

---

Ações Anosov que são suspensões

*Rodrigo Ribeiro Lopes*

---



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Rodrigo Ribeiro Lopes**

**Ações Anosov que são suspensões**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Maquera Apaza

**USP – São Carlos**  
**Junho de 2016**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L634a           Lopes, Rodrigo Ribeiro  
                  Ações Anosov que são suspensões / Rodrigo  
Ribeiro Lopes; orientador Carlos Alberto  
Maquera Apaza. - São Carlos - SP, 2016.  
                  90 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Ações Anosov. 2. Sistema de Markov.  
3. Conjectura de Verjovsky. I. Apaza, Carlos Alberto  
Maquera, orient. II. Título.

**Rodrigo Ribeiro Lopes**

## Anosov actions which are suspensions

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Carlos Alberto Maquera Apaza

**USP – São Carlos**  
**June 2016**



# AGRADECIMENTOS

---

---

Primeiramente a Deus, por estar sempre cuidando de mim e me guiando.

Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Maquera pela orientação, confiança, amizade, paciência, pelos seus ensinamentos e pelas lições de vida.

Ao ICMC sou imensamente grato pelas oportunidades que me proporcionou.

Um grande obrigado aos professores e funcionários do ICMC por dedicarem suas vidas a educação e a pesquisa.

Aos grandes amigos que este lugar me proporcionou. Valeu Dione, você é o cara. Valeu Jaque, Henrique (Mineiro), Markus, Camila, Felipe, Rodolfo (Mirna), Julia, Steve e Leandro desde muito tempo me aguentando. E valeu Jorge, Thiago (Fera), Badaró, Víctor (Argola), Nelson, Paty, Ginarra, Thales (Teles). Peço desculpa caso não citado alguém, mas saiba que se dividimos um café então você certamente faz parte dessa história.

Agradeço à minha família que sempre me apoio e me deu forças para realizar meus planos. Em especial, obrigado mãe por ter feito de tudo para que eu chegasse até aqui.

Agradeço em especial à minha esposa Isabel por seu imenso apoio e compreensão.

À Capes e CNPQ pelo apoio financeiro durante meu trabalho.





*“ But it ain’t about how hard you hit.  
It’s about how hard you can get hit and keep moving forward.  
How much you can take and keep moving forward.  
That’s how winning is done!”  
(Rocky Balboa)*



# RESUMO

LOPES, R. R.. **Ações Anosov que são suspensões**. 2016. 90 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Este trabalho é destinado a mostrar soluções parciais para a conjectura de Verjovsky para ações, a qual afirma que: “*Toda ação Anosov de codimensão 1 irredutível de  $\mathbb{R}^k$  sobre uma variedade compacta  $M$  de dimensão maior do que  $k + 2$  é topologicamente equivalente a suspensão de uma ação Anosov de  $\mathbb{Z}^k$* ”. Os teoremas principais da tese são dois. No primeiro, generalizamos um teorema devido a Barbot e Maquera [1], provando que sob as hipóteses da conjectura e supondo que se  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é de classe  $C^1$ , então a ação é topologicamente equivalente a suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ . Este resultado também é uma extensão de um teorema, para fluxos de Anosov ( $k = 1$ ), devido a Ghys [2]. Para mostrar este resultado foi necessário desenvolver um análogo da teoria, que mostra a existência das partições de Markov para fluxos devido a Ratner [3], para ações Anosov. Finalmente, no segundo resultado principal, retiramos a hipótese da ação ser irredutível e provamos que se alguma das folheações fortes não é minimal então a conjectura é verdadeira. Para provar este resultado foi necessário estendermos um teorema de Plante [4].

**Palavras-chave:** Ações Anosov, Sistema de Markov, Conjectura de Verjovsky.



# ABSTRACT

LOPES, R. R.. **Ações Anosov que são suspensões**. 2016. 90 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

This work is destined to show partial results for the Verjovskiy's conjecture for actions, which says that “*Every irreducible codimension-one Anosov action of  $\mathbb{R}^k$  on a manifold  $M$  of dimension at least  $k + 3$  is topologically conjugate to the suspension of a Anosov action of  $\mathbb{Z}^k$* ”. The main results are two. In the first, we show that if  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  is  $C^1$  then the Verjovskiy's conjecture does hold, generalizing Barbot-Maquera's theorem [1]. This theorem is also an extension of a result, for flows, of Ghys [2]. An important step to show this theorem was to construct the Markov system for Anosov actions. The Markov system has similar properties of Markov partitions for Anosov flows obtained by Ratner,[3]. Finally, in the second main theorem, without irreducibility, we show that if some strong foliation is not minimal then the conjecture is true. For to prove this result, was necessary we extend a Plante's theorem,[4].

**Key-words:** Anosov action, Markov's system, Verjovskiy's conjecture.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Geometria da mudança de coordenadas . . . . .	22
Figura 2 – Vizinhança trivializadora de compactos em folhas. . . . .	23
Figura 3 – Decomposição de $f[y, V]$ . . . . .	42
Figura 4 – Conjunto $[C, x]$ . . . . .	44
Figura 5 – Isomorfismo via órbita . . . . .	44
Figura 6 – Aplicação de holonomia entre as seções $\Sigma_i$ e $\Sigma_j$ . . . . .	47
Figura 7 – Conjunto $D_{iv}^1$ . . . . .	53
Figura 8 – Vizinhança trivializadora longa $U_t$ de $\mathcal{O}_p(t)$ . . . . .	67
Figura 9 – Propriedade de Markov na holonomia . . . . .	68
Figura 10 – A projeção ao longo da folheação forte instável preserva as folhas fortes estáveis. . . . .	85
Figura 11 – Proximidade entre os pontos $p$ e $q$ contidos em $L$ . . . . .	87





# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	17
2	PRÉ-REQUISITOS . . . . .	21
2.1	Teoria das folheações . . . . .	21
2.2	Ações de grupos . . . . .	24
2.3	Ações de Anosov . . . . .	27
2.4	Ações de Anosov de codimensão um . . . . .	32
3	SISTEMA DE MARKOV PARA AÇÕES DE ANOSOV . . . . .	37
3.1	Dinâmica hiperbólica numa vizinhança produto . . . . .	38
3.2	Sistema de Markov . . . . .	43
3.3	Construção do sistema de Markov . . . . .	47
3.4	Grafo associado a um sistema de Markov . . . . .	66
4	TEOREMAS DE GHYS . . . . .	71
4.1	Integrabilidade de $E^{ss} \oplus E^{uu}$ . . . . .	72
4.2	Medidas invariantes pela ação . . . . .	74
4.3	Prova do Teorema II . . . . .	76
5	TEOREMA DE PLANTE . . . . .	79
5.1	Densidade das folhas instáveis e estáveis . . . . .	80
5.2	Existência de uma fibração transversal à ação . . . . .	82
5.3	Prova do Teorema IV . . . . .	84
	REFERÊNCIAS . . . . .	89



---

# INTRODUÇÃO

---

Dentre os vários tipos de problemas pesquisados na matemática o *problema de classificação* possui uma grande importância para a teoria. Dependendo do interesse, poder compreender uma grande família de objetos matemáticos através de algumas propriedades é certamente de grande utilidade. Infelizmente, como sabemos, quase sempre isto não é possível. Porém o objetivo de todo pesquisador é compreender a maior parte possível e/ou algumas subfamílias "destacadas". Em sistemas dinâmicos não é diferente. Em cada tipo de sistema dinâmicos existem diferentes formas de caracterizá-los. Exemplo disso é a entropia na teoria ergódica, o número de rotação para difeomorfismos do círculo, etc.

Resultados de classificação em geral seguem duas linhas: ou admitimos hipóteses sobre o espaço ambiente (a variedade  $M$ ) e verificamos quais tipos de dinâmica tal espaço admite; ou impomos condições sobre a dinâmica (difeomorfismos, fluxos ou ações de grupo) e determinamos o que ocorre com o espaço ambiente.

Uma família muito importante na teoria de sistemas dinâmicos são os *sistemas de Anosov*. A característica fundamental dessa família é a propriedade hiperbólica, a qual garante a complexidade da dinâmica a ser estudada. Destacamos três tipos de sistemas Anosov: os difeomorfismos, os fluxos (sistemas de Anosov clássicos) e as ações Anosov. Em cada tipo existem mecanismos diferentes de classificação. Mesmo nos restringindo ao estudo dos sistemas de Anosov ainda é necessário impormos hipóteses para que uma classificação topológica seja feita, como relatamos a seguir.

Com respeito aos difeomorfismos, em 1970 Franks-Newhouse ([5] e [6]) provaram que todo difeomorfismo de Anosov de codimensão 1 é topologicamente conjugado a um automorfismo linear hiperbólico. Em 1974, Manning [7] aborda o caso algébrico, mais precisamente ele mostra que todo difeomorfismo de Anosov (não necessariamente de codimensão 1) numa nilvariedade é topologicamente conjugado a um automorfismo hiperbólico na nilvariedade.

Para fluxos existe uma conjectura devida a Verjovsky a qual afirma que: “*Todo fluxo*

de Anosov de codimensão um em variedades de dimensão maior do que 3 é topologicamente equivalente à suspensão de um automorfismo linear hiperbólico do toro”. Em 1972, Plante ([4]), mostrou que “Se o  $\pi_1(M)$  é solúvel então o fluxo é uma suspensão”. Um resultado importante de Plante para o nosso trabalho mostra uma dicotomia para fluxos de Anosov. Sob certas condições, garante que ou cada folha forte é densa na variedade  $M$ , ou o fluxo é a suspensão de um difeomorfismo de Anosov. Ghys (1988, [2]) provou que “Um fluxo de Anosov transitivo de codimensão 1 e classe  $C^2$  em uma variedade de dimensão maior que 3 é uma suspensão, quando o subfibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é de classe  $C^1$ ”. Podemos ver que o caso problemático é o tridimensional, pois existem exemplos entre os quais destacamos um devido a Bonatti-Langevin (1994, [8]) de um fluxo Anosov transitivo que admite um toro transversal e não é uma suspensão. Todavia, em 1997, Simić [9] apresentou novos resultados positivos, entre os quais ressaltamos o seguinte “Seja  $\phi^t$  um fluxo Anosov de codimensão 1 e classe  $C^2$  sobre uma variedade compacta  $M$  de dimensão maior que 3. Se o fluxo preserva volume e  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é Lipschitz então o fluxo admite uma seção transversal global”.

Seguindo para ações, em 1977, Hirsch, Pugh e Shub [10] introduzem a noção de ação Anosov de grupos de Lie, e mostram alguns resultados, tais como: estabilidade estrutural de ações de Anosov, integrabilidade dos subfibrados fortes e fracos associados, as folheações fortes e fracas são absolutamente contínuas, teorema do produto local, etc. O trabalho desenvolvido por eles é de grande importância não apenas para o estudo das ações de Anosov, mas de modo geral para a melhor compreensão dos sistemas parcialmente hiperbólicos.

Observamos que no caso de ações Anosov de  $\mathbb{Z}^k$ , quando a ação é de codimensão um, temos de fato que estas são topologicamente conjugadas a uma ação Anosov de  $\mathbb{Z}^k$  por automorfismos lineares do toro. Isto segue dos resultados de Franks-Newhouse (1970, [5], [6]) (que garante que um difeomorfismo de Anosov de codimensão um é topologicamente conjugado a um automorfismo hiperbólico do toro), e outro resultado de Palis-Yoccoz (1989, [11]) (que prova que os elementos centralizadores de um automorfismo hiperbólico do toro são automorfismos lineares).

No caso abeliano não discreto, isto é quando o grupo é  $\mathbb{R}^k$ , Barbot-Maquera (2011, [12]) mostram algumas propriedades fundamentais: densidade das órbitas compactas no conjunto não errante de um subcone regular, teorema de decomposição espectral, transitividade em subcones regulares, entre outras. Nesse artigo, eles formularam a seguinte conjectura:

**Conjectura de Verjovsky para ações:** *Toda ação Anosov de codimensão 1 irredutível de  $\mathbb{R}^k$  sobre em uma variedade  $M$  de dimensão maior que 2 é topologicamente equivalente à suspensão de uma ação Anosov de  $\mathbb{Z}^k$  em uma variedade compacta.*

Em 2011, [1], eles obtiveram alguns resultados parciais positivos para a conjectura acima, por exemplo “Seja  $\phi$  uma  $C^2$ -ação Anosov de codimensão 1 em uma variedade compacta  $M$  de dimensão maior que  $k + 2$ . Se  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é de classe  $C^1$  e  $\phi$  preserva volume, então  $\phi$  é topologicamente equivalente a suspensão de uma ação linear Anosov de  $\mathbb{Z}^k$  no toro  $\mathbb{T}^k$ ”.

Como pode ser observado a classificação dos sistemas Anosov, mesmo em codimensão um, está longe de ser concluída. As contribuições do nosso trabalho para tal classificação são dados por meio dos Teoremas II e III, os quais são resultados parciais positivos da conjectura de Verjovsky para ações de  $\mathbb{R}^k$ .

**Teorema II** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov de codimensão 1 irreduzível de classe  $C^2$  em uma variedade compacta  $M$  de dimensão maior que  $k + 2$ . Se a distribuição  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é de classe  $C^1$ , então a ação  $\phi$  é suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ .*

Este resultado generaliza o teorema de Barbot-Maquera de 2011 e estende o teorema de Ghys de 1988 para fluxos de Anosov, ambos mencionados anteriormente. Para mostrar este teorema foi necessário usar a existência (Teorema I) do que chamamos de *sistemas de Markov*, Definição 3.19, os quais possuem propriedades como as da partição de Markov obtidas por Ratner em [3].

**Teorema I** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov transitiva em subcones regulares. Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe um sistema de Markov  $\mathcal{M}$  de modo que cada seção possui diâmetro no máximo  $\varepsilon$ .*

Para construção do sistema de Markov, adaptamos as ideias de Bowen, [13], e Ratner, [3]. Visando o segundo resultado positivo para a conjectura, mostramos uma dicotomia para ações de Anosov transitiva por subcones regulares.

**Teorema IV** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov transitiva por subcones regulares. Então existem duas possibilidades:*

1. *Cada folha instável forte e estável forte é densa em  $M$ , ou;*
2. *A ação  $\phi$  é uma suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  em uma variedade compacta de codimensão  $k$ .*

Este teorema é uma extensão do teorema de dicotomia de Plante já citado. Além disso, ele é ferramenta para provarmos o outro resultado principal enunciado a seguir.

**Teorema III** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov de codimensão um de classe  $C^2$  em uma variedade compacta  $M$  de dimensão maior que  $k + 2$ . Se uma das folheações  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^{uu}$  não é minimal, então a ação  $\phi$  é suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ .*

A seguir descrevemos a estrutura da tese. No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados fundamentais para o nosso trabalho. Iniciamos com alguns aspectos da teoria de folheações, sendo que o ponto mais importante é a noção de integrabilidade de um subfibrado. Em seguida, tratamos de alguns aspectos gerais da teoria de ações de grupos de Lie, sendo que no caso das ações Anosov são abordados propriedades mais profundas e recentes. Por fim, definimos ações de Anosov de codimensão um, Definição 2.32, e tendo em vista a meta desse trabalho, destacamos dois resultados importantes: sobre transitividade ( Teorema 2.35 ) e outro que estabelece quando uma ação de  $\mathbb{R}^k$  é suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  ( Teoremas 2.45 e 2.47 ).

No Capítulo 3 introduzimos a noção de *sistemas de Markov* para ações, Definição 3.19, e mostramos a existência deste objeto para ações transitivas em subcones regulares, Teorema I. Isto será uma ferramenta fundamental para o próximo capítulo.

Em seguida, no Capítulo 4 mostraremos o Teorema II, o qual generaliza um resultado para fluxos obtido por Ghys em [2]. Um ponto crucial em seu trabalho é associar um grafo determinado pela partição de Markov construída por Ratner, [3]. O primeiro grande obstáculo para generalizar o resultado de Ghys é mostrar a existência deste tal grafo para ações Anosov, visto que, para nosso conhecimento, não há literatura sobre a existência de partições de Markov para ações. É neste ponto que usamos o resultado de existência de sistemas de Markov obtido no capítulo anterior.

