Resolubilidade local de campos vetoriais reais

Uirá Norberto Matos de Almeida

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:

Resolubilidade local de campos vetoriais reais

Uirá Norberto Matos de Almeida

***Orientador:* Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Abril de 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M425r Matos de Almeida, Uirá Norberto
 Resolubilidade local de campos vetoriais reais /
 Uirá Norberto Matos de Almeida; orientador Paulo
 Leandro Dattori da Silva. -- São Carlos, 2014.
 121 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
 e de Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

 1. Resolubilidade Local. 2. Campos Vetoriais. 3.
 Singularidade Isolada. 4. Linearização de Sternberg.
 I. da Silva, Paulo Leandro Dattori, orient. II.
 Título.

*"In re mathematica ars proponendi pluris facienda est
quam solvendi."*

Georg Cantor(1867)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, em especial meus pais, pela força e confiança, pelo apoio incondicional e pela excelente educação que me propiciaram.

Agradeço aos meus amigos e colegas por terem tornado a minha vida ao longo desta jornada mais agradável. Em particular, agradeço aos amigos do grupo de teatro pelos momentos de descontração, e ao meu colega Erik pelas intermináveis discussões matemáticas. Um agradecimento especial ao Espeto e ao Manivela, amigos para todas as horas.

Agradeço, também, ao meu orientador Paulo pela confiança que depositou em mim.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação vamos estudar alguns importantes resultados acerca da resolubilidade local de operadores lineares de primeira ordem. Mais especificamente, seja o campo vetorial singular L em $\mathbb{R}^n$ e dado por:

$$L = \sum_{j=1}^m a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Esta trabalho dirige-se ao estudo da resolubilidade local de L , isto é, dada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ queremos encontrar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $Lu = f$ numa vizinhança de x_0 . Será dada atenção especial ao caso em que os coeficientes $a_j(x)$ de L são função lineares. Também, serão apresentados resultados sobre a resolubilidade local da equação $Lu = cu + f$, sendo $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Abstract

This dissertation aims to study some important results about local solvability of first order differential operators. Specifically, let L be a singular vector field on $\mathbb{R}^n$ given by

$$L = \sum_{j=1}^m a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

This work explore the local solvability of L , that is, given $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $x_0 \in \mathbb{R}^n$ we want to find $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ such that $Lu = f$ in a neighborhood of x_0 . We give special attention to the case where the coefficients $a_j(x)$ are linear. We also present some results about local solvability of the equation $Lu = cu + f$ for $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sumário

1	Introdução	1
2	Resultados preliminares	3
3	Resolubilidade local de campos vetoriais com coeficientes reais lineares	14
3.1	Preliminares	14
3.2	Demonstração do Teorema	17
3.2.1	A equivalência de (ii), (iii) e (iv)	17
3.2.2	O caso $\dim V(L) = n - 1$	25
3.2.3	O caso $m = \operatorname{codim} V(L) \geq 2$	26
3.3	Comentários sobre uma demonstração alternativa	37
4	Resolubilidade local <i>flat</i> de campos vetoriais reais com singularidades isoladas	41
5	Teorema de Linearização de Sternberg	56
6	Resolubilidade local de campos vetoriais reais com singularidade isolada	77
6.1	Resultado Principal	77
6.2	Demonstração do Lema 6.2	81
6.2.1	Sobre ordenação de conjuntos	81
6.2.2	uma matriz especial	83
A	Geodésicas	93
B	Integral de Bochner	100

C	Algebras de Lie	108
C.1	Noções gerais	108
C.2	Demonstração do Teorema 6.6	112
C.3	Álgebra de Heisenberg e Grupo de Heisenberg	114

Introdução

O estudo das equações diferenciais parciais tem sido, nos últimos 2 séculos, um dos grandes focos da Análise Matemática. Em particular, responder a pergunta "será que esta equação possui solução?" foi, e de fato é, uma das maiores preocupações dos matemáticos da área. Com o advento da teoria das distribuições, formalizada por Schwartz em 1950, esta questão se tornou mais abrangente, novos conceitos de solução foram introduzidos para certa classe de equações (as EDPs lineares). Em particular, faz parte desta classe, as equações obtidas como campos de vetores em variedades.

A resolubilidade local de campos vetoriais não singulares é, hoje, bem compreendida. Isso se deve, em particular, a um dos mais antigos resultados acerca dos campos de vetores, que trata da estrutura local dos campos, em torno de pontos não singulares. Mais especificamente, o resultado garante a existência de um sistema de coordenadas locais, em torno de pontos regulares, tal que, neste sistema de coordenadas, o campo de vetores é constante.

Neste trabalho, nos propusemos a estudar a resolubilidade local de campos vetoriais em torno dos pontos singulares. No capítulo 2, veremos um importante resultado sobre a sobrejetividade de operadores com coeficientes constantes. Este resultado será importante no capítulo 3, onde, seguindo o roteiro estabelecido por François Treves [Treves, 2009], faremos uma completa caracterização da resolubilidade local de campos vetoriais com coeficientes reais lineares em torno de seus pontos singulares. No capítulo 6, estudaremos o Lema 4.1.2 da tese de Maurício Fronza da Silva [Silva, 2006] e seu subsequente artigo [Silva, dos Santos Filho, 2006]. Neste capítulo, iremos nos restringir a campos

vetoriais com singularidade isolada, mas iremos fornecer condições suficientes para que uma perturbação do campo por uma função suave tenha solução local também suave. Para melhor compreender as hipóteses e a demonstração deste resultado, os capítulos 4 e 5, apresentam demonstrações de resultados auxiliados, estabelecidos por Guillemin, Schaeffer [1977] e Sternberg [1959].

Juntos, estes resultados nos permitem ter uma visão do panorama atual no que se trata da resolubilidade local de campos de vetores com coeficientes reais.

Resultados preliminares

Definição 2.1. Seja $P(D)$ um operador com coeficientes constantes. Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito P -convexo para suporte se para todo compacto $K \subset \Omega$ existe um outro compacto $K' \subset \Omega$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \text{supp} P(-D)\varphi \subset K \end{array} \right\} \Rightarrow \text{supp } \varphi \subset K'.$$

Dizemos que Ω é P -convexo para suporte singular se para todo $K \subset \Omega$ existe um outro compacto $K' \subset \Omega$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} u \in \mathcal{E}'(\Omega) \\ \text{sing supp} P(-D)u \subset K \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sing supp } \varphi \subset K'.$$

Os seguintes resultados se encontram em Hörmander [2005] e sua referência se encontra entre parênteses.

Teorema 2.2 (Corolário 10.7.10). *A equação $P(D)u = f$ possui solução $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, Ω é P -convexo para suporte e para suporte singular.*

Note que o teorema acima oferece um resultado mais forte que o teorema de Malgrange Ehrempreis, que garante apenas a resolubilidade local, porém, as condições de P -convexidade para suportes e para suportes singulares não são fáceis de serem trabalhadas. No que se segue, iremos seguir o roteiro estabelecido por Hormander [Hörmander, 1990], para demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.3 (Teoremas 10.6.2 e 10.7.2). *Todo aberto convexo é P -convexo para suporte e para suporte singular.*

Lema 2.4. Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então sua transformada de Fourier é dada pela função

$$\hat{u}(\xi) = \langle u_x, e^{-2\pi i x \cdot \xi} \rangle \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A função $\hat{u}(\xi)$ se estende como uma função inteira em $\mathbb{C}^n$.

Observação 2.5. Antes de demonstrar este resultado, vamos deixar claro qual a definição de transformada de Fourier que estamos adotando:

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Demonstração: Sejam $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e $\chi \in C_c^\infty(U)$, Ω e U abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente, com $\chi \equiv 1$ no suporte de v . Sejam ainda $\phi \in C^\infty(\Omega \times U)$ e $u = \chi v$. Denote por K o suporte de χ . Então, para $y \in U$ fixado e $h \in \mathbb{R}^p$ suficientemente pequeno, temos da fórmula de Taylor que

$$\phi(x, y + h) = \phi(x, y) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial y_j}(x, y) h_j + \psi(x, y, h),$$

onde

$$\psi(x, y, h) = 2 \int_0^1 (1-t) \sum_{|\beta|=2} \frac{1}{\beta!} \partial_y^\beta \phi(x, y + th) h^\beta dt.$$

Temos, para $x \in K$

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \psi(x, y, h)| &= \left| 2 \int_0^1 (1-t) \sum_{|\beta|=2} \frac{1}{\beta!} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \phi(x, y + th) h^\beta dt \right| \\ &\leq 2 \int_0^1 (1-t) \sum_{|\beta|=2} \frac{1}{\beta!} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \phi(x, y + th)| |h^\beta| dt \\ &\leq 2 \int_0^1 (1-t) \sum_{|\beta|=2} \frac{1}{\beta!} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \phi(x, y + th)| |h|^{|\beta|} dt \leq C |h|^2, \end{aligned}$$

onde $C = C(y)$, pois K é compacto e podemos passar o supremo de $x \in K$ dentro da integral acima. Daí, como u é distribuição de suporte compacto K , segue que

$$|u(\psi(\cdot, y, h))| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha \psi(x, y, h)| \leq C' |h|^2,$$

onde C' só depende de y . Observe agora, que da linearidade de u temos:

$$u(\phi(\cdot, y + h)) = u(\phi(\cdot, y)) + \sum_{j=1}^n u\left(\frac{\partial \phi}{\partial y_j}(\cdot, y)\right) h_j + u(\psi(\cdot, y, h)).$$

Portanto, a função $y \mapsto g(y) = u(\phi(\cdot, y))$ satisfaz $g(y + h) - g(y) - T(y)h = r(y, h)$, onde $T(y)$ é linear e $|r(y, h)| \leq C'|h|^2$. Isto é, provamos que $g(y)$ é diferenciável e temos:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} u_x(e^{-i\pi x \cdot y}) = \frac{\partial}{\partial y_j} g(y) = u_x\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \phi(x, y)\right).$$

Repetindo o processo acima, vemos que $g(y)$ é na verdade uma função suave. Em particular, tomando $\phi(x, y) = e^{-2\pi i x \cdot y}$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ qualquer,

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}) = (u_x \otimes \varphi_\xi)(e^{-2\pi i x \cdot \xi}) = \int \varphi(\xi) \langle u_x, e^{-2\pi i x \cdot \xi} \rangle d\xi = \langle g, \varphi \rangle.$$

Finalmente, definimos a função complexa $U(\xi, \eta) = U(\zeta) = \langle u_x, e^{-2\pi i x \cdot \zeta} \rangle$, $\zeta = \xi + \eta i$. Esta função está bem definida, pois é apenas mais um caso particular do resultado acima (estamos tomando $\phi(x, y) = e^{-2\pi i x \cdot (\xi + \eta i)}$, onde $y = (\xi, \eta)$). Além disso, como já vimos, para derivar U basta aplicar a distribuição u à derivada de ϕ de modo que U satisfaz a equações de Cauchy Riemman e, portanto, é holomorfa.

□

Definição 2.6. A extensão holomorfa da qual se trata o resultado acima é chamada de transformada de Fourier-Laplace da distribuição $u \in \mathcal{E}'$. A transformada de Fourier-Laplace, também será denotada por $\hat{u}(\zeta)$.

Definição 2.7. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e denote por $ch K$ o seu fecho convexo. Da versão geométrica do teorema de Hahn-Banach, temos que, se $y \notin ch K$, então podemos separar y de $ch K$ por um semiplano $x \cdot \xi = c$, isto é,

$$\begin{cases} x \cdot \xi < c & \xi \in ch K \\ x \cdot y > c \end{cases}.$$

Definimos a função suporte de K por

$$H_K(\xi) = \sup_{x \in K} x \cdot \xi = \sup_{x \in ch K} x \cdot \xi.$$

Como acabamos de ver, $y \notin \text{ch } K$ implica que $y \cdot \xi > H_K(\xi)$.

O teorema de Paley-Wiener-Schwartz é de crucial importância para estimativas do tamanho do suporte e do suporte singular. Com fins de completeza, iremos enuncia-lo abaixo em sua versão que nos interessa.

Teorema 2.8. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto convexo e H_K sua função suporte.*

- *Uma função inteira $U(\zeta)$ é a transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ com $\text{supp } u \subset K$ se, e somente se, existem constantes C e N tais que*

$$|U(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^N e^{2\pi H_K(\Im \zeta)} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n. \quad (2.0.1)$$

- *Uma função inteira $U(\zeta)$ é a transformada de Fourier-Laplace de uma função $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\text{supp } u \subset K$ se, e somente se, para cada $N \in \mathbb{Z}_+$ existe constante C_N tal que*

$$|U(\zeta)| \leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N} e^{2\pi H_K(\Im \zeta)} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n. \quad (2.0.2)$$

Iremos omitir a demonstração deste teorema, mas ele se encontra demonstrado em Hörmander [1990] ou em Hounie [1979]. Note que ele difere do resultado enunciado por Hormander por um fator de 2π na exponencial. Isso ocorre devido à diferença na transformada de Fourier que estamos considerando.

Lema 2.9. *Sejam $f \in \mathcal{E}'$ uma distribuição de suporte compacto e $P(D)$ um operador com coeficientes constantes. Então, a equação*

$$P(D)u = f \quad (2.0.3)$$

possui solução $u \in \mathcal{E}'$ se, e somente se, $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(\zeta)}$ é uma função inteira, sendo $P(\zeta)$ o polinômio associado ao operador $P(D)$. Além disso, esta solução satisfaz

$$\text{ch supp } u = \text{ch supp } f.$$

Demonstração: A demonstração deste resultado será consequência do teorema de Paley-Wiener-Schwartz. Suponha que (2.0.3) tenha solução $u \in \mathcal{E}'$. Do teorema de Paley-Wiener-Schwartz, segue que $\hat{u}$ é uma função inteira e aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da equação obtemos:

$$P(\zeta)\hat{u}(\zeta) = \hat{f}(\zeta),$$

de modo que $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(\zeta)} = \hat{u}(\zeta)$ é uma função inteira. Reciprocamente, se $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(\zeta)}$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C}^n$, então, $\frac{\hat{f}(\zeta)}{P(\zeta)} = \hat{u}(\zeta)$ para alguma distribuição de suporte compacto u .

Para demonstrar a segunda parte do lema, vamos fazer uso da seguinte afirmação.

Afirmação: Se $h(z)$ é uma função holomorfa em $z \in \mathbb{C}$ e $p(z) = a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0$ é um polinômio, então

$$|a_m h(0)| \leq \max_{|z|=1} |h(z)p(z)|.$$

De fato, considere o polinômio $q(z)$ definido por

$$q(z) = z^m \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right) = z^m \left(\bar{a}_0 + \frac{\bar{a}_1}{z} + \cdots + \frac{\bar{a}_m}{z^m} \right) = \bar{a}_0 z^m + \bar{a}_1 z^{m-1} + \cdots + \bar{a}_m.$$

Temos que $q(0) = \bar{a}_m$. Note que, para $|z| = 1$, vale que $z/\bar{z} = \frac{z^2}{|z|^2} = z^2$ e, analogamente, $\bar{z}/z = \bar{z}^2$; assim, para $|z| = 1$,

$$\begin{aligned} |p(z)|^2 &= p(z) \overline{p(z)} = \left(\sum_{j=0}^n a_j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^k \right) = (z\bar{z})^n \left(\sum_{j=0}^n a_j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^k \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^n a_j z^{j+n} \right) \left(\sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^{k+n} \right) = \left(\sum_{j=0}^n a_j z^{n-j} z^{2j} \right) \left(\sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^{n-k} \bar{z}^{2k} \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^n a_j z^{n-j} \frac{z^j}{\bar{z}^j} \right) \left(\sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^{n-k} \frac{\bar{z}^k}{z^k} \right) = \left(\sum_{j=0}^n a_j z^n \frac{1}{\bar{z}^j} \right) \left(\sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^n \frac{1}{z^k} \right) \\ &= z^n \bar{z}^n p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right) = |\bar{p}(1/z)|. \end{aligned}$$

Portanto, segue do princípio do módulo máximo que

$$|a_m h(0)| = |q(0)h(0)| \leq \max_{|z|=1} |q(z)h(z)| = \max_{|z|=1} |z^m \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right)h(z)| = \max_{|z|=1} |p(z)h(z)|,$$

finalizando a demonstração da afirmação.

Voltando, agora, para demonstração do lema, temos que é possível encontrar coordenadas tal que o coeficiente a de ζ_1^m em $P(\zeta)$ é não nulo, sendo m a ordem do operador $P(D)$. Então, considerando $P(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ um polinômio em z , temos que

seu coeficiente líder¹ é a . Suponha que u seja a solução de (2.0.3). Então, $P(\zeta)\hat{u}(\zeta) = \hat{f}(\zeta)$ e da afirmação, temos que

$$\begin{aligned} |a\hat{u}(\zeta)| &\leq \sup_{|z|=1} |P(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\hat{u}(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \\ &= \sup_{|z|=1} |\hat{f}(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)|; \end{aligned}$$

portanto, se $\hat{f}$ satisfaz a estimativa (2.0.1) para constantes C e N , segue que $\hat{u}$ também as satisfaz, apenas para uma outra constante C' no lugar de C . Do teorema de Paley-Wiener-Schwartz, isso implica que $u \in \mathcal{E}'$, e como as estimativas são as mesmas, exceto pela constante, segue que

$$ch \text{ supp } u \subset ch \text{ supp } f.$$

A inclusão contrária é trivial.

□

Corolário 2.10. Todo aberto convexo U é P -convexo para suporte.

Demonstração: Seja K um compacto em U e tome $K' = ch K$. Segue do lema que

$$ch \text{ supp } P(D)\varphi = ch \text{ supp } \varphi;$$

logo,

$$\text{supp } P(D)\varphi \subset K \Rightarrow \text{supp } \varphi \subset K'.$$

□

Para provar que a convexidade implica P -convexidade para suporte singular iremos precisar do seguinte análogo singular do teorema de Paley-Wiener-Schwartz.

Teorema 2.11. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto convexo. Então, para que $\text{sing supp } u \subset K$, é necessário e suficiente que exista uma constante N e uma sequência de constantes C_m , $m = 1, 2, \dots$ tais que*

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq C_m(1 + |\zeta|)^N e^{2\pi H(\Im \zeta)} \text{ se } |\Im \zeta| \leq \frac{m}{2\pi} \log(|\zeta| + 1) \quad \zeta \in \mathbb{C}. \quad (2.0.4)$$

¹Coeficiente do termo de maior grau. Neste caso, o termo z^m

Demonstração: Vamos provar que a condição do teorema é necessária:

Fixe $m \in \mathbb{Z}_+$ e seja $K_m = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - K| \leq 1/m\}$. Observe que, se H_{K_m} é a função de suporte de K_m , então

$$\begin{aligned} H_{K_m}(\zeta) &= \sup_{x \in K_m} \{x \cdot \zeta\} \leq \sup_{x \in K, |y| \leq 1/m} \{(x + y) \cdot \zeta\} \\ &\leq \sup_{x \in K} \{x \cdot \zeta\} + \sup_{|y| \leq 1/m} \{y \cdot \zeta\} \leq H_K(\zeta) + \frac{|\zeta|}{m}. \end{aligned}$$

Consideremos uma decomposição de u da seguinte forma:

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{tais que} \quad \text{supp } u_1 \subset K_m; \quad u_2 \in C_c^\infty.$$

Esta decomposição é possível pois o suporte singular de u está contida em K_m . Daí, segue do teorema de Paley-Wiener-Schwartz que se u_1 satisfaz a estimativa (2.0.1) para constantes $N - 1$ e C_m então

$$|\hat{u}_1(\zeta)| \leq C_m(1 + |\zeta|)^{N-1} e^{2\pi H_{K_m}(\Im \zeta)} \leq C_m(1 + |\zeta|)^{N-1} e^{\frac{2\pi}{m} |\Im \zeta|} e^{2\pi H_K(\Im \zeta)}.$$

Supondo que $|\Im(\zeta)| \leq m \log(1 + |\zeta|)$, temos:

$$|\hat{u}_1(\zeta)| \leq C_m(1 + |\zeta|)^{N-1} e^{\frac{2\pi}{m} (\frac{m}{2\pi} \log(1 + |\zeta|))} e^{2\pi H_K(\Im \zeta)} = C_m(1 + |\zeta|)^N e^{2\pi H_K(\Im \zeta)}.$$

Por outro lado, segue novamente do teorema de Paley-Wiener-Schwartz, que u_2 satisfaz a estimativa

$$|\hat{u}_2(\zeta)| \leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N} e^{2\pi H_A(\Im \zeta)} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

onde A é um compacto convexo tal que $\text{supp } u_2 \subset A$. Note que

$$H_K(\xi) = \sup_{x \in K} \{x \cdot \xi\} \leq \sup_{x \in K} |x| |\xi| \leq \|K\| |\xi|,$$

onde $\|K\|$ denota o diametro do conjunto K . Observe ainda que

$$-H_K(\xi) = -\sup_{x \in K} \{x \cdot \xi\} = \inf_{x \in K} \{-x \cdot \xi\} \leq |\zeta| \inf_{x \in K} |x|.$$

Daí, supondo que $|\Im(\zeta)| \leq m \log(1 + |\zeta|)$ e denotando por $r = \inf_{x \in K} |x|$, temos que

$$\begin{aligned} |\hat{u}_2(\zeta)e^{-2\pi H_K(\Im \zeta)}| &\leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N} e^{2\pi(H_A - H)(\Im \zeta)} \leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N} e^{2\pi(\|A\| + r)|\Im \zeta|} \\ &\leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N} (1 + |\zeta|)^{2\pi(\|A\| + r)\frac{m}{2\pi}} \leq C_N(1 + |\zeta|)^{(A+r)m-N}. \end{aligned}$$

Como a estimativa acima é válida para todo N , segue que $|\hat{u}_2(\zeta)e^{-2\pi H(\Im \zeta)}| \rightarrow 0$ quando $|\zeta| \rightarrow \infty$. Logo vale a estimativa

$$|\hat{u}_2(\zeta)| \leq \tilde{C}_m(1 + |\zeta|)^N e^{2\pi H_K(\Im \zeta)} \quad ; \quad |\Im(\zeta)| \leq \frac{m}{2\pi} \log(1 + |\zeta|),$$

para alguma constante $\tilde{C}_m$. Daí, para $|\Im(\zeta)| \leq \frac{m}{2\pi} \log(1 + |\zeta|)$, temos

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq |\hat{u}_1(\zeta)| + |\hat{u}_2(\zeta)| \leq (C_m + \tilde{C}_m)(1 + |\zeta|)^N e^{2\pi H_K(\Im \zeta)},$$

obtendo a estimativa desejada.

Reciprocamente, para cada $\eta \in \mathbb{R}^n$, defina

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto \zeta(\xi) = \xi + i\eta \log(1 + |\xi|^2).$$

Seja então $\Gamma_\eta = \zeta(\mathbb{R}^n)$.

Considere a seguinte região:

$$\Omega_\eta = \{x + ti\eta \log(1 + |x|^2) \in \mathbb{C}^n ; x \in \mathbb{R}^n ; t \in (0, 1)\}.$$

Notemos primeiramente que Ω_η está contido em um subespaço vetorial real V de $\mathbb{C}^n$. De fato, temos que

$$x + ti\eta \log(1 + |x|^2) \in \mathbb{R}^n \oplus i\eta\mathbb{R} \equiv V.$$

É fácil ver que Ω_η é aberto em V . Além disso, a fronteira de Ω_η é o conjunto $\Gamma_0 \cup \Gamma_\eta$.

Seja agora φ função de suporte compacto na bola unitária e tal que $\int \varphi dx = 1$. Defina então $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$. Defina ainda $g(w) = e^{2\pi i x \cdot w} \hat{u}(w) \hat{\varphi}_\varepsilon(w)$.

Observe que

$$1 + |\xi|^2 = (1 + i|\xi|)(1 - i|\xi|) < (1 + |\zeta(\xi)|)^2,$$

logo,

$$|\Im(\zeta(\xi))| \leq 2|\eta| \log(1 + |\zeta|),$$

em particular, para cada η fixado, temos que existe constante $C(\eta)$ tal que $\zeta(\xi)$ satisfaz a estimativa (2.0.4), isto é,

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\zeta(\xi))| &\leq C_\eta (1 + |\zeta(\xi)|)^N e^{2\pi H(\Im \zeta(\xi))} \\ &\leq C_\eta (1 + |\zeta|)^N e^{2\pi \|K\| |\Im \zeta|} \leq C_\eta (1 + |\zeta|)^N e^{4\pi \|K\| |\eta| \log(1 + |\zeta|)} \\ &= C_\eta (1 + |\zeta|)^N e^{\log(1 + |\zeta|) 4\pi \|K\| |\eta|} = C_\eta (1 + |\zeta|)^N (1 + |\zeta|)^{4\pi \|K\| |\eta|} \\ &= C_\eta (1 + |\zeta|)^{N + 4\pi \|K\| |\eta|}. \end{aligned}$$

Assim, segue de (2.0.5) e do teorema de Paley-Wiener-Schwartz que g satisfaz, para cada $N_2 \in \mathbb{Z}_+$, uma estimativa do tipo

$$|g(\zeta)| \leq e^{-2\pi x \cdot \Im \zeta} C_\eta (1 + |\zeta|)^{N_1 + 4\pi \|K\| |\eta|} C_{N_2} (1 + |\zeta|)^{-N_2 + 4\pi \|K\| |\eta|} \quad (2.0.5)$$

$$= e^{\log(1 + |\xi|^2) - 2\pi x \cdot \eta} C_\eta (1 + |\zeta|)^{N_1 + 4\pi \|K\| |\eta|} C_{N_2} (1 + |\zeta|)^{-N_2 + 4\pi \|K\| |\eta|} \quad (2.0.6)$$

$$= C_\eta C_{N_2} (1 + |\xi|^2)^{-2\pi x \cdot \eta} (1 + |\zeta|)^{-N_2 + N_1 + 8\pi \|K\| |\eta|}, \quad (2.0.7)$$

para todo $\zeta \in \Omega_\eta$. Observe ainda que Γ_0 e Γ_η são n -ciclos homotópicos em V , logo são ciclos homólogos. Segue do teorema de Stokes² que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \int_{\Gamma_0} g(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_\eta} g(\zeta) d\zeta,$$

onde a existência da integral da direita é garantida pela estimativa (2.0.7) e a existência da integral da esquerda é garantida pela seguinte conta

$$u * \varphi_\varepsilon(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u * \varphi_\varepsilon})(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u} \hat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy.$$

²O teorema de Stokes garante que a integral $\int_z w$ depende apenas das classes de cohomologia da forma fechada w e da classe de homologia do ciclo z . Ver Eschrig [2011], capítulo 5.

Observe agora que, para $\zeta = \zeta(\xi)$, com $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i x \cdot \zeta} \hat{u}(\zeta)| &\leq e^{-2\pi x \cdot \Im \zeta} C_\eta (1 + |\zeta(\xi)|)^N e^{2\pi H(\Im \zeta(\xi))} \\ &= e^{-2\pi x \cdot \eta \log(1 + |\xi|^2)} C_\eta (1 + |\zeta(\xi)|)^N e^{2\pi H(\Im \zeta(\xi))} \\ &= C_\eta (1 + |\xi|^2)^{-2\pi x \cdot \eta} (1 + |\zeta(\xi)|)^N e^{2\pi H(\Im \zeta)}. \end{aligned}$$

Note que $H(\Im \zeta) = \sup_{y \in K} \{y \cdot \eta \log(1 + |\xi|^2)\} = H(\eta) \log(1 + |\xi|^2)$. Daí,

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i x \cdot \zeta} \hat{u}(\zeta)| &\leq C_\eta (1 + |\xi|^2)^{2\pi H(\eta) - 2\pi x \cdot \eta} (1 + |\zeta(\xi)|)^N \\ &= C_\eta (1 + |\xi|^2)^{2\pi(H(\eta) - x \cdot \eta)} (1 + |\zeta(\xi)|)^N. \end{aligned}$$

Lembrando que, se $y \notin ch K$, então podemos separar y de $ch K$ por um semiplano $x \cdot \xi = c$, então, dado $x_0 \notin K$, podemos escolher η de modo que, em uma vizinhança B_0 de x_0 , $B_0 \cap ch K = \emptyset$, temos que

$$0 > -c = H_K(\eta) - x \cdot \eta \quad \forall x \in B_0,$$

sendo $c > 0$. Como $H(t\xi) = tH(\xi)$ segue que, para $t > 0$ temos:

$$0 > -tc = H_K(t\eta) - x \cdot t\eta \quad \forall x \in B_0,$$

ou seja, para cada $M \in \mathbb{Z}_+$ é possível escolher $\tilde{\eta} = t\eta$ com t suficientemente grande tal que

$$|e^{2\pi i x \cdot \zeta} \hat{u}(\zeta)| \leq C_\eta (1 + |\xi|^2)^{-M} (1 + |\zeta(\xi)|)^N \quad \forall x \in B_0.$$

Em particular, isto implica que $e^{2\pi i x \cdot \zeta} \hat{u}(\zeta)$ é integrável e, para $x \in B_0$, podemos tomar o limite

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u * \varphi_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\tilde{\eta}}} e^{2\pi i x \cdot \zeta} \hat{u}(\zeta) \hat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_{\tilde{\eta}}} e^{2\pi i x \cdot \zeta} \hat{u}(\zeta) d\zeta.$$

Mais ainda, para cada j fixado, é possível tomar M tal que o limite acima ainda pode ser tomado, mesmo após j derivações. Assim, u é $C^j(\mathbb{R}^n)$. Da arbitrariedade de j , segue que u é suave em B_0 . Da arbitrariedade de x , segue que u é suave em $\mathbb{C} \setminus ch K$, de modo que $sing\ supp u \subset K$, conforme queríamos demonstrar.

□

Podemos, então, considerar um resultado análogo ao Lema 2.9 para suporte singular.

Teorema 2.12. *Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então*

$$ch \, sing \, supp \, u = ch \, sing \, supp \, P(D)u.$$

Demonstração:

Seja $f = P(D)u$ e seja $K = ch \, sing \, supp \, f$. Fazendo como na demonstração do Lema 2.9, fazemos uma mudança ortogonal de coordenadas de modo que o termo líder do polinômio $P(\zeta)$ seja $a\zeta_1^m$ obtemos que

$$\begin{aligned} |a\hat{u}(\zeta)| &\leq \sup_{|z|=1} |P(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\hat{u}(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \\ &= \sup_{|z|=1} |\hat{f}(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)|, \end{aligned}$$

sendo a o coeficiente líder do polinômio $P(\zeta)$.

Daí, se $\hat{f}$ satisfaz a estimativa (2.0.4) então u também satisfaz esta estimativa para uma outra constante e, portanto,

$$ch \, sing \, supp \, u \subset K.$$

A inclusão contrária é trivial, pois o operador $P(D)$ "encolhe" o suporte singular.

□

O seguinte corolário tem demonstração análoga à demonstração do Corolário 2.10.

Corolário 2.13. Abertos convexos são P -convexos para suporte singular.

Está, então, demonstrado o Teorema 2.3.

Resolubilidade local de campos vetoriais com coeficientes reais lineares

3.1 Preliminares

Consideremos em $\mathbb{R}^n$ um campo de vetores suave, cujos coeficientes sejam funcionais lineares reais, isto é, um campo de vetores da forma:

$$L = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (3.1.1)$$

Definição 3.1. Um campo de vetores suave é dito ser localmente resolúvel em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se cada ponto $x_0 \in \Omega$ possui uma vizinhança aberta $U \subset \Omega$ tal que, para todo $f \in C_0^\infty(U)$, existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ que satisfaz $Lu = f$ em U .

Iremos agora estabelecer condições que são equivalentes à resolubilidade (mais precisamente, à não-resolubilidade) local na origem de campos do tipo (3.1.1). Veremos ainda que a resolubilidade local na origem é equivalente à resolubilidade local em cada ponto crítico para campos deste tipo.

Vamos denotar por $m(L)$ a matriz real $(a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$. Lembrando que o divergente de um campo vetorial $X = \sum b_j(x) \partial_{x_j}$ é dado por

$$\operatorname{div} (X) = \sum \frac{\partial b_j}{\partial x_j}(x),$$

temos que

$$\operatorname{div}(L) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} x_j \right) = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \operatorname{Tr}(m(L)).$$

Os pontos críticos de L , denotado por $V(L)$, são os pontos $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $m(L)^\top x = \vec{0}$. $V(L)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Podemos escolher um sistema de coordenadas em que $V(L) = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = \dots = x_m = 0\}$, sendo m a codimensão de $V(L)$. Neste sistema de coordenadas escrevemos o campo de vetores (3.1.1) da seguinte forma:

$$L = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (3.1.2)$$

Observe que o campo de vetores (3.1.2) é invariante por translações nas coordenadas $x_{m+1}, \dots, x_n$, e que podemos escrever:

$$L = \sum_{j=1}^m x_j L_j \quad ; \quad L_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (3.1.3)$$

Como m é exatamente a codimensão de $V(L)$, então, as primeiras m linhas da matriz $m(L)$ são $L.I$ e, portanto, os campos de vetores $L_1, \dots, L_m$ também são $L.I$.

