A}_1 \quad (4.31)$$

onde $\mathcal{A}_1 \subset Q_1$ é um conjunto de medida nula. Quando $n = 2$, tomamos o conjunto $\{u_{h_p}\}$ e como a injeção $W_2 \rightarrow L^2(Q_2)$ é compacta, analogamente ao que foi feito anteriormente, obtemos uma subsequência $\{u_{h_q}\} \subset \{u_{h_p}\}$ tal que

$$u_{h_q} \rightarrow u \text{ em } L^2(Q_2) \quad (4.32)$$

e

$$u_{h_q}(t, x) \rightarrow u(t, x) \text{ para } (t, x) \in Q_2 \setminus \mathcal{A}_2 \quad (4.33)$$

onde $\mathcal{A}_2 \subset Q_2$ é um conjunto de medida nula tal que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Continuando este processo, obtemos uma seqüência $h_m > 0$ com $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0$ tal que quando $m \rightarrow \infty$

$$u_{h_m} \rightarrow u \text{ em } L^2(Q_n), \forall n \quad (4.34)$$

e

$$u_{h_m}(t, x) \rightarrow u(t, x) \text{ para } (t, x) \in Q_n \setminus \mathcal{A}_n, \forall n \quad (4.35)$$

onde $\mathcal{A}_n \subset Q_n$ é um conjunto de medida nula tal que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Para obtermos a convergência q.t.p. em Π_T basta tomarmos o conjunto de medida nula $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$.

Também, definindo

$$u_{h_m}(\varphi) = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u_{h_m}(t, x) \varphi(t, x) dx dt, \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))$$

temos que $u_{h_m} \in (L^1(0, T; L^2(\mathbf{R})))^*$ e

$$\|u_{h_m}\|_{(L^1(0, T; L^2(\mathbf{R})))^*} \leq \|u_0\|$$

(da desigualdade de Cauchy-Schwarz e de (4.23)), isto é, $\{u_{h_m}\}$ é uma seqüência limitada de funcionais em $(L^1(0, T; L^2(\mathbf{R})))^*$. Do teorema de Banach-Alaoglu temos que $\{u_{h_m}\}$ possui uma subsequência fraca-* convergente e a denotaremos também por $\{u_{h_m}\}$. Logo

$$u_{h_m} \rightarrow u \text{ fraca} - * \text{ em } (L^1(0, T; L^2(\mathbf{R})))^* = L^\infty(0, T; L^2(\mathbf{R})) \quad (4.36)$$

Agora observemos que $L^2(0, T; H^1(I_n)) \subset L^2(0, T; L^2(I_n))$, $\forall n$, onde a inclusão é contínua e densa. Logo $(L^2(Q_n))^* \subset (L^2(0, T; H^1(I_n)))^*$ e também esta inclusão é contínua e densa. Seja $L \in (L^2(Q_n))^*$, do lema de Riesz segue que existe $w \in L^2(Q_n)$ tal que

$$L(v) = \iint_{Q_n} w(t, x)v(t, x)dxdt = (w|v)_{L^2(Q_n)}$$

Assim, quando $m \rightarrow \infty$, de (4.28)

$$\begin{aligned} |L(u_{h_m}) - L(u)| &= |(w|u_{h_m} - u)_{L^2(Q_n)}| \\ &\leq \|w\|_{L^2(Q_n)}\|u_{h_m} - u\|_{L^2(Q_n)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Do teorema (1.3), considerando $\Delta = (L^2(Q_n))^*$, temos que

$$u_{h_m} \rightarrow u \text{ fracamente em } L^2(0, T; H^1(I_n)) \quad (4.37)$$

Para qualquer função $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_T)$ e qualquer h_m temos

$$\iint_{\Pi_T} [u_{h_m}(t, x)\varphi_t(t, x) + u_{h_m}(t, x)\varphi_{xxx}(t, x) - \frac{1}{2}u_{h_m}^2(t, x)\varphi_x(t, x)]dxdt = 0$$

pois u_{h_m} satisfaz (4.21). Como $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_T)$ e $u_{h_m} \in C^\infty(0, T; S(\mathbb{R}))$, concluímos que todas as parcelas desta integral são funções limitadas. De (4.29) e do teorema da convergência dominada de Lebesgue podemos passar o limite quando $m \rightarrow \infty$ para obter

$$\iint_{\Pi_T} [u(t, x)\varphi_t(t, x) + u(t, x)\varphi_{xxx}(t, x) - \frac{1}{2}u^2(t, x)\varphi_x(t, x)]dxdt = 0$$

ou seja, a condição (1) da definição (4.1) está satisfeita.

De (4.23) e (4.28) temos (4.15). Também, como u_{h_m} satisfaz (4.6), de (4.28) temos (4.18). Mais ainda, como u_{h_m} satisfaz (4.5), temos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} u_{h_m x}(t, x)u_x(t, x)dxdt \right| \\ & \leq \left(\int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} u_{h_m x}^2(t, x)dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} u_x^2(t, x)dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c(T, \|u_0\|) \left(\int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} u_x^2(t, x)dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e, passando o limite quando $m \rightarrow \infty$, obtemos (4.16). De fato, se definirmos

$$l(v) = \int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} v_x(t, x)u_x(t, x)dxdt, \quad \forall v \in L^2(0, T; H^1(x_0, x_0 + 1))$$

então $l \in (L^2(0, T; H^1(x_0, x_0 + 1)))^*$ e usamos (4.37). Analogamente, segue de (4.7) que se $\alpha > 0$ então para qualquer número natural k

$$\int_0^T \int_{x_0}^\infty (x - x_0 + 1)^{\alpha-1} u_x^2(t, x) \psi_0(k - x) dx dt \leq c(\alpha, T, x_0, \|u_0\|, N_\alpha(u_0))$$

e, como o lado direito desta desigualdade não depende de k , obtemos (4.19).

