UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

DEDALUS - Acervo - ICMC
30300045837

TRABALHO DE MESTRADO

O MÉTODO TOPOLÓGICO DE WAZEWSKI PARA EQUAÇÕES INTEGRO-DIFERENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES AO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SISTEMAS REPULSIVOS

Luiz Antonio Vieira de Carvalho

Orientador: Prof. Dr. Antonio F. Izé

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Class. T
Cutter C331
Tombo
Sysno

SÃO CARLOS
— 1972 —

À minha esposa Regina e aos nossos filhos Luiz Alberto e Alecsandra, pelo muito que lhes devo.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos

ao nosso orientador, Prof. Dr. Antonio Fernandes Izé, do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da USP, que nos distinguiu com o máximo de sua atenção durante todo o nosso curso de Mestrado,

à Universidade Federal de Goiás que, por intermédio do Departamento de Matemática de seu Instituto de Matemática e Física, nos concedeu licença e apoio financeiro para o cumprimento de nosso programa junto ao ICMSC,

aos colegas e amigos do ICMSC que nos proporcionaram um excelente ambiente de trabalho e, em especial, ao Prof. Dr. Nelson Onuchic pelos vários esclarecimentos que lhe devemos, ao Prof. Plácido Zoéga Táboas pelos seminários que fizemos juntos e ao Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel pela acolhida que nos deu quando de nossa transferência para São Carlos,

aos órgãos: CNPq, CAPES e FAPESP, pelo auxílio direto ou indireto que deram à feitura deste trabalho, em especial à CAPES que financiou esta publicação.-

The topological principle of Wazewski for integro-differential equations and its applications to the asymptotic behavior of repulsive systems.

SUMMARY

Luiz Antonio Vieira de Carvalho Adviser: A.F. Izé

In this work we present, in Chapter I, some results about existence, uniqueness, continuation and continuous dependence upon initial data, of the solutions of systems of integro-differential equations of the type

$$x'(t) = f(t,x(t)) + \int_a^t g(t,s,x(s))ds.$$

Then, in Chapter II, we use the above mentioned results to present an extension of Wazewski's topological principle for these equations, following the ideas of N. Onuchic's work [17], which is devoted to retarded functional-differential equations.

Chapter III is devoted to some applications of the method presented in Chapter II to the study of the behavior of the solutions of systems of second order, including the systems with repulsive forces. These applications are based on the works of V.D. Fiédorov [7,8]. Also, in this chapter, we present some results about the asymptotic behavior of solutions of systems of integro-differential of second order, due to N.Onuchic [17] for the case of retarded functional-differential equations.

ÍNDICE

	Pg
INTRODUÇÃO	1
§ 1. Histórico	1
§ 2. Este trabalho	2
CAPÍTULO I	5
§ 1. Equações integro-diferenciais	5
§ 2. Existência e unicidade locais	9
§ 3. Prolongamento de soluções	12
§ 4. Dependência contínua da solução em relação à condição inicial	19
§ 5. Existência e prolongamento de soluções fora do corte	26
CAPÍTULO II	30
§ 1. Tubo, ponto de saída, ponto de saída estrita, semi-integral assintótica, sombra esquerda	30
§ 2. Retrato	35
§ 3. Análogo do Teorema de Wazewski, Conjunto Polifacial Regular, Conjunto Polifacial Generalizado	38
CAPÍTULO III	47
§ 1. Sistemas Repulsivos	47
§ 2. Soluções limitadas no futuro	58
BIBLIOGRAFIA	73

INTRODUÇÃO

§ 1. Histórico.

Em 1947, Wazewski [22] introduziu um novo método de análise qualitativa das soluções de sistemas de equações diferenciais, o qual é atualmente conhecido por "método topológico de Wazewski". O método topológico de Wazewski tem grande alcance, por exemplo, na investigação do comportamento (limitação, periodicidade, assintoticidade) das soluções de um sistema de equações diferenciais do tipo

$$dx/dt = f(t,x), \tag{I-1}$$

escrito sob a forma vetorial.

A utilização do método topológico de Wazewski em diferentes problemas concretos tem conduzido às suas várias generalizações. Assim, para se ter uma idéia, Albrecht [1,2], usando o conceito de retrato por deformação, estabeleceu um análogo do teorema de Wazewski que é aplicável aos sistemas autônomos para demonstrar a existência de soluções periódicas, em 1954; nesse mesmo ano, A.Plis [19], usando a idéia de retrato por deformação quase-isotópica, demonstrou um teorema do qual, como casos particulares, se deduzem os teoremas de Wazewski e Albrecht, como mostra A.F. Izé [12]; posteriormente, Bielecki [2,3,4] estendeu os teoremas de Wazewski e Plis para o caso em que é violada a unicidade da solução do problema de Cauchy para o sistema (I-1); em 1961, V.D. Fiédorov [7], utilizou o conceito de função polivalente para conseguir uma extensão do método topológico de Wazewski aos sistemas de equações integro-diferenciais do tipo

$$(I\text{-}2) \qquad x'(t) = f(t,x(t)) + \int_a^t g(t,s,x(s))\,ds,$$

escrito sob a forma vetorial; ainda nesse artigo e também em [8], Fiédorov estende às equações integro-diferenciais alguns resultados de Wintner [23] e Mikolajska [13, 14] referentes a sistemas de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com forças repulsivas; finalmente, em 1967, N. Onuchic [17] estendeu às equações diferenciais funcionais com retardamento os resultados de Wazewski, Wintner e Mikolajska.

§ 2. Este trabalho.

Na verdade, na extensão feita por Fiédorov em [7], apesar de utilizar na maior parte de seu trabalho os conceitos de função polivalente e de quase-retrato (este último, introduzido pelo próprio Fiédorov), ele se restringe ao conjunto dos pontos onde (I-2) admite solução única e considera (I-2) essencialmente como tendo um comportamento análogo ao das equações diferenciais ordinárias. Desse modo, os conceitos de ponto de saída, saída estrita e de conjunto polifacial regular por ele introduzidos são os mesmos dados por Wazewski em [22].

O presente trabalho pretende apresentar uma extensão do método topológico de Wazewski para sistemas de equações integro-diferenciais do tipo (I-2) adotando uma linha semelhante à estabelecida em [17] por N.Onuchic.

Isto se deve ao fato de termos observado que as equações integro-diferenciais e as equações diferenciais funcionais com retardamento apresentam certas analogias no que diz respeito à existência, unicidade e prolongamento das soluções.

Assim procedendo, conseguimos os mesmos resultados obtidos por Fiédorov, porém, pensamos, em um contexto que torna as definições acima citadas muito mais naturais. Uma outra vantagem de termos seguido a linha do professor N. Onuchic, consiste no fato de que, desta forma, pudemos estender aos sistemas de equações integro-diferenciais os resultados por ele obtidos referentes ao comportamento no futuro das soluções de sistemas de equações diferenciais funcionais de segunda ordem. Destarte, os teoremas 3-2.1, 3-2.2, 3-2.3 e 3-2.4 são novos no que diz respeito às equações integro-diferenciais.

O trabalho é constituído de três capítulos.

No Capítulo I, apresentamos os conceitos e fatos básicos ao desenvolvimento do método topológico de Wazewski. Os teoremas 1-2.1, 1-2.2 e 1-4.1 apresentados neste capítulo são inspirados nos homônimos dados em [15]. As hipóteses sobre f e g que ali fazemos não são as mais gerais possíveis, mas as mais adequadas ao objetivo de justificar a hipótese (B) formulada no fim do capítulo.

No Capítulo II desenvolvemos o método topológico de Wazewski para sistemas de equações integro-diferenciais do tipo (I-2).

No Capítulo III fazemos aplicações do método desenvolvido no Capítulo II, para estudar o comportamento assintótico das soluções de sistemas de segunda ordem, repulsivos, adaptando os resultados de Fiédorov [7,8]. Ainda nesse capítulo, apresentamos para as equações integro-diferenciais os resultados já mencionados de N. Onuchic, obtidos originalmente para as equações diferenciais funcionais com retardamento.

Para finalizar este parágrafo, resta-nos afirmar que a simbologia aqui utilizada é, em sua maioria, a consagrada pelo uso. Alguma variação que aparecer, será devidamente esclarecida.

CAPÍTULO I

O principal objetivo deste capítulo é o de apresentar alguns resultados da teoria das equações integro-diferenciais relativos à existência, unicidade, prolongamento e dependência contínua em relação às condições iniciais, das soluções de tais equações, resultados estes básicos para o desenvolvimento dos capítulos II e III. Na maior parte das vezes, a utilização de tais resultados estará implícita, daí uma forte razão para dedicar-lhes este capítulo inicial.

§ 1. Equações integro-diferenciais.

As equações integro-diferenciais, como o próprio nome indica, são equações onde as funções incógnitas aparecem sob os sinais de derivação e integração. Tais equações surgem naturalmente em certos problemas da Física (veja [21], p.138).

Estaremos, neste trabalho, interessados em sistemas de equações integro-diferenciais de primeira ordem, no sentido que, abaixo, tornamos preciso:

Seja $E = R^+ \times R^n$ onde R denota a reta real, $R^+ = [0,\infty)$, R^k munido da norma $|x| = (\sum_1^k x_i^2)^{1/2}$ onde $x = (x_1, \ldots, x_k)$ denota um ponto do R^k. Sejam ainda $f = (f_1, \ldots, f_n): E \to R^n$ e $g = (g_1, \ldots, g_n): R^+ \times E \to R^n$ funções contínuas dadas.

Coloca-se, então, o seguinte problema:

<u>S.e.i.d.(a)</u>. "Encontrar um intervalo $I \subset R^+$ e uma função diferenciável $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n): I \to R^n$ tal que

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) + \int_a^t g(t,s,\varphi(s))\, ds$$

para todo $t \in I$",

onde <u>a</u> é uma constante arbitrariamente pré-fixada.

O problema acima é chamado de um <u>sistema de equações integro-diferenciais de primeira ordem</u> e denotado por

$$(1\text{-}1.1) \qquad x'(t) = f(t,x(t)) + \int_a^t g(t,s,x(s))\, ds$$

e referido suscintamente por "s.e.i.d.(a). (1-1.1)".

A um par (φ, I) satisfazendo ao s.e.i.d.(a). (1-1.1) chamamos de <u>solução</u> desse problema. No entanto, para simplificar a linguagem, diremos apenas "φ é solução.." ficando a menção ao intervalo I sujeita às conveniências do contexto.

A rigor, uma solução do s.e.i.d.(a).(1-1.1) não precisa, necessariamente, estar definida no ponto <u>a</u>. Isto é comprovado pelo exemplo abaixo

$$x'(t) = (-t^3 - x(t))\,x(t) + \int_0^t tsx(s)\,ds,$$

que tem como uma sua solução a função $\varphi : (o, \infty) \to R$, definida por $\varphi(t) = 1/t$, como é fácil de ver.

Uma outra observação muito importante concernente às soluções do s.e.i.d.(a)(1-1.1) é a seguinte: o s.e.i.d.(a).(1-1.1) descreve fenômenos hereditários, isto é, fenômenos cujo estado atual depende de sua história passada desde o instante $t=a$. Assim, o mesmo fenômeno pode ter descrições distintas do seu estado atual ou futuro se fôr alterada a sua história passada.

Além disso, outras informações qualitativas e quantitativas sobre as soluções do s.e.i.d.(a).(1-1.1) podem ser dadas dependendo de condições suplementares que sejam impostas às funções f e g e também do que se requeira das soluções.

Uma condição suplementar muito importante consiste em requerer que o(s) gráfico(s) da(s) solução(ões) passe(m) por um dado ponto, o que conduz ao

<u>Problema do Valor Inicial</u>-(P.V.I.): "Seja (τ, x^o) um ponto de E. Encontrar uma solução do s.e.i.d.(1-1.1) que satisfaça à condição (inicial).

(1-1.2) $$x(\tau) = x^{o}."$$

O p.v.i. é, às vezes, chamado de "problema de Cauchy para o s.e.i.d.(a)(1-1.1)". Muito útil será o seguinte

Lema 1. O p.v.i. é equivalente à equação integral

(1-1.3) $$x(t) = x^{o} + \int_{\tau}^{t} f(s,x(s))\,ds + \int_{\tau}^{t}\int_{a}^{s} g(s,u,x(u))\,du\,ds.$$

Prova. Se $x(t)$ fôr uma solução de (1-1.1) satisfazendo à condição (1-1.2) então, integrando entre os limites τ e t obtemos (1-1.3). E, inversamente, se $x(t)$ fôr solução de (1-1.3), pondo $t=\tau$ obtemos $x(\tau)=x^{o}$, que é (1-1.2). Além disso, $x(t)$ será uma função contínua de seu limite superior de integração. Assim, como f e g são contínuas, $f(.,x(.))$ e $\int_{a}^{\cdot} g(.,u,x(u))\,du$ serão contínuas. Segue então de (1-1.3) que $x(t)$ é diferenciável e que

$$x'(t) = f(t,x(t)) + \int_{a}^{t} g(t,s,x(s))\,ds$$

que é (1-1.1).

Seja $\tau \geq 0$ e ponhamos $E(\tau) = \{(\tau,x) \in E\}$. Ao con-

junto $E(\tau)$ chamaremos de "corte de E por τ".

Um caso particular do p.v.i., muito importante para os nossos propósitos ocorre quando $\tau = a$ e será denotado por p.v.i.(a).

§ 2. Existência e unicidade locais.

Seja J um intervalo da reta e seja A um subconjunto do R^n, ambos compactos. O símbolo $\mathscr{C}(J,A)$ denotará o espaço de Banach de todas as funções contínuas $\varphi: J \to A$ munido da norma

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t)| : t \in J\}.$$

Hipótese (A). Para cada conjunto fechado $B \subset R^n$ e cada intervalo fechado $J \subset R^+$ existem em correspondência funções contínuas $K_1: J \to R^+$ e $K_2: J \times J \to R^+$ tais que

$$(1\text{-}2.1) \qquad |f(t,x^1) - f(t,x^2)| \leq K_1(t)|x^1 - x^2|$$

para todo $t \in J$ e todo $x^1, x^2 \in B$, e

$$(1\text{-}2.2) \qquad |g(t,s,x^1) - g(t,s,x^2)| \leq K_2(t,s)|x^1 - x^2|$$

para todo $t,s \in J$ e todo $x^1, x^2 \in B$.