No capítulo 5, de maneira independente dos Capítulos 3 e 4, continuamos nosso estudo para apresentar resultados na direção da conjectura de Verjovsky para ações. Neste sentido, mostramos o Teorema IV que determina uma dicotomia. Observamos que no Teorema IV a ação não é necessariamente de codimensão um.

---

## PRÉ-REQUISITOS

---

Nesse capítulo apresentamos alguns resultados fundamentais para o nosso trabalho. Iniciamos com alguns aspectos da teoria de folheações, sendo que o ponto mais importante é a noção de integrabilidade de um subfibrado. Em seguida, tratamos de alguns aspectos gerais da teoria de ações de grupos de Lie, sendo que no caso das ações Anosov são abordadas propriedades mais profundas e recentes. Por fim, definimos ações de Anosov de codimensão um, Definição 2.32, e tendo em vista a meta desse trabalho, apresentamos dois resultados importantes: sobre transitividade (Teorema 2.35) e outro que estabelece quando uma ação de  $\mathbb{R}^k$  é suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  (Teoremas 2.45 e 2.47). Para efeito de simplicidade iremos supor desde já que a variedade  $M$  é suave, compacta, sem bordo e conexa munida de uma métrica Riemanniana. Denotaremos por  $d$  a função distância na variedade suave  $M$ .

### 2.1 Teoria das folheações

A teoria das folheações, entre outras coisas, apresenta questões de integrabilidade relacionada aos subfibrados do espaço tangente de uma variedade e as propriedades das folhas de uma folheação. O resultado principal dessa seção é o Teorema de Frobenius, Teorema 2.7, o qual apresenta uma condição necessária e suficiente para um subfibrado ser integrável.

Uma folheação de dimensão  $n$  de uma variedade diferenciável  $M^m$  é, estritamente falando, uma decomposição de  $M$  em subvariedades conexas de dimensão  $n$ , as quais denominamos folhas. De modo mais preciso temos a seguinte definição.

**Definição 2.1.** Seja  $M$  uma variedade suave de dimensão  $m$ . Uma *folheação* de classe  $C^r$ ,  $0 \leq r \leq \infty$ , e dimensão  $n$  de  $M$  é um atlas  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  que é maximal com as seguintes propriedades:

1. Se  $(U, \phi) \in \mathcal{F}$  então  $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Os conjuntos  $U_1$  e  $U_2$  são abertos

em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{m-n}$ , respectivamente;

2. Se  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi) \in \mathcal{F}$  satisfazem  $U \cap V \neq \emptyset$  então a mudança de coordenadas  $\psi \circ \phi^{-1}$  definida em  $\phi(U \cap V)$  sobre  $\phi(U \cap V)$  é dada localmente por  $\psi \circ \phi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$ . Com  $h_1 : \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h_2 : \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ .

Dizemos que  $M$  é folheada por  $\mathcal{F}$  ou que  $\mathcal{F}$  é uma folheação de dimensão  $n$  e classe  $C^r$  em  $M$ .

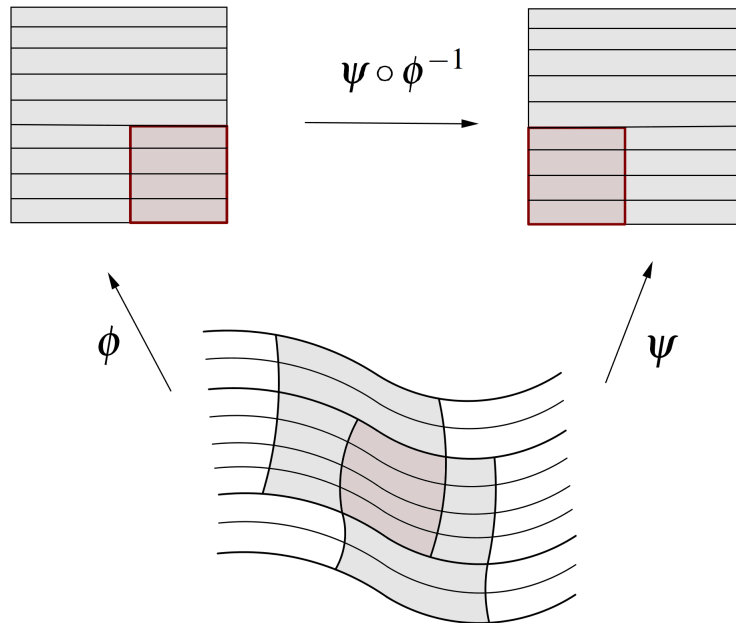


Figura 1 – Geometria da mudança de coordenadas

Seja  $(U, \phi)$  uma carta folheada de uma folheação  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$ . O primeiro item da Definição 2.1 afirma que  $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Considere os conjuntos  $\phi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ ,  $c \in U_2$ , os quais são denominados *placas* de  $\mathcal{F}$ . Por definição as placas são subvariedades conexas de classe  $C^r$  mergulhadas em  $M$ . Mais ainda, duas placas contidas no aberto  $U$  ou coincidem ou são disjuntas.

Um *caminho de placas* em  $\mathcal{F}$  é uma sequência  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de placas de  $\mathcal{F}$  tais que  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ . A variedade folheada  $M$  é coberta pelas placas de  $\mathcal{F}$ , desse modo podemos definir uma relação de equivalência em  $M$  dizendo que dois pontos  $p, q$  se relacionam se existe um caminho de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de modo que  $p \in \alpha_1$  e  $q \in \alpha_k$ .

As classes dessa relação de equivalência são chamadas *folhas* de  $\mathcal{F}$ . Note que, as cartas de  $\mathcal{F}$  induzem em cada folha  $F$  uma estrutura de variedade que torna  $F$  uma subvariedade imersa em  $M$  de classe  $C^r$  e dimensão  $n$ . De modo geral, denotamos por  $\mathcal{F}(p)$  a folha de  $\mathcal{F}$  que contém o ponto  $p \in M$ .

As cartas de uma folheação formam uma trivialização local da variedade  $M$ . Como propriedade local, essa trivialização poderia ocorrer em apenas em pequenas regiões. Todavia, podemos estender essa trivialização desde que tomemos compactos contidos em uma folha.



**Proposição 2.2** (Camacho, [14], pg. 66). *Seja  $F$  uma folha da folheação  $\mathcal{F}$  e  $K \subset F$  um subconjunto compacto. Existem vizinhanças  $U \supset W \supset K$ ,  $U$  aberto em  $M$ ,  $W$  aberto em  $F$  e uma retração  $\pi : U \rightarrow W$  de classe  $C^r$  tal que para todo  $x \in W$ ,  $\pi^{-1}(x)$  é transverso à  $\mathcal{F}|_U$ .*

A Proposição 2.2 garante, de certo modo, a existência de uma vizinhança tubular ao longo de compactos em folhas, veja a Figura 2.

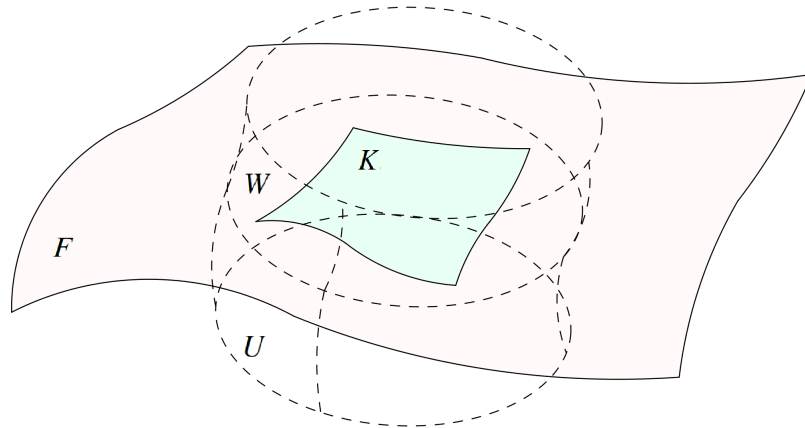


Figura 2 – Vizinhança trivializadora de compactos em folhas.

As folhas são subvariedades imersas em  $M$ , logo a cada  $p \in M$  podemos associar o subespaço  $T_p\mathcal{F}(p)$ . De maneira geral, uma folheação  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$ , com  $r \geq 1$ , da variedade  $M$  define um *subfibrado*, ou *campo de  $k$ -planos*, do fibrado tangente  $TM$ .

**Definição 2.3.** Um *campo de  $k$ -planos*, ou um *subfibrado de  $TM$* , em uma variedade  $M$  é uma aplicação  $P : M \rightarrow TM$  que associa a cada ponto  $p \in M$  um subespaço vetorial de dimensão  $k$  de  $T_pM$ .

A aplicação  $P(x) = T_x\mathcal{F}(x)$  é o campo de  $k$ -planos definido pela folheação  $\mathcal{F}$ .

**Proposição 2.4** (Camacho, [14]). *Toda folheação de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) e dimensão  $k$  em  $M$  define um campo de  $k$ -planos em  $M$  de classe  $C^{r-1}$  que denotamos por  $T\mathcal{F}$ .*

Naturalmente devemos nos questionar se a recíproca é verdadeira, ou seja, se dado um subfibrado  $P$  existe uma folheação  $\mathcal{F}$  da variedade  $M$  tangente a  $P$ , isto é, para todo  $x \in M$  temos  $P(x) = T_x\mathcal{F}(x)$ . Esse problema está relacionado ao fato de nem toda variedade  $M$  admitir uma folheação. Um exemplo disso é a esfera  $S^2$  que não admite uma folheação unidimensional.

**Definição 2.5.** Um campo de  $k$ -planos (subfibrado)  $P$  é *completamente integrável*, ou simplesmente *integrável*, se existe uma folheação  $\mathcal{F}$  de classe  $C^1$  da variedade  $M$  tal que para todo  $x \in M$  temos  $P(x) = T_x\mathcal{F}(x)$ .

A fim de exibir uma condição necessária e suficiente para que um subfibrado ser integrável, precisamos introduzir um fato algébrico. Para isso, utilizamos o colchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$  entre campo de vetores que definimos a seguir. Seja  $X$  um campo de vetores de classe  $C^1$  em  $M$  e  $X_t$  seu respectivo fluxo. Seja  $Y$  outro campo de vetores de classe  $C^1$  em  $M$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$  ( que faz sentido ) definimos *opull-back*

$$X_t^*Y(p) = dX_{-t}(X_t(p)) \cdot Y(X_t(p)).$$

Assim, o colchete de Lie entre os campos de vetores  $X$  e  $Y$  é obtido pela seguinte fórmula

$$[X, Y](p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X_t^*Y(p).$$

**Definição 2.6.** Um subfibrado  $P$  é *involutivo* se quaisquer dois campos de vetores  $X$  e  $Y$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , tais que para todo  $q \in M$  com  $X(q), Y(q) \in P(q)$  temos  $[X, Y](q) \in P(q)$ .

A integrabilidade do subfibrado  $P$  é relacionada com a noção involutiva por meio do Teorema de Frobenius apresentado abaixo.

**Teorema 2.7** (Frobenius, [14]). *Seja  $P$  um subfibrado de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) em  $M$ . O subfibrado  $P$  é integrável se, e somente se,  $P$  é involutivo.*

## 2.2 Ações de grupos

O objetivo dessa seção primeiramente é compreender algumas propriedades topológicas básicas das órbitas de uma ação. Principalmente determinar sob quais condições elas determinam uma folheação da variedade. Em um segundo momento, apresentamos uma versão do Teorema de Frobenius, Teorema 2.12, a qual determina a integrabilidade do subfibrado transverso ao subfibrado  $T\phi$ , quando a ação  $\phi$  é do grupo aditivo  $\mathbb{R}^k$ .

Os grupos de Lie são uma combinação interessante entre geometria e álgebra. Basicamente, um grupo de Lie  $G$  é um grupo que possui uma estrutura de variedade que torna as operações do grupo diferenciáveis.

**Definição 2.8.** Seja  $G$  um grupo de Lie e  $e \in G$  seu elemento neutro. Uma *ação* de  $G$  em  $M$  é uma aplicação  $\phi : G \times M \rightarrow M$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) tal que:

1.  $\phi(e, p) = p, \forall p \in M$ ;
2.  $\phi(u \cdot v, p) = \phi(u, \phi(v, p)), \forall u, v \in G, \forall p \in M$ .

Note que, uma ação  $\phi$  induz uma representação do grupo de Lie  $G$  no grupo dos difeomorfismos  $\text{Diff}^r(M)$ . Tal representação é o homomorfismo  $\phi : G \rightarrow \text{Diff}^r(M)$ ,  $\phi(g) = \phi^g$ , tal que  $\phi^g(x) = \phi(g, x)$ . Associado a um ponto  $p \in M$  temos dois objetos importante: a órbita de  $p$  e o subgrupo de isotopia de  $p$ .

1. A órbita do ponto  $p \in M$  com respeito a ação  $\phi$  é o conjunto

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_p(\phi) = \{\phi(u, p) \mid u \in G\} \subset M.$$

2. O subgrupo de isotropia do ponto  $p \in M$  com respeito a ação  $\phi$  é dado por

$$\Gamma_p = \Gamma_p(\phi) = \{v \in G \mid \phi(v, p) = p\}.$$

a) Se o grupo de Lie  $G$  for abeliano e  $q \in \mathcal{O}_p$  então  $\Gamma_q = \Gamma_p$ .

Fixado um ponto  $p \in M$ , a aplicação  $\phi_p : G \rightarrow M$  definida  $\phi_p(g) = \phi(g, p)$  induz a aplicação  $\overline{\phi}_p : G/\Gamma_p \rightarrow M$ , dada por  $\overline{\phi}_p(\overline{g}) = \phi_p(g)$  onde  $\overline{g} = g\Gamma_p$ . Devido as propriedades de grupo e da ação a aplicação  $\overline{\phi}_p$  é bem definida e injetiva. Assim, podemos induzir em  $G/\Gamma_p$  uma estrutura diferenciável que torna  $\overline{\phi}_p$  uma imersão injetora cuja imagem é  $\mathcal{O}_p$ .

O grupo de isotropia  $\Gamma_p$  é fechado, dessa maneira o tipo topológico da órbita  $\mathcal{O}_p$  possui tantas possibilidades quanto a quantidade de subgrupos fechados de  $G$ . Em particular, se o grupo de Lie é  $\mathbb{R}^k$  cada órbita  $\mathcal{O}_p$  é homeomorfa ao  $\mathbb{R}^k/\Gamma_p$  que por sua vez possui topologicamente três possibilidades:  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{T}^k$  ou  $\mathbb{R}^{k-l} \times \mathbb{T}^l$  com  $1 \leq l \leq k-1$ .

**Definição 2.9.** Uma ação  $\phi : G \times M \rightarrow M$  é uma *ação folheada* se para todo  $x \in M$  o espaço tangente  $T_x\mathcal{O}(x)$  possui dimensão fixa  $k$ . Quando  $k = \dim G$  a ação  $\phi$  é dita localmente livre.

O termo ação folheada ganha sentido devido a proposição abaixo a qual garante que tal tipo de ação determina uma folheação da variedade.

**Proposição 2.10.** *As órbitas de uma ação folheada  $\phi$  são folhas de uma folheação da variedade  $M$ . Denotamos por  $T\phi$  o subfibrado de  $TM$  obtido pela folheação  $\mathcal{O}$  determinada pelas órbitas.*

*Demonstração.* Seja  $\phi : G \times M \rightarrow M$  uma ação folheada de dimensão  $k \geq 1$ . Fixado  $x \in M$ , sejam  $E \subset T_eG$  subespaço complementar à  $T_e\Gamma_x$  e  $i_1 : B^k \rightarrow G$ ,  $i_1(0) = e$ , um mergulho de um disco de dimensão  $k$  tangente a  $E$  em  $e$ .

Seja  $i_2 : B^{m-k} \rightarrow M$ ,  $i_2(0) = x$ , um disco de dimensão  $m-n$  imerso e transverso à órbita  $\mathcal{O}_x$  em  $x$ . Definimos a aplicação  $\Phi : B^k \times B^{m-k} \rightarrow M^m$  dado por  $\Phi = \phi(i_1, i_2)$ . Por construção  $D\Phi(0,0) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow T_xM$  é um isomorfismo.

