SOBRE SINGULARIDADES

ZERO - MODAIS

Walter dos Santos Motta Junior

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos da
Universidade de São Paulo, para obtenção
do título de "Mestre em Matemática".

Orientador: Prof. Dr. Wilson M. Tadini.

São Carlos - SP

Aos meus pais Walter e Terezinha,
com imenso carinho, muito amor e
admiração .

DEDICO .

À minha mulher , Neide R. Motta ,
minha grande companheira e amiga,
por toda sua dedicação , carinho,
compreensão e amorosidade

AGRADEÇO profundamente .

ABSTRACT

In this work we present in details the classification and the abutments of all 0-modal germs. Such classification was proposed by V.I. Arnol'd (1).

By using techniques of heavy determination to semi-quasi-homogeneous germs we reworked the previously mentioned classification turning it, in the main, more interesting

At last, by using concepts and results that connect modality and internal modality we present a technique to verify how much modal is a certain germ that is stable equivalent to a germ semi-quase-homogeneous in two variables.

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao Professor Doutor Wilson Maurício Tadini, pelo incentivo, dedicação e orientação segura na realização do meu programa de Mestrado.
- Ao Professor Doutor Eurípides Alves da Silva, pela amizade e pelo apoio no início de meus estudos em matemática.
- Aos Professores Hermes Antonio Pedroso e Angela M. Sitta, pelas inúmeras contribuições na realização deste trabalho.
- Ao meu grande amigo o Professor Maurílio Boaventura pela amizade e interesse na execução deste.
- Aos meus colegas do Departamento de Matemática da UFMS-CCET, em especial o Professor Edson N. Cáceres pelo apoio durante o desenvolvimento deste.

Este trabalho somente foi possível graças ao apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP.

Índice

CAPÍTULO I - Pré-Requisitos.

1) O Anel $\mathbb{C}_n$	1
2) O Espaço J^k	5
3) Lema de Nakayama.....	7
4) Os Grupos R e $R^{(k)}$	9
5) Modalidade.....	10
6) Determinação Finita.....	11
7) Codimensão.....	28
8) Germes de Funções Quase-Homogênea e Semi-Quase-Homogênea.....	36
9) Determinação Pesada.....	40
10) Escada de um Ideal.....	47
11) Modalidade Interna.....	51
12) Cúbicas Homogêneas em Duas Variáveis.....	53
13) Cross-Ratio.....	59

CAPÍTULO II - Germe Zero-Modal - Classificação

1) Germe Zero-Modal.....	67
2) Zero Modalidade Implica em Determinação Finita.....	72
3) O Splitting Lemma.....	74
4) Classificação da Zero-Modalidade.....	85

CAPÍTULO III - Abutamento e Zero-Modalidade

1) Abutamento de Órbitas.....	113
2) Zero-Modalidade dos Tipos $A_k^\pm, D_k^\pm, E_6^\pm, E_7$ e E_8	120
3) Modalidade Interna - Zero-Modalidade....	154

INTRODUÇÃO

Dentro da Teoria das Singularidades um conceito importante é o de k - modalidade de um germe C^∞ .

Considerando R o grupo dos germes de difeomorfismos C^∞ , $\phi: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$, e $\mathcal{M}_n$ o conjunto dos germes de funções C^∞ $f: (R^n, 0) \rightarrow (R, 0)$, temos que R atua sobre $\mathcal{M}_n$, via composição à direita. Diremos que $f \in \mathcal{M}_n$ tem modalidade zero, ou, que é 0-modal, se:

" Existem inteiros positivos k_0 e 1, tais que, para cada inteiro $k, k \geq k_0$, existe um aberto A_k em $J_0^k(n, 1)$, com $j^k f(0) \in A_k$, encontrando no máximo 1 $R^{(k)}$ -órbitas."

Sejam V_1 e V_2 duas $R^{(k)}$ -órbitas. Diremos que V_1 abuta V_2 se $V_2 \subset \bar{V}_1$, onde $\bar{V}_1$ é o fecho topológico de V_1 .

Em (1), V.I. Arnol'd introduz os conceitos acima, de 0-modalidade e abutamento, e, dá uma classificação dos germes 0-modais. Neste mesmo trabalho, Arnol'd enuncia um resultado estabelecendo o abutamento das R -órbitas de germes 0-modais, para o caso complexo (mais simples), sem demonstração.

Em (10) D. Rand mostra o resultado enunciado por Arnol'd, para alguns casos.

Neste trabalho, apresentamos a classificação e os abutamentos de todos os germes 0-modais, com todos os detalhes.

Em (4), J. Bruce introduz o conceito de determinação pesada, para germes semi-quase-homogêneos. Utilizando tais técnicas refizemos a referida classificação, tornando-a na maioria dos casos mais interessante.

Em (6), J.Damon refere-se ao conceito de Escada de um ' Ideal, apresentando uma generalização de um Teorema de Divisão. (A demonstração encontra-se em (11)).

Em (2), V.I.Arnol'd conjecturou que n casos de germes ' semi-quase-homogneos, os conceitos de modalidade e modalidade interna coincidem. Uma resposta positiva para esta conjectura, no caso $n=2$, encontra-se em (21).

Utilizando tais conceitos e resultados, apresentamos uma tcnica de verificao de quanto modal um dado germe estavelmente equivalente a um germe semi-quase-homogneo em duas variveis.

A verificao de que as famlias apresentadas em (1) so 0-modais, por tais tcnicas bem imediata.

CAPÍTULO I

PRÉ-REQUISITOS

1. O ANEL ϵ_n

Consideremos C_n o anel das funções : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ com as operações de adição e multiplicação dadas por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Dizemos que as funções $f, g \in C_n$ tem "germe equivalente em $x \in \mathbb{R}^n$ ", e denotamos por $f \sim_x g$, se existir um aberto U do $\mathbb{R}^n$, contendo x , tal que $f|_U = g|_U$. Segue que " $\sim_x$ " é uma relação de equivalência em C_n . A classe de equivalência de f , denotada por $[f]_x$, é denominada de "germe de f em x ". Cada elemento do germe denomina-se um representante do mesmo.

Podemos adicionar e multiplicar germes em x simplesmente tomando os seus representantes. Dotado com estas operações o conjunto dos germes em x , denotado por ϵ_n^x , é um anel comutativo com unidade, sendo a unidade o germe tendo como representante a função constante igual a 1.

- OBSERVAÇÕES:

- (1) Consideremos a aplicação $\phi: C_n \rightarrow \epsilon_n^x$, definida por $\phi(f) = [f]_x$. Então, ϕ é homomorfismo sobrejetor e $\text{Ker } \phi = I^x$, onde I^x é o ideal de C_n constituído das funções que se anulam em alguma vizinhança de x . Logo, $\epsilon_n^x \cong C_n/I^x$ (isomorfismo de anéis).
- (2) ϵ_n^x é um espaço vetorial real com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar definidas por: $[f]_x + [h]_x = [f+h]_x$ e $\alpha \cdot [f]_x = [\alpha \cdot f]_x$, com $[f]_x, [h]_x \in \epsilon_n^x$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. E, ainda, ϵ_n^x tem dimensão infinita, pois, $\{\psi_1, \dots, \psi_m, \dots\}$ dadas por $\psi_m(x_1, \dots, x_n) = x_1^m$ é um conjunto $\mathbb{R}$ -linearmente independente.
- (3) ϵ_n^x é uma $\mathbb{R}$ -álgebra.
- (4) Se duas funções $f, g \in C_n$ tem germe equivalente em a , então $f(a) = g(a)$, e, além disso, $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$, $n \geq 1$. A recíproca no entanto não é verdadeira, pois, tomando $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f \equiv 0$ e

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$
 temos que $g(0) = \dots = g^{(n)}(0) = f(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \geq 1$. Todavia as duas funções não representam o mesmo germe no ponto zero.
- (5) Consideraremos $x = 0$ e adotaremos as notações $\epsilon_n^0 \equiv \epsilon_n$ e $[f]_0 \equiv f$.
- (6) Uma condição necessária e suficiente para que $f \in \epsilon_n$ seja inversível é que $f(0) \neq 0$.

Definimos $\mathcal{M}_n$, como o ideal de $\mathcal{E}_n$, constituído de todos os germes de aplicações $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, ou seja, $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n / f(0) = 0\}$. Segue facilmente que $\mathcal{M}_n$ é o único ideal maximal de $\mathcal{E}_n$, pois, se $f \notin \mathcal{M}_n$, então $f(0) \neq 0$, o que acarreta que f é inversível, e, portanto, não poderá estar contido em nenhum ideal próprio de $\mathcal{E}_n$.

Consideremos $\{x_1, \dots, x_n\}$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ nas vizinhanças da origem. O símbolo x_i será usado para denotar:

- i) a função $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi_i(x) = x_i$
- ii) o germe em 0 desta função
- iii) a i -ésima coordenada de $x = (x_1, \dots, x_n)$.

- PROPOSIÇÃO I-1:

O ideal $\mathcal{M}_n$ é gerado pelos germes das funções coordenadas $x_1, \dots, x_n$, ou seja, $\mathcal{M}_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_n$.

- DEMONSTRAÇÃO:

Como $x_i \in \mathcal{M}_n$, então $\sum_{i=1}^n x_i e_n \in \mathcal{M}_n$. Se $f \in \mathcal{M}_n$, então o seu desenvolvimento de Taylor em 0 com resto integral até a ordem 1 será

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^1 df(tx) \cdot x \, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{f}{x_i}(tx) \cdot x_i \, dt = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot h_i(x), \end{aligned}$$

onde $h_i(x) \in \mathcal{E}_n$. Logo, $\mathcal{M}_n \subset \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathcal{E}_n$.

- COROLÁRIO:

O ideal $\mathcal{M}_n^k = \mathcal{M}_n \dots \mathcal{M}_n$ (k vezes) é gerado pelos germes dos monômios da forma $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, onde

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j = k.$$

- PROPOSIÇÃO I-2:

$f \in \mathcal{M}_n^{k+1}$ se, e somente se, f e todas as suas derivadas parciais de ordem $\leq k$ se anulam na origem.

- DEMONSTRAÇÃO:

($\Rightarrow$) Imediato, bastando para tanto usar a expressão obtida no corolário anterior para $\mathcal{M}_n^{k+1}$.

($\Leftarrow$) Usaremos indução em k.

Suponhamos que para $k = m$ a proposição se verifica. Então, mostraremos que para $k = m+1$ a proposição também irá se verificar.

Por Taylor podemos escrever:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot g_i(x),$$

onde

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt.$$

Então, basta mostrar que $g_i \in \mathcal{M}_n^{m+1}$. De fato, para $|j| = 1$ e $|\alpha| = m$ temos que:

$$0 = (D_\alpha \circ D_j)(f) = D_\alpha(g_i) + D_\alpha \left[\sum_{j \neq i} x_j \cdot \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) dt \right].$$

Como $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$, bem como todas as suas derivadas de ordem $\leq m-1$, se anulam na origem, então $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j \in \mathcal{M}_n^m$. Logo, como $D_\alpha g_i = 0$, pela indução temos que $g_i \in \mathcal{M}_n^{m+1}$.

Portanto,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot g_i(x) \quad \text{com } g_i(x) \in \mathcal{M}_n^{m+1}. \text{ Logo, } f \in \mathcal{M}_n^{m+2}.$$

- OBSERVAÇÕES:

$$(1) \quad \epsilon_n \supset \mathcal{M}_n \supset \mathcal{M}_n^2 \supset \dots \supset \mathcal{M}_n^k \supset \dots$$

$$(2) \quad \text{Uma singularidade é um elemento de } \mathcal{M}_n^2.$$

2. O ESPAÇO J^k

Dizemos que dois germes $f, g: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ admitem o mesmo k-jato na origem, se as suas derivadas de ordem $\leq k$ coincidem na origem. Assim, f e g admitem o mesmo polinômio de Taylor de grau k na origem. Indiquemos por $j^k(f)$ o k -jato de f na origem e por J^k o conjunto dos k -jatos, na origem, de germes $f \in \epsilon_n$.

- OBSERVAÇÕES:

- (1) J^k é anel com as operações: $j^k(f+g) = j^k(f) + j^k(g)$ e $\overline{j^k(f) \cdot j^k(g)}^k$ (onde a barra indica truncamento no grau k).
- (2) Consideremos a aplicação $j^k: \mathcal{E}_n \rightarrow J^k$, que cada f associa o seu k -jato na origem ($f \mapsto j^k(f)$). Então, j^k é homomorfismo sobrejetor e $\text{Ker } j^k = \mathfrak{m}_n^{k+1}$. Logo, $J^k \cong \mathcal{E}_n / \mathfrak{m}_n^{k+1}$ (isomorfismo de anéis).

- PROPOSIÇÃO I-3:

- (a) $M^k \cong \mathfrak{m}_n / \mathfrak{m}_n^{k+1}$ é o único ideal maximal de J^k .
- (b) J^k é um espaço vetorial de dimensão finita isomorfo a $\mathbb{R}^P$, com $P = \binom{n+k}{k}$.

- DEMONSTRAÇÃO:

- (a) Considerando a correspondência bijetiva existente entre os ideais de $J^k \cong \mathcal{E}_n / \mathfrak{m}_n^{k+1}$ e os ideais de $\mathcal{E}_n$ que contêm $\text{Ker } j^k$, sendo j^k a aplicação definida na observação anterior, e, ainda, observando que $\mathfrak{m}_n$ é o único ideal maximal de $\mathcal{E}_n$ com $\mathfrak{m}_n \supset \text{Ker } j^k = \mathfrak{m}_n^{k+1}$, teremos que $\mathfrak{m}_n / \mathfrak{m}_n^{k+1} \cong M^k$ é o único ideal maximal de J^k .
- (b) Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos $f \in J^k$. Por Taylor teremos que $f = f_0 + f_1 + \dots + f_k + f_{k+1}$, onde f_j são polinômios homogêneos de grau j com $j \leq k$ e $f_{k+1} \in \mathfrak{M}_n^{k+1}$.

Os monômios $x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$ com $\sum_{j=1}^n i_j \leq k$ formam uma base de J^k como R -espaço vetorial. Assim sendo, $J^k \cong H_0 \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_k$, onde H_k é o espaço dos polinômios homogêneos de grau k , e, conseqüentemente,

$$J^k \cong \frac{R[x_1, \dots, x_n]}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot R[x_1, \dots, x_n]\right)^{k+1}}.$$

Como,

$$\dim_R(H_m) = \binom{n+m-1}{m}, \quad \text{então}$$

$$\begin{aligned} \dim_R \left[R[x_1, \dots, x_n] / \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot R[x_1, \dots, x_n]\right)^{k+1} \right] &= \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+k}{k} \end{aligned}$$

3. LEMA DE NAKAYAMA

LEMA I-4: (NAKAYAMA)

Seja E um anel comutativo com unidade 1 , o qual tem um único ideal maximal $\mathfrak{M}$. Seja A um E -módulo finitamente gerado. Então,

$$(a) \quad \mathfrak{M} \cdot A = A \rightarrow A = 0$$

(b) Se B e C são $\mathcal{E}$ -módulos tais que $A, B \subset C$, então

$$A \subset B + \mathcal{M} \cdot A \rightarrow A \subset B$$

- DEMONSTRAÇÃO :

(a) Se $a_1, \dots, a_n$ são geradores de A , pela hipótese, existem $z_{ij} \in \mathcal{M}$ tais que $a_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} \cdot a_j$, $i=1, \dots, n$. Considerando $Z = (z_{ij})$ e $a = (a_i)$ matricialmente, nós obtemos que $(Z-I) \cdot a = 0$.

O $\det(Z-I)$ é o polinômio característico de Z no ponto 1 e é igual $\pm 1 + \text{soma dos } z_{ij}$, ou seja, $\det(Z-I) = \pm 1 + \bar{z}$, $\bar{z} \in \mathcal{M}$. Como $\det(Z-I) \neq 0$, então $Z-I$ é inversível, o que acarreta que $a = 0$, ou seja, $A = 0$.

(b) Como $A \subset B + \mathcal{M} \cdot A$ e evidentemente $B \subset B + \mathcal{M} \cdot A$, então $\frac{A+B}{B} \subset \frac{B+\mathcal{M}A}{B}$. Pelo teorema do isomorfismo $\frac{A}{A \cap B} \cong \frac{A+B}{B} \subset \frac{B+\mathcal{M}A}{B} \cong \frac{\mathcal{M} \cdot A}{B \cap \mathcal{M}A} = \mathcal{M} \cdot \left(\frac{A}{A \cap B} \right)$. Usando a parte (a) acima concluímos que $\frac{A}{A \cap B} = 0$, donde obtemos que $A = A \cap B$, ou seja, $A \subset B$.

Observemos que o $\mathcal{E}$ -módulo C assegura que $B + \mathcal{M}A$ está bem definido, uma vez que $A, B \subset C$.

- OBSERVAÇÕES :

(1) Seja $f \in \mathcal{E}_n$, denotaremos por $\langle \partial f \rangle_{\mathcal{E}_n}$, ou simplesmente $\langle \partial f \rangle$, o ideal gerado por $\partial f / \partial x_i$, $i=1, \dots, n$. Se $f \in \mathcal{M}_n^2$, então $\langle \partial f \rangle \subset \mathcal{M}_n$.

(2) São equivalentes as afirmações:

$$i) \quad \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle.$$

$$\text{ii) } \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle + \mathcal{M}_n^{k+2}$$

$$\text{iii) } H_{k+1} \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle), \text{ onde } H_{k+1} = H_{k+1}(n, 1) = \\ = \text{espaço dos polinômios homogêneos de grau } k+1 \\ \text{nas variáveis } x_1, \dots, x_n.$$

4. OS GRUPOS $\mathcal{R}$ E $\mathcal{R}^{(k)}$

GRUPO $\mathcal{R}$:

Seja $\mathcal{R} = \{\phi: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0 / \phi \text{ é germe de difeomorfismo } C^\infty \text{ nas vizinhanças de } 0\}$. Com relação à operação de composição de germes, $\mathcal{R}$ tem estrutura de grupo, atuando em $\mathcal{E}_n$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{R} \times \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$$

$$(\phi, f) \rightarrow f \circ \phi^{-1}$$

GRUPO $\mathcal{R}^{(k)}$:

Seja $\mathcal{R}^{(k)} = \{k\text{-jatos de elementos de } \mathcal{R}\}$. Com relação à operação definida por $j^k(\phi) * j^k(\mu) = j^k(\phi \circ \mu)$, com $\phi, \mu \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{(k)}$ tem estrutura de grupo, atuando em J^k da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}^{(k)} \times J^k \rightarrow J^k$$

$$(j^k(\phi), j^k(f)) \rightarrow j^k(f \circ \phi^{-1}), \text{ onde } \phi \in \mathcal{R} \text{ e } f \in \mathcal{E}_n.$$

- OBSERVAÇÕES :

- (1) J^k tem estrutura de variedade diferenciável C^∞ (ver [13], pág. 44); $R^{(k)}$ é um grupo de Lie, e, ainda, a ação de $R^{(k)}$ em J^k definida acima é C^∞ -diferenciável (ver [5], pág. 194), Portanto, as órbitas desta ação são subvariedades imersas em J^k (Ver [5], pág. 196).
- (2) Às vezes usaremos as notações R e $R^{(k)}$ em lugar de R_h e $R_h^{(k)}$ respectivamente.

5. MODALIDADE

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão finita e G um grupo de Lie atuando sobre M . Dizemos que um ponto $X \in M$ tem modalidade m (sob a dada ação), se m for o menor inteiro positivo satisfazendo:

- "Existe uma vizinhança suficientemente pequena de X em M , coberta por um número finito de famílias contínuas de órbitas, dependendo de no máximo m -parâmetros, e, ainda, toda vizinhança de X em M , intercepta alguma família de órbitas com m -parâmetros".

- OBSERVAÇÃO:

Dado $f \in \mathcal{M}^2$, dizemos que f tem modalidade m , se para k suficientemente grande, $j^k(f)$ tem modalidade m como elemento de J^k , sob a ação de $R^{(k)}$, e a quantidade de famílias contínuas de órbitas é limitada quando $k \rightarrow \infty$.

6. DETERMINAÇÃO FINITA

Dizemos que dois germes $f, g \in \mathcal{E}_n$ são "equivalentes", e denotamos por $f \sim g$ (ou $f \approx g$), se existir $\phi \in \mathcal{R}$ tal que $f = g \circ \phi$.

Sejam $f \in \mathcal{E}_n$ e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que f é k -determinado, se para qualquer germe $g \in \mathcal{E}_n$, com $j^k(f) = j^k(g)$, tivermos $f \sim g$.

O germe $f \in \mathcal{E}_n$ é finitamente determinado, se para algum $k \in \mathbb{N}$, f é k -determinado.

- OBSERVAÇÕES:

(1) Sejam $f \in \mathcal{E}_n$ e $k \in \mathbb{N}$. São equivalentes as definições:

- i) f é k -determinado, se para qualquer germe $g \in \mathcal{E}_n$, com $j^k(f) = j^k(g)$, tivermos $f \sim g$.
- ii) f é k -determinado, se para qualquer germe $g \in \mathcal{E}_n$, com $j^k(f) = j^k(g)$, tivermos que $g \in \mathcal{R} \cdot f$ ($\mathcal{R}$ -órbita de f).
- iii) $\eta \in J^k$ é suficiente, se para quaisquer $f, g \in \mathcal{E}_n$, com $j^k(f) = j^k(g) = \eta$, tivermos $f \sim g$. Portanto, se $j^k(f)$ é suficiente, então f é k -determinado.

(2) Propriedades:

- i) f é k -determinado se, e somente se, $j^k(h) = 0 \rightarrow f \sim f+h, \forall h \in \mathcal{E}_n$.
- ii) Se f é k -determinado, então f é $(k+r)$ -determinado, $\forall r \in \mathbb{N}$.

iii) Se f é k -determinado e $f \sim g$, então g é k -determinado.

- EXEMPLOS:

1º) Qualquer germe $f \in \mathcal{M}_n$ não-singular (isto é, $f \notin \mathcal{M}_n^2$) é 1-determinado.

De fato, se $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ é não-singular (f é submersão), então existe $\phi \in \mathbb{R}$ tal que $f \circ \phi = x_1$, ou seja, $f \sim x_1$. Portanto, se f é não-singular, $j^1(f)$ é suficiente, e, então, f é 1-determinado.

2º) Consideremos $f \in \mathcal{E}_n$ e zero um ponto crítico não degenerado de f . Então, pelo Lema de Morse, teremos que:

$$f \sim \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot x_i^2, \quad \delta_i = \pm 1.$$

Portanto, $j^2(f)$ é suficiente, e, então, f é 2-determinado.

3º) Seja $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ definido por $f(x, y) = x^2 + y^n$. Então, f é n -determinado, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

De fato, se $g \in \mathcal{E}_2$ é tal que $j^n(f) = j^n(g)$, então $g(x, y) = x^2 + y^n + h(x, y)$, com $h(x, y) \in \mathcal{M}_2^{n+1}$, ou seja, $h(x, y) = x^2 \cdot h_1(x, y) + y^n \cdot h_2(x, y)$ com $h_1, h_2 \in \mathcal{M}_2$.

Logo,

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x^2 + y^n + x^2 h_1(x, y) + y^n h_2(x, y) = x^2 (1 + h_1(x, y)) + \\ &+ y^n (1 + h_2(x, y)) = (x \sqrt{1 + h_1(x, y)})^2 + \\ &+ (y \sqrt[n]{1 + h_2(x, y)})^n. \end{aligned}$$

Consideremos

$$\phi(x,y) = (x, \sqrt{1+h_1(x,y)}) , \quad y \cdot \sqrt[n]{1+h_2(x,y)} = (X(x,y), Y(x,y)),$$

onde $X(x,y) = x \cdot \sqrt{1+h_1(x,y)}$ e $Y(x,y) = y \cdot \sqrt[n]{1+h_2(x,y)}$.

Segue que $\phi \in R$ e $g = f \circ \phi$. Portanto, f é n -determinado.

O importante teorema abaixo foi demonstrado por P. Stefan, sendo um dos resultados essenciais desta seção.

- TEOREMA I-5:

Seja $f \in e_n$.

Então, f é k -determinado se, e somente se,

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial(f+g) \rangle , \quad \forall g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$$

Adiante apresentaremos a demonstração deste teorema.

- COROLÁRIO:

Seja $f \in e_n$.

Se $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \cdot \langle \partial f \rangle$, então f é k -determinado.

- DEMONSTRAÇÃO:

Observemos que:

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \cdot \langle \partial(f+g) \rangle , \quad \forall g \in \mathcal{M}_n^{k+1} \quad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \cdot \langle \partial f \rangle + \mathcal{M}_n^{k+2}, \quad \forall g \in \mathcal{M}_n^{k+1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \cdot \langle \partial f \rangle + \mathcal{M}_n^{k+2} \leftrightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \cdot \langle \partial f \rangle.$$

Portanto, como $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \cdot \langle \partial f \rangle$ segue que $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \cdot \langle \partial(f+g) \rangle + \mathcal{M}_n^2$, $\forall g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$. Como $\mathcal{M}_n \supset \mathcal{M}_n^2$ acarreta que $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial(f+g) \rangle + \mathcal{M}_n^{k+2}$, $\forall g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$, e, então, $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial(f+g) \rangle$, $\forall g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$. Segue de I-5 que f é k -determinado.

- OBSERVAÇÕES :

(1) Se $f \in \mathcal{E}_n$ é k -determinado, então $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle$.

A recíproca é falsa. De fato, se considerarmos $f: \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, $f \in \mathcal{M}_1$, dado por $f(x) = x^2$, vemos que $\mathcal{M}_1^2 = \mathcal{M}_1 \cdot \langle \partial f \rangle$.

Logo, $\mathcal{M}_1^2 \subset \mathcal{M}_1 \cdot \langle \partial f \rangle$, e no entanto, f não é 1-determinado.

(2) A recíproca do corolário acima é falsa. De fato, consideremos $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, $f \in \mathcal{M}_2$, dado por $f(x,y) = x^3 + xy^3$. Neste caso temos que f é 4-determinado, pois, como

$$\mathcal{M}_2^5 \subset \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial(f+h) \rangle + \mathcal{M}_2^6, \quad \forall h \in \mathcal{M}_2^5,$$

o teorema I-5 nos assegura tal fato.

Para comprovar que $\mathcal{M}_2^5 \subset \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial(f+h) \rangle + \mathcal{M}_2^6$, $\forall h \in \mathcal{M}_2^5$, é necessário termos valores arbitrários para $h \in \mathcal{M}_2^5$, e, verificar se para tais valores a inclusão é verdadeira. Por exemplo, tomemos $h(x,y) = x^5 \in \mathcal{M}_2^5$, então:

$$(f+h)(x,y) = x^3 + x^5 + xy^3$$

$$\mathcal{M}_2^5 = \langle x^5, xy^4, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 \rangle$$

$$\mathcal{M}_2^6 = \langle x^6, x^5y, \dots, xy^5, y^6 \rangle$$

$$\mathcal{M}_2 = \langle x, y \rangle$$

$$\langle \partial(f+h) \rangle = \langle 3x^2 + 5x^4 + y^3, xy^2 \rangle$$

Daí,

$$x^5 = \frac{x^3}{3} \cdot (3x^2 + 5x^4 + y^3) - \left(\frac{5}{3}x^7 + \frac{1}{3}x^3y^3 \right),$$

onde

$$\frac{5}{3}x^7, \frac{1}{3}x^3y^3 \in \mathcal{M}_2^6.$$

$$x^4y = \frac{x^2y}{3} \cdot (3x^2 + 5x^4 + y^3) - \left(\frac{5}{3}x^6y + \frac{1}{3}x^2y^4 \right), \text{ onde}$$

$$\frac{5}{3}x^6y, \frac{1}{3}x^2y^4 \in \mathcal{M}_2^6.$$

$$y^5 = y^2(3x^2 + 5x^4 + y^3) - 3x(xy^2) - 5x^4y^2, \text{ onde}$$

$$5x^4y^2 \in \mathcal{M}_2^6.$$

Tomando $h(x,y) = x^4y, x^3y^2, \dots, y^5$, e, repetindo o processo anterior para esses valores de h , comprovaremos que $\mathcal{M}_2^5 \subset \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial(f+h) \rangle + \mathcal{M}_2^6$.

Por outro lado, $y^5 \in \mathcal{M}_2^5$ e $y^5 \notin \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle \partial f \rangle$.
Logo, $\mathcal{M}_2^5 \not\subset \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle \partial f \rangle$.

Mais adiante, mostraremos um método mais geral, donde concluímos facilmente que f é 4-determinado.

(3) Se $f \in \mathcal{E}_n$ com $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n^{\langle \partial f \rangle}$, então f é k -determinado.

A recíproca é falsa. De fato, seja $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ definido por $f(x,y) = x^4 + y^5$, temos que $\mathcal{M}_2^6 \subset \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle \partial f \rangle$. Logo, f é 5-determinado, mas,

$$x^2 y^3 \in \mathcal{M}_2^5 \text{ e } x^2 y^3 \notin \langle x^4, xy^4, yx^3, y^5 \rangle = \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle.$$

Portanto, $\mathcal{M}_2^5 \not\subset \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle$.

- (4) Dizemos que $f \in \mathcal{E}_n$ é fortemente k -determinado, $k \in \mathbb{N}$, se para qualquer $g \in \mathcal{E}_n$, com $j^k(f) = j^k(g)$, existir $\phi \in \mathbb{R}_n$, com $f \circ \phi = g$ e $j^1(\phi) = j^1(\text{id})$ (id é o germe da identidade).

Usando tal conceito Siersma (ver [12], pág. 57) demonstra que:

" f é fortemente k -determinante se, e somente se,

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \langle \partial f \rangle."$$

Anteriormente observamos que $f(x,y) = x^3 + xy^3$ é 4-determinado, acarretando que $\mathcal{M}_n^5 \subset \mathcal{M}_2^2 \langle \partial f \rangle + \mathcal{M}_2^6$, muito embora, $\mathcal{M}_2^5 \not\subset \mathcal{M}_2^2 \langle \partial f \rangle + \mathcal{M}_2^6$. Entretanto, $\mathcal{M}_2^6 \subset \mathcal{M}_2^2 \langle \partial f \rangle + \mathcal{M}_2^7$. Logo,

$$\mathcal{M}_2^6 \subset \mathcal{M}_2^2 \langle \partial f \rangle,$$

donde temos que f é fortemente 5-determinado.

- (5) Mostraremos que se $f \in \mathcal{E}_2$ é tal que $f(x,y) = x^3 + xy^k$, $k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, então f é $(2k-2)$ -determinado.

Basta mostrar que $\mathcal{M}_2^{2k-1} \subset \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle \partial(f+\phi) \rangle + \mathcal{M}_2^{2k}$,
 $\forall \phi \in \mathcal{M}_2^{2k-1}$.

De fato, temos que

$$\langle \partial(f+\phi) \rangle = \langle 3x^2 + y^k + \partial_1 \phi, kxy^{k-1} + \partial_2 \phi \rangle, \text{ e,}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial(f+\phi) \rangle &= \langle 3x^3 + xy^k + x\partial_1 \phi, 3x^2y + y^{k+1} + y\partial_1 \phi, kx^2y^{k-1} + \\ &+ x\partial_2 \phi, kxy^k + y\partial_2 \phi \rangle. \end{aligned}$$

Tomemos $\alpha(x,y) \in \mathcal{M}_2^{2k-1}$ nas seguintes formas:

$$\begin{aligned} \text{i) } \alpha(x,y) &= x^3 \cdot h(x,y), \quad h \in \mathcal{M}_2^{2k-4} \rightarrow \alpha(x,y) = \\ &= \frac{1}{3} h(3x^3 + xy^k + x\partial_1 \phi) - \left(\frac{xhy^k}{3} + \frac{x\partial_1 \phi h}{3} \right), \end{aligned}$$

$$\text{onde } \frac{xhy^k}{3}, \frac{x\partial_1 \phi \cdot h}{3} \in \mathcal{M}_2^{2k}.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \alpha(x,y) &= x^2 \cdot y^{2k-3} \rightarrow \alpha(x,y) = \frac{y^{2k-4}}{3} \cdot (3x^2y + y^{k+1} + \\ &+ y\partial_1 \phi) - \left(\frac{y^{3k-3}}{3} + \frac{y^{2k-3}\partial_1 \phi}{3} \right), \end{aligned}$$

$$\text{onde } \frac{y^{3k-3}}{3}, \frac{y^{2k-3}\partial_1 \phi}{3} \in \mathcal{M}_2^{2k}.$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \alpha(x,y) &= x \cdot y^{2k-2} \rightarrow \alpha(x,y) = \frac{y^{k-2}}{k} \cdot (kxy^k + y\partial_2 \phi) - \\ &- \left(\frac{y^{k-1}\partial_2 \phi}{k} \right), \text{ onde } \frac{y^{k-1}\partial_2 \phi}{k} \in \mathcal{M}_2^{2k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \alpha(x,y) &= y^{2k-1} \rightarrow \alpha(x,y) = y^{k-2} (3x^2y + y^{k+1} + y\partial_1 \phi) - \\ &- \frac{3}{k} (kx^2y^{k-1} + x\partial_2 \phi) - y^{k-1} \cdot \partial_1 \phi + \\ &+ \frac{3x\partial_2 \phi}{k} \end{aligned}$$

$$\text{onde } y^{k-1} \cdot \partial_1 \phi \in \mathcal{M}_2^{2k} \text{ e } \frac{3x\partial_2 \phi}{k} \in \mathcal{M}_2^{2k-1}. \quad \text{Logo,}$$

como $\frac{3x\partial_2 \phi}{k} \in \mathcal{M}_2^{2k-1}$ este irá recair em um dos casos anteriores.

Portanto, qualquer $\alpha \in \mathcal{M}_2^{2k-1}$, $\alpha \in \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial(f+\phi) \rangle + \mathcal{M}_2^{2k}$, $\forall \phi \in \mathcal{M}_2^{2k-1}$, ou seja,

$$\mathcal{M}_2^{2k-1} \subset \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial(f+\phi) \rangle + \mathcal{M}_2^{2k}, \quad \forall \phi \in \mathcal{M}_2^{2k-1}.$$

Por (I-5), concluimos que f é $(2k-2)$ -determinado.

(6) Se $f \in \mathcal{M}_2^2$ independe da variável x , então f não é finitamente determinado.

De fato, se $f(x,y) = h(y)$, então

$$\langle \partial f \rangle = \langle 0, \frac{dh}{dy} \rangle = \langle \frac{dh}{dy} \rangle. \quad \text{Logo,}$$

$$\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle = \langle x \cdot \frac{dh}{dy}, y \frac{dh}{dy} \rangle.$$

Observemos que $x^k \notin \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle$, $k \geq 1$, o que mostra que f não é finitamente determinado, pois

$$\mathcal{M}_2^k \not\subset \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle, \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

Se observarmos o germe $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ definido por $f(x,y) = x^2 y$, vemos que $y^\alpha \notin \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle$, $\forall \alpha \geq 1$, ou seja,

$$\mathcal{M}_2^{k+1} \not\subset \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle, \quad \forall k \geq 0.$$

Portanto, a recíproca do resultado acima não é verdadeira, uma vez que f não é finitamente determinado, embora dependa das variáveis x e y .

(7) Se $f \in \mathcal{M}_n^2$ for finitamente determinado, então

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} = n.$$

A recíproca é falsa. De fato, seja $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, definido por $f(x, y) = x^2 y$, f não é finitamente determinado, muito embora

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\langle xy, x^2 \rangle}{\langle x^3, x^2 y, xy^2 \rangle} = 2$$

Vamos partir agora em busca de uma demonstração do teorema I-5.

Dado $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, consideremos

$$\Delta_F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial y_1}(x, 0), \frac{\partial F}{\partial y_2}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n}(x, 0) \right\rangle$$

- PROPOSIÇÃO I-6 :

Suponhamos que $F \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Se $F(x, 0) \in \mathcal{M}_n \cdot \Delta_F^2$, então existem germes $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{M}_n \cdot \Delta_F$ tais que

$$F(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) = 0,$$

nas vizinhanças da origem do $\mathbb{R}^n$.

- DEMONSTRAÇÃO:

Tomemos $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$. Por Taylor, nas vizinhanças de $(x, 0)$, obtemos que $F(x, y) = F(x, 0) + d_y F(x, 0) \cdot y + G(x, y) \cdot y^2$, onde $G(x, y)$ é bilinear, dependendo da classe C^∞ de x e y .