Temos o seguinte

Instituto de Ciências Matemáticas e Computação - Biblioteca

Teorema 1-2.1. Se para o s.e.i.d.(a) (1-1.1) estiver satisfeita a hipótese (A), então existe $\delta > o$ tal que o p.v.i.(a) tem uma única solução em $[a, a+\delta]$.

Prova. Sejam J um intervalo compacto de R^+ escolhido de forma que $a \in J$ e $B = \{x \in R^n : |x - x^o| \leq r\}$ onde r é um número positivo menor que 1.

A existência de constantes positivas M_1, M_2, M_3 e M_4 satisfazendo

$$M_1 \geq \sup \{ |f(t,x)| : (t,x) \in J \times B \},$$

$$M_2 \geq \sup \{ |g(s,u,x)| : (s,u,x) \in J \times J \times B \},$$

$$M_3 \geq \sup \{ K_1(s) : s \in J \} \text{ e}$$

$$M_4 \geq \sup \{ \int_J K_2(s,u)du : s \in J \}$$

é assegurada, respectivamente, pelas continuidades de f, g, K_1 e K_2.

Seja agora $\delta > o$ tal que $[a, a+\delta] = J_1 \subset J$ e tal que

$$(1\text{-}2.3) \qquad \delta \leq \min \{ r/2M_1, r/2M_2, r/3M_3, r/3M_4 \}.$$

Para cada $\varphi \in \mathscr{C}(J_1, B)$ ponhamos $T\varphi = \psi$ onde

$$\psi(t) = x^o + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds + \int_a^t \int_a^s g(s,u,\varphi(u))\, du\, ds.$$

Se $\varphi \in \mathscr{C}(J_1,B)$ e $t \in J_1$, temos

$$|\psi(t) - x^0| \leq \int_{J_1} |f(s,\varphi(s))|\,ds + \int_{J_1}\int_{J_1} |g(s,u,\varphi(u))|\,du\,ds \leq$$

$$\leq M_1\delta + M_2\delta \leq r,$$ o que mostra que $\psi: J_1 \to B$.

Além disso, se $h > o$ e $t, t+h \in J_1$, temos

$$|\psi(t+h) - \psi(t)| \leq \int_t^{t+h} |f(s,\varphi(s))|\,ds + \int_t^{t+h}\int_a^s |g(s,u,\varphi(u))\,du\,ds \leq$$

$$\leq M_1 h + \delta M_2 h,$$ o que mostra que $\psi(t+h) \to \psi(t)$ quando $h \to o^+$. Analogamente se mostra que $\psi(t+h) \to \psi(t)$ para $h \to o^-$, o que prova que $T\varphi = \psi \in \mathscr{C}(J_1,B)$, ou seja, que $T: \mathscr{C}(J_1,B) \to \mathscr{C}(J_1,B)$.

Por outro lado, se $t \in J_1$ e $\varphi, \mu \in \mathscr{C}(J_1,B)$ então

$$|T\varphi(t) - T\mu(t)| \leq \int_{J_1} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\mu(s))|\,ds + \ldots$$

$$\ldots + \int_{J_1}\int_{J_1} |g(s,u,\varphi(u)) - g(s,u,\mu(u))|\,du\,ds \leq \ldots$$

$$\ldots \leq \|\varphi - \mu\|\,\delta M_3 + \|\varphi - \mu\|\,\delta M_4 < 2/3\,\|\varphi - \mu\|$$

pois r é menor que 1, logo, T é contração. Como $\mathcal{C}(J_1, B)$ é de Banach segue que existe um único ponto fixo $\varphi \in \mathcal{C}(J_1, B)$ de T, isto é, uma única função contínua (e diferenciável) $\varphi : J_1 \to B$ tal que $T\varphi = \varphi$, ou seja, satisfazendo

$$(1\text{-}2.4) \qquad \varphi(t) = x^0 + \int_a^t f(s, \varphi(s))\,ds + \int_a^t \int_a^s g(s, u, \varphi(u))\,du\,ds$$

que, em virtude do Lema 1 é a única solução do p.v.i.(a) no intervalo J_1, encerrando assim a demonstração do teorema.

Se $a > o$, com raciocínio análogo se pode mostrar que existe $\gamma > o$ tal que o p.v.i.(a) tem uma única solução no intervalo $[a-\gamma, a]$ cuja expressão é ainda dada por (1-2.4), de forma que podemos enunciar o seguinte

<u>Teorema 1-2.2</u>. Se $a > o$ e o s.e.i.d.(a)(1-1.1) satisfizer à hipótese (A), então existe $\varepsilon > o$ tal que o p.v.i.(a) tem uma única solução no intervalo $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, a qual é dada por (1-2.5).

§ 3. <u>Prolongamento de soluções</u>.

Diremos que uma solução φ do s.e.i.d.(a)(1-1.1) definida em um intervalo J é prolongável se existir uma

solução $\hat{\varphi}$ desse mesmo sistema, definida em um intervalo $\hat{J}$ tal que $\hat{J}$ contém J propriamente e $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t)$ para todo $t \in J$. Entre todas as soluções do p.v.i.(a) pelo menos uma é não prolongável. Isto é evidente se as soluções do p.v.i.(a) forem univocamente determinadas pelos seus valores iniciais (a,x^0) pois nesse caso duas soluções quaisquer que passem pelo ponto (a,x^0) coincidem em seu intervalo comum de definição. Este será o caso, como veremos, se o s.e.i.d.(a)(1-1.1) satisfizer à hipótese (A). No caso geral, a existência de uma solução não prolongável segue do Lema de Zorn. Se φ é uma solução não prolongável, ela é uma <u>solução saturada</u> e o seu intervalo de definição é chamado de <u>intervalo maximal</u> de φ.

<u>Teorema 1-3.1</u>. Se o s.e.i.d.(a)(1-1.1) satisfaz à hipótese (A) e φ é a solução do p.v.i.(a) em $[a,b]$ $(b>a)$, então φ pode ser estendida como a única solução do p.v.i.(a) à direita de b, isto é, a um intervalo $[a,c]$ onde $c > b$.

<u>Prova</u>. Consideremos o s.e.i.d.(b) auxiliar, abaixo:

$$(1\text{-}3.1) \qquad y'(t) = F(t,y(t)) + \int_b^t G(t,s,y(s))ds$$

onde $F(t,y) = f(t,y) + \int_a^b g(t,s,\varphi(s))ds$ e $G(t,s,y) = g(t,s,y)$.

Em seguida, consideremos o p.v.i.(b)

(1-3.2) $$y(b) = \varphi(b)$$

relativo ao s.e.i.d.(b)(1-3.1).

É claro que, em virtude de sua definição, se o s.e.i.d.(a)(1-1.1) satisfaz à hipótese (A), então o s.e.i.d.(b)(1-3.1) também a satisfaz. Portanto, de acordo com o teorema (1-2.1) o p.v.i.(b)(1-3.2) tem uma única solução ψ definida em um intervalo $[b,c]$ com $c>b$. Definamos

(1-3.4) $$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{para } t \in [a,b] \\ \psi(t) & \text{para } t \in [b,c] . \end{cases}$$

É claro que, assim definida, $\bar{\varphi}$ é contínua em $[a,c]$ e $\bar{\varphi}$ é solução do p.v.i.(a) em $[a,b]$. Como $\bar{\varphi}$ é também solução do p.v.i.(b)(1-3.2) em $[b,c]$, temos, para $t \geq b$,

$$\bar{\varphi}'(t) = f(t,\bar{\varphi}(t)) + \int_a^b g(t,s,\bar{\varphi}(s))\,ds + \int_b^t g(t,s,\bar{\varphi}(s))\,ds =$$

$$= f(t,\bar{\varphi}(t)) + \int_a^t g(t,s,\bar{\varphi}(s))\,ds$$

em virtude de (1-3.4). Segue que $\bar{\varphi}$ é solução do p.v.i.(a) em $[a.c]$. A unicidade segue da seguinte observação:

Seja $\mu : [a,c] \to R^n$ uma solução do p.v.i.(a). En

tão, para $t \geq b$, temos

$$\mu'(t) = f(t,\mu(t)) + \int_a^b g(t,s,\mu(s))\,ds + \int_b^t g(t,s,\mu(s))\,ds =$$

$$= f(t,\mu(t)) + \int_a^b g(t,s,\varphi(s))\,ds + \int_b^t g(t,s,\mu(s))\,ds\,,$$

em virtude de φ ser a única solução do p.v.i.(a) em $[a,b]$. Portanto, μ é solução do s.e.i.d(b)(1-3.1) em $[b,c]$ com, é claro, $\mu(b) = \varphi(b)$.

<u>Teorema 1-3.2</u>. Se φ é solução do p.v.i.(a) definida e limitada em $[a,b)$ $(b<\infty)$, então φ pode ser estendida como solução do p.v.i.(a) ao intervalo $[a,b]$.

<u>Prova</u>. Como φ é contínua e limitada em $[a,b)$, temos que

$$\left\{(t,\varphi(t)) : t \in [a,b)\right\} \subset U \subset R^{n+1}$$

onde U é um retângulo compacto. Como f e g são contínuas, são também limitadas em U e $[a,b] \times U$ respectivamente. Sejam M_1 e M_2 majorantes para f e g nesses domínios. Dada uma sequência qualquer $\{t_n\} \subset [a,b)$, crescente, tal que $t_n \to b$, temos, para $m > n$,

$$|\varphi(t_m) - \varphi(t_n)| \leq \int_{t_n}^{t_m} |f(s,\varphi(s))|\,ds +$$

$$\int_{t_n}^{t_m} \int_a^s |g(s,u,\varphi(u))|\,du\,ds \leq M_1(t_m-t_n) + M_2(b-a)(t_m - t_n) \to o$$

quando $n \to \infty$. Isto mostra que $\{\varphi(t_n)\}$ é uma sequência de Cauchy no R^n, o qual é completo, logo, existe o $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = \varphi(b^-)$. Como $\{t_n\}$ é arbitrária, vem

$$\lim_{t\to b^-} \varphi(t) = \varphi(b^-) .$$

Definimos $\psi: [a,b] \to R^n$ por

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{para } t \in [a,b) \\ \psi(b) = \varphi(b^-) . \end{cases}$$

É claro que, assim definida, ψ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $[a,b)$. Por outro lado,

$$|\psi'(t_m) - \psi'(t_n)| \leq |f(t_m,\psi(t_m)) - f(t_n,\psi(t_n))| +$$

$$+ \int_{t_n}^{t_m} |g(t_m,s,\psi(s))|\,ds + \int_a^{t_m} |g(t_m,s,\psi(s)) - g(t_n,s,\psi(s))|\,ds =$$

$= L_1 + L_2 + L_3$, onde $\{t_n\}$, m e n estão nas mesmas condições anteriormente descritas.

Mas,

$L_1 \to 0$ quando $n \to \infty$ devido às continuidades de f e de ψ,

$L_2 \to 0$ quando $n \to \infty$, pois $0 \leq L_2 \leq M_2(t_m - t_n)$, e

$L_3 \to 0$ quando $n \to \infty$ devido às continuidades de g e de ψ.

Portanto, $\{\psi'(t_n)\}$ é de Cauchy. Pelas mesmas razões já mencionadas, existe o $\lim_{t \to b^-} \psi'(t)$. A expressão de ψ' em $[a,b)$ nos mostra que

$$\psi'(b) = f(b,\psi(b)) + \int_a^b g(b,s,\psi(s))ds = \lim_{t \to b^-} \psi'(t),$$

e que, portanto, é solução do p.v.i.(a) em $[a,b]$.

Os teoremas 1-3.1 e 1-3.2 conduzem-nos ao seguinte resultado fundamental:

<u>Teorema 1-3.3</u>. Se o s.e.i.d.(a)(1-1.1) satisfaz à hipótese (A), então o p.v.i.(a) admite uma única solução φ não prolongável à direita, definida no intervalo $[a,b)$ onde $b = \infty$ ou $\lim_{t \to b^-} |\varphi(t)| = \infty$.

<u>Prova</u>. O teorema 1-2.1 afirma que existe uma única solução do p.v.i.(a) definida em um intervalo $[a,a+\delta]$ suficientemente pequeno. De acordo com o teorema 1-3.1,

essa solução pode ser prolongada como a única solução do p.v.i.(a) a um intervalo $[a,a+\varepsilon]$, $\varepsilon > \delta$, e assim sucessivamente. Tomemos uma solução $(\psi, [a,c])$, qualquer, do p.v.i.(a) e ponhamos

$$b = \sup\left\{\alpha \in R:\ (\varphi_\alpha, [a,\alpha]) \text{ é prolongamento de } (\psi, [a,c])\right\}.$$

É fácil de ver que, devido à unicidade de cada solução $(\varphi_\alpha, [a,\alpha])$, b não depende da particular $(\psi, [a,c])$.

Vamos construir uma solução $(\varphi, [a,b))$ do p.v.i.(a):

Seja $t^* \in [a,b)$ um ponto arbitrariamente fixado. Pela definição de b, existe uma solução $(\varphi_\beta, [a,\beta])$ tal que $t^* \in [a,\beta]$. Então, pomos $\varphi(t^*) = \varphi_\beta(t^*)$. O valor $\varphi(t^*)$ não depende da particular φ_β escolhida, ainda em virtude da unicidade de cada $(\varphi_\alpha, [a,\alpha])$. Assim, a função φ está univocamente definida sobre todo o intervalo $[a,b)$ e é solução do p.v.i.(a) nesse intervalo, pois coincide com uma solução do p.v.i.(a) nas vizinhanças de cada ponto $t^* \in [a,b)$.

Seja agora $(\mu, [a,b'))$ um prolongamento de $(\varphi, [a,b))$, isto é, uma solução do p.v.i.(a) tal que $b' \geq b$. Como $(\mu, [a,b'))$ é também prolongamento de $(\psi, [a,c])$, segue que $b' \leq b$, devido à definição de b. Em virtude da uni

cidade de cada solução do p.v.i.(a), concluímos φ e μ coincidem.

Decorre dessas considerações que $(\varphi, [a,b))$ é a única solução do p.v.i.(a) não prolongável à direita. As outras afirmativas do teorema são consequências imediatas dos teoremas 1-3.1 e 1-3.2.

Observe-se que todos os resultados deste parágrafo podem, sem maiores dificuldades, ser transpostos para a esquerda do ponto a.

§ 4. Dependência contínua da solução em relação à condição inicial.