Consideremos a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n / V(L) \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (y_1, \dots, y_m); \quad y_j(x) = x_j, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{R}^n / V(L)$ é identificado¹ de maneira natural com $\mathbb{R}^m$. Podemos agora, através do *pushforward*², associar o campo vetorial L (na forma (3.1.2)) com o campo vetorial em $\mathbb{R}^m$

$$L^0 = \pi_* L = \sum_{j=1}^m y_j \sum_{k=1}^m L(y_k) \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j,k=1}^m a_{jk} y_j \frac{\partial}{\partial y_k} \quad (3.1.4)$$

¹Estamos aqui considerando um sistema de coordenadas tal que $V(L) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; x_1 = \dots = x_m = 0\}$.

²Se $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x) = (y_1, \dots, y_m)$ é suave, então o *pushforward* do campo de vetores X por φ no ponto $q = \varphi(p)$ é definido por $\varphi_* X(q) = (d\varphi)_p X(p)$. Note que quando $n \neq m$, o *pushforward* pode não estar bem definido, mas em nosso caso, $(d\pi)_p$ independe de p pois π é linear e, além disso, $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ implica que $p_1 - p_2 \in V(L)$ e assim, $L(p_1) = L(p_2)$ e, portanto, o *pushforward* $\pi_* L$ de L pela projeção está bem definido.

Observe que o polinômio característico de $m(L)$ é dado por

$$P_{m(L)}(\lambda) = \det(m(L) - \lambda I_n),$$

onde I_n denota a matriz identidade de dimensões $n \times n$, mas

$$m(L) - \lambda I_n = \begin{pmatrix} m(L^0) - \lambda I_m & \vdots & \star \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ 0 & \vdots & -\lambda I_{m-n} \end{pmatrix}$$

e, portanto, $\det(m(L) - \lambda I_{n \times n}) = (-\lambda)^{n-m} \det(m(L^0) - \lambda I_{m \times m})$. Logo, o espectro de $m(L)$ e $m(L^0)$ coincidem, exceto pelo auto-valor zero, isto é $\sigma(m(L)) \setminus \{0\} = \sigma(m(L^0)) \setminus \{0\}$. Em particular, temos que $\text{div}(L) = \text{div}(L^0)$.

Observe que L define uma folheação³ em $\mathbb{R}^n$, onde as folhas são justamente os pontos de $V(L)$ ou curvas "de verdade" em $\mathbb{R}^n \setminus V(L)$. Mais precisamente, são variedades unidimensionais imersas, conexas, analíticas e sem auto-interseção, cujas linhas tangentes são geradas por L em cada ponto (e mais, as folhas em $\mathbb{R}^n \setminus V(L)$ são maximais com essas propriedades). Essas folhas serão chamadas de L -órbitas.

Podemos agora enunciar o resultado principal desta seção, que irá caracterizar a resolubilidade local dos campos (3.1.1). Este resultado foi enunciado e demonstrado por Treves [2009]. Aqui, apresentaremos em detalhes a demonstração dada por Treves.

Teorema 3.2. *As seguintes propriedades do campo de vetores (3.1.1) são equivalentes:*

- (i) *L não é localmente resolúvel em nenhum ponto de $V(L)$;*
- (ii) *O fecho de qualquer L -órbita em $\mathbb{R}^n \setminus V(L)$ é compacto em $\mathbb{R}^n \setminus V(L)$;*
- (iii) *O espectro de $m(L^0)$ é puramente imaginário e sua parte nilpotente é nula;*
- (iv) *$V(L)$ tem codimensão $m = 2p$ e existe um sistema de coordenadas $x_1, \dots, x_n$ tal que qualquer L -órbita por um ponto $x^0 \in \mathbb{R}^n \setminus V(L)$ é um geodésica do toro $(\tilde{T})^p(x^0)$ dado por:*

$$(\tilde{T})^p(x^0) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus V(L) \left| \begin{array}{l} x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2 = (x_{2j-1}^0)^2 + (x_{2j}^0)^2; \quad j = 1, \dots, p; \\ x_l = x_l^0; \quad l = 2p+1, \dots, n \end{array} \right. \right\}.$$

³Considere o sistema de EDO's definido por $\gamma'(t) = L(\gamma(t))$. Para cada valor inicial $\gamma(0) = x$ o PVI admite uma única solução (teorema de Picard). Variando x e considerando as soluções maximais de cada PVI obtemos uma partição de $\mathbb{R}^n$, que chamamos de folheação.

Note que a propriedade (iv) requer que $V(L)$ tenha codimensão par, portanto, é imediato deste resultado que campos da forma (3.1.1) tais que $V(L) = \ker(m(L)^\top)$ tenha codimensão ímpar são localmente resolúveis em $V(L)$. Note ainda que como L é invariante por translação em $V(L)$, temos que a propriedade (i) é equivalente a L não ser localmente resolúvel na origem. Finalmente, note que (iv) $\Rightarrow$ (ii), pois o toro é uma variedade compacta e, portanto, as órbitas contidas nele tem fecho compacto.

3.2 Demonstração do Teorema

3.2.1 A equivalência de (ii), (iii) e (iv)

Lema 3.3. As afirmações (ii) e (iii) do Teorema 3.2 são equivalentes.

Demonstração: vamos mostrar primeiro que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Para isso suponha que (iii) seja falso e seja $\chi = \xi + i\eta$ um autovalor de $m(L^0)$

Caso 1: $\eta = 0$.

Como $\xi \in \mathbb{R}$ é um autovalor de $m(L^0)$, segue do Teorema da Forma Canônica de Jordan, que existe uma transformação linear tal que:

$$m(L^0) = \begin{pmatrix} \xi & \vec{0} \\ \star & \star \end{pmatrix}$$

e, portanto, podemos supor que L é da forma:

$$L = x_1 \left(\xi \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \sum_{j=2}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (3.2.1)$$

Observe que o campo L na forma (3.2.1) é tangente à

$$\dot{V} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; x_1 \neq 0, x_2 = \dots = x_m = 0\}^4$$

e, portanto, aos semi-espacos $\dot{V}_- = \{x \in \dot{V}; x_1 < 0\}$ e $\dot{V}_+ = \{x \in \dot{V}; x_1 > 0\}$. Assim,

⁴Lembrando que um campo $X : M \rightarrow TM$ em uma variedade M é dito tangente à uma subvariedade $N \subseteq M$ quando $X(N) \subseteq TN \subseteq TM$. Em nosso caso, para $p \in \dot{V}$ o campo neste ponto é dado por $x_1(\xi \partial_1 + \sum_{k=m+1}^n a_{1k} \partial_k)$. Como temos que $T_p \dot{V} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; x_2 = \dots = x_m = 0\}_p = [\partial_1, \partial_{m+1}, \dots, \partial_n]$, para todo ponto $p \in \dot{V}$, segue que L é tangente a $\dot{V}$

temos que as L -órbitas coincidem⁵ com as órbitas do campo

$$L|_{\dot{V}_{\pm}} = x_1 \left(\xi \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{k=m+1}^n a_{1k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

Neste caso, as órbitas por $x_0 \in \dot{V}_{\pm}$ satisfazem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \xi x_1 \\ \dot{x}_k = a_{1k} x_1 \quad ; \quad k = m+1, \dots, n \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

Quando $\xi \neq 0$ a solução do P.V.I. acima é dada por

$$x_1(t) = x_1^0 e^{\xi t} \quad ; \quad x_k(t) = \frac{a_{1k}}{\xi} x_1^0 e^{\xi t} + x_k^0 - \frac{a_{1k}}{\xi} x_1^0 \quad k = m+1, \dots, n$$

ou seja, são retas na direção do campo e, portanto, não tem fecho compacto. O caso em que $\xi = 0$ tem solução dada por $x_1(t) = x_1^0$ e $x_k(t) = a_{1k} x_1^0 t + x_k^0$, que também é uma reta.

Neste último caso, poderíamos pensar sobre a possibilidade de que todos os a_{1k} sejam nulos, de modo que a órbita por x_0 seria um único ponto e portanto compacta. Mas é fácil ver que isso não pode ocorrer, pois como já vimos, as únicas órbitas que são pontos são aquelas passando por $y_0 \in V(L)$.

Caso 2: $\xi \neq 0 \neq \eta$.

Como $m(L^0)$ é uma matriz real, e $\xi + i\eta$ é um autovalor complexo, então a forma canônica de Jordan desta matriz pode ser tomada como:

$$m(L^0) = \begin{pmatrix} \xi & -\eta & \vec{0} \\ \eta & \xi & \vec{0} \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

⁵Se um dado campo $X : M \rightarrow TM$ é tangente à uma subvariedade N , então dado um ponto $x_0 \in N$, segue que a órbita que passa por este ponto está inteiramente contida em N .

Assim, escrevendo L da forma (3.1.3), temos

$$\begin{aligned} L_1 &= \xi \frac{\partial}{\partial x_1} - \eta \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{k=m+1}^n a_{1k} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ L_2 &= \eta \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{k=m+1}^n a_{2k} \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Vamos fazer a mudança de variável⁶ $\tilde{x}_j = x_j$ se $j = 1, \dots, m$ e

$$\tilde{x}_j = x_j - \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} ((\xi a_{1j} + \eta a_{2j})x_1 + (-\eta a_{1j} + \xi a_{2j})x_2)$$

quando $j = m+1, \dots, n$.

Claramente, para $3 \leq j \leq m$ temos que $L_1(\tilde{x}_j) = L_2(x_j) = 0$. Além disso, observe que para $j > m$ temos

$$\begin{aligned} L_1(\tilde{x}_j) &= \xi \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_1} - \eta \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_2} + \sum_{k=m+1}^n a_{1k} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_k} \\ &= -\xi \left(\frac{\xi a_{1j} + \eta a_{2j}}{\xi^2 + \eta^2} \right) - \eta \left(\frac{\eta a_{1j} - \xi a_{2j}}{\xi^2 + \eta^2} \right) + a_{1j} = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, para $j = 1$ ou $j = 2$ temos $L_1(\tilde{x}_1) = \xi$ e $L_1(\tilde{x}_2) = -\eta$. Obtemos então

$$\tilde{L}_1 = \sum_{j=1}^n L_1(\tilde{x}_j) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} = \xi \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} - \eta \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}$$

analogamente, obtemos:

$$\tilde{L}_2 = \eta \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + \xi \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}$$

⁶Lembrando que uma mudança de variável $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se manifesta no campo de vetores através do *pushforward*. Escrevendo $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ e $L = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{jk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$, segue da definição do *pushforward* que

$$\varphi_* L(y) = (d\varphi)_x L(x) = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_l}(x) \right)_{k,l} \left(\sum_{j=1}^m a_{jl} x_j \right)_l = \left(\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_k}{\partial x_l} a_{jl} x_j \right)_k = (L(y_k))_k = \sum_{k=1}^n L(y_k) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

Neste novo sistema de coordenadas, fazendo $x_j = \tilde{x}_j$

$$L = x_1 \left(\xi \frac{\partial}{\partial x_1} - \eta \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + x_2 \left(\eta \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \sum_{j=3}^m x_j L_j \quad (3.2.2)$$

Observe que o campo (3.2.2) é tangente ao espaço

$$\dot{V} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + x_2^2 \neq 0; x_3 = \cdots x_m = 0\}$$

portanto,

$$L|_{\dot{V}} = x_1 \left(\xi \frac{\partial}{\partial x_1} - \eta \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + x_2 \left(\eta \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Queremos agora passar para coordenadas polares ($x_1 = r \cos \theta$ e $x_2 = r \sin \theta$). Note que em $\dot{V}$ esta mudança de coordenadas está bem definida pois retiramos a origem. Como já observamos a forma correta de realizar a mudança de variáveis é através do *pushforward*. Neste caso, o difeomorfismo $(x_1, x_2) \mapsto (r, \theta)$ possui uma expressão não muito agradável, então utilizaremos o difeomorfismo inverso para explicitar a mudança de variáveis. Para facilitar a notação escreva

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r} \quad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

então,

$$\begin{cases} \partial_r = (\partial_r x_1) \partial_1 + (\partial_r x_2) \partial_2 \\ \partial_\theta = (\partial_\theta x_1) \partial_1 + (\partial_\theta x_2) \partial_2 \end{cases}$$

logo,

$$\begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$$

Invertendo a matriz obtemos

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \end{pmatrix}$$

daí

$$\begin{cases} \partial_1 = \cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \\ \partial_2 = \sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} L|_V &= r \cos \theta \left(\xi (\cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta) - \eta (\sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta) \right) \\ &\quad + r \sin \theta \left(\eta (\cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta) + \xi (\sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta) \right) \\ &= \xi r \frac{\partial}{\partial r} - \eta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

que tem como orbitas as espirais $\gamma(t) = (r, \theta)$, onde $r(\theta) = r_0 \exp(-\eta^{-1}\xi\theta)$ e $\theta(t) = \eta t$, que não são limitadas e, portanto, não tem fecho compacto.

Caso 3: $\xi = 0$ e a parte nilpotente de $m(L)$ não se anula.

Como já vimos, se $m(L^0)$ possui algum autovalor real, ou de parte real não nula, temos que existem L -órbitas ilimitadas e, portanto, de fecho não compacto. Vamos supor então que todos os autovalores de $m(L^0)$ são puramente imaginários. Logo, escrevendo $m(L)$ na forma canônica de Jordan, temos

$$m(L) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & B_l & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

onde cada B_j é um bloco de Jordan associado a um autovalores puramente imaginário $i\eta_j$ de multiplicidade algébrica b_j . Claramente temos

$$m(L^0) = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_l \end{pmatrix}$$

Como a parte nilpotente de $m(L)$ não se anula, então existe um autovalor $i\eta$ com multiplicidade geométrica estritamente menor que a algébrica. Podemos supor, sem

perda de generalidade que $\eta = \eta_1$ e, portanto, podemos escrever

$$m(L) = \begin{pmatrix} 0 & -\eta & 0 & 0 & \vec{0} \\ \eta & 0 & 0 & 0 & \vec{0} \\ 1 & 0 & 0 & -\eta & \vec{0} \\ 0 & 1 & \eta & 0 & \vec{0} \\ 0 & 0 & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

assim

$$L = \eta \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (3.2.4)$$

$$+ x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j=5}^m x_j L_j \quad (3.2.5)$$

Observe que o campo na forma (3.2.4) é tangente à $\dot{V} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \neq 0; x_5 = \dots = x_m = 0\}$ e portanto

$$L|_{\dot{V}} = (-\eta x_2 + x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\eta x_1 + x_4) \frac{\partial}{\partial x_2} + (-\eta x_4) \frac{\partial}{\partial x_3} + (\eta x_3) \frac{\partial}{\partial x_4}$$

Assim, a curva γ em $\dot{V}$ parametrizada por

$$x_1(t) = \frac{t}{\eta} \cos t; \quad x_2(t) = \frac{t}{\eta} \sin t; \quad x_3(t) = \cos t; \quad x_4(t) = \sin t$$

é tangente à L e, portanto, obtemos novamente uma L -órbita de fecho não compacto.

Reciprocamente, vamos supor agora que (iii) seja satisfeita. Como todos os autovalores de $m(L^0)$ são puramente imaginários, podemos supor que $m(L)$ é da forma (3.2.3). Mas $m(L^0)$ tem parte nilpotente nula, logo, cada autovalor complexo de $m(L^0)$ tem multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica e assim, cada bloco de Jordan B_j é da forma

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_j \\ \eta_j & 0 \end{pmatrix}$$

com $j = 0, \dots, p$ e $m = 2p$. Nestas coordenadas temos:

$$L^0 = \sum_{j=1}^p \eta_j \left(x_{2j-1} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} - x_{2j} \frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} \right); \quad (3.2.6)$$

portanto,

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{j=1}^p \eta_j \left(x_{2j-1} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} - x_{2j} \frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} \right) + \sum_{s=1}^{2p} \sum_{l=m+1}^n x_s a_{sl} \frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{j=1}^p \eta_j \left(x_{2j-1} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} - x_{2j} \frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} \right) + \sum_{j=1}^p \sum_{l=m+1}^n (x_{2j-1} a_{2j-1,l} + x_{2j} a_{2j,l}) \frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{j=1}^p \eta_j \left(x_{2j-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_{2j}} + \sum_{l=m+1}^n \frac{a_{2j-1,l}}{\eta_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - x_{2j} \left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} - \sum_{l=m+1}^n \frac{a_{2j,l}}{\eta_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^p \eta_j \left(x_{2j-1} L_{2j} - x_{2j} L_{2j-1} \right)
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
L_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l=2p+1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{\eta_{\lfloor k/2 \rfloor}} a_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l=2p+1}^n b_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} \quad k = 1, \dots, 2p.
\end{aligned}$$

A mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \tilde{x}_k = x_k & k = 1, \dots, 2p \\ \tilde{x}_j = x_j - \sum_{l=2p+1}^n b_{lj} x_l & j = 2p+1, \dots, n \end{cases}$$

transforma L_k em $\tilde{L}_k = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k}$ de modo que, após retirar o til, nas novas coordenadas, L tem a forma:

$$L = \sum_{j=1}^p \eta_j \left(x_{2j-1} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} - x_{2j} \frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} \right).$$

Fazendo a seguinte mudança de coordenadas

$$x_{2j-1} = r_j \cos \theta_j; \quad x_{2j} = r_j \sin \theta_j; \quad j = 1, \dots, p$$

obtemos

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^p \eta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}. \quad (3.2.7)$$

Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denote por $|x|_j$ a seminorma

$$|x|_j^2 = x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2 \quad ; \quad j = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor^7$$

Observe que a L -órbita passando por um ponto $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \setminus V(L)$ é uma curva pelo toro

$$(\tilde{\mathbb{T}})^p(q) := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus V(L); |x|_j^2 = |q|_j^2 \text{ e } x_l = q_l; \quad j = 1, \dots, p \text{ e } l = 2p+1, \dots, n\}, \quad (3.2.8)$$

pois L não possui componentes radiais e, portanto, o fecho de uma L -órbitas em $\mathbb{R}^n \setminus V(L)$ é sempre compacto. □

Corolário 3.4. Se o $\text{div } L \neq 0$, então existe uma L -órbita em $\mathbb{R}^n \setminus V(L)$ cujo fecho não é compacto em $\mathbb{R}^n \setminus V(L)$

Demonstração: Basta observar que se $\text{div } L \neq 0$ então existe um autovalor de $m(L^0)$ com parte real não nula. □

Observação 3.5. Note que, se (M_1, g_1) e (M_2, g_2) são variedades Riemannianas e $\gamma_j : I \rightarrow M_j$, $j = 1, 2$, são geodésicas, então $(\gamma_1, \gamma_2) : I \rightarrow M_1 \times M_2$ é uma geodésica⁸ de $(M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$. Assim, se considerarmos o toro (3.2.8) como um toro *flat*, isto é, como o produto cartesiano (entre variedades riemannianas com a métrica produto) de diversas circunferências, podemos afirmar que a L -órbita passando pelo ponto q definida pelo campo (3.2.7) é na verdade uma geodésica deste toro, pois essas L -órbitas são da forma $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, onde cada γ_j é uma geodésica do círculo⁹ em $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$x_l = q_l, l = 1, \dots, 2j-2, 2j+1, \dots, n \quad x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2 = |q|_j^2.$$

Segue do Lema 3.3 e da observação acima que (ii), (iii) e (iv) são equivalentes (é trivial que (iv) implica (ii)).

⁷Aqui, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro M tal que $M \leq x$

⁸Ver apêndice A.

⁹Lembrando que as geodésicas do círculo são arcos do círculo parametrizados com velocidade constante.

3.2.2 O caso $\dim V(L) = n - 1$

Nesta subseção, vamos demonstrar que o teorema é verdadeiro se $m = \text{codim} V(L) = 1$. Em particular, observe que m é ímpar, e, portanto, das considerações feitas anteriormente, isso deve implicar que L é localmente resolúvel.

Lema 3.6. Se X é um campo de vetores com coeficientes (não todos nulos) constantes e, se h é uma função analítica em um aberto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então o campo $h(x)X$ é localmente resolúvel em Ω .

Demonstração: Um "famoso" resultado provado por Lojasiewicz [1959] afirma que é possível dividir uma distribuição arbitrária por uma função analítica, isto é, dada h analítica e $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então sempre existe solução $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para o problema $h(x)u = v$. Assim, resolver o problema $h(x)Xu = f$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, é equivalente a resolver o problema $Xu = h^{-1}f$. O teorema de Malgrange-Ehrempreis não é aplicável aqui, pois $h^{-1}f$ não é necessariamente uma função suave de suporte compacto. Precisamos então recorrer ao resultado do Hörmander (Teorema 2.3). Este resultado garante que X é localmente resolúvel em todos os pontos, basta tomar um aberto convexo em torno de cada ponto. $\square$

Sabemos que no caso $\dim V(L) = n - 1$, o campo (3.1.1) é da forma

$$L = x_1 L_1 \quad ; \quad L_1 = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

como $h(x) = x_1$ é analítica e L_1 tem coeficientes constantes, segue do lema anterior que L é localmente resolúvel. Note que as órbitas por $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus V(L)$ satisfazem o seguinte sistema de EDOs.

$$\begin{cases} \dot{x}_k = a_k x_1 & ; \quad k = 1, \dots, n \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

daí, temos dois casos:

Caso 1: $a_1 \neq 0$.

Neste caso, $x_1(t) = x_1^0 e^{a_1 t}$ e $x_k(t) = \frac{a_k}{a_1} x_1^0 e^{a_1 t} + x_k^0 - \frac{a_k}{a_1} x_1^0$ e, portanto, as órbitas por x^0 são retas e, portanto, não tem fecho compacto.

Caso 2: $a_1 = 0$.

Neste caso $x_1(t) = x_1^0$ e $x_k(t) = a_k x_1^0 t + x_k^0$. Note que existe $a_k \neq 0$ pois do contrário, o campo seria identicamente nulo. Logo, como no caso anterior, as órbitas são retas.

Assim, no caso $m = \text{codim}V(L) = 1$, temos que o campo L é localmente resolúvel, existem L -órbitas com fecho não compacto e, portanto, não é possível que exista um sistema de coordenadas em que todas as L -órbitas sejam geodésicas de um toro. Provamos assim, que as afirmações (i), (ii) e (iv) do teorema são válidas no caso em que $m = 1$. A equivalência entre as afirmações (ii) e (iii) finaliza a demonstração para o caso $m = 1$.

3.2.3 O caso $m = \text{codim}V(L) \geq 2$

Observe que o Lema 3.3 demonstrado anteriormente, seu subsequente corolário e observação são válidos para quaisquer valor de $m = \text{codim}V(L)$. Assim, as afirmações (ii), (iii) e (iv) do Teorema 3.2 são equivalentes. Resta então mostrar que (i) é equivalente a (ii) (ou a (iii)) quando $m \geq 2$. Observe ainda que como L é invariante por translação em $V(L)$, temos que a propriedade (i) é equivalente à L não ser localmente resolúvel na origem.

No que se segue, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ e $\| \cdot \|_{L^2}$ denotam o produto interno e a norma em $L^2(\Omega)$ respectivamente.

Lema 3.7. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Suponha que exista um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes $P(\partial)$ tal que, para algum $C > 0$ e para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq C \|P(\partial)L^\top \varphi\|_{L^2}. \quad (3.2.9)$$

Então $L^2(\Omega) \subset L\mathcal{D}'(\Omega)$. Mais precisamente, existe uma aplicação contínua $\tilde{E} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ tal que

$$LP(\partial)\tilde{E}^\top f = f, \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

Demonstração: Segue da estimativa (3.2.9) que a aplicação

$$E : P(\partial)L^\top C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C_c^\infty(\Omega) \quad (3.2.10)$$

$$P(\partial)L^\top \varphi \mapsto \varphi \quad (3.2.11)$$

está bem definida¹⁰ e se estende (pelo teorema de Hahn-Banach) a uma aplicação linear

¹⁰Se $P(\partial)L^\top \varphi = P(\partial)L^\top \psi$, então $\|\varphi - \psi\| \leq C \|P(\partial)L^\top(\varphi - \psi)\| = 0$, daí, $\varphi = \psi$, exceto em um conjunto de medida nula, mas como são contínuas, segue que $\varphi = \psi$.

contínua $\tilde{E} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ com a propriedade de que $\tilde{E}P(\partial)L^\top\varphi = \varphi$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Assim:

$$\begin{aligned}\langle LP(-\partial)\tilde{E}^\top f, \varphi \rangle &= \langle P(-\partial)\tilde{E}^\top f, L^\top\varphi \rangle = \langle \tilde{E}^\top f, P(\partial)L^\top\varphi \rangle \\ &= \langle f, \tilde{E}P(\partial)L^\top\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle\end{aligned}$$

e, portanto, $LP(-\partial)\tilde{E}^\top f = f$ para toda $f \in L^2(\Omega)$ ¹¹. Em particular, L é localmente resolúvel em Ω .

□

Lema 3.8. Seja φ função suave de suporte compacto. Então

$$2\Re\langle L^\top\varphi, \varphi \rangle_{L^2} = -(\operatorname{div} L)\|\varphi\|_{L^2}^2.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in C_c^\infty$, então

$$\begin{aligned}\langle L^\top\varphi, \varphi \rangle_{L^2} &= \langle \varphi, L\varphi \rangle_{L^2} = \int (L\varphi)\overline{\varphi}dx \\ &= \int \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}x_j \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}(x)\overline{\varphi}(x)dx = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \int x_j \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}(x)\overline{\varphi}(x)dx.\end{aligned}$$

Note que se $j \neq k$ temos

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\doteq \int x_j \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}(x)\overline{\varphi}(x)dx_k = x_j \int \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}(x)\overline{\varphi}(x)dx_k \\ &= -x_j \int \varphi(x) \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x^k}(x)dx_k = -\overline{\mathcal{I}}\end{aligned}$$

e, portanto, $\Re(\mathcal{I}) = 0$.

No caso em que $j = k$ temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &\doteq \int x_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\overline{\varphi}(x)dx_j = - \int \varphi(\overline{\varphi} + x_j \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_j})dx_j \\ &= - \int \varphi(x)\overline{\varphi}(x)dx_j - \overline{\mathcal{J}},\end{aligned}$$

¹¹Onde a igualdade em questão é no sentido das distribuições

e assim $2\Re(\mathcal{J}) = -\int |\varphi|^2 dx_j$. Segue então que:

$$\begin{aligned} 2\Re\langle L^\top \varphi, \varphi \rangle_{L^2} &= \sum_{j=1}^m 2a_{jj} \Re \int x_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}(x) \overline{\varphi}(x) dx \\ &= -\sum_{j=1}^m a_{jj} \int |\varphi|^2 dx = -(\operatorname{div} L) \|\varphi\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.9. Seja L o campo de vetores (3.1.2). Se $\operatorname{div} L \neq 0$ então L é localmente resolúvel.

Demonstração: Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz ao Lema 3.8 obtemos:

$$|\operatorname{div} L| \|\varphi\|_{L^2}^2 = |2\Re\langle L^\top \varphi, \varphi \rangle_{L^2}| \leq 2\|L^\top \varphi\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}.$$

Segue então do Lema 3.7 que existe aplicação linear contínua $E : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $LE^\top f = f$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

□

O próximo passo da demonstração do Teorema 3.2 é provar que se os autovalores de $m(L^0)$ tem parte real não nula ou $m(L^0)$ tem parte nilpotente não nula, então L é localmente resolúvel. Para concluirmos isso, iremos obter desigualdades do tipo (3.2.9) e aplicaremos o Lema 3.7. Neste contexto, os lemas a seguir serão úteis para se obter estas desigualdades.

Lema 3.10. Sejam $P(D)$ uma derivada direcional na direção v e $[v] \subset \mathbb{R}^n$ o subespaço linear gerado por v . Seja ainda W o espaço ortogonal a $[v]$ e defina $B_R \subset \mathbb{R}^n$ dado por

$$B_R = \{x = \lambda v \oplus y \in [v] \oplus W = \mathbb{R}^n; \lambda \in \mathbb{R}; |\lambda| < \frac{R}{2}\}.$$

Então, para cada $R \in \mathbb{R}_+$, existe constante C_R tal que

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq C_R \|P(D)\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(B_R)$$

Mais precisamente, basta tomar $C_R = 2R$.

Demonstração: Segue do teorema fundamental do cálculo que

$$\varphi(x) - \varphi(x - Rv) = \int_{-R}^0 \frac{d}{ds} [\varphi(x + sv)] ds = \int_{-R}^0 P(D)\varphi(x + sv) ds$$

assim, segue do Lema B.14

$$\begin{aligned} \|\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot - Rv)\|_{L^2} &= \left\| \int_{-R}^0 P(D)\varphi(x + sv) ds \right\|_{L^2} \leq \int_{-R}^0 \|P(D)\varphi(x + sv)\|_{L^2} ds \\ &= \int_{-R}^0 \|P(D)\varphi\|_{L^2} ds = R\|P(D)\varphi\|_{L^2}, \end{aligned}$$

onde a norma L^2 acima é com respeito à variável x . Note que, se φ tem suporte em B_R , então, $\varphi(x - Rv) = 0$ para todo $x \in B_R$ e, portanto, fixando o suporte de φ obtemos:

$$\|\varphi\|_{L^2} = \|\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot - Rv)\|_{L^2} \leq R\|P(D)\varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(B_R).$$

□

Lema 3.11. Seja uma vizinhança da origem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e denotemos por $\bar{\partial}$ o seguinte operador nas duas primeiras variáveis

$$\bar{\partial}\varphi \doteq \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}.$$

Para cada $R > 0$ defina $\tilde{B}_R \doteq \{x \in \Omega; \max\{|x_1|, |x_2|\} < R/2\}$ então, existe $C_R > 0$ tal que:

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq C_R \|\bar{\partial}\varphi\|_{L^2}; \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\tilde{B}_R).$$

Demonstração: Seja $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \in C_c^\infty(\tilde{B}_R)$. Temos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + i \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}$$

assim, $\bar{\partial}\varphi = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + i \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + i \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} |\bar{\partial}\varphi|^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right) \\ &= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|^2 - 2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right), \end{aligned}$$

integrando por partes, temos que

$$\int_{B_R} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx = 0,$$

e assim

$$\|\bar{\partial}\varphi\|_{L^2}^2 = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\|_{L^2}^2. \quad (3.2.12)$$

Basta agora aplicar o Lema 3.10 à cada uma destas derivadas direcionais, e obtemos

$$\|\bar{\partial}\varphi\|_{L^2}^2 = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{R^2}\|\varphi\|^2 + \frac{1}{R^2}\|\varphi\|^2 = \frac{2}{R^2}\|\varphi\|^2$$

para toda $\varphi \in \tilde{B}_R$, de modo que

$$\|\varphi\| \leq R\sqrt{2}/2\|\bar{\partial}\varphi\| \quad \forall \varphi \in \tilde{B}_R,$$

como queríamos demonstrar. □

Como já verificamos o caso $m = 1$, vamos supor, daqui em diante, que $m \geq 2$. Iremos primeiramente mostrar que $(i) \Rightarrow (iii)$, isto é, mostrar que se $m(L^0)$ possui autovalores com parte real não nula ou $m(L^0)$ tem parte nilpotente não nula, então L é localmente resolúvel em $V(L)$. O caso em que $\operatorname{div} L \neq 0$ segue do Corolário 3.9. Portanto, no que se segue vamos nos restringir ao caso em que $\operatorname{div} L = 0$,

Lema 3.12. Seja L o campo de vetores (3.1.2). Suponha que $\operatorname{div} L = 0$. Então $L^T = -L$.

Demonstração: Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty$, então:

$$\begin{aligned} \langle L^\top u + Lu, \varphi \rangle &= \langle u, L\varphi \rangle + \langle Lu, \varphi \rangle = \left\langle u, \sum_{j,k} a_{jk} x_j \partial_k \varphi \right\rangle + \left\langle \sum_{j,k} a_{jk} x_j \partial_k u, \sum_{j,k} a_{jk} x_j \partial_k \varphi \right\rangle \\ &= \sum_{j,k} a_{jk} (\langle u, x_j \partial_k \varphi \rangle + \langle x_j \partial_k u, \varphi \rangle) = \sum_{j,k} a_{jk} (\langle u, x_j \partial_k \varphi \rangle - \langle u, \partial_k (x_j \varphi) \rangle) \\ &= \sum_{j=k} a_{jj} (\langle u, x_j \partial_j \varphi \rangle - \langle u, \varphi + \partial_k \varphi \rangle) = \sum_{j=k} a_{jj} \langle u, \partial_j \rangle = \operatorname{div}(L) \langle u, \varphi \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.13. Seja L um campo de vetores da forma (3.1.2). Suponha que $\operatorname{div} L = 0$ e que $m(L^0)$ possua um autovalor $\xi + \eta i$ com $\xi \neq 0 \neq \eta$. Então L é localmente resolúvel em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Como já vimos, nas condições acima o campo L pode ser assumido como da forma (3.2.2). Derivando com respeito à x_1 e x_2 separadamente obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}L &= L\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi\frac{\partial}{\partial x_1} - \eta\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2}L &= L\frac{\partial}{\partial x_2} + \eta\frac{\partial}{\partial x_1} - \xi\frac{\partial}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Multiplicando a segunda equação por i e somando as duas equações obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)L = L\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + (\xi + \eta i)\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Denotemos por $\tilde{P}(\partial) = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}$. Temos assim que

$$\tilde{P}(\partial)(L\varphi) = L\tilde{P}(\partial)\varphi + (\xi + \eta i)\tilde{P}(\partial)\varphi \quad (3.2.13)$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Temos ainda que

$$\Re\langle L\tilde{P}(\partial)\varphi + (\xi + \eta i)\tilde{P}(\partial)\varphi, \tilde{P}(\partial)\varphi \rangle_{L^2} = \xi\|\tilde{P}(\partial)\varphi\|_{L^2}^2$$

e, portanto,

$$\Re\langle \left(\tilde{P}(\partial)\right)^2 L\varphi, \varphi \rangle_{L^2} = \xi\|\tilde{P}(\partial)\varphi\|_{L^2}^2.$$

Aplicando o Lema 3.11 no lado direito da equação acima e a desigualdade de Cauchy-Riemann no lado esquerdo da identidade obtemos uma desigualdade que atende as hipóteses do Lema 3.7 obtendo então o resultado desejado.