Como $F(x, 0) \in \mathcal{M}_n \cdot \Delta_F^2$, segue que

$$F(x, 0) = \sum_{i=1}^s \alpha_i(x) \cdot \beta_i(x) \cdot \gamma_i(x),$$

onde $\alpha_i(x) \in \mathcal{M}_n$, $\beta_i(x)$ e $\gamma_i(x) \in \Delta_F$, $i=1, \dots, s$.

Logo,

$$\gamma_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, 0) \cdot g_{ji}(x) = d_Y F(x, 0) \cdot g_i(x),$$

onde $g_i = (g_{1i}, \dots, g_{ni}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i=1, \dots, s$. Tomando $\psi_i(x) = \alpha_i(x) \cdot g_i(x)$, $i=1, \dots, s$, segue que

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= \sum_{i=1}^s \alpha_i(x) \cdot \beta_i(x) \cdot d_Y F(x, 0) \cdot g_i(x) = \\ &= d_Y F(x, 0) \cdot \sum_{i=1}^s \beta_i(x) \cdot \psi_i(x), \end{aligned}$$

para x nas vizinhanças da origem.

Consequentemente,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x, 0) + d_Y F(x, 0) \cdot y + G(x, y) \cdot y^2 = \\ &= d_Y F(x, 0) \cdot \sum_{i=1}^s \beta_i(x) \cdot \psi_i(x) + d_Y F(x, 0) \cdot y + G(x, y) \cdot y^2, \end{aligned}$$

nas vizinhanças da origem de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Consideremos agora $y = \sum_{i=1}^s \beta_i(x) \cdot \mu_i(x)$,
 $\mu_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i=1, \dots, s$.

Portanto,

$$\begin{aligned} G(x, y) \cdot y^2 &= G(x, \sum_{i=1}^s \beta_i(x) \cdot \mu_i(x)) \cdot \left(\sum_{i=1}^s \beta_i(x) \cdot \mu_i(x) \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^s \beta_i(x) \cdot G(x, \sum_{k=1}^s \beta_k(x) \cdot \mu_k(x)) \cdot (\mu_i(x), \sum_{j=1}^s \beta_j(x) \cdot \mu_j(x)) = \\ &= d_Y F(x, 0) \cdot \sum_{i=1}^s h_i(x) \cdot G(x, \sum_{k=1}^s \beta_k(x) \cdot \mu_k(x)) \cdot (\mu_i(x), \sum_{j=1}^s \beta_j(x) \cdot \mu_j(x)) = \end{aligned}$$

$$= d_Y F(x, 0) \cdot \sum_{i=1}^S h_i(x) \cdot \sum_{j=1}^S \beta_j(x) \cdot G(x, \sum_{k=1}^S \beta_k(x) \cdot \mu_k(x)) \cdot (\mu_i(x), \mu_j(x)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= d_Y F(x, 0) \cdot \left(\sum_{i=1}^S \beta_i(x) \psi_i(x) + \sum_{i=1}^S \beta_i(x) \cdot \mu_i(x) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^S h_i(x) \cdot \sum_{j=1}^S \beta_j(x) \cdot G(-) \cdot (\mu_i(x), \mu_j(x)) \right) = \\ &= d_Y F(x, 0) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^S \beta_i(x) \left[\psi_i(x) + \mu_i(x) + \sum_{j=1}^S h_j(x) \cdot G(-) \cdot (\mu_i(x), \right. \right. \\ &\left. \left. , \mu_j(x)) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Seja $B: R^{sn} \times R^n \rightarrow R^{sn}$ definido por:

sendo $(\mu, x) = (\mu_1, \dots, \mu_s, x) \in R^n \times \dots \times R^n$,

$$\begin{aligned} B(\mu, x) &= (\psi_1(x), \dots, \psi_s(x)) + (\mu_1, \dots, \mu_s) + \left(\sum_{j=1}^S h_j(x) \cdot G(-) \cdot \right. \\ &(\mu_1, \mu_j), \dots, \sum_{j=1}^S h_j(x) \cdot G(-) \cdot (\mu_s, \mu_j)) = (\psi_1(x) + \mu_1 + \sum_{j=1}^S h_j(x) \cdot \\ &\cdot (\mu_1, \mu_j), \dots, \psi_s(x) + \mu_s + \sum_{j=1}^S h_j(x) \cdot G(-) (\mu_s, \mu_j)). \end{aligned}$$

Como $\psi_i(0) = 0$, segue que $B(0, 0) = 0$. Também temos que $d_{\mu} B(0, 0) = id_{sn}$. Logo, podemos tomar $\mu_1 = \mu_1(x), \dots, \mu_s = \mu_s(x)$, nas vizinhanças de $0 \in R^n$, com $\mu_1(0) = \mu_2(0) = \dots = \mu_s(0)$, tal que $B(\mu(x), x) = 0$.

Então, tomando $\phi(x) = (\beta_1(x) \cdot \mu_1(x), \dots, \beta_s(x) \cdot \mu_s(x))$, teremos que $F(x, \phi(x)) = 0$, para x nas vizinhanças de $0 \in R^n$.

Observemos que $\phi_i(x) = \beta_i(x) \mu_i(x)$, $i=1, \dots, s$,

onde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_s)$. Como $\beta_i \in \Delta_F$, segue que $\phi_1, \dots, \phi_s \in \mathcal{M}_n \cdot \Delta_F$.

- OBSERVAÇÕES :

A proposição I-6 foi demonstrada inicialmente por J.C. Tougeron (ver [10], pág. 13), para germes de funções $C^\infty f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, W.M. Tadini (ver [18], pág. 2) encontrou algumas condições que generalizam tal resultado para o caso $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \rightarrow \mathbb{R}^q, 0$ ($q \geq 1$).

- APLICAÇÃO :

Seja $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, $f \in \mathcal{M}_n^2$, tal que $\mathcal{M}_n^k \subset \langle \partial f \rangle$. Então, f é $2k$ -determinado.

- DEMONSTRAÇÃO:

Seja $g: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ tal que $j^{2k}(f) = j^{2k}(g)$. Devemos mostrar que $f \sim g$, ou seja, que existe $\psi \in \mathcal{R}$ tal que $f \circ \psi = g$.

Tomemos $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $F(x, y) = f(x+y) - g(x)$. Logo, $F(x, 0) = f(x) - g(x) \in \mathcal{M}_n^{2k+1}$ e $\Delta_F = \langle \partial f \rangle$. Portanto, $F(x, 0) \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{M}_n^{2k} \subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle^2$. Por I-6, existe ϕ , com $F(x, \phi(x)) = 0$ nas vizinhanças da origem do $\mathbb{R}^n$, onde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ e $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle \subset \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^2$. Segue que $\psi(x) = x + \phi(x)$ é tal que $\psi \in \mathcal{R}$, e, ainda, $f \circ \psi(x) = f(x + \phi(x)) = g(x)$.

- OBSERVAÇÕES :

(1) Sejam $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, $f \in \mathcal{M}_n^2$, e $g \in \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle^2$

Então, $f+g$ é equivalente a f .

De fato, consideremos $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ definido por $F(x,y) = f(x+y) - f(x) - g(x)$. Logo, $F(x,0) \in \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle^2 = \mathcal{M}_n \cdot \Delta_F^2$, e, então, existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{M}_n^2$ tais que

$$F(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) = 0$$

nas vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}^n$. Tomando $\psi(x) = x + \phi(x)$, onde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, teremos que

$$(f \circ \psi)(x) = f(x + \phi(x)) = F(x, \phi(x)) + f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

com $\psi \in \mathcal{R}$.

(2) Existe $y=y(x)$, com $y(0) = 0$, solução da equação

$$x^{2p+1} + x^p y + y^q = 0,$$

onde p e q são inteiros positivos.

De fato, consideremos $q \geq 2$. Tomando $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ definido por $F(x,y) = x^{2p+1} + x^p y + y^q$. segue que $\Delta_F = \langle x^p \rangle$. Logo, $F(x,0) = x^p \cdot x^{p+1} \in \mathcal{M}_1 \cdot \Delta_F^2$. Portanto, existe $y=y(x)$, com $y(0) = 0$, e $F(x,y(x)) = x^{2p+1} + x^p y + y^q = 0$.

(3) Consideremos $\phi: G \times M \rightarrow M$ uma ação C^∞ , onde G é grupo de Lie e M variedade diferenciável C^∞ , ambos de dimensão finita.

Se $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G \cdot x$ é um caminho C^∞ em $G \cdot x$, com $\alpha(0) = x$, então existe um caminho C^∞ $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow G$, com $\gamma(0) = 1_G$, tal que $\phi(\gamma(t), x) = \alpha(t)$, $\forall t \in (-\delta, \delta)$, com $0 < \delta < \epsilon$.

Observemos que $\phi_x: G \rightarrow G \cdot x$ é submersão, sendo que $\phi_x(\gamma(t)) = \alpha(t)$, onde $\phi_x(g) = \phi(g, x)$.

(4) Seja N subvariedade conexa de M . Então, para algum $x \in M$:

" $N \subset G \cdot x$ se, e somente se, $\left\{ \begin{array}{l} (a) \ T_Y(N) \subset T_Y(G \cdot x), \ \forall Y \in N \\ (b) \ \dim_{\mathbb{R}} T_Y(G \cdot Y) = \text{constante}, \\ \quad \forall Y \in N, \end{array} \right.$

onde $T_\alpha(A)$ é o espaço tangente de A no ponto α ."

- PROPOSIÇÃO I-7 :

Sejam $f \in \mathcal{E}_n$ e $g = j^k(f)$

Então, $T_g(R_{\mathbb{C}}^{(k)} \cdot g) = j^k(\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle)$.

- DEMONSTRAÇÃO :

Pela observação anterior (3), podemos afirmar que todo vetor tangente a $R^{(k)}$ em g é da forma

$$\left. \frac{d}{dt} (g \circ \gamma(t)) \right|_{t=0},$$

onde $\gamma(t)$ é um caminho C^∞ em $R^{(k)}$, com $\gamma(0) = 1_{R^{(k)}}$.

Como $R^{(k)}$ é aberto em $J^k(n, n)$, então

$$T_{1_{R^{(k)}}}(R^{(k)}) = J^k(n, n).$$

Então, suponhamos que $\gamma(t) = 1_{R^{(k)}} + t \cdot j^{(k)}(h)$, onde $h = (h_1, \dots, h_n)$, com $h_i \in \mathbb{M}_n$, $i=1, \dots, n$.

Daí,

$$\left. \frac{d}{dt} (g \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (j^{(k)}(f) \cdot j^k(1_{R^{(k)}} + th)) \right|_{t=0}.$$

Como $j^k(1_{R^{(k)}} + th) = (j^k(x_1 + th_1), \dots, j^k(x_n + th_n))$, temos que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (g \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \cdot (x_1 + th_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(0) \cdot (x_n + th_n) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) \cdot (x_1 + th_1)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \cdot (x_1 + th_1)(x_2 + th_2) + \dots + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(0) \cdot (x_n + th_n)^2 \right) + \dots + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}(0) \cdot (x_n + th_n)^k \right]_{t=0} = \\ &= h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \right) x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \right) x_2 + \dots \right) + h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) \right) x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) \right) x_2 + \dots \right) + \dots = \end{aligned}$$

$$= h_1 \cdot j^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + h_2 \cdot j^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + \dots + h_n \cdot j^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = j^k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i \right)$$

Vamos agora à demonstração do teorema I-5 de P. Stefan.

Consideremos $f \in \mathcal{M}_n^2$. Inicialmente, mostraremos que f é k -determinado, sempre que valer a inclusão:

$$j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{k+1}) \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g)>}), \forall g \in \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Temos que $j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g)>}) = j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g')>})$ para quaisquer g e $g' \in \mathcal{M}_n^{k+1}$, pois

$$\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g)>} + \mathcal{M}_n^{k+1} = \mathcal{M}_n^{<\partial(f+g')>} + \mathcal{M}_n^{k+1}, \forall g, g' \in \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Então, se $h = j^{k+1}(f)$, por (I-7), obtemos que

$T_h(R^{(k+1)} \cdot h) = j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial f>}) = j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g)>})$, para $g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$. Segue que para todo $\delta \in j^{k+1}(f + \mathcal{M}_n^{k+1})$, isto é, $\delta = j^{k+1}(f+g)$ com $g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$, teremos que

$$T_h(R^{(k+1)} \cdot h) = j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g)>}) = T_\delta(R^{(k+1)} \cdot \delta).$$

Observemos que para todo $\delta \in j^{k+1}(f + \mathcal{M}_n^{k+1})$,

$$\dim_{R T_h}(R^{(k+1)} \cdot h) = \dim_R R^{(k+1)} \cdot \delta = \dim_{R T_\delta}(R^{(k+1)} \cdot \delta),$$

e, ainda,

$$\begin{aligned} T_\delta(j^{k+1}(f + \mathcal{M}_n^{k+1})) &= j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{k+1}) \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g)>}) = \\ &= T_\delta(R^{(k+1)} \cdot \delta) \quad \text{se} \quad \delta = j^{k+1}(f+g). \end{aligned}$$

Logo, para todo $g \in \mathcal{M}_n$ com $j^k(g) = j^k(f) + \mathcal{M}_n^{k+1}$, teremos que:

$$j^{k+1}(go\gamma) = j^{k+1}(f) \text{ para algum } \gamma \in R^{(k+1)}.$$

$$\text{Se } j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{k+1}) \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g)>}), \forall g \in \mathcal{M}_n^{k+1},$$

segue que

$$j^{k+2}(\mathcal{M}_n^{k+2}) \subset j^{k+2}(\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g)>}), \forall g \in \mathcal{M}_n^{k+2}.$$

Assim sendo, deduzimos que se $j^{k+1}(g) = j^{k+1}(f)$, então existe $\gamma' \in R^{(k+1)}$ tal que $j^{k+2}(go\gamma') = j^{k+2}(f)$. Repetindo o processo indutivamente concluímos que:

"para todo inteiro positivo s , existe $\gamma \in R^{(k+1)}$ tal que $j^{k+s}(go\gamma) = j^{k+s}(f)$, sempre que $j^k(g) = j^k(f)$."

Por outro lado,

$$j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{k+1}) \subset j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial f>}) \subset j^{k+1}(<\partial f>).$$

Logo,

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset <\partial f> + \mathcal{M}_n^{k+2},$$

e, por Nakayama, concluímos que

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset <\partial f>. \text{ Então } f \text{ é } (2k+2)\text{-determinado.}$$

Portanto, se $s \geq k+2$ e $j^k(g) = j^k(f)$, então $j^{2k+2}(go\gamma) = j^{2k+2}(f)$ para algum $\gamma \in R^{(k+1)}$. Logo, $f = go\psi$ para algum $\psi \in R$, donde acarreta a k -determinação de f .

Suponhamos agora que f seja k -determinado. Então $j^{k+1}(f + \mathcal{M}_n^{k+1})$ está contido em uma única $R^{(k+1)}$ -órbita. Se $T_\delta(j^{k+1}(f + \mathcal{M}_n^{k+1})) = j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{k+1}) \subset T_\delta(R^{(k+1)} \cdot \delta) = j^{k+1}(\mathcal{M}_n^{<\partial(f+g)>})$, $\forall g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$ e $\forall \delta \in j^{k+1}(f + \mathcal{M}_n^{k+1})$.

Portanto, concluímos que: "f é k-determinado se, e somente se, $j^{k+1}(\mathfrak{M}_n^{k+1}) \subset j^{k+1}(\mathfrak{M}_n^{<\partial(f+g)>})$, $\forall g \in \mathfrak{M}_n^{k+1}$ se, e somente se, $\mathfrak{M}_n^{k+1} \subset \mathfrak{M}_n^{<\partial(f+g)>}$, $\forall g \in \mathfrak{M}_n^{k+1}$ ".

7. CODIMENSÃO

Seja $f \in \mathfrak{M}_n^2$.

A codimensão de f, denotada por $\text{cod}(f)$, é igual a dimensão do espaço vetorial real $\frac{\mathfrak{M}_n}{<\partial f>}$.

- EXEMPLOS:

(1) Se $f = x^k \in \mathfrak{M}_1$, então $\text{cod}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\langle x \rangle}{\langle x^{k-1} \rangle} = k-2$, com uma base $\{x, x^2, \dots, x^{k-2}\}$.

(2) Se $f = x^2y \pm y^k \in \mathfrak{M}_n^2$, então

$$\text{cod}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle xy, x^2 \pm ky^{k-1} \rangle} = k,$$

com uma base $\{x, y, y^2, \dots, y^{k-1}\}$.

(3) Se $f = x^2y \in \mathfrak{M}_n^2$, então

$$\text{cod}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle xy, x^2 \rangle} = \infty.$$

Denotaremos por $\text{det}(f)$ o menor inteiro k tal que f é k-determinado.

- LEMA I-8 :

- (a) $\text{cod}(f)$ é finita se, e somente se, $\text{det}(f)$ também é finito.
- (b) Se $\text{cod}(f)$ é finita, então $\text{det}(f)-2 \leq \text{cod}(f)$.

- DEMONSTRAÇÃO :

(a) Suponhamos inicialmente que $\det(f)$ é finito. Então, f é finitamente determinado, acarretando que para algum $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, tenhamos $\mathfrak{M}_n^k \subset \mathfrak{M}_n \langle \partial f \rangle \subset \langle \partial f \rangle$.

Segue que

$$\text{cod}(f) = \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n}{\langle \partial f \rangle} \leq \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_n^k} \leq \dim_R \frac{e_n}{\mathfrak{M}_n^k} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

é finito.

Tomemos a sequência de inclusões:

$$\frac{\mathfrak{M}_n}{\langle \partial f \rangle} = \frac{\mathfrak{M}_{n+\langle \partial f \rangle}}{\langle \partial f \rangle} \supset \frac{\mathfrak{M}_{n^2+\langle \partial f \rangle}}{\langle \partial f \rangle} \supset \dots$$

Consideremos agora $\text{cod}(f)$ finita. Segue da sequência acima que,

$$\text{cod}(f) = \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n}{\langle \partial f \rangle} = \dim_R \frac{\mathfrak{M}_{n+\langle \partial f \rangle}}{\langle \partial f \rangle} \geq \dim_R \frac{\mathfrak{M}_{n^2+\langle \partial f \rangle}}{\langle \partial f \rangle} \geq \dots$$

Como $\text{cod}(f)$ é finita

$$\exists k \geq 2, k \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \frac{\mathfrak{M}_n^{k-1+\langle \partial f \rangle}}{\langle \partial f \rangle} = \frac{\mathfrak{M}_n^k+\langle \partial f \rangle}{\langle \partial f \rangle}.$$

Portanto, teremos:

$$\mathfrak{M}_n^{k-1} \subset \mathfrak{M}_n^k + \langle \partial f \rangle = \langle \partial f \rangle + \mathfrak{M}_n \cdot \mathfrak{M}_n^{k-1}$$

e, pelo Lema de Nakayama, concluímos que

$$\mathfrak{M}_n^{k-1} \subset \langle \partial f \rangle. \text{ Logo, } \mathfrak{M}_n^{k-1} \subset \mathfrak{M}_n^2 \langle \partial f \rangle \text{ e, então, tem-se}$$

que f é k -determinado, o que acarreta que $\det(f) \leq k$.

- (b) Consideremos $\text{cod}(f)$ finita. Segue, da parte (a) acima, que $\exists k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, tal que f é k -determinado. Podemos escolher um elemento da sequência de inclusões acima de forma que a sua dimensão como $\mathbb{R}$ -espaço vetorial seja $k-2$. Logo, $\text{cod}(f) \geq k-2$. Portanto, $\text{cod}(f) \geq k-2 \geq \text{det}(f)-2$.

- TEOREMA I-9 :

Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ com $\text{cod}(f) < \infty$. Então:

- (a) $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} = n$ e $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$ é uma base desse espaço.
- (b) $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{M}_n}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} = \text{cod}(f) + n$.
- (c) Se $0 \leq \text{cod}(f) \leq k-2$, então $R^{(k)} \cdot j^{(k)}(f)$ é subvariedade de $\frac{\mathcal{M}_n^2}{\mathcal{M}_n^{k+1}}$ codimensão igual a $\text{cod}(f)$.

- DEMONSTRAÇÃO :

- (a) Como $\langle \partial f \rangle$ é um ideal de $\mathcal{M}_n$ gerado por

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}, \text{ cada } g \in \langle \partial f \rangle \text{ é dado por}$$

$$g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \text{ com } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Segue que,

$$g = \sum_{i=1}^n \alpha_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i(0)) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

ou seja, $\langle \partial f \rangle = \langle \partial f \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \partial f \rangle \mathcal{M}_n$. Como

$$\frac{\langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} = \frac{\langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle + \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} \approx \frac{\langle \partial f \rangle + \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle},$$

segue que $\dim_R \frac{\langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} \leq n$.

Suponhamos que $\dim_R \frac{\langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} < n$. Então, $\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \}$, $i=1, \dots, n$, são R -linearmente dependentes. Segue que, existem escalares reais $a_1, \dots, a_n$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \text{ Assim,}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle, \text{ e, portanto,}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \text{ com } u_i \in \mathcal{M}_n, i=1, \dots, n.$$

Consideremos X o germe de campo vetorial C^∞ , definido nas vizinhanças de $0 \in R^n$ por

$$X = \sum_{i=1}^n (a_i - u_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Como nem todos os a_i são nulos, teremos que

$$X(0) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \neq 0.$$

Assim sendo, podemos escolher coordenadas locais $y_1, y_2, \dots, y_n$, nas vizinhanças de $0 \in R^n$, tais que $X = \partial / \partial y_1$. Então, $X(f) = \partial f / \partial y_1 = 0$. Segue que, f tem um representante o qual depende somente de $y_2, \dots, y_n$, e, deste fato, concluimos que f não é finitamente determinado ($f \in \mathcal{M}_n^2$). Logo, $\text{cod}(f)$ não é finita, contra nossa hipótese.

Portanto,

$$\dim_R \frac{\langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} = n \text{ e } \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \text{ é uma base de}$$

$$\frac{\langle \partial f \rangle}{\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}.$$

(b) Temos que

$$\frac{\mathfrak{M}_n}{\langle \partial f \rangle} \cong \frac{\mathfrak{M}_n / \mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}{\langle \partial f \rangle / \mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}.$$

Segue daí que,

$$\dim_R \frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} = \dim_R \frac{\langle \partial f \rangle}{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} + \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n}{\langle \partial f \rangle} = n + \text{cod}(f).$$

(c) Observemos que a ação considerada é $\phi: R^{(k)} \times \frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_n^{k+1}} \rightarrow \frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_n^{k+1}}.$

Sejam $f \in \mathfrak{M}_n^2$ e $g = j^k(f)$, $k \geq 2$. Por (I-7), $T_g(R^{(k)} \cdot g) = j^k(\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle)$. Por outro lado, $\text{det}(f) - 2 \leq \text{cod}(f) - 2 \leq k - 2$, o que implica que, $\text{det}(f) \leq k$. Assim sendo, f é k -determinado, e, então, $\mathfrak{M}_n^{k+1} \subset \mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle$. Daí,

$$j^k(\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle) \cong \frac{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}{\mathfrak{M}_n^{k+1}}.$$

A codimensão de $R^{(k)} \cdot g$ em $\mathfrak{M}_n^2 / \mathfrak{M}_n^{k+1}$ é

$$\begin{aligned} \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n^2}{\mathfrak{M}_n^{k+1}} - \dim T_g(R^{(k)} \cdot g) &= \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n^2}{\mathfrak{M}_n^{k+1}} - \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}{\mathfrak{M}_n^{k+1}} = \\ &= \dim_R \left(\frac{\mathfrak{M}_n^2}{\mathfrak{M}_n^{k+1}} \right) / \left(\frac{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}{\mathfrak{M}_n^{k+1}} \right) = \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n^2}{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}. \end{aligned}$$

Observemos que,

$$\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_n^2} \cong \left(\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} \right) / \left(\frac{\mathfrak{M}_n^2}{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} \right). \text{ Segue daí que,}$$

$$n = \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_n^2} = \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle} - \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n^2}{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}. \text{ Logo,}$$

$$n = \text{cod}(f) + n - \dim_R \frac{\mathfrak{M}_n^2}{\mathfrak{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle}.$$

Portanto, a codimensão de $R^{(k)} \cdot j^k(f)$ em $\frac{\mathfrak{M}_n^2}{\mathfrak{M}_n^{k+1}}$ é igual a $\text{cod}(f)$.

- OBSERVAÇÕES :

- (1) Segundo a ação ϕ descrita na parte (c) acima, as $R^{(k)}$ -órbitas são subvariedades imersas de $\mathfrak{M}_n^2 / \mathfrak{M}_n^{k+1}$.
- (2) Siersma (ver [12]) apresenta um método bastante simples e eficaz para o cálculo da codimensão de germes de funções em duas variáveis.

Consideremos os monômios em duas variáveis $\{x, y\}$, arranjados do seguinte modo:

O diagrama contém os geradores canônicos de $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2^2, \dots$. O método é mais simples quando $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$ são monômios. Neste caso, sublinhamos no diagrama acima, os monômios que aparecem em $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$, e, ainda, todos os seus múltiplos.

O número de monômios não sublinhados é a codimensão de f .

- EXEMPLOS :

(1) Seja $f(x,y) = x^{k+1} + y^2$, $k \geq 1$.

Então, $\partial f / \partial x = (k+1) \cdot x^k$ e $\partial f / \partial y = 2y$.

Portanto, $\text{cod}(f) = k-1$.

(2) Seja $f(x,y) = x^3 + y^4$.

Então, $\partial f / \partial x = 3x^2$ e $\partial f / \partial y = 4y^3$.

Portanto, $\text{cod}(f) = 5$.

Para o caso onde $\partial f / \partial x$ ou $\partial f / \partial y$ não são monômios, o método fica um pouco mais delicado. Neste caso, usaremos o mesmo diagrama anterior e a parte (b) de (I-9), sublinhando no diagrama os monômios de $\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle$, e, ainda, todos os seus múltiplos.

- EXEMPLOS :

(1) Seja $f(x,y) = x^2y + y^{k-1}$, $k \geq 4$.

$$\text{Então, } \partial f / \partial x = 2xy \text{ e } \partial f / \partial y = x^2 + (k-1) \cdot y^{k-2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle &= \langle x^2y, xy^2, x^3 + (k-1) \cdot y^{k-2} \cdot x, x^2y + (k-1) \cdot y^{k-1} \rangle = \\ &= \langle x^3, x^2y, xy^2, y^{k-1} \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \text{cod}(f) = k+1 - 2 = k-1$$

(2) Seja $f(x,y) = x^3 + xy^3$.

$$\text{Então, } \partial f / \partial x = 3x^2 + y^3 \text{ e } \partial f / \partial y = 3xy^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle &= \langle x, y \rangle \cdot \langle 3x^2 + y^3, 3xy^2 \rangle = \langle 3x^3 + xy^3, x^2y^2, 3x^2y + y^4, xy^3 \rangle = \\ &= \langle x^3, xy^3, x^2y^2, 3x^2y + y^4 \rangle. \end{aligned}$$

Observemos que $x^2y + \mathfrak{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle$ e $y^4 + \mathfrak{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle$ são R-linearmente dependentes, uma vez que

$$3(x^2y + I) + 1 \cdot (y^4 + I) = I, \text{ onde } I = \mathfrak{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle.$$

$$\text{E, ainda, } y^5 \in \mathfrak{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle.$$

$$\{x, y, x^2, xy, y^2, xy^2, y^3, y^4\} \text{ ou } \{x, y, x^2, xy, y^2, xy^2, y^3, x^2y\}$$

como uma base. Segue que $\text{cod}(f) = 8 - 2 = 6$.

8. GERMES DE FUNÇÕES QUASE-HOMOGÊNEA E SEMI-QUASE-HOMOGÊNEA

Consideremos um germe $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, $f \in \mathfrak{M}_n^2$, e, ainda, um sistema de coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$, nas vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Definimos o número de Milnor, e denotamos por $\mu(f)$, como sendo a dimensão do espaço vetorial real $\mathfrak{e}_n / \langle \partial f \rangle$, isto é,

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{e}_n}{\langle \partial f \rangle}.$$

Como $\mathfrak{e}_n / \langle \partial f \rangle \cong \mathfrak{e}_n / \mathfrak{M}_n \oplus \mathfrak{M}_n / \langle \partial f \rangle$, uma vez que $\langle \partial f \rangle \subset \mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{e}_n$, vemos facilmente que $\mu(f) = 1 + \text{cod}(f)$.

- OBSERVAÇÕES :

(1) Seja $f \in \mathfrak{M}_n^2$.

São equivalentes as seguintes afirmações:

- i) $\mu(f) < \infty$
- ii) $\text{cod}(f) < \infty$
- iii) f é finitamente determinado.

(2) Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ com $\mu(f) < \infty$. Pela observação (1) anterior, f é finitamente determinado, digamos k -determinado.

Sabemos que $J^k \simeq R \oplus \mathcal{M}_n / \mathcal{M}_n^2 \oplus \mathcal{M}_n^2 / \mathcal{M}_n^{k+1}$, e, ainda, por (I-9) temos que $R^{(k)} \cdot j^k(f)$ é subvariedade de $\mathcal{M}_n^2 / \mathcal{M}_n^{k+1}$, com codimensão igual a $\text{cod}(f)$ em $\mathcal{M}_n^2 / \mathcal{M}_n^{k+1}$.

Portanto, a codimensão de $R^{(k)} \cdot j^k(f)$ em J^k será:

$$\begin{aligned} \text{cod}_{J^k} R^{(k)} \cdot j^k(f) &= \dim_R J^k - \dim_R R^{(k)} \cdot j^k(f) = \dim_R R + \\ &+ \dim_R \frac{\mathcal{M}_n}{\mathcal{M}_n^2} + \dim_R \frac{\mathcal{M}_n^2}{\mathcal{M}_n^{k+1}} - \dim_R R^{(k)} \cdot j^k(f) = 1+n+\text{cod}(f). \end{aligned}$$

Segue daí que $\text{cod}_{J^k} R^{(k)} \cdot j^k(f) = \mu(f)+n$.

Adiante apresentaremos um método prático, usando do "escada de ideal", para calcular $\mu(f)$.

Uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ é dita quase-homogênea (Q-H) do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, se $f(t^{\alpha_1} x_1, \dots, t^{\alpha_n} x_n) = t^d \cdot f(x_1, \dots, x_n)$ para $t \in R - \{0\}$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são números racionais positivos.

- EXEMPLO :

Seja $f(x, y) = x^3 + xy^3$. Embora f não seja homogênea, vemos facilmente que f é Q-H do tipo $(1; 1/3, 2/9)$.

Sendo f Q-H do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, então, f se

rã também Q-H do tipo $(kd; k\alpha_1, \dots, k\alpha_n)$, para qualquer k racional positivo.

Sejam Q_{++} o conjunto dos números racionais estritamente positivos, e, $Q_{++}^n = Q_{++} \times \dots \times Q_{++}$ (n vezes), isto é, $Q_{++}^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) / \alpha_i \in Q_{++}, i=1, \dots, n\}$.

Dados um monômio $\phi(x_1, \dots, x_n) = a \cdot x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, onde $a \in R^*$ e $k_i \in Q_{++}$, $i=1, \dots, n$, e, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Q_{++}^n$, definimos "peso de ϕ em relação a α ", e denotamos por $\text{peso}_\alpha(\phi)$, como sendo o número $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n$, isto é, $\text{peso}_\alpha(\phi) = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$.

Consideremos um germe $g: R^n, 0 \rightarrow R, 0$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Q_{++}^n$. Então, definimos "peso de g em relação a α ", e denotamos por $\text{peso}_\alpha(g)$, como sendo o mínimo entre os pesos, em relação a α , dos monômios de g , obtidos em sua expansão de Taylor na origem.

- EXEMPLO :

Sejam $f(x, y) = x^3 + xy^3$ e $\alpha = (1, 2)$. Então, $\text{peso}_\alpha(f) = \min \{\text{peso}_\alpha(x^3), \text{peso}_\alpha(xy^3)\} = \min \{3, 7\} = 3$. Se considerarmos $\alpha \in Q_{++}^n$ de forma que f é Q-H do tipo $(d; \alpha)$, então $\text{peso}_\alpha(f) = d$.

Dizemos que uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ tem "filtração d em relação a α ", $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Q_{++}^n$, e denotamos por $\text{filt}_\alpha(f) = d$, se o peso de f em relação a α for maior ou igual a d .

- EXEMPLO :

Sejam $f(x) = x^3 + xy^3$ e $\alpha = (1, 2)$. Como $\text{peso}_\alpha(f) =$

$= 3$, teremos que $\text{filt}_\alpha(f) = 3$.

Dizemos que uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ é semi-quase-homogênea (S-Q-H) do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, se $f = f_0 + f_1$ com:

i) f_0 é Q-H do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$

ii) $\mu(f_0) < \infty$

iii) $\text{filt}_\alpha(f_1) > d$

- EXEMPLO :

Sejam $f(x, y) = x^3 + xy^3 + y^5$ e $\alpha = (3, 2) \in \mathbb{Q}_{++}^2$.

Temos que f não é Q-H.

Considerando $f = f_0 + f_1$, onde $f_0(x, y) = x^3 + xy^3$ e $f_1(x, y) = y^5$, segue que:

i) f_0 é Q-H do tipo $(9; 3, 2)$

ii) $\mu(f_0) = 7$

iii) $\text{filt}_\alpha(f_1) = 10$

Portanto, f é S-Q-H do tipo $(9; 3, 2)$.

- OBSERVAÇÕES :

(1) Seja $f = f_0 + f_1$ uma função S-Q-H do tipo $(d; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Então, $\mu(f) = \mu(f_0)$ (Ver [1]).

(2) Sejam f, g duas funções S-Q-H do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Então, $\mu(f) = \mu(g)$ (Ver [1]).

(3) Para a função nula, atribuímos grau ∞ , independentemente

dos pesos considerados.

(4) Seja f uma função S-Q-H do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Então,

$$\mu(f) = \left(\frac{d-\alpha_1}{\alpha_1}\right) \cdot \left(\frac{d-\alpha_2}{\alpha_2}\right) \dots \left(\frac{d-\alpha_n}{\alpha_n}\right). \quad (\text{Ver [16]})$$

(5) Toda função Q-H é polinomial.

(6) Uma função S-Q-H não necessariamente é polinomial.

(7) O conjunto formado pelas funções $f: R^n, 0 \rightarrow R, 0$ que são Q-H é um R-espço vetorial de dimensão finita.

9.. DETERMINAÇÃO PESADA

Sejam um germe de campo vetorial $v = (v_1, \dots, v_n): R^n, 0 \rightarrow R^n, 0$, dado por

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ e } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Q_{++}^n$$

Então, dizemos que v "tem filtração d com relação a α ", se cada v_i tem filtração $d+\alpha_i$ com relação a α .

Em [20], Tadini demonstra a proposição:

- PROPOSIÇÃO I-10 :

Sejam um germe $f: R^n, 0 \rightarrow R, 0$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Q_{++}^n$, e, ainda, v um campo vetorial como acima.

Consideremos $\text{filt}_\alpha(f) = d$ e $\text{filt}_\alpha(v) = \delta$.

Então, $f(x+v(x)) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot v + r$, onde $\text{filt}_\alpha(r) \geq d + 2\delta$.

- PROPOSIÇÃO I-11 :

Sejam $f = f_0 + f_1$ S-Q.H do tipo $(d; \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}_{++}^n$, e, ainda, $\phi \in \langle \partial f_0 \rangle$, com $\text{filt}_\alpha(\phi) = d_0 > d$.

Então, $f + \phi$ é equivalente a $f + \lambda$, onde $\text{filt}_\alpha(\lambda) > d_0$.

- DEMONSTRAÇÃO :

Seja $\phi = \phi_0 + \phi_1$, onde ϕ_0 é Q-H do tipo $(d_0; \alpha)$ e $\text{filt}_\alpha(\phi_1) > d_0$.

Como $\phi \in \langle \partial f_0 \rangle$, segue que existem $w_1, \dots, w_n$ tais que

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(x).$$

Observemos que $\text{peso}_\alpha(f_0) = d$. Logo, $\text{peso}_\alpha\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_i}\right) = d - \alpha_i$,

$\text{peso}_\alpha(\phi_0) = d_0$ e $\text{filt}_\alpha(\phi_1) > d_0$. Então, podemos escrever

$$\phi_0(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(x),$$

onde $\text{peso}_\alpha(v_i) = d_0 - d + \alpha_i$. Logo,

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

é um campo de filtração $d_0 - d$. Suponhamos $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, e, consideremos as variáveis $y = (y_1, \dots, y_n)$ com $\text{peso}_\alpha(y_i) = \alpha_i$.