O teorema da função inversa garante que existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $M$  tal que  $\Phi^{-1} : U \rightarrow B^k \times B^{m-k}$  é um difeomorfismo. Estas aplicações definem as cartas da folheação dada pelas órbitas da ação folheada.  $\square$

### Geradores infinitesimais

Um grupo de Lie importante é o grupo aditivo  $\mathbb{R}^k$ , visto que possui várias outras estruturas, entre as quais destacamos a de espaço vetorial. Dado uma base  $u_1, \dots, u_k$  qualquer

de  $\mathbb{R}^k$ , para cada  $j$  tomamos o fluxo  $\phi^{tu_j}(p) = \phi(tu_j, p)$ , o qual define o campo de vetores  $X^j(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi^{tu_j}(p)$ . Note que, o fluxo  $X_t^j$  associado o campo  $X^j$  é exatamente  $\phi^{tu_j}$  e consequentemente a ação  $\phi$  é dada pela igualdade

$$\phi\left(\sum_{i=1}^k t_i u_i, p\right) = X_{t_1}^1 \circ \cdots \circ X_{t_k}^k(p).$$

Isso significa que a ação é gerada pelos campos de vetores  $X^1, \dots, X^k$ . Como o grupo é abeliano então os fluxos comutam entre si, ou seja,  $X_s^i \circ X_t^j = X_t^j \circ X_s^i$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  e  $s, t \in \mathbb{R}$ . Consequentemente, os campos de vetores comutam entre si, ou seja, o colchete de Lie  $[X^i, X^j]$  é nulo. Tal fato garante a invariância dos campos de vetores pelos fluxos.

**Lema 2.11.** *Para qualquer  $i, j$  o campo de vetores  $X^i$  é invariante pelo fluxo  $\phi^{tu_j}$ .*

*Demonstração.* A propriedade comutativa  $\phi^{tu_i} \circ \phi^{su_j}(p) = \phi^{su_j} \circ \phi^{tu_i}(p)$  implica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi^{tu_i}(p) &= \frac{d}{dt} (\phi^{-su_j} \circ \phi^{tu_i} \circ \phi^{su_j}(p)) \\ &= (d\phi^{-su_j})_{\phi^{tu_i} \circ \phi^{su_j}(p)} \cdot \frac{d}{dt} \phi^{tu_i}(\phi^{su_j}(p)). \end{aligned}$$

Consequentemente, o campo  $X^i$  é invariante pelo fluxo  $\phi^{tu_j}$ . De fato,

$$\begin{aligned} X^i(p) &= \left( \frac{d}{dt} \phi^{tu_i}(p) \right)_{t=0} \\ &= \left( (d\phi^{-su_j})_{\phi^{tu_i} \circ \phi^{su_j}(p)} \cdot \frac{d}{dt} \phi^{tu_i}(\phi^{su_j}(p)) \right)_{t=0} \\ &= (d\phi^{-su_j})_{\phi^{su_j}(p)} \cdot \left( \frac{d}{dt} \phi^{tu_i}(\phi^{su_j}(p)) \right)_{t=0} \\ &= (d\phi^{-su_j})_{\phi^{su_j}(p)} \cdot X^i(\phi^{su_j}(p)) \\ &= (d\phi^{su_j})_p^{-1} \cdot X^i(\phi^{su_j}(p)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

□

Para cada campo  $X^j$  podemos associar uma 1-forma diferenciável  $\alpha_j$  de modo que  $\alpha_j$  é 1 em  $\mathbb{R}X^j$  e nula em  $P_j$ , que é o subfibrado complementar de  $\mathbb{R}X^j$  em  $TM$ . Por construção as formas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  são linearmente independentes. Logo,  $P = \bigcap_{j=1}^k P_j$  é um subfibrado de codimensão  $k$  transverso à  $T\phi$  resultante da interseção dos núcleos das formas  $\alpha_j$ .

A versão do Teorema de Frobenius a seguir apresenta um meio de determinar se o subfibrado transverso  $P$  é integrável ou não.

**Teorema 2.12** (Frobenius para formas diferenciáveis, [14]). *Seja  $P$  um subfibrado de codimensão  $k$  e classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , que pode ser definido como o núcleo das  $k$  formas linearmente independentes. Então  $P$  é integrável se, e somente se, para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$  temos*

$$d\alpha^j \wedge \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k = 0.$$

## 2.3 Ações de Anosov

Nessa seção introduzimos as ações de Anosov de  $\mathbb{R}^k$  e discutimos sobre algumas das propriedades fundamentais para o nosso trabalho. Inicialmente, tratamos da topologia do conjunto de elementos Anosov, Definição 2.13, e da integrabilidade dos fibrados associados a ação Anosov. Em seguida, analisamos a dinâmica em subcones regulares, Definição 2.26, mais especificamente as propriedades do conjunto não errante com respeito a um subcone regular, Definição 2.29. O resultado principal dessa seção é o Teorema 2.35 que garante a transitividade da ação em subcones regulares.

Incluído na classe dos sistemas de Anosov temos as ações de Anosov que foram definidas por Hirsch, Pugh e Shub em [10] e [15]. Elas analisam o comportamento hiperbólico no contexto das ações de grupos. Embora, Hirsch *et al* tenham definido as ações de Anosov para grupos de Lie quaisquer, iremos trabalhar com o grupo aditivo  $\mathbb{R}^k$ . Desse modo, a definição que apresentamos abaixo já esta adaptada para o nosso ambiente de trabalho.

**Definição 2.13.** Seja  $M$  uma variedade suave de dimensão maior do que  $k$ . Uma ação  $\phi$  de  $\mathbb{R}^k$  em  $M$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  é Anosov se é localmente livre e existe  $a \in \mathbb{R}^k$  tal que para o difeomorfismo  $g = \phi^a$  existem constantes reais  $\lambda = \lambda(a) > 0$ ,  $C = C(a) > 0$  e uma decomposição de  $TM$  invariante por  $Dg$ ,  $TM = E_a^{ss} \oplus T\phi \oplus E_a^{uu}$ , satisfazendo:

1.  $\|Dg^n|_{E_a^{ss}}\| \leq Ce^{-\lambda n}$ ,  $\forall n > 0$ ;
2.  $\|Dg^n|_{E_a^{uu}}\| \leq Ce^{\lambda n}$ ,  $\forall n < 0$ .

**Observação 2.14.** Temos os seguintes fatos sobre as ações Anosov.

1. Como a ação é localmente livre, a Proposição 2.10 garante que as órbitas da ação Anosov determinam uma folheação de dimensão  $k$  da variedade  $M$  cujas órbitas são topologicamente equivalentes a  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{T}^k$  ou  $\mathbb{R}^{k-l} \times \mathbb{T}^l$  com  $1 \leq l \leq k-1$ .
2. O difeomorfismo  $g$  age de modo parcialmente hiperbólico com respeito a folheação  $\mathcal{O}$  definida pelas órbitas da ação.
3. O ponto  $a \in \mathbb{R}^k$ , satisfazendo a definição acima, é chamado *elemento hiperbólico* ou *elemento de Anosov* da ação.
4. Representamos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\phi)$  o conjunto dos elementos de Anosov da ação  $\phi$ .

Visando compreender melhor o conjunto  $\mathcal{A}$  considere a seguinte proposição.

**Lema 2.15.** Seja  $g : M \rightarrow M$  um difeomorfismo como na Definição 2.13 e considere  $h : M \rightarrow M$  um difeomorfismo que comuta com  $g$  tal que o subfibrado  $T\phi$  é invariante por  $Dh$ . Então os subfibrados  $E_a^{ss}$  e  $E_a^{uu}$  são invariantes por  $Dh$ .

*Demonstração.* Considere  $w \in E_a^{ss}(x)$  e suponha  $Dh(w) = v_s + v_c + v_u$  a decomposição única com respeito a fibração  $E_a^{ss} \oplus T\phi \oplus E_a^{uu}$ . Como  $a$  é Anosov,  $Dg^n(w) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim,  $Dg^n \circ Dh(w) = Dg^n v_s + Dg^n v_c + Dg^n v_u$  também converge a 0. Pela Definição 2.13, isso ocorre somente quando  $v_c = v_u = 0$ . Portanto,  $E_a^{ss}$  é invariante por  $Dh$  e de maneira análoga concluímos a invariância para  $E_a^{uu}$ .  $\square$

Em particular, os subfibrados  $E_a^{ss}$  e  $E_a^{uu}$  são invariantes pela ação  $\phi$ , ou seja, para todo  $v \in \mathbb{R}^k$  tais subfibrados são invariantes por  $D\phi^v$ . Com isso obtemos informações topológicas sobre o conjunto de Anosov  $\mathcal{A}$ .

**Proposição 2.16.** *O conjunto dos elementos de Anosov  $\mathcal{A}$  é aberto em  $\mathbb{R}^k$  e cada componente conexa de  $\mathcal{A}$  é um cone aberto convexo.*

*Demonstração.* Sabemos pelo lema acima que  $E_a^{ss}$  e  $E_a^{uu}$  são invariantes por  $\phi^b$  para todo  $b \in \mathbb{R}^k$ . Se  $a \in \mathcal{A}$  e  $b \in \mathbb{R}^k$  são suficientemente próximos então o subfibrado  $E_a^{ss}$  ( $E_a^{uu}$ ) é contraído (expandido) de modo exponencial, através de iterações positivas, pela derivada de  $\phi^b$ , utilizando as mesmas constantes  $C(a), \lambda(a)$  para  $b$ . Em particular, as aplicações  $a \in \mathcal{A} \mapsto E_a^{ss}$  e  $a \in \mathcal{A} \mapsto E_a^{uu}$  são constantes em cada componente conexa de  $\mathcal{A}$ .

Dados  $a, b$  contidos na mesma componente conexa de  $\mathcal{A}$ , então  $a + b$  pertence a mesma componente conexa de  $a$  e  $b$ , pois  $D\phi^{a+b} = D\phi^a \cdot D\phi^b$ . Pela Definição 2.13, o mesmo ocorre para todo múltiplo natural de um elemento de Anosov. Sendo o conjunto  $\mathcal{A}$  um aberto, podemos encontrar  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  de modo que  $\alpha a$  está na mesma componente conexa que  $a$ . Sendo o conjunto  $\{m\alpha + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$  denso em  $\mathbb{R}$  temos para todo  $t > 0$  que  $ta$  está na mesma componente conexa de  $a$ .  $\square$

Para o estudo da dinâmica da ação é necessário tirarmos a dependência dos subfibrados  $E_a^{ss}$  e  $E_a^{uu}$  do elemento Anosov  $a$  na Definição 2.13. Isso ocorre quando fixamos uma componente conexa  $\mathcal{A}_0$  de  $\mathcal{A}$ . A fim de simplificar a notação, iremos omitir o subíndice  $a$  denotando tais subfibrados apenas por  $E^{ss}$  e  $E^{uu}$ .

**Observação 2.17.** Uma vez fixada a componente conexa  $\mathcal{A}_0$ , podemos tratar da integrabilidade dos subfibrados associados a uma ação Anosov. O trabalho de Hirsch, Pugh e Shub ([10]) provou que a decomposição da Definição 2.13 é Hölder contínua e os subfibrados  $E^{ss}$ ,  $E^{uu}$ ,  $E^{ss} \oplus T\phi$  e  $E^{uu} \oplus T\phi$  são integráveis. As correspondentes folheações  $\mathcal{F}^{ss}$ ,  $\mathcal{F}^{uu}$ ,  $\mathcal{F}^s$  e  $\mathcal{F}^u$  são chamadas *folheação forte estável*, *folheação forte instável*, *folheação fraca estável* e *folheação fraca instável*, respectivamente. Mais ainda, sabemos que todas as folheações são absolutamente contínuas e as folhas fracas em um ponto  $p \in M$  são dadas por:

$$\mathcal{F}^s(p) = \bigcup_{q \in \mathcal{O}_p} \mathcal{F}^{ss}(q) \text{ e } \mathcal{F}^u(p) = \bigcup_{q \in \mathcal{O}_p} \mathcal{F}^{uu}(q). \quad (2.2)$$

De modo mais simples podemos dizer que as folheações fracas são saturadas pelas órbitas da ação. A métrica em uma folha  $\mathcal{F}^i(x)$  é a métrica induzida da variedade  $M$ . Dado  $\delta > 0$  denotamos por  $\mathcal{F}_\delta^i(x)$  a bola de centro  $x$  e raio  $\delta$  na folha  $\mathcal{F}^i(x)$  com  $i = s, ss, u, uu$ . Sendo  $B_\delta(x)$  a bola de centro  $x$  e raio  $\delta > 0$  em  $M$ , podemos tomar  $\gamma > 0$  tal que para todo  $0 < \delta < \gamma$  temos  $\mathcal{F}_\delta^i(x) = \mathcal{F}^i\gamma(x) \cap B_\delta(x)$  com  $i = s, ss, u, uu$ .

As folheações  $\mathcal{F}^s$  e  $\mathcal{F}^{uu}$ , respectivamente  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^u$ , são transversais por definição. Sendo assim, podemos obter cartas locais da variedade  $M$  que trivializam simultaneamente  $\mathcal{F}^s$  e  $\mathcal{F}^{uu}$ , respectivamente  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^u$ . Tais cartas geram uma estrutura de produto local na variedade  $M$  que permite definir a aplicação do teorema a seguir.

**Teorema 2.18** (Produto local [10]). *Seja  $M$  uma variedade suave compacta conexa. Para todo  $\delta > 0$  existe  $\varepsilon(\delta)$  de modo que se  $d(x, y) < \varepsilon(\delta)$  existe único  $z \in \mathcal{F}_\gamma^{ss}(x)$  e  $h \in \mathbb{R}^k$  com  $\phi(h, z) \in \mathcal{F}_\gamma^{uu}(y)$ ,  $d(x, z) < \delta$ ,  $d(y, z) < \delta$  e  $\|h\| < \delta$ .*

Outra versão desse teorema que também utilizaremos é a seguinte.

**Teorema 2.19** (Produto local [12]). *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov sobre uma variedade  $M$  compacta e conexa. Então existe  $\delta_0 > 0$  tal que para todo  $\delta \in (0, \delta_0)$  e para todo  $x \in M$ , as aplicações*

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]^u : \mathcal{F}_\delta^s(x) \times \mathcal{F}_\delta^{uu}(x) &\rightarrow M; & [y, z]^u &= \mathcal{F}_{2\delta}^s(z) \cap \mathcal{F}_{2\delta}^{uu}(y) \\ [\cdot, \cdot]^s : \mathcal{F}_\delta^{ss}(x) \times \mathcal{F}_\delta^u(x) &\rightarrow M; & [y, z]^s &= \mathcal{F}_{2\delta}^{ss}(z) \cap \mathcal{F}_{2\delta}^u(y) \end{aligned}$$

são homeomorfismos sobre suas imagens.

**Observação 2.20.** Os conjuntos  $N_\delta^u(x) = [\mathcal{F}_\delta^s(x), \mathcal{F}_\delta^{uu}(x)]^u$  e  $N_\delta^s(x) = [\mathcal{F}_\delta^{ss}(x), \mathcal{F}_\delta^u(x)]^s$  são chamados *vizinhanças produtos*. Além disso, para cada  $y \in \mathcal{F}_\delta^s(x)$  os conjuntos  $[y, \mathcal{F}_\delta^u(x)]^s$  são as *placas* de  $N_\delta^s(x)$ . Também são placas de  $N_\delta^s(x)$  os conjuntos  $[\mathcal{F}_\delta^{ss}(x), z]^s$  para cada  $z \in \mathcal{F}_\delta^u(x)$ . Podemos fazer considerações equivalentes para a vizinhança produto  $N_\delta^u(x)$ .

## Exemplos

Os exemplos abaixo servem tanto para garantir a existência de ações de Anosov, quanto para estabelecer propriedades que introduziremos futuramente no texto.