□

Proposição 3.14. Seja L o campo de vetores (3.1.1) com $\operatorname{div} L = 0$ e suponha que $m(L^0)$ possui um autovalor real $\xi \neq 0$, então L é localmente resolúvel em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Observe que nas condições do teorema, podemos supor que L é da forma (3.2.1). Definindo, então, o operador $P(D)$ por

$$P(D) = \xi\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{k=m+1}^n a_{1k}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

temos que $P(D)L = (L + \xi)P(D)$. Lembrando que $\operatorname{div} L = 0$, temos

$$\Re\langle (L + \xi)\varphi, \varphi \rangle_{L^2} = -\langle L^T\varphi, \varphi \rangle_{L^2} + \xi\langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2} = \xi\|\varphi\|_{L^2}^2.$$

assim,

$$\Re \langle P(D)^2 L\varphi, \varphi \rangle_{L^2} = -\Re \langle (L + \xi)P(D)\varphi, P(D)\varphi \rangle_{L^2} = -\xi \|P(D)\varphi\|_{L^2}^2. \quad (3.2.14)$$

Aplicando o Lema 3.10, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^2}^2 &\leq n^2 \|P(D)\varphi\|_{L^2}^2 \leq n^2 \Re \langle P(D)^2 L\varphi, \varphi \rangle_{L^2} \\ &\leq n^2 \left\| \langle P(D)^2 L\varphi, \varphi \rangle_{L^2} \right\|_{L^2} \leq n^2 \|P(D)^2 L\varphi\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \end{aligned}$$

e, portanto, $\|\varphi\| < C \|P(D)^2 L\varphi\|$ para qualquer φ com suporte em $B_{n/2}(0)$. O resultado segue então do Lema 3.7. □

Proposição 3.15. Seja L o campo de vetores (3.1.1) com $\operatorname{div} L = 0$ e suponha que $m(L^0)$ possui um autovalor nulo, então L é localmente resolúvel em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Como já foi visto anteriormente, nas condições da proposição o campo é da forma:

$$L = x_1 \sum_{k=m+1}^n a_{1k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=2}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Denote $P(D) = \sum_{k=m+1}^n a_{1k} \frac{\partial}{\partial x_k}$. Note que $P(D)^T = -P(D)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} L\varphi &= P(D)\varphi + L \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ P(D)(L\varphi) &= L(P(D)\varphi). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle L\varphi, P(D) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle_{L^2} &= -\langle LP(D)\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle_{L^2} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} (LP(D)\varphi), \varphi \right\rangle_{L^2} \\ &= \left\langle P(D)^2 \varphi + LP(D) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle_{L^2} \\ &= \langle P(D)^2 \varphi, \varphi \rangle_{L^2} + \left\langle LP(D) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle_{L^2} \\ &= -\|P(D)\varphi\|_{L^2}^2 - \left\langle P(D) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, L\varphi \right\rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$2\Re\left(\left\langle L\varphi, P(D)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle_{L^2}\right) = \left\langle L\varphi, P(D)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle_{L^2} + \overline{\left\langle L\varphi, P(D)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\rangle_{L^2}} = -\|P(D)\varphi\|_{L^2}^2.$$

Podemos então proceder como na demonstração anterior e concluir que L é localmente resolúvel.

□

Resta agora considerarmos o caso em que todos os autovalores não nulos de $m(L)$ são puramente imaginários.

Proposição 3.16. Seja L um campo de vetores tal que todos os autovalores de $m(L^0)$ sejam puramente imaginários. Suponha ainda que a parte nilpotente de $m(L^0)$ não seja identicamente nula. Então L é localmente resolúvel em todos os pontos de $V(L)$.

Demonstração: Como já vimos, nas condições acima podemos supor, sem perda de generalidade, que a matriz $m(L)$ é da forma

$$m(L) = \begin{pmatrix} 0 & -\eta & 0 & 0 & \vec{0} \\ \eta & 0 & 0 & 0 & \vec{0} \\ 1 & 0 & 0 & -\eta & \vec{0} \\ 0 & 1 & \eta & 0 & \vec{0} \\ 0 & 0 & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

e, portanto, o campo L é dado por:

$$L = \eta \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (3.2.15)$$

$$+ x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j=5}^m x_j L_j. \quad (3.2.16)$$

Derivando em relação às quatro primeiras variáveis obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(L\varphi) &= L \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}; \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(L\varphi) &= L \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \eta \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}; \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(L\varphi) &= L \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \eta \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}; \\ \frac{\partial}{\partial x_4}(L\varphi) &= L \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} - \eta \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Das propriedades do produto interno em $L^2(\mathbb{R}^n)^{12}$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}(L\varphi), \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} &= \left\langle L\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi\right), \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} + \eta \left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\|_{L^2}^2 \\
&= -\left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}\varphi, L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\right) \right\rangle_{L^2} + \eta \left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\|_{L^2}^2 \\
&= -\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}(L\varphi) \right\rangle_{L^2} - \eta \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\rangle_{L^2} \right) + \\
&\quad + \eta \left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
2\Re \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} + \overline{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2}} \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_3}L\varphi \right\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}L\varphi \right\rangle_{L^2} \\
&= \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\|_{L^2}^2 + \eta \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} \right).
\end{aligned}$$

Analogamente temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\rangle_{L^2} &= -\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}L\varphi \right\rangle_{L^2} + \eta \left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} \right) \\
&\quad - \eta \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$2\Re \left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\rangle_{L^2} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\|_{L^2}^2 - \eta \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} \right).$$

¹²Lembrando que se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, podemos integrar por partes e obtemos $\langle f', g \rangle_{L^2} = \int f' \bar{g} = f \bar{g}|_{-\infty}^{\infty} - \int f \bar{g}' = -\langle f, g \rangle_{L^2}$. É fácil estender o resultado para derivadas parciais em dimensões superiores.

Somando os dois resultados obtemos que para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ vale:

$$2\Re\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\rangle_{L^2}\right) = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\|_{L^2}^2. \quad (3.2.17)$$

Note que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_3}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_4}L\varphi, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\rangle_{L^2} = \left\langle P_1(D)L\varphi, \varphi \right\rangle_{L^2},$$

onde $P_1(D) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_4}$. Já mostramos que $\|P(D)\varphi\| \geq \tilde{C}_r\|\varphi\|$ para $P(D)$ uma derivada direcional e φ com suporte na bola de raio r (Lembrando que a constante $\tilde{C}_r$ depende da direção da derivada $P(D)$).

Restringindo então o domínio das funções testes, podemos repetir as contas da demonstração da Proposição 3.14 para obtermos

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \right\|_{L^2}^2 \geq C_r\|\varphi\|,$$

para $\varphi \in C_c^\infty(B_r(0))$, sendo C_r é uma constante que depende apenas do domínio $B_r(0)$ onde as funções não se anulam (Esta constante é a soma das constantes obtidas para as derivadas direcionais nas direções ∂_{x_1} e ∂_{x_2}). Aplicando então a desigualdade de Cauchy-Schwarz à equação (3.2.17) estamos em condições de usar o Lema 3.7 e segue o resultado. □

Acabamos de provar então a seguinte implicação do resultado principal (Teorema 3.2):

$$(i) \Rightarrow (iii),$$

onde (i) e (iii) estão repetidos abaixo.

(i) L não é localmente resolúvel em nenhum ponto de $V(L)$;

(iii) O espectro de $m(L)$ é puramente imaginário e sua parte nilpotente é nula.

Para finalizar a prova do nosso resultado principal vamos demonstrar que $(iii) \Rightarrow (i)$.

Proposição 3.17. Se todos os autovalores de $m(L)$ são puramente imaginários e a parte nilpotente de $m(L)$ se anula, então L não é localmente resolúvel em nenhum ponto de $V(L)$.

Demonstração: Como a parte real dos autovalores de $m(L)$ é sempre zero, segue que

$$\operatorname{div}(L) = \operatorname{Tr}(m(L)) = \sum_{\lambda \in \sigma(m(L))} \Re \lambda = 0.$$

Portanto, como já vimos, $L^\top = -L$. Além disso, da equação (3.2.7), podemos assumir que

$$L = \sum_{j=1}^p \eta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}.$$

Denotemos por $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ e por $\tilde{\Omega} = \mathbb{D}^p \times \mathbb{R}^{n-2p}$. Temos que $L : \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$. Após uma pequena mudança de coordenadas, podemos acumular as variáveis angulares nas primeiras coordenadas, de modo que $\tilde{\Omega} \cong \Omega = \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{n-2p}$, assim, podemos considerar L como um operador atuando em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $L^\top = -L$ um operador atuando em $C_c^\infty(\Omega)$. Sejam $\tau_j : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, p$ funções suaves e $\psi : \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{n-2p} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função suave de suporte compacto. Defina então a seguinte função $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\phi(\theta, r, \tilde{x}) = (\tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_p \otimes \psi)(\theta, r, \tilde{x}) = \tau_1(\theta_1) \dots \tau_p(\theta_p) \psi(r, \tilde{x}).$$

Suponha então que $\tau_j \equiv 1$ para todo j . Neste caso, temos que $\phi \in \operatorname{Ker}(L^\top)$, uma vez que

$$L^\top \phi = -L\phi = \sum_{j=1}^p \eta_j \frac{\partial \phi}{\partial \theta_j} = \sum_{j=1}^p \eta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \psi(r, \tilde{x}) = 0,$$

pois ψ não depende de θ .

Suponha que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $F \in C_c^\infty(\Omega)$ são tais que $Lu = F$. Isso quer dizer que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vale:

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle Lu, \varphi \rangle = -\langle u, L\varphi \rangle.$$

Em particular, para $\varphi = \phi$ temos que

$$\begin{aligned} 0 = -\langle u, L\phi \rangle &= \langle F, \phi \rangle = \int_{\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{n-2p}} F(\theta, r, \tilde{x}) \phi(r, \tilde{x}) d\tilde{x} dr d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{n-2p}} \psi(r, \tilde{x}) \int_{\mathbb{T}^p} F(\theta, r, \tilde{x}) d\theta dr d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Segue da arbitrariedade de ψ que

$$\int_{\mathbb{T}^p} F(\theta, r, \tilde{x}) d\theta = 0.$$

Se estivermos considerando F como uma função em coordenadas cartesianas, então, após uma mudança de coordenadas temos:

$$\int_{\mathbb{T}^p} F(r_1 \cos \theta, \dots, r_p \sin \theta_p, \tilde{x}) d\theta_1 \dots d\theta_p = 0.$$

Ou seja, para que $F \in C_c^\infty$ possua solução $u \in \mathcal{D}'$, F precisa satisfazer condições de compatibilidade e, portanto, L não é localmente resolúvel.

□

3.3 Comentários sobre uma demonstração alternativa

Quase duas décadas antes da prova do Teorema 3.2 por Treves, Müller [1992] demonstrou a equivalência das afirmações (i) e (iii). Mais que isso, Müller considerou uma perturbação do operador L e demonstrou o seguinte resultado:

Teorema 3.18. *Seja $A = (a_{ij})_{i,j}$ e considere o operador*

$$L_{A,b} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} + b$$

Então, $L_{A,b}$ é localmente resolúvel na origem se, e somente se, ele for $\mathcal{S}$ resolúvel, isto é, $\mathcal{S} \subset L_{A,b} \mathcal{S}'$, e isto ocorre exatamente quando uma das condições a seguir é verdadeira

- (i) $b \notin i\mathbb{R}$
- (ii) $\sigma(A) \not\subset i\mathbb{R}$
- (iii) A não é semisimples
- (iv) $b \in i\mathbb{R}$, $\sigma(A) = \{i\rho_1, \dots, i\rho_s\} \subset i\mathbb{R}$, A é semisimples e os autovalores A , satisfazem a seguinte estimativa

$$|ib - \sum_{i\rho_j \in \sigma(A); \rho_j > 0} l_j \rho_j| \geq c(1 + |l|)^{-m}$$

onde $c > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ independem de $l = (l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{Z}_+^r$.

As técnicas utilizadas para a demonstração deste resultado foram bastante distintas das utilizadas por Treves e, nesta seção, iremos apresentar uma das idéias fundamentais da demonstração do Müller.

Nesta seção, iremos presumir uma certa familiaridade com a teoria de grupos de Lie e álgebras de Lie. Mais precisamente, vamos trabalhar com o grupo de Heisenberg e sua álgebra de Lie associada. Para uma introdução às definições mais básicas, ver apêndice C.3. Para maiores informações, consultar Humphreys [1978].

Sejam $\mathbb{H}_n$ o grupo de Heisenberg e $\mathfrak{h}_n$ a álgebra de Heisenberg. Seja ainda $\tau = \text{ind}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{H}_n} \chi$ a representação de $\mathbb{H}_n$ em $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ induzida¹³ por $\chi(0, 0, u) = e^{2\pi i u}$ no centro $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{H}_n$. A representação derivada também será denotada por τ , e como sabemos, esta representação pode ser estendida (de maneira única) à $\mathfrak{U}(\mathfrak{h}_n)$. Onde $\mathfrak{U}(\mathfrak{h}_n)$ denota a "álgebra envelopante universal" de $\mathfrak{h}_n$. Iremos denotar, para $a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{h}_n)$, $\tilde{a} = \tau(a)$.

Considere ainda $\pi_h : \mathbb{H}_n \rightarrow \text{Aut}(L^2(\mathbb{R}^n))$ a representação de Schrödinger. Vamos denotar também por π_h a sua representação derivada e a representação integral de Schrödinger. Neste último caso, temos que, para $F \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, $\pi_h(F)$ é um operador integral com Kernel dado por

$$K_F(x, y) = \frac{2\pi}{h} \mathcal{F}_1^{-1} F\left(\frac{x+y}{4\pi}, \frac{y-x}{h}\right)$$

Uma ideia central no artigo do Müller é que a representação de Schrödinger preserva a propriedade de existência de solução fundamental. Mais especificamente, escolhendo h conveniente e denotando $\pi = \pi_h$ temos:

Teorema 3.19. *Se $\tilde{a} = \tau(a)$ possui solução fundamental $F \in \mathcal{S}'$, então $K_F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ é solução fundamental para o operador $\pi(a)$, no seguinte sentido:*

Seja $T_{K_F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a aplicação contínua dada pelo kernel K_F . Então,

$$\pi(a)(T_{K_F}\varphi) = \varphi \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, vale a recíproca, se $K = K_F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ é solução fundamental para $\pi(a)$, então F é solução fundamental para $\tilde{a}$.

¹³Para saber mais sobre as representações induzidas, consultar o capítulo 6 de Folland [1994]

Assim, denote por $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, U$ a base canônica da álgebra de Heisenberg e $V_1, \dots, V_{2n}$ os campos de vetores $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ nesta ordem. Sejam $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -A^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$ uma matriz associada à uma forma simplética. Consideremos os operadores em $\mathbb{H}_n$ da seguinte forma

$$\Delta_S = V(SJ)V^\top = \sum_{i,j} a_{ij} V_i V_j$$

Seja ainda $Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\pi}I_n \\ \sqrt{2\pi}I_n & 0 \end{pmatrix}$. Defina $S^0 = QSQ^{-1}$. Então, S^0 também pertence a $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$ e possui as mesmas propriedades espectrais de S . Seja D o operador dado por,

$$D = -i \sum_{k,l=1}^n b_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + 2 \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_l \frac{\partial}{\partial x_k} + i \sum_{k,l=1}^n c_{kl} x_k x_l + d,$$

então,

$$2\pi i D = \pi(\Delta_{S^0} + (d - \text{tr} A)U) = \pi(a) \quad \text{com} \quad \tilde{a} = \tilde{\Delta}_{S^0} + 4\pi\alpha \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{i}{2}(d - \text{tr} A)$$

No caso particular em que S é da forma $S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^\top \end{pmatrix}$, temos $4\pi i L_{A,d} = \pi(a)$. Observe que o operador Δ_S é invariante pela esquerda, pois cada V_j é invariante pela esquerda. Logo, $\Delta_S \in \mathfrak{U}(\mathfrak{h}_n)$, assim, é possível obter informações sobre a resolubilidade de $L_{A,d}$ a partir de informações sobre a resolubilidade de $\tilde{a}$. Os operadores Δ_S foram amplamente estudados em [Müller, Ricci, 1990] e [Müller, Ricci, 1992], fazendo uso de ferramentas como a "transformada simplética de Fourier" e a "convolução torcida", para encontrar fórmulas explícitas para o grupo a um parâmetro gerado pelo operador $(i/4\pi)\tilde{\Delta}_S$. Em Müller [1992], Müller faz uso destas fórmulas explícitas para construir de soluções fundamentais para o operador $\tilde{\Delta}_S + 4\pi\alpha$ em alguns casos, mais especificamente,

Teorema 3.20. *Sejam $S \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$, $S \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Suponha que uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (i) $\alpha \notin \mathbb{R}$
- (ii) $\sigma(S) \not\subset i\mathbb{R}$
- (iii) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma(S) \subset i\mathbb{R}$, e a parte nilpotente N de S tem posto maior ou igual a 3

(iv) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma(S) \subset i\mathbb{R}$ e S é nilpotente, de modo que podemos escrever

$$\Delta_S = - \sum_{j=1}^s \lambda_j (X_j^2 + Y_j^2) \ , \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

com λ_j satisfazendo a estimativa

$$\left| 2\alpha + \sum_{j=1}^s (2l_j + 1)\lambda_j \right| \geq C(1 + |l|)^{-m} \quad \forall l = (l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{Z}_+^s$$

onde $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ não dependem de l .

Então, existe solução fundamental $E_{S,a} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ para o operador $\tilde{\Delta}_S + 4\pi\alpha$.

Este teorema implica a resolubilidade local de $L_{A,d}$ em diversos casos. Os demais casos, não contemplados por este resultado, e a recíproca são demonstrados separadamente utilizando métodos mais clássicos.

Resolubilidade local *flat* de campos vetoriais reais com singularidades isoladas

Lema 4.1. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a matriz

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot I_n + E.$$

Suponha que $\lambda < 0$ e seja $\mu \in (0, -\lambda)$. Então existe uma constante $K \geq 0$ tal que

$$\|e^{J(\lambda)t}\| \leq Ke^{-\mu t} ; \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração:

Observe que

$$e^{J(\lambda)t} = e^{(\lambda I_n + E)t} = e^{\lambda I_n t} e^{Et} = e^{\lambda t} I_n \cdot e^{Et} = e^{\lambda t} I_n \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Et)^k}{k!} \right)$$

¹ porém, E é nilpotente de ordem n , portanto,

$$e^{J(\lambda)t} = e^{\lambda t} \cdot \left(\sum_{k=0}^n \frac{(Et)^k}{k!} \right) = e^{\lambda t} \cdot \left(I_n + Et + \frac{E^2 t^2}{2} + \cdots + \frac{E^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right).$$

Escrevendo $a_i = \frac{\|E^i\|}{i!}$, $g(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}$ e tomando $t \geq 0$ temos,

$$\begin{aligned} \|e^{J(\lambda)t}\| &\leq e^{\lambda t} \cdot \left(\|I_n\| + \|E\|t + \frac{\|E^2\|t^2}{2} + \cdots + \frac{\|E^{n-1}\|t^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\ &= e^{\lambda t} (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}) = e^{-\mu t} e^{(\mu+\lambda)t} g(t). \end{aligned}$$

Como $\mu < -\lambda$ segue que $\mu + \lambda < 0$ e, portanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\mu+\lambda)t} g(t) = 0$. Assim, a função $e^{(\mu+\lambda)t} g(t)$ é limitada. Basta, então, tomar $K > 0$ tal que $e^{(\mu+\lambda)t} g(t) < K$.

□

Existe um lema análogo e com demonstração inteiramente análoga para o caso em que a matriz em questão é um bloco de jordan associado a um autovalor complexo com parte real negativa.

Lema 4.2. Seja $\lambda = \alpha + \beta i$ e considere a matriz

$$J(\lambda) = J(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} I_{\alpha, \beta} & I_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{\alpha, \beta} & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{\alpha, \beta} & I_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_{\alpha, \beta} \end{pmatrix},$$

onde $I_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Suponha que $\alpha < 0$ e $\beta \neq 0$ e seja $\mu \in (0, -\Re \lambda)$. Então existe uma constante $K \geq 0$ tal que

$$\|e^{J(\alpha, \beta)t}\| \leq K e^{-\mu t} ; \quad \forall t \geq 0.$$

Lema 4.3. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ tal que todos os autovalores de A tenham

¹ Observe que foi possível fazer $e^{(\lambda I_n + E)t} = e^{\lambda I_n t} e^{Et}$ pois o produto entre $I_n e E$ é comutativo, isto é: $I_n \cdot E = E \cdot I_n$.

parte real estritamente negativa. Então, existem constantes $\mu > 0$ e $K \geq 0$ tais que

$$\|e^{At}\| \leq Ke^{-\mu t}$$

Demonstração: Seja J_A a forma canônica de Jordan da matriz A e seja $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $A = P^{-1}J_AP$. Observe que $P^{-1}(J_A)^k P = (P^{-1}J_AP)^k$ e, portanto, segue que $e^{At} = P^{-1}e^{tJ_A}P$. Observe que para cada $\lambda \in \sigma(A)$, $0 < \mu_\lambda < -\Re(\lambda)$, existe constante $K_\lambda > 0$ tal que

$$\|e^{J(\lambda)t}\| \leq K_\lambda e^{-t\mu_\lambda} ; \quad \forall t \geq 0$$

tomando $K = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \{K_\lambda\}$ temos, para $\mu < \min_{\lambda \in \sigma(A)} \{\Re(\lambda)\}$ e $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|e^{At}\| &\leq \|P^{-1}\| \|e^{tJ_A}\| \|P\| = \|P^{-1}\| \|P\| \|e^{tJ_A}\| \\ &= \|P^{-1}\| \|P\| \cdot \max_{\lambda \in \sigma(A)} \{\|e^{tJ(\lambda)}\|\} \leq \|P^{-1}\| \|P\| K e^{-\mu t} = \tilde{K} e^{-\mu t} \end{aligned}$$

□

O seguinte lema técnico apresenta uma estimativa que será utilizada diversas vezes nos resultados a seguir

Lema 4.4. Seja $N \subseteq \mathbb{R}^s$ subspaço vetorial e $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma função *flat* em N . Seja $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ satisfazendo

$$\|h(s, x) - N\| \leq Ce^{-\mu s} \|x - N\| ; \quad \forall s \geq 0, \quad x \in D(h)$$

para algumas constantes $\mu > 0$ e $k > 0$ em algum subconjunto $D(h) \subseteq \mathbb{R}^s$. Seja ainda $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária. Então, para $t_2 \geq t_1 \geq 0$, $t_0 \geq 0$, $\|x - N\| \leq R$ e todo $m \in \mathbb{Z}_+$, existem constantes $K_m > 0$ tais que, para $x \in D(h)$ e $\|x - N\| < R$, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{cs} \|g(h(s, x))\| ds \leq \frac{C^m K_m \|x - N\|^m e^{-\mu m t_0}}{m\mu - c} (e^{(c-m\mu)t_1} - e^{(c-m\mu)t_2})$$

Em particular, da arbitrariedade de m , existe m_0 tal que $m \geq m_0$ implica

$$\int_{t_1}^{\infty} e^{cs} \|g(h(s, x))\| ds \leq \frac{C^m K_m \|x - N\|^m e^{-\mu m t_0}}{m\mu - c} e^{(c-m\mu)t_1}, \quad x \in D(h), \|x - N\| < R$$

Demonstração: Como $\mu > 0$, $t_2 \geq s \geq t_1 \geq 0$ e $t_0 \geq 0$, então, $x \in D(h)$ implica

$\|h(s + t_0, x) - N\| \leq Ce^{-\mu(s+t_0)}\|x - N\|$. Por outro lado, como g é *flat* em N , então, fixada uma vizinhança limitada² de N , digamos $B = \{x \in \mathbb{R}^s; \|x - N\| < CR\}$, para todo $m \in \mathbb{Z}_+$, constantes K_m tais que $\|g(x)\| \leq K_m\|x - N\|^m$. Assim, $\|x - N\| < R$ e $x \in D(h)$ implica $h(s + t_0, x) \in B$ e neste caso, para todo $m \in \mathbb{Z}_+$ temos

$$\|g(h(s + t_0, x))\| \leq C_m(Ke^{-\mu(s+t_0)}\|x - N\|)^m = K_m C_m e^{-\mu m(s+t_0)}\|x - N\|^m$$

Finalmente, para $x \in D(h)$ e $\|x - N\| < R$ temos

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{cs} \|g(h(s, x))\| ds \leq \int_{t_1}^{t_2} e^{cs} K_m C_m e^{-\mu m(s+t_0)}\|x - N\|^m ds$$

e segue o resultado. □

Corolário 4.5. Nas condições do Lema 4.4, temos:

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{cs} g(h(s, x)) ds \right\| \leq \frac{C^m K_m \|x - N\|^m}{m\mu - c} (e^{(c-m\mu)t_1} - e^{(c-m\mu)t_2})$$

e, para m suficientemente grande,

$$\left\| \int_{t_1}^{\infty} e^{cs} g(h(s, x)) ds \right\| \leq \frac{C^m K_m \|x - N\|^m}{m\mu - c} e^{(c-m\mu)t_1}, \quad x \in D(h), \|x - N\| < R$$

Observação 4.6. Observe que se g tem suporte compacto, então, $\|g(x)\| \leq K_m\|x - N\|^m$ para todo x , assim, $x \in D(h)$ implica

$$\|g(h(s, x))\| \leq K_m \|h(s, x) - N\|^m \leq K_m C^m e^{-\mu ms} \|x - N\|^m.$$

Portanto, caso g tenha suporte compacto, podemos suprimir a hipótese $\|x - N\| < R$ do teorema.

Uma pequena observação, daqui por diante, vamos entender por "fluxo associado a um campo de vetore X ", a função $\varphi(t, x)$ que satisfaz

$$\left(\frac{d}{dt} \varphi(t, x) \right)_{t=0} = X(x).$$

²Por vizinhança limitada V de N entendemos $\sup_{x \in V} \|x - N\| < \infty$

Frequentemente, não faremos distinção do fluxo associado a um campo, e a família a um parâmetro de difeomorfismos associado ao fluxo. Em geral, denotamos a família por $U(t)$, onde $U(t)x = \varphi(t, x)$.

Definição 4.7. Sejam A uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e

$$J(A) = \text{diag}(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_k))$$

sua forma canônica de Jordan, onde cada bloco de jordan $J(\lambda_j)$ é uma matriz quadrada de dimensão m_j . Sejam $E^1, \dots, E^k$ os espaços invariantes de dimensão m_j associados a cada bloco de Jordan³. Um subespaço invariante $W \subset \mathbb{R}^n$ por A será chamado de espaço invariante de Jordan de A se W for a soma direta de espaços E^j ou $W = \{0\}$.

Observação 4.8. Seja A uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Temos que existe uma base de $\mathbb{R}^n$ tal que A se escreve na sua forma canônica de Jordan

$$A = \text{diag}(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_k))$$

e os espaços invariantes E^j associados aos blocos de Jordan são da forma

$$\begin{cases} E^1 = \{x; x_{m_1+1} = x_{m_1+2} = \dots = x_n = 0\} \\ E^j = \{x; x_1 = \dots = x_{l_j} = x_{l_j+m_j+1} = \dots = x_n = 0\} \quad j = 2, \dots, k, \end{cases}$$

onde m_j é a dimensão do bloco de jordan $J(\lambda_j)$ e $l_j = m_1 + \dots + m_{j-1}$.

Observe que nesta base, $e^{At} = \text{diag}(e^{J(\lambda_1)t}, \dots, e^{J(\lambda_k)t})$. Portanto, cada espaço E^j também é um subespaço invariante de Jordan de e^{At} . Em particular, obtemos que

W é subespaço invariante de Jordan de A

$\Downarrow$

W é subespaço invariante de Jordan de e^{At}

Lema 4.9. Sejam $V = \sum a_{ij}x_i\partial_{x_j}$ um campo de vetores linear em $\mathbb{R}^n$ e seja $U(t) = e^{At}$ a família (a um parâmetro) de difeomorfismos em $\mathbb{R}^n$ obtida ao integrar o campo V . Seja

³Os espaços E^j são os chamados "auto espaços generalizados", e podem ser definidos por:

$$E^j = \bigcup_{m=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n; (A - \lambda_j I)^m x = 0\}.$$

N um subespaço de $\mathbb{R}^n$ invariante de Jordan de $A = (a_{ij})_{i,j}$ e seja E o subespaço de $\mathbb{R}^n$ formado por todos os $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem

$$\|U(t)x - N\| \longrightarrow 0 \quad (4.0.1)$$

quando $t \rightarrow \infty$. Seja g uma função suave de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ que se anula de ordem infinita ao longo de N . Seja ainda $c \in \mathbb{C}$ uma constante qualquer. Defina

$$f(x, s) = \int_0^s e^{ct} g(U(t)x) dt$$

Então, para todos os multi índices $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, e $x \in E$ o limite $\lim_{s \rightarrow \infty} D^\alpha f(x, s)$ existe e a função $f_\alpha : E \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f_\alpha(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} D^\alpha f(x, s) ; \quad \forall x \in E$$

é suave e se anula de ordem infinita em N .

Demonstração:

Observe que para fazer estimativas no integrando, a parte imaginária da constante c não é relevante. Assim, ao longo desta demonstração, iremos considerar que c é uma constante real.

Vamos provar inicialmente que (4.0.1) na verdade implica a seguinte desigualdade

$$\|U(t)x - N\| \leq C e^{-t\mu} \|x - N\|$$

Vamos supor, inicialmente, que A esteja na sua forma canônica de Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J(\lambda_{k-1}) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_k) \end{pmatrix} = \text{diag}(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_k))$$

onde $J(\lambda_i)$ representa o bloco de jordan associado ao autovalor λ_i . Sejam $E^1, \dots, E^k$ os espaços invariantes associados a cada bloco de Jordan. Como N é subespaço invariante de Jordan, então, N é a soma direta de espaços deste tipo. Sem perda de generalidade,

vamos supor que

$$N = E^{l+1} \oplus \dots \oplus E^k$$

de modo que podemos escrever $\mathbb{R}^n = E^1 \oplus \dots \oplus E^l \oplus N$.

Como já foi observado, N também é um subespaço invariante de Jordan de e^{At} . Para facilitar a notação, vamos escrever

$$U(t) = e^{At} = \text{diag}(e^{tJ(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ(\lambda_k)}) = (e^{tJ(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ(\lambda_l)}, e^{tJ_N})$$

Escrevendo $x = (x^1, \dots, x^l, x^N)$ e $y = (0, \dots, 0, y^N) \in N$ temos que

$$\begin{aligned} \|e^{At}x - N\| &= \inf_{y \in N} \{\|e^{At}x - y\|\} = \inf_{y \in N} \{\|\text{diag}(e^{tJ(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ(\lambda_l)}, e^{tJ_N})x - y\|\} \\ &= \inf_{y \in N} \{\|(e^{tJ(\lambda_1)}x^1, \dots, e^{tJ(\lambda_l)}x^l, e^{tJ_N}x^N) - (0, \dots, 0, y^N)\|\} \\ &= \inf_{y \in N} \left\{ \max_{j=1, \dots, l} \{\|e^{tJ(\lambda_j)}x^j\|, \|e^{tJ_N}x^N - y^N\|\} \right\} \end{aligned}$$

Observe que se $x^j \neq 0$ temos

$$\begin{cases} \Re(\lambda_j) > 0 & \Rightarrow \|e^{tJ(\lambda_j)}x^j\| \rightarrow \infty \\ \Re(\lambda_j) = 0 & \Rightarrow \|e^{tJ(\lambda_j)}x^j\| \geq \varepsilon \text{ para algum } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Assim, se $\Re(\lambda_j) \geq 0$ e $x_j \neq 0$ para algum $j = 1, \dots, l$, então, $\|e^{At}x - N\| \not\rightarrow 0$. Em particular, se $\Re(\lambda_j) \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, l$, então,

$$\|e^{At}x - N\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \in N;$$

neste caso a estimativa exponencial que queríamos é trivial pois, como já vimos, N é invariante por e^{At} e, portanto, $\|e^{At}x - N\| = 0$.