Seja $x = y - v(y) = (y_1 - v_1(y), \dots, y_n - v_n(y))$.

Temos que $\text{peso}_\alpha(v_i) = d_0 - d + \alpha_i > \alpha_i = \text{peso}_\alpha(y_i)$, $i=1, \dots, n$.

Como $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, segue que:

- sendo $\text{peso}_\alpha(v_1) > \alpha_1 \geq \alpha_i$, $i \geq 1$, então, a parte linear de v_1 é identicamente nula ($v_1 \in \mathcal{M}_n^2$);
- para $i \geq 2$, sendo que $\text{peso}_\alpha(v_i) > \alpha_i \geq \alpha_j$, $j \geq i$, então, a parte linear de v_i depende, de no máximo, das variáveis $y_1, \dots, y_{i-1}$.

Nestas condições, a matriz jacobiana de v , na origem, tem a forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ * & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \dots & * & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando $\psi(y) = y - v(y)$, temos que $\psi \in R$.

Logo,

$$\begin{aligned} f(y - v(y)) &= f_0(y - v(y)) + f_1(y - v(y)) + \phi_0(y - v(y)) + \\ &+ \phi_1(y - v(y)). \end{aligned}$$

Como $\text{peso}_\alpha(f_0) = d$, $\text{peso}_\alpha(\phi_0) = d_0$, $\text{filt}_\alpha(f_1) > d$, $\text{filt}_\alpha(\phi_1) > d_0$ e v é um campo com $\text{filt}_\alpha(v) = d_0 - d$, segue de (I-10) que:

$$f_0(y - v(y)) = f_0(y) - \sum_{i=1}^n v_i(y) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial y_i}(y) + r_1(y),$$

onde $\text{filt}_\alpha(r_1) \geq d + 2(d_0 - d) = d_0 + (d_0 - d)$.

$$f_1(y - v(y)) = f_1(y) - \sum_{i=1}^n v_i(y) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(y) + r_2(y),$$

onde $\text{filt}_\alpha(r_2) \geq d + 2(d_0 - d) = d_0 + (d_0 - d)$.

$$\phi_0(y-v(y)) = \phi_0(y) - \sum_{i=1}^n v_i(y) \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial y_i}(y) + r_3(y),$$

$$\text{onde } \text{filt}_\alpha(r_3) \geq d_0 + 2(d_0 - d) > d_0 + (d_0 - d)$$

$$\phi_1(y-v(y)) = \phi_1(y) - \sum_{i=1}^n v_i(y) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_i}(y) + r_4(y),$$

$$\text{onde } \text{filt}_\alpha(r_4) \geq d_0 + 2(d_0 - d) > d_0 + (d_0 - d)$$

Por outro lado, temos que:

$$\text{filt}_\alpha\left(v_i \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y_i}\right) > d_0 - d + \alpha_i + d_0 - \alpha_i = d_0 + (d_0 - d), \quad i=1, \dots, n$$

$$\text{filt}_\alpha\left(v_i \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial y_i}\right) \geq d_0 - d + \alpha_i + d_0 - \alpha_i = d_0 + (d_0 - d), \quad i=1, \dots, n$$

$$\text{filt}_\alpha\left(v_i \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y_i}\right) > d_0 - d + \alpha_i + d_0 - \alpha_i = d_0 + (d_0 - d), \quad i=1, \dots, n$$

$$\text{filt}_\alpha(\phi_1) > d_0.$$

$$\text{Portanto, } f(y-v(y)) = f(y) - \lambda(y),$$

$$\text{onde } \text{filt}_\alpha(\lambda) > d_0 \quad (\lambda(y) = r_1(y) + r_2(y) + r_3(y) + r_4(y) - \phi_1(y) -$$

$$- \sum_{i=1}^n v_i(y) \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(y) - \sum_{i=1}^n v_i(y) \frac{\partial \phi_0}{\partial y_i}(y) - \sum_{i=1}^n v_i(y) \frac{\partial \phi_1}{\partial y_i}(y))$$

$$\text{Logo, } f \circ \psi = f + \lambda, \text{ com } \text{filt}_\alpha(\lambda) > d_0$$

Como consequência da técnica da demonstração acima, temos os corolários:

- COROLÁRIO 1:

Sejam $f \in Q-H$ do tipo $(d; \alpha)$, e, ainda, $\phi \in Q-H$ do tipo $(d_0; \alpha)$, com $d_0 > d$ e $\phi \in \langle \partial f \rangle$.

Então, $f + \phi$ é equivalente a um germe da forma $f + \lambda$, com $\text{filt}_\alpha(\lambda) \geq 2d_0 - d$.

- COROLÁRIO 2:

Sejam $f = f_0 + f_1$, com f_0 Q-H do tipo $(d; \alpha)$, e, ainda, ϕ polinômio com $\text{peso}_\alpha(\phi) = d_0 > d$ e $\phi \in \langle \partial f_0 \rangle$.

Então, $f + \phi$ é equivalente a um germe da forma $f + \lambda$, com $\text{filt}_\alpha(\lambda) > d_0$.

- COROLÁRIO 3:

Seja $f = f_0 + f_1$ com f_0 Q-H do tipo $(d; \alpha)$, $\text{filt}_\alpha(f_1) = d_0 > d$ e $f_1 \in \langle \partial f_0 \rangle$.

Então, $f = f_0 + f_1$ é equivalente a um germe da forma $f_0 + f_2$, com $\text{filt}_\alpha(f_2) > d_0$.

- EXEMPLOS:

(1) Seja $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ dado por $f(x, y) = x^2 + y^4$. Logo, f é Q-H do tipo $(4; 2, 1)$.

Tomemos $\phi(x, y) = y^3$ e $\psi(x, y) = -y^4$. Segue que $\text{peso}_\alpha(\phi) = 3$ e $\text{peso}_\alpha(\psi) = 4$ ($\text{peso}_\alpha(\phi) < \text{peso}_\alpha(f)$ e $\text{peso}_\alpha(\psi) = \text{peso}_\alpha(f)$).

Temos que $\phi, \psi \in \langle \partial f \rangle$.

Observemos que $f + \phi = x^2 + y^4 + y^3$ não é equivalente a $x^2 + y^4 + \lambda$, com $\text{filt}_\alpha(\lambda) \geq 4$, e, $f + \psi = x^2$ não é equivalente a $x^2 + y^4 + \rho$, com $\text{filt}_\alpha(\rho) \geq 5$.

(2) Seja $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ dado por $f(x, y) = x^2(x^2 - y^2)$.

Consideremos $\phi \in \mathcal{M}_2^5$ da forma $\phi(x, y) = x \cdot h(x, y)$

Então, $\phi \in \langle x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4 \rangle = I$ e $h \in \mathcal{M}_2^4$.

Observemos que $\phi \in \langle \partial f \rangle = \langle 2x^3 - xy^2, x^2y \rangle$, uma vez que, todo gerador de I pertence a $\langle \partial f \rangle$.

Por outro lado, f é Q-H do tipo $(4;1,1)$, e, como $\phi \in I$ temos que $\text{filt}(\phi) \geq 5$.

Então, $x^2(x^2 - y^2) + x \cdot h(x, y)$ é equivalente a um germe da forma $x^2(x^2 - y^2) + g(x, y)$, com $g \in \mathcal{M}_2^6$.

Observemos que se g for divisível por x , então poderemos aplicar novamente (I-11).

(3) Seja $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ dado por $f(x, y) = x^3 + xy^3 + x^2y^2 + x^4$.

Consideremos $f_0(x, y) = x^3 + xy^3$ e $f_1(x, y) = x^2y^2 + x^4$.

Temos que f_0 é Q-H do tipo $(9;3,2)$,

$f_1 \in \langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle = \langle \partial f_0 \rangle$ e $\text{peso}_\alpha(f_1) = 10$, onde $\alpha = (3, 2)$.

Portanto, $f = f_0 + f_1 \sim f_0 + f_2$, com $\text{filt}_\alpha(f_2) \geq 11$.

Logo, $f_2(x, y) = (\gamma_1 x^4 + \gamma_2 x^3 y + g_1)$, $g_1 \in \mathcal{M}_2^5$.

Como $f_2 = \gamma_1 x^4 + \gamma_2 x^3 y + g_1 \in \langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle$ e

$\text{filt}_\alpha(f_2) \geq 11$, segue que $f_0 + f_2 \sim f_0 + f_3$, com $\text{filt}_\alpha(f_3) \geq 12$.

Logo, $f_3(x, y) = (\gamma x^4 + g_2)$, $g_2 \in \mathcal{M}_2^5$.

Como $f_3 = \gamma x^4 + g_2 \in \langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle$ e

$\text{filt}_\alpha(f_3) \geq 12$, segue que $f_0 + f_3 \sim f_0 + f_4$, com $\text{filt}_\alpha(f_4) \geq 13$.

Portanto, $f(x, y) = x^3 + xy^3 + x^2y^2 + x^4 \sim x^3 + xy^3 +$

$+ f_4(x, y)$, onde $f_4 \in \mathcal{M}_2^5$.

Como $x^3 + xy^3$ é 4-determinado, segue que

$f \sim x^3 + xy^3$.

Consideremos $f \in \mathcal{E}_n$ S-Q-H do tipo $(d; \alpha)$, $\alpha =$

$= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{Q}_{++}^n$, e, ainda, $k \in \mathbb{R}_{++}$.

Dizemos que f é k -determinado com relação a α (ou que f tem determinação pesada k , com relação aos pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$), e denotamos por k -det- α ou k -det- $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, se para todo g , com $\text{filt}_\alpha(g) > k$, tivermos $f+g \sim f$.

Dizemos que f é finitamente determinado com relação a α , se existir $k \in \mathbb{R}_{++}$ tal que f é k -det- α .

- TEOREMA I-12 :

Sejam $f = f_0 + f_1$ S-Q-H do tipo $(d; \alpha)$, e, $k \in \mathbb{R}_{++}$, $k \geq d$.

Suponhamos que para todo ϕ com $\text{filt}_\alpha(\phi) > k$, tem-se, $\phi \in \langle \partial f_0 \rangle$. Então, f é k -det- α .

- DEMONSTRAÇÃO :

Como $\mu(f) = \left(\frac{d-\alpha_1}{\alpha_1}\right) \dots \left(\frac{d-\alpha_n}{\alpha_n}\right) < \infty$ temos que $\text{cod}(f) < \infty$, e, então, f será finitamente determinado, digamos, s -determinado.

Por (I-11), obtemos que $f + \phi \sim f + \lambda_1$, com $\text{filt}_\alpha(\lambda_1) > \text{filt}_\alpha(\phi) > k$, e, então, $\lambda_1 \in \langle \partial f_0 \rangle$. Sendo assim, estamos em condições de aplicar novamente (I-11), e, assim procedendo, conseguiremos λ_k com grau ordinário maior do que s .

Logo, $f + \phi \sim \dots \sim f + \lambda_k$, onde $\lambda_k \in \mathcal{M}_n^{s+1}$.

Como f é s -determinado, teremos $f + \lambda_k \sim f$.

Portanto, f é k -det- α .

Consideremos $f = f_0 + f_1$ S-Q-H do tipo $(d; \alpha)$.

Denotaremos o conjunto $\{g \in E_n / \text{filt}_\alpha(g) > k \geq d\}$ por $\mathcal{W}_n^{(>k, \alpha)}$. Com estas notações, temos:

- COROLÁRIO :

Se $\mathcal{W}_n^{(>k, \alpha)} \subset \langle \partial f_0 \rangle$, então f é k -det- α .

- EXEMPLO :

Seja $f_0(x, y) = x^3 + xy^3$, f_0 é Q-H do tipo $(9; 3, 2)$.

Consideremos $k = 9$.

Seja $\phi(x, y) = x^a \cdot y^b$ com $\text{filt}_{(3, 2)}(\phi) \geq 10$, ou seja, $3a + 2b \geq 10$. Segue que

$$\phi \in I = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^4, y^5 \rangle \subset \langle \partial f_0 \rangle = \langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle.$$

Logo, $\mathcal{W}_2^{(>9, (3, 2))} \subset \langle \partial f_0 \rangle$. Portanto, f_0 é 9-det- $(3, 2)$.

Como $\mathcal{W}_2^5 \subset \mathcal{W}_2^{(>9, (3, 2))}$, segue que $f_0 + g \sim f_0$ para todo $g \in \mathcal{W}_2^5$.

Portanto, f_0 é 4-determinado.

O exemplo acima sugere um outro processo para achar um grau de determinação de f_0 .

10 - ESCADA DE UM IDEAL

Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças da origem do R^n .

Sejam $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in N^n =$

$= N \times N \times \dots \times N$ (n vezes), onde N é o conjunto dos naturais.

Dizemos que $a < b$, se existir um inteiro $k \in \{1, \dots, n\}$, tal

que $a_k < b_k$, $a_{k+1} = b_{k+1}, \dots, a_n = b_n$.

Consideremos um monômio $b \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$, onde $a = (a_1, \dots, a_n) \in N^n$ e $b \in R^*$. Definimos a sua ordem como sendo a n -upla $(a_1, \dots, a_n) = a$, e denotamos por

$$o(b \cdot x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}) = a.$$

Seja $f \in \mathcal{W}_n$. Definimos a sua ordem, e denotamos por $o(f)$, como sendo o mínimo das ordens dos monômios de sua série de Taylor na origem do R^n . Se $f = 0$, adotamos que sua ordem é ∞ .

Seja $I \subset \mathcal{W}_n$ um ideal de $\mathcal{E}_n$. Definimos a "escada de I " como sendo o conjunto $E(I) = \{o(f) / f \in I\} \subset N^n$.

Observemos que a cardinalidade do conjunto $(N^n - E(I))$ é igual à área da região A da figura acima, ou seja, a quantidade de pontos com coordenadas naturais, compreendidos na região A, será igual a $\#(N^n - E(I)) = \text{área de A}$.

- EXEMPLOS :

- (1) Consideremos $f \in E_2$ dado por $f(x,y) = \frac{2x^2+y^4}{4}$. Temos
 $I = \langle \partial f \rangle = \langle x, y^3 \rangle$.

Logo, $E(I)$ é dada geometricamente por:

$$\#(N^2 - E(I)) = 3 = \text{área de } A.$$

- (2) Consideremos $g \in E_2$ dado por $g = f \circ \phi$, onde $f(x,y) = \frac{2x^2+y^4}{4}$
e $\phi \in R_2$ é tal que $\phi(x,y) = (x^2+y, x)$.

$$\begin{aligned} \text{Então, } g(x,y) &= f \circ \phi(x,y) = f(x^2+y, x) = \\ &= \frac{2(x^2+y)^2 + x^4}{4} = \frac{3x^4 + 4x^2y + 2y^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Tomemos } J = \langle \partial g \rangle = \langle 3x^3 + 2xy, x^2 + y \rangle = \langle xy, x^2 + y \rangle.$$

Temos que $E(J)$ é dada geometricamente por

- OBSERVAÇÕES :

- (1) Embora $(2,0) \in E(J)$, $x^2 \notin J$.
- (2) A escada de $\langle \partial f \rangle$ não é um invariante da R -órbita.
- (3) $\#(N^2 - E(I)) = \#(N^2 - E(J)) = 3$
- (4) Consideremos dois ideais $I, J \subset \mathcal{W}_n$, com $I \subset J$. Temos que $E(I) \subset E(J)$.

Em Tadini, [16], temos os teoremas:

- TEOREMA I-13 :

Seja $I \subset \mathcal{W}_n$ um ideal de e_n .

Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{W}_n^k \subset I$ se, e somente se, a cardinalidade de $N^n - E(I)$ é finita, sendo igual a $\dim_{\mathbb{R}} \frac{e_n}{I}$.

- OBSERVAÇÕES :

- (1) Considerando $f \in e_n$ e $I = \langle \partial f \rangle$ temos que

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{e_n}{\langle \partial f \rangle} = \#(N^n - E(\langle \partial f \rangle)).$$

- (2) Sejam $f, g \in e_n$ tais que $f \not\sim g$. Então, $\phi^*(\langle \partial f \rangle) = \langle \partial g \rangle$, sendo que $\phi^*: e_n \rightarrow e_n$ é um isomorfismo. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{e_n}{\langle \partial f \rangle} &\sim \frac{e_n}{\langle \partial g \rangle} . \text{ Logo, } \#(N^n - E(\langle \partial f \rangle)) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{e_n}{\langle \partial f \rangle} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{e_n}{\langle \partial g \rangle} = \\ &= \#(N^n - E(\langle \partial g \rangle)). \text{ Embora a escada de um ideal } I \text{ não seja} \\ &\text{um invariante diferenciável, } \#(N^n - E(I)) \text{ o é.} \end{aligned}$$

- TEOREMA I-14 :

Seja $I \subset \mathcal{W}_n$ um ideal de e_n , com $\#(N^n - E(I)) = r < \infty$. Então, considerando $\phi_1, \dots, \phi_r$ monômios em $x_1, \dots, x_n$,

tais que $N^n - E(I) = \{o(\phi_i), i=1, \dots, r\}$, temos que $\phi_1, \dots, \phi_r$ são representantes de uma base de E_n/I como R -espaço vetorial.

-OBSERVAÇÕES :

Com o uso deste teorema, fica "fácil" calcularmos a modalidade interna de funções semi-quase-homogêneas.

11 - MODALIDADE INTERNA

Sejam $f \in E_n$ S-Q-H do tipo $(d; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\phi_1, \dots, \phi_r$ representantes monomiais de uma base do R -espaço vetorial $E_n / \langle \partial f \rangle$. Suponhamos que $\phi_1, \dots, \phi_r$ são tais que $\text{peso}_\alpha(\phi_i) \geq d, i=1, \dots, r$. Nestas condições, dizemos que f tem modalidade interna r .

- EXEMPLO :

Consideremos $f \in E_2$ dado por $f(x,y) = x^3 + y^4$.

A escala de $\langle \partial f \rangle = \langle x^2, y^3 \rangle$ é dada geometricamente por:

$$\#(N^2 - E(\langle \partial f \rangle)) = 6$$

Observemos que f é Q-H do tipo $(12;4,3)$, o que acarreta que $\mu(f) = (12-4)/4 \cdot (12-3)/3 = 6 = \#(N^2 - E(\langle \partial f \rangle))$.

Tomando $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$, $\phi_4 = xy$, $\phi_5 = y^2$ e $\phi_6 = xy^2$, temos que $\phi_1, \dots, \phi_6$ são representantes de uma base do espaço vetorial real $E_n / \langle \partial f \rangle$.

A modalidade interna de f será dada pelo número de monômios ϕ_i tais que $\text{peso}_\alpha(\phi_i) \geq 12$, $i=1, \dots, 6$; onde $\alpha = (4,3)$.

Como, $\text{peso}_\alpha(\phi_1) = 0$, $\text{peso}_\alpha(\phi_2) = 4$, $\text{peso}_\alpha(\phi_3) = 3$, $\text{peso}_\alpha(\phi_4) = 7$, $\text{peso}_\alpha(\phi_5) = 6$ e $\text{peso}_\alpha(\phi_6) = 10$.

Portanto, $\text{peso}_\alpha(\phi_i) < 12$, $i=1, \dots, 6$. Logo, f tem modalidade interna zero.

- OBSERVAÇÕES :

Temos textos relacionando os conceitos de modalidade interna com o conceito de modalidade. Para o caso de funções homogêneas os dois conceitos coincidem. É possível mostrarmos que a modalidade é maior ou igual à modalidade interna para o caso das funções semi-quase-homogêneas. Para nós é de grande interesse o resultado recente (ver [21]) dado pelo seguinte teorema:

- TEOREMA I-15 :

Seja $f \in \mathcal{W}_n^2$, $f = f_0 + f_1$ S-Q-H do tipo $(d;\alpha)$, $\alpha \in Q_{++}^n$. Suponhamos o posto (matriz hessiana de f_0) $\geq n-2$.

Então, a modalidade interna de f é igual à modalidade de f .

- OBSERVAÇÕES :

- (1) Sempre que $f \in \mathcal{M}_2^2$, f S-Q-H, teremos que modalidade interna de f é igual à modalidade de f .
- (2) Com relação ao exemplo anterior, $f(x,y) = x^3+y^4$, mostramos que f tem modalidade interna zero. Com o uso de (I-15) vemos que f é 0-modal. Usaremos esta técnica futuramente para mostrarmos que as formas normais, obtidas por Arnol'd (ver [2]), na classificação das singularidades 0-modais, são 0-modais.

12 - CÚBICAS HOMOGÊNEAS EM DUAS VARIÁVEIS

Seja $H_d(2,R)$ o R -espaço vetorial das formas homogêneas de grau d em duas variáveis.

Consideremos a ação de $GL(2,R) \cong R_2$ sobre a variedade diferenciável $H_3(2,R) \cong \mathcal{M}_2^3 / \mathcal{M}_2^4$, isto é:

$$GL(2,R) \times H_3(2,R) \rightarrow H_3(2,R)$$

$$(T, f) \mapsto f \circ T^{-1}.$$

Para cada $f \in H_3(2,R)$, denotemos a $GL(2,R)$ -órbita de f por $GL(2,R) \cdot f = \{f \circ T / T \in GL(2,R)\}$.

- PROPOSIÇÃO I-16 :

As únicas órbitas distintas, segundo a ação acima, são as órbitas de 0 , x^3 , xy^2 , x^3+xy^2 e x^3-xy^2 .

- DEMONSTRAÇÃO :

Seja $f \neq 0$, $f \in H_3(2, R)$. Então, $f(x, y) = a y^3 + b x y^2 + c x^2 y + d x^3$, $a, b, c, d \in R$.

Se $a = 0$ e $d \neq 0$ tomemos $T \in GL(2, R)$, $T(x, y) = (y, x)$. Logo $f \circ T = d y^3 + b x^2 y + c y^2 x$, com $d \neq 0$.

Se $a = d = 0$, como $f \neq 0$, então $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Suponhamos $b \neq 0$. Tomemos $T \in GL(2, R)$, $T(x, y) = (x + \lambda y, y)$. Logo, $(f \circ T)(x, y) = b \cdot (x + \lambda y) \cdot y^2 + c \cdot (x + \lambda y)^2 \cdot y = (c \lambda^2 + b \lambda) \cdot y^3 + (b + 2c \lambda) \cdot x y^2 + c x^2 y$, com $b \neq 0$. Como $b \neq 0$, existe $\lambda_0 \in R$ tal que $c \lambda_0^2 + b \lambda_0 \neq 0$.

Portanto, podemos supor $f(x, y) = a y^3 + b x y^2 + c x^2 y + d x^3$ com $a \neq 0$.

Logo,

$$\frac{f(x, y)}{x^3} = a \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^3 + b \left(\frac{y}{x}\right)^2 + c \left(\frac{y}{x}\right) + d = at^3 + bt^2 + ct + d, \text{ onde } t = \frac{y}{x}.$$

Vamos analisar a equação $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$. Pelo teorema fundamental da álgebra, existem complexos t_0 , t_1 e t_2 tal que $at^3 + bt^2 + ct + d = a(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$.

Segue que,

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y)}{x^3} &= a \left(\frac{y}{x} - t_0\right) \cdot \left(\frac{y}{x} - t_1\right) \cdot \left(\frac{y}{x} - t_2\right) = a \left(\frac{y - t_0 x}{x}\right) \cdot \left(\frac{y - t_1 x}{x}\right) \cdot \left(\frac{y - t_2 x}{x}\right) \\ &= \frac{a \cdot (y - t_0 x) \cdot (y - t_1 x) \cdot (y - t_2 x)}{x^3}. \text{ Para } x \neq 0 \text{ te} \end{aligned}$$

mos que $f(x, y) = a(y - t_0 x)(y - t_1 x)(y - t_2 x)$. Logo, por continuidade, $f(x, y) = a(y - t_0 x)(y - t_1 x)(y - t_2 x)$ para todo (x, y) .

Discutiremos agora as possibilidades que pode-

rão ocorrer para as raízes t_0 , t_1 e t_2 .

1º CASO -) t_0 é uma raiz real com multiplicidade 3.

Então, $f(x,y) = a(y-t_0x)^3$, com $a \neq 0$.

Consideremos $T \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $T(1,0) = (0,1)$ e $T(0,1) = (1,t_0)$, onde $(1,0)$ e $(0,1)$ constituem a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Logo, $T(x,y) = (y, x+t_0y)$.

Então, $f \circ T(x,y) = a \cdot x^3$. Considerando $\phi \in GL(2, \mathbb{R})$ dado por $\phi(x,y) = (\frac{x}{\sqrt[3]{a}}, y)$, teremos que $(f \circ T \circ \phi)(x,y) = x^3$.

Portanto, para $t_0 \in \mathbb{R}$ de multiplicidade 3 temos que $f \in GL(2, \mathbb{R}) \cdot x^3$.

2º CASO -) t_0 e t_1 são raízes reais distintas e t_1 de multiplicidade 2.

Então, $f(x,y) = a(y-t_0x)(y-t_1x)^2$.

Consideremos $T \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que

$T(1,0) = (1,t_1)$ e $T(0,1) = (1,t_0)$.

Logo, $T(x,y) = (x+y, t_1x+t_0y)$.

Então, $(f \circ T)(x,y) = a(t_1-t_0)^3 xy^2$. Considerando $\phi \in GL(2, \mathbb{R})$ dado por $\phi(x,y) = (\frac{x}{a(t_1-t_0)^3}, y)$, teremos que $(f \circ T \circ \phi)(x,y) = xy^2$.

Portanto, para $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq t_1$ e t_1 de multiplicidade 2, temos que $f \in GL(2, \mathbb{R}) \cdot xy^2$.

3º CASO $\rightarrow t_0, t_1$ e t_2 são raízes reais distintas.

Então, $f(x,y) = a(y-t_0x)(y-t_1x)(y-t_2x)$

Consideremos $T \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $T(1,0) = (1,t_0)$ e $T(0,1) = (\alpha, \alpha t_2)$. O coeficiente α é tal que

$(1,t_0) + \alpha(1,t_2) = b(1,t_1)$, isto é,

$$\alpha = \frac{t_0-t_1}{t_1-t_2} \text{ e } b = 1-\alpha.$$

$$\text{Logo, } T(x,y) = x(1, t_0) + y\left(\frac{t_0-t_1}{t_1-t_2}, \frac{t_0-t_1}{t_1-t_2} \cdot t_2\right) = \\ = \left(x + y \frac{t_0-t_1}{t_1-t_2}, t_0 x + t_2 y \cdot \frac{t_0-t_1}{t_1-t_2}\right).$$

Então, $(f \circ T)(x,y) = \lambda(x-y) \cdot xy$, onde

$$\lambda = a \cdot \frac{(t_2-t_0)^2 \cdot (t_0-t_1)^2}{t_2-t_1}. \text{ Considerando } \phi \in GL(2, \mathbb{R}) \text{ dado}$$

por $\phi(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$, temos que $(f \circ T \circ \phi)(x,y) = \frac{\lambda}{4} \cdot (y^3 - xy^2)$.

Tomando, agora, $\psi \in GL(2, \mathbb{R})$ dado por

$$\psi(x,y) = \left(\sqrt[3]{\frac{4}{\lambda}} \cdot y, \sqrt[3]{\frac{4}{\lambda}} \cdot x\right), \text{ com } \lambda \neq 0, \text{ uma vez que } \\ t_0 \neq t_1 \neq t_2, \text{ teremos que } (f \circ T \circ \phi \circ \psi)(x,y) = x^3 - xy^2.$$

Portanto, para t_0, t_1 e t_2 raízes reais distintas temos que $f \in GL(2, \mathbb{R}) \cdot (x^3 - xy^2)$.

4º CASO $\rightarrow$ t_0 é raiz real, $t_1 = z$ e $t_2 = \bar{z}$ são raízes complexas conjugadas, com $z = a_1 + b_1 i$ ($b_1 \neq 0$).

Então, $f(x,y) = a(y-t_0 x)(y-zx)(y-\bar{z}x)$. Fazendo $(y-zx) \cdot (y-\bar{z}x) = Q(x,y)$, temos que $f(x,y) = a(y-t_0 x) \cdot Q(x,y)$.

Suponhamos $t_0 \neq 0$.

Consideremos $T \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $T(1,0) = \left(\frac{-1}{t_0}, 0\right)$ e $T(0,1) = \left(\frac{1}{t_0}, 1\right)$.

$$\text{Logo, } T(x,y) = \left(\frac{y-x}{t_0}, y\right).$$

Então, $(f \circ T)(x,y) = a \cdot x \cdot Q'(x,y)$, onde $Q'(x,y)$ possui raízes complexas conjugadas. Assim,

$$Q'(x,y) = (y-z_1 x)(y-\bar{z}_1 x) = y^2 - (z_1 + \bar{z}_1)xy + z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot x^2 = \\ = y^2 - 2a_2 xy + (a_2^2 + b_2^2) x^2, \quad z_1 = a_2 + b_2 i, \quad b_2 \neq 0.$$

Considerando $\phi \in GL(2, R)$ dado por

$$\phi(x, y) = \left(\frac{1}{b_2} \cdot x, \frac{a_2}{b_2} \cdot x + y \right),$$

teremos que $(f \circ T \circ \phi)(x, y) = \frac{a}{b_2} \cdot (x^3 + xy^2)$.

Finalmente, tomando $\psi \in GL(2, R)$ dado por

$$\psi(x, y) = \left(\sqrt[3]{\frac{b_2}{a}} \cdot x, \sqrt[3]{\frac{b_2}{a}} \cdot y \right), \text{ teremos que}$$

$$(f \circ T \circ \phi \circ \psi)(x, y) = x^3 + xy^2.$$

Portanto, para t_0 raiz e $Z, \bar{Z}$ raízes complexas conjugadas temos que $f \in GL(2, R) \cdot (x^3 + xy^2)$.

- OBSERVAÇÕES :

(1) Considerando $H_3(2, C)$, temos que $GL(2, C) \cdot (x^3 + xy^2) =$
 $= GL(2, C) \cdot (x^3 - xy^2)$, uma vez que para $T \in GL(2, C)$ dado
 por $T(x, y) = (x, iy)$, teremos que $f(x, y) = x^3 + xy^2 \xrightarrow{T} g(x, y) =$
 $= x^3 - xy^2$.

(2) A cúbica $h(x, y) = x^3 + y^3 \in GL(2, R) \cdot (x^3 + xy^2)$.

(3) Se $f \in \mathcal{M}_2^3$, então existe $\gamma \in R$ tal que

$$j^3(f \circ \gamma) = 0, x^3, xy^2, x^3 + xy^2 \text{ ou } x^3 - xy^2.$$

13. CROSS-RATIO

Definimos o cross-ratio (razão harmônica) das quatro retas da figura abaixo, como sendo o número real dado por

$$\frac{d(P_1, P_2)}{d(P_1, P_3)} \cdot \frac{d(P_3, P_4)}{d(P_2, P_4)}$$

Se uma das retas, digamos L_4 , é o eixo dos y,
então nós definimos o cross-ratio como sendo

$$\frac{d(P_1, P_2)}{d(P_1, P_3)}$$

Denotaremos o cross-ratio de L_1, L_2, L_3 e L_4 por $[L_1, L_2, L_3, L_4]$.

- OBSERVAÇÕES :

- (1) Facilmente prova-se que o cross-ratio independe da reta transversal tomada a pelo menos três das quatro retas $L_i, i=1, \dots, 4$.
- (2) Qualquer número real $\rho > 0$ pode ocorrer como cross-ratio de quatro retas.

- PROPOSIÇÃO I-17 :

Se $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo linear, então
 $[L_1, L_2, L_3, L_4] = [\phi L_1, \phi L_2, \phi L_3, \phi L_4]$.

- DEMONSTRAÇÃO :

Suponhamos que ϕ admita a representação matricial $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ em um determinado sistema de coordenadas.

Consideremos $L: x=1$ e $L_i \cap L = (1, y_i)$, $i=1,2,3,4$.

Então, $\phi P_i = (a+by_i, c+dy_i)$, $i=1,2,3,4$. Segue que $d(\phi P_i, \phi P_j) = |y_i - y_j| \cdot \sqrt{b^2 + d^2}$, $i, j=1, \dots, 4$.

Logo, $[\phi P_1, \phi P_2, \phi P_3, \phi P_4] =$

$$= \frac{|y_1 - y_2|}{|y_1 - y_3|} \cdot \frac{|y_3 - y_4|}{|y_2 - y_4|} = [L_1, L_2, L_3, L_4].$$

- COROLÁRIO :

Todo isomorfismo linear $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preservar três retas, necessariamente, preserva uma quarta reta.

- DEMONSTRAÇÃO :

Consideremos $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preservando as retas L_1, L_2, L_3 e seja L uma quarta reta.

Suponhamos que ϕ admita a representação matricial $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ em um determinado sistema de coordenadas.

Por (I-17), temos que:

$$\frac{d(P, P_1)}{d(P, P_2)} \cdot \frac{d(P_2, P_3)}{d(P_1, P_3)} = \frac{d(A, P_1)}{d(A, P_2)} \cdot \frac{d(P_2, P_3)}{d(P_1, P_3)}.$$

Segue que

$$\frac{d(P, P_1)}{d(P, P_2)} = \frac{d(A, P_1)}{d(A, P_2)}.$$

Por outro lado, $\phi P = (a+by_0, c+dy_0)$ é um vetor-direção da reta ϕL .

Então, pela equação vetorial de ϕL , obtemos que:

$$A = (1, \alpha) = t \cdot (a+by_0, c+dy_0), \quad t \in \mathbb{R}. \text{ Segue que}$$

$$t = \frac{1}{a+by_0} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{c+dy_0}{a+by_0}, \quad \text{o que acarreta que}$$

$$A = \left(1, \frac{c+dy_0}{a+by_0} \right).$$

Logo, como

$$\frac{d(P, P_1)}{d(P, P_2)} = \frac{|y_0 - y_1|}{|y_0 - y_2|} = \frac{\left[\frac{c+dy_0}{a+by_0} - y_1 \right]}{\left[\frac{c+dy_0}{a+by_0} - y_2 \right]} = \frac{d(A, P_1)}{d(A, P_2)}, \quad \text{então,}$$

$$y_0 = \frac{c+dy_0}{a+by_0}. \text{ Segue que } A = P.$$

Portanto, $\phi L = L$ como queríamos demonstrar.

Consideremos $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo.

Assim, quatro retas podem ser levadas em curvas do tipo da figura abaixo, mas as tangentes em $(0,0)$ são transformadas linearmente pela derivada, e, então, o cross-ratio não pode ser trocado.

Desta forma, enunciamos:

- TEOREMA I-18 :

O Cross-ratio não se altera por difeomorfismos.

- COROLÁRIO :

Um difeomorfismo $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserve três retas, necessariamente preserve uma quarta reta.

Em Mendes, [7], prova-se que a terna ordenada de parábolas $y=0$, $y=x^2$ e $y=kx^2$ ($k \neq 0,1$) nunca é transformada pelo germe de um difeomorfismo $\phi: \mathbb{R}_{,0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{,0}^2$ em outra terna da mesma forma, mas com diferente k (o germe de difeomorfismo deve preservar as parábolas $y=0$ e $y=x^2$).

Se ϕ leva a primeira terna na segunda, necessariamente, $k_1 = k_2$.

- APLICAÇÃO I-19:

"Não existe um germe difeomorfismo $\phi: \mathbb{R}^2_0 \rightarrow \mathbb{R}^2_0$ que transforma a terna ordenada de parábolas $y = k_1 x^2$, $y = k_2 x^2$ e $y = k_3 x^2$ em outra da mesma forma mas com diferentes k_i 's (o germe de difeomorfismo deve preservar as parábolas $y = k_1 x^2$ e $y = k_2 x^2$)".

De fato, suponhamos $\phi: \mathbb{R}^2_0 \rightarrow \mathbb{R}^2_0$ levando a primeira terna na segunda. Mostraremos que $k_3 = k_3'$.

Consideremos o difeomorfismo $\psi: \mathbb{R}^2_0 \rightarrow \mathbb{R}^2_0$ dado

por $\psi(x,y) = (x, y - k_1 x^2)$. Segue que as imagens das parábolas $y = k_1 x^2$, $y = k_2 x^2$ e $y = k_3 x^2$ são, respectivamente, $y = 0$, $y = (k_2 - k_1)x^2$ e $y = (k_3 - k_1)x^2$.