Seja P um ponto de E. Se as soluções do s.e.i.d.(a) que passam por P forem univocamente determinadas por P, isto é, se duas soluções quaisquer que passem por P coincidirem em seu intervalo comum de definição, diremos que P é um ponto ordinário e poremos.

$$O = \{P \in E: P \text{ é ordinário}\}.$$

De acordo com os resultados dos parágrafos precedentes, temos

$$E(a) \subset O$$

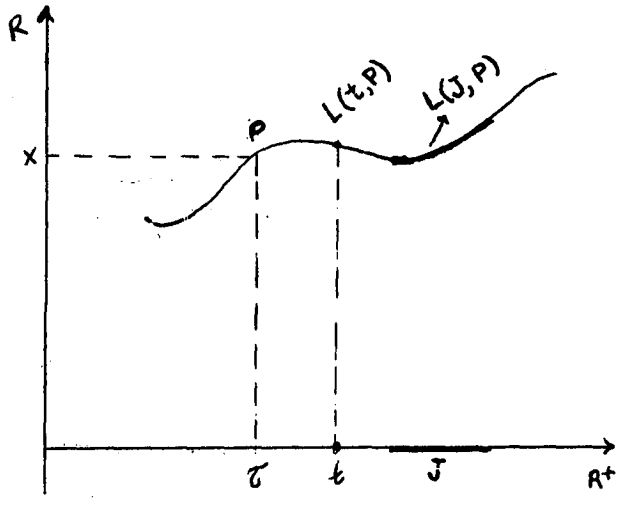
se o s.e.i.d.(a)(1-1.1) satisfizer à hipótese (A).

Seja agora φ uma solução do s.e.i.d.(a)(1-1.1), saturada, passando pelo ponto $P=(\tau,x)\in E$. Para ressaltar o fato "passando por P", escreveremos $\varphi(.,P)$ para φ e denotaremos por $\Delta(P)$ ao intervalo de definição de $\varphi(.,P)$. Por $L(t,P)$ indicamos o ponto $(t,\varphi(t,P))$. Se $J\subset\Delta(P)$ é um intervalo, pomos $L(J,P)=\{(t,\varphi(t,P)) : t\in J\}$. Para simplificar, poremos $L(\Delta(P),P)=L(P)$ e, também,

$$L+(P)=\{(t,\varphi(t,P)): t\geq\tau\}.$$

$L(P)$ chama-se "integral do s.e.i.d.(a)(1-1.1) passando pelo ponto P", $L(J,P)$ chama-se "arco de integral..." e $L+(P)$ chama-se semi-integral saturada à direita.

Se $P\in O$, ou mais particularmente, se $P=(a,x)$ e o s.e.i.d(a)(1-1.1) satisfizer à hipótese (A), então as notações e denominações acima tornam-se incisivas, de forma a podermos dizer "a curva integral ...", "a semi-integral saturada ..." etc. A figura abaixo ajuda a esclarecer estes conceitos, no plano:



No que segue, sem perda de generalidade, vamos fixar $a = o$.

<u>Teorema 1-4.1</u>. Seja $\{P_n\} \subset O$ $(P_n = (t_n, x^n))$, $n=1,2,\ldots$ uma sequência de pontos convergindo para o ponto $P_o = (t_o, x^o) \in O$. Então, dado $b > t_o$ tal que $[t_o, b] \subset \Delta(P_o)$, para todo índice n suficientemente grande, vamos ter

$$[t_o, b] \subset \Delta(P_n) \quad \text{e}$$

$$\varphi(\cdot, P_n) \to \varphi(\cdot, P_o) \text{ uniformemente em } [t_o, b].$$

<u>Prova</u>. Suponhamos para fixar as idéias que $t_o > o$. O caso $t_o = o$ é facilmente dedutível da demonstração abaixo.

Como E é normal, existe $X \subset E$, fechado, tal que $L([t_o, b], P_o) \subset \text{int}(X,E)$, onde $\text{int}(X,E)$ denota o interior de X relativamente a E. Como $\varphi(\cdot, P_o)$ é contínua, podemos tomar X limitado, ou seja, compacto. Seja M um número positivo tal que

$$M \geq \sup \{|f(t,x)| : (t,x) \in X\};$$

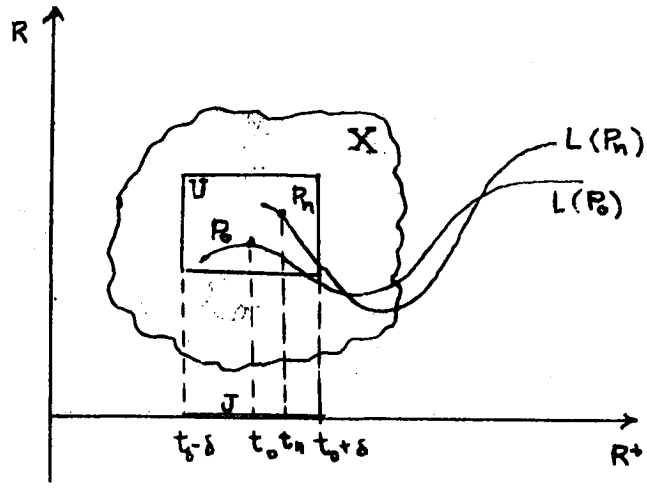
$$M \geq \sup \{|g(t,s,x)| : (t,s,x) \in [o,b] \times X\},$$

cuja existência é garantida pelas continuidades de f e g.

Tomemos δ, $o < \delta < 1$, tão pequeno que o retângulo

$$U = \left\{(t,x) \in R^{n+1} : |t-t_o| \leq \delta \quad e \quad |x-x^o| \leq 2M(2+b)\right\}$$

esteja contido em X, (veja a figura abaixo).



Para simplificar, ponhamos $J = [t_o - \delta, t_o + \delta]$.

Existe m tal que $n>m$ acarreta $t_n \in J$ e $|x^n - x^o| < M\delta$. Então, se $n>m$, o ponto P_n pertence a U e $L(P_n)$ atinge a fronteira de U. Além disso,

$$|\varphi(t, P_n) - x^n| \leq M|t-t_n| + M|t-t_n| \; b < 2M\delta + 2M\delta b = 2M\delta(1+b)$$

para todo $t \in J$. Logo,

$$|\varphi(t, P_n) - x^o| \leq |x^n - x^o| + 2M\delta(1+b) = 2M\delta(2+b)$$

para todo $n>m$ e todo $t \in J$, o que significa que para $n>m$ $\varphi(., P_n)$ está definida em J e $L(J,P_n) \subset U$. Mais ainda, a sequência $\varphi(., P_n)$ é equicontínua em J:

$$|\varphi(t_1,P_n) - \varphi(t_2,P_n)| \leq M|t_2-t_1| + Mb|t_2-t_1| \leq 2M\delta(1+b).$$

Portanto, pelo Lema de Ascoli, existe uma subsequência $\{\varphi(.,P_{n_k})\}$ convergindo uniformemente para uma função contínua $\psi: J \to R^n$.

Temos que

$$(1\text{-}4.1) \qquad \varphi(t,P_n) = x^n + \int_{t_n}^{t} f(s,\varphi(s,P_n))\,ds +$$

$$+ \int_{t_n}^{t} \int_{o}^{s} g(s,u,\varphi(u,P_n))\,duds =$$

$$= x^n + \int_{t_o}^{t} f(s,\varphi(s,P_n))\,ds + \int_{t_o}^{t} \int_{o}^{s} g(s,u,\varphi(u,P_n))\,duds +$$

$$+ \int_{t_n}^{t_o} f(s,\varphi(s,P_n))\,ds + \int_{t_n}^{t_o} \int_{o}^{s} g(s,u,\varphi(u,P_n))\,duds$$

onde as duas últimas parcelas tendem a zero quando $n \to \infty$, devido ao fato de que não excedem, respectivamente, a $M|t_n - t_o|$ e $M|t_n - t_o|b$, e $|t_n - t_o| \to o$ quando $n \to \infty$.

Também, $f(., \varphi(., P_{n_k})) \to f(., \psi(.))$ uniformemente em J devido à continuidade de f e à convergência uniforme de $\varphi(., P_{n_k})$ a ψ. Pelas mesmas razões, $g(s,.\varphi(.,P_{n_k}))$ converge uniformemente para $g(s,.,\psi(.))$. Pondo $n = n_k$ em (1-4.1) e fazendo $k \to \infty$ vem que

$$\psi(t) = x^o + \int_{t_o}^{t} f(s,\psi(s))\,ds + \int_{t_o}^{t} \int_{o}^{s} g(s,u,\psi(u))\,duds$$

no intervalo J. O lema 1 e o fato de que $P_o \in O$ acarretam que $\varphi(t, P_o) = \psi(t)$ para todo $t \in J$. Assim, toda subsequência convergente de $\{\varphi(., P_n)\}$ converge uniformemente para $\varphi(., P_o)$ em J. Isto estabelece a existência de um número $t' > t_o$ tal que $\varphi(., P_n)$ está definida em $[t_o, t']$ para todo índice n suficientemente grande e tal que $\varphi(., P_n)$ converge uniformemente para $\varphi(., P_o)$ em $[t_o, t']$ quando $n \to \infty$. Seja t^* o supremo de todos tais $t' \leq b$. Escolhamos ε, $o < \varepsilon < 1$ tal que $U^* = \{(t,x): |t-t^*| \leq 2\varepsilon,\ |x - \varphi(t^*, P_o)| \leq 4M\varepsilon\}$ esteja contido em X.

Escolha também t" tal que $t^* - \varepsilon < t'' < t^*$ e

$|\varphi(t^*, P_o) - \varphi(t'', P_o)| < M\varepsilon$.

Desta forma, o retângulo

$U'' = \{(t,x): |t-t''| \leq \varepsilon,\ |x-\varphi(t'', P_o)| \leq 3M\varepsilon\}$

está contido em U^*, pois se $(t,x) \in U''$, então

$|t - t^*| = |t - t'' + t'' - t^*| \leq |t - t''| + |t'' - t^*| \leq 2\varepsilon$ e

$|x - \varphi(t^*, P_o)| \leq |x - \varphi(t'', P_o)| + |\varphi(t^*, P_o) - \varphi(t'', P_o)| \leq 4M\varepsilon$.

Se pusermos $y^n = \varphi(t'', P_n)$ e $y^o = \varphi(t'', P_o)$ então a sequência $\{(t'', y^n)\}$ converge para (t'', y^o) quando $n \to \infty$. Portanto, pela primeira parte do teorema, $\varphi(., P_n)$ está definida no intervalo $[t'', t'' + \varepsilon]$ para n suficientemente grande e converge uniformemente para $\varphi(., P_o)$ nesse intervalo. O mesmo ocorre então com o intervalo $[t_o, t'' + \varepsilon]$. Como $t'' + \varepsilon > t^*$, isto contradiz a definição de t^* a menos que seja $t^* = b$, o que encerra a demonstração do teorema.

As demonstrações dos teoremas abaixo baseiam-se no teorema 1-4.1.

<u>Teorema 1-4.2</u>. Seja $\{P_n\} \subset O$ uma sequência de pontos convergindo para o ponto $P_o \in O$. Sejam ainda X um subconjunto aberto de E e <u>a</u> e <u>c</u> ,números finitos tais que $[a, c] \subset \Delta(P_o)$ e $L([a, c], P_o) \subset X$. Então, para todo índice k suficientemente grande teremos

$$[a, c] \subset \Delta(P_k) \quad \text{e}$$

$$L([a, c], P_k) \subset X.$$

<u>Teorema 1-4.3</u>. Sejam $\{P_n\} \subset O$ uma sequência convergindo para o ponto $P_o \in O$, $\tau \in \Delta(P_o)$ e X um subconjunto aberto de E tais que $L(\tau, P_o) \in X$. Então, para

todo índice k suficientemente grande, $L(\tau,P_k)$ é um ponto bem definido, $L(\tau,P_k) \in X$ e $L(\tau,P_k) \to L(\tau,P_o)$ para $k \to \infty$.

§ 5. Existência e prolongamento de soluções fora do corte.

Teorema 1-5.1. Se o s.e.i.d.(o)(1-1.1) satisfaz à hipótese (A) e $P = (a,x) \in E$, $a > o$, então existe uma solução φ desse sistema satisfazendo $\varphi(a) = x$, definida em um intervalo $[a, a+\delta]$ suficientemente pequeno.

Prova. Seja $\mu: [o,a] \to R^n$ uma função contínua qualquer, fixada, tal que $\mu(a) = x$. Consideremos em seguida, o s.e.i.d.(a) auxiliar

$$(1\text{-}5.1) \qquad y'(t) = F(t,y(t)) + \int_a^t G(t,s,y(s))ds$$

onde $F(t,y(t)) = f(t,y(t)) + \int_a^t g(t,s,\mu(s))ds$ e $G(t,s,y) = g(t,s,y)$, e também o p.v.i(a)

$$(1\text{-}5.2) \qquad y(a) = x$$

a ele associado.

O s.e.i.d.(a)(1-5.1) é semelhante ao s.e.i.d.(a)

(1-1.1) e, é fácil de ver, satisfaz também à hipótese(**A**) Estamos, portanto, nas condições do enunciado do teorema 1-2.1. Isto significa que o p.v.i.(a)(1-5.2) possui uma única solução ψ definida em um intervalo $[a,a+\delta]$ suficientemente pequeno. Ponhamos

$$\varphi(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{para } t \in [o,a] \\ \psi(t) & \text{para } t \in [a,a+\delta] \end{cases}$$

É claro que φ assim definida é contínua e que

$$\varphi'(t) = F(t,\varphi(t)) + \int_a^t G(t,s,\varphi(s))ds \quad \text{para} \quad t \in [a,\ a+\delta] ,$$

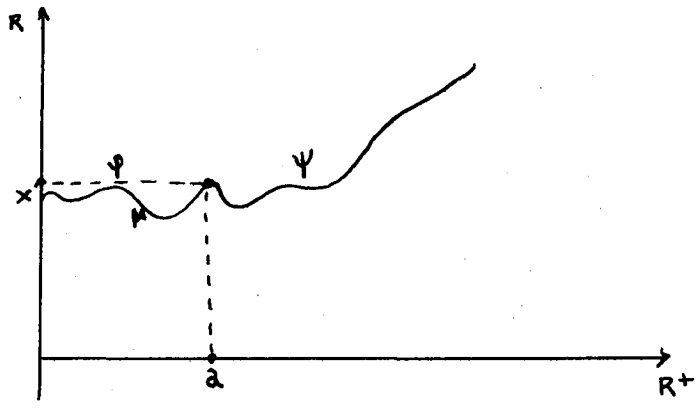
ou, levando em conta as expressões de F e G, que

$$\varphi'(t) = f(t,\psi(t)) + \int_o^a g(t,s,\mu(s))ds + \int_a^t g(t,s,\psi(s))\, ds \text{ pa-}$$

ra $t \in [a,a+\delta]$. Agora, à vista da definição de φ, podemos escrever

$$\varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) + \int_o^t g(t,s,\varphi(s))\, ds \quad \text{para} \quad t \in [a,a+\delta],$$

o que significa que, para $t \in [a,a+\delta]$, φ é solução do s.e.i.d.(o)(1-1.1) (veja figura seguinte), como desejávamos mostrar.