**Exemplo 2.21.** Seja  $\psi$  uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  em uma variedade compacta sem bordo  $N$ . Seja  $M$  a variedade quociente de  $N \times \mathbb{R}^k$  pela relação de equivalência que associa os pontos  $(x, u)$  e  $(\psi(v, x), u + v)$  para todo  $v \in \mathbb{Z}^k$ . As translações no segundo fator induzem uma ação  $\bar{\psi}$  de  $\mathbb{R}^k$  em  $M$  chamada de *suspensão da ação  $\psi$* .

**Observação 2.22.** Notemos que a ação  $\bar{\psi}$  é Anosov se, e somente se, algum elemento de  $\mathbb{Z}^k$  age como um difeomorfismo de Anosov na variedade  $N$ . O mesmo pode ser dito a respeito da ação ser de codimensão 1, veja Definição 2.32.

**Exemplo 2.23.** Neste exemplo, todos os objetos considerados, com suas respectivas características, são garantidos pela teoria clássica de grupos de Lie semi-simples, veja [16]. Sejam  $G$  um grupo de Lie semi-simples real,  $\mathcal{G}$  sua álgebra de Lie e  $\Gamma$  um reticulado uniforme livre de torção de  $G$  e  $A$  um subgrupo de Cartan (subgrupo abeliano maximal) de  $G$ , o qual é isomorfo a  $\mathbb{R}^k$ . O centralizador de  $A$  em  $G$  é o conjunto produto da forma  $AK$  onde  $A$  comuta com  $K$ . A ação a direita do centralizador induz uma  $\mathbb{R}^k$  ação da variedade quociente compacta  $\Gamma \backslash G/K$ .

A ação adjunta de  $A$  em  $\mathcal{G}$  preserva a decomposição

$$\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{A} + \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{G}^\alpha$$

de modo que  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{A}$  são as álgebras de Lie de  $K$  e  $A$ , e cada  $\alpha$  é um funcional linear descrevendo a restrição da ação adjunta de  $a$  em  $\mathcal{G}^\alpha$ . Os elementos regulares  $a \in A$  para os quais  $\alpha(a) \neq 0$ , corresponde a *câmara de Weyl* do grupo de Lie, formam uma união de cone abertos convexos de elementos Anosov.

Esta família de exemplos, chamada *fluxos da câmara de Weyl* em [17], é muito interessante. Todavia nem sempre de codimensão um. Tal propriedade ocorre, por exemplo, quando tomamos  $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ .

### Conjunto não errante

Algumas informações podem ser obtidas a respeito das órbitas de uma ação Anosov bastando analisar os elementos de Anosov.

**Proposição 2.24** (Barbot - Maquera, [12]). *Seja  $\phi$  uma ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  sobre uma variedade suave compacta e conexa  $M$ . Então qualquer órbita  $\mathcal{O}_p$  da ação, cujo subgrupo de isotropia  $\Gamma_p$  contém um elemento de Anosov  $a \in \mathcal{A}_0$ , é compacta.*

Outro resultado importante sobre elementos de Anosov da ação é a seguinte generalização do *Closing lemma* para ações de Anosov de  $\mathbb{R}^k$  devido a A. Katok e R. Spatzier.

**Teorema 2.25** (Closing lemma, [17]). *Se  $a \in \mathcal{A}_0$  então existem constantes positivas  $\varepsilon_0$ ,  $C$  e  $\lambda$  dependendo continuamente em  $\phi$  na topologia  $C^1$  tal que para  $x \in M$  e  $t > 0$  satisfazendo*

$$d(\phi^{ta}x, x) < \varepsilon_0$$

*então existe um ponto  $y \in M$  e uma curva diferenciável  $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que para todo  $s \in [0, t]$  é válido:*

1.  $d(\phi^{sa}x, \phi^{\gamma(s)}y) < Ce^{-\lambda \min\{s, t-s\}} d(\phi^{ta}x, x)$ ;
2.  $\phi^{\gamma(t)}y = \phi^\delta y$ , para algum  $\delta$  com  $\|\delta\| < Cd(\phi^{ta}x, x)$ ;
3.  $\|\gamma' - a\| < Cd(\phi^{ta}x, x)$ .



Em outras palavras,  $x$  é aproximado por  $y$  cujo grupo de isotropia  $\Gamma_y$  contém elemento não nulo próximo de  $a$ .

O trabalho de Barbot e Maquera, [12], mostra que se a ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  em  $M$  é de codimensão 1 e irredutível (definições 2.32 e 2.33) então para analisarmos a dinâmica da ação Anosov podemos nos restringir ao estudo da dinâmica dada pelos subcones da componente conexa  $\mathcal{A}_0$ , os quais recebem o nome de *subcones regulares*.

**Definição 2.26.** Um *subcone regular*  $\mathcal{S}$  é um cone aberto convexo contido em  $\mathcal{A}_0$ . Dado  $x \in M$ , a órbita de  $x$  com respeito ao subcone regular  $\mathcal{S}$  é o conjunto  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(x) = \{\phi^v(x) \mid v \in \mathcal{S}\}$ .

**Observação 2.27.** Seja  $\mathcal{S}$  um subcone regular contendo o elemento Anosov  $a$  que satisfaz o *Closing lemma*, Teorema 2.25. Se  $d(\phi^{ta}x, x)$  for suficientemente pequena então a derivada  $\gamma'$  pertence ao subcone  $\mathcal{S}$ . Logo,  $\gamma(t) - \delta$  também pertence ao subcone  $\mathcal{S}$  e pelo Lema 2.24 a órbita do ponto  $y$  é compacta.

O subgrupo de isotropia  $\Gamma_p$  de uma órbita compacta  $\mathcal{O}_p$  é um reticulado de  $\mathbb{R}^k$ . Assim, o resultado a seguir garante que todo subgrupo de isotropia intersecta o qualquer subcone regular. Mais ainda, sempre podemos extrair uma base de  $\mathbb{R}^k$  formada por elementos de  $\Gamma_p \cap \mathcal{S}$ .

**Proposição 2.28** (Barbot - Maquera, [12]). *Todo reticulado em  $\mathbb{R}^k$  contém um elemento de Anosov em  $\mathcal{S}$ .*

As órbitas compactas fazem parte do conjunto onde as informações interessantes da dinâmica estão contidas. Tal conjunto é denominado não errante e, basicamente, é formado pelos pontos que regressam nas suas vizinhanças suficientemente pequenas. No contexto de ações, o conjunto não errante depende do subcone regular.

**Definição 2.29** (Conjunto de pontos não errantes). Um ponto  $p \in M$  é *não errante com respeito ao subcone regular  $\mathcal{S}$*  se para qualquer aberto  $U$  contendo  $p$  existe  $v \in \mathcal{S}$ ,  $\|v\| > 1$ , de modo que  $\phi^v U \cap U \neq \emptyset$ . O conjunto dos pontos não errantes de  $M$  com respeito ao subcone  $\mathcal{S}$  é denotado por  $\Omega(\mathcal{S})$ .

Um resultado clássico da teoria de difeomorfismos e fluxos de Anosov é a densidade das órbitas compactas no conjunto não errante. Tal resultado possui sua generalização para o contexto de ações de Anosov.

**Proposição 2.30** (Barbot - Maquera, [12]). *Se  $\phi$  é uma ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  em  $M$ , então para todo subcone regular  $\mathcal{S}$ , a união das órbitas compactas de  $\phi$  é densa em  $\Omega(\mathcal{S})$ .*

**Observação 2.31.** *Seja  $a$  um elemento de Anosov qualquer em  $\mathcal{S}$ . O conjunto não errante  $\Omega(\phi^{ta})$  do semifluxo gerado por  $a$  claramente está contido no conjunto não errante  $\Omega(\mathcal{S})$ . Por outro lado, o conjunto não errante de qualquer fluxo linear no toro é o toro todo. Portanto, órbitas compactas de  $\phi$  estão contidas em  $\Omega(\phi^{ta})$ . Portanto, os conjuntos não errantes  $\Omega(\phi^{ta})$  e  $\Omega(\mathcal{S})$  coincidem.*

## 2.4 Ações de Anosov de codimensão um

Nesta seção consideramos dois resultados fundamentais para uma família especial de ações de Anosov, chamadas de codimensão um. A primeira é sobre transitividade e a segunda é sobre classificação.

### Trasitividade de ações de Anosov

Seguindo as propriedades dinâmicas clássicas para difeomorfismos e fluxos de Anosov, é interessante determinar quando a ação Anosov é transitiva, ou seja, quando possui órbita densa. No contexto de ações a transitividade naturalmente vai depender dos subcones regulares. Barbot e Maquera,[12], provaram que as ações de Anosov, sob certas hipóteses, são *transitivas em subcones regulares*, conforme Definição 2.36. Todavia, antes de apresentarmos o resultado precisamos da definição a seguir.

**Definição 2.32.** Uma ação Anosov é de *codimensão 1* quando o subfibrado  $E^{ss}$  ou  $E^{uu}$  possui dimensão 1.

Podemos fixar que o subfibrado  $E^{uu}$  possui dimensão 1 na componente  $\mathcal{A}_0$ . Uma vez que,  $-\mathcal{A}_0$  também é uma componente conexa de  $\mathcal{A}$  e vale  $E_{\mathcal{A}_0}^{ss} = E_{-\mathcal{A}_0}^{uu}$  e  $E_{\mathcal{A}_0}^{uu} = E_{-\mathcal{A}_0}^{ss}$ .

**Definição 2.33.** Uma ação Anosov  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  de codimensão 1 é dita *irreduzível* se para qualquer  $v \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$  com  $\phi^v x = x$ , a aplicação de holonomia  $\text{Hol}_\gamma$ , ao longo do caminho  $\gamma = \{\phi^{sv}(x) \mid s \in [0, 1]\}$  de  $\mathcal{F}^s(x)$ , é topologicamente contrativa ou topologicamente expansiva.

Como sabemos as órbitas da ação Anosov são topologicamente  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{T}^k$  ou  $\mathbb{R}^{k-l} \times \mathbb{T}^l$  com  $1 \leq l \leq k-1$ . O resultado a seguir garante que a terceira possibilidade não ocorre, dessa maneira as órbitas ou são planos ou são toros.

**Proposição 2.34** (Barbot - Maquera, [12]). *Toda órbita não compacta de uma ação irreduzível são planos, ou seja, difeomorfas à  $\mathbb{R}^k$ .*

Se uma ação Anosov de codimensão 1 não é irreduzível, podemos associar a ela uma ação Anosov de codimensão 1 e irreduzível que fornece as mesmas propriedades dinâmicas da ação original. Esse associação ocorre por meio de recobrimento finito.

**Teorema 2.35** (Barbot - Maquera, [12]). *Seja  $\phi$  uma ação Anosov de codimensão 1 de  $\mathbb{R}^k$  em uma variedade  $M$  de dimensão maior que  $k+2$ . Então para todo subcone regular  $\mathcal{S}$  existe  $x \in M$  tal que  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(x)$  é denso em  $M$ .*

O teorema acima garante que para todo subcone regular  $\mathcal{S}$  o conjunto não errante  $\Omega(\mathcal{S})$  é toda a variedade  $M$ . Além disso, nos inspira a introduzir uma noção muito forte de transitividade que é a transitividade em subcones regulares.

**Definição 2.36.** A ação Anosov é transitiva em subcones, se para todo subcone regular  $\mathcal{S}$  existe um  $x \in M$  tal que  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(x)$  é denso em  $M$ .

### Ações que admitem um fibrado transversal as órbitas e suspensões

Agora apresentaremos um resultado, Teorema 2.47, que estabelece condições para que uma ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  seja topologicamente equivalente a suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ . Todavia, antes de obtermos o teorema precisamos introduzir os *fibrados localmente triviais*.

**Definição 2.37.** Um *fibrado localmente trivial*  $(M, \pi, B, F)$  consiste de variedades diferenciáveis  $M, B$  e  $F$  e uma aplicação de submersão  $\pi : M \rightarrow B$  tal que para todo  $b \in B$  existe uma vizinhança  $U_b$  de  $b$  em  $B$  e um difeomorfismo  $f_b : \pi^{-1}(U_b) \rightarrow U_b \times F$  que faz o diagrama a seguir comutar.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_b) & \xrightarrow{f_b} & U_b \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & & U_b \end{array}$$

A aplicação  $\pi_1 : U_b \times F \rightarrow U_b$  é a projeção na primeira coordenada.

A variedade  $B$  é chamada de *espaço base* e os conjuntos  $\{F_b = \pi^{-1}(b)\}_{b \in B}$  são as *fibras* de  $M$ . Tais fibras determinam uma folheação da variedade  $M$  cujas folhas  $\pi^{-1}(b)$  são todas difeomorfas a variedade  $F$ .

**Definição 2.38.** Uma folheação  $\mathcal{F}$  de  $M$  é *transversa as fibras do fibrado localmente trivial*  $(M, \pi, B, F)$ , quando para todo  $p \in M$  a folha  $\mathcal{F}(p)$  que contém  $p$  é transversal à fibra  $F_p$ , ou seja,  $\dim \mathcal{F}(p) + \dim F_p = \dim M$ . Além disso, para toda folha  $L$  de  $\mathcal{F}$ , a aplicação  $\pi|_L : L \rightarrow B$  é um recobrimento.

**Observação 2.39.** Um importante resultado da teoria de folheações obtido por *Ehresmann* diz que “Se a fibra  $F$  é compacta então a condição de transversalidade implica que a restrição  $\pi|_L$  é uma aplicação de recobrimento”. Como a variedade  $M$  compacta então a fibra  $F$  também é.

**Observação 2.40.** Quando uma folheação  $\mathcal{F}$  é transversal as fibras de  $M$ , podemos exibir uma representação  $\psi : \pi(B, b) \rightarrow \text{Diff}(F) \approx \text{Diff}(\pi^{-1}(b))$  que determina a holonomia de  $\mathcal{F}$ . De fato, tome um laço  $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$  com ponto base  $b$  e um ponto  $y \in \pi^{-1}(b)$ . Como a aplicação  $\pi|_{\mathcal{F}(y)} : \mathcal{F}(y) \rightarrow B$  é um recobrimento, existe único caminho  $\tilde{\alpha}_y : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}(y)$  tal que  $\tilde{\alpha}_y(0) = y$  e  $\pi \circ \tilde{\alpha}_y = \alpha$ . Identificando  $\pi^{-1}(b)$  com  $F$ , podemos definir  $\psi_\alpha : F \rightarrow F$  por  $\psi_\alpha(y) = \tilde{\alpha}_y(1)$ . O ponto final de  $\tilde{\alpha}_y$  depende apenas da classe de homotopia de  $\alpha^{-1}$ . Desse modo,  $\psi_\alpha = \psi_{[\alpha]}$ ,  $\psi_{[\alpha]^{-1}} = (\psi_{[\alpha]})^{-1}$  e se  $[\beta] \in \pi_1(B)$  então  $\psi_{[\alpha \circ \beta]} = \psi_{[\alpha]} \circ \psi_{[\beta]}$ . Portanto,  $\psi_{[\alpha]} \in \text{Diff}(F)$  e  $\psi : \pi(B, b) \rightarrow \text{Diff}(F)$ ,  $\psi([\alpha]) = \psi_{[\alpha]}$ , é a representação desejada.

Em contrapartida, podemos questionar se dado uma representação  $\psi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Diff}(F)$  existe uma variedade  $E(\psi)$  fibrada sobre  $B$  com fibra  $F$  e uma folheação  $\mathcal{F}(\psi)$  transversal as

fibras de  $E$  cuja holonomia de  $\mathcal{F}(\psi)$  é a representação  $\psi$ . O teorema a seguir responde tal questão.

**Teorema 2.41** (Suspensão de uma representação). *Sejam  $B$  e  $F$  variedades conexas e uma representação  $\psi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Diff}(F)$ . Então existe espaço fibrado  $(E(\psi), \pi, B, F)$  e uma folheação  $\mathcal{F}(\psi)$  transversas as fibras de  $E(\psi)$  cuja holonomia é  $\psi$ . As fibras de  $E(\psi)$  possui estrutura de grupo discreto.*

Dizemos que duas representações  $\psi : \pi(B) \rightarrow \text{Diff}(F)$  e  $\psi' : \pi(B) \rightarrow \text{Diff}(F')$  são conjugadas de classe  $C^r$  se existe um difeomorfismo de classe  $C^r$  ou um homeomorfismo ( $r = 0$ )  $h : F \rightarrow F'$  tal que, para todo  $[\alpha] \in \pi_1(B)$ , temos  $\psi([\alpha]) = h^{-1} \circ \psi'([\alpha]) \circ h$ . O próximo teorema mostra que se duas representações são conjugadas então suas suspensões são difeomorfas, ou seja, temos a unicidade da suspensão.