Consideremos agora o difeomorfismo $\psi: \mathbb{R}^2_0 \rightarrow \mathbb{R}^2_0$ dado por $\psi(x,y) = (x, y - (k_2 - k_1 - 1)x^2)$. Segue que as imagens das parábolas $y = (k_2 - k_1)x^2$ e $y = (k_3 - k_1)x^2$ são, respectivamente, $y = x^2$ e $y = (k_3 - k_2 + 1) \cdot x^2$.

Portanto, temos um difeomorfismo $\gamma: \mathbb{R}^2_0 \rightarrow \mathbb{R}^2_0$ de
 finido por $\gamma = \varphi \circ \psi \circ \phi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$ levando a terna $(*)$ na ter-
 na $(**)$.

Logo, $k_3 - k_2 + 1 = k'_3 - k_2 + 1$ o que implica que
 $k_3 = k'_3$.

CAPÍTULO II

GERME ZERO-MODAL - CLASSIFICAÇÃO

1. GERME ZERO-MODAL

Dados V e W duas $R^{(k)}$ -órbitas, dizemos que V abuta W , e denotamos por $V \leftarrow W$, se $W \subset \bar{V}$, onde $\bar{V}$ é o fecho topológico de V em J^k . Em outras palavras, toda vizinhança de W em J^k intercepta V .

Dizemos que $j^k(f) \in J^k$ tem $0-R^{(k)}$ -modalidade, ou simplesmente é 0-modal, se existir um aberto U de J^k , $j^k(f) \in U$, tal que U encontre apenas um número finito de $R^{(k)}$ -órbitas.

- EXEMPLO :

Consideremos $R_2^{(4)}$ atuando sobre $J^4(2,1)$.

Tomemos $p_1(x,y) = x$ e $p_2(x,y) = xy^2(x+y)$, ambos em $J^4(2,1)$.

Então, p_1 é 0-modal, uma vez que sendo p_1 submersão, $R_2^{(4)} \cdot p_1$ é aberta.

Entretanto, p_2 não é 0-modal.

De fato, seja uma curva $\gamma: (-a, a) \rightarrow J^4(2,1)$ dada por $\gamma(t) = f_t(x, y) = x \cdot y \cdot (y + tx) \cdot (x + y)$, com $t \in (-a, a)$ e $\gamma(0) = p_2$. Então, a cada ponto $\gamma(t)$ corresponde uma $R^{(4)}$ -órbita de $J^4(2,1)$ de tal modo que se $s \neq t$, tem-se $R^{(4)} \cdot \gamma(t) \neq R^{(4)} \cdot \gamma(s)$.

De fato, se $f_s \not\sim f_t$, então $f_s^{-1}(0) \not\sim f_t^{-1}(0)$, onde $\phi \in R_2^{(4)}$ é

$$\begin{array}{ccc} R^2 & \xrightarrow{f_s} & R \\ \downarrow \phi & & \nearrow f_t \\ R^2 & & \end{array}$$

tal que $f_s = f_t \circ \phi$. Observemos que $f_s^{-1}(0)$ é dado pelas retas $x=0$, $y=0$, $y=-x$, e $y=-sx$, e, ainda, $f_t^{-1}(0)$ é dado por $x=0$, $y=0$, $y=-x$ e $y=-tx$.

Por (I-18), segue que $s=t$.

Portanto, todo aberto U de $J^4(2,1)$, $p_2 \in U$, necessariamente encontrará uma infinidade de $R^{(4)}$ -órbitas de $J^4(2,1)$. Então, p_2 não é 0-modal.

- PROPOSIÇÃO II-1 :

Sejam $x, y \in R^{(k)}$. Z.

Então, x é 0-modal se, e somente se, y é 0-modal.

- PROPOSIÇÃO II-2 :

Consideremos $\{x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}\}$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças da origem de $\mathbb{R}^n$. Seja

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n-r} \epsilon_i \cdot y_i^2, \quad \epsilon_i = \pm 1.$$

Então, $f(x) + g(y) \in \epsilon_n$ é 0-modal se, e somente se, $f(x) \in \epsilon_r$ é 0- R_r -modal.

- EXEMPLOS :

- (1) Usando a proposição anterior mostraremos que $f(x) = x^k \in \epsilon_1$ é 0-modal.

De fato, consideremos $\{x, y\}$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças da origem do $\mathbb{R}^2$, e, ainda, $g(y) = y^2$. Segue que $x^k + y^2 \in \epsilon_2$ é 0-modal se, e somente se, $x^k \in \epsilon_1$ é 0-modal.

Vamos provar que $x^k + y^2$ é 0-modal.

Temos que $x^k + y^2$ é Q-H do tipo $(2k; 2, k)$.

Por outro lado, $\langle \partial(x^k + y^2) \rangle = \langle x^{k-1}, y \rangle$. Logo, $E(\langle \partial(x^k + y^2) \rangle)$ é dada geometricamente por:

Por (I-14), existem monômios $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ em x e y , com ordens tais que $N^2 - E(\langle \partial(x^k + y^2) \rangle) = \{\sigma(\varphi_i), i = 1, \dots, k-1\} = \{(0,0), (1,0), \dots, (k-2,0)\}$, constituindo uma R -base de $e_2 / \langle \partial(x^k + y^2) \rangle$.

Tomando $\varphi_i(x,y) = x^{i-1}$, $i = 1, \dots, k-1$, observamos que $\text{peso}_{(2,k)}(\varphi_i) = 2(i-1) < 2k$, $i = 1, \dots, k-1$.

Portanto, $x^k + y^2$ é 0-modal. Logo, f é 0-modal.

(2) Seja $f(x) = 0 \in e_1$.

Então, f não é 0-modal.

De fato, $J^k(1,1)$, $k \geq 1$, tem um número finito de $R^{(k)}$ -órbitas, todas abutando $R^{(k)} \cdot 0$. Como o número de $R^{(k)}$ -órbitas de $J^k(1,1)$ tende ao infinito quando k tende ao infinito, então $f = 0$ não é 0-modal.

2. ZERO-MODALIDADE IMPLICA EM DETERMINAÇÃO FINITA

- TEOREMA II-3 :

Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ 0-modal.

Então, f é R -finitamente determinado.

- DEMONSTRAÇÃO :

Suponhamos que f não seja finitamente determinado. Assim, para todo $k \geq 2$, $\mathcal{M}_n^k \not\subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle$, e, pelo Lema de Nakayama, segue que $\mathcal{M}_n^k \not\subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle + \mathcal{M}_n^{k+1}$ ou, ainda, $H_k \not\subset j^k(\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle)$.

Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, seja $h_k \in H_k$ tal que $h_k \notin j^k(\mathcal{M}_n \cdot \langle \partial f \rangle)$. Segue de (I.7) que $h_k \notin T_k \cdot (R^{(k)} \cdot j^k(f))$.
 $j(f)$

Consideremos $\gamma_k: (-1,1) \rightarrow J^k$ dada por $\gamma_k(f) = j^k(f) + t \cdot h_k$, segue que γ_k é transversal a $T_k \cdot (R^{(k)} \cdot j^k(f))$ para $t = 0$. Portanto, existe t_k suficientemente pequeno tal que

$$R^{(k)} \cdot j^k(f) \neq R^{(k)} \cdot (j^k(f) + t_k \cdot h_k).$$

Seja $\ell \in \mathbb{N}^*$. Em J^ℓ as $R^{(\ell)}$ -órbitas $R^{(\ell)}(j^\ell(f) + t_1 h_1), \dots, R^{(\ell)}(j^\ell(f) + t_\ell h_\ell)$ são duas a duas distintas.

De fato, tomemos $1 \leq r \leq s \leq \ell$, $r, s \in \mathbb{N}^*$. Se $R^{(\ell)}(j^\ell(f) + t_r h_r) = R^{(\ell)}(j^\ell(f) + t_s h_s)$, então $R^{(r)}(j^r(f) + t_r h_r) = R^{(r)}(j^r(f))$ contra nossa construção. Ainda, se

$$R^{(\ell)}(j^\ell(f) + t_r h_r) = R^{(\ell)} \cdot j^\ell(f), \text{ então } R^{(r)}(j^r(f) + t_r h_r) = R^{(r)} \cdot j^r(f) \text{ também contra nossa construção.}$$

Como podemos considerar $t_1, \dots, t_\ell$ arbitrariamente pequenos, segue que o número de $R^{(\ell)}$ -órbitas, em J^ℓ , abutando $R^{(\ell)} \cdot j^\ell(f)$ é maior ou igual a $\ell+1$.

Portanto, f não é 0- R -modal, contra nossa hipótese.

- OBSERVAÇÕES :

(1) A recíproca do teorema II-3 é falsa. Para tal, consideremos $f \in \mathcal{M}_2^2$ dado por $f(x,y) = x^4 + y^4$.

Então, f é S-Q-H do tipo $(4;1,1)$ e $\langle \partial f \rangle = \langle x^3, y^3 \rangle$. Logo, $E(\langle \partial f \rangle)$ é dada geometricamente por:

Por (I-14), existem monômios $\phi_1, \dots, \phi_9$ em x e y , com ordens tais que $N^2 - E(<\partial f>) = \{\sigma(\phi_i), i=1, \dots, 9\} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$, sendo que estes monômios constituem uma R -base de $E_2 / <\partial f>$.

A modalidade interna de f será dada pelo número de monômios ϕ_i tais que $\text{peso}_\alpha(\phi_i) \geq 4$, $\alpha = (1,1)$, $i=1, \dots, 9$.

Tomando $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$, $\phi_4 = x^2$, $\phi_5 = y^2$, $\phi_6 = xy$, $\phi_7 = xy^2$, $\phi_8 = yx^2$ e $\phi_9 = x^2y^2$, observamos que $\text{peso}_\alpha(\phi_i) < 4$, $i=1, \dots, 8$, e, $\text{peso}_\alpha(\phi_9) = 4$.

Logo, por (I-15), temos que f é 1- R -modal.

- (2) Sempre que $f \in E_n$ for finitamente determinado, f será m - R -modal (não necessariamente 0- R -modal), uma vez que sendo f finitamente determinado, então para algum $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n^k \subset <\partial f>$ o que implica que $\#(N^n - E(<\partial f>)) = \mu(f) < \infty$. Segue de (16) que f é m -modal, com $m \leq \mu(f)$.

3. O SPLITTING LEMMA

Consideremos $f \in E_n$, e, seja $(\partial^2 f(o) / \partial x_i \cdot \partial x_j)$, $i, j=1, \dots, n$, a matriz Hessiana de f em 0.

Chama-se rank de f em 0 ao rank de $(\partial^2 f(o) / \partial x_i \cdot \partial x_j)$, cuja notação será rank f . Chama-se corank de f , e

denotaremos por corank f, ao inteiro positivo n-rank f.

Denotaremos por U_ρ o R-espço vetorial das matrizes triangular superior de ordem ρ , e, por Sym o R-espço vetorial das matrizes simétricas de ordem ρ , assim :

- LEMA II-4 :

Seja $E = \text{diag}(2e_1, \dots, 2e_\rho)$, onde $e_i = 1, i=1, \dots, \rho$.

Então, existe uma vizinhança V de E em $Sym \cap GL(\rho, R)$, e, uma função $C^\infty Q: V \rightarrow GL(\rho, R)$ tal que todos $E' \in V$, $Q(E')^t \cdot E \cdot Q(E') = E$

- DEMONSTRAÇÃO :

Seja $G: U_\rho \rightarrow Sym$ uma aplicação definida por $G(X) = (I+X)^t \cdot E \cdot (I+X)$. Então, $dG(o) \cdot X = X^t E + EX$. De fato,

$$\begin{aligned} dG(o) \cdot X &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(o+sX) - G(o)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(I+sX)^t \cdot E \cdot (I+sX) - E}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(E+sX^t E)(I+sX) - E}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{E+sEX+sX^t E+s^2 X^t EX - E}{s} = X^t E + EX. \end{aligned}$$

Verifiquemos, agora, que G é diferenciável em 0 , ou seja: $G(X) - G(o) = dG(o) \cdot X + r(X) \Rightarrow \lim_{|X| \rightarrow 0} \frac{|r(X)|}{|X|} = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} r(X) &= G(X) - G(o) - dG(o) \cdot X = (I+X)^t E (I+X) - E - X^t E - EX = \\ &= E + EX + X^t E + X^t EX - E - EX = X^t EX. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \lim_{|X| \rightarrow 0} \frac{|r(X)|}{|X|} = \lim_{|X| \rightarrow 0} \frac{|X^t EX|}{|X|} = 0$$

Como $dG(o) \cdot X = X^t E + EX$, segue que $\text{Ker } dG(o) = 0$ e $dG(o)$ é um isomorfismo linear entre U_g e Sym

Portanto, G é um difeomorfismo local em 0 , isto é, existem vizinhanças $V(o)$ e $V(E)$ tal que $G: V(o) \rightarrow V(E)$ é um difeomorfismo C^∞ .

Seja $H: V(E) \rightarrow V(o)$ a inversa local de G , ou seja, $G \circ H(E) = G(o) = E$ e $H \circ G(X) = X$, $\forall X \in V(o)$. Então, se $E' \in V(E)$, $E' = G \circ H(E') = (I + H(E'))^t \cdot E \cdot (I + H(E'))$. Assim, se $Q(E') = (I + H(E'))^{-1}$ temos o desejado.

De fato, sejam $Q(E') = I + H(E')$ e $\bar{Q}(E) = I + H(E) = I$. Então, $\bar{Q}$ é inversível em E , pois $\det \bar{Q}(E) = 1 \neq 0$. Logo, $\det \bar{Q}(E') \neq 0$ para $E' \in \bar{V}(E)$, isto é, $\bar{Q}(E')$ é inversível e existe $Q(E') = (\bar{Q}(E'))^{-1} = (I + H(E'))^{-1}$. Deste modo temos:

$$(I + H(E'))^t \cdot E \cdot (I + H(E')) = E', \text{ então}$$

$$\begin{aligned} (I + H(E'))^t \cdot E \cdot (I + H(E')) \cdot (I + H(E'))^{-1} &= E' \cdot (I + H(E'))^{-1} \rightarrow \\ \rightarrow \left[(I + H(E'))^{-1} \right]^t \cdot (I + H(E'))^t \cdot E &= \left[(I + H(E'))^{-1} \right]^t \cdot E' \cdot (I + H(E'))^{-1} \rightarrow \\ \rightarrow \left[(I + H(E')) \cdot (I + H(E'))^{-1} \right]^t \cdot E &= Q(E')^t \cdot E' \cdot Q(E') \rightarrow E = Q(E')^t \cdot E' \cdot Q(E'). \end{aligned}$$

- TEOREMA II-5 :

Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$, com $\text{rank } f = \rho$.

Então, f é equivalente ao germe

$g + \sum_{i=1}^{\rho} \epsilon_i \cdot x_i^2$, onde $\epsilon_i = \pm 1$, $i=1, \dots, \rho$, com $g \in \mathcal{M}_n^3$ tendo um representante que somente dependa de $x_{\rho+1}, \dots, x_n$.

- DEMONSTRAÇÃO :

Por mudanças lineares de coordenadas podemos escrever $f = g + \sum_{i=1}^{\rho} \epsilon_i x_i^2$ em algum sistema de coordenadas, onde $g \in \mathcal{M}_n^3$.

Consideremos $f_y(x) = f(x, y)$ como função de x parametrizada por y , onde $x = (x_1, \dots, x_\rho)$ e $y = (x_{\rho+1}, \dots, x_n)$. Então, x_0 é um ponto crítico de f_{y_0} se, e somente se,

$$df_{y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$

isto é, $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{\rho} \epsilon_i x_i = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x, y) + 2\epsilon_1 x_1 = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_\rho}(x, y) + 2\epsilon_\rho x_\rho = 0 \end{cases}$$

$$\text{Seja } F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_\rho}(x, y) \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x, y) + 2\epsilon_1 x_1, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_\rho}(x, y) + 2\epsilon_\rho x_\rho \right), \text{ onde } F: \mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^{n-\rho} \rightarrow \mathbb{R}^\rho,$$

$$F(0, 0) = 0.$$

$$\text{Assim, } JF(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x, y) + 2\epsilon_1 & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_\rho \partial x_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(x, y) + 2\epsilon_2 & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_\rho \partial x_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo, } JF(0,0) = \begin{bmatrix} 2e_1 & & 0 \cdot 0 \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ 0 & & 2e_p \cdot 0 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas, existem vizinhanças $V(0,0) \subset \mathbb{R}^n$ e $U(0) \subset \mathbb{R}^{n-\rho}$ tal que $\phi: U \subset \mathbb{R}^{n-\rho} \rightarrow \mathbb{R}^\rho$ é tal que $y \rightarrow \phi(y) = x$, $(\phi(y), y) \in V$ e $F(\phi(y), y) = 0$, isto é,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\phi(y), y) + 2 \sum_{i=1}^{\rho} e_i \phi_i(y) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1}(\phi(y), y) + 2e_1 \phi_1(y) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_\rho}(\phi(y), y) + 2e_\rho \phi_\rho(y) = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(y), y) = df_y(\phi(y), y) = 0.$$

Portanto, $x = \phi(y)$ é ponto crítico de f_y .

A matriz hessiana de f_0 é $Hf_0 = E = \text{diag}(2e_1, \dots, 2e_\rho)$, sendo f_0 não degenerado em 0. Assim, existe uma vizinhança $\bar{U}$ de 0 em $\mathbb{R}^{n-\rho}$ tal o ponto crítico $(\phi(y), y)$ de f_y é não-degenerado para $y \in \bar{U}$. De fato, seja $H(x, y) = \det H(f_y(x))$. Temos que $H(0, 0) = \det(2e_i) \neq 0$, $i=1, \dots, \rho$. Logo, por continuidade de f_y , ϕ e $\det$, temos que $H(x, y) \neq 0$ para (x, y) suficientemente próximo de $(0, 0)$, e, $H(\phi(y), y) \neq 0$ para y próximo de 0.

Seja $X = x - \phi(y)$, $Y = y$ uma mudança de coordenadas

no $\mathbb{R}^n$. Então, $(x,y) \rightarrow (X,Y)$ é um difeomorfismo local em 0, e, existe uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^n$ tal que se $(X,Y) \in V$, então o único ponto crítico de $f_y = f(\cdot, y)$ é $X=0$.

Então, podemos considerar, sem perda de generalidade, que nossa família original f_y tem um ponto crítico não degenerado na origem para todo y próximo de 0.

Pelo Teorema de Taylor,

$$f_y(x) - f_y(o) = g(x,y) + \sum_{i=1}^{\rho} \epsilon_i x_i^2 - g(o,y) = h(x,y) + \sum_{i=1}^{\rho} \epsilon_i x_i^2, \quad h \in \mathcal{M}_n^3.$$

Logo,

$$f_y(x) - f_y(o) = \sum_{i,j=1}^{\rho} x_i x_j \bar{h}_{ij}(x,y) + \sum_{i=1}^{\rho} \epsilon_i x_i^2, \quad \bar{h}_{ij} \in \mathcal{M}_n.$$

$$\text{Portanto, } f_y(x) - f_y(o) = x_1^2(\epsilon_1 + \bar{h}_{11}(x,y)) + \dots +$$

$$+ x_{\rho}^2(\epsilon_{\rho} + \bar{h}_{\rho\rho}(x,y)) + \sum_{i < j} x_i x_j \bar{h}_{ij}(x,y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\rho} x_i^2 h_{ii}(x,y) + \sum_{i < j} x_i x_j h_{ij}(x,y),$$

onde $h_{ii} = \epsilon_i + \bar{h}_{ii}$, $h_{ij} = \bar{h}_{ij}$, $i < j$ e $\bar{h}_{ii}(0,0) = 0$.

Como consequência temos:

$$B(x,y) = \begin{bmatrix} 2(\epsilon_1 + \bar{h}_{11}(x,y)) & (h_{ij})_{i < j} \\ \vdots & \vdots \\ (h_{ij})_{i < j} & 2(\epsilon_p + \bar{h}_{pp}(x,y)) \end{bmatrix} \quad \text{e } B(0,0) = E = \text{diag}(2\epsilon_1, \dots, 2\epsilon_p).$$

Assim sendo, podemos escrever $f_Y(x) = f_Y(o) + B(x,y) \cdot x^2$, onde $B(x,y)$ é uma função bilinear de classe C^∞ .

Considerando que 0 é ponto crítico não degenerado de f_Y , $B(x,y)$ é não singular para (x,y) suficientemente próximo de $(0,0)$, existe pelo lema anterior uma função linear (matriz) $Q(x,y): \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, de classe C^∞ tal que $B(x,y) = B(0,0) \cdot Q(x,y)^2$ para (x,y) próximo de $(0,0)$ e $Q(0,0) = I$.

Voltando à igualdade $f_Y(x) = f_Y(o) + B(x,y) \cdot x^2$, e, se no lema anterior tomarmos $B(x,y) = E'$ teremos: $B(0,0) = E$ e para todo (x,y) suficientemente próximo de $(0,0)$, $B(x,y) = E'$ estará suficientemente próxima de $B(0,0) = E$.

$$\begin{aligned} \text{Como } B(x,y) \cdot x^2 &= x^t \cdot B(x,y) \cdot x = x^t \cdot I \cdot B(x,y) \cdot I x = \\ &= x^t \cdot ((Q(E'))^{-1})^t \cdot Q(E')^t \cdot E' \cdot Q(E') \cdot Q(E')^{-1} \cdot x = \\ &= (Q(E') \cdot x)^t \cdot E \cdot (Q(E')^{-1} \cdot x). \end{aligned}$$

Tomando a mudança de coordenadas $X = Q(E')^{-1} \cdot x$, $Y = y$ teremos:

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= f(o,Y) + (Q(E')^{-1} \cdot Q(E') \cdot x)^t \cdot B(0,0) \cdot (Q(E')^{-1} \cdot Q(E') \cdot x) = \\ &= f(o,Y) + x^t \cdot B(0,0) \cdot x = f(o,Y) + B(0,0) \cdot x^2. \end{aligned}$$

Portanto, $f(X,Y) = f(0,Y) + B(0,0) \cdot X^2$, onde
 $B(0,0) \cdot X^2 = \sum_{i=1}^{\rho} \epsilon_i x_i^2$ e $f(0,Y) \in \mathcal{M}_n^3$ só depende das variáveis
 $x_{\rho+1}, \dots, x_n$.

O teorema anterior é um resultado de grande importância em Singularidades, ele é uma ferramenta importante que irá nos possibilitar classificar os germes 0-modais. Antes de irmos em busca da classificação das 0-R-modalidades, vamos ver algumas consequências do Splitting Lemma e alguns outros resultados que são também ferramentas indispensáveis em nossa classificação.

- COROLÁRIO 1 :

Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ um germe com corank $f = c = n - \rho$, onde $\rho = \text{rank } f$.

Então, f é equivalente ao germe

$g + \sum_{i=c+1}^n \epsilon_i \cdot x_i^2$, onde $\epsilon_i = \pm 1$, $i=c+1, \dots, n$, com $g \in \mathcal{M}_c^3$ tendo um representante que só dependa de $x_1, \dots, x_c$.

Em [8], Pedroso e Tadini, elaboram um corolário do teorema anterior que estabelece um processo prático para se encontrar o grau de determinação de germes em $\mathcal{E}_n$, finitamente determinados, com corank 1. Com as mesmas notações anteriores enunciamos:

- COROLÁRIO 2 :

Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ um germe de corank 1, finitamente determinado.

Então, f é equivalente ao germe

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n-1} e_i x_i^2 + \delta y^\alpha,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\alpha = \text{ordem de } f(\phi(y), y) = h(y)$ e $\delta = \text{ sinal de } h^{(\alpha)}(0)$. Sendo que chamaremos ordem de h ao menor $r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $h^{(r)}(0) \neq 0$.

- EXEMPLOS :

(1) Seja $f \in \mathcal{M}_2^2$ dado por $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^4 - y^5$.

Então, $\text{corank } f = 1$ e f é finitamente determinado.

Pelo corolário anterior, $f \sim_{\mathbb{R}} x^2 + \delta y^\alpha$. Calculemos δ e α .

Como $f_x(x,y) = 2x - 2y^2$, teremos que $f_x(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y^2$. Logo, $\phi(y) = y^2$.

Portanto, $h(y) = f(\phi(y), y) = (y^2)^2 - 2y^2 \cdot y^2 + y^4 - y^5 = -y^5$. Segue que $\alpha = \text{ord}(h) = 5$ e $\delta = \text{ sinal de } h^{(5)}(0) = -1$.

Assim, $f \sim_{\mathbb{R}} x^2 - y^5$ que é 5-determinado.

Observemos que $f = (x - y^2)^2 - y^5 \sim_{\mathbb{R}} x^2 - y^5$.

(2) Seja $f \in \mathcal{M}_2^2$ dado por $f(x,y) = x^2(1+y) + y^3 + y^4$.

Então, $f \sim_{\mathbb{R}} x^2 + \delta y^\alpha$. Calculemos δ e α .

Como $f_x(x,y) = 2x(1+y)$, teremos que $f_x = 0 \leftrightarrow x = 0$ ou $y = -1$.

Logo, $x = \phi(y) = 0$.

Portanto, $f(\phi(y), y) = f(0, y) = y^3 + y^4 = h(y)$.

Segue que $\alpha = \text{ord}(h) = 3$ e $h^{(3)}(o) = 6$. Assim, $f_{\tilde{R}} x^2 + y^3$.

Antes de demonstrarmos uma proposição que muito irá nos auxiliar na classificação das 0-modalidades, observemos que: se para algum $k \in \mathbb{N}^*$, $R^{(k)}$ atua sobre uma subvariedade S de J^k com $\dim_R R^{(k)} < \dim_R S$, então nenhum ponto de S é 0-modal. De fato, como $\dim_R R^{(k)} \cdot f \leq \dim_R R^{(k)} < \dim_R S$, $f \in S$, segue que um aberto U de S , $f \in U$, jamais será coberto por um número finito de $R^{(k)}$ -órbitas. Consequentemente, f não é 0- $R^{(k)}$ -modal.

- PROPOSIÇÃO II-6 :

Seja $f \in \mathcal{M}_n^3$ com $n \geq 3$, então f não é 0-modal.

- DEMONSTRAÇÃO :

A ação de $R^{(3)}$ sobre $\mathcal{M}_n^3 / \mathcal{M}_n^4$ corresponde à ação de $GL(n, R)$ sobre $\mathcal{M}_n^3 / \mathcal{M}_n^4$.

Como $\dim_R GL(n, R) = n^2$ e $\dim_R \frac{\mathcal{M}_n^3}{\mathcal{M}_n^4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, se $n \geq 3$, então $\dim_R GL(n, R) < \dim_R \frac{\mathcal{M}_n^3}{\mathcal{M}_n^4}$ e, portanto, $f \in \mathcal{M}_n^3$ não é 0-modal.

- COROLÁRIO 1 :

Se $f \in \mathcal{M}_n^2$ é 0-modal, então f tem corank ≤ 2 .

- DEMONSTRAÇÃO :

Consideremos corank $f = c$.

Logo, pelo corolário 1 de (II-5), f é equivalente a $g(x_1, \dots, x_c) + \sum_{i=c+1}^n \epsilon_i \cdot x_i^2$, onde $\epsilon_i = \pm 1$, $i=c+1, \dots, n$ e $g \in \mathcal{M}_c^3$. Segue, por (II-2), $g \in \mathcal{M}_c^3$ é 0-modal, e, então, $c \leq 2$, pois caso contrário g não seria 0-modal em virtude de (II-6).

- COROLÁRIO 2:

Uma singularidade $f \in \mathcal{M}_n^2$ é 0-modal se, e somente se, f é equivalente a um germe do tipo $g(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, x_2) + \sum_{i=3}^n \epsilon_i \cdot x_i^2$, $\epsilon_i = \pm 1$, $i=3, \dots, n$, com $h \in \mathcal{M}_2^2$ sendo 0-modal.

- OBSERVAÇÕES:

- 1) Dois germes $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ e $g: \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ são ditos estavelmente equivalentes se, a menos de adições de formas quadráticas não degeneradas em outras variáveis, forem equivalentes. Desta forma, $h(x_1, x_2) + \sum_{i=3}^n \epsilon_i x_i^2$, $\epsilon_i = \pm 1$, $i=3, \dots, n$ e $h(x_1, x_2)$ são estavelmente equivalentes.
- 2) Por Arnol'd, [3], temos que a modalidade é invariante por equivalência estável.

Com os resultados anteriores em mãos concluímos que uma possível classificação de singularidades $f \in \mathcal{M}_n^2$, sendo f 0- R_n -modal, pode ser tratado como um problema de classificação de singularidades em duas variáveis, sendo estas 0- R_2 -modais

4. CLASSIFICAÇÃO DA ZERO-MODALIDADE

Por Arnol'd, [1], temos uma classificação das singularidades 0-modais, dada através do:

- TEOREMA II-7:

A menos de equivalência estável, todo germe 0-modal $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, com $f \in \mathcal{M}_n^2$, é dado por:

$$A_k^\pm : \pm x^{k+1} \pm y^2, \quad k \geq 1$$

$$D_k^\pm : x^2 y \pm y^{k-1}, \quad k \geq 4$$

$$E_6^\pm : x^3 \pm y^4$$

$$E_7 : x^3 + xy^3$$

$$E_8 : x^3 + y^5$$

- OBSERVAÇÕES:

- 1) Os graus de determinação dos germes dos tipos $A_k^\pm$, $D_k^\pm$, $E_6^\pm$, E_7 e E_8 são:

$A_k^\pm, k \geq 1$		(k+1)-determinado
$D_k^\pm, k \geq 4$		(k-1)-determinado
$E_6^\pm$		4-determinado
E_7		4-determinado
E_8		5-determinado

2) Para singularidades $f \in \mathcal{M}_{n, \text{nonk}}^2$ com $\text{corank } f=0$, segue que 0 é um ponto crítico não-degenerado de f , uma vez que a matriz Hessiana de f em 0 tem rank máximo e igual a n . Então, o lema de Morse nos dá uma descrição local de f nas vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}^n$. Assim, $f \sim \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^2$, $\epsilon_i = \pm 1$, $i=1, \dots, n$.

Vamos nos dedicar agora à demonstração de (II-7), que será feita em etapas.

- PROPOSIÇÃO II-8:

Se $f \in \mathcal{M}_2^2$ é 0-modal com $\text{corank } f=1$, então f é equivalente a um germe do tipo $A_k^\pm : \pm x^{k+1} \pm y^2$, $k \geq 1$.

- DEMONSTRAÇÃO:

Pelo corolário 1 de (II-5), segue que $f \sim g(x) \pm y^2$ para algum sistema de coordenadas $\{x, y\}$, onde $g \in \mathcal{M}_1^3$ depende somente de x .

Decorre de (II-2) que g é 0-modal, e, conseqüentemente, finitamente determinado.

Seja k o menor inteiro tal que $g^{(k+1)}(0) \neq 0$. Segue que $g \sim \pm x^{k+1}$.

Portanto, $f \sim \pm x^{k+1} \pm y^2$.

- OBSERVAÇÃO:

Demonstraremos a proposição anterior utilizando técnicas de determinação pesada (ver capítulo I, seção 9).

"Se $f \in \mathcal{M}_2^2$ é 0-modal com $\text{corank } f = 1$.

Então, $f \sim \phi$, onde ϕ é um germe do tipo $A_k^\pm$, $k \geq 1$.

- DEMONSTRAÇÃO:

Como $\text{corank } f = 1$, então a matriz Hessiana de f em 0, que denotaremos por H , tem rank 1. Consequentemente, existe um sistema de coordenadas $\{x, y\}$ tal que H tem a forma

$$\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo que necessariamente } * \neq 0.$$

Pelo fato de $f \in \mathcal{W}_2^2$ e H ter a forma expressa acima, segue que $j^2(f) = \pm x^2$, sendo que o sinal é determinado pelo sinal de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$.

Por outro lado, como f é 0-modal, por (II-3), f é finitamente determinado, digamos $(k+1)$ -determinado, $k \geq 1$.

Consideremos duas possibilidades:

1a) $\forall k \geq 1$ existe um sistema de coordenadas tal que $j^{k+1}(f) = \pm x^2$.

Neste caso f não é 0-modal, contradizendo nossa hipótese. De fato, os germes $\pm x^2 \pm t \cdot y^n$, $t \in \mathbb{R}^*$ e $2 \leq n \leq k+1$ são n -determinados, e, então, cada um deles determinam $R^{(k+1)}$ -órbitas distintas.

Logo, para t suficientemente pequeno qualquer aberto U de J^{k+1} , $j^{k+1}(f) \in U$, encontrará as $R^{(k+1)}$ -órbitas dos germes $\pm x^2 \pm t y^n$. Como o número de $R^{(k+1)}$ -órbitas tende ao infinito quando $k \rightarrow \infty$, segue que f não é 0-modal.

2a) $\exists k \geq 1$ tal que para todo sistema de coordenadas $j^{k+1}(f) \neq \pm x^2$.

Seja k o menor inteiro positivo tal que para todo sistema de coordenadas $j^{k+1}(f) \neq \pm x^2$. Então, existe um sistema de coordenadas no qual $j^k(f) = \pm x^2$, com $j^{k+1}(f) \neq \pm x^2$.

Portanto, $j^{k+1}(f) = \pm x^2 + x^2 \cdot \psi + bx \cdot y^k + a \cdot y^{k+1}$, com $\psi \in j^{k-1}(\mathcal{M}_2^{k-1})$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Consideremos $g(x, y) = j^{k+1}(f)$, e, tomemos $g_0(x, y) = \pm x^2 + a \cdot y^{k+1}$ e $g_1(x, y) = x^2 \psi + b \cdot xy^k$.

Suponhamos $a = 0$.

Temos que g_0 é Q-H do tipo $(2; 1, 1)$, com $g_1 \in \langle \partial g_0 \rangle = \langle x, 0 \rangle$ e $\text{filt}(g_1) \geq k+1$. Logo, por (I-11), segue que $g_0 + g_1 \sim g_0 + g_2$ com $\text{filt}(g_2) > k+1$. Como os pesos são iguais a 1, segue que $g_2 \in \mathcal{M}_2^{k+2}$. Logo, $j^{k+1}(g_0 + g_2) = \pm x^2$ (absurdo). Portanto $a \neq 0$.

Como $g_0(x, y) = \pm x^2 + ay^{k+1}$ ($a \neq 0$) é Q-H do tipo $(2k+2; k+1, 2)$ com $\langle \partial g_0 \rangle = \langle x, y^k \rangle$, segue que $g_1 \in \langle \partial g_0 \rangle$. Temos que $\text{filt}_\alpha(g_1) \geq 3k+1 > 2k+2$ ($k \geq 4$), onde $\alpha = (k+1, 2)$.

Portanto, $\pm x^2 + ay^{k+1} + x^2 \psi + bxy^k \sim \pm x^2 + ay^{k+1} + \lambda_1(x, y)$ com $\text{filt}_\alpha(\lambda_1) > 3k+1$.

Na expressão de $\lambda_1(x, y)$, não aparecem efetivamente os monômios $x, x^2, y, y^2, \dots, y^{k-1}$, pois, $\text{filt}_\alpha(\lambda_1) > 3k+1$, com $\alpha = (k+1, 2)$ e $k \geq 4$.

Como $x^3, xy, y^k \in \langle \partial g_0 \rangle$, segue que $\lambda_1 \in \langle \partial g_0 \rangle$. Logo, $\pm x^2 + ay^{k+1} + \lambda_1 \sim \pm x^2 + ay^{k+1} + \lambda_2$ com $\text{filt}_\alpha(\lambda_2) > \text{filt}_\alpha(\lambda_1)$. Assim, repetindo sucessivamente o mesmo raciocínio encontra-

mos $\lambda_r \in \mathfrak{M}_2^{k+2}$ tal que $g_0 + \lambda_1 \sim \dots \sim g_0 + \lambda_r$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1} \in \langle \partial g_0 \rangle$ e $\text{filt}_\alpha(\lambda_r) > \dots > \text{filt}_\alpha(\lambda_1)$.

Como g_0 é $(k+1)$ -determinado, segue que $\pm x^2 + \pm ay^{k+1} + \lambda_r \sim \pm x^2 + \pm ay^{k+1} \sim \pm x^2 \pm y^{k+1} \sim \pm x^{k+1} \pm y^2$.

Logo, $f \sim \pm x^{k+1} \pm y^2$.

Trabalharemos agora com singularidades 0-modais que tenham corank 2.

Um germe em duas variáveis com corank 2 tem necessariamente o seu 2-jato nulo. Portanto, o seu 3-jato determina uma cúbica homogênea em duas variáveis.