É interessante observar que φ não é, em geral, solução do s.e.i.d.(o)(1-1.1) em $[o,a]$.

Teorema 1-5.2. Se o s.e.i.d.(o)(1-1.1) satisfaz à hipótese (A), $P=(a,x)\in E$, $a>o$, e φ é uma solução desse sistema em $[a,b]$ $(b>a)$, então φ pode ser estendida como solução do s.e.i.d.(o)(1-1.1) a um intervalo $[a,c]$ onde $c>b$.

Prova. A prova deste teorema é inteiramente análoga à prova do teorema 1-3.1, utilizando-se aqui, o s.e.i.d.(a)(1-5.1) auxiliar.

Análogos dos teoremas 1-3.1 e 1-3.2 também são válidos para o s.e.i.d.(o)(1-1.1) para o caso do p.v.i.(a)(1-5.2) de modo a nos conduzir à formulação da

<u>Hipótese (B)</u>. O s.e.i.d.(o)(1-1.1) é tal que:

1) por cada ponto $P \in E$ passa pelo menos uma integral $L(P)$ desse sistema;

2) toda integral $L(P)$ desse sistema é prolongável à direita até atingir a fronteira de E;

3) $E(o) \subset O$,

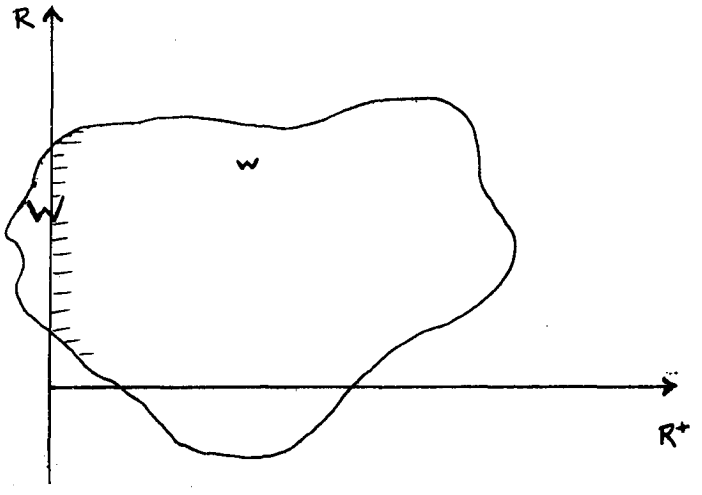
a qual, à vista dos resultados dos parágrafos anteriores, não é vasia, isto é, é satisfeita por pelo menos um s.e.i.d.

CAPÍTULO II

Desenvolvemos, neste capítulo, o método topológico de Wazewski para o s.e.i.d.(o)(1-1.1) quando é válida a hipótese (B). Como consequência, podemos usar os resultados sobre continuidade em relação às condições iniciais obtidos no Capítulo I, para os pontos de E(o).

§ 1. Tubo, ponto de saída, ponto de saída estrita, semi-integral assintótica, sombra esquerda.

Seja W um aberto do R^{n+1} tal que $E(o) \cap W \neq \emptyset$. Ponhamos $w = W \cap E$. Assim, w é um aberto de E. A todo conjunto w nas condições acima, chamamos tubo. Para simplificar, poremos $w(o) = E(o) \cap w$.



Se w é um tubo, $P \in w$ e L(P) é uma integral qual-

quer do s.e.i.d.(o)(1-1.1), diremos que L(P) é <u>assintótica</u> relativamente a w se $L+(P) \subset w$. O problema central deste capítulo será o da determinação de condições que garantam a existência de integrais assintóticas relativamente a um tubo qualquer dado, sem exibir explicitamente as soluções do s.e.i.d.(o)(1-1.1).

Vamos indicar por fr(w,E) a fronteira de w relativamente a E.

<u>Definição 2-1.1</u>. A um ponto $P = (\tau, x) \in fr(w,E)$ chamaremos de <u>ponto de saída</u> do s.e.i.d.(o)(1-1.1) relativamente a um tubo w se existir pelo menos uma integral L(P) desse sistema prolongável à esquerda e tal que $L([\tau - \delta, \tau), P) \subset w$, onde $\delta = \delta(L(P)) > o$ é suficientemente pequeno.

O conjunto de todos os pontos de saída será denotado por S.

<u>Definição 2-1.2</u>. A um ponto $P = (\tau, x) \in fr(w,E)$ chamaremos de <u>ponto de saída estrita</u> do s.e.i.d.(o)(1-1.1) relativamente a um tubo w se para toda integral L(P) desse sistema, ocorrer

$$(*) \qquad L((\tau, \tau + \delta], P) \subset ext(w,E)$$

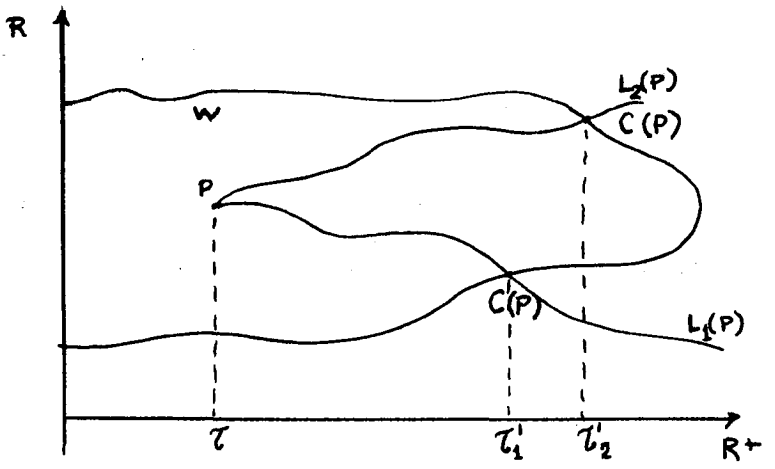
(*) ext(w,E) = exterior de w relativamente a E.

e, se $L(P)$ fôr prolongável à esquerda, que $L([\tau-\delta,\tau), P) \subset w$, onde $\delta = \delta(L(P)) > o$ é suficientemente pequeno.

O conjunto de todos os pontos de saída estrita será denotado por S^*.

É interessante observar, a estas alturas, que as definições de ponto de saída e de ponto de saída estrita, dadas por Wazewski [22] e conservadas em todas extensões mencionadas (com exceção da extensão do prof. N. Onuchic [17]), implicavam a inclusão "$S^* \subset S$". Já aqui, em contrapartida, há uma reviravolta completa: S e S^* podem, a rigor, manter qualquer relação entre si, sem que seja alterado o caráter extensivo de nossas definições, isto é, as "antigas" são um caso particular destas.

<u>Definição 2-1.3</u>. Sejam w um tubo e $P = (\tau, x)$ um ponto de w. Se alguma $L(P)$ não fôr assintótica relativamente a w, ao ponto $Q = L(\tau', P) \in fr(w, E)$ para o qual $L([\tau, \tau'), P) \subset w$, chamaremos de consequente do ponto P, e escreveremos $Q = C(P)$.



A um ponto genérico $P \in w$ corresponde, em geral, uma infinidade de consequentes. Observe-se, no entanto, que se $P \in O$ então o $C(P)$ é univocamente determinado por P. Este será o caso, por exemplo, se $P \in E(o)$.

Vamos pôr

$$G(o) = \{P \in w(o) : \text{existe o } C(P)\}$$

e chamar ao conjunto $G(o)$ de sombra esquerda do s.e.i. d.(o)(1-1.1) relativamente a w.

De acordo com as observações e definições acima, a correspondência $P \to C(P)$ entre pontos de $G(o)$ e S, respectivamente, é uma aplicação bem definida, a qual será indicada por K, isto é, $K: G(o) \to S$ e $K(P) = C(P)$.

Temos o seguinte

<u>Teorema 2-1.1.</u> Se $P = (o,x) \in G(o)$ e $C(P) \in S^*$ a aplicação K é contínua no ponto P.

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Biblioteca

<u>Prova</u>. Seja $\{P_n\}$, $n = 1,2,\ldots$, uma sequência de pontos de $G(o)$ convergindo para o ponto P. Devemos mostrar que $K(P_n)$ converge para $K(P)$. Vamos pôr $K(P) = C(P) = (\tau, y)$, $P_n = (o, x^n)$. Suponhamos dado $\varepsilon > o$. Então, para todo índice n suficientemente grande, estarão satisfeitas simultaneamente as seguintes relações

1) $[o, \tau + \delta] \subset \Delta(P)$

2) $o < \tau - \delta < \tau < \tau + \delta$

3) $L([o, \tau), P) \subset w$

4) $L((\tau, \tau + \delta], P) \subset ext(w,E)$

5) $|L(t',P) - L(t'',P)| < \varepsilon/2$ para todos t', t'' do intervalo $[\tau - \delta, \tau + \delta]$, onde $\delta = \delta(\varepsilon) > o$. A última desigualdade é devida à continuidade de $L(.,P)$. De acordo com os teoremas 1-4.1, 1-4.2 e 1-4.3 vamos ter, para todo índice suficientemente grande, à vista de 1), 2), 3) e 4):

6) $[o, \tau + \delta] \subset \Delta(P_n)$

7) $L([o, \tau - \delta), P_n) \subset w$

8) $L(\tau + \delta, P_n) \in ext(w,E)$

Como w é aberto, tendo em vista 7) e 8) segue que $L([\tau - \delta, \tau + \delta], P_n) \cap fr(w,E) \neq \emptyset$. Seja τ_n o menor

valor de $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$ tal que $L(\tau_n, P_n) \in fr(w,E)$.

Segue que $L([0, \tau_n), P_n) \subset w$, isto é, que $Q_n = L(\tau_n, P_n)$ é consequente de P_n:

$$Q_n = K(P_n).$$

Usando 6) e o teorema 1-4.1 concluímos que $L(.,P_n)$ converge uniformemente para $L(.,P)$ em $[\tau - \delta, \tau + \delta]$.

Então, para todo n suficientemente grande, vamos ter

$$|L(\tau_n,P) - L(\tau_n,P_n)| < \varepsilon/2, \quad \text{ou seja,}$$

$$|K(P) - K(P_n)| = |L(\tau,P) - L(\tau_n,P_n)| \leq |L(\tau,P) - L(\tau_n,P)| +$$

$$+ |L(\tau_n,P) - L(\tau_n, P_n)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon ,$$

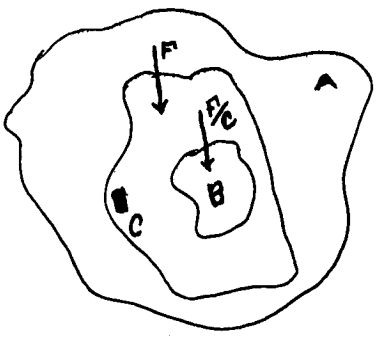
como devíamos mostrar.

§ 2. Retrato.

Definição 2-2.1. Sejam A um espaço topológico e B, um subconjunto de A. Dizemos que B é retrato de A se existir uma aplicação contínua $F: A \to B$ tal que $F(P) = P$ para todo $P \in B$. Neste caso, a aplicação F é chamada de retração.

<u>Lema 2</u>. Se B é retrato de A e $B \subset C \subset A$ então B é retrato de C.

<u>Prova</u>. Se B é retrato de A, existe uma retração $F: A \to B$.



A restrição $F/C: C \to B$ é ainda contínua e satisfaz a definição de retração.

<u>Teorema 2-2.1</u>. Se $S \subset S^*$ a aplicação $K: G(o) \cup S \to S$ definida por

$K(P) = C(P)$ se $P \in G(o)$

$K(P) = P$ se $P \in S$

é contínua.

<u>Prova</u>. Como $G(o) \subset w$ que é aberto, nenhuma sequência de pontos de $fr(w,E)$, em particular de S, pode convergir para ponto de $G(o)$. Logo, é suficiente mostrar que para toda sequência $\{P_n\} \subset G(o)$, $n = 1,2, \ldots$, convergindo para um ponto $P \in G(o) \cap S$ teremos $K(P_n) \to P$, uma vez que o caso $P \in G(O)$ já foi coberto pelo teorema anterior.

Sejam então $\{P_n\}$ e P nas condições acima. Suponhamos dado $\varepsilon > o$. Ponhamos $P_n = (o, x^n)$, $P = (o, x)$. Como

$P \in S^*$ e $P \in E(o)$, a única $L(P)$ é tal que

$L((o, \delta], P) \subset ext(w, E)$ para $\delta > o$ suficientemente pequeno. De acordo com o teorema 1-4.1, teremos, para todo n suficientemente grande, $[o, \delta] \subset \Delta(P_n)$ e, de acordo com o teorema 1-4.3, $L(\delta, P_n) \in ext(w, E)$. Devido à continuidade de $L(., P)$ podemos escolher δ tão pequeno que

1) $|L(t, P) - P| < \varepsilon/2$ (observe que $P = L(o, P)$), para todo $t \in [o, \delta]$.

Como $P_n = L(o, P_n) \in w$ e $L(\delta, P_n) \in ext(w, E)$, existe $o < \tau_n < \delta$ tal que $L(\tau_n, P_n) \in fr(w, E)$ e $L([o, \tau_n), P_n) \subset w$. Assim, é claro que $L(\tau_n, P_n) = C(P_n) = K(P_n)$. De acordo com o teorema 1-4.1, para todo índice n suficientemente grande, vamos ter, em $[o, \delta]$, $|L(t, P) - L(t, P_n)| < \varepsilon/2$. Como consequência, teremos também

2) $|L(\tau_n, P) - L(\tau_n, P_n)| < \varepsilon/2$.