**Teorema 2.42** (Unicidade da suspensão). *Sejam  $\psi$  e  $\psi'$  representações  $C^r$  conjugadas. Então existe um difeomorfismo  $H : E(\psi) \rightarrow E(\psi')$  de classe  $C^r$  (homeomorfismo caso  $r = 0$ ) tal que*

1.  $\pi' \circ H = \pi$  e conseqüentemente  $H$  leva as fibras de  $E(\psi)$  nas fibras de  $E(\psi')$ ,
2.  $H$  leva folhas de  $\mathcal{F}(\psi)$  em folhas de  $\mathcal{F}(\psi')$ .

Juntando os dois resultados obtemos o seguinte teorema que garante a equivalência topológica.

**Teorema 2.43.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação transversa as fibras de  $(M, \pi, B, F)$  cuja holonomia na fibra  $\pi^{-1}(b)$ ,  $b \in B$ , é definida  $\psi : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Diff}(F)$ . Então existe um difeomorfismo  $H : M \rightarrow E(\psi)$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , que leva as folhas de  $\mathcal{F}$  nas folhas de  $\mathcal{F}(\psi)$  e tal que  $\pi_\psi \circ H = \pi$ . Em particular,  $H$  leva as fibras de  $M$  nas fibras de  $E(\psi)$ .*

Em nosso contexto dizer que a ação Anosov  $\phi$  de  $\mathbb{R}^k$  em  $M$  de codimensão 1 e irredutível é transversa a um fibrado localmente trivial  $\pi : M \rightarrow B$  significa que a folheação determinada pelas órbitas  $\mathcal{O}$  transversa as fibras de  $\pi$ .

**Proposição 2.44** (Barbot - Maquera, [1]). *Seja  $\phi$  uma ação Anosov em  $M$  de codimensão 1, irredutível e transversa a um fibrado localmente trivial  $\pi : M \rightarrow B$ . A menos de recobrimento finito, o espaço base  $B$  é difeomorfo ao toro  $\mathbb{T}^k$ .*

*Demonstração.* Considere  $\mathcal{O}_0$  uma órbita compacta da ação  $\phi$ . Sendo esta transversa as fibras de  $\pi$ , por definição a restrição  $\pi$  para  $\mathcal{O}_0$  é uma aplicação de recobrimento finito  $\pi_0$ , visto que  $\mathcal{O}_0$  é compacta. Seja  $\pi'$  o pull-back de  $\pi$  por  $\pi_0$ , isto é, a única aplicação  $\pi' : M' \rightarrow \mathcal{O}_0$  que faz o

diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{O}_0 \\ \pi'_0 \downarrow & & \downarrow \pi_0 \\ M & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

Como  $\pi_0 : \mathcal{O}_0 \rightarrow B$  é um recobrimento finito então  $\pi'$  é um fibrado localmente trivial e  $\pi'_0 : M' \rightarrow M$  é um recobrimento finito. A ação  $\phi$  de  $\mathbb{R}^k$  em  $M$  levanta para uma ação de  $\mathbb{R}^k$  em  $M'$  que é transversa ao  $\pi'$ . Como  $\mathcal{O}_0$  é difeomorfa ao toro  $\mathbb{T}^k$ , obtemos o resultado desejado.  $\square$

Com isso obtemos que caso a ação Anosov  $\phi$  seja transversa a um fibrado localmente trivial então o espaço base é o toro  $\mathbb{T}^k$ .

**Teorema 2.45** (Barbot - Maquera, [1]). *Seja  $\phi$  uma ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  em  $M$  de codimensão 1 irreduzível e transversa a um fibrado localmente trivial  $\pi : M \rightarrow \mathbb{T}^k$  com fibra conexa  $F$ . Então  $\phi$  é topologicamente equivalente a suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  na variedade  $F$ .*

*Demonstração.* As órbitas de  $\phi$  são as folhas da folheação  $\mathcal{O}$  em  $M$  transversas as fibras de  $\pi$ . Portanto, existe um difeomorfismo entre  $(M, \mathcal{O}, \pi)$  e a suspensão  $(M, \mathcal{F}_\rho, \pi_\rho)$  da representação  $\rho : \pi_1(\mathbb{T}^k) \rightarrow \text{Diff}(F)$ .

A ação de  $\mathbb{R}^k$  em  $\mathbb{T}^k$  por translações levanta de modo único para uma ação localmente livre de  $\mathbb{R}^k$  preservando cada órbita de  $\mathcal{O}$ . Esta nova ação é topologicamente equivalente à  $\phi$  e também isomórfica à suspensão de  $\rho : \mathbb{Z}^k \rightarrow \text{Diff}(F)$ , recordando que  $\pi_1(\mathbb{T}^k) \approx \mathbb{Z}^k$ .  $\square$

O teorema garante que a ação  $\phi$  é topologicamente equivalente a suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ . Note que não podemos determinar se a ação de  $\mathbb{Z}^k$  é Anosov ou não. Na realidade, provar que tal ação é Anosov é um problema em aberto. Todavia, caso tal ação seja Anosov, o resultado a seguir nos mostrar que a conjugação é mais que topológica e a conclusão é, exatamente, a prova da conjectura de Verjovsky.

**Corolário 2.46** (Barbot - Maquera, [1]). *Se  $k \geq 2$  e  $\mathbb{Z}^k$  contém um elemento de Anosov, então  $\phi$  é Hölder conjugada a suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  por automorfismos do toro para um automorfismo de  $\mathbb{R}^k$ .*

No Capítulo 4 iremos mostrar sob certas condições que  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é integrável. Desse modo, o resultado a seguir garante que a ação será transversa a um fibrado localmente trivial.

**Teorema 2.47** (Barbot - Maquera, [1]). *Se  $\phi$  é uma ação Anosov de codimensão 1 irreduzível de  $\mathbb{R}^k$  em  $M$  tal que  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é integrável, então  $\phi$  é transversa a um fibrado localmente trivial  $\pi : M \rightarrow \mathbb{T}^k$ .*

Portanto, pelo Teorema 2.45 obtemos que a ação Anosov  $\phi$  é topologicamente equivalente a suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ .



---

## SISTEMA DE MARKOV PARA AÇÕES DE ANOSOV

---

O objetivo principal do nosso trabalho é encontrar resultados parciais na tentativa de mostrar a seguinte conjectura.

**Conjectura de Verjovsky para ações:** *Toda ação Anosov irreduzível de codimensão 1 de  $\mathbb{R}^k$  em uma variedade  $M$  de dimensão maior que  $k + 2$  é topologicamente equivalente à suspensão de uma ação Anosov de  $\mathbb{Z}^k$  em uma variedade compacta.*

No Capítulo 4 mostraremos um resultado parcial desta conjectura, o qual generaliza um resultado para fluxos obtido por Ghys em [2]. Um ponto crucial em seu trabalho é associar um grafo determinado pela partição de Markov construída por Ratner, [3]. O primeiro grande obstáculo para generalizar o resultado de Ghys é mostrar a existência deste tal grafo para ações Anosov, visto que, para nosso conhecimento, não há literatura sobre a existência de partições de Markov para ações. Deste modo, o objetivo principal deste capítulo é construir um objeto (chamado de *sistema de Markov*, Definição 3.19) que possua as propriedades “fundamentais” como as da partição de Markov de Ratner, de tal maneira que possamos associar um grafo. A diferença entre estes dois objetos reside no fato que para o sistema de Markov apenas conseguimos uma decomposição transversa: União finita de retângulos transversais as órbitas da ação.

Inicialmente, as partições de Markov foram definidas por Adler e Weiss [18] para automorfismos lineares no toro. A primeira extensão desse objeto foi para difeomorfismos de Anosov e é devida a Sinai [19] e [20]. O próximo foi Bowen ([13]) que mostrou a existência para difeomorfismos *Axioma A*. Por fim, na classe dos fluxos Anosov, Ratner ([3]) definiu e construiu as partições de Markov para fluxos Anosov transitivos.

Para construção do sistema de Markov, iremos adaptar os argumentos desenvolvidos por Bowen [13] e Ratner, [3] para difeomorfismos e fluxos, respectivamente. Dessa maneira,

na Seção 3.1, obtemos as Proposições 3.8 e 3.9 as quais descrevem a dinâmica da ação dos elementos Anosov nas placas de uma vizinhança com estrutura de produto dado pelos Teoremas 2.18 e 2.19. Em seguida, na Seção 3.2, introduzimos a noção de Sistema de Markov (Definição 3.19). Para, finalmente, na Seção 3.3 mostrarmos a existência deste sistema para ações Anosov transitiva em subcones regulares.

### 3.1 Dinâmica hiperbólica numa vizinhança produto

O resultado principal dessa seção é apresentado nas Proposições 3.8 e 3.9. A ideia geométrica desses resultados é basicamente exibir como decompor iterados de placas de uma vizinhança produto, tanto no futuro quanto no passado. Seja  $\phi$  uma ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  sobre  $M$ . A fim de introduzir uma noção de passado e futuro nas órbitas da ação, iremos utilizar o seguinte subconjunto do  $\mathbb{R}^k$ ,

$$\mathbb{R}_+^k = \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid t_i \geq 0, i = 1, \dots, k\}.$$

Fixado  $\mathcal{A}_0$  uma componente conexa do conjunto de elementos de Anosov, considere  $u_1, \dots, u_k$  uma base de  $\mathbb{R}^k$  tal que  $u_i \in \mathcal{A}_0$  e  $\|u_i\| = 1$ . Uma vez fixada a base, definimos

$$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i u_i \mid t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k \right\}$$

o *subcone regular gerado pela base*  $u_1, \dots, u_k$ . Definimos o *futuro do ponto*  $p$  como o pedaço de órbita  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(p)$ . Analogamente, chamamos de *passado do ponto*  $p$  como o conjunto  $\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}(p)$ .

**Observação 3.1.** Dado uma base  $u_1, \dots, u_k$  de  $\mathbb{R}^k$  formada por elementos Anosov de  $\mathcal{A}_0$  existem constantes  $\lambda = \lambda(u_1, \dots, u_k)$ ,  $C = C(u_1, \dots, u_k) > 0$  tais que para todo  $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$  e  $x \in M$  temos:

1. Se  $y, z \in \mathcal{F}^{ss}(x)$  então

$$d(\phi(t_1 u_1 + \dots + t_k u_k, y), \phi(t_1 u_1 + \dots + t_k u_k, z)) \leq C e^{-\lambda(t_1 + \dots + t_k)} d(y, z).$$

2. Se  $y, z \in \mathcal{F}^{uu}(x)$  então

$$d(\phi(-t_1 u_1 - \dots - t_k u_k, y), \phi(-t_1 u_1 - \dots - t_k u_k, z)) \leq C e^{-\lambda(t_1 + \dots + t_k)} d(y, z).$$

A menos de modificarmos a métrica (por uma métrica adaptada) podemos supor que  $C = 1$  e  $e^{-\lambda} < 1$ . É importante observar que a nova métrica depende da base  $u_1, \dots, u_k$  escolhida. Além disso, nas mesmas condições acima as direções fraca instável e fraca estável não expandem distância entre os pontos. Mais precisamente.

**Observação 3.2.** Para todo  $x \in M$  e  $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$  temos



3. Se  $y, z \in \mathcal{F}^s(x)$  então  $d(\phi(t_1u_1 + \dots + t_ku_k, y), \phi(t_1u_1 + \dots + t_ku_k, z)) \leq d(y, z)$ .
4. Se  $y, z \in \mathcal{F}^u(x)$  então  $d(\phi(-t_1u_1 - \dots - t_ku_k, y), \phi(-t_1u_1 - \dots - t_ku_k, z)) \leq d(y, z)$ .

**Observação 3.3.** Recordando que  $\mathcal{F}_\delta^i(x)$  é a bola de centro  $x$  e raio  $\delta > 0$  na folha  $\mathcal{F}^i(x)$  com  $i = ss, uu, s, u$ . Também,  $B_\delta(x)$  representa bola de centro  $x$  e raio delta em  $M$ . Sendo  $M$  compacta, é possível exibir  $\gamma > 0$  tal que para todo  $x \in M$  e  $0 < \delta < \gamma$  é válido a seguinte igualdade

$$\mathcal{F}_\delta^i(x) = \mathcal{F}_\gamma^i(x) \cap B_\delta(x).$$

Dado um subconjunto  $X$  de  $M$ , denotamos por  $\mathcal{F}_\delta^i(X) = \bigcup_{z \in X} \mathcal{F}_\delta^i(z)$ . Agora, apresentamos algumas propriedades métricas e dinâmicas das folheações.

**Lema 3.4.** Para qualquer  $i = ss, uu, s, u$ .

1.  $\mathcal{F}_{\delta_1}^i(\mathcal{F}_{\delta_2}^i(x)) \subset \mathcal{F}_{\delta_1 + \delta_2}^i(x)$ ;
2. Se  $y \in \mathcal{F}_\delta^i(x)$  então  $\mathcal{F}_\gamma^i(x) \cap B_\rho(y) \subset \mathcal{F}_\rho^i(y)$ ;
3. Se  $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \gamma$  então  $\mathcal{F}_{\delta_1}^i(x) = \mathcal{F}_{\delta_2}^i(x) \cap B_{\delta_1}(x)$ ;
4. Seja  $\delta_1 \leq \delta_2$ . Então  $U \subset \mathcal{F}_{\delta_1}^i(x)$  é aberto como subconjunto de  $\mathcal{F}_{\delta_2}^i(x)$  se, e só se, para todo  $y \in U$  existe  $\rho > 0$  com  $\mathcal{F}_\rho^i(y) \subset U$ ;
5. Sejam  $t = t_1u_1 + \dots + t_ku_k \in \mathcal{A}_0$  e  $X \subset M$ . Suponha que  $Y \subset \mathcal{F}_\delta^{uu}(X)$  então

$$\phi^{-t}(Y) \subset \mathcal{F}_{f(t)\delta}^{uu}(X)$$

onde  $f(t) = e^{-\lambda(t_1 + \dots + t_k)}$ .

*Demonstração.* Os primeiros itens são consequências da topologia das folhas. Para o último item tome  $y \in \mathcal{F}_\delta^{uu}(x)$  então

$$d(\phi^{-t}(y), \phi^{-t}(x)) \leq f(t)d(y, x) \leq f(t)\delta.$$

Logo,  $\phi^{-t}(y) \in \mathcal{F}_{f(t)\delta}^{uu}(\phi^{-t}(x))$ . Sendo as folhas de  $\mathcal{F}^{uu}$  invariantes pela ação do cone  $\mathcal{A}_0$ , a conclusão é imediata.  $\square$

No Capítulo 2 apresentamos a estrutura de produto local que o par de folheações  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^u$  ( $\mathcal{F}^s$  e  $\mathcal{F}^{uu}$ ) determinam na variedade. Especificamente estamos falando do *Teorema do Produto Local* enunciado nos Teoremas 2.18 e 2.19. Tal resultado diz que existe  $\delta_0 > 0$  tal que para todo  $0 < \delta < \delta_0$  a aplicação 3.1 é um homeomorfismo local.

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] &= [\cdot, \cdot]^s : \mathcal{F}_\delta^u(x) \times \mathcal{F}_\delta^{ss}(x) \rightarrow M \\ (y, z) &\mapsto [y, z]^s = \mathcal{F}_{2\delta}^{ss}(y) \cap \mathcal{F}_{2\delta}^u(z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Apesar do enunciado diferente, o Teorema 2.18 determina o mesmo produto local da aplicação 3.1. De fato, para todo  $\delta$  no intervalo  $(0, \min\{\delta_0, \gamma\})$  é válido que se  $d(z, y) < \varepsilon(\delta)$  então  $\mathcal{F}_\delta^{ss}(y) \cap \mathcal{F}_\delta^u(z) = [y, z]$ .