Sabemos que singularidades $f \in \mathfrak{M}_2^3$, à menos de equivalência, tem o seu 3-jato dado por: $j^3(f) = 0$, x^3 , x^2y , x^2y+y^3 ou x^2y-y^3 . Utilizando este fato para singularidades f com corank $f=2$, seremos capazes de demonstrar o restante do teorema (II-7).

- PROPOSIÇÃO II-9:

Uma singularidade $f \in \mathfrak{M}_2^2$ não é 0-modal se $j^3(f) = 0$.

- DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos que $j^3(f) = 0$. Então, $j^4(f)$ se reduz a um polinômio homogêneo de grau 4.

A ação de $R_V^{(4)}$ sobre $H_4(2, R) \cong \mathfrak{M}_2^4 / \mathfrak{M}_2^5$ corresponde à ação de $GL(2, R)$ sobre $\mathfrak{M}_2^4 / \mathfrak{M}_2^5$.

Como $\dim_R GL(2, R) = 4$ e $\dim_R \mathfrak{M}_2^4 / \mathfrak{M}_2^5 = 5$, então $\dim_R GL(2, R) \cdot f \leq \dim_R GL(2, R) < \dim_R \mathfrak{M}_2^4 / \mathfrak{M}_2^5$, e, portanto, f não é 0-modal.

- PROPOSIÇÃO II-10:

Uma singularidade $f \in \mathcal{M}_2^2$ com $j^3(f) = x^2y \pm y^3$ é equivalente a um germe do tipo $D_4^\pm : x^2y \pm y^3$.

- DEMONSTRAÇÃO:

Basta mostrar que $g(x,y) = x^2y \pm y^3$ é 3-determinado para concluir o desejado.

Por (I-5), é suficiente mostrar que

$$\mathcal{M}_2^4 \subset \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle \partial g \rangle.$$

Como $\langle \partial g \rangle = \langle xy, x^2 \pm 3y^2 \rangle$, então $\mathcal{M}_2^2 \cdot \langle \partial g \rangle = \mathcal{M}_2^3$.

Portanto, $\mathcal{M}_2^4 \subset \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle \partial g \rangle$. Logo, g é 3-determinado. Sendo $j^3(f) = x^2y \pm y^3 = j^3(g)$, segue que $f \sim g$.

- PROPOSIÇÃO II-11:

Seja $f \in \mathcal{M}_2^2$ uma singularidade 0-modal com $j^3(f) = x^2y$

Então, f é equivalente a um germe do tipo $D_k^\pm : x^2y \pm y^{k-1}$, $k \geq 5$.

- DEMONSTRAÇÃO:

Existem duas possibilidades a serem consideradas:

- i) $\forall k \geq 4$ existe um sistema de coordenadas tal que $j^k(f) = x^2y$.
- ii) $\exists k \geq 4$ tal que para todo sistema de coordenadas $j^k(f) \neq x^2y$.

Se ocorrer (i), mostraremos que f não será 0-modal, contradizendo a nossa hipótese.

De fato, os germes x^2y+ty^s , $t \in \mathbb{R}^*$ e $2 \leq s \leq k$ são s -determinados, e, determinam $R^{(k)}$ -órbitas duas a duas distintas.

Logo, para t suficientemente pequeno qualquer aberto U de J^k , $j^k(f) = x^2y \in U$, encontrará os $R^{(k)}$ -órbitas dos germes x^2y+ty^s , e, conseqüentemente, f não é 0-modal, pois o número de $R^{(k)}$ -órbitas abutando $R^{(k)} \cdot f$ não é limitado quando $k \rightarrow \infty$.

Portanto, existe $k \geq 4$ tal que para todo sistema de coordenadas $j^k(f) \neq x^2y$. Consideremos k o menor inteiro maior ou igual a 4 tal que $j^{k-1}(f) = x^2y$ e $j^k(f) \neq x^2y$.

Portanto, $j^k(f) = x^2y + x^2\psi + bxy^{k-1} + a \cdot y^k$,

$\psi \in j^{k-2}(\mathcal{M}_2^{k-2})$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Consideremos a mudança de coordenadas.

$$\begin{cases} u = x + \frac{1}{2} \cdot b \cdot y^{k-2} \\ v = y + \psi \end{cases}$$

Segue daí que, $u^2 \cdot v + a \cdot v^k = (x + \frac{1}{2} \cdot b \cdot y^{k-2})^2 \cdot (y + \psi) + a \cdot (y + \psi)^k =$
 $= (x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot b \cdot y^{k-2}) \cdot (y + \psi) + a \cdot y^k + \phi(x, y)$, onde $\phi \in \mathcal{M}_2^{k+1}$.

Então, $u^2 \cdot v + a \cdot v^k = x^2y + x^2\psi + bxy^{k-1} + ay^k + h(x, y)$, onde $h \in \mathcal{M}_2^{k+1}$.

Logo, considerando $g(u, v) = u^2 \cdot v + a \cdot v^k$, segue que $j^k(g) = j^k(f)$. Como g é k -determinado, temos que $f \sim g \sim x^2y + a \cdot y^k$. Observemos que $a \neq 0$, caso contrário, o k -jato de f se reduz à forma x^2y , contradizendo a nossa hipótese.

Para completarmos a demonstração devemos mos-

trar que $x^2y + a \cdot y^k$ ($a \neq 0$) é realmente k-determinado, e, ainda, $x^2y + a \cdot y^k \sim x^2y \pm y^k$. Donde segue que $f \sim x^2y \pm y^k$.

Inicialmente mostremos que $x^2y + ay^k$ ($a \neq 0$) é k-determinado. Por (I-5), é suficiente mostrar que

$$\mathcal{M}_2^{k+1} \subset \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle xy, x^2 + a \cdot k \cdot y^{k-1} \rangle.$$

De fato, para $k \geq 4$:

$$x^{k+1} = x^{k-1} \cdot (x^2 + ak y^{k-1}) - ak x^{k-2} \cdot y^{k-2} \cdot (xy)$$

$$y^{k+1} = \frac{1}{ak} y^2 (x^2 + ak y^{k-1}) - \frac{1}{ak} xy(xy)$$

$$xy \cdot \phi = \phi \cdot (xy), \quad \phi \in \mathcal{M}_2^{k-1}.$$

Portanto, $x^2y + ay^k$ é k-determinado.

Mostremos que $x^2y + ay^k \sim x^2y \pm y^k$.

De fato, se $a > 0$, tomemos a mudança de coordenadas $\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(x, y) = (a^{1/2k} \cdot x, \frac{1}{a^{1/k}} \cdot y)$. Logo, tomando $g(x, y) = x^2y + ay^k$ teremos que

$$\begin{aligned} g \circ \gamma(x, y) &= g(a^{1/2k} \cdot x, \frac{1}{a^{1/k}} \cdot y) = (a^{1/2k})^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{a^{1/k}} \cdot y + \\ &+ a \cdot (\frac{1}{a^{1/k}} \cdot y)^2 = x^2y + y^k. \end{aligned}$$

Daí, $x^2y + ay^k \sim x^2y + y^k$ sempre que $a > 0$.

Por outro lado, se $a < 0$, tomemos $b = -a > 0$. Segue que $g(x, y) = x^2y + ay^k = x^2y - by^k$, com $b > 0$. Consideremos a mudança de coordenadas $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi(x, y) = (b^{1/2k} \cdot x, \frac{1}{b^{1/k}} \cdot y).$$

Logo,

$$g \circ \phi(x, y) = g(b^{1/2k} x, \frac{1}{b^{1/k}} \cdot y) = (b^{1/2k})^2 x^2 \frac{1}{b^{1/k}} \cdot y -$$

$$- b \cdot \left(\frac{1}{b^{1/k}} \cdot y\right)^k = x^2 y - y^k.$$

Daí, $x^2 y + ay^k \sim x^2 y - y^k$, sempre que $a < 0$.

- OBSERVAÇÃO: -

Demonstraremos a proposição anterior utilizando técnicas de determinação pesada.

"Seja $f \in \mathcal{M}_2^2$ uma singularidade 0-modal com $j^3(f) = x^2 y$.

Então, f é equivalente a um germe do tipo

$$D_k : x^2 y \pm y^{k-1}, \quad k \geq 5."$$

- DEMONSTRAÇÃO:

Consideremos as possibilidades (i) e (ii) da mesma forma que as apresentadas na demonstração anterior.

Sabemos que se ocorrer (i), então f não será 0-modal, contradizendo nossa hipótese.

Portanto, existe $k \geq 4$ tal que para todo sistema de coordenadas $j^k(f) \neq x^2 y$.

Seja k o menor inteiro maior ou igual a 4 tal que $j^{k-1}(f) = x^2 y$ e $j^k(f) \neq x^2 y$.

$$\text{Logo, } j^k(f) = x^2 y + x^2 \psi + bxy^{k-1} + ay^k, \quad \text{com}$$

$\psi \in j^{k-2}(\mathcal{M}_2^{k-2})$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos $g(x, y) = x^2 y + x^2 \psi + bxy^{k-1} + ay^k$, e, tomemos $g_0(x, y) = x^2 y + a \cdot y^k$ e $g_1(x, y) = x^2 \psi + bxy^{k-1}$.

Suponhamos $a = 0$.

Temos que g_0 é Q-H do tipo $(3;1,1)$, com $g_1 \in \langle \partial g_0 \rangle = \langle xy, x^2 \rangle$ e $\text{filt}(g_1) \geq k \geq 4$. Logo, por (I-11), segue que $g_0 + g_1 \sim g_0 + g_2$ com $\text{filt}(g_2) > k$. Como os pesos são iguais a 1, segue que $g_2 \in \mathcal{M}_2^{k+1}$. Logo, $j^k(g_0 + g_2) = -x^2y$ (absurdo). Portanto, $a \neq 0$.

Como $g_0(x,y) = x^2y + ay^k$ ($a \neq 0$) é Q-H do tipo $(2k; k-1, 2)$ com $\langle \partial g_0 \rangle = \langle xy, x^2 + a \cdot ky^{k-1} \rangle$, segue que $g_1 \in \langle \partial g_0 \rangle$, pois:

$$xy \cdot \phi = \phi \cdot (xy), \quad \phi \in \mathcal{M}_2^{k-2}$$

$$x^k = x^{k-2} \cdot (x^2 + a \cdot ky^{k-1}) - akx^{k-3} \cdot y^{k-2} \cdot (xy).$$

Temos que $\text{filt}_\alpha(g_1) \geq 3k-3 > 2k$, onde $\alpha = (k-1, 2)$ e $k \geq 4$.

Portanto, $x^2y + ay^k + x^2\psi + bxy^{k-1} \sim x^2y + ay^k + \lambda_1(x,y)$ com $\text{filt}_\alpha(\lambda_1) > 3k-3$. Na expressão de $\lambda_1(x,y)$, não aparecem efetivamente os monômios: $x, x^2, y, y^2, \dots, y^{k-1}$, pois, $\text{filt}_\alpha(\lambda_1) > 3k-3$, com $\alpha = (k-1, 2)$ e $k \geq 4$.

Como $x^3, xy, y^k \in \langle \partial g_0 \rangle$, segue que $\lambda_1 \in \langle \partial g_0 \rangle$. Logo, $x^2y + ay^k + \lambda_1 \sim x^2y + ay^k + \lambda_2$ com $\text{filt}_\alpha(\lambda_2) > \text{filt}_\alpha(\lambda_1)$. Assim, repetindo sucessivamente o mesmo raciocínio encontramos $\lambda_r \in \mathcal{M}_2^{k+1}$ tal que $g = g_0 + g_1 \sim g_0 + \lambda_1 \sim \dots \sim g_0 + \lambda_r$, onde

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1} \in \langle \partial g_0 \rangle \quad \text{e} \quad \text{filt}_\alpha(\lambda_r) > \dots > \text{filt}_\alpha(\lambda_1).$$

Como $x^2y + ay^k$ é k -determinado, segue que

$$x^2y + ay^k + \lambda_r \sim x^2y + ay^k \sim x^2y \pm y^k.$$

Logo, $f \sim x^2y \pm y^k$.

- PROPOSIÇÃO II-12:

Seja $f \in \mathcal{M}_2^2$ uma singularidade 0-modal com $j^3(f) = x^3$.

Então, f é equivalente a um germe de um dos tipos:

$$E_6^\pm : x^3 \pm y^4, \quad E_7 : x^3 + xy^3 \quad \text{ou} \quad E_8 : x^3 + y^5.$$

- DEMONSTRAÇÃO:

Sendo $j^3(f) = x^3$, então

$$j^4(f) = x^3 + a \cdot y^4 + by^3x + cy^2x^2 + dy \cdot x^3 + ex^4,$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Assim, consideremos os seguintes casos:

1º Caso:

Seja $a \neq 0$.

Neste caso, mostremos que o 4-jato de f é equivalente a $x^3 \pm y^4$. Então, como $x^3 \pm y^4$ é 4-determinado, segue que $f \sim x^3 \pm y^4$.

Tomemos $j^4(f)$ na forma $j^4(f) = x^3 + ay^4 + by^3x + 3x^2\phi$, onde $\phi \in \mathcal{M}_2^2$.

Tomando o difeomorfismo

$$\phi_1 : \begin{cases} X = x + \phi \\ Y = y \end{cases}, \quad \text{teremos:}$$

$$j^4(f) = (X-\phi)^3 + a \cdot Y^4 + b \cdot Y^3(X-\phi) + 3(X-\phi)^2 \cdot \phi = X^3 + aY^4 + bY^3X.$$

Tomando o difeomorfismo

$$\phi_2 : \begin{cases} x = X \\ y = (\pm a)^{1/4} \cdot Y \end{cases}, \text{ teremos:}$$

$$\begin{aligned} j^4(f) &= x^3 + a \cdot \left(\frac{Y}{(\pm a)^{1/4}} \right)^4 + b \cdot \left(\frac{Y}{(\pm a)^{1/4}} \right)^3 \cdot x = \\ &= x^3 \pm y^4 + 4r \cdot y^3 \cdot x \end{aligned}$$

Tomando o difeomorfismo

$$\phi_3 : \begin{cases} X = x \\ Y = y \pm rx \end{cases}, \text{ teremos:}$$

$$j^4(f) = x^3 \pm (Y \mp rX)^4 + 4r(Y \mp rX)^3 \cdot X = x^3 \pm y^4 + 3x^2\psi,$$

com $\psi \in \mathcal{M}_2^2$.

Finalmente tomando o difeomorfismo

$$\phi_4 : \begin{cases} x = X + \psi \\ y = Y \end{cases}, \text{ segue que}$$

$$j^4(f) = (x-\psi)^3 \pm y^4 + 3(x-\psi)^2 \cdot \psi = x^3 \pm y^4.$$

Por outro lado, como $\mathcal{M}_2^5 \subset \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle x^2, y^3 \rangle$,
por (I-5), segue que $x^3 \pm y^4$ é 4-determinado.

Portanto, $f \sim x^3 \pm y^4$.

- OBSERVAÇÃO:

Usando a técnica de determinação pesada demonstraremos o resultado anterior.

De fato, sendo $j^4(f) = x^3 + ay^4 + by^3x + cy^2x^2 + dx^3 + ex^4$ com $a \neq 0$, podemos expressá-lo na forma

$j^4(f) = x^3 + a \cdot y^4 + bxy^3 + x^2\phi$, onde $\phi \in \mathcal{M}_2^2$. Consideremos

$$f_0(x,y) = x^3 + a \cdot y^4 \quad \text{e} \quad f_1(x,y) = bxy^3 + x^2\phi.$$

Como f_0 é Q-H do tipo (12; 4,3) e, ainda, $f_1 \in \langle \partial f_0 \rangle = \langle x^2, y^3 \rangle$, com $\text{filt}_\alpha(f_1) \geq 13 > 12$, $\alpha = (4,3)$, segue que $x^3 + a \cdot y^4 + bxy^3 + x^2\phi \sim x^3 + a \cdot y^4 + f_2(x,y)$ com $\text{filt}_\alpha(f_2) \geq 14$.

Logo, como $\text{filt}_\alpha(f_2) \geq 14$, então $f_2(x,y) = x^4 \cdot \alpha_1(x,y) + x^3 y \cdot \alpha_2(x,y) + x^2 y^2 \cdot \alpha_3(x,y) + g_1$, onde

$$g_1 \in \mathcal{M}_2^5 \subset \langle f_0 \rangle.$$

Daí, $f_2 \in \langle \partial f_0 \rangle$. Assim,

$$x^3 + a \cdot y^4 + f_2(x,y) \sim x^3 + a \cdot y^4 + f_3(x,y) \quad \text{com} \quad \text{filt}_\alpha(f_3) \geq 15.$$

Logo, como $\text{filt}_\alpha(f_3) \geq 15$, então,

$$f_3(x,y) = x^4 \cdot \beta_1(x,y) + x^3 y \cdot \beta_2(x,y) + g_2,$$

onde $g_2 \in \mathcal{M}_2^5$. Daí, $f_3 \in \langle \partial f_0 \rangle$. Assim, $x^3 + a \cdot y^4 + f_3(x,y) \sim x^3 + a \cdot y^4 + f_4(x,y)$ com $\text{filt}_\alpha(f_4) \geq 16$.

Logo, como $\text{filt}_\alpha(f_4) \geq 16$, então $f_4(x,y) = x^4 \cdot \xi(x,y) + g_3$, onde $g_3 \in \mathcal{M}_2^5$. Daí, $f_4 \in \langle \partial f_0 \rangle$. Assim, $x^3 + a \cdot y^4 + f_4(x,y) \sim x^3 + a \cdot y^4 + f_5(x,y)$ com $\text{filt}_\alpha(f_5) \geq 17$.

Então, como $\text{filt}_\alpha(f_5) \geq 17$, segue que

$$f_5 \in \mathcal{M}_2^5.$$

Portanto, $x^3 + a \cdot y^4 + bxy^3 + x^2\phi \sim x^3 + a \cdot y^4 + f_5$,

$f_5 \in \mathcal{M}_2^5$. Assim, como $x^3 + a \cdot y^4$ é 4-determinado, então

$$x^3 + a \cdot y^4 + f_5 \sim x^3 + a \cdot y^4 \sim x^3 \pm y^4. \quad \text{Consequentemente,}$$

$$f \sim x^3 \pm y^4.$$

Observemos que é possível reduzir $j^4(f)$ à forma $x^3 + a \cdot y^4$, eliminando f_5 , não necessitando para tanto usar o fato de que $x^3 + a \cdot y^4$ é 4-determinado.

De fato, dando continuidade ao raciocínio anterior temos que $x^3 + a \cdot y^4 + f_5 \sim x^3 + a \cdot y^4 + g$, $g \in \mathcal{M}_2^6$. Daí,

$$x^3 + a \cdot y^4 + f_5 \sim x^3 + a \cdot y^4 + x^3 \cdot h_1(x, y) + y^4 \cdot h_2(x, y) = x^3(1 + h_1) + a \cdot y^4(1 + \frac{h_2}{a}) = (x(1 + h_1)^{1/3})^3 + a \cdot (y(1 + \frac{h_2}{a})^{1/4})^4 \text{ com } h_1, h_2 \in \mathcal{M}_2.$$

Assim, tomando a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} X = x(1 + h_1)^{1/3} \\ Y = y(1 + \frac{h_2}{a})^{1/4} \end{cases},$$

segue que $x^3 + a \cdot y^4 + f_5 \sim X^3 + a \cdot Y^4$

2º Caso:

Sejam $a = 0$ e $b \neq 0$.

Neste caso, mostremos que o 4-jato de f será, através de difeomorfismos, reduzido à forma $x^3 + xy^3$. Então, como já vimos que $x^3 + xy^3$ é 4-determinado, segue que $f \sim x^3 + xy^3$.

De fato, podemos expressar $j^4(f)$ na forma

$$j^4(f) = x^3 + bxy^3 + 3x^2\phi, \text{ onde } \phi \in \mathcal{M}_2^2.$$

Tomando o difeomorfismo $\psi_1: \begin{cases} X = x + \phi \\ Y = y \end{cases}$, teremos

$$j^4(f) = (X - \phi)^3 + b(X - \phi) \cdot Y^3 + 3(X - \phi)^2 \cdot \phi = X^3 + bXY^3.$$

Tomando agora o difeomorfismo $\psi_2: \begin{cases} x = X \\ y = (b)^{1/3} \cdot Y \end{cases}$

segue que $j^4(f) = x^3 + bx \left(\frac{y}{(b)^{1/3}} \right)^3 = x^3 + xy^3$.

Portanto, $f \sim x^3 + xy^3$.

- OBSERVAÇÃO:

Usando técnica de determinação pesada demonstraremos o resultado anterior.

De fato, consideremos $f_0(x,y) = x^3 + bxy^3$ e $f_1(x,y) = cx^2y^2 + dx^3y + ex^4$.

Como f_0 é Q-H do tipo $(9;3,2)$ e, ainda, $f_1 \in \langle \partial f_0 \rangle = \langle 3x^2 + by^3, xy^2 \rangle$, com $\text{filt}_\alpha(f_1) \geq 10 > 9$, $\alpha = (3,2)$, segue que $x^3 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ex^4 \sim x^3 + bxy^3 + f_2(x,y)$, com $\text{filt}_\alpha(f_2) \geq 11$.

Logo, como $\text{filt}_\alpha(f_2) \geq 11$, então $f_2(x,y) = x^4 \cdot \alpha_1(x,y) + x^3y \cdot \alpha_2(x,y) + g_1$, onde $g_1 \in \mathcal{M}_2^5 \subset \langle \partial f_0 \rangle$. Daí, $f_2 \in \langle \partial f_0 \rangle$. Assim, $x^3 + bxy^3 + f_2(x,y) \sim x^3 + bxy^3 + f_3(x,y)$ com $\text{filt}_\alpha(f_3) \geq 12$.

Lôgo, como $\text{filt}_\alpha(f_3) \geq 12$, então $f_3(x,y) = x^4 \cdot \beta_1(x,y) + g_2$, onde $g_2 \in \mathcal{M}_2^5$. Daí, $f_3 \in \langle \partial f_0 \rangle$. Assim, $x^3 + bxy^3 + f_3(x,y) \sim x^3 + bxy^3 + f_4(x,y)$ com $\text{filt}_\alpha(f_4) \geq 13$.

Então, como $\text{filt}_\alpha(f_4) \geq 13$, segue que $f_4 \in \mathcal{M}_2^5$.

Portanto, $x^3 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ex^4 \sim x^3 + bxy^3 + f_4$, $f_4 \in \mathcal{M}_2^5$. Assim, como $x^3 + bxy^3$ é 4-determinado, então $x^3 + bxy^3 + f_4 \sim x^3 + bxy^3 \sim x^3 + xy^3$. Consequentemente, $f \sim x^3 + xy^3$.

3º Caso:

Sejam $a = b = 0$.

Neste caso, podemos expressar $j^4(f)$ na forma

$$j^4(f) = x^3 + 3x^2\psi, \text{ onde } \psi \in \mathcal{M}_2^2.$$

Tomando o difeomorfismo $\theta: \begin{cases} X = x + \psi \\ Y = y \end{cases}$, teremos

$$j^4(f) = (X - \psi)^3 + 3(X - \psi)^2 \cdot \psi = X^3.$$

Portanto, $j^4(f) = x^3$, e, então, o 5-jato de f é dado por

$$j^5(f) = x^3 + a' \cdot y^5 + b' y^4 x + c' y^3 x^2 + d' y^2 x^3 - e' y x^4 + f' \cdot x^5, \text{ com}$$

$a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$. Assim, podemos expressar $j^5(f)$ na forma

$$j^5(f) = x^3 + a' y^5 + b' y^4 x + 3x^2 \phi, \text{ onde } \phi \in \mathcal{M}_2^3.$$

Consideremos três possibilidades:

- 1ª Possibilidade:

Seja $a' \neq 0$.

Neste caso, mostremos que o 5-jato de f é equivalente a $x^3 + y^5$. Então, como $x^3 + y^5$ é 5-determinado, segue que $f \sim x^3 + y^5$

De fato, tomando o difeomorfismo

$$\gamma_1: \begin{cases} X = x + \phi \\ Y = y \end{cases}, \text{ teremos}$$

$$j^5(f) = (X - \phi)^3 + a' Y^5 - b' Y^4 (X - \phi) + 3(X - \phi)^2 \cdot \phi = X^3 + a' Y^5 + b' XY^4.$$

Tomando o difeomorfismo ..

$$\gamma_2: \begin{cases} x = X \\ y = (a')^{1/5} \cdot Y \end{cases}, \text{ teremos}$$

$$j^5(f) = x^3 + a' \left(\frac{y}{(a')^{1/5}} \right)^5 + b' x \left(\frac{y}{(a')^{1/5}} \right)^4 = x^3 + y^5 + 5rxy^4.$$

Tomando o difeomorfismo $\gamma_3: \begin{cases} X = x \\ Y = y + rx \end{cases}$, teremos

$$j^5(f) = x^3 + (Y - rX)^5 + 5rX(Y - rX)^4 = x^3 + Y^5 + 3X^2\psi, \text{ com } \psi \in \mathcal{M}_2^3.$$

Finalmente, tomando o difeomorfismo $\gamma_4: \begin{cases} x = X + \psi \\ Y = Y \end{cases}$

$$\text{segue que } j^5(f) = (x - \psi)^3 + y^5 + 3(x - \psi)^2 \cdot \psi = x^3 + y^5.$$

Por outro lado, como $\mathcal{M}_2^6 \subset \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle x^2, y^4 \rangle$, por (I-5), segue que $x^3 + y^5$ é 5-determinado.

Portanto, $f \sim x^3 + y^5$

- OBSERVAÇÃO:

Usando técnica de determinação pesada demonstramos o resultado anterior.

De fato, consideremos $f_0(x, y) = x^3 + a'y^5$ e $f_1(x, y) = b'xy^4 + 3x^2\phi$.

Como f_0 é Q-H do tipo $(15; 5, 3)$ e, ainda, $f_1 \in \langle \partial f_0 \rangle = \langle x^2, y^4 \rangle$, com $\text{filt}_\alpha(f_1) \geq 17 > 15$, $\alpha = (5, 3)$, segue que $x^3 + a'y^5 + b'xy^4 + 3x^2\phi \sim x^3 + a'y^5 + f_2(x, y)$ com $\text{filt}_\alpha(f_2) \geq 18$.

Logo, como $\text{filt}_\alpha(f_2) \geq 18$, então $f_2(x, y) = x^5 \cdot \gamma_1(x, y) + x^4 \cdot \gamma_2(x, y) + x^4 y \cdot \gamma_3(x, y) + x^3 y^2 \cdot \gamma_4(x, y) + x^3 y \cdot \gamma_5(x, y) + x^2 y^3 \cdot \gamma_6(x, y) + g_1$, onde $g_1 \in \mathcal{M}_2^6 \subset \langle \partial f_0 \rangle$. Daí, $f_2 \in \langle \partial f_0 \rangle$. Assim, $x^3 + a'y^5 + f_2(x, y) \sim x^3 + a'y^5 + f_3(x, y)$ com $\text{filt}_\alpha(f_3) \geq 19$.

Repetindo o raciocínio, existem $f_4, \dots, f_{10}$ com $x^3 + a'y^5 + f_3 \sim \dots \sim x^3 + a'y^5 + f_{10}$, $\text{filt}(f_{10}) > \dots > \text{filt}(f_3) \geq 19$.

Logo, $\text{filt}(f_{10}) \geq 26$, donde segue que $f_{10} \in \mathcal{M}_2^6$.

Portanto, $x^3 + a'y^5 + b'xy^4 + 3x^2\phi \sim x^3 + a'y^5 + f_{10}$, com $f_{10} \in \mathcal{M}_2^6$. Assim, como $x^3 + a'y^5$ é 5-determinado, segue que $x^3 + a'y^5 + f_{10} \sim x^3 + a'y^5 \sim x^3 + y^5$.

Consequentemente, $f \sim x^3 + y^5$.

Observemos que é possível reduzir $j^5(f)$ à forma $x^3 + a'y^5$, eliminando f_{10} , não necessitando para tanto usar o fato de que $x^3 + a'y^5$ é 5-determinado.

De fato, dando continuidade ao raciocínio anteriores temos que $x^3 + a'y^5 + f_{10} \sim x^3 + a'y^5 + g$, $g \in \mathcal{M}_2^7$. Daí,

$$x^3 + a'y^5 + f_{10} \sim x^3 + a'y^5 + x^3 \cdot h_1(x, y) + y^5 \cdot h_2(x, y) = x^3(1+h_1) + a'y^5(1+\frac{h_2}{a'}) = (x(1+h_1)^{1/3})^3 + a'(y(1+\frac{h_2}{a'})^{1/5})^5, \quad \text{onde}$$

$h_1, h_2 \in \mathcal{M}_2$. Assim, tomando a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = x(1+h_1)^{1/3} \\ y = y(1+\frac{h_2}{a'})^{1/5} \end{cases}, \text{ segue que}$$

$$x^3 + a'y^5 + f_{10} \sim x^3 + a'y^5 \sim x^3 + y^5.$$

2ª Possibilidade

Sejam $a' = 0$ e $b' \neq 0$.

Neste caso, mostremos que f é equivalente a um germe h , onde $j^6(h) = x^3 + \lambda xy^4 + \lambda y^6$, $\lambda \in \mathbb{R}$. E, posteriormente, mostraremos que uma singularidade $h \in \mathcal{M}_2^2$ não é 0-modal se $j^6(h) = x^3 + \lambda xy^4 + \lambda y^6$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Desta forma, $a' = 0$ e $b' \neq 0$ não poderá ocorrer, pois contradiz a nossa hipótese de que f é 0-modal.

De fato, tomando do difeomorfismo

$$\psi_1: \begin{cases} X = x+\phi \\ Y = y \end{cases}, \text{ teremos}$$

$$j^5(f) = (X-\phi)^3 + b' \cdot (X-\phi) \cdot Y^4 + 3(X-\phi)^2 \cdot \phi = X^3 + b'XY^4.$$

$$\text{Tomando o difeomorfismo } \psi_2: \begin{cases} x = X \\ y = (\pm b')^{1/4} Y \end{cases}$$

$$\text{teremos } j^5(f) = x^3 + b'x \left(\frac{y}{(\pm b')^{1/4}} \right)^4 = x^3 \pm xy^4.$$

Portanto, $j^6(f) = x^3 \pm xy^4 + \theta$, onde $\theta \in \mathcal{M}_2^6$. Segue que $j^6(f)$ pode ser expresso na forma $j^6(f) = x^3 \pm xy^4 + x\theta_1 + \lambda \cdot y^6$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\theta_1 \in H_5(2,1)$.

Consideremos $g: \mathbb{R} \rightarrow J_0^6(2,1)$ dada por

$$g(t) = x^3 \pm xy^4 + t x \theta_1 + \lambda y^6. \text{ Mostremos que:}$$

$$(i) \quad dg(t) \cdot T_t(\mathbb{R}) \subset T_{g(t)}(R^{(6)} \cdot g(t))$$

$$(ii) \quad \dim_{\mathbb{R}} T_{g(t)}(R^{(6)} \cdot g(t)) = \text{constante}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Daí segue}$$

que $g(\mathbb{R})$ está contido em uma única $R^{(6)}$ -órbita. Assim, como $g(0) \in R^{(6)} \cdot g(0)$, então $g(t) \in R^{(6)} \cdot g(0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Logo, $j^6(f) \underset{R^{(6)}}{\sim} j^6(g(0))$ o que acarreta que $j^6(g(0)) = j^6(f \circ \phi^{-1})$, para algum $\phi \in R$. Daí, tomando $h = f \circ \phi^{-1}$, segue que $f \sim h$ com $j^6(h) = g(0) = x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(i) \quad dg(t) \cdot T_t(\mathbb{R}) \subset T_{g(t)}(R^{(6)} \cdot g(t)) = j^6(\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial g(t) \rangle).$$

De fato, temos que $dg(t) \cdot s = x\theta_1 \cdot s$. Daí, se mostrarmos que todos os monômios da forma $x^i y^j$, $i+j=6$, $i \geq 1$, pertencem a $j^6(\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial g(t) \rangle)$, então concluiremos o desejado.

$$\begin{aligned} \text{Temos que } \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial g(t) \rangle &= \langle 3x^3 \pm xy^4 + t x \theta_1 + t x \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \\ &3x^2 y \pm y^5 + t y \theta_1 + t y \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \pm 4x^2 y^3 + t x^2 \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + 6\lambda xy^5, \pm 4xy^4 + t x y \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \\ &+ 6\lambda y^6 \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$x^5 = \frac{x^2}{3} (3x^3 \pm xy^4 + tx\theta_1 + tx \frac{\partial \theta_1}{\partial x}) + h_1$, com $h_1 \in \mathcal{M}_2^7$. Segue que $x^5 \in j^6(\mathcal{M}_2^{<\partial g(t)>})$ e, então, $x^6, x^5y \in j^6(\mathcal{M}_2^{<\partial g(t)>})$.

$x^3y^2 = \frac{xy}{3} (3x^2y \pm y^5 + ty\theta_1 + ty \frac{\partial \theta_1}{\partial x}) + h_2$, com $h_2 \in \mathcal{M}_2^7$. Segue que $x^3y^2 \in j^6(\mathcal{M}_2^{<\partial g(t)>})$ e, então, $x^3y^3, x^4y^2 \in j^6(\mathcal{M}_2^{<\partial g(t)>})$.

$x^2y^4 = \frac{y^3}{3} (3x^2y \pm y^5 + ty\theta_1 + ty \frac{\partial \theta_1}{\partial x}) + h_3$, com $h_3 \in \mathcal{M}_2^7$. Segue que $x^2y^4 \in j^6(\mathcal{M}_2^{<\partial g(t)>})$.

$xy^5 = \frac{\pm y}{4} (\pm 4xy^4 + txy \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + 6\lambda y^6) + h_4$, com $h_4 \in \mathcal{M}_2^7$. Segue que $xy^5 \in j^6(\mathcal{M}_2^{<\partial g(t)>})$.

Portanto, $x \cdot \theta_1$ ($\theta_1 \in H_5(2,1)$) pertence a $j^6(\mathcal{M}_2^{<\partial g(t)>})$.

(ii) $\dim_{R^T g(t)} (R^{(6)} \cdot g(t)) = \text{constante}, \forall t \in R$.

Sabemos que $\text{cod}_{J_6} R^{(6)} \cdot g(t) = \mu(g(t)) + 2, \forall t \in R$, e, ainda, $\text{cod}_{J_6} R^{(6)} \cdot g(t) = \dim_R J_6 - \dim_{R^T g(t)} (R^{(6)} \cdot g(t)) = \binom{2+6}{6} - \dim_{R^T g(t)} (R^{(6)} \cdot g(t))$. Então, $\dim_{R^T g(t)} (R^{(6)} \cdot g(t)) = 26 - \mu(g(t)), \forall t \in R$. Daí, se mostrarmos que $\mu(g(t))$ é uma constante (finita) para todo $t \in R$, então concluiremos o desejado.

De fato, $g(t) = x^3 \pm xy^4 + tx\theta_1 + \lambda y^6$, $\theta_1 \in H_5(2,1)$, nós podemos expressá-lo na forma $g(t) = g(o) + tx\theta_1$.

Logo, $g(t)$ é S-Q-H do tipo $(6;2,1)$, pois, $g(o)$ é Q-H do tipo $(6;2,1)$, $\mu(g(o)) = \left(\frac{6-2}{2}\right) \cdot \left(\frac{6-1}{1}\right) = 10$ e $\text{filt}_{(2,1)}(tx\theta_1) \geq 7$. Segue que $\mu(g(t)) = \mu(g(o)) = 10, \forall t \in R$.

Demonstraremos agora que se $j^6(h) = x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6$, então h não é 0-modal.

Temos que $j^6(h) = j^6(g(o))$. Assim, como $g(o)$ é 6-determinado, segue que $h \sim g(o)$.

Portanto, mostremos que $g(o)$ não é 0-modal, e, então, h também não o é.

De fato, $E(\langle \partial g \rangle)$ é dada geometricamente por:

Tomando $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$, $\phi_4 = xy$, $\phi_5 = y^2$, $\phi_6 = xy^2$, $\phi_7 = y^3$, $\phi_8 = y^4$, $\phi_9 = y^5$ e $\phi_{10} = y^6$, temos que $\phi_1, \dots, \phi_{10}$ são representantes de uma base do espaço vetorial real $E_2/\langle \partial g \rangle$.

Logo, peso $_{(2,1)} \phi_i < 6$, $i=1, \dots, 9$

e peso $_{(2,1)} \phi_{10} = 6$.

Portanto, por (I-5), segue que $g(o)$ é 1-modal.