Vamos supor, então, que exista λ_j tal que $\Re(\lambda_j) < 0$. Vamos ainda supor, sem perda de generalidade que $\Re(\lambda_j) < 0$, $j = 1, \dots, m$ e $\Re(\lambda_j) \geq 0$, $j = m+1, \dots, l$. Como já foi observado, se $x_j \neq 0$ para algum $j = m+1, \dots, l$ então $\|e^{At}x - N\| \not\rightarrow 0$. Assim, $x \in E$ implica que $x_{m+1} = \dots = x_l = 0$. Neste caso, aplicando os lemas 4.1 ou 4.2 a cada bloco de Jordan, obtemos:

$$\|e^{At}x - N\| = \inf_{y \in N} \left\{ \max_{j=1, \dots, l} \{\|e^{tJ(\lambda_j)}x^j\|, \|e^{tJ_N}x^N - y^N\|\} \right\} \leq \max_{j=1, \dots, l} \{\|e^{tJ(\lambda_j)}x^j\|\} \quad (4.0.2)$$

$$= \max_{j=1, \dots, m} \{\|e^{tJ(\lambda_j)}x^j\|\} \leq \max_{j=1, \dots, m} \{C_j e^{-\mu_j t} \|x^j\|\} \quad (4.0.3)$$

$$\leq C e^{-\mu t} \max_{j=1, \dots, m} \|x^j\| = C e^{-\mu t} \|x - N\| \quad (4.0.4)$$

sendo $C = \max_j \{C_j\}$ e $\mu = \min_j \{\mu_j\}$.

No caso em que A não está na forma canonica de Jordan temos $A = P^{-1}J_AP$ e, portanto, $e^{At} = P^{-1}e^{tJ_A}P$. Assim

$$e^{At}x - N = P^{-1}e^{tJ_A}PxP^{-1}P - P^{-1}PNP^{-1}P = P^{-1}(e^{tJ_A}w - \tilde{N})P,$$

onde $w = PxP^{-1}$, $\tilde{N} = PNP^{-1}$. Como $P^{-1}(e^{tJ_A}w - \tilde{N})P \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow e^{tJ_A}w - \tilde{N} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, reduzimos o problema ao caso anterior.

Note que g se anula de ordem infinita em N e tem suporte compacto. Fazendo $h(t, x) = U(t)x$ e $E = D(h)$, segue do Corolário 4.5 e da Observação 4.6 que

para $s > s' \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} \|f(x, s) - f(x, s')\| &= \left\| \int_{s'}^s e^{ct} g(U(t)x) dt \right\| \leq C \cdot K_m \|x - N\|^m \left(\frac{e^{(c-m\mu)s} - e^{(c-m\mu)s'}}{c - m\mu} \right) \\ &= C \cdot K_m \|x - N\|^m e^{(c-m\mu)s'} \left(\frac{e^{(c-m\mu)(s-s')} - 1}{c - m\mu} \right) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$.

Tome $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $c - m\mu < 0$. Neste caso, observe que $(e^{(c-m\mu)(s-s')} - 1)$ é limitado e temos ainda que $e^{(c-m\mu)s'} \xrightarrow{s' \rightarrow \infty} 0$; portanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que se $s > s' > t_0$ então

$$C \cdot K_m \|x - N\|^m e^{(c-m\mu)s'} \left(\frac{e^{(c-m\mu)(s-s')} - 1}{c - m\mu} \right) < \varepsilon$$

e, portanto, $f(x, s) \rightarrow f_0(x) = \int_0^\infty e^{ct} g(U(t)x) dt$, quando $s \rightarrow \infty$. Para mostrar que a convergencia é absoluta basta observar que, para $m \in \mathbb{Z}_+$ com $c - m\mu < 0$, segue

novamente do Corolário 4.5 e da Observação 4.6 que

$$\|f(x) - f(x, s)\| = \left\| \int_s^\infty e^{ct} g(U(t)x) dt \right\| \leq C \cdot K_m \|x - N\|^m \left(\frac{-e^{(c-m\mu)s}}{c - m\mu} \right) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

Finalmente, para provarmos que as derivadas de $f(x, s)$ convergem observamos que como g é *flat* em N , então as derivadas de g também são *flat* em N . Portanto, derivando sob o sinal de integração e aplicando a formula de Faà de Bruno⁴, continuamos em condições de aplicar o Corolário 4.5, de modo que podemos repetir o argumento acima para provar que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x, s) = \int_0^s e^{ct} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \left(g(U(t)x) \right) dt \xrightarrow[\text{absolutamente}]{s \rightarrow \infty} f_\alpha(x) ; \quad \forall x \in E, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Observe que as funções f_α são funções suaves de x e temos

$$\partial_x^\beta f_\alpha(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \partial_x^{\beta+\alpha} f(x, s)$$

para toda derivada onde $\partial_x^\beta f_\alpha(x)$ faz sentido⁵. Observe que para $x \in N$, $f(x, s) = 0$, pois

⁴A fórmula de Faà di Bruno é uma maneira explicita, embora um tanto quanto impraticável, de se computar a derivada de ordem arbitrária de uma composição de funções. Apesar de sua formula complexa e manuseio trabalhoso, a fórmula de Faà di Bruno é útil para se obter estimativas para as derivadas de funções compostas.

Explicitamente, sejam $u = (u_1, \dots, u_M)$ e $z = (z_1, \dots, z_N)$, vamos considerar uma função composta $F(u(z))$. Sejam $m = (m_1, \dots, m_M)$, $p = (p_1, \dots, p_N)$ e $\tilde{p} = (|\tilde{p}|, \dots, |\tilde{p}|)$. Sejam ainda

$$A(p) = (\{0, 1, \dots, p_1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, p_N\}) \setminus (\{0\} \times \dots \times \{0\})$$

$$C(p) = \{m \in A(\tilde{p}) ; \sum_{l=1}^M m_l \leq |p|\}$$

Além disso, seja $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_M)$, com $\phi_l : A(p) \rightarrow \{0, 1, \dots, m_l\}$ e

$$V(m) = \left\{ \phi \mid \begin{array}{ll} \sum_{\alpha \in A(p)} \phi_l(\alpha) = m_l & (1 \leq l \leq M) \\ \sum_{\alpha \in A(p)} \sum_{j=1}^M \alpha_j \phi_j(\alpha) = m_l & (1 \leq l \leq N) \end{array} \right\}$$

Entao, denotando $D_z^p = \partial^{|p|} / \partial z^p$ e $D_u^m = \partial^{|m|} / \partial u^m$, temos

$$D_z^p F(u(z)) = p! \sum_{m \in C(p)} (D_u^m F)(u(z)) \sum_{\phi \in V(m)} \prod_{l=1}^M \prod_{\alpha \in A(p)} [(\phi_l(\alpha))!]^{-1} \left(\frac{(D_z^\alpha u_l)(z)}{(\alpha!)} \right)^{\phi_l(\alpha)}$$

Para mais informações consultar Pearce et al. [2007].

⁵A menos de uma mudança de coordenadas, temos $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$, e então, podemos escrever $f_s = f(x, y, s)$. onde $x \in E$, $y \in E^\perp$. Assim, dizer que a derivada $\partial_x^\beta f_\alpha(x)$ faz sentido é dizer

$U(t)x \in N$ e g é *flat* em N . Assim, $f(x) = 0$ para $x \in N$. O mesmo argumento prova ainda que o $f_\alpha(x)$ é uma função *flat*.

□

Definição 4.10. Considere uma variedade X e um campo de vetores V singular em $p \in X$. Sejam $x_1, \dots, x_n$ coordenadas locais em torno de $p \in X$ tais que

$$V = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + o(|x|^2) \ ; \ x_i(p) = 0, i = 1, \dots, n$$

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores da matriz (a_{ij}) ⁶. O ponto p é chamado de zero hiperbólico de V se $\Re(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$.

Teorema 4.11. *Seja V um campo vetorial linear em $\mathbb{R}^n$ com um zero hiperbólico na origem e seja c uma constante fixada. Então, dada uma função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que se anula de ordem zero na origem, existe uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que se anula de ordem infinita na origem, tal que*

$$Vf + cf = g$$

em uma vizinhança da origem.

Demonstração: Seja $U(t)$ a família a um parametro de difeomorfismos, obtida ao integrar o campo V , isto é, se $V = \sum_{i,j} a_{ij} x_i \partial_{x_j}$ e $A = (a_{ij})_{i,j}$ então $U(t) = e^{tA}$. Vamos começar supondo que todos os autovalores de A tem parte real negativa. Então a origem é um atrator global, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos $U(t)x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Definina

$$f(x) = - \int_0^\infty e^{ct} g(U(t)x) dt$$

Considere $N = \{0\}$ e $\tilde{g} = g\chi$, onde χ é uma função suave de suporte compacto com $\chi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem. Então, estamos em condições de aplicar o Lema 4.9, com $E = \mathbb{R}^n$, de modo que a função f definida acima é, não somente bem definida, como também, *flat* na origem.

que $\beta \in \mathbb{Z}_+^l$.

⁶Observe que estes autovalores independem da escolha de coordenadas

Resta, agora, observar que f é uma solução desejada. De fato,

$$f(U(s)x) = - \int_0^\infty e^{ct} \tilde{g}(e^{At} e^{As} x) dt \quad (4.0.5)$$

$$= - \int_0^\infty e^{ct} \tilde{g}(e^{A(t+s)} x) dt \quad (4.0.6)$$

$$= e^{-cs} - \int_0^\infty e^{c(s+t)} \tilde{g}(e^{A(t+s)} x) dt \quad (4.0.7)$$

$$= e^{-cs} - \int_s^\infty e^{c\tau} \tilde{g}(e^{A\tau} x) d\tau \quad (4.0.8)$$

e, portanto,

$$\frac{d}{ds}(f(U(s)x)) = -(-ce^{-cs}) \int_s^\infty e^{c\tau} \tilde{g}(e^{A\tau} x) d\tau - e^{-cs} \left(-e^{c\tau} \tilde{g}(e^{A\tau} x) \right)_{\tau=s} \quad (4.0.9)$$

$$= -cf(U(s)x) + \tilde{g}(U(s)x). \quad (4.0.10)$$

Por outro lado, lembrando que $\frac{d}{dt}(e^{At}x) = V(e^{At}x)$ e $e^{0A} = I_n$, temos

$$\frac{d}{ds}(f(e^{As}x)) \Big|_{s=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \quad (4.0.11)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = Vf(x) \quad (4.0.12)$$

Fazendo $s = 0$ em (4.0.9), temos

$$Vf(x) = \frac{d}{ds}(f(e^{As}x)) \Big|_{s=0} = -cf(I_n x) + \tilde{g}(I_n x) = -cf(x) + \tilde{g}(x) \quad (4.0.13)$$

finalizando a demonstração no caso em que A tem todos os autovalores com parte real negativa⁷.

No caso mais geral, em que A possui autovalores com parte real positiva ou negativa (mas não nula, pois a origem é um zero hiperbólico), vamos considerar $\mathbb{R}^n = E^- \oplus E^+$, onde E^- é soma dos espaços invariantes associados aos blocos de Jordan dos autovalores com parte real negativa e E^+ a soma dos espaços invariantes associados aos blocos de Jordan dos autovalores com parte real positiva. Observe que estes espaços são espaços invariantes de Jordan. Observe ainda, que $x \in E^-$ implica que (na verdade "se, e somente se") $e^{tA}x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

⁷Lembrando que $\tilde{g} = g$ em uma vizinhança da origem.

Considerando, agora, a matriz $\tilde{A} = -A$, obtemos a decomposição análoga $\mathbb{R}^n = \tilde{E}^- \oplus \tilde{E}^+$, onde $x \in \tilde{E}^- \Leftrightarrow e^{-tA}x = e^{t\tilde{A}}x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Note que $\tilde{E}^- = E^+$ e $\tilde{E}^+ = E^-$.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{E}^- = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_{l+1} = \dots = x_n = 0\}$. Aplicando o Lema 4.9 com $\tilde{V} = -V = -\sum a_{ij}x_i\partial_{x_j}$, $N = \{0\}$, $E = \tilde{E}^-$ e $\tilde{g} = \chi g$ (sendo χ uma função de corte como anteriormente), obtemos o seguinte resultado:

Seja a função $f : \tilde{E}^- \oplus \tilde{E}^+ \equiv \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(x, y, s) = \int_0^s e^{ct} \tilde{g}(e^{t\tilde{A}}(x, y)) dt$$

Então,

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x, y, s) \xrightarrow[\text{absolutamente}]{t \rightarrow \infty} f_\alpha(x) \quad ; \quad \forall (x, y) \in \tilde{E}^- \times \{0\}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

onde cada $f_\alpha(x)$ é uma função suave, definida em $\tilde{E}^- \equiv \mathbb{R}^l$, que se anula de ordem infinita na origem. Em particular, isso é verdade para $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ e temos que $f_0(x)$ satisfaz $\partial^\beta f_0(x) = f_{(\beta, 0)}$ para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^l$.

Considere, agora, $(x, y) \in \mathbb{R}^n = \tilde{E}^- \oplus \tilde{E}^+$. Queremos estender o mapa f_0 a uma função $\tilde{f}$ definida em todo $\mathbb{R}^n$, tal que $\partial^\alpha \tilde{f}(x, 0) = f_\alpha(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Observe que basta definirmos em uma vizinhança de $\tilde{E}^- \equiv \mathbb{R}^l$. Depois estendemos com o auxílio de uma função com suporte nesta vizinhança e com valor um em $\tilde{E}^-$. Para isso, considere uma função $\rho \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ com suporte no intervalo $(-1, 1)$, $0 \leq \rho \leq 1$ e tal que $\rho \equiv 1$ em uma vizinhança da origem. Defina

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \tilde{E}^- \oplus \tilde{E}^+ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \tilde{f}(x, y) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{y^\gamma}{\gamma!} f_{(0, \gamma)}(x) \rho(\|f_{(0, \gamma)}(x)\|^2 \|y\|^2) \\ &= \sum_{(0, \dots, 0, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(x, y)^\alpha}{\alpha!} f_\alpha(x) \rho(\|f_\alpha(x)\|^2 \|y\|^2) \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que $\tilde{f}$ está bem definida em uma vizinhança de $\tilde{E}^-$. Para isso,

vamos mostrar que a série converge absolutamente para $\|y\| < 1$. Observe que, se

$$\|f_{(0,\gamma)}(x)\|^2 \|y\|^2 > \|f_{(0,\gamma)}(x)\| \|y\| > 1$$

então o $(0, \gamma)$ -ésimo termo é zero e, assim, podemos supor que $\|f_{(0,\gamma)}(x)\| \|y\| \leq 1$. Além disso, $0 \leq \rho(\|f_{(0,\gamma)}(x)\|^2 \|y\|^2) \leq 1$. Com isso, para $|\gamma| \geq 1$ temos

$$\frac{\|y\|^{|\gamma|}}{\gamma!} \|f_{(0,\gamma)}(x)\| \rho(\|f_{(0,\gamma)}(x)\|^2 \|y\|^2) \leq \frac{\|y\|^{|\gamma|-1}}{\gamma!} \|f_{(0,\gamma)}(x)\| \|y\| \leq \frac{\|y\|^{|\gamma|-1}}{\gamma!}$$

e, portanto,

$$\|\tilde{f}(x, y)\| \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{\|y\|^{|\gamma|}}{\gamma!} \|f_{(0,\gamma)}(x)\| \rho(\|f_{(0,\gamma)}(x)\|^2 \|y\|^2) \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{\|y\|^{|\gamma|}}{\gamma!} \|f_{(0,\gamma)}(x)\| \quad (4.0.14)$$

$$= \|f_{(0)}(x)\| + \sum_{|\gamma| \geq 1; \gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{\|y\|^{|\gamma|}}{\gamma!} \|f_{(0,\gamma)}(x)\| \quad (4.0.15)$$

$$\leq \|f_{(0)}(x)\| + \sum_{|\gamma| \geq 1; \gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{\|y\|^{|\gamma|-1}}{\gamma!} \quad (4.0.16)$$

$$\leq \|f_{(0)}(x)\| + \sum_{|\gamma| \geq 1; \gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{1}{\gamma!}. \quad (4.0.17)$$

Como a última soma é numérica e convergente, segue do M teste de Weierstrass que $\tilde{f}$ está bem definida e a convergência é absoluta.

O mesmo processo pode ser utilizado para mostrar que, derivando a série, termo a termo, continuamos com uma série absolutamente convergente para $\|y\| < 1$.

Vamos calcular $\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}(x, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}(x, y) &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{y^\gamma}{\gamma!} f_{(0,\gamma)}(x) \rho(\|f_{(0,\gamma)}(x)\|^2 \|y\|^2) \right) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{y^\gamma}{\gamma!} \left(\frac{\partial f_{(0,\gamma)}}{\partial x_i}(x) \rho(\|f_{(0,\gamma)}(x)\|^2 \|y\|^2) + \right. \\ &\quad \left. + f_{(0,\gamma)}(x) \rho'(\|f_{(0,\gamma)}(x)\|^2 \|y\|^2) \|y\|^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\|f_{(0,\gamma)}(x)\|^2) \right); \end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}(x, 0) = \frac{\partial f_{(0,0)}}{\partial x_i}(x) = f_{e_i}(x),$$

onde e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \tilde{f}(x, 0) &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{y=0} \left(\frac{y^\gamma}{\gamma!} f_{(0,\gamma)}(x) \rho(\|f_{(0,\gamma)}(x)\|^2 \|y\|^2) \right) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-l}} \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{y=0} \left(\frac{y^\gamma}{\gamma!} f_{(0,\gamma)}(x) \right) = f_{e_{l+j}}(x) \end{aligned}$$

Analogamente, se obtemos que $\partial^\alpha \tilde{f}(x, 0) = f_\alpha(x)$. Considere agora a função $h = V\tilde{f} + c\tilde{f} - \tilde{g}$. Repetindo as contas feitas em (4.0.5), (4.0.9), (4.0.11) e (4.0.13), obtemos que h é *flat* em $\tilde{E}^-$.

Lembrando que $\tilde{E}^- = E^+$ e $\tilde{E}^+ = E^-$ são invariantes por e^{tA} e e^{-tA} , temos que

$$\begin{aligned} \|e^{tA}(x, y) - \tilde{E}^-\| &= \|e^{tA}(x, 0) + \underbrace{e^{tA}(0, y) - \tilde{E}^-}_{\in \tilde{E}^-}\| \\ &= \|e^{tA}(x, 0) - \tilde{E}^-\| ; \quad \forall (x, y) \in E^- \oplus E^+ \equiv \mathbb{R}^n; \end{aligned}$$

Mas $(x, y) \in E^- \subseteq \mathbb{R}^n \Leftrightarrow e^{tA}(x, y) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, de modo que

$$\|e^{tA}(x, y) - E^+\| = \|e^{tA}(x, 0) - E^+\| \rightarrow 0 ; \quad \forall (x, y) \in E^- \oplus E^+ \equiv \mathbb{R}^n$$

Podemos aplicar novamente o Lema 4.9, utilizando $E = \mathbb{R}^n$, $N = E^+$, h a função *flat* ao longo de N e V o campo original (com $U(t) = e^{tA}$) dado. Obtemos com isso uma função $\tilde{h} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida pela integral imprópria

$$\tilde{h}(x, y) = - \int_0^\infty e^{ct} h(e^{tA}(x, y)) dt$$

Repetindo a conta anterior, vemos que $\tilde{h}$ satisfaz $V\tilde{h} + c\tilde{h} = h$ e, portanto, satisfaz

$$0 \equiv V\tilde{h} + c\tilde{h} - h = V\tilde{h} + c\tilde{h} - (V\tilde{f} + c\tilde{f} - \tilde{g}) = V(\tilde{h} - \tilde{f}) + c(\tilde{h} - \tilde{f}) - \tilde{g}$$

Assim, em uma vizinhança da origem, $g = V(\tilde{h} - \tilde{f}) + c(\tilde{h} - \tilde{f})$, onde $\tilde{h}$ e $\tilde{f}$ são funções suaves em $\mathbb{R}^n$, provando o teorema.

□

Teorema de Linearização de Sternberg

Queremos, agora, estudar o lema (4) do artigo [Silva, dos Santos Filho, 2006]. Em resumo, este lema nos fornece condições necessárias para que o operador $L + c : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sendo L um campo vetorial com singularidade isolada e coeficientes em $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ e $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. No entanto, para que se compreenda a necessidade de cada hipótese do lema, é necessário estudar primeiramente o Teorema de Linearização de Sternberg. Vamos dedicar, então, esta seção ao estudo deste poderoso resultado. A demonstração que estudaremos foi apresentada por E. Nelson [Nelson, 1969]. Uma observação pertinente é que o trabalho de Nelson precede Guillemin, Schaeffer [1977] e, de fato, foi inspiração para a demonstração do Teorema 4.11. Os mecanismos de algumas das demonstrações a seguir serão muito semelhantes aos já vistos anteriormente mas, como acabamos de observar, foram na verdade as fontes de inspiração da demonstração que fizemos no capítulo 4.

Vamos fixar algumas notações:

Seja $L_{sym}^j(\mathbb{R}^s)$ o conjunto das transformações j -lineares e simétricas em $\mathbb{R}^s$ e para $k = 1, 2, \dots$ defina

$$\tilde{\mathcal{A}}^k := \left\{ R : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s \left| \begin{array}{l} R(x) = \sum_{j=1}^k A_j x^j; A_j \in L_{sym}^j(\mathbb{R}^s); \\ R(0) = 0 \ ; \ DR(0) \text{ inversível} \end{array} \right. \right\}.$$

Observe que $\tilde{\mathcal{A}}^k$ com a operação "composição + truncamento"¹ é um grupo. Podemos definir, para $k = \infty$, $\tilde{\mathcal{A}}^\infty$ como o conjunto de todas as séries formais da forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j x^j \quad ; \quad A_j \in L_{sym}^j(\mathbb{R}^s),$$

com A_1 inversível. $\tilde{\mathcal{A}}^\infty$ também é um grupo com a operação dada pela composição formal. Note ainda que, se $1 \leq k \leq k' \leq \infty$, então $\tilde{\mathcal{A}}^{k'} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^k$, onde $\hookrightarrow$ indica o truncamento da série, é um homomorfismo sobrejetor.

Defina, para cada $k = 1, \dots, \infty$, o conjunto $\mathcal{S}^k$ de todos os germes R de funções C^k na origem em $\mathbb{R}^s$ que fixem a origem e tal que $DR(0)$ seja inversível. Segue do teorema da função inversa que $\mathcal{S}^k$ é um grupo com a operação dada pela composição. Observe ainda que, se $1 \leq k \leq k' \leq \infty$, então $\mathcal{S}^{k'} \hookrightarrow \mathcal{S}^k$, onde $\hookrightarrow$ indica a inclusão, é um homomorfismo sobrejetor.

Finalmente, observe que, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{S}^k \hookrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^k$, onde $\hookrightarrow$ significa "tomar a série de Taylor de ordem k ", é um homomorfismo sobrejetor. Isso é verdade também para $k = \infty$, e será provado no lema a seguir.

Lema 5.1. Seja $A_j \in L_{sym}^j(\mathbb{R}^s)$ para $j = 1, 2, \dots$. Então, existe uma aplicação suave $F : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$, cuja série de Taylor na origem é dada por $\sum_j A_j x^j$.

Demonstração: Observe que só precisamos definir a função F em uma vizinhança U da origem, pois podemos depois multiplicar F por uma função de suporte compacto, igual a 1 em uma vizinhança $V \subset U$ da origem, e com suporte em U . Estendendo a função F a zero em todo $\mathbb{R}^s \setminus U$. Consideremos agora uma função suave $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com, $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho \equiv 1$ em uma vizinhança da origem e $\text{supp}(\rho) \subset [-1, 1]$. Definimos então

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j x^j \rho(\|A_j\| \|x\|^2).$$

Note que se $x = 0$, então todos os termos da série se anulam e $F(0) = 0$. Vamos supor então que $x \neq 0$. Observe que para $\|A_j\| \|x\|^2 > 1$, o j -ésimo termo da série é nulo. De

¹Por truncamento, entenda que estamos desconsiderando os termos de ordem $> k$

forma que podemos assumir que $\|A_j\| \leq \|x\|^{-2}$ e, assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \|A_j\| \|x\|^j \rho(\|A_j\| \|x\|^2) &= \|A_0\| + (\|A_1\| \|x\|) + \sum_{j=2}^{\infty} \|A_j\| \|x\|^j \rho(\|A_j\| \|x\|^2) \\ &\leq \|A_0\| + (\|A_1\| \|x\|) + \sum_{j=2}^{\infty} \|x\|^{j-2}. \end{aligned}$$

Portanto, a série $F(x)$ é absolutamente convergente para $\|x\| < 1$. Derivando termo a termo, obtemos que a série dos termos derivados também é absolutamente convergente para $\|x\| < 1$, portanto F é suave. Finalmente, observe que como α é 1 em uma vizinhança da origem, então, a série de Taylor de F é dada por $\sum A_j x^j$ como queríamos demonstrar. □

Mostramos assim que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{S}^{\infty} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{S}^k & \longrightarrow & \mathcal{S}^{k-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{S}^1 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \tilde{\mathcal{A}}^{\infty} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}^k & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}^{k-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}^1 \end{array}$$

Estamos interessados em linearizar, através de conjugações, elementos em $\mathcal{S}^k$, isto é, dado $T \in \mathcal{S}^k$, encontrar $R \in \mathcal{S}^k$ tal que RTR^{-1} seja linear. O próximo resultado estabelece condições suficientes para a linearização em $\tilde{\mathcal{A}}^k$.

Teorema 5.2. *Seja $T \in \tilde{\mathcal{A}}^k$ para algum $k = 1, 2, \dots, \infty$ com parte linear T_1 . Sejam $\mu_1, \dots, \mu_s$ autovalores complexos de T_1 (incluindo suas multiplicidades) e denote $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) \in \mathbb{C}^s$. Seja ainda o conjunto $\Gamma^j = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^s; |\alpha| = j\}$. Suponha que $\forall i = 1, \dots, s$ tenhamos*

$$\mu_i \neq \mu^\alpha; \quad \forall \alpha \in \Gamma^j, j = 2, \dots, k.$$

Então, existe uma única aplicação $R \in \tilde{\mathcal{A}}^k$, com parte linear $R_1 = Id$, tal que $RTR^{-1} = T_1$.

Demonstração: Observe que se $R_1 = Id$, então R é automaticamente inversível e, portanto, $RTR^{-1} = T_1 \Leftrightarrow RT = T_1 R$.

Primeiramente, vamos considerar $\mathbb{R}^s$ um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos,

e vamos supor que T_1 é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, com autovalores complexos $\mu_1, \dots, \mu_s$, e consideremos um sistema de coordenadas onde T_1 é diagonalizável. Neste caso, temos $(T_1x)_i = \mu_i x_i$.

Como já vimos, precisamos resolver uma equação do tipo $RT = T_1R$, sendo $Rx = \sum_j R_j x^j$, $Tx = \sum_j T_j x^j$ e $R_1 = Id$. Queremos, então, determinar, para cada $j = 1, 2, \dots, k$, as aplicações R_j que satisfazem $T_1Rx = RTx$ para todo $x \in \mathbb{R}^s$. Isso será feito indutivamente, isto é, uma vez determinados $R_1, \dots, R_{j-1}$ queremos definir R_j . Explicitamente, queremos resolver:

$$T_1(x + R_2x^2 + R_3x^3 + \dots) = (T_1x + T_2x^2 + \dots) + R_2(T_1x + T_2x^2 + \dots)^2 + R_3(T_1x + T_2x^2 + \dots)^3 + \dots$$

Comparando os coeficientes x^j , podemos escrever

$$T_1(R_jx^j) = R_j(T_1x)^j + H_jx, \quad (5.0.1)$$

onde $H_j : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ é uma aplicação que depende de $R_1, \dots, R_{j-1}$ e, portanto, pela hipótese de indução já está unicamente determinado. Observe que $H_jx = (h_j^1(x), \dots, h_j^s(x))$ é um polinômio homogêneo de ordem j , e podemos escrever

$$h_j^i(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma^j} f_{i,j,\alpha} x^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

onde $f_{i,j,\alpha} \in \mathbb{R}$ são as constantes que definem H_j .

Suponha agora que R_jx^j se escreve explicitamente da seguinte forma:

$$(R_jx^j)_i = \sum_{\alpha \in \Gamma^j} r_\alpha^i x^\alpha, \quad i = 1, \dots, s,$$

onde $r_\alpha^i \in \mathbb{R}$ são os coeficientes que determinam a aplicação R_j . Então, a equação (5.0.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mu_i \sum_{\alpha \in \Gamma^j} r_\alpha^i x^\alpha &= (T_1(R_jx^j))_i = (R_j(T_1x)^j)_i + (H_{j-1}x)_i \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma^j} r_\alpha^i (T_1x)^\alpha + h_j^i(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma^j} r_\alpha^i \mu_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha \in \Gamma^j} f_{i,j,\alpha} x^\alpha. \end{aligned}$$

Comparando termo a termo, obtemos a equação $\mu_i r_\alpha^i = \mu^\alpha r_\alpha^i + f_{i,j,\alpha}$. Então,

$$(\mu_i - \mu^\alpha) r_\alpha^i = f_{i,j,\alpha} \ , \ \forall \ j = 2, 3, \dots \ , \ i = 1, \dots, s \ , \ \alpha \in \Gamma^j.$$

Como $\mu_i \neq \mu^\alpha$, para quaisquer $i = 1, \dots, s$ e $\alpha \in \Gamma^j$, segue que a equação acima possui uma única solução r_α^i . Provamos, assim, a existência e a unicidade de R no caso em que T_1 é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$. Além disso, segue da unicidade de R que R é real, pois $RT R^{-1} = T_1 \Leftrightarrow \overline{RT R^{-1}} = \overline{T_1}$ e como T e T_1 são reais, temos $\overline{RT R^{-1}} = T_1$. Logo, $R = \overline{R}$.

Precisamos, agora, mostrar que o resultado continua válido quando T_1 não é diagonalizável. Denote por $\mathcal{L}(L_{sym}^j(\mathbb{R}^s))$ o conjunto das transformações lineares $F : L_{sym}^j(\mathbb{R}^s) \rightarrow L_{sym}^j(\mathbb{R}^s)$. Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : GL_s(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{L}(L_{sym}^j(\mathbb{R}^s)) \\ A &\mapsto \Phi(A) : L_{sym}^j(\mathbb{R}^s) \rightarrow L_{sym}^j(\mathbb{R}^s) \\ R_j &\mapsto (\Phi(A)R_j)x^j = A(R_j x^j) - R_j(Ax)^j. \end{aligned}$$

Note que podemos reescrever (5.0.1) da seguinte forma

$$(\Phi(T_1)R_j)x^j = H_j(x). \quad (5.0.2)$$

Suponha $A \in GL_s(\mathbb{R})$ diagonal, com autovalores $\mu_1, \dots, \mu_s$, e seja λ autovalor de $\Phi(A)$. Então, existe $R_j \in L_{sym}^j(\mathbb{R}^s)$ não nulo, com $(R_j x^j)_i = \sum_{\alpha \in \Gamma^j} r_\alpha^i x^\alpha$, tal que

$$((\lambda - \Phi(A))R_j)x^j = 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^s;$$

logo,

$$\lambda \cdot \sum_{\alpha \in \Gamma^j} r_\alpha^i x^\alpha = (\lambda \cdot (R_j x^j))_i = ((\Phi(A)R_j)x^j)_i = \mu_i \sum_{\alpha \in \Gamma^j} r_\alpha^i x^\alpha - \sum_{\alpha \in \Gamma^j} r_\alpha^i \mu^\alpha x^\alpha.$$

Portanto, os autovalores de $\Phi(A)$ são da forma $\lambda = \mu_i - \mu^\alpha$, com $i = 1, \dots, s$ e $\alpha \in \Gamma^j$. Seja $A \in GL_s(\mathbb{R})$, com autovalores $\mu_1, \dots, \mu_s$. Vamos denotar por $\Lambda^j(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \mu_i - \mu^\alpha; i = 1, \dots, s; \alpha \in \Gamma^j\}$. Denotemos ainda por $\mathcal{P}_k$ o espaço dos polinômios de grau k e seja d a dimensão do espaço vetorial real $L_{sym}^j(\mathbb{R}^s)$. Finalmente, se $L : V \rightarrow V$ é uma transformação linear, denotemos por $p_L(x)$ seu polinômio característico. Considere,

agora, a seguinte aplicação contínua²

$$g : GL_s(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_d$$

$$A \mapsto g(A) = p_{\Phi(A)}(x) - \prod_{\lambda \in \Lambda^j(A)} (x - \lambda).$$

Observe que se A é diagonalizável, então $\sigma(\Phi(A))$ (o espectro de $\Phi(A)$) é o conjunto $\Lambda^j(A)$, e neste caso temos que $g(A) = 0^3$. Lembrando que o conjunto das matrizes $s \times s$ diagonalizáveis é denso em $GL_s(\mathbb{R})$, segue da continuidade de g que $g(A)$ é constante para toda $A \in GL_s(\mathbb{R})$. Assim, $\sigma(\Phi(A)) = \Lambda^j(A)$ para todo $A \in GL_s(\mathbb{R})$. Por hipótese, temos que $0 \notin \Lambda^j(A)$ e, portanto, $\Phi(A)$ é sempre inversível. Assim, a equação (5.0.2) possui única solução R_j .