De 1) e 2) vem

$$|K(P_n) - P| = |L(\tau_n, P_n) - P| \leq |L(\tau_n, P_n) - L(\tau_n, P)| \quad +$$

$+ \left|L(\tau_n, P) - P\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, como devíamos mostrar.

Corolário 2-2.1. Se $S \subset V \subset S^*$, a aplicação $K: G(o) \cup V \to V$ definida por

$K(P) = C(P)$ se $P \in G(o)$

$K(P) = P$ se $P \in V$

é retração.

Prova. Este corolário é uma consequência imediata da definição de retração, do lema 2 e do teorema 2-2.1.

§ 3. Análogo do Teorema de Wazewski, Conjunto Polifacial Regular, Conjunto Polifacial Generalizado.

Teorema 2-3.1. Se $S \subset V \subset S^*$ e existe um conjunto Z, $Z \subset w(o) \cup V$ tal que $Z \cap V$ é retrato de V e $Z \cap V$ não é retrato de Z, então existe pelo menos um ponto $P \in Z - V$ tal que a integral $L(P)$ é assintótica relativamente a w.

Prova. Suponhamos que o teorema seja falso. Então, a todo ponto $P \in Z-V$ corresponde um consequente $C(P)$, isto é,

$$(Z - V) \subset G(o).$$

Como $Z = (Z-V) \cup (Z \cap V)$, segue que

$$(2\text{-}3.1) \qquad Z \subset G(o) \cup V.$$

Como a aplicação K do corolário 2-2.1 é uma retração de $G(o) \cup V$ em V e, por hipótese, existe uma retração F de V em $Z \cap V$, a composta $K \circ F: G(o) \cup V \to Z \cap V$ é ainda uma retração. Este último fato, a relação (2-3.1) e o Lema 2 acarretam que $Z \cap V$ é retrato de Z, o que é absurdo, logo, o teorema é verdadeiro.

O teorema acima é um análogo do teorema de Wazewski [22] e, foi formulado para o caso das equações diferenciais funcionais com retardamento por N.Onuchic [17].

Observemos agora que o teorema 2-3.1 só é válido quando $S \subset S^*$. Portanto, é importante indicar critérios segundo os quais ocorra a referida inclusão. De fato, este será o objetivo do restante deste capítulo.

Na maior parte das vezes em que se aplica o método topológico de Wazewski, o tubo w é limitado por um número finito de hipersuperfícies lisas, isto é, hipersuperfícies cujos planos tangentes dependem continuamente da posição do ponto de contato. Tais hipersuperfícies são definidas por equações do tipo

$$H(t,x) = o,$$

onde $H: R^{n+1} \to R$. Portanto, as condições sob as quais ocorra a inclusão $S \subset S^*$, podem ser dadas por algumas propriedades analíticas das funções que definem as mencionadas superfícies.

Com efeito, suponhamos que a função $H: R^{n+1} \to R$ seja de classe C^1, isto é, que possua todas as derivadas de primeira ordem contínuas. Seja P um ponto de E e L(P) uma integral do s.e.i.d.(o)(1-1.1) passando por P. Ponhamos

$$h(t) = H(L(t,P)).$$

Se $P = (\tau, x)$, à derivada $h'(\tau)$ chamamos de "inclinação H no ponto P, relativamente à curva integral L(P)" Para individualizá-la, escreveremos

$$D_{L(P)}H = h',$$

isto é,

$$D_{L(P)}H(P) = h'(\tau) = \frac{\partial H}{\partial t}(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}(P) \cdot x_i'(\tau),$$

onde $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ é a solução do s.e.i.d.(o)(1-1.1) correspondente à integral L(P). Levando em conta este último fato, vem

$$D_{L(P)}H(P) = \frac{\partial H}{\partial t}(P) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}(P) \cdot \left[f_i(P) + \int_o^{\tau} g_i(\tau, s, x(s))ds \right].$$

A inclinação de H no ponto P relativamente à integral L(P) será dita positiva (negativa) se $D_{L(P)}H(P) > o$ $(< o)$.

Suponhamos que $H(P) = o$. Se a inclinação de H relativamente à integral L(P) fôr positiva, existe, evidentemente, um número $\delta = \delta(L(P)) > o$ tal que

$$(2\text{-}3.2) \qquad \begin{array}{ll} H(L(t,P)) < o & \text{para } \tau - \delta \leq t < \tau \quad (*) \\ H(L(t,P)) > o & \text{para } \tau < t \leq \tau + \delta. \end{array}$$

Se, por outro lado, a inclinação fôr negativa, existe $\gamma = \gamma(L(P)) > o$ tal que

$$(2\text{-}3.3) \qquad \begin{array}{ll} H(L(t,P)) > o & \text{para } \tau - \gamma \leq t < \tau \quad (*) \\ H(L(t,P)) < o & \text{para } \tau < t \leq \tau + \gamma. \end{array}$$

<u>Definição 2-3.1</u>. Sejam ℓ_i, $m_j : R^{n+1} \to R$ de classe C^1, $i = 1, \ldots, p$ e $j = 1, \ldots, q$;

$$w = \left\{ P \in E : \ell_i(P) < o,\ m_j(P) < o,\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q \right\}$$

$$\mathcal{L}_i = \left\{ P \in E : \ell_i(P) = o,\ \ell_k(P) \leq o,\ m_j(P) \leq o,\ \begin{array}{l} 1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq q \end{array} \right\}$$

para $1 \leq i \leq p$.

$$\mathcal{M}_j = \left\{ p \in E : m_j(P) = o,\ \ell_i(P) \leq o,\ m_k(P) \leq o,\ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq q \end{array} \right\}$$

para $1 \leq j \leq q$.

(*) Se L(P) fôr prolongável à esquerda.

Se $w \cap E(o) \neq \emptyset$ e para todos i, todo $P \in \mathcal{L}_i$ e toda $L(P)$ ocorrer $D_{L(P)} \ell_i(P) > o$, e para todos j, todo $Q \in \mathcal{N}_j$ e toda $L(Q)$ ocorrer $D_{L(Q)} \eta_j(Q) < o$, dizemos que w é um conjunto polifacial regular relativamente ao s.e.i.d.(o) (1-1.1) e chamamos aos conjuntos $\mathcal{L}_i$ e $\mathcal{N}_j$, respectivamente, de faces positivas e faces negativas de w. Como w é aberto em E, w é um tubo.

A característica essencial dos conjuntos polifaciais regulares é dada pelo seguinte

<u>Teorema 2-3.2</u>. Se w é um conjunto polifacial regular relativamente ao s.e.i.d.(o)(1-1.1) então

$$S \subset V \subset S^*$$

onde $V = U\mathcal{L}_i - U\mathcal{N}_j$.

<u>Prova</u>. É claro que $(U\mathcal{L}_i) \cup (U\mathcal{N}_j) = fr(w,E)$.

Seja $P = (\tau, x) \in \mathcal{L}_i$. Da definição de $\mathcal{L}_i$ segue que $\ell_i(P) = o$ e $D_{L(P)} \ell_i(P) > o$ para toda $L(P)$. As relações (2-3.2) mostram que para cada $L(P)$ existe em correspondência um $\delta > o$, $\delta = \delta(L(P))$ tal que $\ell_i(L(t,P)) > o$ para $\tau < t \leq \tau + \delta$, o que acarreta, pela definição de w,

que $L((\tau, \tau+\delta],P) \subset ext(w,E)$ e, portanto, $P \in S^*$. Como consequência, temos

(2-3.3) $$\cup \mathcal{L}_i - \cup \mathcal{M}_j \subset S^*.$$

Suponhamos agora que $P = (\tau, x) \in S$. Então, pelo menos uma integral do s.e.i.d.(o)(1-1.1) que passa por P é prolongável à esquerda de P. Seja L(P) uma tal integral. Se por ventura ocorresse que $P \notin (\cup \mathcal{L}_i - \cup \mathcal{M}_j)$ então teríamos que $P \in \cup \mathcal{M}_j$. Seja k um índice tal que $P \in \mathcal{M}_k$. De acordo com a definição de $\mathcal{M}_k$ teríamos $m_k = o$ e $D_{L(P)} m_k(P) < o$, o que acarretaria, à vista das relações (2-3.3) que

$$m_k(L(t,P)) > o \quad \text{para} \quad \tau - \delta \leq t < \tau$$

onde $\delta = \delta(L(P)) > o$ é tal que, evidentemente $[\tau-\delta, \tau] \subset \Delta(P)$.

De acordo com a definição de w, teríamos

$$L([\tau-\delta, \tau), P) \subset ext(w,E),$$

o que contradiria o fato pressuposto de que $P \in S$. Assim, concluímos que

(2-3.5) $$S \subset (\cup \mathcal{L}_i - \cup \mathcal{M}_j).$$

As relações (2-3.4) e (2-3.5) mostram que o teorema é verdadeiro, como queríamos.

No teorema acima reside toda a força do método de Wazewski.

De fato, ele dá substância ao teorema 2-3.1, mostrando, de uma forma não trivial, um método eficiente para a construção de conjuntos satisfazendo $S \subset S^*$.

Nas aplicações, frequentemente aparecem tubos para os quais é válida a inclusão $S \subset S^*$, mas que não se apresentam como conjuntos polifaciais regulares (veja [12]). Tal é o caso, por exemplo, do Conjunto Polifacial Regular Generalizado, cujo conceito foi introduzido em [16] e que agora passamos a considerar.

Suponhamos que f e g sejam de classe C^k em E e em $R^+ \times E$, respectivamente, e seja $H: R^{n+1} \to R$ uma função de classe C^{k+1}. Se $P = (\tau, x) \in E$ e $L(P)$ é uma integral do s.e.i.d.(o)(1-1.1) passando por P, vamos pôr $h(t) = H(L(t,P))$. Como f e g são de classe C^k, $h(t)$ é de classe C^{k+1} em $\Delta(P)$.

A derivada de ordem $q \leq k+1$ de $h(t)$ no ponto $t = \tau$ será denotada por $D^q_{L(P)} H(P)$.

Sejam agora $H_i: R^{n+1} \to R$, $i = 1, \ldots, m$, m funções de classe C^{k+1}. Consideremos os conjuntos

$$W = \{P \in E: H_i(P) < o, \quad i = 1, \ldots, m\},$$

$$\Gamma_i = \{P \in E: H_i(P) = o, \; H_j(P) \leq o, \quad j \neq i, \; 1 \leq j \leq m\}$$

para $i = 1, \ldots, m$.

Se $w \cap E(o) \neq \emptyset$, w, que é evidentemente um tubo, será chamado de Conjunto Polifacial Regular Generalizado (relativo ao s.e.i.d.(o)(1-1.1)) e os conjuntos Γ_i serão chamados de <u>faces</u> de w se, para cada i e cada $P \in \Gamma_i$ fôr válida uma das seguintes alternativas:

1) para cada L(P), o menor índice $q \leq k+1$ tal que $D^q_{L(P)}H(P) \neq o$ é ímpar e a derivada correspondente é positiva;

2) P não é ponto de saída.

Seja $\mathcal{L}_i$ o conjunto dos pontos de Γ_i para os quais é verificada a condição 1) e $\mathcal{M}_i$ o conjunto dos pontos de Γ_i para os quais é verificada a condição 2).

Para constatar-se se um ponto $P = (\tau, x) \in \Gamma_i$ está em $\mathcal{M}_i$ é suficiente uma das seguintes condições:

a) para cada L(P), o menor índice $q \leq k+1$ para o qual $D^q_{L(P)}H(P) \neq o$ é, ou ímpar com a correspondente derivada negativa, ou par com valor positivo da derivada;

b) existem, para cada L(P), $a = a(L(P))$ e $b = b(L(P))$ tais que $[a,b] \subset \Delta(P)$, $a < \tau \leq b$ e $L([a,b),P) \subset \Gamma_i$.

O seguinte teorema, de grande alcance, é um análo-

go do teorema 2-3.2 para conjuntos polifaciais generalizados, também devido a N.Onuchic [16].

<u>Teorema 2-3.3</u>. Se w é um conjunto polifacial regular generalizado então

$$S \subset V \subset S^*$$

onde $V = U\mathcal{L}_i - U\mathcal{M}_i$.

<u>Prova</u>. É claro que $fr(w,E) = U\Gamma_i$. Como nenhum ponto de $\mathcal{M}_i$ é de saída, temos que $S \cap \mathcal{M}_i = \emptyset$. Portanto, temos

$$(2\text{-}3.6) \qquad S \subset (U\Gamma_i - U\mathcal{M}_i) = U(\mathcal{L}_i \; U\mathcal{M}_i) - U\mathcal{M}_i = U\mathcal{L}_i - U\mathcal{M}_i .$$

Seja agora $P = (\tau, x) \in (U\mathcal{L}_i - U\mathcal{M}_i)$.

Então, $H_i(P) \leq o$ para $i = 1, \ldots, m$. Seja k um índice tal que $P \in \mathcal{L}_k$. Nestas condições, $H_k(P) = o$ e, pela condição 1), para cada $L(P)$, teremos

$$H_k(L(t,P)) > o \quad \text{para} \quad \tau < t \leq \tau + \delta$$

onde $\delta = \delta(L(P)) > o$ é suficientemente pequeno. Isto é a definição de w mostram que $L((\tau, \tau + \delta], P) \subset ext(w,E)$ ou seja, que $P \in S^*$. Daí, concluímos que

$$(2\text{-}3.7) \qquad U\mathcal{L}_i - U\mathcal{M}_i \subset S^* .$$

(2-3.6) e (2-3.7) mostram que a afirmação do teorema é verdadeira.

CAPÍTULO III

Neste capítulo, fazemos aplicações do método topológico de Wazewski para estudar as soluções de um sistema de equações integro-diferenciais de segunda ordem em um campo de forças repulsivas, quanto à assintoticidade, no sentido que, abaixo, tornamos preciso.

§ 1. Sistemas Repulsivos.

Por um sistema de equações integro-diferenciais de segunda ordem, entendemos o problema

$$(3\text{-}1.1)\quad x''(t)=f(t,x(t),x'(t))+\int_0^t g(t,s,x(t),x(s),x'(t),x'(s))\,ds$$

onde $f: R^+ \times R^{2n} \to R^n$ e $g: R^+ \times R^+ \times R^{4n} \to R^n$ são funções contínuas dadas e $x: [0,T) \to R^n$ e T são procurados.