Agora vamos considerar a questão da hipótese do dado inicial. Para todo n distingüimos um conjunto $\mathcal{E}_n \subset (0, T)$ de medida nula tal que, para $t \in (0, T) \setminus \mathcal{E}_n$, a função $u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaz

$$\|u(t, \cdot)\| \leq \|u_0\| \text{ e } \int_{-n}^n |u_{h_m}(t, x) - u(t, x)| dx \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty$$

Seja $\mathcal{E} = \cup_{n=1}^\infty \mathcal{E}_n$ com medida nula e $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Encontramos n_0 tal que $\text{supp } \omega \subset I_{n_0}$. Então, para todo h_m ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^\infty (u_{h_m}(t, x) - u_0(x)) \omega(x) dx \right| &= \left| \int_0^t \int_{-\infty}^\infty u_{h_m s}(t, x) \omega(x) dx ds \right| \\ &\leq \int_0^t \|u_{h_m s}(s, \cdot)\|_{H^{-2}(I_{n_0})} ds \|\omega\|_{H_0^2(I_{n_0})} \\ &\leq \left(\int_0^t ds \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^t \|u_{h_m s}(s, \cdot)\|_{H^{-2}(I_{n_0})}^{\frac{4}{3}} ds \right)^{\frac{3}{4}} \|\omega\|_{H_0^2(I_{n_0})} \\ &\leq c(T, n_0, \|u_0\|) \|\omega\|_{H_0^2(I_{n_0})} t^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Seja $t \in (0, T) \setminus \mathcal{E}$. Passando o limite quando $m \rightarrow \infty$ no lado esquerdo desta desigualdade, obtemos

$$\left| \int_{-\infty}^\infty (u(t, x) - u_0(x)) \omega(x) dx \right| \leq c(T, n_0, \|u_0\|) \|\omega\|_{H_0^2(I_{n_0})} t^{\frac{1}{4}}$$

e, quando $t \rightarrow 0$, obtemos (2) da definição (4.1). Concluimos que $u \in L_{loc}^2(\Pi_T)$ é uma solução generalizada do problema (4.1), (4.2) na faixa Π_T .

Mais ainda, para $t \in (0, T) \setminus \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot) - u_0\|^2 &= \int_{-\infty}^\infty (u(t, x) - u_0(x))^2 dx \\ &= \|u(t, \cdot)\|^2 + \|u_0\|^2 - 2 \int_{-\infty}^\infty u(t, x) u_0(x) dx \\ &\leq 2\|u_0\| - 2 \int_{-\infty}^\infty u(t, x) u_0(x) dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^\infty (u_0(x) - u(t, x)) u_0(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} (u_0(x) - u(t, x)) u_{0h}(x) dx + \\
&\quad + 2 \int_{-\infty}^{\infty} (u_0(x) - u(t, x)) (u_0(x) - u_{0h}(x)) dx \\
&\equiv 2I_{1h}(t) + 2I_{2h}(t)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_{2h}(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x) - u(t, x)| |u_0(x) - u_{0h}(x)| dx \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u_0(x) - u(t, x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u_0(x) - u_{0h}(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u_0 - u(t, \cdot)\| \|u_0 - u_{0h}\| \\
&\leq (\|u_0\| + \|u(t, \cdot)\|) \|u_0 - u_{0h}\| \\
&\leq 2\|u_0\| \|u_0 - u_{0h}\|
\end{aligned}$$

Temos que $I_{1h}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, $t \in (0, T) \setminus \mathcal{E}$, pois $u_{0h} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e, como $\|u_0 - u_{0h}\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, segue de (4.38) que $\|u(t, \cdot) - u_0\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, $t \in (0, T) \setminus \mathcal{E}$. Assim, obtemos (4.17) e a demonstração do teorema está terminada. ■

Para terminar, observemos que o teorema 4.1 nos garante apenas a existência de uma solução generalizada do problema (4.1), (4.2) no sentido da definição 4.1 com dado inicial $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Mas é possível mostrar que se u_0 satisfaz

$$\|u_0\| + N_{\frac{3}{2}}(u_0) = M_0 < \infty$$

então existe uma única solução generalizada deste problema na classe K das u tais que

$$\sup_{t \in (0, T)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t, x) dx + \int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}} u^2(t, x) dx \right] = M[u, T] < \infty$$

(ver [8]).

Bibliografia

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] J. P. Aubin, *Un théorème de compacité*, C. R. Acad. Sc. Paris, **256** (1963), 5042-5044.
- [3] G. Bachman and L. Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1966.
- [4] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, 1976.
- [5] R. Iório Jr. e V. M. Iório, *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988.
- [6] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in Appl. Math., Adv. in Math. Suppl. Studies, Academic Press, Vol.8, Berkeley, (1983), 93-128.
- [7] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover, New York, 1970.
- [8] S. N. Kruzhkov and A. V. Faminskii, *Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation*, Math. USSR Sbornik, Vol.48, 2 (1984), 391-398.
- [9] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod and Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [10] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol.I, Academic Press, Orlando, 1980
- [11] M. M. Santos, *A Versão de Kato-lai do Método de Galerkin e a Equação de Korteweg-de Vries*, dissertação de mestrado, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.