**Definição 3.5.** Escolha uma cadeia decrescente de reais positivos  $\alpha_0 > \dots > \alpha_n > \dots$  tal que  $\alpha_0 = \min\{\delta_0, \gamma\}$  e

$$\alpha_{n+1} < \frac{1}{3} \min \left\{ \frac{1}{3} \alpha_n, \varepsilon \left( \frac{1}{3} \alpha_n \right) \right\}.$$

Além disso, para todo  $t = t_1 u_1 + \dots + t_k u_k$  com  $t_i \geq 0$  e  $\|t\| = 1$  temos

$$d(x, y) \leq \alpha_{n+1} \Rightarrow \begin{cases} d(\phi^t(x), \phi^t(y)) \leq \alpha_n \\ d(\phi^{-t}(x), \phi^{-t}(y)) \leq \alpha_n \end{cases}.$$

A escolha dos valores nessa cadeia decrescente depende continuamente dos elementos básicos  $u_1, \dots, u_k$  fixados. Note que a última condição é possível devido a continuidade da ação e a compacidade do conjunto

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(u_1, \dots, u_k) = \left\{ u = \sum_i t_i u_i \mid t_i \geq 0 \text{ e } \|u\| = 1 \right\}. \quad (3.2)$$

Agora apresentamos algumas propriedades sobre o produto local. É importante compreendermos como o diâmetro dos conjuntos influenciam no produto local, além de entendermos o que ocorre quando iteramos o produto local por elementos do conjunto  $\mathcal{U}$ .

**Lema 3.6.** *Suponha  $\alpha_n$  a sequência da Definição 3.5 e  $X$  um subconjunto de  $M$ .*

1. Se  $\text{diam} X \leq 3\alpha_{n+1}$  então  $\text{diam}[X, X] \leq \alpha_n$ .
2. Se  $\text{diam}\{x, y, w, z\} \leq 3\alpha_2$  então  $[x, z] = [x, [y, z]] = [[x, y], z] = [[x, w], [y, z]]$ .

*Demonstração.* Sejam  $x, y, w, z$  pontos no subconjunto  $X$ . Por hipótese, podemos estimar a distância  $d(w, x) \leq 3\alpha_{n+1} < \varepsilon(\frac{1}{3}\alpha_n)$ . Tal fato que implica  $[w, x] \in \mathcal{F}_{\frac{\alpha_n}{3}}^u(x) \subset B_{\frac{\alpha_n}{3}}(x)$ . Com argumento semelhante obtemos  $[y, z] \in B_{\frac{\alpha_n}{3}}(z)$ , que por sua vez implica

$$d([w, x], [y, z]) \leq d([w, x], x) + d(x, z) + d(z, [y, z]) \leq \frac{\alpha_n}{3} + 3\alpha_{n+1} + \frac{\alpha_n}{3} \leq \alpha_n.$$

Desse modo, concluímos que  $\text{diam}[X, X] \leq \alpha_n$ . Agora, considerando  $X = \{w, x, y, z\}$  segue do primeiro item que  $\text{diam}[X, X] \leq \alpha_1$ . Logo,  $[y, z] \in \mathcal{F}_{\alpha_1}^{ss}(y) \cap \mathcal{F}_{\alpha_1}^u(z)$ .

Como  $d(x, [y, z]) = d([x, x], [y, z]) \leq \alpha_1$  temos  $[x, [y, z]] \in \mathcal{F}_{\frac{\alpha_0}{3}}^{ss}(x) \cap \mathcal{F}_{\frac{\alpha_0}{3}}^u([y, z])$ . Uma vez que,  $\mathcal{F}_{\frac{\alpha_0}{3}}^u([y, z]) \subset \mathcal{F}_{\frac{\alpha_0}{3}}^u \mathcal{F}_{\alpha_1}^u(z) \subset \mathcal{F}_{\alpha_0}^u(z)$  concluímos que

$$[x, [y, z]] \in \mathcal{F}_{\alpha_0}^{ss}(x) \cap \mathcal{F}_{\alpha_0}^u(z) = [x, z].$$

As outras igualdades são obtidas de maneira análoga, comparando com  $[x, z]$ .  $\square$

**Lema 3.7.** *Sejam  $u \in \mathcal{U}$  e  $m \in \mathbb{Z}_+$ .*

1. Se  $d(x, y) < \alpha_2$  e  $d(\phi^{ju}(x), \phi^{ju}(y)) < \alpha_2$  para todo  $0 \leq j \leq m$ , então

$$\phi^{mu}[x, y] = [\phi^{mu}(x), \phi^{mu}(y)].$$

2. Se  $d(x, y) < \alpha_2$  e  $d(\phi^{-ju}(x), \phi^{-ju}(y)) < \alpha_2$  para todo  $0 \leq j \leq m$ , então

$$\phi^{-mu}[x, y] = [\phi^{-mu}(x), \phi^{-mu}(y)].$$

*Demonstração.* Denotando  $w_j = [\phi^{ju}x, \phi^{ju}y]$  segue da escolha de  $\alpha_2$  que

$$w_j \in \mathcal{F}_{\alpha_1}^{ss}(\phi^{ju}x) \cap \mathcal{F}_{\alpha_1}^u(\phi^{ju}y) \text{ e } \phi^u w_j \in \mathcal{F}_{\alpha_1}^{ss}(\phi^{(j+1)u}x).$$

Como  $d(w_j, \phi^{ju}y) \leq \alpha_1$  a hipótese sobre a sequência  $(\alpha_n)$  garante que a limitação  $d(\phi^u w_j, \phi^{(j+1)u}y) \leq \alpha_0$ . Além disso, devido a invariâncias das folhas de  $\mathcal{F}^u$  podemos concluir

$$\phi^u w_j \in \mathcal{F}_{\alpha_0}^{ss}(\phi^{(j+1)u}(x)) \cap \mathcal{F}_{\alpha_0}^u(\phi^{(j+1)u}(y)) = [\phi^{(j+1)u}x, \phi^{(j+1)u}y].$$

Indutivamente obtemos a igualdade  $\phi^{ju}[x, y] = [\phi^{ju}x, \phi^{ju}y]$ . O argumento para a demonstração do outro item é inteiramente análogo.  $\square$

De modo mais simples, o Lema 3.7 diz que sob certas condições o produto local comuta com a ação do subcone regular  $\mathcal{S}$ . Agora verificaremos como decompor iterados de subconjuntos de placas de uma vizinhança produto. O interesse é apenas em decompor os conjuntos que não contraíram seu diâmetro. Por isso, na Proposição 3.8 analisamos o futuro de conjuntos contidos em folhas de  $\mathcal{F}^{ss}$ . Já na Proposição 3.9 estudamos o passado de conjuntos contidos em folhas de  $\mathcal{F}^u$ . Uma ideia geométrica da Proposição 3.8 é apresentado na Figura 3.

**Proposição 3.8.** *Sejam  $u \in \mathcal{U}$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$  e  $f = \phi^{-mu}$ . Sejam  $y \in \mathcal{F}_{\alpha_3}^u(x)$  e  $V \subset \mathcal{F}_{\alpha_3}^{ss}(x)$  tal que*

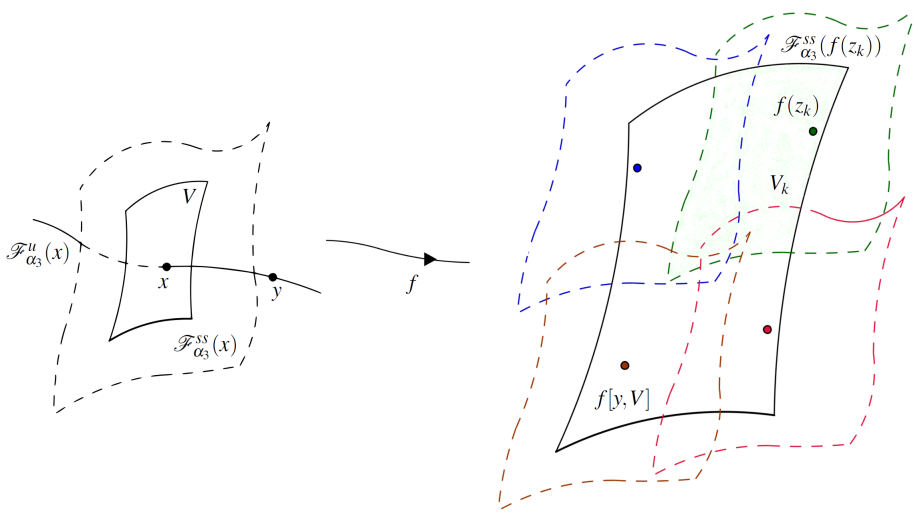
$$f(V) = \bigcup_{k=1}^l V_k, \quad V_k \subset \mathcal{F}_{\alpha_3}^{ss}(f(z_k)) \text{ com } z_k \in \mathcal{F}_{\alpha_3}^{ss}(x). \text{ Então,}$$

$$f[y, V] = \bigcup_k [f[y, z_k], V_k]. \quad (3.3)$$

*Demonstração.* Segue da definição do produto local que para todo  $y \in \mathcal{F}_{\alpha_3}^u(x)$ ,  $z \in \mathcal{F}_{\alpha_3}^{ss}(x)$  que  $[y, z] = \mathcal{F}_{2\alpha_3}^u(z) \cap \mathcal{F}_{2\alpha_3}^{ss}(y)$ . Uma vez que  $[y, V] = \bigcup_k [y, f^{-1}V_k]$ , basta mostrarmos para cada  $k$  que

$$f[y, f^{-1}V_k] = [f[y, z_k], V_k].$$

De modo mais simples basta verificarmos a seguinte igualdade  $f[y, f^{-1}w] = [f[y, z_k], w]$  para todo  $w \in V_k$ . Como  $w \in \mathcal{F}_{\alpha_3}^{ss}(f(z_k))$  segue que  $\text{diam}\{y, z_k, f^{-1}w\} < \alpha_2$ , tal fato nos permite

Figura 3 – Decomposição de  $f[y, V]$ .

aplicar o Lema 3.6 e obter  $[y, f^{-1}w] = [[y, z_k], f^{-1}w]$ . Mais ainda, como a distância é contraída na folheação  $\mathcal{F}^{ss}$  sob iterações positivas, para  $0 \leq j \leq m$  temos

$$\begin{aligned} d(\phi^{-ju}(f^{-1}w), \phi^{-ju}z_k) &= d(\phi^{-ju}(\phi^{mu}w), \phi^{-ju}z_k) \\ &= d(\phi^{(m-j)u}w, \phi^{(m-j)u}(f(z_k))) \\ &\leq \alpha_3 \leq \frac{\alpha_2}{3}. \end{aligned}$$

Além disso, a partir  $d(z_k, y) \leq d(z_k, x) + d(x, y) < 2\alpha_3 \leq \varepsilon(\frac{\alpha_2}{3})$  obtemos  $[y, z_k] \in \mathcal{F}_{\frac{\alpha_2}{3}}^u(z_k)$ . Como a folheação  $\mathcal{F}^u$  não expande distâncias sob iterações negativas podemos afirmar que  $d(\phi^{-ju}(z_k), \phi^{-ju}[y, z_k]) \leq \frac{\alpha_2}{3}$  para todo  $j \in \{0, \dots, l\}$ . Consequentemente para todo  $j$  temos

$$\begin{aligned} d(\phi^{-ju}(f^{-1}w), \phi^{-ju}[y, z_k]) &\leq d(\phi^{-ju}(f^{-1}w), \phi^{-ju}z_k) + d(\phi^{-ju}z_k, \phi^{-ju}[y, z_k]) \\ &\leq \frac{2\alpha_2}{3} \leq \alpha_2. \end{aligned}$$

Por fim, aplicando o Lema 3.7 verificamos a igualdade desejada.

$$f[y, f^{-1}w] = \phi^{-mu}[y, \phi^{mu}w] = \phi^{-mu}[[y, z_k], \phi^{mu}w] = [\phi^{-mu}[y, z_k], w] = [f[y, z_k], w].$$

□

**Proposição 3.9.** *Sejam  $u \in \mathcal{U}$  e  $g = \phi^{mu}$ . Sejam  $y \in \mathcal{F}_{\alpha_3}^{ss}(x)$  e  $V \subset \mathcal{F}_{\alpha_3}^u(x)$  tal que  $g(V) = \bigcup_{k=1}^j V_k$ ,  $V_k \subset \mathcal{F}_{\alpha_3}^u(g(z_k))$  e  $z_k \in \mathcal{F}_{\alpha_3}^u(x)$ . Então*

$$g[V, y] = \bigcup_k [V_k, g[z_k, y]]. \quad (3.4)$$

*Demonstração.* Semelhante ao lema anterior,  $[V, y] = \bigcup_k [g^{-1}V_k, y]$  e é suficiente mostrar para cada  $k$  a igualdade a seguir.

$$g[g^{-1}V_k, y] = [V_k, g[z_k, y]].$$

Dado  $w \in V_k$ , verifiquemos que  $g[g^{-1}w, y] = [w, g[z_k, y]]$ . O  $\text{diam}\{g^{-1}w, y, z_k\} \leq 3\alpha_2$  garante que  $[g^{-1}w, y] = [g^{-1}w, [z_k, y]]$ . Como  $w \in \mathcal{F}_{\alpha_3}^u(g(z_k))$  e a distância não é expandida, sob iterações no passado, na folheação  $\mathcal{F}^u$  temos para  $0 \leq j \leq m$ ,

$$d(\phi^{ju}(g^{-1}(w)), \phi^{ju}(z_k)) = d(\phi^{ju}(\phi^{-mu}w), \phi^{ju}z_k) = d(\phi^{(j-m)u}w, \phi^{(j-m)u}(g(z_k))) \leq \alpha_3 \leq \frac{\alpha_2}{3}.$$

Note que,  $d(z_k, y) \leq d(z_k, z) + d(z, y) \leq 2\alpha_3 \leq \varepsilon(\frac{\alpha_2}{3})$  implica  $[z_k, y] \in \mathcal{F}_{\frac{\alpha_2}{3}}^{ss}(z_k)$ . Como a distância é contraída, sob iterações positivas, na folheação  $\mathcal{F}^{ss}$  temos  $d(\phi^{ju}z_k, \phi^{ju}[z_k, y]) \leq \frac{\alpha_2}{3}$  para todo  $j \in \{0, \dots, m\}$ . Logo, para todo  $j$

$$\begin{aligned} d(\phi^{ju}(g^{-1}(w)), \phi^{ju}([z_k, y])) &\leq d(\phi^{ju}(g^{-1}(w)), \phi^{ju}(z_k)) + d(\phi^{ju}(z_k), \phi^{ju}([z_k, y])) \\ &\leq \frac{2\alpha_2}{3} \leq \alpha_2. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Lema 3.7 podemos concluir.

$$g[g^{-1}w, y] = \phi^{mu}[\phi^{-mu}w, y] = \phi^{mu}[\phi^{-mu}w, [z_k, y]] = [w, \phi^{mu}[z_k, y]] = [w, g[z_k, y]].$$

□

## 3.2 Sistema de Markov

Utilizaremos essa seção para introduzir todos os objetos necessários para definir o *sistema de Markov*, Definição 3.19. A ideia é definirmos uma estrutura transversa as órbitas da ação Anosov que nos permita simplificar a dinâmica da ação. Visando reproduzir as propriedades das partições de Markov para difeomorfismos e fluxos de Anosov, a definição abaixo determina quem fará o papel dos retângulos para as ações de Anosov.

**Definição 3.10.** Uma seção  $\Sigma$  transversal as órbitas da ação é uma *seção retangular* se existem conjuntos  $C \subset \mathcal{F}_{\alpha_0}^{uu}(x)$  e  $D \subset \mathcal{F}_{\alpha_0}^{ss}(x)$  satisfazendo  $C = \overline{\text{int } C}$ ,  $D = \overline{\text{int } D}$  na topologia das respectivas folhas fortes e  $\Sigma = [C, D]$ . Denotamos por  $\text{int}\Sigma = [\text{int}C, \text{int}D]$  e  $\partial\Sigma = [\partial C, D] \cup [C, \partial D]$ .