O s.e.i.d. (3-1.1) é equivalente ao seguinte

$$(3\text{-}1.2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=f(t,x,y)+\displaystyle\int_0^t g(t,s,x(t),x(s),y(t),y(s))\,ds \end{cases}$$

no sentido de que a cada solução $x(t)$ do s.e.i.d.(3-1.1) corresponde a solução $(x(t),y(t))$ do s.e.i.d.(3-1.2) e vice-versa. No que segue, para simplificar as notações,

poremos $U = R^+ \times R^{2n}$, $g(t,s,x(t),x(s),y(t),y(s)) = g(\ldots)$ e, se $x(t)$ fôr uma solução do s.e.i.d. (3-1.1), a solução correspondente do s.e.i.d. (3-1.2) será denotada por $X(t)$, isto é,

$$X(t) = (x(t),\ y(t)) = (x(t), x'(t)).$$

Além disso, se $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ forem dois vetores do R^n, o seu produto escalar será denotado por $u.v$, isto é,

$$u.v = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i .$$

Formulamos a seguinte

<u>Hipótese (H)</u>. O s.e.i.d. (3-1.2) é tal que

1) satisfaz à hipótese (B);

2) $x(t).\left[f(t,x(t),y(t)) + \int_0^t g(\ldots)ds\right] \geq 0$ para toda função $x \in C^2([0,t], R^n)$, $t \geq 0$.

Quando quisermos ressaltar que o s.e.i.d. (3-1.2) satisfaz à condição 2) da hipótese (H), diremos que esse sistema é <u>repulsivo</u>. A condição 1), ressaltamos, significa que o corte $U(0) = \{0\} \times R^{2n}$ é constituído somente de pontos ordinários e que por todo ponto $P \in U$ passa pelo menos uma solução do s.e.i.d. (3-1.2), prolongável

até à fronteira de U, o que nos coloca à disposição o método topológico de Wazewski desenvolvido no Capítulo II.

Exemplo. Vamos construir aqui uma classe de sistemas de equações integro-diferenciais que satisfazem à hipótese (H).

Sejam $P: R \to R$, $Q: R^3 \to R$ e $h: R \to R$ funções contínuas tais que

$P(t) \geq o$, $Q(t,s,x) \geq o$ para $t \geq o$, $|Q(t,s,x_1) - Q(t,s,x_2)| \leq$

$\leq K(t,s)|x_1 - x_2|$ para todos $t,s,x_1,x_2 \in R$, onde $K: R^2 \to R$ é contínua e $K(s,t) \geq o$, $|h(x)| \leq M$ e $x.h(x) \geq o$ para todo $x \in R$. Por exemplo, $Q(t,s,x) = K(t,s)|x|$ e $h(x) = tg^{-1}x$ satisfazem às condições acima.

Definimos $F: R^+ \times R \to R$ por $F(t,x) = P(t).x$ e $G: R^+ \times R^+ \times R^2 \to R$ por $G(t,s,x,u) = Q(t,s,u).h(x)$.

Consideramos em seguida, o sistema

$$x''(t) = F(t,x(t)) + \int_0^t G(t,s,x(t),x(s))ds,$$

ou seja, o sistema

$$x''(t) = P(t).x(t) + \int_0^t Q(t,s,x(s)).h(x(t))ds,$$

que é do tipo (3-1.1) e é equivalente ao s.e.i.d.

$$(E\text{-}1)\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = P(t)\,.\,x(t) + \int_0^t Q(t,s,x(s)).h(x(t))ds, \end{cases}$$

que é do tipo (3-12).

Se pusermos $X(t) = (x(t),\ y(t))$, o (E-1) pode ser escrito como

$$(E\text{-}2)\quad X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P(t) & 0 \end{pmatrix} X(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ Q(t,s,x(s)).\,h(x(t)) \end{pmatrix} ds.$$

Fazendo

$$f(t,X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P(t) & 0 \end{pmatrix} X \quad \text{e}$$

$$g(t,s,x,u) = \begin{pmatrix} 0 \\ Q(t,s,u)\,.\,h(x) \end{pmatrix},$$

vemos que o s.e.i.d. (E-2) é um sistema do tipo

$$X'(t) = f(t,X(t)) + \int_0^t g(t,s,x(t),x(s))ds,$$

o qual difere do s.e.i.d.(o)(1-1.1) apenas no aparecimento de mais uma variável na expressão de g, que no entanto não está sujeita à integração: x(t).

Assim sendo, é fácil de ver que se mostrarmos que f e g satisfazem a condições análogas a (1-2.1) e (1-2.2), respectivamente, então, como consequência dos resultados

do Capítulo I, o (E-2) satisfará à hipótese (B), que é a condição 1) da hipótese (H). Passemos à demonstração deste fato:

$$|f(t,X_1) - f(t,X_2)| \leq \left\| \begin{pmatrix} o & 1 \\ P(t) & o \end{pmatrix} \right\| . |X_1 - X_2| \quad \text{para todos}$$

X_1, X_2 do R^2 e todo $t \in R^+$.

Logo, pondo $K_1(t) = \left\| \begin{pmatrix} o & 1 \\ P(t) & o \end{pmatrix} \right\|$ estabelecemos (1-2.1) para f.

$$|g(t,s,x,u_1) - g(t,s,x,u_2)| = |Q(t,s,u_1) . h(x) - Q(t,s,u_2).h(x)| \leq$$

$$\leq |h(x)| . |Q(t,s,u_1) - Q(t,s,u_2)| \leq MK(t,s)|u_1 - u_2| \quad \text{para}$$

todos $t, s \in R^+$ e todos $x, u_1, u_2 \in R$, devido às definições e propriedades de h,K e Q.

Logo, pondo $K_2(t,s) = MK(t,s)$ estabelecemos uma análoga a (1-2.2) para g, como queríamos.

Por outro lado, temos

$$x(t) . \left[F(t,x(t)) + \int_0^t G(t,s,x(t), x(s))ds\right] =$$

$$x(t).\left[P(t) . x(t) + h(x(t)) . \int_0^t Q(t,s,x(s))ds\right] =$$

$$P(t).x^2(t) + x(t). h(x(t)). \int_0^t Q(t,s,x(s))ds \geq o,$$

ainda em virtude das definições e propriedades de P,h e Q, e o s.e.i.d. (E-2) satisfaz à condição 2) da hipótese (H).

O exemplo acima é de construção relativamente elaborada, porém, exemplos mais corriqueiros podem ser obtidos a partir de equações integro-diferenciais redutíveis a equações diferenciais.

Em seguida, estabelecemos algumas notações e nomenclaturas.

Seja $P = (o,x) \in U(o)$. Vamos denotar a solução do s.e.i.d. (3-1.1) que parte de P por $x(t,P)$. A solução correspondente do s.e.i.d.(3-1.2) será denotada por $X(t,P)$. Vamos pôr $\delta(P) = [o,t^+)$ e $\Delta(P) = [o,T^+)$ para os intervalos maximais de $x(t,P)$ e $X(t,P)$, respectivamente. Em geral, $t^+ \neq T^+$. Se $x(t,P)$ fôr limitada em $\delta(P)$ diremos que ela é <u>limitada à direita</u>. Definição equivalente é feita para a solução $X(t,P)$. Se $x(t,P)$ (equivalentemente, $X(t,P)$) fôr limitada à direita com $t^+ = \infty$ ($T^+ = \infty$) diremos que ela é <u>limitada no futuro</u>.

De acordo com os resultados do Capítulo I, se fôr $\|X(t,P)\| \leq k < \infty$ para $t \in \Delta(P)$ então $T^+ = \infty$. É claro que se $T^+ = \infty$, então $t^+ = \infty$. A proposição inversa nem sempre é verdadeira, e trataremos disto no § 2 do presen

te capítulo.

<u>Definição 3-1.1.</u> Uma solução $x(t)$ (equivalentemente, uma solução $X(t)$) do s.e.i.d.(3-1.1) do s.e.i.d. (3-1.2)) diz-se assintótica no sentido de Wintner se $r(t) = x(t) \cdot x(t)$ é decrescente para $t \geq$ algum t_o.

Geometricamente, a assintoticidade no sentido de Wintner significa que a distância de $x(t)$ à origem do eixo x não aumenta quando $t \to \infty$. É fácil ver, portanto, que uma solução $x(t)$ do s.e.i.d. (3-1.1) assintótica no sentido de Wintner é limitada à direita.

Devemos observar que os sistemas atrativos, isto é, satisfazendo $x. \left[f(t,x,x') + \int_0^t g(\ldots)ds\right] \leq o$ nem sempre possuem soluções limitadas à direita, como mostra o exemplo

$$x''(t) + \frac{1}{4t^2}\, x(t) = o,$$

dado por A.F. Izé, onde $(-1/4t^2)\, x^2 < o$ para $t > o$, cujas soluções são combinações lineares das soluções

$$t^{1/2} \quad e \quad t^{1/2} \log(t+1)$$

e, portanto, nenhuma delas é limitada. Mesmo no caso particular dos sistemas de forças centrais a cuja classe pertence o nosso sistema gravitacional, existem so-

luções limitadas, órbitas elípticas, somente quando a energia do sistema é pequena. Para o caso dos sistemas repulsivos, como veremos, sempre existem soluções limitadas, o que de certa forma contraria a nossa intuição, pois, no caso, as forças divergem de um centro.

O seguinte teorema, devido a Wintner para o caso de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem, foi estendido ao caso não linear por Mikolajska e, para o caso de sistemas do tipo (3-1.1) por Fiédorov, [8].

Teorema 3-1.1. Se o s.e.i.d.(3-1.2) satisfaz à hipótese (H), então esse sistema admite uma família de soluções assintóticas no sentido de Wintner que depende de pelo menos n parâmetros.

Prova. Seja $X(t)$ uma solução qualquer do s.e.i.d. (3-1.2). Ponhamos $r(t) = x(t) \cdot x(t)$. Temos que

$$(3\text{-}1.3) \qquad r'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) = 2x(t) \cdot y(t).$$

Consideremos o conjunto $D = \{(t,x,y) \in U : x.y \leq o, t \geq o\}$. Se no instante $t = t_o$ a curva integral estiver em D e, para $t > t_o$ aí permanecer, então, de acordo com (3-1.3), temos

que $r'(t) \leq o$. Consequentemente, para esta curva integral, a distância de $x(t)$ à origem $x = o$ não aumenta.

Portanto, para demonstrar o teorema, é suficiente mostrar que existe uma família de curvas integrais que partem de $U(o)$ e são assintóticas relativamente a D. Passemos à demonstração deste fato.

Sejam $\alpha < o$ e $\beta > o$ dois números arbitrariamente fixados e consideremos as funções $\ell(t,x,y) = xy - \beta$ e $m(t,x,y) = \alpha - xy$ e ponhamos

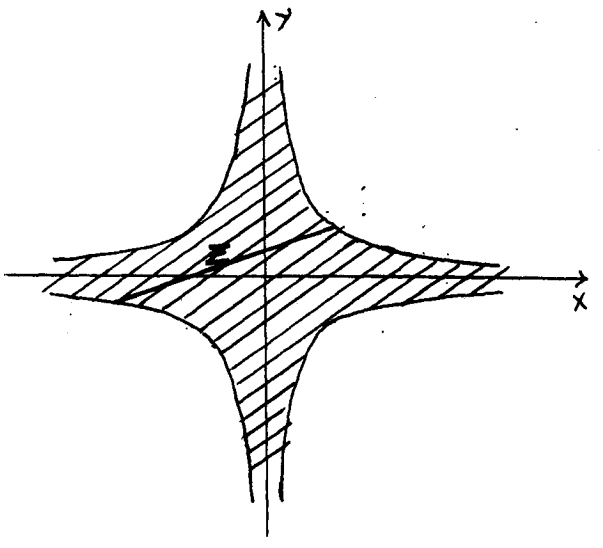
$w_{\alpha\beta} = \{(t,x,y) \in U: \ell(t,x,y) < o, m(t,x,y) < o\}$. É fácil de ver que $fr(w_{\alpha\beta}, U) = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$, onde $\mathcal{L} = \{P \in U: \ell(P) = o\}$ e $\mathcal{M} = \{P \in U: m(P) = o\}$. Vamos mostrar que $w_{\alpha\beta}$ é um conjunto polifacial regular relativamente ao s.e.i.d. (3-1.2) com face positiva $\mathcal{L}$ e face negativa $\mathcal{M}$. Com efeito, usando as notações do Capítulo II, temos

$$(3\text{-}1.4) \qquad D_{L(P)}\, \ell(P) = y^2(t) + x(t) \cdot \left[f(t,x(t), y(t)) + \int_o^t g(\ldots)\, ds\right] > o$$

para todo $P \in \mathcal{L}$ e toda solução $X(t,P)$, pois em $\mathcal{L}$, $y \neq o$.

Analogamente, em $\mathcal{M}$ obtemos

$$(3\text{-}1.5) \qquad D_{L(P)}\mathcal{M}(P) = -y^2(t) - x(t) \cdot \Big[f(t,x(t),y(t)) + \int_0^t g(\ldots)ds\Big] < 0.$$



No R^2, figura ao lado, uma secção de $w_{\alpha\beta}$ por um plano $t = t_0 \geq 0$ é a parte achurada incluindo os eixos x e y. A secção de $\mathcal{L}$ é o gráfico da hipérbole $xy = \beta$, contido em $R^2 - D$. A secção correspondente de $\mathcal{M}$ é o gráfico da hipérbole $xy = \alpha$.

É fácil de ver, então, que estamos nas condições do teorema 2-3.1 e que, portanto, tomando como Z um segmento de reta unindo as componentes conexas de $\mathcal{L}$, $Z \subset U(0)$, existe $P \in Z - \mathcal{L}$, tal que a integral que parte de P é assintótica relativamente a $w_{\alpha\beta}$. Como no plano U(o) podemos tomar Z dependendo de 2n parâmetros e n desses parâmetros são fixados por $\mathcal{L}$, segue a existência de uma curva integral L(P) dependendo de n parâmetros assintótica relativamente a $w_{\alpha\beta}$. Como isso é verdade para qualquer $\beta > 0$, concluímos a existência de uma curva integral assintótica relativamente a $w_{\alpha 0}$.