Para completarmos a demonstração, mostremos que

$\mathcal{M}_2^7 \subset \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial(g(o) + \psi) \rangle + \mathcal{M}_2^8$, $\forall \psi \in \mathcal{M}_2^7$, e, assim, por (I-5), segue que $g(o)$ é 6-determinado.

De fato,

$$\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial(g(o) + \psi) \rangle = \langle 3x^3 \pm xy^4 + x \partial_1 \psi, 3x^2y \pm y^5 + y \cdot \partial_1 \psi, \pm 4x^2y^3 + 6\lambda xy^5 + x \partial_2 \psi, \pm 4xy^4 + 6\lambda y^6 + y \partial_2 \psi \rangle.$$

Logo, tomemos $\alpha(x,y) \in \mathcal{M}_2^7$ nos seguintes ca-

sos:

a) $\alpha(x,y) = x^3 \cdot p$, $p \in \mathcal{M}_2^4$. Então, $\alpha(x,y) = \frac{p}{3}(3x^3 \pm xy^4 + x\partial_1\psi) + b_1$, com $b_1 \in \mathcal{M}_2^8$.

b) $\alpha(x,y) = x^2y^5$. Então, $\alpha(x,y) = \frac{y^4}{3}(3x^2y \pm y^5 + y\partial_1\psi) + b_2$, com $b_2 \in \mathcal{M}_2^8$.

c) $\alpha(x,y) = xy^6$. Então, $\alpha(x,y) = \pm \frac{y^2}{4}(\pm 4xy^4 + 6\lambda y^6 + y\partial_2\psi) + b_3$, com $b_3 \in \mathcal{M}_2^8$.

d) $\alpha(x,y) = y^7$. Temos que, $\pm y^2(3x^2y \pm y^5 + y\partial_1\psi) = \pm 3x^2y^3 + y^7 + b_4$, $b_4 \in \mathcal{M}_2^8$. Ainda, como $\partial_2\psi \in \mathcal{M}_2^6$, então $x \cdot \partial_2\psi \in \mathcal{M}_2^7$

recai em um dos casos anteriores, segue daí que

$$x \cdot \partial_2\psi \in \mathcal{M}_2^{<\partial(g(o)+\psi)>} + \mathcal{M}_2^8. \text{ Logo, } (\pm 4x^2y^3 + 6\lambda xy^5 +$$

$$+ x\partial_2\psi) - x\partial_2\psi = \pm 4x^2y^3 + 6\lambda xy^5 \in \mathcal{M}_2^{<\partial(g(o)+\psi)>} + \mathcal{M}_2^8.$$

$$\text{Assim, } (\mp 4) \cdot (\pm 3x^2y^3 + y^7 + b_4) + (\pm 3) \cdot (\pm 4x^2y^3 + 6\lambda xy^5) =$$

$$= (\pm 18\lambda) \cdot xy^5 \mp 4y^7 + b_5 \in \mathcal{M}_2^{<\partial(g(o))+\psi>} + \mathcal{M}_2^8, \text{ onde}$$

$$b_5 \in \mathcal{M}_2^8.$$

$$\text{Se } \lambda = 0, \text{ segue que } y^7 \in \mathcal{M}_2^{<\partial(g(o)+\psi)>} + \mathcal{M}_2^8.$$

Suponhamos $\lambda \neq 0$.

$$\text{Por outro lado, } \frac{y}{6\lambda}(\pm 4xy^4 + 6\lambda y^6 + y\partial_2\psi) =$$

$$= \frac{\pm 4}{6\lambda}xy^5 + y^7 + b_6 \in \mathcal{M}_2^{<\partial(g(o)+\psi)>} + \mathcal{M}_2^8, \text{ onde } b_6 \in \mathcal{M}_2^8.$$

$$\text{Logo, } \left(\frac{\pm 1}{27\lambda^2}\right) \cdot [\pm 18\lambda xy^5 \mp 4y^7 - b_5] - \left[\frac{\pm 4}{6\lambda}xy^5 + y^7 + b_6\right] =$$

$$= k \cdot y^7 + b_7 \in \mathcal{M}_2^{<\partial(g(o)+\psi)>} + \mathcal{M}_2^8, \text{ com } b_7 \in \mathcal{M}_2^8 \text{ (} k \neq 0 \text{)}. \text{ Daí,}$$

$$y^7 \in \mathcal{M}_2^{<\partial(g(o)+\psi)>} + \mathcal{M}_2^8.$$

Portanto, $\mathcal{M}_2^7 \subset \mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial(g(o) + \psi) \rangle + \mathcal{M}_2^8$, para todo $\psi \in \mathcal{M}_2^7$. Segue que $g(o)$ é 6-determinado.

- OBSERVAÇÕES:

1a) Utilizando técnica de determinação pesada podemos demonstrar que $x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6 + tx\theta_1$, onde $t, \lambda \in R$ e $\theta_1 \in H_5(2,1)$, é equivalente a $x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6$.

De fato, consideremos $g_0(x,y) = x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6$ e $g_1(x,y) = tx\theta_1$.

Como g_0 é Q-H do tipo $(6;2,1)$ com $\langle \partial g_0 \rangle = \langle 3x^2 \pm y^4, \pm 4xy^3 + 6\lambda y^5 \rangle$, segue que $g_1 \in \langle \partial g_0 \rangle$. Temos que $\text{filt}_\alpha(g_1) \geq 7$, onde $\alpha = (2,1)$.

Portanto, $x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6 + tx\theta_1 \sim x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6 + g_2(x,y)$ com $\text{filt}_\alpha(g_2) \geq 8$.

Na expressão de $g_2(x,y)$, não aparecem efetivamente os monômios $x, x^2, x^3, y, \dots, y^7, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2, x^3y, xy^3, x^2y^3, xy^4, xy^5$, pois, $\text{filt}_\alpha(g_2) \geq 8$, com $\alpha = (2,1)$.

Como $x^4, y^8, x^3y^3, x^2y^4 \in \langle \partial g_0 \rangle$, segue que $g_2 \in \langle \partial g_0 \rangle$. Logo, $x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6 + g_2(x,y) \sim x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6 + g_3(x,y)$ com $\text{filt}_\alpha(g_3) \geq 9$. Assim, repetindo sucessivamente o raciocínio encontramos $g_7 \in \mathcal{M}_2^7$ tal que $g_0 + g_1 \sim \dots \sim g_0 + g_7$, onde $g_1, \dots, g_6 \in \langle \partial g_0 \rangle$ e $\text{fil}_\alpha(g_7) > \dots > \text{filt}_\alpha(g_1)$.

Como $x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6$ é 6-determinado, segue que $x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6 + g_7(x,y) \sim x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6$.

Logo, $x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6 + t \cdot x\theta_1 \sim x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6$.

2a) Utilizando técnica diferente da anterior, provaremos que

$$f_\lambda = x^3 \pm xy^4 + \lambda y^6 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ não é 0-modal.}$$

Para tanto, mostremos que $R^{(6)} \cdot f_\lambda \neq R^{(6)} f_{\lambda'}$, segue que $\lambda \neq \lambda'$.

De fato, suponhamos que existe $\gamma = (\mu, \eta) \in R_2$ tal que $f_{\lambda \circ \gamma} = f_{\lambda'}$, ou seja, $f_\lambda \sim f_{\lambda'}$.

$$\text{Logo, } \mu^3 \pm \mu\eta^4 + \lambda\eta^6 = x^3 \pm xy^4 + \lambda'y^6.$$

Consideremos $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_6$ e $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_6$, onde μ_i, η_i são polinômios homogêneos de grau i , $i=1, \dots, 6$.

Temos que o k -jato de $\mu^3 \pm \mu\eta^4 + \lambda\eta^6$ é igual ao k -jato de $x^3 \pm xy^4 + \lambda'y^6$. Segue que $\mu^3 \pm \mu\eta^4 + \lambda\eta^6 = \mu_1^3 + \mu_2^3 + 3\mu_1^2(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + 3\mu_1 \cdot \mu_2^2 \pm (\mu_1\eta_1^4 + 4\mu_1\eta_1^3\eta_2 + \mu_2\mu_1^4) = x^3 \pm xy^4 + \lambda'y^6$. (*)

Logo,

- calculando o 3-jato temos que $\mu_1^3 = x^3$. Segue que $\mu_1 = x$.

- calculando o 4-jato temos que $\mu_1^3 + 3\mu_1^2\mu_2 = x^3$. Segue que $x^3 + 3x^2\mu_2 = x^3$, então $x\mu_2 = 0$.

Assim, $\mu_2(x, y) = 0$ para qualquer $x \neq 0$ em U .

Ainda, se $p \in U \cap Oy$, então existe uma vizinhança $W \ni p$ com $x \neq 0$. Segue $\mu_2(x, y) = 0$ para qualquer $x \neq 0$ em W . Daí, pela continuidade de μ_2 , segue que $\mu_2 = 0$ em todo U .

- calculando o 5-jato e utilizando o fato de que $\mu_1 = x$ e $\mu_2 = 0$ temos que $x^3 + 3x^2\mu_3 \pm x\eta_1^4 = x^3 \pm xy^4$. Segue que $x \cdot (3x\mu_3 \pm \eta_1^4 \pm y^4) = 0$.

Assim, $3x\mu_3(x,y) \pm \eta_1^4(x,y) y^4 = 0$ para qualquer $x \neq 0$ em U. Ainda, se $p \in U \cap Oy$, então existe uma vizinhança W de p com $x \neq 0$. Segue que $3x\mu_3 \pm \eta_1^4 \pm y^4 = 0$ para qualquer $x \neq 0$ em W. Daí, pela continuidade de $3x\mu_3 \pm \eta_1^4 \pm y^4$, segue que $3x\mu_3 \pm \eta_1^4 \pm y^4 = 0$ em todo U.

Então, para qualquer $(x,y) \in U$ temos que $3x\mu_3 \pm \eta_1^4 = \pm y^4$, em particular para $(0,y)$ temos que $\pm \eta_1^4(0,y) = \pm y^4$. Logo, $\eta_1(0,y) = \pm y$. Então, $\eta_1(x,y) = ax \pm y$.

A igualdade (*) se verifica para todo ponto da forma $(0,y)$. Logo, $\lambda(\pm y)^6 = \lambda' y^6$. Segue que $(\lambda - \lambda') y^6 = 0$. Portanto, $\lambda = \lambda'$.

Portanto, se $\lambda \neq \lambda'$, então $R_\lambda^{(6)} f_\lambda \neq R_{\lambda'}^{(6)} f_{\lambda'}$. Segue que f_λ não é 0-modal, pois todo aberto U de J_0^6 , $f_\lambda \in U$, encontrará uma infinidade de $R_\lambda^{(6)}$ -órbitas.

3a) Utilizando outra técnica, diferente das duas anteriores, demonstremos que $f_\lambda = x^3 + xy^4 + \lambda y^6$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) não é 0-modal.

Para tanto, mostremos novamente que $R^{(6)} \cdot f_\lambda \neq R^{(6)} \cdot f_{\lambda'}$, sempre que $\lambda \neq \lambda'$.

De fato, consideremos $f_\lambda \sim f_{\lambda'}$, isto nos assegura que $f_\lambda^{-1}(0) \sim f_{\lambda'}^{-1}(0)$, ou seja, $f_\lambda^{-1}(0) = \gamma^{-1}(f_{\lambda'}^{-1}(0))$, onde $\gamma \in R^{(6)}$ é tal que $f_\lambda = f_{\lambda'} \circ \gamma$.

Temos que $(x - t_1 y^2) \cdot (x - t_2 y^2) \cdot (x - t_3 y^2) = x^3 - x^2 y^2 (t_1 + t_2 + t_3) + x y^4 (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) - (t_1 t_2 t_3) y^6$, onde $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Assim, se t_1, t_2, t_3 são raízes de $t^3 + t + \lambda = 0$, então $t_1 t_2 t_3 = -\lambda$, $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = \pm 1$ e $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. Segue que $f_\lambda = (x - t_1 y^2) \cdot (x - t_2 y^2) \cdot (x - t_3 y^2)$. Consideremos $f_{\lambda'} = (x - t_4 y^2) \cdot (x - t_5 y^2) \cdot (x - t_6 y^2)$.

Logo, $f_\lambda^{-1}(0)$ e $f_{\lambda'}^{-1}(0)$ são dados respectivamente pelas parábolas $x = t_1 y^2$, $x = t_2 y^2$, $x = t_3 y^2$ e $x = t_4 y^2$, $x = t_5 y^2$, $x = t_6 y^2$.

Então, como $f_\lambda^{-1}(0)$ e $f_{\lambda'}^{-1}(0)$ são difeomorfos, por (I-19), segue que $\{t_1, t_2, t_3\} = \{t_4, t_5, t_6\}$. Assim, $\lambda = \lambda'$.

Portanto, se $\lambda \neq \lambda'$, então $R^{(6)} f_\lambda \neq R^{(6)} f_{\lambda'}$. Segue que f_λ não é 0-modal.

3a Possibilidade:

Sejam $a' = b' = 0$.

Neste caso, mostremos que f não é 0-modal. Desta forma, $a' = b' = 0$ não poderá ocorrer, pois contradiz nossa hipótese.

Como $a' = 0$ teremos que $j^6(f) = x^3 + b'xy^4 + \lambda y^6$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideremos $f_b, (x,y) = x^3 + b'xy^4 + \lambda y^6$. Assim, se mostrarmos que f_0 não é 0-modal, então f também não será 0-modal, uma vez que $f \sim f_0$, pois, f_0 é 6-determinado ($\lambda \neq 0$).

De fato, temos que para qualquer aberto U de J_0^6 , $f_0 \in U$, U encontra uma infinidade de $\mathcal{R}^{(6)}$ -órbitas.

Para tal, consideremos $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow J_0^6$ dada por $\gamma(b') = x^3 + b'xy^4 + \lambda y^6$. Cada aberto U , pela continuidade de γ , encontrará uma infinidade de $\mathcal{R}^{(6)}$ -órbitas de germes do tipo f_b , com $b' \neq 0$. Portanto, como f_b , ($b' \neq 0$) não é 0-modal, segue que U encontra uma infinidade de $\mathcal{R}^{(6)}$ -órbitas.

Logo, f_0 não é 0-modal.

Por outro lado, como $\mathcal{M}_2^7 \subset \mathcal{M}_2^2 \cdot \langle x^2, y^5 \rangle$, por (I-5), segue que f_0 é 6-determinado ($\lambda \neq 0$).

Portanto, f não é 0-modal.

- OBSERVAÇÃO:

$E(\langle \partial f_0 \rangle)$ é dada geometricamente por:

Observemos que f_0 é Q-H do tipo $(6;2.1)$.

Tomando $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$, $\phi_4 = xy$, $\phi_5 = y^2$, $\phi_6 = xy^2$, $\phi_7 = y^3$, $\phi_8 = xy^3$, $\phi_9 = y^4$, $\phi_{10} = xy^4$, temos que $\phi_1, \dots, \phi_{10}$ são representantes de uma base do espaço vetorial real $E_2 / \langle \partial f_0 \rangle$.

Assim, $\text{peso}_\alpha(\phi_{10}) = 6$ e $\text{peso}_\alpha(\phi_i) < 6$, ($i = 1, \dots, 9$), donde $\alpha = (2,1)$.

Portanto, f_0 é 1-modal.

CAPÍTULO III

ABUTAMENTO E ZERO-MODALIDADE

1. ABUTAMENTO DE ÓRBITAS

Consideremos a ação de $R^{(k)}$ sobre J^k .

Sejam V e W $R^{(k)}$ -órbitas de J^k . Dizemos que $\underline{V}$ abuta W , e denotamos por $V \leftarrow W$, quando $W \subset \bar{V}$.

- PROPOSIÇÃO III-1:

Sejam V e W $R^{(k)}$ -órbitas de J^k .

Então, V abuta W se, e somente se, existe $x \in W$ tal que $x \in \bar{V}$.

- DEMONSTRAÇÃO:

($\rightarrow$) Óbvio

($\leftarrow$)

Seja $y \in W$. Mostremos que $y \in \bar{V}$.

De fato, a restrição da ação $\gamma: R^{(k)} \times J^k \rightarrow J^k$ a $\{g\} \times J^k$, $\gamma_g = \gamma|_{\{g\} \times J^k}$, é, para cada $g \in R^{(k)}$, um difeomorfismo. Logo, $y = g \cdot x = \gamma_g(x)$, para algum $g \in R^{(k)}$.

Tomemos um aberto A_y em J^k contendo y , e consideremos o aberto $\gamma_g^{-1}(A_y) = A_x$. Temos que $A_x \cap V \neq \emptyset$, pois $x \in A_x$ e x é aderente a V .

Consideremos $z \in A_x \cap V$. Logo, $\gamma_g(z) \in A_y$ e, ainda, $\gamma_g(z) = g \cdot z \in V$, uma vez que $z \in V$. Segue que, $A_y \cap V \neq \emptyset$. Portanto, $y \in \bar{V}$.

Sejam $f \in J^k$ e um aberto U de J^k , com $f \in U$.

Definimos $\rho(U)$ como sendo a cardinalidade do conjunto das $R^{(k)}$ -órbitas encontrando U . Desta forma, definimos o número $\rho(f)$ como sendo $\rho(f) = \inf\{\rho(U), U \text{ aberto de } J^k \text{ contendo } f\}$, ou seja, $\rho(f)$ é o número de $R^{(k)}$ -órbitas às quais f é aderente.

Por outro lado, se f é aderente a uma $R^{(k)}$ -órbita V , então abuta $R^{(k)} \cdot f$. Portanto, $\rho(f)$ expressa o número de $R^{(k)}$ -órbitas abutando $R^{(k)} \cdot f$.

- PROPOSIÇÃO III-2:

Sejam $f, g \in J^k$ com $R^{(k)} \cdot f = R^{(k)} \cdot g$ e $\phi \in R^{(k)}$ tal que $g = \phi \cdot f$.

Consideremos γ_ϕ o difeomorfismo (restrição da ação de $R^{(k)}$ sobre J^k) dado por $\gamma_\phi(h) = \phi \cdot h$.

Então, se U é um aberto de J^k contendo f e $V = \gamma_\phi(U)$, tem-se que uma $R^{(k)}$ -órbita de J^k encontra U se, e somente se, ela encontra V .

- DEMONSTRAÇÃO:

Se $R^{(k)} \cdot h$ encontra U , então existe $h' \in R^{(k)} \cdot h \cap U$. Como $h' \in U$ teremos que $\gamma_\phi(h') = \phi \cdot h' \in V$. Por outro lado, como $h' \in R^{(k)} \cdot h$ temos que $\gamma_\phi(h') \in R^{(k)} \cdot h$.

Portanto, $R^{(k)} \cdot h$ encontra V .

A recíproca é análoga.

- COROLÁRIO 1:

Sejam $f, g \in J^k$ com $R^{(k)} \cdot f = R^{(k)} \cdot g$.

Então, f é 0-modal se, e somente se, g é 0-modal.

- DEMONSTRAÇÃO:

Por (III-2), se um aberto U de J^k_0 contendo f intercepta apenas um número finito de $R^{(k)}$ -órbitas, então existe $\phi \in R^{(k)}$ tal que o aberto $V = \gamma_\phi(U)$, onde $g \in V$, intercepta a mesma quantidade de $R^{(k)}$ -órbitas que U intercepta.

- COROLÁRIO 2:

Sejam $f, g \in J^k$ pontos 0-modais com $R^{(k)} f = R^{(k)} g$.

Então, $\rho(f) = \rho(g)$.

- DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos $\rho(f) = m \in \mathbb{N}$ e $\rho(g) = n \in \mathbb{N}$.

Consideremos um aberto U de J^k , com $f \in U$, pelo qual passam exatamente m $R^{(k)}$ -órbitas. Seja $V = \gamma_\phi(U)$, onde γ_ϕ é o difeomorfismo referido na proposição anterior e $\phi \in R^{(k)}$ é tal que $\phi \cdot f = g$. Então, por V passam pelo menos m $R^{(k)}$ -órbitas e daí, como $g \in V$ e $\rho(g) = n$, segue que $m \geq n$. De maneira análoga encontramos que $m \leq n$.

Logo, $m = n$, ou seja, $\rho(f) = \rho(g)$.

O corolário acima nos motiva a seguinte definição:

Definimos o número $\rho(R_V^{(k)} \cdot f)$ como sendo o número $\rho(g)$, para qualquer $g \in R_V^{(k)}$. Assim, $\rho(R_V^{(k)} \cdot f)$ é o número de $R_V^{(k)}$ -órbitas que abutam $R_V^{(k)} \cdot f$, pois:

- PROPOSIÇÃO III-3:

$$\rho(f) = \rho(R_V^{(k)} \cdot f)$$

- DEMONSTRAÇÃO:

Seja U um aberto de J^k contendo f pelo qual passe exatamente $\rho(f)$ órbitas, digamos $G_1, G_2, \dots, G_{\rho(f)}$. Segue que $U \subset \bigcup_{i=1}^{\rho(f)} G_i$, sendo que $f \in \bar{G}_i$, $i=1, \dots, \rho(f)$, isto é, f é aderente a cada uma das $R_V^{(k)}$ -órbitas G_i .

Logo, G_i abuta $R_V^{(k)} \cdot f$ para cada i e, então, o número de $R_V^{(k)}$ -órbitas que abutam $R_V^{(k)} \cdot f$ é maior ou igual a $\rho(f)$. Segue que $\rho(R_V^{(k)} \cdot f) \geq \rho(f)$.

Suponhamos $\rho(R_V^{(k)} \cdot f) > \rho(f)$. Então, existe uma $R_V^{(k)}$ -órbita H distinta de G_i , $i=1, \dots, \rho(f)$, sendo que H abuta $R_V^{(k)} \cdot f$.

Então, $R_V^{(k)} \cdot f \in \bar{H}$, implica que $f \in \bar{H}$ o que é falso uma vez que o aberto U é tal de $U \cap H = \emptyset$.

$$\text{Portanto, } \rho(f) = \rho(R_V^{(k)} \cdot f)$$

- EXEMPLO :

Consideremos a ação de $R_V^{(k)}$ sobre $J^{(k)}(1,1)$.

Mostremos que $\rho(x^{k_0}) = \frac{3k_0-1}{2}$, com $k \geq k_0 \geq 3$ e

sendo $k_0 \in \mathbb{N}$ ímpar.

Inicialmente observemos que $J^{(k)}(1,1)$ tem um número finito de $R^{(k)}$ -órbitas, sendo estas as $R^{(k)}$ -órbitas de: $0; x; \pm x^2; x^3; \pm x^4; \dots; x^k$.

$$\rho(x^{k_0}) = \frac{3k_0 - 1}{2}$$

De fato, tomemos um aberto U de J^k dado por $U = \{a_1 x + \dots + a_{k_0} \cdot x^{k_0} + \dots + a_k x^k; 1/2 < a_{k_0} < 3/2, a_i \in \mathbb{R}\}$.

Logo, se $a_1 \neq 0$, então $a_1 x + \dots + a_k x^k$ é R -equivalente a x . Segue que $R^{(k)} \cdot x$ encontra U .

Por outro lado, se $a_1 = 0$ e $a_2 \neq 0$, então $a_1 x + \dots + a_k x^k$ é R -equivalente a $\pm x^2$. Segue que $R^{(k)}(\pm x^2)$ encontram U .

Procedendo assim sucessivamente até que $a_1 = a_2 = \dots = a_{k_0-1} = 0$ temos que $a_1 x + \dots + a_k x^k$ é R -equivalente a x^{k_0} . Segue que $R^{(k)} \cdot x^{k_0}$ encontra U .

Portanto, as únicas órbitas a abutar $R^{(k)} \cdot x^{k_0}$ são: $R^{(k)} \cdot x$, $R^{(k)}(\pm x^2), \dots, R^{(k)} \cdot x^{k_0}$.

- OBSERVAÇÕES :

1) Se k_0 é par, então $\rho(x^{k_0}) = \frac{3k_0 - 2}{2}$. Em particular, se $k = 3$ e $k_0 = 2$, segue que $\rho(x^{k_0}) = 2$.

2) Em particular, tomando $k = 3$ e $k_0 = 3$, temos que $\rho(x^3) = 4$. Sendo que as únicas $R^{(3)}$ -órbitas a abutar $R^{(3)} \cdot x^3$ são: $R^{(3)} \cdot x$, $R^{(3)}(\pm x^2)$ e $R^{(3)} \cdot x^3$.

O esquema de abutamento pode ser descrito de acordo com as dimensões reais das $R^{(3)}$ -órbitas em $J^3(1,1)$.

As dimensões são dadas por:

$$a) \dim_{\mathbb{R}} J^3(1,1) = 4$$

$$b) \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}^{(3)} \cdot 0 = 0$$

Sabemos que $\text{cod}(x^k) = k-2$, com $x^k \in \mathcal{M}_1$. Por outro lado, $\text{cod}_{J^3} \mathcal{R}^{(3)} \cdot (x^k) = \mu(x^k) + 1 = 2 + \text{cod}(x^k) = k$. Assim, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}^{(3)}(x^k) = \dim_{\mathbb{R}} J^3 - \text{cod}_{J^3} \mathcal{R}^{(3)}(x^k) = 4 - k$, então:

$$c) \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}^{(3)} \cdot x^3 = 1$$

$$d) \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}^{(3)} \cdot (\pm x^2) = 2$$

$$e) \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}^{(3)} \cdot x = 3$$

Observemos que $\mathcal{R}^{(3)} \cdot x$ é aberta em $J^3_O(1,1)$.

Esquemáticamente:

$\mathcal{R}^{(3)} \cdot 0$ é abutada por todas as órbitas, $\mathcal{R}^{(3)} \cdot x$ abuta $\mathcal{R}^{(3)} \cdot (\pm x^2)$ e $\mathcal{R}^{(3)} \cdot (\pm x^2)$ abuta $\mathcal{R}^{(3)} \cdot x^3$.

2. ZERO-MODALIDADE DOS GERMES DOS TIPOS $A_k^\pm$, $D_k^\pm$, $E_6^\pm$, E_7 e E_8

Através de (II-7) nós temos "modelos" para todas as singularidades 0-modais. Tais modelos são os tipos $A_k^\pm$, $k \geq 1$; $D_k^\pm$, $k \geq 4$; $E_6^\pm$; E_7 e E_8 . Nosso interesse agora é mostrar que um germe de qualquer um desses tipos é 0-modal. Para tanto, tomaremos um elemento arbitrário f pertencente a um dos tipos $A_k^\pm$, $D_k^\pm$, $E_6^\pm$, E_7 ou E_8 e mostraremos que $\rho(R^{(k)} \cdot f) < \infty$ e que existem $k_0, r \in \mathbb{N}$ tais que, $\rho(R^{(k)} \cdot f) \leq r$, $\forall k \geq k_0$. Iremos também descrever exatamente quais serão as $R^{(k)}$ -órbitas que abutam $R^{(k)} \cdot f$.

2.1 - A Série $A_k^\pm$, $k \geq 1$ é 0-modal.

- PROPOSIÇÃO III-4:

$$A_{k_0-1}^+ : f = x^{k_0} + y^2 \quad (k_0 \geq 2) \text{ é 0-modal.}$$

- DEMONSTRAÇÃO:

Seja $k \geq k_0$. Consideremos

$$B = T_{j^k(f)}(R^{(k)} \cdot f) = j^k(M_2^2 \cdot \langle \partial f \rangle) = \langle x^{k_0}, \dots, x^k, y^2, y^3, \dots, y^k, xy, \dots \rangle_R.$$

Tomando $V = \langle y, x, x^2, \dots, x^{k_0-1} \rangle_R$, temos que $V \nsubseteq B$. Assim, para provarmos que f é 0-modal é suficiente provar que existe uma vizinhança P de $j^k(f)$ em V que intercepta apenas um número finito de $R^{(k)}$ -órbitas e, ainda, mostrar que esta quantidade de $R^{(k)}$ -órbitas independe de $k \geq k_0$, ou seja, é limitada quando $k \rightarrow \infty$.

De fato: Nas vizinhanças de $j^k(f)$ em V consideremos um elemento arbitrário dado por

$$w = x^{k_0} + y^2 + \lambda_0 y + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_{k_0-1} x^{k_0-1}, \quad \text{onde}$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k_0-1} \in \mathbb{R}.$$

Assim,

(i) Se $\lambda_0 \neq 0$ ou $\lambda_1 \neq 0$, então $w \sim x$.

(ii) Se $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, então seja i o menor inteiro tal

que $\lambda_i \neq 0$, com $2 \leq i \leq k_0 - 1$. Segue que

$$w = x^{k_0} + y^2 + \lambda_i \cdot x^i + \dots + \lambda_{k_0-1} \cdot x^{k_0-1} \quad (\lambda_i \neq 0) \text{ é equivalen}$$

te a $\pm x^i + y^2$, isto é, $w \sim \pm x^i + y^2$. ($\pm$ conforme o sinal de λ_i).

Portanto, existe um aberto $A \subset J_0^k(2,1)$, com $j^k(f) \in A$ e $A \cap V = P$, tal que A encontra apenas os $R^{(k)}$ -órbitas de: $x, f, \pm x^\ell + y^2$ ($2 \leq \ell \leq k_0 - 1$), quantidade esta que independe de $k \geq k_0$.

Logo, f é 0-modal.

- OBSERVAÇÕES:

1) Já vimos anteriormente que $h = \pm x^{k+1}$ é 0-modal como germe de E_1 . Desta forma, por (II-2), segue que $f = h + g$ é 0-modal, onde $h = \pm x^{k+1}$ e $g = \pm y^2$. Portanto, temos que a série $A_k^\pm$ ($k \geq 1$) é 0-modal.

2) Em particular, se $k_0 = 5$, então para o subespaço $\langle x^2, x^3, x^4 \rangle_R$ de V , temos a seguinte descrição geométrica das intersecções das $R^{(k)}$ -órbitas ($k \geq 5$):

A descrição geométrica anterior foi feita baseada nas dimensões reais das $\mathcal{R}^{(5)}$ -órbitas em $J^5(2,1)$. Sendo que estas dimensões são dadas por:

a) $\dim_{\mathcal{R}} J^5(2,1) = 21$

b) $\dim_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{(5)}(x^5+y^2) = \dim_{\mathcal{R}} J^5 - \text{cod}_{J^5} \mathcal{R}^{(5)}(x^5+y^2) = 21-6 = 15,$

pois $\text{cod}_{J^5} \mathcal{R}^{(5)}(x^5+y^2) = \mu(x^5+y^2)+2 = 6.$

$$\mu(x^5+y^2) = \#(N^2 - E(<\partial(x^5+y^2)>)) = 4.$$

c) $\dim_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{(5)}(x^4+y^2) = 21-5 = 16$, pois, $\text{cod}_{J^5} \mathcal{R}^{(5)}(x^4+y^2) =$
 $= \mu(x^4+y^2)+2 = 5.$

$$\mu(x^4+y^2) = \#(N^2 - E(<\partial(x^4+y^2)>)) = 3.$$

d) $\dim_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{(5)}(x^3+y^2) = 21-4 = 17$, pois, $\text{cod}_{J^5} \mathcal{R}^{(5)}(x^3+y^2) =$
 $= \mu(x^3+y^2)+2 = 4.$

$$\mu(x^3+y^2) = \#(N^2 - E(<\partial(x^3+y^2)>)) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}^{(5)} \cdot (x^2+y^2) &= 21-3 = 18, \text{ pois, } \text{cod}_{\mathbb{J}^5 \mathcal{R}^{(5)}} \cdot (x^2+y^2) = \\ &= \mu(x^2+y^2) + 2 = 3. \end{aligned}$$

$$\mu(x^2+y^2) = \#(N^2 - E(<\partial(x^2+y^2)>)) = 1.$$

Baseado nesta descrição geométrica temos que

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow A_4.$$

3) Para a série $A_k^\pm$ ($k \geq 1$) vale a cadeia de abutamentos:

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow \dots$$

2.2- A Série $D_k^\pm$, $k \geq 4$ é 0-modal.

- PROPOSIÇÃO III-5 :

$$D_{\ell+1}^-: f = x^2 y - y^\ell \ (\ell \geq 3) \text{ é 0-modal.}$$

- DEMONSTRAÇÃO:

Temos que $\dim_R \frac{e_2}{\langle \partial f \rangle} = \ell + 1$.

Sejam $k_0 = \ell + 2$ e $k \geq k_0$ ($k \in \mathbb{Z}$). Consideremos

$$\begin{aligned} B = T_{j^k(f)}(R^{(k)} \cdot f) &= j^k(\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle) = \\ &= \langle x^3, \dots, x^k, y^\ell, \dots, y^k, x^2y, xy^2, \dots \rangle_R. \end{aligned}$$

Tomando $V = \langle y, x, x^2, xy, y^2, y^3, \dots, y^{\ell-1} \rangle_R$, temos que $V \not\subset B$.

Como $\mu(f) = \ell + 1$, então, existe um aberto $U \subset J_0^k$, com $j^k(f) \in U$, tal que, para todo $g \in U$ tem-se $\mu(g) \leq \ell + 1$.

Portanto, todo $g \in U$ é k_0 -determinado ($k_0 = \ell + 2$).

Seja $w \in U \cap V$ dado por

$$w = x^2y - y^\ell + \alpha y + \beta x + \mu_1 x^2 + \mu_2 xy + \mu_3 y^2 + \mu_4 y^3 + \dots + \mu_\ell y^{\ell-1}, \text{ onde}$$

$\alpha, \beta, \mu_1, \dots, \mu_\ell \in R$.

Assim,

- (i) Se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, então $w \sim x$.
- (ii) Se $\alpha = \beta = 0$ e $\mu_2^2 - 4\mu_1 \cdot \mu_3 \neq 0$, então $w \sim \pm x^2 \pm y^2$.
- (iii) Se $\alpha = \beta = 0$ e $\mu_2^2 - 4\mu_1 \cdot \mu_3 = 0$, com $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \neq (0, 0, 0)$, então consideremos a seguinte possibilidade:

Seja $\mu_1 \neq 0$

Consideremos $w = w(x, y) = x^2y - y^\ell + \mu_1 x^2 + \mu_2 xy + \mu_3 y^2 + \dots + \mu_\ell y^{\ell-1}$. Segue que $w_x(x, y) = 2xy + 2\mu_1 x + \mu_2 y = 0 \leftrightarrow$
 $\leftrightarrow x = \frac{-\mu_2 \cdot y}{2(\mu_1 + y)}$. Então,

.a) Se $\mu_2 = 0$ ($\rightarrow \mu_3 = 0$), segue que $x = 0 = \phi(y)$. Portanto, $h(y) = w(\phi(y), y) = -y^\ell + \mu_4 y^3 + \mu_5 y^4 + \dots + \mu_\ell y^{\ell-1}$.
Então, seja μ_i o menor coeficiente tal que $\mu_i \neq 0$, com $4 \leq i \leq \ell$. Segue que $\text{ord}(h) = i-1$ e $h^{(i-1)}$ (o) tem sinal positivo ou negativo conforme $\mu_i > 0$ ou $\mu_i < 0$ respectivamente. Logo, $w \sim \pm x^{i-1} \pm y^2$ ($4 \leq i \leq \ell$). Por outro lado, se $\mu_i = 0$ para $4 \leq i \leq \ell$, então $\text{ord}(h) = \ell$ e $h^{(\ell)}$ (o) tem sinal negativo. Segue que $w \sim -x^\ell \pm y^2$.