□

Consideremos, agora, B uma vizinhança aberta da origem e um campo de vetores $X : B \rightarrow \mathbb{R}^s$. Seja $\varphi(t, x) = U(t)x$ o fluxo local deste campo de vetores. Se R é um difeomorfismo local que fixa a origem então podemos definir o campo $Y = D_*X$ por

$$Y(y) = DR(R^{-1}y) \cdot X(R^{-1}y),$$

com fluxo local dado por $(R_*\varphi)(t, y) = R(\varphi(t, R^{-1}y)) = RU(t)R^{-1}y$.

Lema 5.3. Sejam X campo de vetores C^k e $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ seu fluxo. Suponha que, $\varphi(t, 0) = 0$ para t suficientemente pequeno, digamos $|t| < \varepsilon$, suponha ainda que

$$D^j \varphi_t(0)x^j = 0 \quad j = 1, \dots, k \quad |t| < \varepsilon$$

Então, $X(0) = 0$ e $D^j X(0) = 0$ para $j = 1, \dots, k$.

Demonstração: Observe que, $X(0) = 0$ trivialmente, pois $\frac{d\varphi}{dt}(0, x)|_{x=0} = 0$ uma vez que $\varphi(t, 0) = 0$ para $|t| < \varepsilon$. Assim, o lema é verdadeiro para $k = 0$. Suponha por indução, que o lema seja verdadeiro para $k - 1$. Daí, definindo $\psi(t, x) = D\varphi_t(x)$, consideramos o

²Para provar a continuidade de g , observe que a aplicação Φ é contínua e a aplicação que associa uma matriz a seu polinômio característico é contínua, de modo que o termo $p_{\Phi(A)}(x)$ é uma função contínua de A . Além disso, as raízes de um polinômio variam continuamente em função dos coeficientes do polinômio, de modo que os autovalores de uma matriz variam continuamente em função dos termos da matriz. Assim, o produto $\prod_{\lambda \in \Lambda^j(A)} (x - \lambda)$ também é uma função contínua de A , pois ele não faz distinção entre os autovalores de A .

³Note que $g(A)$ é na verdade a diferença de dois polinômios mônicos do mesmo grau, e no caso em que A é diagonalizável, então estes polinômios possuem exatamente as mesmas raízes, logo são iguais.

campo determinado por

$$X' \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} \varphi(t, x) \\ \psi(t, x) \cdot \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\varphi(t, x)) \\ DX(\varphi(t, x)) \cdot \psi(t, x) \cdot \xi \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} X(x) \\ DX(x) \cdot \xi \end{pmatrix}.$$

Temos que X' é um campo C^{k-1} e com fluxo $\Phi_t(x, \xi)$ dado por $\Phi_t(x, \xi) = \begin{pmatrix} \varphi(t, x) \\ \psi(t, x) \cdot \xi \end{pmatrix}$. Por hipótese, temos que

$$D^j \Phi_t(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} D^j \varphi_t(0) \\ D^{j+1} \varphi_t(0) \cdot \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}^j = 0 \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Segue da hipótese de indução que $D^j X'(0) = 0$ para $j = 1, \dots, k-1$, mas

$$X' \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(x) \\ DX(x) \cdot \xi \end{pmatrix},$$

logo, $D^{k-1} X'(0) = 0$ implica que $D^k X(0) = 0$, como queríamos demonstrar. □

Teorema 5.4. *Seja X um campo de vetores C^k , $k = 1, 2, \dots, \infty$, definido em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^s$, com $X(0) = 0$. Sejam ainda $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ autovalores de $DX(0)$ e suponha que eles satisfaçam a condição*

$$\lambda_i \neq \xi \cdot \lambda, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}_+^s; \quad 2 \leq |\xi| \leq k, \quad (5.0.3)$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ e " $\cdot$ " representa o produto escalar usual em $\mathbb{R}^s$ e $|\xi| = \xi_1 + \dots + \xi_s$

Então, existe um C^k difeomorfismo local R em torno da origem, com $R(0) = 0$ e $DR(0) = 1$ tal que

$$(R_* X)x = DX(0)x + o(x^k).$$

Demonstração: Seja X_0 o campo de vetores linear dado por $X_0 x = DX(0)x$ e sejam $U(t)$ e $U_0(t)$ os fluxos locais gerados pelos campos X e X_0 , respectivamente. Como X é C^k , segue que $U(t) \in \mathcal{S}^k$ para todo t e como X_0 é linear então $U_0(t) \in \mathcal{S}^\infty \subset \mathcal{S}^k$. Sejam $\tilde{U}(t)$ e $\tilde{U}_0(t)$ as imagens em $\tilde{\mathcal{A}}^k$ de $U(t)$ e $U_0(t)$, respectivamente. Então, $\tilde{U}_0(t)$ é a parte linear de $\tilde{U}(t)$ e $U_0(t) = e^{tDX(0)}$. Logo, os autovalores de $U_0(t)$ são simplesmente $e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_s}$ e, portanto, estamos nas hipóteses do teorema anterior. Assim, para cada t

existe $\tilde{R} \in \tilde{\mathcal{A}}^k$ com $D\tilde{R}(0) = Id$ tal que $\tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1} = \tilde{U}_0(t)$. Observe porém, que o mesmo $\tilde{R}$ que serve para t funciona também para $2t$; de fato, se $\tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1} = \tilde{U}_0(t)$, então

$$\tilde{R}\tilde{U}(2t)\tilde{R}^{-1} = \tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1} = \tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1}\tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1} = \tilde{U}_0(t)\tilde{U}_0(t) = \tilde{U}_0(2t).$$

Portanto, da unicidade de $\tilde{R}$, segue que $\tilde{R}$ independe de t .

Temos ainda que $\mathcal{S}^k \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^k$ é sobrejetiva e, portanto, existe $R \in \mathcal{S}^k$, cuja imagem é $\tilde{R}$. Portanto, $R(0) = 0$, $DR(0) = 1$ e

$$RU(t)R^{-1}y = U_0(t)y + o(y^k),$$

sendo $o(y^k)$ dependendo de t .

Seja, agora, $\psi(t, x) = RU(t)R^{-1}x$ e $Y = R_*X$, de modo que Y gere o fluxo $\psi(t, x)$. Denotemos ainda $\varphi(t, x) = U_0(t)x$. Observe que, por construção, o polinômio de Taylor de ordem k de $\psi(t, x)$ e $\varphi(t, x)$ coincidem em uma vizinhança de $t_0 = 0$. Precisamos então mostrar que os campos Y e X_0 possuem o mesmo polinômio de Taylor de ordem k em torno de $x_0 = 0$. Mas isso segue do Lema 5.3.

□

Observação 5.5. Dizemos que uma matriz M satisfaz a *Primeira Condição de não Ressonância* (**CNR 1**), quando seus autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ satisfazem a condição (5.0.3), isto é,

$$\lambda_i \neq \xi \cdot \lambda, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}_+^s; \quad 2 \leq |\xi| \leq k, \quad (\text{CNR 1})$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, " $\cdot$ " representa o produto escalar usual em $\mathbb{R}^s$ e $|\xi| = \xi_1 + \dots + \xi_s$.

Analisemos um pouco a ideia básica por trás das demonstrações nos resultados a seguir. Sejam $U(t)$ e $U_0(t)$ dois grupos a um parâmetro de transformações em um espaço, por exemplo, fluxos campos de vetores em uma variedade. E suponha que exista o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t) = W,$$

note que

$$\begin{aligned}
U(s)WU_0(-s) &= U(s)\left(\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t)\right)U_0(-s) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} U(s)U(t)U_0(-t)U_0(-s) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} U(t+s)U_0(-t-s) = W.
\end{aligned}$$

Se W for inversível, temos então que $W^{-1}U(s)W = U_0(s)$ e portanto, os dois grupos a um parâmetro são conjugados. No caso particular em que eles são fluxos gerados por campos X e X_0 respectivamente, isso significa que $X_0 = W_*^{-1}X$.

Vamos, agora, demonstrar um lema técnico, que estabelece estimativas úteis na demonstração da existência do limite W .

Lema 5.6. Sejam $U \subset \mathbb{R}^s$ um aberto e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ aplicação Lipschitz, com constante de Lipschitz k . Seja φ o fluxo local gerado pelo campo X . Então, para $x, y \in U$ e $t > 0$ temos

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{kt}\|x - y\|.$$

Suponha ainda que $X = X_0 + X_1$, com X_0 e X_1 localmente Lipschitz, e seja φ_0 o fluxo local gerado por X_0 . Então, para $x \in U$ e $t > 0$

$$\|\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x)\| \leq \int_0^t e^{k(t-s)}\|X_1(\varphi_0(s, x))\|ds.$$

Demonstração: Da definição de fluxo, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x) &= x + \int_0^t X(\varphi(s, x))ds \\
\varphi(t, y) &= y + \int_0^t X(\varphi(s, y))ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| &\leq \|x - y\| + \int_0^t \|X(\varphi(s, x)) - X(\varphi(s, y))\|ds \\
&\leq \|x - y\| + \int_0^t k\|\varphi(s, x) - \varphi(s, y)\|ds.
\end{aligned}$$

Sejam, então, $f(t) = \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\|$, e Φ dada por

$$(\Phi g)(t) = \|x - y\| + \int_0^t k g(s) ds.$$

Note que $f \leq \Phi f$. Além disso, supondo que $\Phi^{j-1} f \leq \Phi^j f$, temos

$$\Phi^{j+1} f(t) - \Phi^j f(t) = \int_0^t k (\Phi^j f(s) - \Phi^{j-1} f(s)) ds \geq 0,$$

logo, demonstramos por indução que $f \leq \Phi f \leq \Phi^2 f \leq \Phi^3 f \leq \dots$.

Considere ainda a equação

$$F(t) = \|x - y\| + \int_0^t k F(s) ds$$

que pode ser reescrita como a equação diferencial: $F'(t) = kF(t)$, com $F(0) = \|x - y\|$. Note que, do teorema de Picard, as iteradas $\Phi^j f$ convergem uniformemente para uma solução desta EDO, logo $f \leq F$, mas F é dada por $F(t) = e^{kt}\|x - y\|$, provando a primeira afirmação do teorema.

Para provar a segunda afirmação, consideremos

$$\begin{aligned}\varphi(t, x) &= x + \int_0^t (X_0 + X_1)(\varphi(s, x)) ds \\ \varphi_0(t, x) &= x + \int_0^t X_0(\varphi_0(s, x)) ds.\end{aligned}$$

Então,

$$\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x) = \int_0^t ((X_0 + X_1)\varphi(s, x) - (X_0 + X_1)\varphi_0(s, x)) ds + \int_0^t (X_1\varphi(s, x)) ds.$$

Logo

$$\|\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x)\| \leq \int_0^t k \|\varphi(s, x) - \varphi_0(s, x)\| ds + \int_0^t \|X_1\varphi(s, x)\| ds.$$

De forma análoga à demonstração da afirmação anterior, vamos considerar $f(t) =$

$\|\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x)\|$ e a aplicação Ψ dada por

$$\Psi g(t) = \int_0^t \|X_1 \varphi(s, x)\| ds + \int_0^t kg(s) ds.$$

Novamente, por indução, mostramos que $\Psi^j f \leq \Psi^{j+1} f$ para todo j . Consideramos ainda a equação diferencial

$$F'(t) = kF(t) + \|X_1(\varphi_0(t, x))\|, \quad F(0) = 0.$$

Novamente, observamos que as funções $\Psi^j f(f)$ são iteradas de Picard deste PVI e, portanto, do teorema de Picard, elas convergem uniformemente para a solução $F(t) = e^{kt} \int_0^t e^{-ks} \|X_1(\varphi_0(s, x))\| ds$, finalizando a demonstração.

□

Vamos, agora, provar um caso particular do teorema de linearização de Sternberg. Posteriormente, usaremos isso para demonstrar o caso geral. Para auxiliar a notação, iremos denotar $f \sim g$ em $N \subseteq \mathbb{R}^s$ se $f - g$ é *flat* em N .

Teorema 5.7. *Seja X um campo de vetores C^∞ definido em uma vizinhança da origem $0 \in \mathbb{R}^s$ com $X(0) = 0$. Seja ainda $X_0 = DX(0)$ e suponha que*

$$X(x) = X_0(x) + o(x^\infty).$$

Suponha ainda que todos os autovalores λ de X_0 satisfaçam $\Re \lambda < 0$. Sejam $U(t)$ e $U(t_0)$ os fluxos associados aos campos X e X_0 respectivamente. Então,

$$W(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} U(-t)U_0(t)x$$

existe e é um difeomorfismo C^∞ local em torno da origem tal que

$$W_*^{-1}X = X_0$$

em uma vizinhança da origem.

Demonstração: Observe que só estamos interessados em campos definidos localmente, no entanto, é sempre possível estender este campo, mais ainda, é possível estendê-lo controlando os valores de sua derivada, de forma que ele seja globalmente Lipschitz. Podemos assim, sem perda de generalidade, supor que o campo X é definido em todo $\mathbb{R}^s$ e é globalmente Lipschitz, com constante de Lipschitz k . Assim, o fluxo $U(t)$,

também é globalmente definido.

Como já vimos anteriormente (Lema 4.3), o fato de que todos os autovalores λ de X_0 possuírem parte real negativa implica que existem constante $C > 0$ e $\mu > 0$ tais que

$$\|U_0(t)\| \leq Ce^{-\mu t} ; \quad \forall t \geq 0.$$

Defina X_1 pela equação $X = X_0 + X_1$ e para x fixado, seja $y = U_0(t)x$. Então, do Lema 5.6

$$\|U(-t)U_0(t)x - x\| = \|U(-t)y - U_0(-t)y\| \leq \int_0^t e^{k(t-s)} \|X_1(U_0(-s)y)\| ds \quad (5.0.4)$$

$$= \int_t^0 e^{kr} \|X_1(\underbrace{U_0(r-t)y}_{U_0(s) \text{ é um grupo}})\|(-dr) = \int_0^t e^{kr} \|X_1(U_0(r)U_0(-t)y)\| dr \quad (5.0.5)$$

$$= \int_0^t e^{kr} \|X_1(U_0(r)x)\| dr. \quad (5.0.6)$$

Seja agora $t_1 = t_2 + t$, com $t_1, t_2 \geq 0$. Novamente, pelo Lema 5.6

$$\|U(-t_1)U_0(t_1)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| = \|U(-t_2-t)U_0(t_2+t)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| \quad (5.0.7)$$

$$= \|U(-t_2)U(-t)U_0(t_2)U_0(t)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| \quad (5.0.8)$$

$$\leq e^{kt_2} \|U(-t)U_0(t_2)U_0(t)x - U_0(t_2)x\|. \quad (5.0.9)$$

Juntando as equações (5.0.4) e (5.0.7), obtemos

$$\begin{aligned} \|U(-t_1)U_0(t_1)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| &\leq e^{kt_2} \int_0^t e^{ks} \|X_1(U_0(s)U_0(t_2)x)\| ds \\ &= e^{kt_2} \int_0^t e^{ks} \|X_1(U_0(s+t_2)x)\| ds \end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando que $X \sim X_0$ na origem, temos que X_1 é $o(x^\infty)$. Assim,

tomando $g(x) = X_1(x)$, $N = \{0\}$, $h(t, x) = U_0(t)x$ e $D(h) = \mathbb{R}^s$, segue do Lema 4.4 que

$$\|U(-t_1)U_0(t_1)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| \leq e^{kt_2} \int_0^t e^{ks} \|X_1(U_0(s+t_2)x)\| ds \quad (5.0.10)$$

$$\leq e^{kt_2} \left(\frac{K_m C^m \|x\|^m e^{-\mu m t_2}}{m\mu - k} \underbrace{(1 - e^{(k-m\mu)t})}_{<1} \right) \quad (5.0.11)$$

$$\leq K_m C^m \|x\|^m e^{-(\mu m - k)t_2} \frac{1}{m\mu - k} \quad (5.0.12)$$

para todo x com $\|x\| < R$, para algum $R > 0$ arbitrário (as constantes K_m dependem de R).

Observamos que, se m for suficientemente grande ($\mu m - k > 0$), a rede (do inglês "*net*") $(U(-t)U_0(t)x)_{t>0}$ é uma rede de Cauchy em um espaço de Banach e, portanto, o operador W_- definido por

$$W_-(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t)x$$

existe e está bem definido. Além disso, para x em conjuntos limitados, a convergência é uniforme, de modo que W_- é contínuo.

Queremos agora provar que W_- é suave. Sejam $\psi(t, x) = DU(t)x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ e, analogamente⁴, $\psi_0(t, x) = D_x U_0(t)x = U_0(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$, e defina o campo $X' : \mathbb{R}^s \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^s) \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ da seguinte forma:

$$X' \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} \varphi(t, x) \\ \psi(t, x) \cdot \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\varphi(t, x)) \\ DX(\varphi(t, x)) \cdot \psi(t, x) \cdot \xi \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} X(x) \\ DX(x) \cdot \xi \end{pmatrix}$$

e analogamente

$$X'_0 \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} \varphi_0(t, x) \\ \psi_0(t, x) \xi \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} U_0(t)x \\ U_0(t) \cdot \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0(x) \\ X_0 \cdot \xi \end{pmatrix}$$

Observe que X' e X'_0 satisfazem as hipóteses iniciais, isto é: $X'(0) = 0$, $X'_0 = DX'(0)$ com $X' \sim X'_0$ na origem, e a parte real dos autovalores de X'_0 é sempre estritamente

⁴Como X_0 é linear, segue que $U_0(t)x$ é linear em x .

negativa⁵. Os fluxos de X' e X'_0 são dados por

$$\begin{aligned} U'(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U(t)x \\ DU(t)x \cdot \xi \end{pmatrix} \\ U'_0(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_0(t)x \\ DU_0(t)x \cdot \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0(t)x \\ U_0(t) \cdot \xi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

então,

$$U'(-t)U'_0(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(-t)(U_0(t)x) \\ (DU(-t))(U_0(t)x) \cdot (U_0(t) \cdot \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(-t)U_0(t)x \\ D(U(-t)U_0(t))x \cdot \xi \end{pmatrix}.$$

Mas, nos já provamos que nas condições do teorema $U'(-t)U'_0(t)$ converge, e para (x, ξ) limitados, a convergência é uniforme e, portanto, o limite é contínuo. Segue então que $D(U(-t)U_0(t))$ converge para uma aplicação contínua e, portanto, W_- é uma aplicação C^1 . Por indução, concluímos que $W_- \in C^\infty$.

Por outro lado, fazendo $t_2 = 0$ na equação (5.0.10), segue que

$$\|W_-(x) - x\| \leq \frac{K_m}{cm - k} C^m \|x\|^m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Logo, $W_-(x) = x + o(x^\infty)$. Portanto, $DW_-(0) = 1$ e, consequentemente, W_- é um difeomorfismo local em torno da origem. Como observamos anteriormente, temos que $U_0(t) = W_-U(t)W_-^{-1}$ e, portanto, $X_0 = ((W_-)^{-1})_*X$.

□

Segue dos teoremas 5.4 e 5.7, o seguinte corolário:

Corolário 5.8. Seja X um campo de vetores suave em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^s$, com $X(0) = 0$, e $DX(0)$ satisfazendo **(CNR 1)**. Suponha ainda que cada autovalor λ de $DX(0)$ satisfaça ainda a condição $\Re \lambda < 0$. Então, existe um difeomorfismo local R em torno da origem, tal que R_*X é linear em uma vizinhança da origem.

Lema 5.9. Seja X um campo de vetores suave em $\mathbb{R}^s$ com $X(0) = 0$. Sejam X_0 e X_1 os campos definidos por $X_0(x) = DX(0)x$ e $X_1 = X - X_0$ e sejam ainda $U(t)$ e $U_0(t)$ os fluxos gerados pelos campos X e X_0 , respectivamente. Suponha que, para $j = 0, 1, 2, \dots$, D^jX seja globalmente Lipschitz. Suponha ainda que existem um subespaço vetorial N em

⁵Observe que na verdade os autovalores de X_0 e X'_0 coincidem, a menos de multiplicidade.

$\mathbb{R}^s$ que seja invariante por X_0 e um inteiro positivo l tal que, para todo $m \geq 0$ inteiro e $j = 0, 1, 2, \dots$, existem $\delta > 0$ e $M > 0$ com

$$\|z - N\| < \delta \Rightarrow \|D^j X_1(z)\| \leq M\|z - N\|^m \|z\|^l. \quad (5.0.13)$$

Seja E o subspaço vetorial formado por todo $x \in \mathbb{R}^s$ que satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U_0(t)x - N\| = 0.$$

Então, para todo $j = 0, 1, 2, \dots$ e $x \in E$,

$$D^j(U(-t)U_0(t))x$$

converge quando $t \rightarrow \infty$ e o limite é contínuo em x para $x \in E$. Defina assim,

$$W_-(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} U(-t)U_0(t)x \quad ; \quad x \in E,$$

então, W_- possui uma extensão C^∞ $G : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ tal que $G(x) = x + o(x^\infty)$ em N e, em uma vizinhança da origem em E , $(G^{-1})_* X \rightarrow X_0$.

Demonstração: Como já vimos na demonstração do Lema 4.9, o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U_0(t)x - N\| = 0,$$

na verdade implica que existem constantes $C > 0$ e $\mu > 0$ tais que

$$\|U_0(t)x - N\| \leq Ce^{-\mu t} \|x - N\|$$

para todo $t \geq 0$, $x \in E$. Seja k uma constante de Lipschitz global para X_1 (essa constante existe, pois X_1 é a soma de mapas globalmente Lipschitz, em particular, podemos escolher essa constante, de modo que k seja também constante de Lipschitz global para X_0 e X) e tome $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $m\mu - k - lk > 0$. Seja $B_r = \{x \in \mathbb{R}^s; \|x - N\| < r\}$. Então, para todo $r > 0$, existe $t_r \geq 0$ tal que

$$\|U_0(s)x - N\| \leq \delta \quad ; \quad \forall x \in B_r \cap E \quad ; \quad t \geq t_r.$$

Observe que se $r = \frac{\delta}{C}$, então podemos tomar $t_r = 0$.

Seja $t_1 = t_2 + t$, com $t, t_2 \geq t_r$. Então, de maneira similar à demonstração anterior

$$\begin{aligned} \|U(-t_1)U_0(t_1)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| &= \|U(-t_2)U(-t)U_0(t)U_0(t_2)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| \\ &\leq e^{kt_2}\|U(-t)U_0(t)U_0(t_2)x - U_0(t_2)x\| \\ &\leq e^{kt_2}\int_0^t e^{ks}\|X_1(U_0(t_2+s)x)\|ds. \end{aligned}$$

Lembrando que $\|X_1(z)\| \leq M\|z - N\|^m\|z\|^l$ se $\|z - N\| < \delta$, então para $x \in B_r \cap E$ e $t_2 \geq t_r$

$$\begin{aligned} e^{kt_2}\int_0^t e^{ks}\|X_1(U_0(t_2+s)x)\|ds &\leq e^{kt_2}\int_0^\infty e^{ks}M\|U_0(t_2+s)x - N\|^m\|U_0(t_2+s)x\|^l ds \\ &\leq Me^{kt_2}\int_0^\infty e^{ks}(Ce^{-\mu(s+t_2)}\|x - N\|)^m\|U_0(t_2+s)x\|^l ds. \end{aligned}$$

Note que

$$\|U_0(t)x\| \leq \|U_0(t)\|\|x\| \leq e^{\|DX(0)\|t}\|x\| \leq e^{kt}\|x\| \quad ; \quad \forall x \in E,$$

logo, para $x \in B_r \cap E$, e $t \geq t_r$ e definindo $V = V(t_1, t_2, x) = \|U(-t_1)U_0(t_1)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\|$, temos:

$$\begin{aligned} V &\leq Me^{kt_2}\int_0^\infty e^{ks}(Ce^{-\mu(s+t_2)}\|x\|)^m\|U_0(t_2+s)x\|^l ds \\ &\leq MC^m\|x - N\|^m e^{(k-m\mu)t_2}\int_0^\infty e^{(k-m\mu)s}(e^{k(t_2+s)}\|x\|)^l ds \\ &\leq MC^m e^{(k-m\mu)t_2}\|x - N\|^m\int_0^\infty e^{(k-m\mu)s}(e^{k(t_2+s)}\|x\|)^l ds \\ &= (MC^m\|x - N\|^m\|x\|^l e^{-(m\mu-k-kl)t_2})\frac{1}{(m\mu-k-kl)} \leq \frac{MC^m r^m\|x\|^l e^{-(m\mu-k-kl)t_2}}{(m\mu-k-kl)} \xrightarrow{t_2 \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Isso prova que W_- existe e, definindo $\tilde{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^s; \|x\| < R\}$, temos que a convergência é uniforme para $x \in \tilde{B}_R \cap B_r \cap E$. Portanto, W_- é contínua em $\tilde{B}_R \cap B_r \cap E$. Da arbitrariedade de r e R , segue que W_- existe e é contínua em E . Por outro lado, se W_- for C^∞ (e de fato, demonstraremos isso logo adiante), então, tomando $r = \frac{\delta}{C}$, podemos fazer $t_2 = 0$ obtendo a seguinte desigualdade

$$V(t_1, 0, x) = \|U(-t_1)U_0(t_1)x - x\| \leq \frac{MC^m\|x - N\|^m\|x\|^l}{(m\mu-k-kl)},$$

para todo $x \in B_r \cap E$ e $t_1 \geq 0$. Fazendo $t_1 \rightarrow \infty$ obtemos

$$\|W_-(x) - x\| \leq \frac{MC^m \|x - N\|^m \|x\|^l}{(m\mu - k - kl)} ; \quad \forall x \in B_r \cap E$$

e, portanto, da arbitrariedade de m , segue que W_- é a identidade módulo *flat* em N , isto é, $(W_-(x) - x)$ é $o(x^\infty)$ em N .

Para provarmos que W_- é suave, vamos repetir as contas feitas na demonstração do Teorema 5.7. Defina novamente em $\mathbb{R}^s \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ os campos

$$X' \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(x) \\ DX(x) \cdot \xi \end{pmatrix} \quad e \quad X'_0 \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0(x) \\ X_0 \cdot \xi \end{pmatrix},$$

e seja $N' \subseteq \mathbb{R}^s \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ o espaço de todos os $\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$ tais que $x \in N$. Observe que N' é invariante por X'_0 . Lembrando que os fluxos de X' e X'_0 são dados por

$$U'(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(t)x \\ DU(t)x \cdot \xi \end{pmatrix} \quad e \quad U'_0(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0(t)x \\ U_0(t) \cdot \xi \end{pmatrix},$$

respectivamente. Defina também X'_1 por $X' = X'_0 + X'_1$. Então,

$$X'_1 \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(x) \\ DX_1(x) \cdot \xi \end{pmatrix}$$

e, assim, para $(z, \eta) \in \mathbb{R}^s \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ temos:

$$\|D^j X'_1(z, \eta)\| \leq \|D^j X_1(z)\| + \|D^{j+1} X_1(z) \cdot \eta\| \leq \|D^j X_1(z)\| + \|D^{j+1} X_1(z)\| \|(z, \eta)\|.$$

Por hipótese, para cada m e para cada j existem $\delta_0, \delta_1, M_0, M_1$ tais que $\|D^j X_1(z)\| \leq M_0 \|z - N\|^m \|z\|^l$ e $\|D^{j+1} X_1(z)\| \leq M_1 \|z - N\|^m \|z\|^l$ se $\|z - N\|$ for menor que δ_0 e δ_1 respectivamente. Tomando $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ então $\|(z, \eta) - N'\| = \|z - N\| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} \|D^j X_1(z, \eta)\| &\leq M_0 \|z - N\|^m \|z\|^l + M_1 \|z - N\|^m \|z\|^l \|(z, \eta)\| \\ &\leq M \|z - N\|^m \|(z, \eta)\|^{l+1} = M \|(z, \eta) - N'\|^m \|(z, \eta)\|^{l+1}. \end{aligned}$$

Finalmente, observando que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U'_0(t)(x, \xi) - N'\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|U_0(t)x - N\| = 0,$$

temos que se $E' \subseteq \mathbb{R}^s \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ é o espaço formado por todos os $\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$ tais que $x \in E$, então, X' e X'_0 estão nas condições do teorema e neste caso concluimos que

$$U'(-t)U'_0(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(-t)U_0(t)x \\ D(U(-t)U_0(t))x \cdot \xi \end{pmatrix}$$

converge a uma função contínua para todo $x \in E$. Portanto, $D(U(-t)U_0(t))$ converge, quando $t \rightarrow \infty$, a uma função contínua em x , para todo $x \in E$. Mostramos assim que W_- é C^1 em E . Por indução, mostramos que $D^j(U(-t)U_0(t))$ converge a uma função contínua de $x \in E$. De modo que W_- é suave.

Precisamos, agora, encontrar uma maneira de estender (suavemente) W_- a uma aplicação $G : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ que é a identidade modulo *flat* em uma vizinhança da origem em N . Considere as seguintes aplicações

$$G_j(x) = \frac{1}{j!} \lim_{t \rightarrow \infty} D^j(U(-t)U_0(t))x,$$

para cada $x \in E$. Como já vimos, $G(x)$ está bem definida. Seja agora $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, positiva, de suporte compacto tal que $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho \equiv 1$ em uma vizinhança da origem, e $\text{supp}(\rho) \subseteq [-1, 1]$. Seja ainda $E^\perp$ o complemento ortogonal de E , de modo que $\mathbb{R}^s = E \oplus E^\perp$. Agora, de maneira análoga à demonstração de 4.11, defina

$$\tilde{G}(x \oplus y) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(x) y^j \rho(\|G_j(x)\|^2 \|y\|_{E^\perp}^2),$$

onde $\|y\|_{E^\perp} = \|y - E\|$ e $\|G_j(x)\|$ é a norma euclidiana usual. Essa função não está definida sempre, mas ela é bem definida em uma vizinhança B de E . De fato, observe que se $\|G_j(x)\|^2 \|y\|^2 \geq 1$, então o j -ésimo termo da série se anula. Assim, existe uma subsequência de $\mathbb{Z}_+$, denotada por $(j_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tal que

$$\tilde{G}(x \oplus y) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{j_n}(x) y^{j_n} \rho(\|G_{j_n}(x)\|^2 \|y\|_{E^\perp}^2)$$

com $\|G_{j_n}(x)\| \|y\|_{E^\perp} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(x \oplus y)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|G_{j_n}(x)\| \|y\|_{E^\perp}^{j_n} \rho(\|G_{j_n}\| \|y\|_{E^\perp}^2) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|G_{j_n}(x)\| \|y\|_{E^\perp}^{j_n} \\ &= \|G_{j_0}(x)\| \|y\|_{E^\perp}^{j_0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \|G_{j_n}(x)\| \|y\|_{E^\perp}}_{<1} \|y\|_{E^\perp}^{j_n-1} < \|G_{j_0}(x)\| \|y\|_{E^\perp}^{j_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \|y\|_{E^\perp}^{j_n-1} \end{aligned}$$

Definindo $B = \{x \oplus y \in E \oplus E^\perp \equiv \mathbb{R}^s; \|y - E\| < r < 1\}$, temos que a soma acima converge uniformemente em B e, portanto, $\tilde{G}(x \oplus y)$ está bem definida em B . Além disso, nesta vizinhança de E , temos que $\tilde{G}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- $\tilde{G}$ é C^∞ . Para provar isso, derivamos a série termo a termo e repetimos a conta acima, para provar que a série das derivadas é uniformemente convergente em B .
- $D^j \tilde{G}(x) = j! G_j(x)$ para todo $x \in E$. Em particular, $D^j(\tilde{G}(x) - x) = 0$ para todo $x \in N$, de modo que G é a identidade módulo *flat* em N .
- $\tilde{G}$ é uma extensão suave de W_- .

Escolhendo uma função suave $\alpha : \mathbb{R}^s \rightarrow R$ com suporte nessa vizinhança e tal que $\alpha \equiv 1$ em uma vizinhança (um pouco menor) de E , podemos definir $G = \alpha \tilde{G}$. Observemos que, como α vale um em uma vizinhança de E , então G possui as mesmas propriedades de $\tilde{G}$ listadas acima.

Como G é uma extensão de W_- , segue que $U(-t)GU_0(t)x = G(x)$, para x em uma vizinhança de 0 em E . Além disso, para cada s fixado, temos que

$$D^j(U(-s)U(-t)U_0(t)U_0(s))x = D^j(U(-t-s)U_0(t+s))x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} D^j G(x),$$

mas

$$D^j(U(-s)U(-t)U_0(t)U_0(s))x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} D^j(U(-s)GU_0(s))(x).$$

Logo, $U(-s)GU_0(s) = G$ módulo *flat* em uma vizinhança da origem em E . Assim, $U_0(s) = GU(s)G^{-1}$ em E a menos de uma função *flat*. Segue do Lema 5.3 que

$(G^{-1})_*X = X_0 + o(x^\infty)$ em uma vizinhança da origem em E

□

Finalmente, vamos ao teorema de linearização de Sternberg

Teorema 5.10. *Seja X um campo suave em uma vizinhança da origem $0 \in \mathbb{R}^s$, com $X(0) = 0$. Suponha que $DX(0)$ satisfaça a condição **(CNR 1)**. Então, existe um difeomorfismo local F em torno da origem, tal que F_*X é linear em uma vizinhança da origem.*

Demonstração: Segue do Teorema 5.4, que existe um difeomorfismo local R tal que $R_*X = DX(0) + o(x^\infty)$, de modo que podemos, sem perda de generalidade assumir que $X \sim X_0$ na origem, onde $X_0(x) = DX(0)x$.