Com efeito, consideremos uma sequência de números reais $\{\beta_n\}$, $\beta_n > 0$, tal que $\beta_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Em correspondência, consideremos os conjuntos polifaciais $w_{\alpha\beta_n}$ e suas faces positivas $\mathcal{L}_n$. Tomemos, para cada n, segmentos $Z_n \subset U(0)$ ligando as componentes conexas de $\mathcal{L}_n$. Podemos imaginar todos os Z_n situados sobre uma mesma reta suporte. Para cada n existe um $P_n \in Z - \mathcal{L}_n$ tal que a integral $L(P_n)$ é assintótica relativamente a $w_{\alpha\beta_n}$. Quando $n \to \infty$, $P_n \to P$. Afirmamos que $L(P)$ é assintótica relativamente a $w_{\alpha 0}$. Do contrário, existiria um ponto $Q = L(\tau, P) \notin w_{\alpha 0}$. Como $L(\tau, P_n) \to L(\tau, P)$ quando $n \to \infty$, para n suficientemente grande teríamos $L(\tau, P_n) \notin w_{\alpha\beta_n}$, o que é absurdo.

Tomando uma família $\{Z^K\}$, Z^K como Z acima, com $Z^k \cap Z^j = \emptyset$ para $k \neq j$, concluímos pela existência de uma família de curvas integrais dependendo de pelo menos n parâmetros, que são assintóticas relativamente a $w_{\alpha 0}$, e consequentemente a D, como queríamos demonstrar.

§ 2. Soluções limitadas no futuro.

Teorema 3-2.1. Se o s.e.i.d. (3-1.2) satisfaz à hipótese (H), as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) se a solução $X(t)$ fôr assintótica no sentido de Wintner, então

$$\int^{t+} y^2(t)\, dt < \infty; \tag{3-2.1}$$

(ii) se $x(t)$ fôr limitada no futuro, então $X(t)$ é assintótica no sentido de Wintner e, portanto, $r(t)$ converge para uma constante quando $t \to \infty$.

Prova. Integrando (3-2.1) por partes, entre os instantes t_o e τ, vem

$$\int_{t_o}^{\tau} y^2(t)\,dt = \int_{t_o}^{\tau} y(t) \,.\, y(t)\,dt = \int_{t_o}^{\tau} x'(t) \,.\, x'(t)\,dt =$$

$$= x(\tau) \,.\, x'(\tau) - x(t_o) \,.\, x'(t_o) - \int_{t_o}^{\tau} x(t) \,.\, x''(t)\,dt \leq -x(t_o) \,.\, x'(t_o)$$

para todo τ e todo t_o, o que mostra (i).

Para mostrar (ii), notemos que

$$r''(t) = 2y^2(t) + 2x(t) \,.\, y'(t) \geq o$$

devido à hipótese (H). Logo, $r'(t)$ é crescente. Como

$r(t)$ é limitada em $[t_0, \infty)$, segue que $r'(t) \leq 0$ quando $t \to \infty$. Isto acarreta que $r'(t) \to 0^-$ quando $t \to \infty$, isto é, que $x(t)$ (e $X(t)$) é assintótica no sentido de Wintner, com $r(t)$ convergindo para uma constante quando $t \to \infty$, encerrando assim a demonstração do teorema.

Uma classe de sistemas nos quais a condição "$x(t)$ limitada à direita" acarreta "$X(t)$ limitada no futuro" é apresentada pelo seguinte

Teorema 3-2.2. Suponhamos que para todo $c > 0$ existam $K_1 = K_1(c)$ e $K_2 = K_2(c)$ tais que $|f(t,x^1,x^2)| \leq K_1$ e $\left| \int_0^t g(t,s,x^1,x^2,x^3,x^4)\,ds \right| < K_2$ para todos $x^1,x^2,x^3,x^4 \in R^n$ com $|x^1| < c$ e $t \geq$ algum $T \geq 0$.

Então, se $x(t)$ fôr uma solução s.e.i.d.(3-1.1) limitada à direita, segue que $X(t)$ é limitada no futuro.

Prova. Basta mostrar que $x'(t)$ é limitada no futuro.

Vamos mostrar, em primeiro lugar, que $x'(t)$ é definida no futuro:

$$|x'(t)| \leq |x'(T)| + \int_T^t |x''(s)|\,ds.$$

Mas,

$$|x''(t)| \leq |f(t,x(t),x'(t))| + \int_0^t |g(t,s,x(t),x(s),x'(t),x'(s))\,ds| \leq$$

$\leq K_1 + K_2$, de acordo com as hipóteses do teorema, logo, $x''(t)$ é limitada à direita. Assim, pondo $\overline{K}_2 = K_1 + K_2$, vem

$$|x'(t)| \leq |x'(T)| + (t-T)\,\overline{K}_2 \leq \overline{K}_1 + (t-T)\,\overline{K}_2 .$$

Portanto, de acordo com os resultados do capítulo I, $x'(t)$ está definida no futuro.

Em seguida, mostremos que $x'(t)$ é limitada à direita:

Seja $x_i(t)$ uma coordenada genérica de $x(t)$. Então, $x_i'(t)$ e $x_i''(t)$ são as correspondentes coordenadas de $x'(t)$ e $x''(t)$, respectivamente.

Suponhamos por um momento que $x_i'(t)$ não seja limitada à direita. Então, ou $\lim\limits_{t\to\infty} x_i'(t) = \pm\infty$ ou $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, x_i'(t) = \infty$ e $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, x_i'(t) < \infty$ ou $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, x_i'(t) = -\infty$ e $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, x_i'(t) > -\infty$.

A primeira alternativa não pode ocorrer porque, do contrário, existiria t_1 tal que $t > t_1$ acarretaria $|x_i'(t)| > 1$ e, daí, $x(t)$ não seria limitada à direita, absurdo.

A segunda alternativa também não pode ocorrer, pois do contrário, poderíamos tomar duas sequências $\{t_m\}$ e $\{s_m\}$ com $s_m < t_m < s_{m+1}$, $s_m \to \infty$ com as seguintes propriedades:

$$x_i'(t_m) = a_m \to \infty \quad \text{quando} \quad m \to \infty;$$

$$x'(s_m) = a < \infty;$$

$$(3\text{-}2.2.) \qquad a \leq x_i'(t) \leq a_m \quad \text{para} \quad s_m \leq t \leq t_m.$$

Pelo teorema do valor médio vem

$$x_i'(t_m) = x_i'(s_m) = x_i''(\xi_m)(t_m - s_m) \text{ onde } t_m < \xi_m < s_m .$$

Tomando o limite em ambos os membros da igualdade acima para $m \to \infty$ e lembrando que $x_i''(t)$ é limitada, vem

$$\lim (t_m - s_m) = \infty$$

Utilizando novamente o teorema do valor médio,

vem

$$x_i(t_m) - x_i(s_m) = x_i'(\eta_m)(t_m - s_m) \quad \text{com} \quad t_m < \eta_m < s_m$$

Levando em conta (3-2.2) e calculando o limite de ambos os membros da última igualdade para $m \to \infty$, vem

$\lim (x_i(t_m) - x_i(s_m)) = \infty$, o que é absurdo, pois $x_i(t)$ é limitada no futuro (já que é, por hipótese, limitada à direita e, em virtude de sua derivada $x'(t)$ ser definida no futuro, $x(t)$ o ser também).

Com raciocínio análogo se mostra que a terceira alternativa também não ocorre e, portanto, segue que $x'(t)$ é limitada no futuro, como devíamos mostrar.

É interessante observar que $x'(t)$ é limitada no futuro sempre que $x(t)$ e $x''(t)$ o forem, independentemente de $x(t)$ ser ou não solução de qualquer problema, como é fácil de ver na demonstração acima.

Para o caso em que $X(t)$ é limitada no futuro, temos o seguinte

<u>Teorema 3-2.3</u>. Suponhamos que o s.e.i.d.(3-1.2) satisfaz à hipótese (H) e que para cada $c > o$ existam $K_1 = K_1(c)$ e $K_2 = K_2(c)$ tais que

$$|f(t,x^1,x^2)| \leq K_1 \qquad e$$

$$\left|\int_0^t g(t,s,x^1,x^2,x^3,x^4)\,ds\right| \leq K_2$$

quando $t \geq$ algum $T \geq o$ e $|x^1| \leq c, |x^2| \leq c, |x^3| \leq c$ e

$|x^4| \leq c$.

Então, se $X(t)$ fôr uma solução do s.e.i.d.(3-1,2) limitada no futuro, segue que $x'(t) \to o$ quando $t \to \infty$.

<u>Prova</u>. Suponhamos por um momento que $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, x'(t) \,.\, x'(t) > \underline{\lim_{t\to\infty}}\, x'(t) \,.\, x'(t)$. Sejam α e β escolhidos de modo que

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\, x'(t) \,.\, x'(t) < \alpha < \beta\, \overline{\lim_{t\to\infty}}\, x'(t) \,.\, x'(t).$$

Então, existem sequências $\{t_m\}$ e $\{s_m\}$ com $s_m < t_m < s_{m+1}$, $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tais que $x'(t_m) \,.\, x'(t_m) = \beta$, $x'(s_m) \,.\, x'(s_m) = \alpha$ e $\alpha < x'(t) \,.\, x'(t) < \beta$ para $s_m < t < t_m$.

Devemos ter $(t_m - s_m) \to o$ quando $m \to \infty$ pois, do contrário, teríamos $\int_{s_1}^{\infty} x'(t) \,.\, x'(t)\,dt \geq \sum_1^{\infty} \alpha(t_m - s_m) = \infty$ o que

contradiria o teorema 3-2.1, (i)

Como, pelo teorema da média,

$$o < \beta - \alpha = x'(t_m) \cdot x'(t_m) - x'(s_m) \cdot x'(s_m) =$$

$$= 2x'(\xi_m) \cdot x''(\xi_m)(t_m - s_m) \text{ com } s_m < \xi_m < t_m \text{ e } t_m - s_m \to o$$

quando $m \to \infty$, vem

$$x'(\xi_m) \cdot x''(\xi_m) \to \infty \text{ quando } m \to \infty.$$

Mas, isto não é verdade, pois

$$x'(\xi_m) \cdot x''(\xi_m) = x'(\xi_m) \cdot \left[f(\xi_m, x(\xi_m), x'(\xi_m)) + \int_o^{\xi_m} g(\ldots)ds\right]$$

é uma sequência limitada.

Agora, como pelo teorema 3-2.1 (ii), $x(t)$ é assintótica no sentido de Wintner, existe o $\lim_{t \to \infty} x'(t).x'(t)$, o qual não pode ser positivo, pois

$$\int_o^{\infty} x'(t) \cdot x'(t)dt < \infty,$$

o que encerra a demonstração do teorema.

Quando toda componente do s.e.i.d.(3-1.1) é repulsiva, isto é, quando

$$(3\text{-}2.3) \qquad x_i(t) \cdot \left[f_i(t, x(t), y(t)) + \int_o^t g_i(\ldots)ds\right] \geq o$$

para $i = 1, \ldots, n$, para toda $x_i \in \mathscr{C}([o,t],R)$, o seguinte teorema é verdadeiro.

<u>Teorema 3-2.4</u>. Se $X(t)$ é uma solução do s.e.i.d. (3-1.2) assintótica no sentido de Wintner, segue que $x(t)$ é definida no futuro, $x(t)$ converge para uma constante $x_o \in R^n$ e $x'(t) \to o$ quando $t \to \infty$.

<u>Prova</u>. Para cada $i \in I = \{1, \ldots, n\}$ temos

(3-2.4) $\quad x_i(t) \cdot x_i''(t) \geq o$ para $t \geq o$ em virtude de (3-2.3).

Se, para algum $\tau \geq o$ tivermos

$$x_i(\tau) \cdot x_i'(\tau) > o$$

então, em virtude de ser $\frac{d}{dt}(x_i(t) \cdot x_i'(t)) =$

$= x_i'^2(t) + x_i(t) \cdot x''(t) \geq o$ (veja 3-2.4), teremos para todo $t \in [\tau, t^+)$,

(3-2.5) $$x_i(t) \cdot x_i'(t) > o.$$

Isto acarreta, em virtude de ser $x(t)$ limitada à direita, que $x_i(t) \to \alpha_i$ e $x_i'(t) \to \beta_i$ quando $t \to t^+$, on-

de $o < |\alpha_i| < \infty$, $o < |\beta_i| \leq \infty$ e $o < \alpha_i \cdot \beta_i \leq \infty$. Escrevamos $I = I_1 \cup I_2$ onde

$$I_1 = \{i \in I: x_i(t) \cdot x_i'(t) > o, \ \tau \leq t < t^+\}$$

$$I_2 = \{k \in I: x_k(t) \cdot x_k'(t) \leq o, \ \tau \leq t < t^+\}$$

É claro que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Se $k \in I_2$, temos: $x_k(t) \cdot x_k'(t) \leq o$ e, por (3-2.3), $x_k'(t) \cdot x_k''(t) \geq o$ para $\tau \leq t < t^+$. Logo, existem reais α_k e β_k tais que $x_k(t) \to \alpha_k$ e $x_k'(t) \to \beta_k$ para $t \to t^+$.

Mostremos agora que $t^+ = \infty$.

como,

$$o > x(t) \cdot x'(t) = \sum_{i \in I_1} x_i(t) \cdot x_i'(t) + \sum_{K \in I_2} x_k(t) \cdot x_k'(t) \quad \text{e}$$

$\sum_{k \in I_2} x_k(t) \cdot x_k'(t)$ é limitada em $[\tau, t^+)$ segue que $x_i(t) \cdot x_i'(t)$ é limitada em $[\tau, t^+)$ para todo $j \in I_1$ e, portanto, $t^+ = \infty$.

Desde que $t^+ = \infty$, segue do teorema 3-2.1, (i), que

$$\int_\tau^\infty x'(t) \cdot x'(t) dt < \infty.$$

Isto acarreta que $I_1 = \emptyset$, $x'(t) \to o$ quando $t \to \infty$, e que existe $x_o \in R^n$ de modo que $x(t) \to x_o$ com $t \to \infty$.

Para o caso em que $n=1$ no s.e.i.d.(3-1.2), uma propriedade assintótica bastante forte das soluções, é dada pelo seguinte teorema, devido a Fiédorov [8].