.b) Se $\mu_2 \neq 0$, segue que $x = -\frac{\mu_2}{2\mu_1} \cdot y - \frac{1}{\mu_1} \cdot xy = \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot y - \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1} y - \frac{1}{\mu_1} xy \right) \cdot y = \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot y + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} y^2 + \frac{1}{\mu_1^2} xy^2 =$
 $= \frac{-\mu_2}{2\mu_1} y + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} y^2 + \frac{1}{\mu_1^2} \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1} y - \frac{1}{\mu_1} xy \right) \cdot y^2 = \frac{-\mu_2}{2\mu_1} y +$
 $+ \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} y^2 - \frac{\mu_2}{2\mu_1^3} y^3 - \frac{1}{\mu_1^3} xy^3 = \dots =$
 $= \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1} \right) \cdot y + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \right) y^2 + \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1^3} \right) y^3 + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^4} \right) y^4 + \dots +$
 $+ (-1)^\ell \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^\ell} \right) \cdot y^\ell + \mathcal{O}(\ell+1) = \phi(y).$

Logo, $h(y) = w(\phi(y), y) = \phi^2(y) \cdot y + y^{\ell+\mu_1} \phi^2(y) +$
 $+ \mu_2 \phi(y) \cdot y + \mu_3 y^2 + \dots + \mu_\ell y^{\ell-1}.$

Portanto, desenvolvendo os quadrados de $\phi(y)$ e reagrupando os elementos de forma conveniente iremos obter:

$$h(y) = \left(\frac{4\mu_1\mu_3 - \mu_2^2}{4\mu_1} \right) \cdot y^2 + (\mu_4 + \alpha_1) \cdot y^3 + (\mu_5 + \alpha_2) \cdot y^4 + \dots +$$

$$+ (\mu_\ell + \alpha_{\ell-3}) \cdot y^{\ell-1} + (-1 + \alpha_{\ell-2}) \cdot y^\ell + \alpha_{\ell-1} \cdot y^{\ell-1},$$

onde $\alpha_i = \alpha_i(\mu_1, \mu_2)$ ($i=1, \dots, \ell-1$) são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^2} + 2\mu_1 \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} = \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} \cdot \\ \alpha_2 &= \frac{-\mu_2^2}{2\mu_1^3} + \frac{\mu_1 \cdot \mu_2^2}{4\mu_1^4} + 2\mu_1 \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1^3} + 2 \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} = \frac{-\mu_2^2}{4\mu_1^3} \cdot \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade vamos assumir que

$\ell \in \mathbb{Z}$ é ímpar, segue que:

$$\begin{aligned}\alpha_{\ell-3} &= \frac{-\mu_2^2}{2\mu_1^{\ell-2}} + \frac{\mu_1 \mu_2^2}{4\mu_1^{\ell-1}} + 2\mu_1 \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1^{\ell-2}} + 2\mu_1 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{\ell-3}} + \dots + \\ &\quad + 2\mu_1 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell-3)/2}} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell+1)/2}} + 2 \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{\ell-3}} + 2 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1^{\ell-4}} + \\ &\quad + \dots + (-2) \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell-3)/2}} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell-1)/2}} = \frac{-\mu_2^2}{2\mu_1^{\ell-2}} + \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^{\ell-2}} + \\ &\quad + \left(\frac{\ell-3}{2}\right) \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^{\ell-2}} + (-1) \cdot \left(\frac{\ell-3}{2}\right) \cdot \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^{\ell-2}} = \frac{-\mu_2^2}{2\mu_1^{\ell-2}} \cdot \\ \alpha_{\ell-2} &= \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^{\ell-1}} + 2\mu_1 \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{\ell-1}} + 2\mu_1 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1^{\ell-2}} + \dots + \\ &\quad + (-2)\mu_1 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell-1)/2}} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell+1)/2}} + \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^{\ell-1}} + 2 \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1^{\ell-2}} + \\ &\quad + 2 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{\ell-3}} + \dots + 2 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell-3)/2}} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell+1)/2}} = \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^{\ell-1}} + \\ &\quad + (-1) \cdot \left(\frac{\ell-1}{2}\right) \cdot \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^{\ell-1}} + \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^{\ell-1}} + \left(\frac{\ell-3}{2}\right) \cdot \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^{\ell-1}} = \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^{\ell-1}} \cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{\ell-1} &= \frac{-\mu_2^2}{2\mu_1^\ell} + \mu_1 \cdot \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^{\ell+1}} + 2\mu_1 \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} + 2\mu_1 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{\ell-1}} + \dots + \\
&+ 2\mu_1 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell-1)/2}} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell+3)/2}} + 2 \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{\ell-1}} + \\
&+ 2 \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \cdot \frac{-\mu_2}{2\mu_1^{\ell-2}} + \dots + (-2) \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell-1)/2}} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1^{(\ell+1)/2}} = \\
&= \frac{-\mu_2^2}{2\mu_1^\ell} + \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^\ell} + \left(\frac{\ell-1}{2}\right) \cdot \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^\ell} + (-1) \cdot \left(\frac{\ell-1}{2}\right) \cdot \frac{\mu_2^2}{2\mu_1^\ell} = \frac{-\mu_2^2}{4\mu_1^\ell}.
\end{aligned}$$

Assim, tomando $\mu_2^2 = 4\mu_1^{\ell-1}$, segue que

$$\frac{-\mu_2^2}{4\mu_1^\ell} = \frac{-1}{\mu_1} \neq 0. \text{ Logo, tomando}$$

$\mu_4 = -\alpha_1, \mu_5 = -\alpha_2, \dots, \mu_\ell = -\alpha_{\ell-3}$ e $\mu_2^2 = 4\mu_1^{\ell-1}$, temos que

$\text{ord}(h) = \ell+1$ e $h^{(\ell+1)}(o)$ tem sinal positivo ou negativo conforme $\alpha_{\ell-1} > 0$ ou $\alpha_{\ell-1} < 0$ respectivamente. Logo, $w \sim \pm x^{\ell+1} \pm y^2$.

iv) Se $\alpha = \beta = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, então seja i o menor inteiro tal que $\mu_i \neq 0$, com $4 \leq i \leq \ell$. Segue que $w = x^2y - y^\ell + \mu_1 y^{i-1} + \dots + \mu_\ell y^{\ell-1}$ é equivalente a $x^2y + \mu_1 \cdot y^{i-1} + \mathcal{O}(i)$. Assim, como $x^2y + \mu_1 \cdot y^{i-1}$ ($\mu_1 \neq 0$) é $(i-1)$ -determinado, temos que $w \sim x^2y + \mu_1 \cdot y^{i-1} \sim x^2y \pm y^{i-1}$.

Portanto, o aberto $U \cap V$, com $j^{(k)}(f) \in U \cap V$, intercepta apenas as $R^{(k)}$ -órbitas de: $x; f; \pm x^2 \pm y^2; \dots; \pm x^{\ell+1} \pm y^2; x^2y \pm y^3; \dots; x^2y \pm y^{\ell-1}$, quantidade esta que independe de $k \geq k_0$.

Logo, f é 0-modal.

- OBSERVAÇÕES:

- 1) Em particular, se $\ell = 3$, então para o subespaço $\langle x^2, xy, y^2 \rangle_R$ de V , temos a seguinte descrição geométrica das intersecções das $R^{(k)}$ -órbitas ($k \geq k_0 = 5$):

A descrição geométrica acima foi feita baseada nas dimensões reais das $R^{(3)}$ -órbitas em $J^3(2,1)$. Sendo que estas dimensões são dadas por:

$$a) \dim_R J^3(2,1) = \binom{2+3}{3} = 10$$

$$b) \dim_R R^{(3)}(\pm x^r \pm y^2) = \dim_R J^3 - \text{cod}_{J^3} R^{(3)}(\pm x^r \pm y^2) = 10 -$$

$$- [\mu(\pm x^r \pm y^2 + 2)] = 8 - \mu(\pm x^r \pm y^2), \text{ sendo } r = 2, 3, 4. \text{ Como } \pm x^r \pm y^2 \text{ é Q-H do tipo } (2r; 2, r), \text{ acarreta que } \mu(\pm x^r \pm y^2) = \left(\frac{2r-2}{2}\right) \cdot \left(\frac{2r-r}{r}\right) = r-1.$$

$$\text{Portanto, } \dim_R R^{(3)}(\pm x^r \pm y^2) = 9-r \text{ (} r=2, 3, 4 \text{)}.$$

$$c) \dim_R R^{(3)}f = 8 - \mu(f). \text{ Como } f = x^2y + y^3 \text{ é Q-H do tipo } (3; 1, 1), \text{ acarreta que } \mu(f) = \left(\frac{3-1}{1}\right) \cdot \left(\frac{3-1}{1}\right) = 4.$$

Portanto, $\dim_R \mathcal{R}^{(3)} f = 8-4 = 4$.

Baseado nesta descrição geométrica temos que

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow \dots$$

$\uparrow$
 D_4

2) Para a série $D_k^\pm$ ($k \geq 4$) vale a cadeia de abutamentos:

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow A_4 \leftarrow A_5 \leftarrow A_6 \leftarrow A_7 \leftarrow \dots$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow$
 $D_4 \leftarrow D_5 \quad D_6^- \quad D_7 \quad D_8^- \dots$
 $\quad \quad \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow$
 $\quad \quad D_6^+ \quad D_7 \quad D_8^+ \dots$

2.3 - A Série E_6^+ é 0-modal

- PROPOSIÇÃO III-6:

E_6^+ : $f = x^3 + y^4$ é 0-modal.

- DEMONSTRAÇÃO:

Temos que $\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle = \langle x^3, x^2y, xy^3, y^4 \rangle$. Daí,
 $j^4(\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle) = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^3, x^2y \rangle_R = T_{j^4(f)}(\mathcal{R}^{(4)} f)$ em
 $\mathcal{M}_2^2 / \mathcal{M}_2^5$.

Seja $k \geq k_0 = 7$. Consideremos $B = T_{j^k(f)}(\mathcal{R}^{(k)} f) =$
 $= j^k(\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle)$.

Tomando $V = \langle y, x, x^2, xy, y^2, y^3, xy^2 \rangle_R$, temos
 $V \not\subset B$.

Nas vizinhanças de $j^k(f)$ em V consideremos um
 elemento arbitrário w dado por $w = x^3 + y^4 + \alpha y + \beta x + \mu_1 x^2 + \mu_2 xy +$
 $+ \mu_3 y^2 + \mu_4 y^3 + \mu_5 xy^2$, onde $\alpha, \beta, \mu_1, \dots, \mu_5 \in R$.

Assim,

- (i) Se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, então $w \sim x$.
- (ii) Se $\alpha = \beta = 0$ e $\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 \neq 0$, então $w \sim \pm x^2 \pm y^2$.
- (iii) Se $\alpha = \beta = 0$ e $\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 = 0$, com $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \neq (0, 0, 0)$ então consideremos a seguinte possibilidade:

Seja $\mu_1 \neq 0$.

Consideremos $w = w(x, y) = x^3 + y^4 + \mu_1 x^2 + \mu_2 xy + \mu_3 y^2 + \mu_4 y^3 + \mu_5 x^3 y^2$. Segue que $w_x(x, y) = 3x^2 + 2\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_5 y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1}\right) \cdot y + \left(\frac{-\mu_5}{2\mu_1}\right) \cdot y^2 - \frac{3}{2\mu_1} \cdot x^2 = \frac{-\mu_2}{2\mu_1} \cdot y - \left(\frac{\mu_5}{2\mu_1} + \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^2 + \mathcal{O}(3)$$

(que é uma série convergente para y próximo de 0).

Portanto,

$$x = \frac{-\mu_2}{2\mu_1} y - \left(\frac{\mu_5}{2\mu_1} + \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^2 + \mathcal{O}(3) = \phi(y).$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } h(y) = w(\phi(y), y) &= \phi^3(y) + y^4 + \mu_1 \phi^2(y) + \mu_2 \phi(y)y + \mu_3 y^2 + \mu_4 y^3 + \mu_5 \phi(y) \cdot y^2 = \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1}\right)^3 y^3 - \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^6 - \\ &- 3 \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} y^2 \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^2 - \frac{3\mu_2}{2\mu_1} y \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^4 + y^4 + \mu_1 \left[\frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} y^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^4 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^3 \right] \frac{-\mu_2^2 y^2}{2\mu_1} - \mu_2 \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^3 + \\ &+ \mu_3 y^2 + \mu_4 y^3 - \frac{\mu_5 \mu_2}{2\mu_1} y^3 - \mu_5 \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^4 + \mathcal{O}(7) = y^2 \left[\frac{\mu_2^2}{4\mu_1} - \frac{\mu_2^2}{2\mu_1} + \right. \\ &+ \mu_3 \left. \right] + y^3 \left[\frac{-\mu_2^3}{8\mu_1^3} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) - \mu_2 \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) + \mu_4 - \frac{\mu_5 \mu_2}{2\mu_1} \right] + \\ &+ y^4 \left[\frac{-3\mu_2^2}{4\mu_1^2} \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) + 1 + \mu_1 \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right)^2 - \mu_5 \left(\frac{4\mu_1^2 \mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3\mu_2}{2\mu_1} \left(\frac{4\mu_1^2\mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) 2y^5 - \left(\frac{4\mu_1^2\mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) 3y^6 + \mathcal{O}(7) = y^2 \left(\frac{\mu_2^2 - 2\mu_2^2 + 4\mu_1\mu_3}{4\mu_1} \right) + \\
& + y^3 \left(\frac{-\mu_2^3\mu_1 + \mu_2(4\mu_1^2\mu_5 + 3\mu_2^2) - \mu_1\mu_2(4\mu_1^2\mu_5 + 3\mu_2^2) + 8\mu_1^4\mu_4 - 4\mu_1^3\mu_2\mu_5}{8\mu_1^4} \right) + \\
& + y^4 \left[\frac{4\mu_1^2\mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \left(\frac{-3\mu_2^2}{4\mu_1^2} + \frac{4\mu_1^2\mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^2} - \mu_5 \right) + 1 \right] \frac{-3\mu_2}{2\mu_1} \left(\frac{4\mu_1^2\mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) 2y^5 - \\
& - \left(\frac{4\mu_1^2\mu_5 + 3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) 3y^6 + \mathcal{O}(7). \text{ Desta forma;}
\end{aligned}$$

a) Sendo $\mu_2 = 0$ ($\mu_3 = 0$), temos que $h(y) = y^3\mu_4 + y^4 \left(\frac{\mu_5}{2\mu_1} \left(\frac{\mu_5}{2} - \mu_5 \right) + 1 \right) + \left(\frac{-\mu_5}{2\mu_1} \right) 3y^6 + \mathcal{O}(7) = \mu_4 y^3 + \left(\frac{-\mu_5}{4\mu_1} + 1 \right) y^4 - \left(\frac{\mu_5}{2\mu_1} \right) 3y^6 + \mathcal{O}(7).$

Assim,

- Se $\mu_4 \neq 0$, segue que $\text{ord}(h) = 3$ e $h^{(3)}(0)$ terá sinal positivo ou negativo conforme $\mu_4 > 0$ ou $\mu_4 < 0$ respectivamente. Logo, $w \sim \pm x^3 \pm y^2$.
- Se $\mu_4 = 0$ e $\mu_5 \neq 4\mu_1^2$, segue que $\text{ord}(h) = 4$. Logo, $w \sim \pm x^4 \pm y^2$.
- Se $\mu_4 = 0$ e $\mu_5^2 = 4\mu_1^2$ ($\mu_5 \neq 0$), segue que $\text{ord}(h) = 6$. Logo, $w \sim \pm x^6 \pm y^2$.

b) Sendo $\mu_2 \neq 0$ e $\mu_5 = 0$, teremos que

$$\begin{aligned}
h(y) = y^3 & \left(\frac{-\mu_2^3\mu_1 + 3\mu_2^3 + 3\mu_1\mu_2^3 + 8\mu_1^4\mu_4}{8\mu_1^4} \right) + y^4 \left[\frac{3}{8} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^3} \left(\frac{-3}{4} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{8} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \right) + 1 \right] - \frac{3\mu_2}{2\mu_1} \left(\frac{3}{8} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \right) 2y^5 - \left(\frac{3\mu_2}{8\mu_1^3} \right) 3y^6 + \mathcal{O}(7).
\end{aligned}$$

$$\text{Tomando } -\mu_2^3\mu_1 + 3\mu_2^3 + 3\mu_1\mu_2^3 + 8\mu_1^4\mu_4 = 0 \leftrightarrow \mu_2^3(-\mu_1 + 3 + 3\mu_1) + 8\mu_1^4\mu_4 = 0 \leftrightarrow \mu_2^3 \cdot (3+2\mu_1) + 8\mu_1^4 \cdot \mu_4 = 0 \leftrightarrow \mu_4 = \frac{-\mu_2^3(3+2\mu_1)}{8\mu_1^4},$$

segue que $\text{ord}(h) > 3$. Observemos que se $9\mu_2^4 = 64\mu_1^5$, então $\text{ord}(h) > 4$. Por outro lado,

$$\mu_4 = \frac{-\mu_2^3(3+2\mu_1)}{8\mu_1^4}$$

acarreta que $9\mu_2^4 = 64\mu_1^5$, pois,

$$\begin{aligned} \mu_1\mu_2^3(3+2\mu_1) + 8\mu_1^5\mu_4 &= 0 \leftrightarrow \mu_1\mu_2^3(3+2\mu_1) + \frac{9}{8}\mu_2^4\mu_4 = 0 \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \mu_2^3 \left[\mu_1(3+2\mu_1) + \frac{9}{8}\mu_2\mu_4 \right] &= 0 \leftrightarrow \mu_1(3+2\mu_1) + \frac{9}{8}\mu_2\mu_4 = 0 \leftrightarrow \mu_4 = \\ = \frac{-8}{9} \frac{\mu_1(3+2\mu_1)}{\mu_2} &= \frac{-\mu_2^3(3+2\mu_1)}{8\mu_1^4} \leftrightarrow \frac{-8}{9} \frac{\mu_1(3+2\mu_1)}{\mu_2} = \frac{-\mu_2^3(3+2\mu_1)}{8\mu_1^4} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow -64\mu_1^5 &= -9\mu_2^4 \leftrightarrow \frac{9\mu_2^4}{64\mu_1^5} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, quando $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$, $\mu_4 = \frac{-\mu_2^3(3+2\mu_1)}{8\mu_1^4}$ e $\mu_5 = 0$, com $\frac{-27}{128} \cdot \frac{\mu_2^5}{\mu_1} \neq 0$, temos que $\text{ord}(h) = 5$.

Logo, $w \sim \pm x^5 \pm y^2$.

(iv) Se $\alpha = \beta = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, então:

Consideremos $w(x,y) = x^3 + y^4 + \mu_4 y^3 + \mu_5 xy^2 = x^3 + \mu_4 y^3 + \mu_5 xy^2 + y^4$. Daí, tomemos $h(x,y) = x^3 + \mu_4 y^3 + \mu_5 xy^2$. Assim, h é homogênea de grau 3 e $w = h + y^4$. Sabemos que existe $\phi \in GL(2, \mathbb{R})$;

$\phi = (\phi_1, \phi_2)$, tal que $h \circ \phi(x, y) = x^3$, $h \circ \phi(x, y) = x^2 y$ ou $h \circ \phi(x, y) = x^2 y + y^3$. Assim,

(iv-1) Se $h \circ \phi(x, y) = x^3$, então $w \circ \phi(x, y) = x^3 + \phi_2^4(x, y) = x^3 + (ax + by)^4$ com $b \neq 0$. Tomando

$$\begin{cases} X_1 = x \\ Y_1 = ax + by \end{cases},$$

teremos que $x^3 + (ax + by)^4 = X_1^3 + Y_1^4$.

Portanto, $w \sim x^3 + y^4$.

(iv-2) Se $h \circ \phi(x, y) = x^2 y$, então $w \circ \phi(x, y) = x^2 y + (ax + by)^4$ com $b \neq 0$.

Temos que $x^2 y + (ax + by)^4 = x^2 y + x^2 \psi + 4abx^3 y^3 + b^4 y^4$,

com $\psi \in j^4(\mathcal{M}_2^2)$. Tomando

$$\begin{cases} X_1 = x + \frac{1}{2} 4ab^3 y^2 \\ Y_1 = y + \psi \end{cases}, \text{ teremos}$$

$$\begin{cases} x = X_1 - 2ab^3 y^3 = X_1 - 2ab^3 (Y_1 - \psi)^2 \\ y = Y_1 - \psi \end{cases} \quad . \text{ Assim,}$$

$$\begin{aligned} x^2 y + (ax + by)^4 &= (X_1 - 2ab^3 (Y_1 - \psi)^2)^2 \cdot (Y_1 - \psi + \psi) + 4ab^3 (X_1 - 2ab^3 (Y_1 - \psi)^2) \cdot (Y_1 - \psi)^3 + b^4 (Y_1 - \psi)^4 \\ &= (X_1^2 + 4a^2 b^6 (Y_1 - \psi)^4 - 2X_1 \cdot 2ab^3 (Y_1 - \psi)^2) \cdot Y_1 + \\ &+ 4ab^3 \cdot (X_1 (Y_1 - \psi)^3 - 2ab^3 (Y_1 - \psi)^5) + b^4 (Y_1 - \psi)^4 = X_1^2 \cdot Y_1 - 4ab^3 X_1 Y_1 (Y_1 - \psi)^2 + \\ &+ 4a^2 b^6 (Y_1 - \psi)^4 \cdot Y_1 + 4ab^3 X_1 (Y_1 - \psi)^3 - 8a^2 b^6 (Y_1 - \psi)^5 + b^4 (Y_1 - \psi)^4 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_1^2 y_1 - 4ab^3 x_1 y_1 (y_1^2 + \psi^2 - 2y_1 \psi) + 4a^2 b^6 (y_1 - \psi)^4 \cdot y_1 + b^4 (y_1 - \psi)^4 + \\
&+ 4ab^3 x_1 (y_1 - \psi)^3 + \mathcal{O}(5) = x_1^2 y_1 + b^4 y_1^4 + 4ab^3 x_1 y_1^3 + 4ab^3 x_1 y_1^3 + \mathcal{O}(5) = \\
&= x_1^2 y_1 + b^4 y_1^4.
\end{aligned}$$

Portanto, $w \sim x^2 y + y^4$.

(iv-3) Se $h_0 \phi(x, y) = x^2 y \pm y^3$, então $w_0 \phi(x, y) = x^2 y \pm y^3 + \phi_2^4(x, y)$. Como $x^2 y \pm y^3$ é 3-determinado, segue que $w \sim x^2 y \pm y^3$.

Portanto, existe um aberto $A \subset J^k(2, 1)$, com $j^k(f) \in A$, tal que A intercepta apenas as $R^{(k)}$ -órbitas de: $f; x; \pm x^2 \pm y^2; \pm x^3 \pm y^2; \pm x^4 \pm y^2; \pm x^5 \pm y^2, \pm x^6 \pm y^2; x^2 y + y^4$ e $x^2 y \pm y^3$, quantidade esta que independe de $k \geq k_0 = 7$. Logo, f é $\mathbb{R}$ -modal.

Para os subespaços Π_i de V descritos abaixo, temos as seguintes descrições geométricas das intersecções das $R^{(k)}$ -órbitas:

a) Quando $\Pi_1 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle_{\mathbb{R}}$

b) Quando $\Pi_2 = \langle x^2, xy, y^3 \rangle_{\mathbb{R}}$

c) Quando $\Pi_3 = \langle x^2, y^3, xy^2 \rangle_{\mathbb{R}}$

d) Quando $\Pi_4 = \langle y^3, xy^2 \rangle_{\mathbb{R}}$

Pelas descrições geométricas acima temos a cadeia de abutamentos:

Utilizando raciocínio análogo ao apresentado para E_6^+ , encontramos a cadeia de abutamentos:

2.4 - A SÉRIE E_7 É 0-MODAL

- PROPOSIÇÃO III-7:

E_7 : $f = x^3 + xy^3$ é 0-modal.

- DEMONSTRAÇÃO:

Temos que $\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle = \langle x^3, x^2y^2, xy^3, 3x^2y + y^4 \rangle$.

Daí, $j^4(\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle) = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, x^3, 3x^2y + y^4 \rangle = T_{j(f)}^4 (R_{j(f)}^{(4)} f)$
em $\mathcal{M}_2^2 / \mathcal{M}_2^5$.

Seja $k \geq k_0 = 8$. Consideremos

$$B = T_{j^k(f)}^k (R_{j^k(f)}^{(k)} f) = j^k(\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle).$$

Tomando $V = \langle y, x, x^2, xy, y^2, xy^2, y^3, y^4 \rangle_R$, temos
 $V \not\subset B$.

Nas vizinhanças de $j^k(f)$ em V consideremos um elemento arbitrário dado por

$$w = x^3 + xy^3 + \alpha y + \beta y + \mu_1 x^2 + \mu_2 xy + \mu_3 y^2 + \mu_4 xy^2 + \mu_5 y^3 + \mu_6 y^4,$$

onde $\alpha, \beta, \mu_1, \dots, \mu_6 \in R$.

Assim,

- (i) Se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, então $w \sim x$
- (ii) Se $\alpha = \beta = 0$ e $\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 \neq 0$, então $w \sim \pm x^2 \pm y^2$.
- (iii) Se $\alpha = \beta = 0$ e $\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 = 0$, com $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \neq (0, 0, 0)$, então consideremos a seguinte possibilidade:

Seja $\mu_1 \neq 0$.

Consideremos

$$w = w(x, y) = x^3 + xy^3 + \mu_1 x^2 + \mu_2 xy + \mu_3 y^2 + \mu_4 xy^2 + \mu_5 y^3 + \mu_6 y^4.$$

$$\begin{aligned} \text{Segue que } w_x(x, y) &= 3x^2 + y^3 + 2x\mu_1 + \mu_2 y + \mu_4 y^2 = 0 \leftrightarrow x = \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1}\right)y + \\ &+ \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1}\right)y^2 - \frac{y^3}{2\mu_1} - \frac{3x^2}{2\mu_1} = \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1}\right)y + \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1}\right)y^2 - \frac{y^3}{2\mu_1} - \frac{3}{2\mu_1} \left(\frac{-\mu_2 y}{2\mu_1} - \frac{\mu_4 y}{2\mu_1}\right)^2 \\ &- \frac{y^3}{2\mu_1} - \frac{3x^2}{2\mu_1} = \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1}\right)y + \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3}{2\mu_1} \cdot \frac{\mu_2^2}{2\mu_1}\right)y^2 + \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right)y^3 + \\ &+ \mathcal{O}(4) = \phi(y) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } h(y) = w(\phi(y), y) = \phi^3(y) + \phi(y) \cdot y^3 + \mu_1 \phi^2(y) +$$

$$+ \mu_2 \phi(y) \cdot y + \mu_3 y^2 + \mu_4 \phi(y) \cdot y^2 + \mu_5 \cdot y^3 + \mu_6 \cdot y^4 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\mu_2^3}{8\mu_1^3} y^3 + 3 \frac{\mu_2^2 y^2}{4\mu_1^2} \left[\left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^2 + \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^3 \right] + \\
&+ 3 \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1} \right) y \left[\left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^2 + \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^3 \right]^2 + \left[\left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^2 + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^3 \right]^3 - \frac{\mu_2}{2\mu_1} y^4 + \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^5 + \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \right. \\
&- \left. \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^6 + \mu_1 \left\{ \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} y^2 + 2 \frac{-\mu_2}{2\mu_1} y \left[\left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^2 + \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \right. \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^3 \right] + \left[\left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^2 + \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) y^3 \right]^2 \right\} - \frac{\mu_2^2}{2\mu_1} y^2 + \\
&+ \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) \mu_2 y^3 + \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) \mu_2 y^4 + \mu_3 y^2 - \frac{\mu_2\mu_4}{2\mu_1} y^3 + \\
&+ \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) \mu_4 y^4 + \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) \mu_4 y^5 + \mu_5 y^3 + \mu_6 y^4 = \\
&= \left(\mu_3 + \frac{\mu_2^2}{4\mu_1} - \frac{\mu_2^2}{2\mu_1} \right) y^2 + \left(\frac{-\mu_2^3}{8\mu_1^3} + \frac{\mu_2\mu_4}{2\mu_1} + \frac{3\mu_2^3}{8\mu_1^3} - \frac{\mu_2\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^3}{8\mu_1^3} - \frac{\mu_2\mu_4}{2\mu_1} + \mu_5 \right) y^3 + \\
&+ \left(\mu_6 - \frac{\mu_4^2}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} - \frac{\mu_2}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^3}{8\mu_1^3} + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + \frac{3\mu_2^2\mu_4}{4\mu_1^3} + \frac{3\mu_2^3}{8\mu_1^3} + \frac{\mu_4^2}{4\mu_1^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{3\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^4} + \frac{9\mu_2^4}{64\mu_1^6} - \frac{\mu_2}{2\mu_1} \right) y^4 + \left(\frac{-3\mu_2^2}{8\mu_1^3} - \frac{9\mu_2^3\mu_4}{16\mu_1^5} - \frac{9\mu_2^4}{32\mu_1^5} - \frac{3\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{\mu_4^2}{4\mu_1^2} - \frac{3\mu_2}{2\mu_1} \cdot \frac{9\mu_2^4}{64\mu_1^6} \right. \\
&- \left. \frac{3\mu_2}{2\mu_1} \cdot 2 \frac{\mu_4}{2\mu_1} \cdot \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} - \frac{\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} + 2\mu_1 \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) \cdot \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) - \right. \\
&- \left. \frac{\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} \right) y^5 + \left[-\frac{3\mu_2}{2\mu_1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) \cdot \left(\frac{-1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \Big] y^7 + \mathcal{O}(8) = \left[\frac{4\mu_1\mu_3 - \mu_2^2}{4\mu_1} \right] y^2 + \left[-\frac{\mu_2^3}{8\mu_1^3} - \frac{\mu_2\mu_4}{2\mu_1} + \mu_5 \right] y^3 + \\
& + \left[\mu_6 - \frac{\mu_2 + \mu_4^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_4^2}{4\mu_1^2} + \frac{9\mu_2^4}{64\mu_1^6} \right] y^4 + \left[-\frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} - \frac{9\mu_2^3\mu_4}{16\mu_1^5} - \frac{9\mu_2^4}{32\mu_1^5} - \frac{3\mu_2\mu_4^2}{8\mu_1^3} - \right. \\
& - \frac{27\mu_2^6}{128\mu_1^7} - \frac{27\mu_2^3\mu_4}{16\mu_1^5} - \frac{\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} + \frac{\mu_4}{\mu_1} + \frac{3\mu_2\mu_4^2}{4\mu_1^3} + \frac{3\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} + \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} + \frac{9\mu_2^3\mu_4}{16\mu_1^5} + \\
& + \frac{9\mu_2^4}{32\mu_1^5} - \frac{\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4^2}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} \Big] y^5 + \left[\left(-\frac{1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^2} - \right. \right. \\
& - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^2} + \frac{3\mu_2\mu_4}{2\mu_1^2} + \frac{9\mu_2^3}{8\mu_1^3} \Big) + \left(-\frac{\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right)^3 \Big] y^6 + \left[\left(-\frac{1}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left(\frac{3\mu_2^2}{4\mu_1^2} + \frac{18\mu_4\mu_2^2}{16\mu_1^2} + \frac{27\mu_2^4}{16\mu_1^4} + \frac{3\mu_2}{4\mu_1^2} + \frac{9\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^4} + \frac{9\mu_2^3}{16\mu_1^4} \right) \Big] y^7 + \mathcal{O}(8).
\end{aligned}$$

Então, sendo $\mu_2 = 0$ ($\rightarrow \mu_3 = 0$), temos que

$$\begin{aligned}
h(y) &= \mu_5 \cdot y^3 + \left(\mu_6 - \frac{\mu_4^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_4^2}{4\mu_1^2} \right) \cdot y^4 + \left(-\frac{1}{4\mu_1} - \frac{\mu_4^3}{8\mu_1^3} \right) \cdot y^6 + \\
&+ \left(-\frac{3\mu_4^2}{8\mu_1^3} \right) \cdot y^7 + \mathcal{O}(8). \quad \text{Assim,}
\end{aligned}$$

- Se $\mu_5 \neq 0$, segue que $\text{ord}(h) = 3$ e $h^{(3)}$ (o) terá sinal positivo ou negativo conforme $\mu_5 > 0$ ou $\mu_5 < 0$ respectivamente. Logo, $w \sim \pm x^3 \pm y^2$.

- Se $\mu_5 = 0$ e $\mu_6 \neq \frac{2\mu_1\mu_4^2 - \mu_4^2}{4\mu_1^2}$, segue que $\text{ord}(h) = 4$. Logo, $w \sim \pm x^4 \pm y^2$.

- Se $\mu_5 = 0$, $\mu_6 = \frac{2\mu_1\mu_4^2 - \mu_4^2}{4\mu_1^2}$ e $\mu_4 \neq \sqrt[3]{-2\mu_1^2}$, segue que $\text{ord}(h) = 6$. Logo, $w \sim \pm x^6 \pm y^2$.

- Se $\mu_5 = 0$, $\mu_6 = \frac{2\mu_1\mu_4^2 - \mu_4^2}{4\mu_1^2}$ e $\mu_4 = \sqrt[3]{-2\mu_1^2}$, segue que $\text{ord}(h) = 7$. Logo, $w \sim \pm x^7 \pm y^2$.

Por outro lado, sendo $\mu_2 = \mu_3 = \mu_5 = 0$ e $\mu_1 = \mu_4$, temos que $w(x, y) = x^3 + xy^3 + \mu_1 x^2 + \mu_1 xy^2 + \mu_6 y^4$.

$$\text{Daí, } w_x(x, y) = 3x^2 + y^3 + 2\mu_1 x + \mu_1 y^2 = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x = -\frac{1}{2} y^2 - \frac{2}{2\mu_1} y^3 + \mathcal{O}(4) = \phi(y).$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } h(y) &= w(\phi(y), y) = \phi^3(y) + \phi(y) \cdot y^3 + \\ &+ \mu_1 \phi^2(y) + \mu_1 \phi(y) \cdot y^2 + \mu_6 y^4 = \left(\frac{-y^2}{2} - \frac{y^3}{2\mu_1}\right)^3 + \left(\frac{-y^2}{2} - \frac{y^3}{2\mu_1}\right) y^3 + \\ &+ \mu_1 \cdot \left(\frac{-y^2}{2} - \frac{y^3}{2\mu_1}\right)^2 + \mu_1 \cdot y^2 \cdot \left(\frac{-y^2}{2} - \frac{y^3}{2\mu_1}\right) + \mu_6 \cdot y^4 = \left(\frac{-\mu_1}{2} + \mu_6 + \frac{\mu_1}{4}\right) \cdot y^4 + \\ &+ \left(\frac{-1}{2} + 2\mu_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\mu_1} - \mu_1 \cdot \frac{1}{2\mu_1}\right) \cdot y^5 + \mathcal{O}(6) = \left(\mu_6 - \frac{\mu_1}{4}\right) \cdot y^4 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \cdot y^5 + \\ &+ \mathcal{O}(6) = \left(\mu_6 - \frac{\mu_1}{4}\right) \cdot y^4 - \frac{1}{2} \cdot y^5 + \mathcal{O}(6). \text{ Assim,} \end{aligned}$$

- Se $\mu_6 \neq \frac{\mu_1}{4}$, então $w \sim \pm x^4 \pm y^2$.

- Se $\mu_6 = \frac{\mu_1}{4}$, então $w \sim -x^5 \pm y^2$.

(iv) Se $\alpha = \beta = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, então:

$$\text{Consideremos } w(x,y) = x^3 + xy^3 + \mu_4 xy^2 + \mu_5 y^3 + \mu_6 y^4.$$

Daí, tomemos $h(x,y) = x^3 + \mu_5 y^3 + \mu_4 xy^2$. Portanto, h é homogênea de grau 3 e $w(x,y) = h + xy^3 + \mu_6 y^4$. Sabemos que existe $\phi \in GL(2, \mathbb{R})$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, tal que $h \circ \phi(x,y) = x^3$; $h \circ \phi(x,y) = x^2 y$ ou $h \circ \phi(x,y) = x^2 y + y^3$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{(iv-1) Se } h \circ \phi(x,y) &= x^3, \text{ então } w \circ \phi(x,y) = x^3 + \phi_1 \phi_2^3 + \mu_6 \phi_2^4 = \\ &= x^3 + (a_1 x + b_1 y) \cdot (a_2 x + b_2 y)^3 + \mu_6 (a_2 x + b_2 y)^4 = \\ &= x^3 + (a_1 x + b_1 y) \cdot (a_2^3 x^3 + b_2^3 y^3 + 3a_2^2 x^2 b_2 y + 3a_2 x b_2^2 y^2) + \mu_6 (a_2^4 x^4 + \\ &+ 4a_2^3 x b_2 y + 6a_2^2 x^2 b_2^2 y^2 + 4a_2 x b_2^3 y^3 + b_2^4 y^4) = x^3 + (a_1 a_2^3 + \mu_6 a_2^4) \cdot x^4 + (a_1 b_2^3 + \\ &+ 3a_2 b_1 b_2^2 + \mu_6 4a_2 b_2^3) xy^3 + (a_1 3a_2^2 b_2 + b_1 a_2^3 + \mu_6 4a_2^2 b_2) x^3 y + (a_1 3a_2 b_2^2 + \\ &+ 3a_2^2 b_2 b_1 + \mu_6 6a_2^2 b_2^2) x^2 y^2 + (b_1 b_2^3 + \mu_6 b_2^4) y^4 = x^3 + \alpha_1 x^4 + \alpha_2 xy^3 + \alpha_3 x^3 y + \\ &+ \alpha_4 x^2 y^2 + \alpha_5 y^4. \text{ Desta forma,} \end{aligned}$$

- Se $\alpha_5 \neq 0$, por (II-12), segue que $w \sim x^3 + y^4$.