Seja $U_0(t)$ o fluxo associado ao campo X_0 e considere E^- e E^+ os auto-espacos de $\mathbb{R}^s$ associados aos autovalores com partes reais negativas e positivas (respctivamente) de X_0 , de modo que

$$x \in E^- \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(t)x = 0 \quad ; \quad x \in E^+ \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t)x = 0.$$

Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^s)$, com $f \equiv 1$ em uma vizinhança da origem e com suporte dentro da vizinhança onde X está definida. Seja $X' = -fX$. Como X' tem suporte compacto, segue que $D^j X'$ é globalmente Lipschitz. Tomando $N = \{0\}$, temos que N é invariante por $-X_0 = DX'(0)$. Além disso, como $X_1 = X' - DX'(0) \sim 0$ na origem, segue que X_1 satisfaz a estimativa (5.0.13). Finalmente, tomando $E = E^+$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U_0(-t)x - N\| = 0 \Leftrightarrow x \in E.$$

Estamos, então, em condições de aplicar o Lema 5.9 e concluímos que existe um difeomeorfismo local G , tal que $G_*X' - DX'(0)$ é *flat* em uma vizinhança da origem em E . Vamos, novamente sem perda de generalidade, supor que este seja o caso. Isto é, X é um campo suave em torno da origem, com $X \sim DX(0)$ em uma vizinhança B da origem em E^+ .

Seja $\alpha : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave de suporte compacto tal que $\alpha \equiv 1$ em uma vizinhança da origem e $\text{supp}(\alpha) \cap E^+ \subseteq B$.

Seja $\tilde{X} = (X_0 + \alpha(X - X_0))f$, onde $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^s)$ é como vimos anteriormente. Temos

que $\tilde{X} = X_0$ fora de um compacto e $\tilde{X} \sim X_0$ em E^+ . Observe que $D\tilde{X}(0) = X_0$. Além disso, como $\tilde{X}$ tem suporte compacto, então $D^j\tilde{X}$ é globalmente Lipschitz para todo $j \in \mathbb{Z}_+$.

Considere $N = E^+$. Temos que N é invariante por X_0 . Definindo X_1 por $X_1 = \tilde{X} - X_0$, temos que X_1 é *flat* em N e, portanto, X_1 satisfaz a estimativa (5.0.13). Além disso, escrevendo $x \oplus y \in E^- \oplus E^+ = \mathbb{R}^s$, temos

$$\|U_0(t)(x \oplus y) - N\| = \|U_0(t)(x) + \underbrace{U_0(t)(y) - N}_{\in N}\| = \|U_0(t)(x) + N\|.$$

Como $U_0(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, para todo $x \in E^-$ e $0 \in N$ temos

$$\|U_0(t)(x \oplus y) - N\| = \|U_0(t)(x) + N\| \leq \|U_0(t)x\| \rightarrow 0 ; \quad \forall x \oplus y \in E^- \oplus E^+ = \mathbb{R}^s.$$

Logo, tomando $E = \mathbb{R}^s$, podemos aplicar o Lema 5.9 obtendo que existe um difeomorfismo local $\tilde{G}$ em torno da origem, tal que $\tilde{G}_*\tilde{X} \sim X_0$ em uma vizinhança da origem em $E = \mathbb{R}^s$ e, em particular, que nesta vizinhança $\tilde{G}_*\tilde{X} = X_0$. Como $\tilde{X} = X$ em uma vizinhança (possivelmente menor) da origem, segue o resultado.

□

Resolubilidade local de campos vetoriais reais com singularidade isolada

6.1 Resultado Principal

Seja L um campo vetorial com coeficientes lineares reais e c uma constante arbitrária. O teorema que apresentamos do Guillemin-Schaeffer estabelece condições para que a equação $(L + c)u = f$ admita solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ quando f é *flat* em torno da origem; a condição de que f seja *flat* é bastante restritiva, limitando o alcance do teorema. Gostaríamos, então, de estender o resultado, e obter condições para que $(L + c)u = f$ seja localmente resolúvel para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$. O resultado final que demonstraremos nesta sessão (obtido em [Silva, dos Santos Filho, 2006]) vai além, e, considerando o caso em que c não é mais constante (e sim uma função em $C^\infty(\mathbb{R}^s)$), estabelece uma condição de não ressonância adicional em $c(0)$, que garante a resolubilidade local de $L + c$. A demonstração que apresentaremos segue de perto a demonstração feita por Fronza em sua tese de doutorado [Silva, 2006].

Lema 6.1. Seja L um campo vetorial real em $\mathbb{R}^s$ e seja $x_0 = 0$ um ponto crítico isolado de L . Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_{s'}, \lambda_{s'+1}, \dots, \lambda_s$ os autovalores de $DL(0)$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{s'}$ são os autovalores reais e $\lambda_{s'+1}, \dots, \lambda_s$ são os autovalores com parte imaginárias não nulas de $DL(0)$, sendo $\lambda_{s'+2j-1}$ e $\lambda_{s'+2j}$ autovalores conjugados. Seja ainda $c \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$. Então, são equivalentes:

(a): c satisfaz a seguinte condição de não ressonância (denotada por **(CNR 2)**),

$$-c(0) \neq \sum_{j=1}^{s'} m_j \lambda_j + 2 \sum_{l=1}^{(s-s')/2} m'_l \Re(\lambda_{s'+2l}) + \sum_{l=1}^{(s-s')/2} iK(l) \Im(\lambda_{s'+2l}) \quad (6.1.1)$$

com $m_j, m'_l \in \mathbb{Z}_+$, $K(l) \in \mathcal{M}(m_l)$ e $\mathcal{M}(m) = \{-m, 2-m, \dots, m-2, m\}$

(b): Para todo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ tal que $(L+c)u - f$ é uma função *flat* na origem.

Demonstração: Considere $L = \sum_{j=1}^s a_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ e denote $P = L + c$. Temos que $Pu \sim f$ na origem, significa que todas as derivadas, de todas as ordens de Pu e de f coincidem. Para evitar que a notação fique carregada, escreveremos $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$. Assim,

$$Pu \sim f \text{ na origem} \Leftrightarrow \partial^\alpha(Pu)(0) = \partial^\alpha f(0) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^s$$

Temos

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(Lu)(0) &= \sum_{j=1}^s \partial^\alpha(a_j \partial^{e_j} u)(0) = \sum_{j=1}^s \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\partial^\beta a_j(0) \partial^{e_j + \alpha - \beta} u(0) \right) \\ &= R_1^\alpha + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \binom{\alpha}{e_k} \left(\partial^{e_k} a_j(0) \partial^{\alpha + e_j - e_k} u(0) \right) + \sum_{j=1}^s a_j(0) \partial^{e_j + \alpha} u(0) \\ &= R_1^\alpha + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \alpha_k \partial^{e_k} a_j(0) \partial^{\alpha + e_j - e_k} u(0), \end{aligned}$$

onde

$$R_1^\alpha = \sum_{j=1}^s \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| > 1}} \binom{\alpha}{\beta} \left(\partial^\beta a_j(0) \partial^{e_j + \alpha - \beta} u(0) \right).$$

Similarmente, temos

$$\partial^\alpha(cu)(0) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left(\partial^{\alpha - \gamma} c(0) \partial^\gamma u(0) \right) = c(0) \partial^\alpha u(0) + R_2^\alpha,$$

onde

$$R_2^\alpha = \sum_{\gamma < \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left(\partial^{\alpha - \gamma} c(0) \partial^\gamma u(0) \right).$$

Assim, temos $Pu \sim f$ se, e somente se,

$$\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \alpha_k \partial^{e_k} a_j(0) \partial^{\alpha+e_j-e_k} u(0) + c(0) \partial^\alpha u(0) + R_1^\alpha + R_2^\alpha = \partial^\alpha f(0), \quad (6.1.2)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^s$. Observe que R_1^α e R_2^α só dependem das derivadas de u de ordem menor ou igual a $|\alpha| - 1$. Defina $\Lambda_s^m = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^s; |\alpha| = m\}$ e $M = \#\Lambda_s^m$. Fixe uma ordenação em Λ_s^m , digamos $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^M)$. Denote $\partial^m = (\partial^{\alpha^1} u(0), \dots, \partial^{\alpha^M} u(0))$ e $f^m = (\partial^{\alpha^1} f(0), \dots, \partial^{\alpha^M} f(0))$. Podemos reescrever (6.1.2) na forma

$$(B^m + c(0)I) \partial^m = f^m + v^{m-1}, \quad (6.1.3)$$

para todo $m \in \mathbb{Z}_+$, sendo B^m uma matriz quadrada de ordem M , cujas entradas dependem de $DL(0)$ e da ordenação de Λ_s^m e $v^{m-1} \in \mathbb{C}^M$ satisfaz¹

$$\{\partial^\alpha u(0) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^s \text{ com } |\alpha| \leq m-1\} \Rightarrow v^{m-1} = 0. \quad (6.1.4)$$

Lema 6.2. Existe uma ordenação de Λ_s^m tal que

$$\text{Spec } B^m = \left\{ \sum_{j=1}^{s'} m_j \lambda_j + 2 \sum_{l=1}^{(s-s')/2} m'_l \Re(\lambda_{s'+2l}) + \sum_{l=1}^{(s-s')/2} iK(l) \Im(\lambda_{s'+2l}), K(l) \in \mathcal{M}(m'_l) \right\},$$

sendo $m_1 + \dots + m'_s + m'_1 + m'_{(s-s')/2} = m$ e $\mathcal{M}(m) = \{-m, -m+2, \dots, m-2, m\}$

Suponha que este lema seja verdadeiro. Temos que, se vale a condição **(CNR 2)**, então (6.1.3) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\partial^m = (B^m + c(0)I)^{-1} (f^m + v^{m-1}),$$

assim, é possível construir, a partir dos valores (determinados unicamente e indutivamente em m pelos sistemas (6.1.3)) $\partial^\alpha(u)$, uma função suave u , que satisfaz **(b)**.

Reciprocamente, suponha que (a) não seja válido. Então, $c(0) \in \text{Spec } B^{m_0}$ para algum $m_0 \in \mathbb{Z}_+$. Suponhamos m_0 minimal para esta propriedade. Vamos provar que existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ tal que o sistema (6.1.3) não possui solução (e, portanto, não é possível construir a u desejada). Se $m_0 = 0$, basta tomar f com $f(0) \neq 0$. Se $m_0 > 0$ então, como

¹Para $m = 0$, não existem derivadas de ordem menor e, portanto, definimos $v^{-1} = 0 \in \mathbb{R}$.

$c(0) \in \text{Spec} B^{m_0}$, segue que existe $w \in \mathbb{C}^{M_0}$ tal que:

$$(B^{m_0} + c(0)I)u^{m_0} \neq w ; \quad \forall u^{m_0} \in \mathbb{C}^{M_0}.$$

Basta escolher, então, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ tal que $\partial^\alpha f(0) = 0$ se $|\alpha| < m_0$ e $f^{m_0} = w$. Segue de (6.1.4) que

$$(B^{m_0} + c(0)I)u^{m_0} \neq f^{m_0} + v^{m_0-1} ; \quad \forall u^{m_0} \in \mathbb{C}^{M_0}.$$

Resta, agora, demonstrar o Lema 6.2. Isso será feito na próxima sessão

□

Teorema 6.3. *Considere o operador $P = L + c$, sendo L um campo vetorial com singularidade isolada na origem e c uma função qualquer. Suponha que as condições de não ressonância **(CNR 1)** e **(CNR 2)** sejam satisfeitas. Então, para todo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ tal que $Pu = f$ em uma vizinhança da origem.*

Lembrando que L satisfaz a condição de não ressonância **(CNR 1)** se os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de $DL(0)$ satisfazem

$$\lambda_i \neq \xi \cdot \lambda, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}_+^s ; \quad 2 \leq |\xi| \leq k, \quad \textbf{(CNR 1)}$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$.

Demonstração: Basta provarmos que, dada $g \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ *flat* na origem, existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ tal que $Pu = g$. De fato, sabemos do Lema 6.1 que, nas condições do teorema, dada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$, existe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ tal que $g = f - Pv$ é uma função *flat*. Assim $P(u + v) = Pu + Pv = g + (f - g) = f$.

A condição da não ressonância **(CNR 2)** implica que $c(0) \neq 0$. Assim, $P_1 = \frac{1}{c}P$ está bem definido em uma vizinhança da origem. Temos que $P_1 = L_1 + 1$, sendo $L_1 = \frac{1}{c}L$. Além disso,

$$DL_1(0) = \frac{1}{c(0)}DL(0) + D\left(\frac{1}{c(x)}\right)\bigg|_{x=0}L(0).$$

Como $L(0) = 0$, segue que

$$DL_1(0) = \frac{1}{c(0)}DL(0).$$

Então, se $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ são autovalores de $DL(0)$, temos que $\tilde{\lambda}_i = \frac{1}{c(0)}\lambda_i$ é autovalor de $DL_1(0)$. Logo, L_1 também satisfaz a condição de não ressonância **(CNR 1)**. O teorema de Sternberg nos garante que existe uma mudança de coordenadas F , tal que

$$P_2 = F_*P_1 = \frac{1}{c_0}DL(0) + 1.$$

Segue do teorema do Guillemin-Schaeffer (Teorema 4.11) que, dada $g \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ *flat* na origem, existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$ tal que $P_2u = g$, como queríamos. □

6.2 Demonstração do Lema 6.2

6.2.1 Sobre ordenação de conjuntos

Definição 6.4. Seja Λ um conjunto finito, com $|\Lambda| = \sharp\Lambda$. Uma ordenação de Λ é uma bijeção $h : \{1, 2, \dots, |\Lambda|\} \rightarrow \Lambda$. Dizemos que $h(k)$ sucede $h(j)$ quando $j < k$. Dizemos ainda que $h(j+1)$ é o sucessor de $h(j)$. Quando $k_1 < j < k_2$ ou $k_2 < j < k_1$ dizemos que $h(j)$ está entre $h(k_1)$ e $h(k_2)$.

Definição 6.5. Dados dois conjuntos finitos Λ_1 e Λ_2 , com ordenações h_1 e h_2 respectivamente, definimos em $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ a ordenação produto $h_1 \times h_2$ da seguinte forma. Para cada $k = 1, 2, \dots, |\Lambda_1|$, defina

$$A_k = \{(k-1)|\Lambda_2| + 1, (k-1)|\Lambda_2| + 2, \dots, \underbrace{(k-1)|\Lambda_2| + |\Lambda_2|}_{k|\Lambda_2|}\}.$$

Note que $k_1 \neq k_2$ implica que A_{k_1} e A_{k_2} são disjuntos, mais precisamente, se $n \in A_{k_1}$ e $m \in A_{k_2}$, então $k_1 < k_2 \Rightarrow n < m$. Além disso,

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{|\Lambda_1|} = \{1, \dots, |\Lambda_1||\Lambda_2|\} = \{1, \dots, |\Lambda_1 \times \Lambda_2|\}.$$

Definimos, então,

$$(h_1 \times h_2)(j) = (h_1(k), h_2(j - (k-1)|\Lambda_2|)) \quad ; \quad \text{se } j \in A_k.$$

Note que se $\alpha_1 = h_1(k_1)$ e $\alpha_2 = h_1(k_2) \in \Lambda_1$ são tais que α_2 sucede α_1 , então (α_2, β) sucede (α_1, β) . De fato, escrevendo $(\alpha_2, \beta) = (h_1 \times h_2)(m)$ e $(\alpha_1, \beta) = (h_1 \times h_2)(n)$, temos que $m \in A_{k_2}$ e $n \in A_{k_1}$. Como α_2 sucede α_1 , temos $k_1 < k_2$ e, portanto, $n < m$.

Além disso, entre (α_2, β) e (α_1, β) , existem exatamente, $(k_2 - k_1)|\Lambda_2| - 1$ elementos. De fato, se $\beta = h_2(l)$, então

$$\begin{cases} (\alpha_1, \beta) = (h_1 \times h_2)(n) = (h_1 \times h_2)((k_1 - 1)|\Lambda_2| + l) \\ (\alpha_2, \beta) = (h_1 \times h_2)(m) = (h_1 \times h_2)((k_2 - 1)|\Lambda_2| + l) \end{cases}.$$

Portanto, entre (α_2, β) e (α_1, β) , existem exatamente $m - n - 1 = (k_2 - k_1)|\Lambda_2| - 1$ elementos. Em particular, se k_2 é o sucessor de k_1 , então entre (α_2, β) e (α_1, β) existem exatamente $|\Lambda_2| - 1$ elementos. É simples verificar também que a ordenação produto é associativa no seguinte sentido: se Λ_1, Λ_2 e Λ_3 são conjuntos finitos com ordenações h_1, h_2 e h_3 respectivamente, então $((h_1 \times h_2) \times h_3)(j) = (h_1 \times (h_2 \times h_3))(j)$, para qualquer $j \in \{1, \dots, |\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \Lambda_3|\}$; assim, faz sentido falar da ordem produto de um número finito de conjuntos ordenados (também finitos) qualquer.

Considere, agora, $\Lambda_s^m = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^s; |\alpha| = m\}$. Defina neste conjunto a ordem lexicográfica usual². Então, Λ_s^m munido desta ordem satisfaz:

P0: $\forall \alpha \in \Lambda_s^m$, temos que $\alpha + e_j - e_k$ sucede α se $j < k$ e $\alpha_k \neq 0$.

Em Λ_2^m a ordenação lexicográfica é escrita de maneira explícita como:

$$h(j+1) = (j, m-j) ; j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Dados $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+$, considere o conjunto $\Lambda_2^{m_1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_n}$ com a ordenação produto. Então, das observações que fizemos acerca da ordenação produto obtemos a seguinte propriedade:

P1: Se $\alpha \in \Lambda_2^{m_1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_n}$ e $\alpha_{2k} \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, então, $\alpha + e_{2k-1} - e_{2k}$ sucede α e entre α e $\alpha + e_{2k-1} - e_{2k}$ existem exatamente $|\Lambda_2^{m_k+1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_n}| - 1$ elementos.

Analogamente, temos

P1': Se $\alpha \in \Lambda_2^{m_1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_n}$ e $\alpha_{2k-1} \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, então, α sucede $\alpha - e_{2k-1} + e_{2k}$ e entre α e $\alpha - e_{2k-1} + e_{2k}$ existem exatamente $|\Lambda_2^{m_k+1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_n}| - 1$ elementos.

Em particular, se $\alpha_{2n} \neq 0$, então $\alpha + e_{2n-1} - e_{2n}$ é o sucessor de α e se $\alpha_{2n-1} \neq 0$ então α é o sucessor de $\alpha - e_{2n-1} + e_{2n}$.

²Na ordem lexicográfica, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ sucede $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ se, e somente se, $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, 2, \dots, l-1$ e $\beta_l > \alpha_l$ para algum $l \leq s$.

6.2.2 uma matriz especial

Para cada $n \geq 1$, sejam $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}$. Defina $T(A, 0, b) = A$ e, para $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq 1$, defina

$$T(A, m, b) = \begin{pmatrix} A & mbI_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -bI_n & A & (m-1)bI_n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2bI_n & A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & bI_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -mbI_n & A \end{pmatrix},$$

onde $I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ denota a matriz identidade. Considere $T_0(m; b) = T(0, m, b)$ com $0 \in \mathbb{R}$. Dados $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ e $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ defina então $T_0(m_1, m_2; b_1, b_2) = T(T_0(m_1; b_1); m_2; b_2)$ e indutivamente, defina

$$T_0(m_1, \dots, m_r; b_1, \dots, b_r) = T(T_0(m_1, \dots, m_{r-1}; b_1, \dots, b_{r-1}); m_r; b_r). \quad (6.2.1)$$

O seguinte resultado será crucial para a demonstração da afirmação, e sua demonstração se encontra no Apêndice:

Teorema 6.6. *Sejam $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$. Então $\text{Spec}T_0(m; b) = \{ibK; K \in \mathcal{M}(m)\}$*

Demonstração: No Apêndice. □

Estamos interessados em estudar o espectro das matrizes (6.2.1). Antes disso, vamos obter uma expressão conveniente para o polinômio característico de $T_0(m, b)$. Mais geralmente, vamos considerar o polinômio característico de uma matriz tridiagonal A cuja diagonal principal é nula, isto é, se $A = (v_{i,j})_{i,j=1,\dots,m+1}$ temos $v_{i,j} = 0$ se $|i-j| \neq 1$. Temos

$$p(\lambda) = \det(\lambda - A) = \sum_{\sigma \in S_m} (\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{m+1} [\lambda \delta_{i,\sigma(i)} - v_{i,\sigma(i)}]).$$

Note que da forma como são distribuídos os zeros em A , segue que $v_{i,j} = 0$ se $|i-j| > 1$.

Se σ não é formada (exclusivamente) por transposições disjuntas, então, existe $1 \leq j \leq m+1$ tal que $|j - \sigma(j)| > 1$. Então, no cálculo do polinômio característico, podemos supor que $\sigma = (j_1 \ j_1 + 1) \dots (j_s \ j_s + 1)$, sendo $j_1, j_1 + 1, \dots, j_s, j_s + 1$ todos distintos.

Assim, reescrevemos:

$$p(\lambda) = \det(\lambda - A) = \sum_{(j_1, \dots, j_s)} ((-1)^s \prod_{i=1}^{m+1} [\lambda \delta_{i, \sigma(i)} - v_{i, \sigma(i)}]) \quad (6.2.2)$$

$$= \sum_{(j_1, \dots, j_s)} ((-1)^s \prod_{i=1}^s [v_{j_i, j_i+1}] [v_{j_i+1, j_i}]) \lambda^{m+1-2s}, \quad (6.2.3)$$

onde $(j_1, \dots, j_s)$ satisfazem $j_1, j_1 + 1, \dots, j_s, j_s + 1$ todos disjuntos. Note que a expressão acima significa que todos os termos do polinômio característico tem a mesma paridade. Em particular, considere a matriz $\tilde{A} = (a_{i,j})_{i,j}$, onde invertemos o sinal dos termos da diagonal abaixo da diagonal principal:

$$a_{i,j} = \begin{cases} -v_{i,j} & \text{se } i - j = 1 \\ v_{i,j} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 6.7. Se λ é autovalor de A , temos que $i\lambda$ é autovalor de $\tilde{A}$.

Demonstração: De fato, suponha que λ seja autovalor de A , então,

$$\begin{aligned} \det(i\lambda - \tilde{A}) &= \sum_{(j_1, \dots, j_s)} ((-1)^s \prod_{i=1}^s [a_{j_i, j_i+1}] [a_{j_i+1, j_i}]) (i\lambda)^{m+1-2s} \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_s)} ((-1)^s \prod_{i=1}^s [v_{j_i, j_i+1}] [-v_{j_i+1, j_i}]) i^{m+1} i^{-2s} \lambda^{m+1-2s} \\ &= i^{m+1} \sum_{(j_1, \dots, j_s)} ((-1)^s \prod_{i=1}^s [v_{j_i, j_i+1}] [v_{j_i+1, j_i}]) (-1)^s (-1)^{-s} \lambda^{m+1-2s} \\ &= i^{m+1} \sum_{(j_1, \dots, j_s)} ((-1)^s \prod_{i=1}^s [v_{j_i, j_i+1}] [v_{j_i+1, j_i}]) \lambda^{m+1-2s} = i^{m+1} \det(\lambda - A) = 0. \end{aligned}$$

□

A expressão (6.2.3), nos será útil na demonstração do lema a seguir.

Lema 6.8. Se, para quaisquer $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ temos $\text{Spec} T_0(m : b) = \{ibK; K \in \mathcal{M}(m)\}$, então $\text{Spec} T_0(m_1, \dots, m_r; b_1, \dots, b_r) = \{i \sum_{j=1}^r b_j K(j); K(j) \in \mathcal{M}(m_j)\}$.

Demonstração: A demonstração é feita por indução em r , sendo o caso base verdadeiro pela hipótese do lema (na verdade o Teorema 6.6 vai nos garantir que a

hipótese do lema é sempre verdadeira). Suponha, agora, que o resultado seja válido para r . Suponha ainda que $T_0(m_1, \dots, m_r; b_1, \dots, b_r)$ seja diagonalizável. Neste caso, existe uma matriz A tal que

$$AT_0(m_1, \dots, m_r; b_1, \dots, b_r)A^{-1} = D,$$

com $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ uma matriz diagonal. Considere a matriz $\tilde{A} = \text{diag}(A, A, \dots, A)$, com $m_{r+1} + 1$ blocos na diagonal, e sua inversa $\tilde{A}^{-1} = \text{diag}(A^{-1}, A^{-1}, \dots, A^{-1})$. Então,

$$\tilde{A}T_0(m_1, \dots, m_{r+1}; b_1, \dots, b_{r+1})\tilde{A}^{-1} = T(D; m_{r+1}; b_{r+1}).$$

Vamos relembrar um resultado clássico da Álgebra Linear³.

Denote por $M_n(K)$ o espaço das matrizes quadradas $n \times n$ com entradas em K . Defina o espaço $\mathfrak{M}_{n,k} = M_n(M_k(F))$. Note que existe uma identificação canônica

$$\mathfrak{M}_{n,k} = M_n(M_k(F)) \sim M_{kn}(F),$$

sendo F um corpo qualquer.

Podemos escrever $M_n(M_k(F)) \ni B = (B^{I,J})_{I,J=1,\dots,n}$, sendo $B^{I,J}$ a matriz $k \times k$ na I -ésima linha de B e J -ésima coluna. Por outro lado, podemos escrever $M_{kn}(F) \ni B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,nk}$. Então, temos duas noções de determinante para B :

$$\det_{\mathfrak{M}_{n,k}}(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) B^{I, \sigma(I)}$$

e

$$\det_{M_{nk}(F)}(B) = \sum_{\tau \in S_{nk}} \text{sgn}(\tau) b_{i, \tau(i)}.$$

Note que $\det_{\mathfrak{M}_{n,k}}(B) \in M_k(F)$ e $\det_{M_{nk}(F)}(B) \in F$.

O resultado de álgebra linear nos diz o seguinte: se as matrizes $B^{I,J}$ comutam entre si, então, vale que:

$$\det_{M_{nk}(F)}(B) = \det_{M_k(F)}(\det_{\mathfrak{M}_{n,k}}(B)).$$

³Este resultado e sua demonstração se encontram em Kovacs [1999].

Munido com este resultado, denote $D_\lambda = \lambda I_l - D = \text{diag}(\lambda - \lambda_1, \dots, \lambda - \lambda_l)$. Sejam ainda $v_{i,j}$ os coeficientes da matriz $T_0(m_{r+1}; b_{r+1})$ e seja $p(\lambda)$ é o polinômio característico de $T_0(m_{r+1}; b_{r+1})$. Temos que

$$\begin{aligned} \det(\lambda - T(D; m_{r+1}; b_{r+1})) &= \det(T(D_\lambda; m_{r+1}; b_{r+1})) \\ &= \det_{M_l(\mathbb{C})}(\det_{\mathfrak{M}_{l, m_{r+1}}}(T(D_\lambda; m_{r+1}; b_{r+1}))) \\ &= \det_{M_l(\mathbb{C})}(\det_{\mathfrak{M}_{l, m_{r+1}}}(\text{diag}(D_\lambda, \dots, D_\lambda) - T(0 \cdot I_l; m_{r+1}; b_{r+1}))) \\ &= \det_{M_l(\mathbb{C})} \left(\sum_{(j_1, \dots, j_s)} ((-1)^s \prod_{i=1}^s [V^{j_i, j_i+1}][V^{j_i+1, j_i}]) D_\lambda^{m_{r+1}+1-2s} \right), \end{aligned}$$

onde $V^{i,j}$ uma matriz $l \times l$ que corresponde ao bloco na i -ésima linha e j -ésima coluna de $T(0 \cdot I_l; m_{r+1}; b_{r+1})$ e $(j_1, \dots, j_s)$ satisfazem $j_1, j_1 + 1, \dots, j_s, j_s + 1$ são todos distintos.

Note que, se $i \neq j$ então $V^{i,j} = v_{i,j} I_l$. Além disso, $D_\lambda^k = \text{diag}((\lambda - \lambda_1)^k, \dots, (\lambda - \lambda_l)^k)$. Daí, temos:

$$\begin{aligned} \det(\lambda - T(D; m_{r+1}; b_{r+1})) &= \det_{M_l(\mathbb{C})} \left(\sum_{(j_1, \dots, j_s)} ((-1)^s \prod_{i=1}^s [v_{j_i, j_i+1}][v_{j_i+1, j_i}]) D_\lambda^{m_{r+1}+1-2s} \right) \\ &= \det_{M_l(\mathbb{C})}(\text{diag}(p(\lambda - \lambda_1), \dots, p(\lambda - \lambda_l))) \\ &= \prod_{j=1}^l p(\lambda - \lambda_j). \end{aligned}$$

Por hipótese do lema, $p(x) = 0$ se, e somente se, $x \in \{ib_{r+1}K; K \in \mathcal{M}(m_{r+1})\}$. Assim, vale que

$$\begin{aligned} \lambda &\in \text{Spec} T_0(m_1, \dots, m_{r+1}; b_1, \dots, b_{r+1}) \\ &\Updownarrow \\ (\lambda - \lambda_l) &\in \{ib_{r+1}K; K \in \mathcal{M}(m_{r+1})\} \text{ para algum } \lambda_l \in \text{Spec} T_0(m_1, \dots, m_r; b_1, \dots, b_r) \\ &\Updownarrow \\ \lambda &\in \{i \sum_{j=1}^{r+1} b_j K(j); K(j) \in \mathcal{M}(m_j)\} \end{aligned}$$

Resta concluirmos que $T_0(m_1, \dots, m_{r+1}; b_1, \dots, b_{r+1})$ é diagonalizável. Para isso, note que podemos escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{A} T_0(m_1, \dots, m_{r+1}; b_1, \dots, b_{r+1}) \tilde{A}^{-1} &= T(D; m_{r+1}; b_{r+1}) \\ &= \text{diag}(D, \dots, D) + T(0 \cdot I_l; m_{r+1}; b_{r+1}). \end{aligned}$$

Como $T_0(m_{r+1}; b_{r+1})$ é diagonalizável (da hipótese do lema), segue que $T(0 \cdot I_l; m_{r+1}; b_{r+1})$ também é diagonalizável; assim, $T(D; m_{r+1}; b_{r+1})$ é a soma de duas matrizes diagonalizáveis que comutam ⁴ e, portanto, elas podem ser simultaneamente diagonalizadas; logo a soma é diagonalizável.

□

Vamos, agora, provar o Lema 6.2.

Lema 6.9. Nas condições e notações do Lema 6.1 Existe uma ordenação de Λ_s^m tal que

$$\text{Spec } B^m = \left\{ \sum_{j=1}^{s'} m_j \lambda_j + 2 \sum_{l=1}^{(s-s')/2} m'_l \Re(\lambda_{s'+2l}) + \sum_{l=1}^{(s-s')/2} iK(l) \Im(\lambda_{s'+2l}), K(l) \in \mathcal{M}(m'_l) \right\},$$

sendo $m_1 + \dots + m'_{s'} + m'_1 + m'_{(s-s')/2} = m$.

Demonstração: Relembrando, temos que, para cada m , a matriz B^m acima surge quando consideramos o sistema de equações

$$\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \alpha_k \partial^{e_k} a_j(0) \partial^{\alpha+e_j-e_k} u(0) + c(0) \partial^\alpha u(0) = \partial^\alpha f(0) + R^\alpha, \quad \alpha \in \Lambda_s^m. \quad (6.2.4)$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $DL(0) = (\partial^{e_i} a_j(0))_{i,j=1,\dots,s}$ esteja em sua forma canônica de Jordan. Mais ainda, podemos supor que, sendo $\lambda'_{s'+1}, \dots, \lambda_s$ os autovalores complexos de $DL(0)$, então $\lambda_{s'+2j}$ e $\lambda_{s'+2j-1}$ sejam autovalores conjugados. Para facilitar a notação, defina $2r = s - s'$ (note que r é inteiro, pois os autovalores complexos sempre aparecem aos pares) e denote $a_j = \Re(\lambda_{s'+2j-1})$ e $b_j = \Im(\lambda_{s'+2j-1})$. Queremos reescrever (6.2.4) de maneira mais conveniente. Para isso, observe que, restringindo $DL(0) = (\partial^{e_k} a_j(0))_{k,j}$ à $1 \leq j, k \leq s'$, obtemos uma matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \mu_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_{s'-1} & \mu_{s'-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \lambda_{s'} \end{pmatrix},$$

⁴Este resultado se encontra em "GOLAN, J.S. *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*. 2nd Edition, Springer"(Proposição 12.18)

onde $\mu_j \in \{0, 1\}$. Assim:

$$\sum_{j=1}^{s'} \sum_{k=1}^{s'} \alpha_k \partial^{e_k} a_j(0) \partial^{\alpha+e_j-e_k} u(0) = \sum_{j=1}^{s'} \alpha_j \lambda_j \partial^\alpha u(0) + \sum_{j=1}^{s'-1} \mu_j \alpha_{j+1} \partial^{\alpha+e_j-e_{j+1}} u(0).$$

Analogamente, restringindo $DL(0) = (\partial^{e_k} a_j(0))_{k,j}$ à $s' + 1 \leq j, k \leq s$, obtemos uma matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} J_1 & \epsilon_1 I_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & \epsilon_2 I_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \epsilon_3 I_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & J_{r-1} & \epsilon_{r-1} I_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & J_r \end{pmatrix},$$

sendo $J_l = \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ -b_l & a_l \end{pmatrix}$ e $\epsilon_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, r-1$. Para facilitar a notação, vamos estabelecer as seguintes convenções:

- $\tilde{\alpha}_k = \alpha_{s'+k}$;
- $\tilde{e}_j = e_{s'+j}$.