<u>Teorema 3-2.5</u>. Se o s.e.i.d.(3-1.2) satisfaz à hipótese (H) e existem funções contínuas γ, $\varphi: R \to R$ e uma constante $a < o$ tais que, para $t \geq o$,

(3-2.6) $$\gamma(t) > o, \ \varphi(t) \geq o;$$

(3-2.7) $$|f(t,x^1,x^2)| \leq \gamma(t)|x^1| \quad \text{para todo } x^1, x^2 \in R;$$

(3-2.8) $$\left|\int_o^t g(t,s,x^1,x^2,x^3,x^4)\,ds\right| \leq \varphi(t) \text{ para todo } x^1,\ldots,x^4 \in R;$$

(3-2.9) $$\int_o^\infty \int_a^s \gamma(u)\,du\,ds \leq 1/\alpha < 1/3;$$

(3-2.10) $$\int_o^\infty \int_a^s \varphi(u)\,du\,ds \leq 1/\alpha < 1/3;$$

então, para todo número real c, $|c| > 1/\alpha$, existe uma família de soluções $X(t)$ dependendo de pelo menos um parâmetro, definidas em $o \leq t < \infty$, tais que

(3-2.11) $$\lim_{t \to \infty} x(t) = c.$$

<u>Prova</u>. Ponhamos

$$B(t) = \int_a^t \gamma(u)\,du \qquad \text{e} \qquad A(t) = \int_t^\infty \int_a^s \gamma(u)\,du\,ds,$$

$$\Phi(t) = \int_a^t \varphi(u)\,du \qquad \text{e} \qquad \Psi(t) = \int_t^\infty \int_a^s \varphi(u)\,du\,ds$$

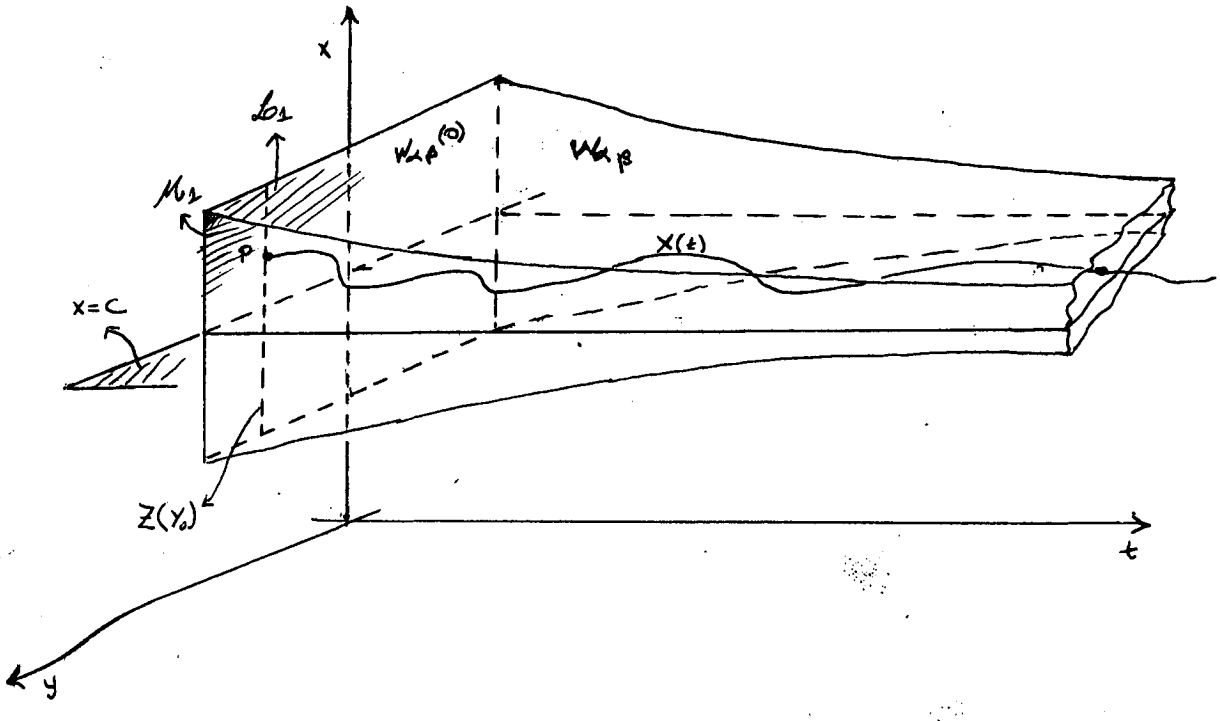
para $t \geq o$.

De acordo com as hipóteses (3-2.6), (3-2.9) e (3-2.10), temos, para $t \geq o$:

$$B(t) > o, \quad A(t) > o, \quad \Phi(t) \geq o \quad \text{e} \quad \Psi(t) \geq o;$$
$$A(t) \leq 1/\alpha < 1/3; \qquad \Psi(t) \leq 1/\alpha < 1/3.$$

É claro que

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = o \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to \infty} \Psi(t) = o.$$



Seja então α satisfazendo (3-2.9) e (3-2.10). Dado $c \in R$ tal que $|c| > 1/\alpha$, definamos

$$W_{\alpha\beta} = \{(t,x,y) \in U: |x-c| < \alpha|c| \, [A(t) + \psi(t)] \text{ e } |y| < \beta|c| B(t) + \phi(t)\},$$

onde $\alpha > \beta > 3$.

Se colocarmos

$$\ell_1(t,x,y) = x - c - \alpha|c| \, [A(t) + \psi(t)] \; ;$$

$$\ell_2(t,x,y) = -x + c - \alpha|c| \, [A(t) + \psi(t)] \; ;$$

$$m_1(t,x,y) = y - \beta|c| \, B(t) - \phi(t)$$

$$m_2(t,x,y) = -y - \beta|c| \, B(t) - \phi(t),$$

então podemos escrever

$$W_{\alpha\beta} = \{(t,x,y) \in U: \ell_i(t,x,y) < o, m_i(t,x,y) < o, \; i=1,2\}.$$

Vamos mostrar que $W_{\alpha\beta}$ é um conjunto polifacial regular relativamente ao s.e.i.d.(3-1.2) com faces positivas $\mathcal{L}_i = \{(t,x,y) \in U: \ell_i(t,x,y) = o\}$,

$$\ell_j(t,x,y) \leq o, m_j(t,x,y) \leq o, \; j=1,2\}$$

para $i=1,2$, e, com faces negativas

$$\mathcal{M}_i = \{(t,x,y) \in U: m_i(t,x,y) = o\},$$

$$\ell_j(t,x,y) \leq o, m_j(t,x,y) \leq o, \; j=1,2\}$$

para $i=1,2$.

Com efeito, é fácil de ver que $fr(w_{\alpha\beta}, U) = \cup(\mathcal{L}_i \cup \mathcal{M}_i)$.

Se $P \in \mathcal{L}_1$, temos

$$D_{L(P)}\,\ell_1(P) = x'(t) - \alpha|c|\,[A'(t) + \psi'(t)] =$$

$$= y(t) + \alpha|c|\,[B(t) + \phi(t)] \geq -|y(t)| + \alpha|c|\,[B(t) + \phi(t)] \geq$$

$$|c|B(t)(\alpha - \beta) + \Phi(t)(\alpha|c| - 1) > 0,$$

para toda $L(P)$.

De maneira idêntica se mostra que

$$D_{L(P)}\,\mathcal{L}_2(P) > 0$$

para todo ponto $P \in \mathcal{L}_2$ e toda $L(P)$.

Se $P \in \mathcal{M}_1$,

$$D_{L(P)}\,m_1(P) = y'(t) - \beta|c|\,\gamma(t) - \varphi(t) =$$

$$= f(t, x(t), y(t)) + \int_0^t g(\ldots)ds - \beta|c|\,\gamma(t) - \varphi(t) \leq$$

$$\leq \gamma(t)|x(t)| + \varphi(t) - \beta|c|\,\gamma(t) - \varphi(t) = \gamma(t)\left[|x(t)| - \beta|c|\right],$$

em virtude das hipóteses (3-2.7) e (3-2.8).

Mas, da definição da face $\mathcal{M}_1$ concluímos que

$$|x(t) - c| \leq \alpha|c|\,[A(t) + \psi(t)]\,.$$

Logo,

$$|x(t)| \leq |x(t) - c| + |c| \leq |c| \left\{1 + \alpha \left[A(t) + \Psi(t)\right]\right\} < 3|c|,$$

em virtude de (3-2.9) e (3-2.10)

Portanto,

$$|x(t)| - \beta|c| \leq |c|(3 - \beta) < o.$$

Voltando com esta última desigualdade na expressão de $D_{L(P)}\mathcal{M}_1(P)$ e levando em conta (3-2,6), obtemos

$$D_{L(P)}\mathcal{M}_1(P) < o$$

para todo $P \in \mathcal{M}_1$ e toda $L(P)$. De modo semelhante se mostra que $D_{L(P)}\mathcal{M}_2(P) < o$ para todo $P \in \mathcal{M}_2$ e toda $L(P)$. Assim, $w_{\alpha\beta}$ é um conjunto polifacial regular relativamente ao s.e.i.d.(3-1.2) e, portanto, temos

$$S \subset V \subset S^*$$

onde $V = (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) - (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$.

Seja agora y_o um número tal que

$$|y_o| < \beta|c| \; B(o) + \phi(o). \tag{3-2.12}$$

Denotemos por $Z(y_o)$ ao segmento de reta definido pelas relações

$$t = o, \quad y = y_o, \quad |x - c| \leq \alpha|c| \left[A(o) + \Psi(o)\right].$$

É claro que $Z(y_o) \subset w_{\alpha\beta}(o) \cup V$ e que $Z(y_o) \cap V$ não é

retrato de $Z(y_0)$.

Mostremos que $Z(y_0) \cap V$ é retrato de V:

Com efeito, a inclusão $V \cap Z(y_0) \subset V$ é evidente. Definamos uma aplicação $K: V \to V \cap Z(y_0)$ da seguinte maneira:

$$K(t,x,y) = \begin{cases} (o, c + \alpha|c|\,[A(o) + \psi(o)]\,,\ y_0) \\ \text{se } (t,x,y) \in \mathcal{L}_1 - (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2); \\ (o, c - \alpha|c|\,[A(o) + \psi(o)],\ y_0) \text{ se} \\ (t,x,y) \in \mathcal{L}_2 - (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2). \end{cases}$$

É fácil de ver que, assim definida, K é uma retração. Portanto, de acordo com o teorema de Wazewski, existe um ponto $P \in Z(y_0) - V$ tal que a curva integral $L(P)$ é assintótica relativamente a $w_{\alpha\beta}$ e, consequentemente, definida em $[o, \infty)$, satisfazendo, para $t \geq o$,

$$|x(t) - c| < \alpha|c|\,[A(t) + \psi(t)],$$

$$|y(t)| < \beta|c|B(t) + \phi(t).$$

Nas desigualdades acima, tomando os limites para $t \to \infty$ obtemos (3-2.11), como queríamos. Agora, é claro que fazendo variar y_0 sempre dentro das limitações (3-2.12) obtemos a desejada família de curvas integrais.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBRECHT, F. - Remarques sur un théorème de T. Wazewski relative a l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles. Bul. Acad. Pol. Sci. -C-3, V.2,7, 1954.

[2] BIELECKI, A. - Remarques sur la méthode de T. Wazewski dans l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires. Bul. Acad. Pol.Sci. V.4, 8, 1956.

[3] ———————— - Sur une méthode de régularisation des équations différentielles ordinaires dont les intégrales ne remplissent pas la condition d'unicité. Bul. Acad. Pol. Sci., V. 4,8, 1956.

[4] ———————— - Certaines propriétés topologiques des intégrales des équations différentielles ordinaires. Bul. Acad. Pol. Sci., V.4, 8,1956.

[5] CODDINGTON & LEVINSON - Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill Book Company,Inc. 1955.

[6] COPPEL, W.A. - Stability and asymptotic behavior of Differential Equations. D.C. Heath & Company, Boston, 1965.

[7] FIEDOROV, V.D. - Ob analogue topologuitcheskovo printzipa T.Vajevskovo dlia integro-differentzial'nich uravnienii. V. sbornike "Isledovania po integro-differentzial'nich uravnieniam v Kirguizi", Izdat. Akad. Nauk Kirgiz, Vip. 1, Frunze, 1961.

[8] ———————— - Isledovanie odnom assimptotitcheskoi zadatch dlia integro-differentzial'nich uravnienii topologuitcheskim metodom T. Vajevskovo. V sbornike "Islodovania po integro-differentzial'nich uravnieniam v Kiguisi", Izdat. Akad. Nauk Kirgiz., Frunze, 1962.

[9] HARTMAN, P. - Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, Inc., 1964

[10] HILLE, E. - Lectures on Ordinary Differential Equations. Addison Wesley Publishing Company,1969

[11] HU, SZE-TSEN - Theory of Retracts. Wayne State University Press, 1965.

[12] IZE, A.F. - O método topológico de Wazewski e suas aplicações ao Estudo do Comportamento Assintótico de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias. (Tese de Mestrado), ITA, 1965.

[13] MIKOLAJSKA, Z. - Sur les mouvements asymptotiques d'un point matériel mobile dans un champ des forces repoussants. Bul. Acad. Pol. Sci., V.1, 1, 1953.

[14] ———————— - Sur une propriété asymptotique des integrales d'une équation différentielle du second ordre. Bul. Acad. Pol. Sci. V.2,3, 1954.

[15] MILLER, R.K. - Nonlinear Volterra Integral Equations W.A. Benjamin, Inc., 1971.

[16] ONUCHIC, N. - Applications of the topological method of Wazewski to certain problems of asymptotic behavior in ordinary differential equations. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 11, n. 4,1961

[17] ———————— - On the asymptotic behavior of the solutions of functional differential equations.

- Differential Equations and Dynamical Systems, 1967.

[18] ———————— - Estabilidade de sistemas perturbados e comportamento no infinito de sistemas de equações diferenciais com retardamento no tempo. (Tese) São Carlos, 1968.

[19] PLIS, A. - On a topological method for studying the behavior of the integrals of ordinary differential equations. Bull. Acad. Pol. Sci.C-1,III,2,1954.

[20] Pontriaguine, L. - Équations Differentielles Ordinaires Éditions Mir, Moscou, 1968.

[21] VOLTERRA, V.- Leçons sur les équations intégrales et les équations integro-différentielles. Gauthier--Villars, Imprimeur-Libraire, 1913

[22] WAZEWSKI, T. - Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires. An. Soc. Pol. Mat. Tome 20, 1947.

[23] WINTNER, A. - On linear repulsive forces. Am. Journ. Math. 72, 1949.

[24] WINTNER, A. - Asymptotic Integrations of Adiabatic Oscilators in its Hiperbolic Range, Duke Math.J. 15, 1948.