**Observação 3.11.** O Lema 3.6 garante que dados  $z, w \in \Sigma$  temos  $[z, w] \in \Sigma$ , bastando reduzir se necessário o diâmetro dos conjuntos  $C$  e  $D$ . Isso significa que a seção  $\Sigma$  é fechada com respeito ao produto local.

Devido a escolha do produto local, Aplicação 3.1, para cada  $x \in D$  o conjunto  $[C, x]$  pode não estar inteiramente contido em uma folha forte instável. Isso ocorre porquê o subfibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  pode não ser integrável. Conforme representado na Figura 4, a única informação garantida sobre  $[C, x]$  é ele estar contido em  $\mathcal{F}^u(x)$ .

Todavia as folheações fracas  $\mathcal{F}^s$  e  $\mathcal{F}^u$  são saturadas pelas órbitas da ação. Dessa maneira podemos projetar  $[C, x]$  sobre a folha forte instável  $\mathcal{F}^{uu}(x)$  utilizando as órbitas da ação. Uma ideia de como essa projeção ocorre é apresentado na Figura 5.

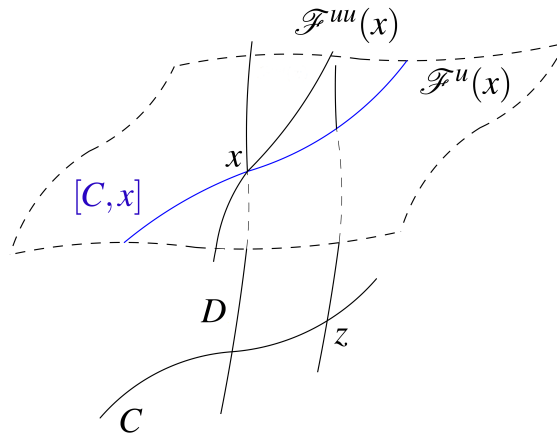
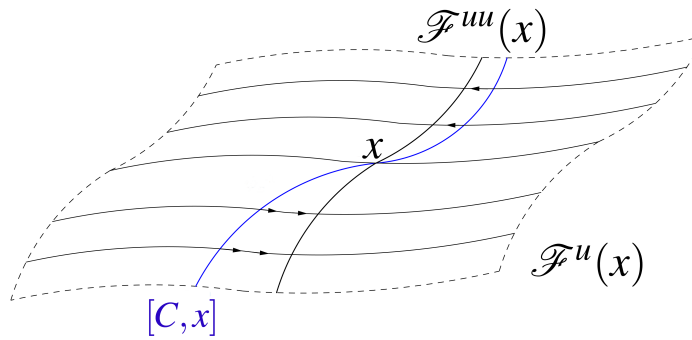
Figura 4 – Conjunto  $[C, x]$ .

Figura 5 – Isomorfismo via órbita

Seguindo as ideias apresentadas por Ratner, [3], vamos utilizar essa projeção ao longo das órbitas para determinarmos quando dois conjuntos são isomorfos via órbita.

**Definição 3.12.** Os conjuntos  $A_1$  e  $A_2$  contidos em  $M$  são ditos *isomorfos via órbita* se podemos definir em  $A_1$  um função contínua  $f : A_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ , de modo que:

1.  $f(A_1 \cap A_2) = 0$ , se  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ;
2. A aplicação  $\psi : A_1 \rightarrow A_2$ ,  $\psi(x) = \phi(f_k(x)u_k + \dots + f_1(x)u_1, x)$  é um homeomorfismo.

Apesar de estar explicitado na definição, a dependência da base de elementos de Anosov não existe. De maneira geral, para cada  $x \in M$  existe a projeção  $\pi_x : \mathcal{F}^u(x) \rightarrow \mathcal{F}^{uu}(x)$ ,  $\pi_x(\phi(v, y)) = y$  com  $v \in \mathbb{R}^k$ . A fim de manter a concordância com a notação da definição acima e introduzida por Ratner, para cada  $x \in D$  denotamos

$$\psi_x^{-1} = \pi_x|_{[C, x]} : [C, x] \rightarrow \mathcal{F}^{uu}(x).$$

Como queremos introduzir uma decomposição transversa, definimos a seguir quando duas seções retangulares são disjuntas.

**Definição 3.13.** As seções retangulares  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são *disjuntas* se  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \subset \partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$ , onde  $\partial\Sigma_i = [\partial C_i, D_i] \cup [C_i, \partial D_i]$ .

Em contrapartida, duas seções retangulares  $\Sigma_1 = [C_1, D_1]$  e  $\Sigma_2 = [C_2, D_2]$  não serem disjuntas significa que  $\text{int}\Sigma_1 \cap \text{int}\Sigma_2 \neq \emptyset$ . Nesse caso, podemos considerar subseções retangulares dessas seções. De fato, associado a um ponto  $x \in \text{int}\Sigma_1 \cap \text{int}\Sigma_2$  considere os conjuntos a seguir.

$$\begin{aligned} D_{\Sigma_1\Sigma_2}(x) &= [x, D_1] \cap [x, D_2] \\ C_{\Sigma_1\Sigma_2}(x) &= \psi_x^{-1}[C_1, x] \cap \bar{\psi}_x^{-1}[C_2, x] \\ C_{\Sigma_1}^{\Sigma_2}(x) &= \psi_x(C_{\Sigma_1\Sigma_2}(x)) \subset [C_1, x] \\ C_{\Sigma_2}^{\Sigma_1}(x) &= \bar{\psi}_x(C_{\Sigma_1\Sigma_2}(x)) \subset [C_2, x] \end{aligned}$$

As projeções  $\psi_x : [C_1, x] \rightarrow \psi_x^{-1}[C_1, x] \subset \mathcal{F}^{uu}(x)$  e  $\bar{\psi}_x : [C_2, x] \rightarrow \bar{\psi}_x^{-1}[C_2, x] \subset \mathcal{F}^{uu}(x)$  são isomorfismos via órbita. As subseções obtidas a partir dos conjuntos acima receberam o nome de *projeção*.

**Definição 3.14.** A seção retangular  $\Sigma_{1\Sigma_2} = [C_{\Sigma_1}^{\Sigma_2}(x), D_{\Sigma_1\Sigma_2}(x)] \subset \Sigma_1$  é a *projeção* de  $\Sigma_2$  em  $\Sigma_1$ . Respectivamente,  $\Sigma_{2\Sigma_1} = [C_{\Sigma_2}^{\Sigma_1}(x), D_{\Sigma_1\Sigma_2}(x)] \subset \Sigma_2$  é a *projeção* de  $\Sigma_1$  em  $\Sigma_2$ .

Por construção, as projeções  $\Sigma_{1\Sigma_2}$  e  $\Sigma_{2\Sigma_1}$  podem ser projetadas uma na outra pelas órbitas da ação. Tal conceito é o que determinará se duas seções são *paralelas*.

**Definição 3.15.** As seções retangulares  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são *paralelas* se existe  $\tau : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$  contínua tal que

$$\bigcup_{x \in \Sigma_1} \phi(\tau_1(x)u_1 + \cdots + \tau_k(x)u_k, x) = \Sigma_2.$$

Como na definição de isomorfismo via órbita, a existência da função  $\tau$  não depende da base de elementos de Anosov. Caso exista a função basta utilizarmos uma mudança de base para obtermos tal função em termos da base  $u_1, \dots, u_k$ . Essas noções, seções paralelas e projeções, serão usadas para tornar disjunta uma família de seções retangulares.

Uma das ideias da definição proposta por Ratner, [3] é garantir que toda órbita em algum momento atravesse alguma seção retangular. Tal fato garante que as seções transversais representam, em certo sentido, toda a dinâmica. No contexto de ações de Anosov, queremos que toda órbita com respeito ao subcone regular  $\mathcal{S}$  cruze alguma seção retangular.

**Definição 3.16.** Uma família de seções retangulares  $\Sigma = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_l\}$  é *completa com respeito a base*  $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{A}_0$ , se para todo ponto  $p \in M$  existe um vetor  $t \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$  tal que  $\phi^{\sum t_i u_i}(p) \in \Sigma_j$  para algum  $j \in \{1, \dots, l\}$ .

**Observação 3.17.** Essa propriedade ocorre de modo natural devido a compacidade da variedade  $M$ . De fato, dado  $0 < \alpha < \alpha_0$  e  $x \in M$  definimos uma seção retangular que depende desses

parâmetros.

$$\Sigma(x, \alpha) = \left[ \overline{\mathcal{F}_\alpha^{uu}(x)}, \overline{\mathcal{F}_\alpha^{ss}(x)} \right]. \quad (3.5)$$

Associado a tal seção retangular, definimos

$$V(x, \alpha) = \bigcup_{t=0}^1 \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \phi^{-tu}(\Sigma(x, \alpha)). \quad (3.6)$$

Tal subconjunto é fechado em  $M$  e satisfaz  $V(x, \alpha) = \overline{\text{int}V(x, \alpha)}$  em  $M$ . Note que variando  $x$  obtemos uma cobertura aberta de  $M$ . Com isso, devido a compacidade podemos exibir uma família de seções retangulares completa. Caso duas seções  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_j$  não sejam disjuntas, basta perturbar o ponto base  $x_i$  de  $\Sigma_i$ , separando assim as seções. Como o processo é finito, obtemos uma família de seções retangulares disjuntas e completa. Note que, o diâmetro de cada seção retangular é limitado por  $4\alpha$ .

**Definição 3.18.** Dado uma família de seções retangulares completa  $\Sigma = \{\Sigma_i\}$  chamamos de *seções transladadas* os iterados  $\phi^{tu}\Sigma_i$ , com  $t \in \mathbb{R}$  e  $u \in \mathcal{U}$ .

Dado uma família  $\Sigma = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_l\}$  completa iremos estudar a holonomia entre as seções transversais. Mais especificamente, queremos determinar como realizar a transição entre as seções de tal família. Para isso, considere  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^l \Sigma_i$  munido com a topologia induzida de  $M$  e um ponto  $p \in \Sigma$ .

$$\begin{aligned} T(p) &= \left\{ t \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\} \mid \phi^t(p) \in \Sigma_j, \text{ algum } j \in \{1, \dots, l\} \right\} \\ r(p) &= \min_{t \in T(p)} \|t\| \end{aligned}$$

Observe que a transversalidade implica que o conjunto  $T(p)$  é discreto em  $\mathbb{R}^k$ . Logo, poder realizar a transição entre as seções  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_j$ , em nosso contexto, significará que existe  $x \in \text{int } \Sigma_i$  tal que para algum  $t \in T(p) \cap \overline{B_{r(p)}(0)}$  temos  $\phi^t(p) \in \text{int } \Sigma_j$ . Assim, a aplicação de holonomia ao longa das órbitas entre as seções  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_j$  é dada a seguir.

$$\begin{aligned} h_{ij} : \Sigma_i &\rightarrow h_{ij}(\Sigma_i) \\ z &\rightarrow h_{ij}(z) = \phi(f_1(z)u_1 + \dots + f_k(z)u_k, z). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por construção a função  $f_{ij}(z) = (f_1^{ij}(z), \dots, f_k^{ij}(z)) \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$ . Além disso, o conjunto  $h_{ij}(\Sigma_i)$  é um disco transversal a folheação dada pelas órbitas cuja interseção com  $\Sigma_j$  também é um disco transversal as órbitas. A Figura 6 ilustra como a transição deve ocorrer entre as seções.

**Definição 3.19.** Uma coleção  $\Sigma = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_l\}$  de seções retangulares disjunta completa com respeito a base  $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{A}_0$  é um *sistema de Markov*, se para todo  $x \in \text{int } \Sigma_i \cap h_{ij}^{-1}(\text{int } \Sigma_j)$  temos:



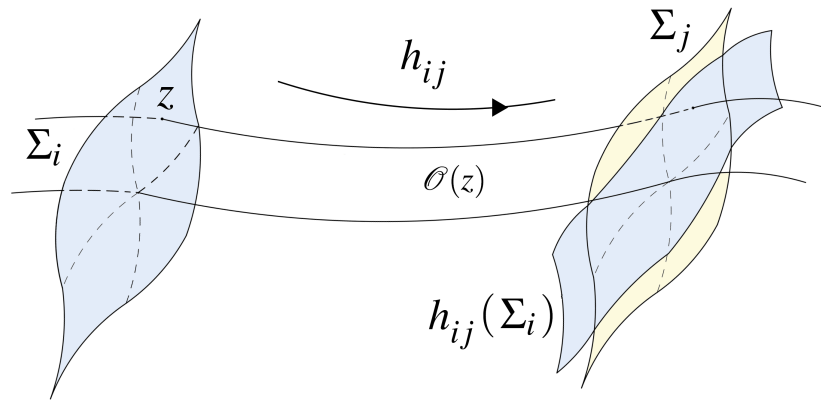


Figura 6 – Aplicação de holonomia entre as seções  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_j$

1.  $h_{ij}(\text{int}[x, D_i]) \subset [h_{ij}(x), D_j]$ ;
2.  $h_{ij}(\psi_x^{-1}[C_i, x]) \supset \text{int} \psi_{h_{ij}(x)}^{-1}[C_j, h_{ij}(x)]$ .

**Observação 3.20.** A Definição 3.19 depende da base  $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{A}_0$ , pois a holonomia está definida em termos de tal base. Além disso, a família  $\Sigma$  é completa na base fixada e poderia ocorrer de trocarmos a base e a propriedade ser perdida. Uma condição importante para que isso não ocorra é exigir que a ação Anosov seja transitiva em subcones regulares, Definição 2.36. Nesse caso,  $\Sigma$  ser completo com respeito a base  $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{A}_0$  implica que  $\Sigma$  é completa com respeito a qualquer outra base em  $\mathcal{A}_0$ . Recordando que a ação Anosov ser transitiva em subcones regulares sempre ocorre quando ela é de codimensão 1.

Uma definição de seções de Markov para ações foi proposta por Pollicott, [21]. Ele fixa um elemento de Anosov  $\nu$  e constrói seções transversas a ação que, na direção de  $\phi^{T\nu}$ , possuem a propriedade hiperbólica. O problema desse objeto para nós é exatamente esse, ele reduzir a ação de  $\mathbb{R}^k$  a um fluxo. Acreditamos que não seria possível obter a aplicação que temos por objetivo. Para o nosso resultado precisamos da ação do subcone regular, por causa da transitividade em subcones regulares. Dessa maneira, o sistema de Markov respeita a holonomia com respeito a um subcone regular. Note que, no sistema de Markov independente de haver mais de uma transição com mesmo módulo de tempo, temos a propriedade hiperbólica em todas as transições. Além disso, devido a transitividade a informação da dinâmica fornecida pelo sistema de Markov é maior.

### 3.3 Construção do sistema de Markov

Nessa seção apresentamos o resultado principal desse capítulo, enunciado abaixo, que garante a existência de sistemas de Markov para ações Anosov transitiva em subcones regulares. A demonstração apesar de ser técnica é baseada em algumas ideias principais. Basicamente,

primeiramente iremos obter uma família de seções retangulares completa que satisfaz de certo modo a propriedade hiperbólica (contração e expansão). Depois fazemos uma decomposição das seções transladadas, Definição 3.18, usando a noção de projeção de uma seção na outra. Então, o refinamento final é obtido por meio de um argumento tipo “partição produto”. A existência do sistema de Markov está dividida em 7 etapas.

**Teorema I** (Teorema de existência do sistema de Markov). *Seja  $\phi$  uma ação Anosov transitiva em subcones regulares. Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe um sistema de Markov  $\mathcal{M}$  de modo que cada seção possui diâmetro no máximo  $\varepsilon$ .*

**1ª Etapa:** Nesse primeiro momento iremos tomar uma família de seções retangulares completa e estabelecemos condições para que o produto local esteja bem definido nas seções transladadas. Por fim, no Lema 3.23 produzimos uma função escolha  $F$  que garante que para cada  $x \in M$  podemos associar uma seção transladada de modo que o ponto está a uma distância fixa do bordo de tal seção.