Dai,

$$\begin{aligned} \sum_{j=s'+1}^s \sum_{k=s'+1}^s \alpha_k \partial^{e_k} a_j(0) \partial^{\alpha+e_j-e_k} u(0) &= \sum_{j=1}^{2r} \sum_{k=1}^{2r} \tilde{\alpha}_k \partial^{e_{s'+k}} a_{s'+j}(0) \partial^{\alpha+\tilde{e}_j-\tilde{e}_k} u(0) \\ &= \sum_{j=1}^r (\tilde{\alpha}_{2j-1} + \tilde{\alpha}_{2j}) a_j \partial^\alpha u(0) + \\ &+ \sum_{j=1}^r \tilde{\alpha}_{2j} b_j \partial^{\alpha+\tilde{e}_{2j-1}-\tilde{e}_{2j}} u(0) - \sum_{j=1}^r \tilde{\alpha}_{2j-1} b_j \partial^{\alpha+\tilde{e}_{2j}-\tilde{e}_{2j-1}} u(0) + \\ &+ \sum_{j=1}^{r-1} \epsilon_j (\tilde{\alpha}_{2j+1} \partial^{\alpha+\tilde{e}_{2j-1}-\tilde{e}_{2j+1}} u(0) + \tilde{\alpha}_{2j+2} \partial^{\alpha+\tilde{e}_{2j}-\tilde{e}_{2j+2}} u(0)). \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (6.2.4) da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^{s'} \alpha_j \lambda_j \partial^\alpha u(0) + \sum_{j=1}^r (\tilde{\alpha}_{2j-1} + \tilde{\alpha}_{2j}) a_j \partial^\alpha u(0) + \quad (6.2.5)$$

$$+ \sum_{j=1}^r b_j B_j^\alpha + \sum_{j=1}^{s'-1} \mu_j M_j^\alpha + \sum_{j=1}^{r-1} \epsilon_j E_j^\alpha + c(0) \partial^\alpha u(0) = \partial^\alpha f(0) + R^\alpha, \quad (6.2.6)$$

com μ_j e ϵ_j valendo 0 ou 1 e sendo

$$\begin{aligned} M_j^\alpha &= \alpha_{j+1} \partial^{\alpha+e_j-e_{j+1}} u(0) \\ B_j^\alpha &= \tilde{\alpha}_{2j} \partial^{\alpha+\tilde{e}_{2j-1}-\tilde{e}_{2j}} u(0) - \tilde{\alpha}_{2j-1} \partial^{\alpha+\tilde{e}_{2j}-\tilde{e}_{2j-1}} u(0) \\ E_j^\alpha &= \tilde{\alpha}_{2j+1} \partial^{\alpha+\tilde{e}_{2j-1}-\tilde{e}_{2j+1}} u(0) + \tilde{\alpha}_{2j+2} \partial^{\alpha+\tilde{e}_{2j}-\tilde{e}_{2j+2}} u(0). \end{aligned}$$

Queremos, agora, estabelecer em Λ_s^m uma ordem de modo que o determinante de B^m possa ser calculado por blocos e, em cada bloco, as constantes μ_j e ϵ_j sejam nulas.

Note que:

$$\Lambda_s^m = \bigcup_{m_0+m_1+\dots+m_r=m} \Lambda_{s'}^{m_0} \times \Lambda_2^{m_1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_r}.$$

Vamos, agora, ordenar esta união colocando a ordem lexicográfica nos índices, isto é:

$$\{\Lambda_{s'}^{m_0} \times \Lambda_2^{m_1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_r}; m_0 + m_1 + \dots + m_r = m\}$$

sucede

$$\{\Lambda_{s'}^{k_0} \times \Lambda_2^{k_1} \times \dots \times \Lambda_2^{k_r}; k_0 + k_1 + \dots + k_r = m\}$$

se, e somente se, $m_j = k_j$ para $0 \leq j \leq l$ e $m_{l+1} > k_{l+1}$ para algum l . Em particular, se $m_{j+1} \neq 0$, então

$$\Lambda_{s'}^{m_0} \times \Lambda_2^{m_1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_j+1} \times \Lambda_2^{m_{j+1}-1} \times \Lambda_2^{m_r}$$

sucede

$$\Lambda_{s'}^{m_0} \times \Lambda_2^{m_1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_j} \times \Lambda_2^{m_{j+1}} \times \Lambda_2^{m_r}.$$

Agora, dote $\Lambda_{s'}^{m_0} \times \Lambda_2^{m_1} \times \cdots \times \Lambda_2^{m_r}$ com a ordem produto, e cada parcela com a ordem lexicográfica. Com está ordem temos:

Fato 1 A matriz B^m é triangular por blocos. Além disso, cada bloco da diagonal está em correspondência bionívoca com os conjuntos da forma $\{\Lambda_{s'}^{m_0} \times \Lambda_2^{m_1} \times \cdots \times \Lambda_2^{m_r}; m_0 + m_1 + \cdots + m_r = m\}$. Em particular, no cálculo do espectro de B^m podemos considerar $\epsilon_j = 0$.

De fato:

Vamos denotar por $B_{\alpha,\beta}$ o elemento de B^m na α -ésima linha e β -ésima coluna. Temos que $B_{\alpha,\beta}$ é o termo que multiplica $\partial^\beta u(0)$ na equação (6.2.4). Seja $\alpha \in A_{m_0,\dots,m_r} := \Lambda_{s'}^{m_0} \times \Lambda_2^{m_1} \times \cdots \times \Lambda_2^{m_r}$. Vamos mostrar que se $\beta \in A_{k_0,\dots,k_r} := \Lambda_{s'}^{k_0} \times \Lambda_2^{k_1} \times \cdots \times \Lambda_2^{k_r}$ e $A_{m_0,\dots,m_r}$ sucede $A_{k_0,\dots,k_r}$, então $B_{\alpha,\beta} = 0$.

Diremos que um termo $a\partial^\nu u(0)$ pertence ao bloco $A_{k_0,\dots,k_r}$ se $\nu \in A_{k_0,\dots,k_r}$.

Note que se $\alpha_{j+1} \neq 0$, para $j = 1, \dots, s' - 1$, então $\alpha + e_j - e_{j+1} \in A_{m_0,\dots,m_r}$; isto é, os termos M_j^α em (6.2.5) pertencem ao bloco $A_{m_0,\dots,m_r}$.

Note ainda que se $\tilde{\alpha}_{2j} \neq 0$, $j = 1, \dots, r$, então $\alpha + \tilde{e}_{2j-1} - \tilde{e}_{2j} \in A_{m_0,\dots,m_r}$; analogamente, se $\tilde{\alpha}_{2j-1} \neq 0$, então $\alpha + \tilde{e}_{2j} - \tilde{e}_{2j-1} \in A_{m_0,\dots,m_r}$. De modo que os termos em B_j^α pertencem a $A_{m_0,\dots,m_r}$.

Finalmente, note que se $\tilde{\alpha}_{2j+1} \neq 0$, $j = 1, \dots, r - 1$, então $\alpha + \tilde{e}_{2j-1} - \tilde{e}_{2j+1} \in A_{m_0,\dots,m_j+1,m_j-1,\dots,m_r}$ que sucede $A_{m_0,\dots,m_r}$. Analogamente, se $\tilde{\alpha}_{2j+2} \neq 0$, então $\alpha + \tilde{e}_{2j} - \tilde{e}_{2j+2} \in A_{m_0,\dots,m_j+1,m_j-1,\dots,m_r}$ que sucede $A_{m_0,\dots,m_r}$. Portanto, os termos em E_j^α não pertence a $A_{k_0,\dots,k_r}$.

A correspondencia biunívoca entre os blocos da diagonal e os conjuntos

$$\{\Lambda_{s'}^{m_0} \times \Lambda_2^{m_1} \times \cdots \times \Lambda_2^{m_r}; m_0 + m_1 + \cdots + m_r = m\}$$

é imediata.

Para verificar que no cálculo dos autovalores de B^m podemos considerar $\epsilon_j = 0$ basta observar que se $\alpha \in A_{m_0,\dots,m_r}$ então os termos em E_j^α não pertencem a $A_{m_0,\dots,m_r}$; isto é, eles não interferem nos blocos da diagonal.

Fato 2: Seja B' um bloco da diagonal de B^m associado à $A_{m_0,\dots,m_r}$. Então, B' é triangular

superior em blocos e, para o cálculo dos autovalores de B , podemos considerar que $\mu_j = 0$.

De fato:

Seja $\alpha \in A_{m_0, \dots, m_r}$ e α_{j+1} , $j = 1, \dots, s' - 1$. Então, $\alpha + e_j - e_{j+1}$ sucede α . Daí, B' é triangular por blocos.

Escrevendo $\alpha = (\alpha_0, \tilde{\alpha}) \in A_{m_0, \dots, m_r}$, $\alpha_0 \in \Lambda_{s'}^{m_0}$ estamos associando cada bloco da diagonal a um conjunto da forma $\{\alpha_0\} \times \Lambda_2^{m_1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_r}$.

Podemos, então, considerar $\mu_j = 0$ no cálculo dos autovalores de B' .

Fato 3: Seja B bloco diagonal da matriz B' acima. Então, B é da forma

$$\lambda I + T_0(m_1, \dots, m_r; b_1, \dots, b_r)$$

sendo

$$\lambda = \sum_{j=1}^{s'} \alpha_j \lambda_j + \sum_{j=1}^r (\tilde{\alpha}_{2j-1} - \tilde{\alpha}_{2j}) a_j.$$

De fato:

Escrevendo $\alpha = (\alpha_0, \tilde{\alpha})$ como acima, os passos anteriores nos dizem que o bloco B' é obtido a partir das equações (6.2.5) quando consideramos α_0 fixado, $\mu_j = \epsilon_k = 0$ e $\tilde{\alpha} \in \Lambda_2^{m_1} \times \dots \times \Lambda_2^{m_r}$.

Observe que se $m_j \neq 0$, $j = 1, \dots, r$, então, para $\alpha_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_{2j-3}, \tilde{\alpha}_{2j-2}$ fixados, temos

$$B_{\alpha, \alpha + \tilde{e}_{2j-1} - \tilde{e}_{2j}} = \tilde{\alpha}_{2j},$$

se $\tilde{\alpha}_{2j} \neq 0$, e

$$B_{\alpha, \alpha + \tilde{e}_{2j} - \tilde{d}e_{2j-1}} = -\tilde{\alpha}_{2j-1},$$

se $\tilde{\alpha}_{2j-1} \neq 0$. Lembre-se que a notação $B_{\alpha, \beta}$ indica um elemento na matriz B^m . Agora, observando que vale **[P1]** e **[P1']** segue o **Fato 3**.

Finalmente, segue do Teorema 6.6 que a hipótese do Lema 6.8 é satisfeita. Portanto, segue o resultado.

□

Geodésicas

Este apêndice segue de perto o livro de geometria Riemanniana de Manfredo do Carmo [Carmo, 1988]. Entre parênteses, nas proposições apresentadas, colocamos o capítulo e o número da proposição no livro de Manfredo, por exemplo:

Proposição A.? (Cap. I - Prop 1.3)

significa que a proposição enunciada é na verdade a proposição 1.3 do Capítulo I no livro do Manfredo.

Definição A.1. Seja M uma variedade, então uma Métrica Riemanniana em M é um produto interno $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definido em cada espaço tangente de M , de modo que, para qualquer sistema de coordenadas $x_1, \dots, x_n$, e para quaisquer i, j , a aplicação abaixo é suave:

$$M \ni p \mapsto g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right)$$

A dupla (M, g) é chamada de variedade Riemanniana.

Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) variedades Riemannianas, então, é possível definir, de maneira natural, uma métrica Riemanniana em $M_1 \times M_2$. Considere $\pi_j : M_1 \times M_2 \rightarrow M_j$ a projeção usual e defina em $M_1 \times M_2$ a seguinte métrica:

$$(g_1 \times g_2)_{(p,q)}(u, v) = (g_1)_p(d\pi_1 \cdot u, d\pi_1 \cdot v) + (g_2)_q(d\pi_2 \cdot u, d\pi_2 \cdot v)$$

É fácil ver que $g_1 \times g_2$ de fato é uma métrica Riemanniana. Observe que, na métrica produto, se $u \in T_{(p,q)} M_1$ e $v \in T_{(p,q)} M_2$ então $g_1 \times g_2(u, v) = 0$. Em particular, se $u, v \in T_{(p,q)} M_j$ então $g_1 \times g_2(u, v) = g_j(u, v)$.

Quando consideramos $\mathbb{S}^1$ com a métrica induzida por $\mathbb{R}^2$ e o toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ com a métrica produto, dizemos que este é o toro plano.

Definição A.2. Denotemos por $\mathfrak{X}^\infty(M)$ o espaço dos campos de vetores suaves de M . Uma conexão afim em uma variedade diferenciável M é uma aplicação bilinear

$$\nabla : \mathfrak{X}^\infty(M) \times \mathfrak{X}^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\infty(M) \quad , \quad \nabla(X, Y) = \nabla_X Y,$$

tal que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$, ∇ satisfaz as seguintes propriedades

- $\nabla_{fX} Z = f \nabla_X Z$;
- $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$.

Fixando um sistema de coordenadas locais e escrevendo

$$X = \sum_i a_i(x) X_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_j b_j(x) X_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i a_i(x) X_i} \left(\sum_j b_j(x) X_j \right) = \sum_i a_i(x) \nabla_{X_i} \left(\sum_j b_j(x) X_j \right) \\ &= \sum_i \sum_j a_i(x) \left(b_j(x) \nabla_{X_i} X_j + X_i(b_j(x)) X_j \right); \end{aligned}$$

daí, escrevendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, obtemos a seguinte fórmula explícita para a conexão:

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{i,j} a_i(x) b_j(x) \Gamma_{ij}^k + X(b_k(x)) \right) X_k.$$

Ou seja, $\nabla_X Y(p)$ depende apenas de $a_i(p), b_k(p)$ e das derivadas $X(b_k)(p)$. Em particular, podemos considerar X e Y campos ao longo de uma curva. Γ_{ij}^k são chamados de Símbolos de Christoffel e, claramente, eles determinam a conexão afim.

Proposição A.3 (Cap. II - Prop. 2.2). Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇ . Existe uma única correspondência entre um campo vetorial V ao longo de uma curva suave $c : I \rightarrow M$ e um outro campo vetorial, chamado derivada covariante, $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c tal que:

- $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

- $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave
- Se V é induzido por um campo $Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, isto é, se $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\dot{c}}Y$, onde $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$

Definição A.4. Seja M uma variedade Riemanniana com conexão afim ∇ . Um campo V ao longo de $c : I \rightarrow M$ é chamado de paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$

Proposição A.5 (Cap. II - Prop. 2.6). Sejam M uma variedade Riemanniana com conexão afim ∇ , $c : I \rightarrow M$ uma curva suave em M e $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Então, existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$. $V(t)$ é chamado o transporte paralelo de V_0

Definição A.6. Uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana (M, g) é dita compatível com a métrica g quando, quaisquer dois campos de vetores ao longo de uma curva c satisfazem:

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right)$$

ou, equivalentemente

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}^\infty(M)$$

A conexão ∇ é dita simétrica quando $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$.

Teorema A.7 (Teorema de Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, existe uma única conexão afim ∇ que é simétrica e compatível com a métrica. Esta é chamada de conexão de Levi-Civita ou simplesmente a conexão da variedade Riemanniana M*

Demonstração: Faremos aqui apenas um esboço da demonstração. Os detalhes se resumem a verificar manualmente que as identidades são satisfeitas.

Suponha a existência desta conexão ∇ , então, dados campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ segue da compatibilidade com a métrica que

$$\begin{cases} X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{cases}$$

daí, usando a simetria temos

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \quad (\text{A.0.1})$$

$$= \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle \quad (\text{A.0.2})$$

e, portanto, se ∇ existe segundo as condições do teorema ela satisfaz a expressão acima; portanto, é única. Definindo ∇ pela expressão acima, verifica-se que ∇ de fato é uma conexão e satisfaz as propriedades desejadas.

□

A expressão que obtivemos na demonstração anterior é útil quando queremos calcular os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita em coordenadas locais. De fato, sejam $X_i = \partial_{x_i}$ em um determinado sistema de coordenadas locais fixado. Então:

$$\langle \nabla_{X_i} X_j, X_l \rangle = \left\langle \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k, X_l \right\rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl},$$

onde $g_{kl} = \langle X_k, X_l \rangle$. Além disso, $[X_i, X_j] = 0$ para quaisquer i, j e, portanto, segue de (A.0.1) que

$$\begin{aligned} 2 \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} &= X_j \langle X_i, X_l \rangle + X_i \langle X_l, X_j \rangle - X_l \langle X_j, X_i \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}; \end{aligned}$$

como $(g_{kl})_{k,l}$ é uma matriz invertível¹, com inversa $(g^{kl})_{k,l}$, temos que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right) g^{lk} \quad (\text{A.0.3})$$

Observação A.8. Seja M a circunferência de raio r e centrada na origem em $\mathbb{R}^2$, com a métrica Riemanniana induzida pelo produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Considere a carta local $I \ni \theta \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in M \subseteq \mathbb{R}^2$, para um intervalo apropriado. Temos que $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$ e $\langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle = r^2$. Como M é unidimensional, existe um único símbolo de Christoffel, dado por:

$$\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = \Gamma_{\theta\theta}^\theta \partial_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle + \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle - \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle \right) \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle \partial_\theta = 0.$$

¹ $(g_{kl})_{k,l}$ define um produto interno e, portanto, é uma matriz positiva definida, ou seja, todos os autovalores são reais positivos. Em particular, ela não possui autovalor nulo, e assim tem Kernel trivial.

Assim, dados dois campos $X = f(\theta)\partial_\theta$ e $Y = g(\theta)\partial_\theta$ temos que

$$\nabla_X Y = f\nabla_{\partial_\theta}(g\partial_\theta) = fg\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta + f\partial_\theta(g)\partial_\theta = f(\theta)g'(\theta)\partial_\theta.$$

Proposição A.9. Sejam $M_j, j = 1, \dots, m$, variedades riemannianas com conexões de Levi-Civita ∇^j . Então, a conexão de Levi-Civita de $M_1 \times \dots \times M_n$ satisfaz

$$\nabla_{X^1 + \dots + X^n}(Y^1 + \dots + Y^n) = \sum_j^n \nabla_{X^j}^j Y^j, \quad X^j, Y^j \in (X)^\infty(M_j).$$

Demonstração: Basta provar o resultado para $n = 2$. Sabemos que, localmente, um campo em $M_1 \times M_2$ é localmente da forma

$$Z = \sum_l f_l X_l + \sum_t g_t Y_t,$$

onde $X_j = \partial_{x_j}$, $Y_k = \partial_{y_k}$ e f_j^1, f_k^2 são funções suaves definidas em $M_1 \times M_2$. Note que, quando restringimos ∇ a campos tangentes a M_j temos que ∇ define uma conexão em M_j e, portanto, da unicidade da conexão de Levi-Civita, segue que

$$\begin{cases} \nabla_{X_j} X_k = \nabla_{X_j}^1 X_k \\ \nabla_{Y_j} Y_k = \nabla_{Y_j}^2 X_k \end{cases};$$

logo, $\nabla_{X_j} X_k$ é tangente à M_1 e $\nabla_{Y_j} Y_k$ é tangente à M_2 . Vamos denotar por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica em $M_1 \times M_2$ e por $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ a métrica em M_j . Como a conexão é compatível com a métrica, temos:

$$\langle \nabla_{X_j} Y_k, Z \rangle = X_j \langle Y_k, Z \rangle - \langle Y_k, \nabla_{X_j} Z \rangle;$$

mas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica produto, logo $\langle Y_k, X_j \rangle = 0$ e assim

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_j} Y_k, Z \rangle &= X_j \langle Y_k, \sum_l f_l X_l + \sum_t g_t Y_t \rangle - \langle Y_k, \nabla_{X_j} (\sum_l f_l X_l + \sum_t g_t Y_t) \rangle \\ &= \sum_t X_j \langle Y_k, g_t Y_t \rangle_2 - \sum_l \langle Y_k, \nabla_{X_j} (f_l X_l) \rangle - \sum_t \langle Y_k, \nabla_{X_j} (g_t Y_t) \rangle; \end{aligned}$$

mas $\nabla_{X_j}(f_l X_l)$ é tangente à M_1 , portanto, $\langle Y_k, \nabla_{X_j}(f_l X_l) \rangle = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{X_j} Y_k, Z \rangle &= \sum_t X_j \langle Y_k, g_t Y_t \rangle_2 - \sum_t \langle Y_k, \nabla_{X_j}(g_t Y_t) \rangle \\ &= \sum_t \left(X_j \langle Y_k, g_t Y_t \rangle - \langle Y_k, \nabla_{X_j}(g_t Y_t) \rangle \right) \\ &= \sum_t \langle \nabla_{X_j} Y_k, g_t Y_t \rangle = \langle \nabla_{X_j} Y_k, \sum_t g_t Y_t \rangle.\end{aligned}$$

Repetindo a conta anterior para $\langle \nabla_{Y_k} X_j, Z \rangle$ obtemos:

$$\langle \nabla_{Y_k} X_j, Z \rangle = \langle \nabla_{Y_k} X_j, \sum_l f_l X_l \rangle.$$

Por outro lado, como a conexão é simétrica, temos:

$$\nabla_{X_j} Y_k - \nabla_{Y_k} X_j = [X_j, Y_k] = 0;$$

daí,

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_{Y_k} X_j, Z \rangle &= \langle \nabla_{X_j} Y_k, Z \rangle + \langle \nabla_{Y_k} X_j, Z \rangle \\ &= \langle \nabla_{X_j} Y_k, \sum_t g_t Y_t \rangle + \langle \nabla_{Y_k} X_j, \sum_l f_l X_l \rangle \\ &= \langle \nabla_{Y_k} X_j, \sum_t g_t Y_t \rangle + \langle \nabla_{Y_k} X_j, \sum_l f_l X_l \rangle \\ &= \langle \nabla_{Y_k} X_j, \sum_t g_t Y_t + \sum_l f_l X_l \rangle = \langle \nabla_{Y_k} X_j, Z \rangle\end{aligned}$$

e, portanto, $\nabla_{X_j} Y_k = \nabla_{Y_k} X_j = 0$

Finalmente, se X^j e Y^j são campos de vetores em M_j , segue que $\nabla_{X^j} Y^k = 0$ se $j \neq k$. Assim,

$$\nabla_{X^1+X^2}(Y^1+Y^2) = \nabla_{X^1} Y^1 + \nabla_{X^2} Y^2 = \nabla_{X^1}^1 Y^1 + \nabla_{X^2}^2 Y^2.$$

□

Definição A.10. Seja M uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica se $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$ para todo t .

Temos então o seguinte corolário da proposição anterior

Corolário A.11. Sejam $M_1, \dots, M_n$ variedades Riemanianas, e $\gamma_j : I \rightarrow M_j$ geodésicas. Então, $\gamma : I \rightarrow M_1 \times \dots \times M_n$ definida por $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ é geodesica de $M_1 \times \dots \times M_n$ com a métrica produto.

Demonstração: De fato, se ∇^j é a conexão de M_j , então temos $\nabla_{\dot{\gamma}_j(t)}^j \dot{\gamma}_j(t) = 0$. Então, basta notar que se ∇ é a conexão de Levi-Civita do produto, temos

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = \nabla_{(\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))} (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t)) = \nabla_{\dot{\gamma}_1(t)}^1 \dot{\gamma}_1(t) + \dots + \nabla_{\dot{\gamma}_n(t)}^n \dot{\gamma}_n(t) = 0.$$

□

Observação A.12. Seja $\gamma(t) = (r \cos \theta(t), r \sin \theta(t))$ uma curva sobre a circunferencia de raio r em $\mathbb{R}^2$. Então, segue de (A.8) que

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\theta} \partial_{\theta}} (\dot{\theta} \partial_{\theta}) = \dot{\theta} \ddot{\theta} \partial_{\theta}.$$

Daí, γ é geodésica se, e somente se, $\dot{\theta}$ é constante, isto é γ percorre o círculo com velocidade constante.

Integral de Bochner

As funções a valores em espaços de Banach desempenham um importante papel dentro da análise matemática e, no desenvolvimento de diversos campos de estudos, tornou-se necessário integrar tais funções; para tal é necessário desenvolver uma teoria de integração apropriada. Escolhemos, pois, a abordagem de S. Bochner por se tratar, em certo sentido, de uma generalização da teoria de integração de Lebesgue.

Assim como no contexto da integral de Lebesgue, precisamos considerar inicialmente um espaço de medida $(\Omega, \mathfrak{U}, \mu)$, onde Ω é um espaço de Hausdorff, localmente compacto e segundo enumerável, equipado com uma sigma álgebra de borel $\mathfrak{U}$ e uma medida de borel regular μ . Vamos ainda considerar que o nosso espaço seja σ -finito, isto é, ele pode ser considerado como a união de conjuntos de medida finita. Em particular, vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de Borel equipado com a σ -álgebra de Borel usual e a medida de Lebesgue. Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e X^* seu dual topológico. Seja $M \subset X$, então a σ -álgebra de Borel sobre M , denotada por $\mathcal{B}(M)$, é a σ -álgebra gerada pelos conjuntos relativamente abertos de M .

Definição B.1. Sejam $A \in \mathfrak{U}$ e $f : A \rightarrow M$ um função. Então f é dita (Borel -) mensurável se $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(A)$ para todo $B \in \mathcal{B}(M)$.

Note que esta é a definição de mensurabilidade usual, então, seguem alguns resultados da teoria usual de medida e integração: A soma de funções mensuráveis é mensurável, assim como o produto por escalar e a composição com funções contínuas. Em particular, se f é mensurável, então $\|f\|$ é mensurável. Além disso, o limite pontual de funções mensurável é mensurável, assim como o sup e o inf de uma coleção enumeravel de funções mensurável é uma função mensurável.

Definição B.2. Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é dita simples, quando sua imagem é finita e $f^{-1}(p)$ é um conjunto de Borel para todo $p \in X \setminus \{0\}$. Denotando $f(\Omega) = \{a_1, \dots, a_k\}$ e escrevendo $E_j = f^{-1}(a_j)$, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}(x).$$

Esta é chamada a representação padrão de f . Uma função simples pode ter diversas representações, e de modo geral, as funções simples possuem a seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{A_j}(x),$$

onde cada A_j é um conjunto de Borel, mas estes conjuntos não são necessariamente disjuntos. Claramente o espaço das funções simples é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Além disso, é imediato que as funções simples são mensuráveis.

Observação B.3. Note que, se f é uma função simples com representação padrão $f(x) = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}(x)$, então $\|f\|$ é uma função simples e tem representação padrão

$$\|f(x)\| = \sum_{j=1}^k \|a_j\| \chi_{E_j}(x).$$

Definição B.4. Definimos a integral de uma função simples $f(x) = \sum b_j \chi_{A_j}$ por

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \sum_j \mu(A_j) b_j.$$

Observação B.5. Note que a definição acima independe da representação de f , e isto segue das propriedades aditivas da medida μ . A demonstração desta afirmação é a mesma demonstração da proposição análoga para a integral de Lebesgue.

Note ainda que a integral é um operador linear no espaço das funções simples, isto é, se $f, g : \Omega \rightarrow X$ são funções simples e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ então

$$\int_{\Omega} \alpha f(x) + \beta g(x) d\mu(x) = \alpha \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) + \beta \int_{\Omega} g(x) d\mu(x)$$

Novamente, a demonstração deste fato é idêntica à demonstração para o caso da

integral de Lebesgue.

Lema B.6. Se $f : \Omega \rightarrow X$ é uma função simples então

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| d\mu(x)$$

Demonstração: Suponha que f tenha representação padrão $f(x) = \sum_j a_j \chi_{E_j}$. Então, $\|f\| = \sum_j \|a_j\| \chi_{E_j}$ e, portanto,

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \right\| = \left\| \sum_j a_j \mu(E_j) \right\| \leq \sum_j \|a_j\| \mu(E_j) = \int_{\Omega} \|f(x)\| d\mu(x).$$

□

Como no caso da integral de Lebesgue, queremos estender a noção de integrabilidade a uma classe maior de funções, e faremos isso tomando o limite de funções simples. Ocorre porém, que no caso da integral de Bochner, é necessária uma condição de separabilidade.

Lema B.7. Seja $f : \Omega \rightarrow X$ uma função, então são equivalentes

1. Existe uma sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ de funções simples $f_k : \Omega \rightarrow X$ tal que $f_k(x) \rightarrow f(x)$ em Ω .
2. f é mensurável e $f(\Omega) \subset X$ é separável.

Se uma destas afirmações for verdadeira, então podemos tomar a sequência f_k tal que $\|f_k(x)\| \leq 2\|f(x)\|$.

Demonstração: Suponha que (1) seja válido, então f é o limite pontual de funções mensuráveis e, portanto, é mensurável. Além disso, escrevendo cada f_k em sua representação padrão

$$f_k = \sum_{n=1}^{N_k} a_{k,n} \chi_{E_{k,n}}(x)$$

temos que o espaço gerado pelas combinações lineares racionais dos valores $\{a_{k,n}; n = 1, \dots, N_k\}$ é denso na imagem de f e, portanto, $f(\Omega)$ é separável.

Reciprocamente, seja $\{y_1, y_2, \dots\}$ um subconjunto denso de $f(\Omega)$. Ampliando este conjunto por no máximo um número enumerável de pontos, podemos supor que $y_j \neq 0$

para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Defina

$$\tilde{A}_k^N = \{x \in \Omega ; \|f(x)\| \geq \frac{1}{N} \text{ e } \|f(x) - y_k\| < \frac{1}{N}\}$$

Como f é mensurável, temos que $\{x; \|f(x)\| \geq \varepsilon > 0\}$ é um conjunto de Borel e, analogamente, $\{x; \|f(x) - y\| < \varepsilon\}$ também o é, de modo que $\tilde{A}_k^N$ é a interseção de conjuntos de Borel, portanto, também é um conjunto de Borel. Definindo ainda

$$A_1^N = \tilde{A}_1^N \text{ e } A_k^N = \tilde{A}_k^N \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j^N$$

obtemos uma sequencia de conjuntos de Borel disjuntos tais que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} A_k^N = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \tilde{A}_k^N = \{x \in \Omega ; \|f(x)\| \geq \frac{1}{N} \text{ e } \|f(x) - y_k\| < \frac{1}{N} \text{ para algum } k\};$$

da densidade de $\{y_1, \dots, y_k, \dots\}$ segue que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} A_k^N = \{x \in \Omega ; \|f(x)\| \geq \frac{1}{N}\}. \quad (\text{B.0.1})$$

Defina, então, as seguintes funções

$$F_N(x) = \begin{cases} y_{k_{N,x}} & \text{se } x \in \bigcup_{j,M=1}^N A_j^M \\ 0 & \text{caso contrário ,} \end{cases},$$

onde $k_{N,x}$ é determinado da seguinte maneira:

Seja $M_n(x)$ o maior inteiro em $\{1, \dots, N\}$ tal que $x \in \bigcup_{j=1}^N A_j^{M_N(x)}$. Utilizando o fato de que os conjuntos $\{A_j^M ; j = 1, 2, \dots\}$ são disjuntos para cada M fixado, defina $k_{N,x}$ como o único inteiro em $\{1, \dots, N\}$, tal que $x \in A_{k_{N,x}}^{M_N(x)}$.