- Se $\alpha_5 = 0$ e $\alpha_2 \neq 0$, por (II-12), segue que $w \sim x^3 + xy^3$.

(iv-2) Se $h \circ \phi(x,y) = x^2 y$, então $w \circ \phi(x,y) = x^2 y + \phi_1 \phi_2^3 + \mu_6 \phi_2^4 =$
 $= x^2 y + \alpha_1 x^4 + \alpha_2 xy^3 + \alpha_3 x^3 y + \alpha_4 x^2 y^2 + \alpha_5 y^4$, onde os valores $\alpha_{i,s}$ são análogos aos obtidos nos casos anteriores.

Daí, $w \circ \phi(x,y) = x^2 y + x^2 (\alpha_3 xy + \alpha_1 x^2 + \alpha_4 y^2) + \alpha_2 xy^3 + \alpha_5 y^4$. Fazendo $\psi(x,y) = \alpha_3 xy + \alpha_1 x^2 + \alpha_4 y^2$, segue que $w \circ \phi(x,y) = x^2 y + x^2 \psi + \alpha_5 y^4 + \alpha_3 xy^3$, onde $\psi \in j^4(\mathcal{M}_2^2)$.

Logo, $x^2y + x^2\psi + \alpha_5y^4 + \alpha_3xy^3 \sim x^2y + \alpha_5y^4$. Desta forma,

- Se $\alpha_5 \neq 0$, então $x^2y + \alpha_5y^4 \sim x^2y + y^4$. Logo, $w \sim x^2y + y^4$.

- Se $\alpha_5 = 0$, então $j^4(w) = x^2y + j^5(w) = x^2y + a'y^5 + b'xy^4 + \phi \cdot x^2$, onde $\phi \in j^5(\mathcal{W}_2^3)$. Segue que, sendo $a' \neq 0$, $x^2y + y^5 \sim x^2y + a'y^5 + b'xy^4 + \phi \cdot x^2$. Logo, $w \sim x^2y + y^5$.

(iv-3) Se $h \circ \phi(x, y) = x^2y + y^3$, então $w \circ h(x, y) = x^2y + y^3 + \phi_1\phi_2^3 + \mu_6\phi_2^4$. Assim, como $x^2y + y^3$ é 3-determinado, segue que $w \sim x^2y + y^3$.

Portanto, existe um aberto $A \subset J^k(2.1)$, com $j^k(f) \in A$, tal que A intercepta apenas as $R^{(k)}$ -órbitas de: f ; x ; $\pm x^2 \pm y^2$; $\pm x^3 \pm y^2$; $\pm x^4 \pm y^2$; $\pm x^5 \pm y^2$; $\pm x^6 \pm y^2$; $\pm x^7 \pm y^2$; $x^2y \pm y^3$; $x^2y \pm y^4$; $x^2y \pm y^5$ e $x^3 \pm y^4$, quantidade esta que independe de $k \geq k_0 = 8$. Logo, f é 0-modal.

Para os subespaços Π_i de V descritos abaixo, temos as seguintes descrições geométricas das $R^{(k)}$ -órbitas:

a) Quando $\Pi_1 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle_R$

b) Quando $\Pi_2 = \langle x^2, xy^2, y^4 \rangle_R$

c) Quando $\Pi_3 = \langle x^2, xy^2, y^3 \rangle_R$

d) Quando $\Pi_4 = \langle xy^2, y^3, y^4 \rangle_R$

Pelas descrições geométricas acima temos a cadeia de abutamentos.

2.5 - A Série E_8 é 0-modal

- PROPOSIÇÃO III-8:

E_8 : $f = x^3 + y^5$ é 0-modal.

- DEMONSTRAÇÃO:

Temos que $\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle = \langle x^3, x^2y, xy^4, y^5 \rangle$. Daí,
 $j^5(\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle) = \langle x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5, x^4, x^3y, x^2y^2, x^3, x^2y \rangle_R =$
 $= T_{j^5(f)}(R^{(5)}f)$ em $\mathcal{M}_2^2 / \mathcal{M}_2^6$.

Seja $k \geq k_0 = 9$. Consideremos $B = T_{j^k(f)}(R^{(k)}f) =$
 $= j^k(\mathcal{M}_2 \cdot \langle \partial f \rangle)$.

Tomando $V = \langle y, x, x^2, xy, y^2, xy^2, y^3, xy^3, y^4 \rangle_{R'}$, temos $V \nsubseteq B$.

Nas vizinhanças de $j^k(f)$ em V consideremos um elemento arbitrário dado por $w = x^3 + y^4 + \alpha y + \beta x + \mu_1 x^2 + \mu_2 xy + \mu_3 y^2 +$
 $+ \mu_4 xy^2 + \mu_5 y^3 + \mu_6 xy^3 + \mu_7 y^4$, onde $\alpha, \beta, \mu_1, \dots, \mu_7 \in R$.

Assim,

- (i) Se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, então $w \sim x$.
- (ii) Se $\alpha = \beta = 0$ e $\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 \neq 0$, então $w \sim \pm x^2 \pm y^2$.
- (iii) Se $\alpha = \beta = 0$ e $\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 = 0$, com $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \neq (0, 0, 0)$, então consideremos a seguinte possibilidade :

Seja $\mu_1 \neq 0$.

Consideremos $w = w(x, y) = x^3 + y^5 + \mu_1 x^2 + \mu_2 xy + \mu_3 y^2 + \mu_4 xy^2 + \mu_5 y^3 + \mu_6 xy^3 + \mu_7 y^4$. Segue que $w_x(x, y) = 3x^2 + 2\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_4 y^2 + \mu_6 y^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\mu_2}{2\mu_1} y - \frac{\mu_4}{2\mu_1} y^2 - \frac{\mu_6}{2\mu_1} y^3 - \frac{3x^2}{2\mu_1} = \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1}\right) y + \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1}\right) y^2 + \left(\frac{-\mu_6}{2\mu_1}\right) y^3 - \frac{3}{2\mu_1} \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1} y + \frac{-\mu_4}{2\mu_1} y^2 + \frac{-\mu_6}{2\mu_1} y^3 - \frac{3x^2}{2\mu_1}\right)^2 =$
 $= \frac{-\mu_2}{2\mu_1} y + \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3}\right) y^2 + \left(\frac{-\mu_6}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2\mu_4}{4\mu_1^3}\right) y^3 + \left(-\frac{3\mu_2\mu_6}{4\mu_1^3} - \frac{3\mu_4^2}{8\mu_1^3}\right) y^4 +$
 $+ \mathcal{O}(5) = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4 + \mathcal{O}(5)$ (que é uma série convergente para y próximo de 0). Portanto, $x = \phi(y)$.

Logo,

$$\begin{aligned} h(y) = w(\phi(y), y) &= \alpha_1^3 \cdot y^3 + 3\alpha_1^2 y^2 \left[\alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4 \right] + \\ &+ 3\alpha_1 y \left[\alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4 \right]^2 + \left[\alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4 \right]^3 + y^5 + \mu_1 \left[\alpha_1^2 y^2 + \right. \\ &+ 2\alpha_1 y (\alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4) + (\alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4)^2 \left. \right] + \mu_2 \alpha_1 y^2 + \mu_2 \alpha_2 y^3 + \\ &+ \mu_2 \alpha_3 y^4 + \mu_2 \alpha_4 y^5 + \mu_3 y^2 + \mu_4 \alpha_1 y^3 + \mu_4 \alpha_2 y^4 + \mu_4 \alpha_3 y^5 + \mu_4 \alpha_4 y^6 + \mu_5 y^3 + \mu_6 \alpha_1 y^4 + \\ &+ \mu_6 \alpha_2 y^5 + \mu_6 \alpha_3 y^6 + \mu_6 \alpha_4 y^7 + \mu_7 y^4 = \alpha_1^3 y^3 + 3\alpha_1^2 \alpha_2 y^4 + 3\alpha_1^2 \alpha_3 y^5 + 3\alpha_1^2 \alpha_4 y^6 + \\ &+ 3\alpha_1 y \left[\alpha_2^2 y^4 + 2\alpha_2 \alpha_3 y^5 + 2\alpha_2 \alpha_4 y^6 + \alpha_3^2 y^6 + 2\alpha_3 \alpha_4 y^7 + \alpha_4^2 y^8 \right] + \alpha_2^3 y^6 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\alpha_2^2 y^4 (\alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4) + 3\alpha_2 y^2 (\alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4)^2 + (\alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4)^3 + y^5 + \mu_1 \alpha_1^2 y^2 + \\
& + 2\alpha_1 \alpha_2 y^3 \mu_1 + 2\alpha_1 \alpha_3 y^4 \mu_1 + 2\alpha_1 \alpha_4 y^5 \mu_1 + \mu_1 \alpha_2^2 y^4 + \mu_1 2\alpha_2 \alpha_3 y^5 + \mu_1 \alpha_2 \alpha_4 y^6 + \\
& + \mu_1 \alpha_3^2 y^6 + \mu_1 2\alpha_3 \alpha_4 y^7 + \alpha_4^2 y^8 \mu_1 + \mu_2 \alpha_1 y^2 + \mu_2 \alpha_2 y^3 + \mu_2 \alpha_3 y^4 + \mu_2 \alpha_4 y^5 + \mu_3 y^2 + \\
& + \mu_4 \alpha_1 y^3 + \mu_4 \alpha_2 y^4 + \mu_4 \alpha_3 y^5 + \mu_4 \alpha_4 y^6 + \mu_5 y^3 + \mu_6 \alpha_1 y^4 + \mu_6 \alpha_2 y^5 + \mu_6 \alpha_3 y^6 + \\
& + \mu_6 \alpha_4 y^7 + \mu_7 y^4 = \left[\mu_1 \alpha_1^2 + \mu_2 \alpha_1 + \mu_3 \right] y^2 + \left[\alpha_1^3 + 2\mu_1 \alpha_1 \alpha_2 + \mu_2 \alpha_2 + \mu_4 \alpha_1 + \right. \\
& + \mu_5 \left. \right] y^3 + \left[3\alpha_1^2 \alpha_2 + 2\mu_1 \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2^2 \mu_1 + \mu_2 \alpha_3 + \mu_4 \alpha_2 + \mu_6 \alpha_1 + \mu_7 \right] y^4 + \\
& + \left[3\alpha_1^2 \alpha_3 + 3\alpha_1 \alpha_2^2 + 1 + 2\mu_1 \alpha_1 \alpha_4 + 2\mu_1 \alpha_2 \alpha_3 + \mu_2 \alpha_4 + \mu_4 \alpha_3 + \mu_6 \alpha_2 \right] y^5 + \\
& + \left[3\alpha_1^2 \alpha_4 + 6\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2^3 + 2\mu_1 \alpha_2 \alpha_4 + \mu_1 \alpha_3^2 + \mu_4 \alpha_4 + \mu_6 \alpha_3 \right] y^6 + \left[6\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \right. \\
& + 3\alpha_1 \alpha_3^2 + 3\alpha_2^2 \alpha_3 + 2\mu_1 \alpha_3 \alpha_4 + \mu_6 \alpha_4 \left. \right] y^7 + \left[6\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + 3\alpha_2^2 \alpha_4 + 3\alpha_2 \alpha_3^2 + \mu_1 \alpha_4 \right] y^8 \\
& + \mathcal{O}(9)
\end{aligned}$$

Como $\mu_2^2 - 4\mu_1 \mu_3 = 0$, segue que $\mu_1 \alpha_1^2 + \mu_2 \alpha_1 + \mu_3 = \frac{\mu_2^2}{4\mu_1}$

$$-\frac{\mu_2^2}{2\mu_1} + \mu_3 = \frac{-\mu_2^2 + 4\mu_1 \mu_3}{4\mu_1} = 0. \text{ Desta forma,}$$

— Sendo $\mu_2 = 0$ ($\rightarrow \alpha_1 = 0$), então:

a) Seja $\mu_5 \neq 0$. Segue que $\text{ord}(h) = 3$. Logo, $w \sim \pm x^3 \pm y^2$.

b) Seja $\mu_5 = 0$. Temos que $\mu_1 \alpha_2^2 + \mu_4 \alpha_2 + \mu_7 = \frac{\mu_4^2}{4\mu_1} - \frac{\mu_4^2}{2\mu_1} + \mu_7$.

Tomando $\mu_7 \neq \frac{-\mu_4^2}{4\mu_1}$, segue que $\text{ord}(h) = 4$. Logo,

$$w \sim \pm x^4 \pm y^2.$$

c) Se $\mu_5 = 0$ e $\mu_7 = \frac{-\mu_4^2}{4\mu_1}$, temos que $1 + 2\mu_1 \alpha_2 \alpha_3 + \mu_4 \alpha_3 + \mu_6 \alpha_2 =$

$$= 1 + 2\mu_1 \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} \right) \cdot \left(\frac{-\mu_6}{2\mu_1} \right) + \mu_4 \left(\frac{-\mu_6}{2\mu_1} \right) + \mu_6 \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} \right) = \frac{2\mu_1 - \mu_4 \mu_6}{2\mu_1}. \text{ Tomando } \mu_6 = 0,$$

temos que $\text{ord}(h) = 5$. Logo, $w \sim \pm x^5 \pm y^2$.

d) Se $\mu_5 = 0$, $\mu_7 = \frac{-\mu_4^2}{2\mu_1}$, $\mu_6 \neq 0$ e $\mu_4 = \frac{2\mu_1}{\mu_6}$, então, como

$$\alpha_2^3 + 2\mu_1 \alpha_2 \alpha_4 + \mu_1 \alpha_3^2 + \mu_4 \alpha_4 + \mu_6 \alpha_3 = \frac{-\mu_4^3 - \mu_6^3 \mu_1 - 4\mu_1^2 \mu_6}{8\mu_1^3}, \text{ segue que}$$

$$-\mu_4^3 - \mu_6^3 \mu_1 - 4\mu_1^2 \mu_6 = -\left(\frac{2\mu_1}{\mu_6}\right)^3 - \mu_6^3 \mu_1 - 4\mu_1^2 \mu_6 =$$

$$= \frac{-8\mu_1^3 - \mu_6^3 \mu_1 - 4\mu_1^2 \mu_6}{\mu_6^3} = 0 \leftrightarrow -\mu_6^5 (\mu_6 + 4\mu_1) = 8\mu_1^2 \leftrightarrow \mu_6^5 = \frac{-8\mu_1^2}{\mu_6 + 4\mu_1}.$$

Tomando $\mu_6 \neq 0$ tal que $\mu_6^5 \neq \frac{-8\mu_1^2}{\mu_6 + 4\mu_1}$, segue que $\text{ord}(h) = 6$. Logo, $w \sim \pm x^6 \pm y^2$.

e) Se $\mu_5 = 0$, $\mu_7 = \frac{-\mu_4^2}{2\mu_1}$, $\mu_4 = \frac{2\mu_1}{\mu_6}$ e $\mu_6 \neq 0$ com $\mu_6^5 = \frac{8\mu_1^2}{\mu_6 + 4\mu_1}$,

temos que

$$3\alpha_2^2 \alpha_3 + 2\mu_1 \alpha_3 \alpha_4 + \mu_6 \alpha_4 = 3 \cdot \left(\frac{\mu_4^2}{4\mu_1^2} \right) \cdot \left(\frac{-\mu_6}{2\mu_1} \right) + 2\mu_1 \left(\frac{-\mu_6}{2\mu_1} \right) \cdot \left(\frac{-3\mu_4^2}{8\mu_1^3} \right) + \mu_6.$$

$$\cdot \left(\frac{-3\mu_4^2}{8\mu_1^3} \right) = \frac{-3\mu_4^2 \mu_6}{8\mu_1^3} = -\frac{3}{8\mu_1^3} \cdot \left(\frac{2\mu_1}{\mu_6} \right)^2 \cdot \mu_6 = \frac{-3}{2\mu_1 \mu_6} \neq 0. \text{ Daí,}$$

$\text{ord}(h) = 7$. Logo, $w \sim \pm x^7 \pm y^2$.

— Sendo $\mu_4 \neq 0$, $\mu_2 = \frac{-2\mu_1 \mu_6}{\mu_4} (\rightarrow \alpha_3 = 0)$, $\mu_5 = -\mu_4 \alpha_1 -$

$$-\alpha_1^3 = \frac{+\mu_2 \mu_4}{2\mu_1} + \frac{\mu_2^3}{8\mu_1^3} = \frac{4\mu_1^2 \mu_2 \mu_4 + \mu_2^3}{8\mu_1^3}, \quad \mu_7 = -3\alpha_1^2 \alpha_2 - \alpha_2 \mu_1 - \mu_4 \alpha_2 -$$

$$-\mu_6 \alpha_1 = -3 \left(\frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} \right) \cdot \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) - \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) \cdot \mu_1 - \mu_4 \left(\frac{-\mu_4}{2\mu_1} - \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^3} \right) + \frac{\mu_6 \mu_2}{2\mu_1} =$$

$$= \frac{3\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} + \frac{9\mu_2^4}{32\mu_1^5} + \frac{\mu_4}{2} + \frac{3\mu_2^2}{8\mu_1^2} + \frac{\mu_4^2}{2\mu_1} + \frac{3\mu_2^2\mu_4}{8\mu_1^3} =$$

$$= \frac{24\mu_2^2\mu_4 + 9\mu_2^4 + 16\mu_1^5\mu_4 + 12\mu_2^2\mu_1^3 + 16\mu_1^4\mu_4^2}{32\mu_1^5} \quad e \quad \mu_4 \neq \frac{-3}{4} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 \quad (\rightarrow \alpha_2 \neq 0),$$

então, $h(y) = (\alpha_2(\mu_6 + 3\alpha_1\alpha_2) + 1)y^5 + (\alpha_4(3\alpha_1^2 + 2\mu_1\alpha_2 + \mu_4) + \alpha_2^3)y^6 +$

$+ \alpha_4(6\alpha_1\alpha_2 + \mu_6)y^7 + \alpha_4(\mu_1 + 3\alpha_2^2)y^8 + o(9).$

Assim, considerando $6\alpha_1\alpha_2 + \mu_6 = 0$ ($\mu_6 =$

$$= \frac{12\mu_1^2\mu_2\mu_4 + 9\mu_2^3}{8\mu_1^4}) , \text{ segue que } \mu_6 + 3\alpha_1\alpha_2 \neq 0, \text{ pois, se } \mu_6 + 3\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

então $3\alpha_1\alpha_2 = 0$, contradizendo a nossa consideração de que

$\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$.

Portanto, tomando $\alpha_4 \neq 0$ ($\mu_4^2 \neq -3\mu_2\mu_6$), μ_1 tal que

$$\mu_1^7 = \frac{\mu_1^6\mu_4\mu_6}{2} + \frac{3\mu_1^4\mu_2^2\mu_6}{8} + \frac{\mu_1^4\mu_2^2\mu_4}{8} + \frac{27}{128}\mu_2^4 + \frac{9\mu_1^2\mu_2^4\mu_4}{16} \quad (\rightarrow \alpha_2\mu_6 +$$

$$+ 3\alpha_1\alpha_2^2 + 1 = 0) \text{ e } \mu_4 \text{ tal que } +64\mu_1^6\mu_4^3 + 144\mu_1^4\mu_2^2\mu_4^2 + 108\mu_1^2\mu_2^4\mu_4 + 27\mu_2^8 =$$

$$= 0 \quad (\rightarrow 3\alpha_1^2\alpha_4 + 2\mu_1\alpha_2\alpha_4 + \mu_4\alpha_4 + \alpha_2^3 = 0), \text{ segue que } \text{ord}(h) = 8. \text{ Logo,}$$

$$w \sim \pm x^8 \pm y^2.$$

(iv) Se $\alpha = \beta = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, então:

Consideremos $w(x,y) = x^3 + y^5 + \mu_4 xy^2 + \mu_5 y^3 + \mu_6 xy^3 + \mu_7 y^4$. Daí, tomemos

$h(x,y) = x^3 + \mu_5 y^3 + \mu_4 x^2 y$. Portanto, h é homogênea de grau 3 e $w(x,y) = h + y^5 + \mu_6 xy^3 + \mu_7$. Sabemos que existe $\phi \in GL(2, R)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, tal que $h \circ \phi(x,y) = x^3$, $h \circ \phi(x,y) = x^2 y$ ou $h \circ \phi(x,y) = x^2 y + y^3$.

(iv-1) Se $h \circ \phi(x,y) = x^3$, então $w \circ \phi(x,y) = x^3 + \phi_2^5 + \mu_6 \phi_1 \phi_2^3 + \mu_7 \phi_2^4 = x^3 + (a_2 x + b_2 y)^5 + \mu_6 (a_1 x + b_1 y) (a_2 x + b_2 y)^3 + \mu_7 (a_2 x + b_2 y)^4$, onde $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$. Logo,

$w \circ \phi(x,y) = x^3 + ay^4 + by^3 x + cx^2 y^2 + dyx^3 + ex^4 + ry^5 + gxy^4 + hx^2 y^3 + ix^3 y^2 + px^4 y + qx^5$. Assim,

— Se $a = b = 0$, então $j^4(w) = x^3 + ay^4 + by^3 x + cx^2 y^2 + dyx^3 + ex^4 \sim x^3$. Logo, $w \circ \phi(x,y) \sim x^3 + ry^5 + gxy^4 + hx^2 y^3 + ix^3 y^2 + px^4 y + qx^5 = x^3 + ry^5 + gxy^4 + x^2 \psi$, com $\psi \in j^5(\mathcal{M}_2^3)$. Daí, se $r \neq 0$, então $w \sim x^3 + y^5$.

— Se $a \neq 0$, então $j^4(w) \sim x^3 + y^4$. Logo, $w \circ \phi(x,y) = x^3 + y^4 + ry^5 + gxy^4 + hx^2 y^3 + ix^3 y^2 + px^4 y + qx^5$. Como $x^3 + y^4$ é 4-determinado, segue que $w \circ \phi \sim x^3 + y^4$.

— Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $j^4(w) \sim x^3 + xy^3$. Logo, $w \circ \phi(x,y) = x^3 + xy^3 + ry^5 + gxy^4 + hx^2 y^3 + ix^3 y^2 + px^4 y + qx^5$. Como $x^3 + xy^3$ é 4-determinado, segue que $w \circ \phi \sim x^3 + xy^3$.

(iv-2) Se $h \circ \phi(x,y) = x^2 y + y^3$, então $w \circ \phi(x,y) = x^2 y + y^3 + \phi_2^5 + \mu_6 \phi_1 \phi_2^3 + \mu_7 \phi_2^4$. Como $x^2 y + y^3$ é 3-determinado, segue que $w \circ \phi \sim x^2 y + y^3$.

(iv-3) Se $h_0\phi(x,y) = x^2y$, então $w_0\phi(x,y) = x^2y + \phi_2^5 + \mu_6\phi_1\phi_2^3 +$

$$+ \mu_7\phi_2^4 = x^2y + (a_2x + b_2y)^5 + \mu_6(a_1x + b_1y) \cdot (a_2x + b_2y)^3 +$$

$$+ \mu_7(a_2x + b_2y)^4, \text{ onde } b_1 \neq 0 \text{ e } b_2 \neq 0. \text{ Daí, } w_0\phi(x,y) =$$

$$= x^2y + ay^4 + by^3x + cx^2y^2 + dxy^3 + ex^4 + ry^5 + gxy^4 + hx^2y^3 + ix^3y^2 +$$

$$+ px^4y + qx^5. \text{ Assim,}$$

$$\text{--- Se } j^4(w) = x^2y + ay^4 + by^3x + cx^2y^2 + dxy^3 + ex^4 = x^2y +$$

$$+ ay^4 + bxy^3 + x^2\psi, \text{ com } \psi \in j^4(\mathcal{M}_2^2) \text{ e } a \neq 0, \text{ então } j^4(w) = x^2y + y^4.$$

$$\text{Logo, } w_0\phi(x,y) = x^2y + y^4 + ry^5 + gxy^4 + hx^2y^3 + ix^3y^2 + px^4y + qx^5. \text{ Como}$$

$$x^2y + y^4 \text{ é 4-determinado, segue que } w_0\phi \sim x^2y + y^4.$$

$$\text{--- Se } a = 0, \text{ então } j^4(w) = x^2y. \text{ Logo, } w_0\phi(x,y) =$$

$$x^2y + ry^5 + gxy^4 + hx^2y^3 + ix^3y^2 + px^4y + qx^5 = x^2y + ry^5 + gxy^4 + x^2\phi, \text{ com}$$

$$\phi \in j^5(\mathcal{M}_2^3). \text{ Segue que } w_0\phi \sim x^2y + ry^5. \text{ Assim,}$$

$$\text{--- Se } r \neq 0, \text{ então } x^2y + ry^5 \sim x^2y + y^5.$$

$$\text{--- Se } r = 0, \text{ então } j^5(w) = x^2y. \text{ Logo, } j^6(w) = x^2y +$$

$$+ a'y^6 + b'xy^5 + x^2\theta, \text{ com } \theta \in j^6(\mathcal{M}_2^4). \text{ Daí, } x^2y + a'y^6 + b'xy^5 + x^2\theta \sim$$

$$\sim x^2y + a'y^6. \text{ Portanto, sendo } a' \neq 0, \text{ segue que } x^2y + a'y^6 \sim$$

$$\sim x^2y + y^6.$$

Portanto, existe um aberto $A \subset J^k(2,1)$, com

$j^k(f) \in A$, tal que A intercepta apenas as $R^{(k)}$ -órbitas de f ;

$x; \pm x^2 \pm y^2; \pm x^3 \pm y^2; \pm x^4 \pm y^2; \pm x^5 \pm y^2; \pm x^6 \pm y^2; \pm x^7 \pm y^2; \pm x^8 \pm y^2$;

$x^2y \pm y^3$; $x^2y \pm y^4$; $x^2y \pm y^5$; $x^2y \pm y^6$; $x^3 \pm y^4$ e $x^3 \pm x^3y$, quantidade esta que independe de $k \geq k_0 = 9$. Logo, f é 0-modal.

Para os subespaços Π_i de V descritos abaixo, teremos as seguintes descrições geométricas das $R^{(k)}$ -órbitas numa vizinhança de 0 V .

a) Quando $\Pi_1 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle_R$

b) Quando $\Pi_2 = \langle x^2, xy^2, y^3 \rangle_R$

c) Quando $\Pi_3 = \langle x^2, xy^2, xy^3 \rangle_R$

d) Quando $\Pi_4 = \langle x^2, xy^2, y^4 \rangle_R$

e) Quando $\Pi_5 = \langle xy^2, y^3, xy^3 \rangle_R$

f) Quando $\Pi_6 = \langle y^3, xy^3, y^4 \rangle_R$

Pelas descrições geométricas acima temos a cadeia de abutamentos:

3. MODALIDADE INTERNA - ZERO-MODALIDADE

Como já vimos ([21]), para toda singularidade $f \in \mathcal{M}_2^2$ temos que f é 0-modal se, e somente se, f tem modalidade interna nula.

Assim, utilizando técnica de escada de ideal, mostremos que todos os germes dos tipos $A_k^\pm$, $k \geq 1$, $D_k^\pm$, $k \geq 4$, $E_6^\pm$, E_7 e E_8 têm modalidade interna nula. Segue que todos os

germes dos tipos acima são 0-modais. Esta nova técnica nos dá de forma mais imediata informações sobre a 0-modalidade dos germes acima citados. Entretanto, comparada com a técnica anterior, perderemos as informações de quantos e quais serão as órbitas que abutam as órbitas dos germes em questão.

- TEOREMA III-9:

Todos os germes dos tipos $A_k^\pm$, $k \geq 1$, $D_k^\pm$, $k \geq 4$, $E_6^\pm$, E_7 e E_8 são 0-modais.

- DEMONSTRAÇÃO:

1º Caso) Seja $f = tx^{k+1} + y^2$, com $k \geq 1$.

Então f é 0-modal.

De fato, temos que $E(\langle \partial f \rangle)$ é dada geometricamente por:

$$\#(N^2 - E(\langle \partial f \rangle)) = k$$

Observemos que f é Q-H do tipo $(2k+2; 2, k+1)$, o que acarreta que

$$\mu(f) = \left(\frac{2k+2-2}{2}\right) \cdot \left(\frac{2k+2-k-1}{k+1}\right) = k.$$

Tomando $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = x^2, \dots, \phi_k = x^{k-1}$, temos que $\phi_1, \dots, \phi_k$ são representantes de uma base do espaço vetorial real $E_2/\langle \partial f \rangle$.

A modalidade interna de f é dada pelo número de monômios ϕ_i tais que, $\text{peso}_\alpha(\phi_i) \geq 2k+2$ ($i=1,2,\dots,k$), onde $\alpha = (2,k+1)$.

Como $\text{peso}_\alpha(\phi_1) = 0$, $\text{peso}_\alpha(\phi_2) = 2, \dots$, $\text{peso}_\alpha(\phi_k) = 2k-2$, segue que f tem modalidade interna nula. Logo, f é 0-modal.

Portanto, os germes do tipo $A_k^\pm$, com $k = 1$, são 0-modais.

2º Caso) Seja $f = x^2 y \pm y^{k-1}$, com $k \geq 4$.

Então, f é 0-modal.

De fato, temos que $E(\langle \partial f \rangle)$ é dada geometricamente por:

$$\#(N^2 - E(\langle \partial f \rangle)) = k.$$

Observemos que f é Q-H do tipo $(2k-2; k-2, 2)$, o que acarreta que

$$\mu(f) = \left(\frac{2k-2-k+2}{k-2}\right) \cdot \left(\frac{2k-2-2}{2}\right) = k.$$

Tomando $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$, $\phi_4 = y^2, \dots, \phi_k = y^{k-2}$, temos que $\phi_1, \dots, \phi_k$ são representantes de uma base do espaço vetorial real $E_2 / \langle \partial f \rangle$.

A modalidade interna de f é dada pelo número de monômios ϕ_i tais que, $\text{peso}_\alpha(\phi_i) \geq 2k-2$ ($i=1, \dots, k$), onde $\alpha = (k-2, 2)$.

Como $\text{peso}_\alpha(\phi_1) = 0$, $\text{peso}_\alpha(\phi_2) = k-2$, $\text{peso}_\alpha(\phi_3) = 2, \dots$, $\text{peso}_\alpha(\phi_k) = 2k-4$, segue que f tem modalidade interna nula. Logo, f é 0-modal.

Portanto, os germes do tipo $D_k^\pm$, com $k \geq 4$, são 0-modais.

3º Caso) Seja $f = x^3 + y^4$.

Então, f é 0-modal.

De fato, já vimos que f tem modalidade interna nula. Logo, f é 0-modal.

Portanto, os germes do tipo $E_6^\pm$ são 0-modais.

4º Caso) Seja $f = x^3 + xy^3$.

Então, f é 0-modal.

De fato, temos que $E(\langle \partial f \rangle)$ é dada geometricamente por:

$$\#(N^2 - E(\langle \partial f \rangle)) = 7.$$

Observemos que f é Q-H do tipo $(9;3,2)$, o que acarreta que $\mu(f) = \binom{9-3}{3} \cdot \binom{9-2}{2} = 7$.

Tomando $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$, $\phi_4 = xy$, $\phi_5 = y^2$, $\phi_6 = y^3$, $\phi_7 = y^4$, temos que $\phi_1, \dots, \phi_7$ são representantes de uma base do espaço vetorial real $E_2 / \langle \partial f \rangle$.

A modalidade interna de f é dada pelo número de monômios ϕ_i tais que, $\text{peso}_\alpha(\phi_i) \geq 9$ ($i=1, \dots, 7$), onde $\alpha = (3,2)$.

Como $\text{peso}_\alpha(\phi_1) = 0$, $\text{peso}_\alpha(\phi_2) = 3$, $\text{peso}_\alpha(\phi_3) = 2$, $\text{peso}_\alpha(\phi_4) = 5$, $\text{peso}_\alpha(\phi_5) = 4$, $\text{peso}_\alpha(\phi_6) = 6$, $\text{peso}_\alpha(\phi_7) = 8$, segue que f tem modalidade interna nula. Logo, f é 0-modal.

Portanto, os germes do tipo E_7 são 0-modais.

5º Caso) Seja $f = x^3 + y^5$.

Então, f é 0-modal.

De fato, temos que $E(\langle \partial f \rangle)$ é dada geometricamente por:

$$\#(N^2 - E(\langle \partial f \rangle)) = 8.$$

Observemos que f é Q-H do tipo $(15;5,3)$, o que acarreta que $\mu(f) = (\frac{15-5}{5}) \cdot (\frac{15-3}{3}) = 8$.

Tomando $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, $\phi_3 = y$, $\phi_4 = xy$, $\phi_5 = y^2$, $\phi_6 = y^3$, $\phi_7 = xy^2$, $\phi_8 = xy^3$, temos que $\phi_1, \dots, \phi_8$ são representantes de uma base do espaço vetorial real $E_2/\langle \partial f \rangle$.

A modalidade interna de f é dada pelo número de monômios ϕ_i tais que, $\text{peso}_\alpha(\phi_i) \geq 15$ ($i=1, \dots, 8$), onde $\alpha = (5,3)$.

Como $\text{peso}_\alpha(\phi_1) = 0$, $\text{peso}_\alpha(\phi_2) = 5$, $\text{peso}_\alpha(\phi_3) = 3$, $\text{peso}_\alpha(\phi_4) = 8$, $\text{peso}_\alpha(\phi_5) = 6$, $\text{peso}_\alpha(\phi_6) = 9$, $\text{peso}_\alpha(\phi_7) = 11$, $\text{peso}_\alpha(\phi_8) = 14$, segue que f tem modalidade interna nula. Logo, f é 0-modal.

Portanto, os germes do tipo E_8 são 0-modais.

BIBLIOGRAFIA

- (1) - Arnol'd , V.I. - "Normal forms for functions near degenerate critical points, the weyl ' groups of A_k, D_k, E_k and lagrangian ' singularities." - Funct. Anal. Appl. , 6 (1973)
- (2) - ----- - "Normal forms of function in neighbourhoods of degenerate critical ' points". - Russian Math. Surveys , 29 : 2 (1974)
- (3) - ----- - "Critical points of smooth functions and their normal forms." - Russian Math. Surveys, 30 : 5 (1975)
- (4) - Bruce, J.W. - "A note on the degree of determinacy of a semi-quase-homogeneous function." - Bull. London Math. Soc. , 13 (1978)
- (5) - Golubitsky, M. and
Guillemin, V. - "Stable mappings and their singularities." - Springer Verlag - NY, Inc (1976)
- (6) - Galligo, A. and
Damon, J. - "A topological invariant for stable map germs." - (preprint)
- (7) - Mendes, C.M. et
alli - "Alguns invariantes diferenciáveis." Métrica - IBILCE - UNESP, 8 (1980)
- (8) - Pedroso, H.A. e
Tadini, W.M. - "Sobre o Splitting Lemma." - Métrica IBILCE - UNESP , 23 (1985)
- (9) - ----- - "Classificação e abutamentos de órbitas das cúbicas homogêneas em duas

- (10) - Rand, D. - "Arnol'd classification of simple singularities of smooth functions." - Math. Inst. of Warwick, Coventry (1977)
- (11) - Gonçalves, J.R., - "Tese de Mestrado." - ICMSC- USP (a aparecer)
- (12) - Siersma, D. - "Classification and deformation of singularities." - Amsterdam (1974)
- (13) - Sotomayor, J. - "Singularidades das aplicações diferenciáveis -III." - Escola Latino Americana de Mat. - IMPA (1976)
- (14) - Silva, E.A. e Tadini, W.M. - "Sobre zero-modalidade." - Métrica - IBILCE-UNESP, 25 (1985)
- (15) - Silva, EA et alli - "Ação de grupos." - Métrica - IBILCE - UNESP, 7 (1980)
- (16) - Tadini, W.M. - "Sobre alguns invariantes diferenciáveis de germes de funções C^∞ " Tese de Doutorado - ICMSC - USP (1980)
- (17) - ----- - "Germes finitamente determinados e símbolo de Boardman." - Tese ' de Mestrado - ICMSC-USP (1976)
- (18) - ----- - "Sobre um teorema de funções implícitas." - Rev. Mat. e Est. - UNESP (1986)
- (19) - ----- - "Zero modalidade implica determinação finita." - Métrica - IBILCE UNESP, 21. (1985)

- (20) - ----- - "Sobre separação de variáveis." -
(preprint)
- (21) - Masahiko, S. - "The stratum with constant Milnor
number of a mini-transversal fa-
mily of a quasihomogeneous func-
tion of corank two." - Topology,
23 - 1 (1984)