Note que, para cada $N \in \mathbb{Z}_+$, F_N tem imagem finita e, além disso, por construção, a imagem inversa de cada um destes pontos é um conjunto de Borel; logo, cada F_N é uma função simples. Mais ainda, para $x \in A_{k_{N,x}}^{M_N(x)}$ temos

$$\|f_N(x)\| = \|y_{k_{N,x}}\| \leq \|y_{k_{N,x}} - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \frac{1}{M_N(x)} + \|f(x)\| \leq 2\|f(x)\|.$$

Finalmente vamos mostrar que F_N converge à f pontualmente. Para isso, seja $x \in \Omega$ e suponha que $f(x) \neq 0$. Seja $\varepsilon > 0$ e escolha $N_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\min\{\|f(x)\|, \varepsilon\} > \frac{1}{N_0}$. Segue de (B.0.1) que

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} A_k^{N_0};$$

mas como os conjuntos $A_k^{N_0}$ são disjuntos, então existe um único k_0 tal que $x \in A_{k_0}^{N_0}$. Seja agora $N \geq \max\{N_0, k_0\}$, então,

$$x \in \bigcup_{k, M=1}^N A_k^M,$$

pois $A_{k_0}^{N_0}$ aparece nesta união. Além disso, $N_0 \leq M_N(x) \leq N$, pois $M_N(x)$ é definido como o maior inteiro em $\{1, \dots, N\}$ tal que $x \in \bigcup_{k=1}^N A_k^{M_N(x)}$ e N_0 satisfaz esta propriedade. Por outro lado, como $x \in A_{k_N, x}^{M_N(x)}$ temos

$$\|f(x) - F_N(x)\| = \|f(x) - y_{k_N, x}\| \leq \frac{1}{M_N(x)} \leq \frac{1}{N_0} \leq \varepsilon.$$

No caso em que $f(x) = 0$ temos que x não pertence a nenhum dos A_k^N de modo que $F_N(x) = 0$ e, portanto, a convergência pontual é trivial, concluindo a demonstração do lema.

□

Este lema sugere a seguinte definição.

Definição B.8. Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é dita Bochner Mensurável (ou Mensurável segundo Bochner, ou ainda fortemente mensurável), quando existe uma sequência de funções simples $g_n : \Omega \rightarrow X$ tal que

$$\|g_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0 \quad q.t.p \text{ em } \Omega,$$

onde $q.t.p$ significa "exceto em um conjunto de medida nula", ou ainda "para quase todo ponto". Em particular, toda função simples é Bochner mensurável.

Observação B.9. Diversas propriedades acerca da mensurabilidade segundo Bochner das funções podem ser obtidas ao copiar as demonstrações equivalentes para a mensurabilidade segundo Lebesgue. Entre elas, destacamos as seguintes: se $f, g : \Omega \rightarrow X$ e $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ são Bochner Mensuráveis, então $f + g$ e $h \cdot g$ também o são. Além disso,

se $k : X \rightarrow Y$ é uma função contínua entre espaços de Banach, então $k \circ f : \Omega \rightarrow Y$ é Bochner Mensurável. Em particular, $\|f\|$ é mensurável.

Lema B.10. Seja $f : \Omega \rightarrow X$ uma função mensurável segundo Bochner, e suponha que existam duas sequências $g_n, h_n : \Omega \rightarrow X$ de funções simples, tais que $\|f - g_n\|$ e $\|f - h_n\|$ são mensuráveis e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f(x) - g_n(x)\| d\mu(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f(x) - h_m(x)\| d\mu(x) = 0.$$

Então, para cada $E \in \mathfrak{U}$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E h_m(x) d\mu(x).$$

Demonstração:

Sejam g_n e h_n as sequências do enunciado e $E \in \mathfrak{U}$, então

$$\begin{aligned} \left\| \int_E g_n d\mu - \int_E g_m d\mu \right\| &= \left\| \int_E (g_n - g_m) d\mu \right\| \\ &\leq \int_E \|g_n - g_m\| d\mu \leq \int_{\Omega} \|g_n - g_m\| d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \|g_n - f\| d\mu + \int_{\Omega} \|f - g_m\| d\mu \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

de modo que $(\int_E g_n d\mu)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ é uma sequência de Cauchy em X e, portanto, converge. Analogamente, mostramos que $(\int_E h_m d\mu)_{m \in \mathbb{Z}_+}$ é convergente. Finalmente, a desigualdade

$$\left\| \int_E g_n d\mu - \int_E h_n d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|g_n - f\| d\mu + \int_{\Omega} \|f - h_n\|$$

implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E h_m(x) d\mu(x).$$

□

Definição B.11. Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é Bochner integrável se existem

funções simples g_n tais que $g_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p em Ω e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|g_n(x) - f(x)\| d\mu(x) = 0.$$

Quando f for Bochner integrável, definimos sua integral por

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x) d\mu(x).$$

Observação B.12. É imediato do lema anterior que a integral de Bochner de uma função Bochner integrável está bem definida. Além disso, podemos novamente copiar a demonstração no caso da integral de Lebesgue para demonstrar que o espaço das funções Bochner integráveis é um espaço vetorial e a integral de Bochner age como um operador linear neste espaço.

Lema B.13. Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é Bochner integrável se, e somente se, $\|f\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ for mensurável e Lebesgue integrável.

Demonstração: Se f é Bochner integrável, então existem funções simples g_n tais que $g_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p em Ω e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|g_n(x) - f(x)\| d\mu(x) = 0.$$

Como f é mensurável (pois é o limite pontual de funções mensuráveis), segue que $\|f\|$ também é mensurável. Além disso,

$$\int_{\Omega} \|f\| d\mu \leq \int_{\Omega} \|f - g_n\| d\mu + \int_{\Omega} \|g_n\| d\mu < \infty;$$

logo $\|f\|$ é integrável.

Reciprocamente, suponha que f é mensurável e satisfaz $\int_{\Omega} \|f\| d\mu < \infty$. Segue do Lema B.7 que existe uma sequência de funções simples f_k que converge pontualmente para f e satisfaz $\|f_k(x)\| \leq 2\|f(x)\|$. Então, a sequência $g_k(x) = \|f_k(x) - f(x)\|$ é uma sequência de funções mensuráveis que converge pontualmente para zero e satisfaz $\|g_k(x)\| \leq 3\|f(x)\|$. Do teorema da convergência dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k(x) d\mu(x) = 0$$

□

Finalmente, observe que as funções Bochner integráveis satisfazem

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| d\mu(x).$$

De fato, suponha que f seja Bochner integrável. Então, existe uma sequência de funções simples g_n que aproxima f . Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \right\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x) d\mu(x) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\Omega} g_n(x) d\mu(x) \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|g_n(x)\| d\mu(x) = \int_{\Omega} \|f(x)\| d\mu(x). \end{aligned}$$

Lema B.14. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ função contínua com suporte compacto. Então,

$$\left\| \int F(y) dy \right\| \leq \int \|F(y)\| dy. \quad (\text{B.0.2})$$

Demonstração: Basta observar que se F é contínua e tem suporte compacto, então $\|F\|$ é mensurável e integrável. Portanto, F é bochner integrável e segue o resultado.

□

Algebras de Lie

Queremos demonstrar neste apêndice o Teorema 6.6. Para isso faremos uso de certos resultados da teoria de representação de álgebras de Lie. No que se segue, faremos uma breve introdução aos conceitos básicos da teoria, a fim de enunciar os resultados necessários, a saber, o Teorema de Weyl, e a classificação das representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

C.1 Noções gerais

Definição C.1. Uma algebra de Lie, é um espaço vetorial $\mathbb{L}$, munido de uma operação bilinear $[\cdot; \cdot] : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$, chamada de Colchete de Lie, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $[x; x] = 0$ para todo $x \in \mathbb{L}$
- $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

A segunda propriedade do Colchete de Lie é chamada Identidade de Jacobi.

Observação C.2. A primeira propriedade do Colchete de Lie e a bilinearidade implicam $[x, y] + [y, x] = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{L}$.

Definição C.3. Um homomorfismo de Algebras de Lie é uma aplicação $\phi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}'$ entre algebras de Lie, que preservam o colchete, isto é:

$$\phi([x, y]_{\mathbb{L}}) = [\phi(x), \phi(y)]_{\mathbb{L}'}$$

Um isomorfismo de Algebras de Lie, é um homomorfismo de algebras de lie bijetor.

Os mais importantes exemplos de Algebras de Lie são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{F})$ (sendo $\mathbb{F}$ um corpo qualquer) com a operação bilinear dada pelo comutador $[A, B] = AB - BA$.

Vejamos algumas Álgebras de Lie de interesse. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com dimensão finita.

- $\mathfrak{gl}(V)$: É a álgebra formada pelos endomorfismos de um espaço vetorial V . O colchete é dado por $[T, S] = T \circ S - S \circ T$. Note que $\mathfrak{gl}(V)$ também faz sentido quando V tem dimensão infinita. Quando V tem dimensão finita, $\mathfrak{gl}(V)$ pode ser canonicamente identificado com $M_n(\mathbb{F})$, sendo $\dim V = n$.
- $\mathfrak{sl}(V)$: subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ formada pelos endomorfismo de V com traço zero.

Sejam S, M subconjuntos de $\mathbb{L}$, iremos denotar $[S, M] = \{[s, m]; s \in S; m \in M\}$

Definição C.4. Um ideal $\mathbb{I}$ em uma Álgebra de Lie $\mathbb{L}$ é uma subálgebra que satisfaz $[\mathbb{I}; \mathbb{L}] \subseteq \mathbb{I}$

Os mais importantes exemplos de ideais de uma álgebra $\mathbb{L}$ são:

- $Z(\mathbb{L}) = \{x \in \mathbb{L}; [x, \mathbb{L}] = 0\}$, chamado o Centro de $\mathbb{L}$
- $[\mathbb{L}, \mathbb{L}]$, chamado a álgebra derivada de $\mathbb{L}$.
- Seja $\phi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}'$ um homomorfismo de Álgebras de Lie, então $\text{Ker}\phi$ é um ideal de $\mathbb{L}$

Definição C.5. Dizemos que $\mathbb{L}$ é uma Álgebra de Lie simples se $\mathbb{L}$ não possui ideais não triviais.

No caso particular em que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão 2. Vamos denotar $\mathfrak{sl}(V)$ por $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Lema C.6. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ é uma Álgebra de Lie simples

Demonstração: Note primeiramente que

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

formam uma base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e satisfazem as seguintes relações de comutatividade:

$$[x, y] = h ; \quad [h, x] = 2x ; \quad [h, y] = -2y$$

Seja agora $\mathbb{I}$ um ideal não nulo de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Note que $h \in \mathbb{I}$ implica que $[h, x] = 2x \in \mathbb{I}$ e $[y, h] = 2y \in \mathbb{I}$ e, portanto, $\mathbb{I} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Vamos então mostrar que se $\mathbb{I}$ é ideal não nulo então $h \in \mathbb{I}$. Seja $Ax + By + Ch$ um elemento não nulo qualquer de $\mathbb{I}$ e suponha que A e B não sejam ambos nulos. Então:

$$\mathbb{I} \ni [[Ax + By + Ch, h], y] = [2Ax - 2By, y] = 2Ah$$

$$\mathbb{I} \ni [[Ax + By + Ch, h], x] = [2Ax - 2By, x] = 2Bh$$

Logo $h \in \mathbb{I}$.

□

Definição C.7. Uma representação de uma Álgebra de Lie $\mathbb{L}$ é um homomorfismo de Álgebras de Lie $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ para algum espaço vetorial V . Iremos focar no caso em que V tem dimensão finita.

Sejam $\mathbb{L}$ uma Álgebra de Lie, V um espaço vetorial (sobre o mesmo corpo que $\mathbb{L}$) e $\psi : \mathbb{L} \times V \rightarrow V$ uma aplicação bilinear que satisfaça a seguinte propriedade:

$$\psi([x, y], v) = \psi(x, \psi(y, v)) - \psi(y, \psi(x, v))$$

Então V é dito um $\mathbb{L}$ -módulo. Em geral, iremos denotar a aplicação bilinear ψ por um ponto: $\psi(x, v) = x \cdot v$. Assim, a condição acima é reescrita por:

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$$

Definição C.8. Uma aplicação $\Psi : V \rightarrow W$ é um homomorfismo de $\mathbb{L}$ -módulos, se é uma aplicação linear que satisfaz $\Psi(x \cdot v) = x \cdot \Psi(v)$. Um isomorfismo de $\mathbb{L}$ -módulos é um homomorfismo bijetor.

Um $\mathbb{L}$ -módulo V é dito irredutível, se ele não possui submódulo não trivial. Ele é dito completamente redutível se pode ser escrito como a soma direta de submódulos irredutíveis.

Note que podemos associar a cada $\mathbb{L}$ -módulo V uma representação de $\mathbb{L}$ definida por:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{L} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ x &\mapsto \varphi(x)(v) = x \cdot v\end{aligned}$$

Reciprocamente, a cada representação $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ podemos associar um $\mathbb{L}$ -módulo V , cuja operação bilinear é definida por $x \cdot v = \varphi(x)(v)$. Com isso, podemos falar de representações de $\mathbb{L}$ irredutíveis e completamente redutíveis.

Seja $\mathbb{L}$ uma álgebra de Lie, e defina a seguinte sequência de ideais:

$$\mathbb{L}^0 = \mathbb{L} \quad ; \quad \mathbb{L}^{(i+1)} = [\mathbb{L}^{(i)}; \mathbb{L}^{(i)}]$$

Note que $\mathbb{L}^{(j+1)} \subset \mathbb{L}^{(j)}$. Diremos então que uma Álgebra de Lie $\mathbb{L}$ é solúvel quando $\mathbb{L}^{(j)} = 0$ para algum j . $\mathbb{L}$ é dita semisimples se não possui ideal não trivial solúvel. Em particular, uma álgebra simples é semisimples.

Teorema C.9. *Se $\sigma : \mathbb{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação finita de uma Álgebra de Lie semisimples $\mathbb{L}$, então σ é completamente redutível.*

□

Em particular, toda representação finita de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ é completamente redutível.

Consideremos agora um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulo V ($\dim(V) < \infty$) qualquer e $\{x, y, h\}$ a base standard de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. É possível mostrar que h age diagonalmente sobre V . Podemos então considerar V como a soma dos autoespaços de h :

$$V = \bigoplus V_\lambda \quad ; \quad V_\lambda = \{v \in V; h \cdot v = \lambda v\}$$

Teorema C.10. *Considere $\mathbb{L} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e V um $\mathbb{L}$ -módulo irredutível. Seja ainda V_λ definido acima. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) *V se escreve como a soma direta dos autoespaços V_μ , $\mu = m, m-2, \dots, 2-m, -m$ e $\dim(V_\mu) = 1$, com $\dim(V) = m+1$.*
- (b) *Seja v_0 autovetor associado a um autovalor maximal m (maior parte real). Então $x \cdot v_0 = 0$ e $\{v_0, \dots, v_m\}$ definidos por*

$$v_j = \frac{1}{j!} y^j \cdot v_0 \quad \forall j > 0$$

formam uma base de autovetores de V associada a h .

(c) A atuação de $\mathbb{L}$ em V com relação à esta base de autovetores é dada explicitamente por

$$\begin{aligned}x \cdot v_j &= (m - j + 1)v_{j-1} \ ; \ (v_{-1} = 0) \\h \cdot v_j &= (m - 2j)v_j \\y \cdot v_j &= (j + 1)v_{j+1} \ ; \ (v_{m+1} = 0)\end{aligned}$$

Em particular, existe no máximo um (a menos de isomorfismo) $\mathbb{L}$ -módulo irredutível de dimensão $m + 1$ para cada $m \geq 0$.

C.2 Demonstração do Teorema 6.6

Seja então $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ a única representação irredutível de dimensão $m + 1$ e defina $\sigma : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ por:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \frac{1}{2}(\rho(h) - \rho(x) + \rho(y)) \\ \sigma(h) &= \rho(x) + \rho(y) \\ \sigma(y) &= \frac{1}{2}(\rho(h) + \rho(x) - \rho(y))\end{aligned}$$

Vejam que σ é uma representação. Basta mostrar que, para a, b elementos da base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, vale $\sigma([a, b]) = [\sigma(a), \sigma(b)]$.

- $a = b = x$ (os caso $a = b = y$ e $a = b = h$ são análogos)

$$\begin{aligned}[\sigma(x), \sigma(x)] &= \frac{1}{4}[\rho(h - x + y), \rho(h - x + y)] = \frac{1}{4}\rho([h - x + y, h - x + y]) \\ &= \frac{1}{4}\rho(0) = 0 = \sigma(0) = \sigma([x, x])\end{aligned}$$

- $a = x, b = y$ (O caso $a = y$ e $b = x$ é análogo)

$$\begin{aligned}[\sigma(x), \sigma(y)] &= \frac{1}{4}[\rho(h - x + y), \rho(h + x - y)] = \frac{1}{4}\rho([h - x + y, h + x - y]) \\ &= \frac{1}{4}\rho(2[h, x - y]) = \frac{1}{4}\rho(2[h, x] + 2[y, h]) = \rho(x + y) = \sigma(h) = \sigma[x, y]\end{aligned}$$

- $a = x$, $b = h$ (os demais casos são análogos)

$$\begin{aligned}
[\sigma(x), \sigma(h)] &= \frac{1}{2}[\rho(h - x + y), \rho(x + y)] = \frac{1}{2}\rho([h - x + y, x + y]) \\
&= \frac{1}{2}\rho([h, x + y] - 2[x, y]) = \frac{1}{2}\rho(2x - 2y - 2h) = -\rho(h - x + y) \\
&= \sigma(-2x) = \sigma([x, h])
\end{aligned}$$

Seja agora $w_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_m$, então:

$$\begin{aligned}
\rho(x)w_0 &= \sum_{j=0}^m (m - j + 1)v_{j-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (m - k)v_k \\
\rho(y)w_0 &= \sum_{j=0}^m (j + 1)v_{j+1} = \sum_{k=1}^m kv_k
\end{aligned}$$

assim,

$$\sigma(h)w_0 = \rho(x)w_0 + \rho(y)w_0 = \left(\sum_{j=1}^{m-1} ((m - j) + j)v_j + mv_0 + mv_m \right) = mw_0 \quad (\text{C.2.1})$$

Do teorema de Weyl (Teorema C.9) segue que σ é completamente redutível, logo existe um submódulo W irredutível que contém w_0 . Do Teorema C.10 segue que, se k é autovalor h em um submódulo irredutível, então $k, k - 2, \dots, 2 - k, -k$ são autovalores de h , logo (C.2.1) implica que $\dim(W) \geq m + 1$. Assim $W = V$ e, portanto, σ é irredutível, e $m, m - 2, \dots, 2 - m, -m$ são autovalores de $\sigma(h)$. Mas $\sigma(h)$ é dada por:

$$\sigma(h) = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m - 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m & 0 \end{pmatrix}$$

Segue então do Lema 6.7 que os autovalores de $T_0(m, 1)$ são $im, i(m - 2), \dots, i(2 - m), -im$. Como $T_0(m, b) = bT_0(m, 1)$, segue a demonstração do Teorema 6.6.

C.3 Álgebra de Heisenberg e Grupo de Heisenberg

Definição C.11. Defina em $\mathbb{R}^{2n+1}$ uma forma bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ definida por

$$[(p, q, s), (x, y, t)] = (0, 0, p \cdot y - q \cdot x) \quad ; \quad p, q, x, y \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.3.1})$$

onde $\cdot$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$. Para facilitar a notação, iremos suprimir o ponto e denotamos $a \cdot b = ab$.

Não é difícil verificar que $(\mathbb{R}^{2n+1}, [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra de Lie. Chamamos esta álgebra de Álgebra de Heisenberg e a denotamos por $\mathfrak{h}_n$.

Uma maneira mais natural de construir esta álgebra é da seguinte forma: considere os operadores Q_j e P_j atuando em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$Q_j f(x) = x_j f(x) \quad P_j f(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$$

É fácil ver que Q_j e $P_k, j, k = 1, \dots, n$ satisfazem as seguintes relações de comutatividade:

$$[Q_j, Q_k] = [P_j, P_k] = 0 \quad ; \quad [P_j, Q_k] = -i\delta_{j,k} Id$$

Para $p, q \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ definimos os operadores

$$pX = \sum_{j=1}^n p_j Q_j \quad ; \quad qD = \sum_{j=1}^n q_j P_j \quad ; \quad tU = -it Id$$

e identifiquemos $(p, q, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ com o operador $pX + qD + sU$. Então,

$$\begin{aligned} [pX + qD + sU, xX + yD + tU] &= [pX, yD] + [qD, xX] = \sum_{j,k=1}^n (p_j y_k [Q_j, P_k] + q_j x_k [P_j, Q_k]) \\ &= \sum_{j=1}^n (p_j y_j - q_j x_j) [Q_j, P_j] = -i(py - qx) Id = (py - qx)U \end{aligned}$$

Podemos então considerar a álgebra de Heisenberg como a álgebra formada pelos operadores da forma $(pX + qD + tU)$ atuando em $\mathcal{S}$. Na verdade, por dualidade, podemos considerar estes operadores atuando em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Queremos encontrar o grupo associado à esta álgebra, e para isso, é conveniente escrever um elemento $(p, q, s) \in \mathfrak{h}_n$ como uma matriz $(2n+1) \times (2n+1)$:

$$M(p, q, s) = Id + m(p, q, s) = Id + \begin{pmatrix} 0 & p & s \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos o comutador usual de matrizes temos que

$$[m(p, q, s), m(x, y, t)] = m(0, 0, py - qx) \quad \text{e} \quad [M(p, q, s), M(x, y, t)] = M(0, 0, py - qx)$$

Assim, não é difícil ver que $\mathfrak{h}_n \ni (p, q, s) \mapsto m(p, q, s)$ e $\mathfrak{h}_n \ni (p, q, s) \mapsto M(p, q, s)$ são na verdade isomorfismos de álgebras de Lie. Note que $m(p, q, s)$ é nilpotente, mais precisamente $m(p, q, s)^2 = m(0, 0, pq)$ e $m(p, q, s)^k = 0$ para $k \geq 3$

Vamos agora utilizar o mapa exponencial para identificar o grupo de Lie associado à $\mathfrak{h}_n$. De modo geral o mapa exponencial é definido utilizando o fluxo de campos vetoriais invariantes pela esquerda, e mapa exponencial é então um diffeomorfismo entre uma vizinhança da origem na álgebra e uma vizinhança da identidade do grupo de Lie associado. Mas quando o mapa exponencial se refere a matrizes, ele coincide com a exponencial de matrizes usual. Como já vimos, podemos identificar $\mathfrak{h}_n$ com o espaço das matrizes $\{m(p, q, s), (p, q, s) \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$, além disso, da nilpotência das matrizes neste espaço, concluímos que podemos reduzir a exponencial na seguinte soma finita:

$$\exp(m(p, q, s)) = Id + m(p, q, s) + \frac{1}{2}m(p, q, s)^2 = M(p, q, s + \frac{1}{2}pq)$$

de modo que a exponencial é na verdade um isomorfismo global entre $\mathfrak{h}_n$ e $\{M(p, q, s), (p, q, s) \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$, este último com a operação de grupo dada pela multiplicação de matrizes usual:

$$M(p, q, s)M(x, y, t) = M(p+x, q+y, s+t+py)$$

Temos então duas maneiras de definir o grupo de Heisenberg. Uma possível maneira de definir o grupo de Heisenberg é identificar $\mathbb{R}^{2n+1}$ com $\{M(A), A \in P\}$ e estabelecer a seguinte operação de grupo:

$$(p, q, s)(x, y, t) = (p+x, q+y, s+t+py)$$

O grupo de Heisenberg realizado desta forma é chamado Grupo de Heisenberg Polarizado e é denotado por $\mathbb{H}_n^{pol}$. A outra maneira utiliza a operação de grupo induzida pela exponencial¹

$$(p, q, s)(x, y, t) = (p + x, q + y, s + t + \frac{1}{2}(py - qx)) \quad (\text{C.3.2})$$

Este é chamado o Grupo de Heisenberg e é denotado por $\mathbb{H}_n$. Note que neste caso, o mapa exponencial é meramente a identidade, e as operações de grupo e de álgebra se relacionam da seguinte maneira:

$$XY = X + Y + [X, Y] \quad ; \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

onde o produto é definido utilizando a regra (C.3.2) e o comutador é definido por (C.3.1). As realizações do grupo de Heisenberg se relacionam pelo seguinte isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H}_n &\rightarrow \mathbb{H}_n^{pol} \\ (p, q, s) &\mapsto (p, q, s + \frac{1}{2}p, q) \end{aligned}$$

Consideremos agora, para cada $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a representação π_h de $\mathbb{H}_n$ dada por $\pi_h(p, q, t) = e^{i(htId + pX + qhD)}$. Explicitamente,

$$\begin{aligned} \pi_h : \mathbb{H}_n &\rightarrow \text{Aut}(L^2(\mathbb{R}^n)) \\ (p, q, t) &\mapsto \pi_h(p, q, t) : L^2 \rightarrow L^2 \\ f &\mapsto \pi_h(p, q, t)f(x) = e^{i(th + px + \frac{pqh}{2})}f(x + hq) \end{aligned}$$

Esta representação recebe o nome de Representação de Schrodinger. Sua representação derivada² também é denotada por π_h .

É fácil observar que a representação de Schrodinger não é injetiva, para corrigir este fato, é usual considerarmos o grupo de Heisenberg reduzido

Definição C.12. O grupo quociente

$$\mathbb{H}_n^{red} = \mathbb{H}_n / \{(0, 0, k), k \in 2\pi\mathbb{Z}\}$$

e chamado de Grupo de Heisenberg Reduzido

¹ $\exp(m(p, q, s))\exp(m(x, y, t)) = \exp(m(p + x, q + y, s + t + \frac{1}{2}(py - qx)))$

²Se ρ é uma representação de um grupo de Lie G , sua representação derivada é uma representação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada a G .

Continuamos a denotar os seus elementos por (p, q, t) , mas estamos supondo agora que $t \in [0, 2\pi/h)$. Podemos então considerar π_h como uma representação injetiva de $\mathbb{H}_n^{red}$. Uma simplificação útil e usual é omitir o termo e^{ihtId} e escrevemos

$$\pi_h(p, q) = \pi_h(p, q, 0) = e^{i(pX+hqD)}$$

Seja então $F \in L^1(\mathbb{H}_n^{red})$, a representação integral de π_h em $\mathbb{H}_n^{red}$ é definida por:

$$\begin{aligned} \pi_h(F) : L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \int_{\mathbb{H}_n^{red}} F(g) \pi(g) f dg = \int_{\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{T}} F(p, q, t) \pi_h(p, q, t) f dp dq dt \end{aligned}$$

onde a integral acima é uma integral de Bochner. Note que $\pi_h(F)$ define um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ com $\|\pi_h(F)\| \leq \|F\|_{L^1(\mathbb{H}_n^{red})}$. Isto segue do fato de que π_h é unitário.

Expandindo F em sua série de Fourier na variável t , temos

$$F(p, q, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{F}_k(p, q) e^{ikht}$$

Segue então do teorema da convergência dominada que podemos reescrever a representação integral da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \pi_h(F) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{2\pi/h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{F}_k(p, q) e^{ikht} \pi_h(p, q, t) dp dq dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{2\pi/h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{F}_k(p, q) e^{ikht} e^{iht} \pi_h(p, q) dp dq dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}_k(p, q) \pi_h(p, q) dp dq \int_0^{2\pi/h} e^{i(k+1)ht} dt \end{aligned}$$

note que para $m \neq 0$ temos

$$\int_0^{2\pi/h} e^{imht} dt = 0$$

portanto

$$\pi_h(F) = \frac{2\pi}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}_{-1}(p, q) \pi_h(p, q) dp dq$$

de modo que na verdade, concluímos que na verdade apenas um dos coeficientes de Fourier de F contribui para o valor de $\pi_h(F)$. Podemos assim considerar π_h como uma representação de $L^1(\mathbb{R}^{2n})$

Definição C.13. Seja $F \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ e seja $\pi_h(p, q) = e^{i(pX+qhD)} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$. Então definimos a representação integral de F como o operador

$$\tilde{\pi}_h(F) : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\begin{aligned} f \mapsto \tilde{\pi}_h(F)f &= \frac{2\pi}{h} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(p, q) \pi_h(p, q) f dp dq = \frac{2\pi}{h} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(p, q) e^{i(pX+qhD)} f dp dq \\ &= \frac{2\pi}{h} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(p, q) e^{i(pX+qhD)} \left(\frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi/h} e^{iht} e^{-iht} dt \right) f dp dq \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_0^{2\pi/h} e^{-iht} F(p, q) e^{i(ht+pX+qhD)} f dp dq dt = \pi_h(F \otimes \chi) \end{aligned}$$

sendo $\chi(t) = e^{-iht}$

Claramente, $\pi_h(F)$ é um operador limitado e satisfaz $\|\pi_h(F)\| \leq \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}$. Escrevendo

$$K_F(x, y) = \frac{2\pi}{h} \mathcal{F}_1^{-1} F\left(\frac{x+y}{4\pi}, \frac{y-x}{h}\right)$$

sendo $\mathcal{F}_j$ a transformada parcial de Fourier na j -ésima variável. Temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} K_F(x, y) f(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{2\pi}{h} \int_{\mathbb{R}^n} F(p, \frac{y-x}{h}) e^{2\pi i p (\frac{x+y}{4\pi})} dp \right) f(y) dy \\ &= \frac{2\pi}{h} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(p, \frac{y-x}{h}) e^{2\pi i p (\frac{y+x}{4\pi})} f(y) dp dy \\ &= \frac{2\pi}{h} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(p, \frac{y-x}{h}) e^{ipx + i \frac{p(y-x)}{2}} f(y) dp dy \\ &= \frac{2\pi}{h} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(p, q) e^{i(pX + \frac{pqh}{2})} f(x + hq) dp dq = \tilde{\pi}_h(F) f(x) \end{aligned}$$

Ou seja, podemos entender o $\pi_h(F)$ como um operador integral, cujo Kernel é dado por K_F . Isso nos permite generalizar o mapa $\pi_h(F)$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ utilizando o teorema do Kernel de Schwartz e o fato de que as operações que definem K_F podem ser extendidas à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ por dualidade.

Definição C.14. Se G é um grupo de Lie, então, sabemos sua álgebra de lie $\mathfrak{g}$ pode ser identificada com os campos de vetores em G invariantes pela esquerda. É natural então, considerar operadores de ordens superiores. O conjunto destes operadores é denotado por

$\mathfrak{U}(g)$ e recebe o nome de "álgebra envelopante universal". Mais precisamente

$$\mathfrak{U}(g) = \{P(\partial); \text{ operador diferencial invariante pela esquerda atuando em } G\}$$

O adjetivo "universal" segue da seguinte observação

Observação C.15. Se A é uma álgebra associativa sobre $\mathbb{C}$ e $f : g \rightarrow A$ é uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear tal que

$$f([X, Y]) = f(X)f(Y) - f(Y)f(X)$$

então existe um único homomorfismo $\tilde{f} : \mathfrak{U}(g) \rightarrow A$ de álgebras complexas associativas, tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} g & \hookrightarrow & \mathfrak{U}(g) \\ & \searrow \mathfrak{f} & \downarrow \tilde{f} \\ & & A \end{array}$$

Esta representação é estendida à "álgebra envelopante universal" denotada por $\mathfrak{U}(\mathfrak{h}_n)$.

Referências Bibliográficas

- ESCHRIG, H. *Topology and Geometry for Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- FOLLAND, G. B. *Harmonic Analysis in Phase Space*. Princeton, Princeton U. Press, 1989.
- . *A course in Abstract Harmonic Analysis*. Florida: Taylor Francis, 1994.
- GUILLEMIN, V.; SCHAEFFER, D. On a certain class of Fuchsian partial differential equations. *Duke Math. J.* 44, no. 1, 157 - 199, 1977
- HÖRMANDER, L. *The analysis of linear partial differential operators*. Distribution theory and Fourier analysis, second edition. Berlin: Springer, 1990. v. I
- . *The analysis of linear partial differential operators*. Differential operators with constant coefficients, reprint of the 1983 original. Berlin: Springer-Verlag, 2005. v.II
- HOUNIE, J. *Teoria Elementar das Distribuições*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- HUMPHREYS, J. E. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Second printing, revised. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1978
- KOVACS, I. SILVER, D.S. WILLIAMS S. G. Determinants of Commuting-Block Matrices. *The American Mathematical Monthly*. 106, No. 10, 950 - 952, 1999.
- LOJASIEWICZ, S. Sur le problème de la division. *Studia Math.* 18, 87-136, 1959.
- LEIPNIK, R. B.; PEARCE, C. E. M. The multivariable Faà di Bruno Formula and multivariable Taylor expansions with explicit integral remainder term. *ANZIAM Journal*. 48, n° 3, 327 - 341, 2007.
- CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 1988.

- MÜLLER, D.; RICCI, F. Analysis of second order differential operators on Heisenberg groups. I. *Invent. Math.* 101, no. 3, 545 - 582, 1990
- . Analysis of second order differential operators on Heisenberg groups. II. *J. Funct. Anal.* 108, no. 2, 296 - 346, 1992.
- MÜLLER, D. Local solvability of first order differential operators near a critical point, operators with quadratic symbols and the Heisenberg group. *Comm. Partial Differential Equations*. 17, no. 1-2, 305 - 337, 1992
- NELSON, E. *Topics in Dynamics I: Flows*. Princeton: Princeton U. Press, 1969.
- SILVA, M. F. *Resolubilidade Global de Operadores Diferenciais Parciais Reais de Ordem Um*. 2006. 70 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2006.
- SILVA, M. F.; dos SANTOS FILHO, J.R. Global solvability for first order real linear partial differential operators. *Journal of Differential Equations*, v. 247, p. 2688-2704, 2009.
- STERNBERG, S. The structure of local homeomorphisms. III. *Amer. J. Math.* 81, 578 - 604, 1959.
- TREVES, F. On the solvability of vector fields with real linear coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.* 137, no. 12, 4209 - 4218, 2009.