Seja  $\Sigma^0 = \{\Sigma_1^0, \dots, \Sigma_l^0\}$  uma família de seções retangulares disjuntas completa com respeito a base  $\{u_1, \dots, u_k\}$  obtida na observação 3.17. Logo, para cada  $p \in M$  existe  $t \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$  satisfazendo

$$\phi^{\Sigma^t u_i}(p) = \phi^t(p) \in \Sigma_i^0, \text{ para algum } i \in \{1, \dots, l\}.$$

As seções  $\Sigma_i^0 = [C_i^0, D_i^0]$  são dadas por  $C_i^0 = \overline{\mathcal{F}_\alpha^{uu}(x_i)}$  e  $D_i^0 = \overline{\mathcal{F}_\alpha^{ss}(x_i)}$  com  $\alpha$  no intervalo  $(0, \min(\varepsilon, \alpha_0))$ . Aqui  $\alpha_0$  é o primeiro termo da sequência  $(\alpha_i)$  escolhida na Definição 3.5. Tais seções são disjuntas e satisfazem

$$\begin{aligned} \text{int}\Sigma_i^0 &= [\mathcal{F}_\alpha^{uu}(x_i), \mathcal{F}_\alpha^{ss}(x_i)] \\ \partial\Sigma_i^0 &= [\partial C_i^0, D_i^0] \cup [C_i^0, \partial D_i^0] \end{aligned}$$

Como já foi mencionado, munimos o espaço  $\Sigma^0 = \bigcup_{i=1}^l \Sigma_i^0$  com a topologia induzida de  $M$ . Dado  $p \in \Sigma^0$  temos o conjunto  $T(p)$  e a aplicação  $r(p) = \inf_{t \in T(p)} \|t\|$  como definidos anteriormente. Sem perda de generalidade podemos tomar  $\alpha > 0$  e  $\Sigma^0$  de modo que se  $p \in \Sigma_i^0$  e  $v \in T(p) \cap \overline{B_{r(p)}(0)}$  tal que  $\phi^v(p) \in \Sigma_j^0$  então existe uma caixa trivializadora  $(U, \varphi)$  da folheação  $\mathcal{O}$  que contém ambas as seções retangulares.

Para cada  $x \in D_i^0$  considere o isomorfismo via órbita  $\pi_x = \psi_x^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \psi_x : \psi_x^{-1}[C_i^0, x] \subset \mathcal{F}^{uu}(x) &\rightarrow [C_i^0, x] \subset \mathcal{F}^u(x) \\ z &\mapsto \psi_x(z) = \phi(f_1^x(z)u_1 + \dots + f_k^x(z)u_k, z) \end{aligned}$$

Como os vetores da base estão fixos e possuem norma 1, extraímos a seguinte função coordenada.

$$\begin{aligned} f_x: \psi_x^{-1} [C_i^0, x] &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ z &\mapsto f_x(z) = (f_1^x(z), \dots, f_k^x(z)). \end{aligned}$$

A partir disso, iremos estabelecer as cotas abaixo.

$$\begin{aligned} q &= \max_{i=1, \dots, l} \max_{x \in D_i^0} \max_{z \in \psi_x^{-1} [C_i^0, x]} \|f_x(z)\| \\ r &= \inf_{p \in \Sigma^0} r(p) \\ R &= \sup_{p \in \Sigma^0} r(p) \end{aligned}$$

Pela construção  $r > 0$ ,  $R \leq 1$  e tais valores representam um tempo de retorno mínimo e máximo em norma. Dado  $\tau \in (R, R + r)$  os conjuntos  $\text{int } V_i^0$ , conforme definido abaixo, formam uma cobertura de  $M$ .

$$V_i^0 = \bigcup_{t=0}^{\tau} \bigcup_{v \in \mathcal{U}} \phi^{-tv}(\Sigma_i^0)$$

Aumentando a quantidade de seções  $\Sigma_i^0$  podemos diminuir os valores  $R$  e  $r$  de modo que os conjuntos  $\phi^{-tv}C_i^0$  e  $\phi^{-tv}D_i^0$  possuam diâmetro no máximo  $\alpha_0/2$ . Assim, garantimos a seguinte comutatividade

$$\phi^{-tv}\Sigma_i^0 = \phi^{-tv} [C_i^0, D_i^0] = [\phi^{-tv}C_i^0, \phi^{-tv}D_i^0].$$

Para simplificar a notação, iremos utilizar  $\Sigma_{iv}^0 = \phi^{-tv}\Sigma_i^0$ ,  $C_{iv}^0 = \phi^{-tv}C_i^0$  e  $D_{iv}^0 = \phi^{-tv}D_i^0$ .

**Observação 3.21.** A variação de  $q$  depende de  $\alpha$  e da base Anosov. Dada a sequência  $(\alpha_i)$  escolhida na Definição 3.5 iremos supor que  $\alpha$  é tomado de modo que sejam satisfeitos as condições a seguir.

1.  $\alpha < \alpha_7$ ;
2.  $2q < r$ ;
3. Existe  $\beta \in (\alpha, \min(\varepsilon, \alpha_7))$  tal que dado  $t \in [-2q, \tau + 2q]$  e  $v \in \mathcal{U}$  os conjuntos:
  - a)  $\text{diam} \{ \phi^{-tv} [y, D_{iv}^0] \} \leq \frac{\beta}{2}$ ,  $y \in \mathcal{F}_{\beta}^u(x_i)$ ;
  - b)  $\text{diam} \{ \phi^{-tv} \circ \psi_z^{-1} [C_i^0, z] \} \leq \frac{\beta}{2}$ ,  $z \in \mathcal{F}_{\beta}^{ss}(x_i)$ ;
  - c) Reduzindo  $\beta > 0$  se necessário, vamos supor ainda que se  $y \in \mathcal{F}_{\beta}^{ss}(x_i)$  e  $z \in \mathcal{F}_{\beta}^{uu}(x_i)$  então  $\psi_y^{-1}[z, y] \in \mathcal{F}_{\alpha_0}^{uu}(y)$ .

**Observação 3.22.** A projeção ao longo das órbitas comuta com a ação dos subcone regular. Ou seja, dados  $y \in \mathcal{F}_\alpha^{uu}(x_i)$  e  $z \in \mathcal{F}_\alpha^{ss}(x_i)$ , segue da definição da projeção  $\Psi_{\phi^{tv}(z)}^{-1}$  que para todo  $t \in [-2q, \tau + 2q]$  e  $v \in \mathcal{U}$  temos

$$\phi^{tv} \circ \Psi_z^{-1}[y, z] = \Psi_{\phi^{tv}(z)}^{-1} \circ \phi^{tv}[y, z].$$

Considere os seguintes conjuntos  $J = \{1, \dots, l\}$  e  $Q = \mathbb{R}_+^k \cap \overline{B_\tau(0)}$ . Para nossa construção é importante garantir que a cada ponto está associado uma translação de uma seção  $\Sigma_i^0$  que contém tal ponto a uma distância fixa do seu bordo.

**Lema 3.23.** *Existe  $a > 0$  e uma aplicação  $F : M \rightarrow J \times Q$  de modo que*

1.  $x \in \Sigma_{F(x)}^0$ ;
2.  $\mathcal{F}_a^{ss}(z) \subset [z, D_{F(x)}^0], \forall z \in [C_{F(x)}^0, x]$ ;
3.  $\mathcal{F}_a^{uu}(y) \subset \Psi_y^{-1}[C_{F(x)}^0, y], \forall y \in [x, D_{F(x)}^0]$ .

*Demonstração.* Dada a cobertura  $\{\text{int } V_i^0\}_{i=1}^l$  seja  $b > 0$  o seu número de Lebesgue. Tome  $a > 0$  tal que

$$\max\{d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\} < a \Rightarrow d([x_1, y_1], [x_2, y_2]) < b.$$

Para  $x \in M$  escolha  $i = i(x) \in J$  de modo que

$$B_b(x) \subset V_i^0 = \bigcup_{t \in Q} \phi^{-t} \Sigma_i^0.$$

Seja  $t = t(x) \in Q$  tal que  $x \in \Sigma_{it}^0$  e definimos  $F(x) = (i(x), t(x))$  da forma escolhida. Note que,  $x \in \Sigma_{F(x)}^0$  implica que  $x = [x_1, x_2]$  com  $x_1 \in C_{F(x)}^0$  e  $x_2 \in D_{F(x)}^0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \left[ C_{F(x)}^0, x \right] &= \{[y, [x_1, x_2]] = [y, x_2] \mid y \in C_{F(x)}^0\} = \left[ C_{F(x)}^0, x_2 \right], \\ \left[ x, D_{F(x)}^0 \right] &= \{[[x_1, x_2], y] = [x_1, y] \mid y \in D_{F(x)}^0\} = \left[ x_1, D_{F(x)}^0 \right]. \end{aligned}$$

Afirmamos que para todo  $z \in [C_{F(x)}^0, x]$  vale que  $\mathcal{F}_a^{ss}(z) \subset [z, D_{F(x)}^0]$ . De fato, como  $z = [w, x]$  com  $w \in C_{F(x)}^0$  temos  $[z, D_{F(x)}^0] = [w, D_{F(x)}^0]$  e  $[x, z] = [x, [w, x]] = x$ . Dado  $y \in \mathcal{F}_a^{ss}(z)$  temos

$$d([x, y], x) = d([x, y], [x, z]) < b \Rightarrow [x, y] \in \mathcal{F}_b^{ss}(x) \subset \Sigma_{F(x)}^0.$$

Assim,  $[x, y] = [z_1, z_2]$  com  $z_1 \in C_{F(x)}^0$  e  $z_2 \in D_{F(x)}^0$ . Desse modo,

$$y = [z, y] = [z, [x, y]] = [z, z_2].$$

Concluindo a prova do item *ii*), ou seja,  $\mathcal{F}_a^{ss}(z) \subset [z, D_{F(x)}^0]$ . Para o item *iii*), dado  $y \in [x, D_{F(x)}^0]$  existe  $\bar{y} \in D_{F(x)}^0$  tal que  $y = [x, \bar{y}]$ . Note que,  $[y, x] = [[x, \bar{y}], x] = x$  e para qualquer  $z \in \mathcal{F}_a^{uu}(y)$  temos

$$d([z, x], x) = d([z, x], [z, y]) < b \Rightarrow [z, x] \in \mathcal{F}_b^u(x) \subset \text{int}V_i^0.$$

Dessa maneira, existem  $w_1 \in C_{i(x)}^0, w_2 \in D_{i(x)}^0$  e  $s \in \mathcal{Q}$  tal que  $[z, x] = [\phi^{-s}w_1, \phi^{-s}w_2]$ . E, por sua vez, garante que

$$z = [z, y] = [[\phi^{-s}w_1, \phi^{-s}w_2], y] = [\phi^{-s}w_1, y] \in [\phi^{-s}C_{i(x)}^0, y].$$

Finalmente, projetando pela órbita obtemos o resultado desejado.  $\square$

Nosso próximo objetivo é obter a propriedade hiperbólica para as holonomias gerada pelo conjunto de direções  $\mathcal{U}$ . Essa propriedade será primeiro obtida para  $m\mathcal{U}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  satisfazendo a propriedade da observação a seguir.

**Observação 3.24.** Dado  $v = \sum t_i u_i \in \mathcal{U}$  seja  $m(v) \in \mathbb{Z}_+$  de modo que

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda(t_1 + \dots + t_k)m(v)j} < \frac{a}{\alpha_0}.$$

Devido a continuidade da aplicação exponencial, podemos fixar a constante inteira  $m(v)$  e encontrar uma vizinhança  $U = U(v, m(v))$  de  $v$  em  $\mathbb{R}^k$  tal que para  $u = s_1 u_1 + \dots + s_k u_k \in U$  ainda válido  $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda(s_1 + \dots + s_k)m(v)j} < \frac{a}{\alpha_0}$ . Como o conjunto  $\mathcal{U}$  é compacto em  $\mathbb{R}^k$ , existem inteiros positivos  $m_1, \dots, m_p$  e abertos  $U_1, \dots, U_p$  com a propriedade acima que formam uma cobertura de  $\mathcal{U}$ . Assim, tomando  $m = \text{mmc} \{m_1, \dots, m_p\}$ , segue que para todo  $v \in \mathcal{U}$  temos  $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda(t_1 + \dots + t_k)mj} < \frac{a}{\alpha_0}$ .

**2<sup>a</sup> Etapa:** Dados  $v \in \mathcal{U}$ ,  $v = \sum t_i u_i$ , e  $m \in \mathbb{Z}$  satisfazendo a Observação 3.24, associamos o difeomorfismo  $g_v = \phi^{-mv} : M \rightarrow M$  e a constante  $\xi_v = e^{-\lambda(t_1 + \dots + t_k)m}$ . Nessa etapa construiremos a partir de  $D_i^0$  um conjunto  $D_{iv}^0$  que terá a propriedade de expansão para o difeomorfismo  $g_v$ . No Lema 3.25 obtemos uma cobertura específica do  $g_v(D_i^0)$ , a partir da qual geramos uma cadeia crescente de  $D_{iv}^n$ . A seguir, no Lema 3.26 verificamos que tal crescimento é controlado e, conseqüentemente o produto local esta bem definido para todo  $n$ . Por fim, no Lema 3.28 verificamos a propriedade de expansão para  $D_i^v$ .

**Lema 3.25.** Para cada índice  $i$  em  $\{1, \dots, l\}$  podemos encontrar pontos  $\{y_{ij}\}_{j=1}^{s_i(v)}$  em  $\mathcal{F}_\beta^{ss}(x_i)$  tais que

1.  $g_v(D_i^0) \cap [g_v(y_{ij}), D_{F(g_v(y_{ij}))}^0] \neq \emptyset$ ;

$$2. g_v(D_i^0) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} [g_v(y_{ij}), D_{F(g_v(y_{ij}))}^0].$$

*Demonstração.* Para cada  $z \in D_i^0$  defina

$$U_z = [g_v(z), D_{F(g_v(z))}^0].$$

Como  $g_v(z) \in \Sigma_{F(g_v(z))}^0$  existem pontos  $x_1(z) \in C_{F(g_v(z))}^0$  e  $x_2(z) \in D_{F(g_v(z))}^0$  satisfazendo  $g_v(z) = [x_1(z), x_2(z)]$ . Logo,

$$[g_v(z), D_{F(g_v(z))}^0] = [x_1, D_{F(g_v(z))}^0].$$

Consequentemente, segue das hipóteses de construção que  $\text{diam } U_z \leq \frac{\beta}{2}$ , que por sua vez implica que  $g_v^{-1}U_z \subset \mathcal{F}_{\xi_v \frac{\beta}{2}}^{ss} \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{ss}(x_i)$ . A família  $\{g_v^{-1}U_z\}_{z \in D_i^0}$  é uma coleção de subconjuntos fechados cujo interior em  $\mathcal{F}_{\xi_v \frac{\beta}{2}}^{ss} \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{ss}(x_i)$  cobre  $D_i^0$ . Dada uma subcobertura finita  $g_v^{-1}U_{z_1}, \dots, g_v^{-1}U_{z_{s_i(v)}}$  de  $D_i^0$ , tome os pontos

$$y_{i,j} = g_v^{-1}[g_v(z_j), x_{F(g_v(z_j))}], \quad x_{F(z)} = \phi^{-t(z)}(x_{i(z)})$$

Como  $x_1(z_j) \in C_{F(g_v(z_j))}^0$  temos que  $g_v(y_{ij}) \in C_{F(g_v(z_j))}^0$ . De fato,

$$g_v(y_{ij}) = [g_v(z_j), x_{F(g_v(z_j))}] = [[x_1, x_2], x_{F(g_v(z_j))}] = [x_1, x_{F(g_v(z_j))}] = x_1(z_j).$$

Pela escolha dos pontos temos  $F(g_v(y_{i,j})) = F(g_v(z_j))$  e, portanto

$$[g_v(y_{i,j}), D_{F(g_v(y_{i,j}))}^0] = [[g_v(z_j), x_{F(g_v(z_j))}], D_{F(g_v(z_j))}^0] = [g_v(z_j), D_{F(g_v(z_j))}^0].$$

□

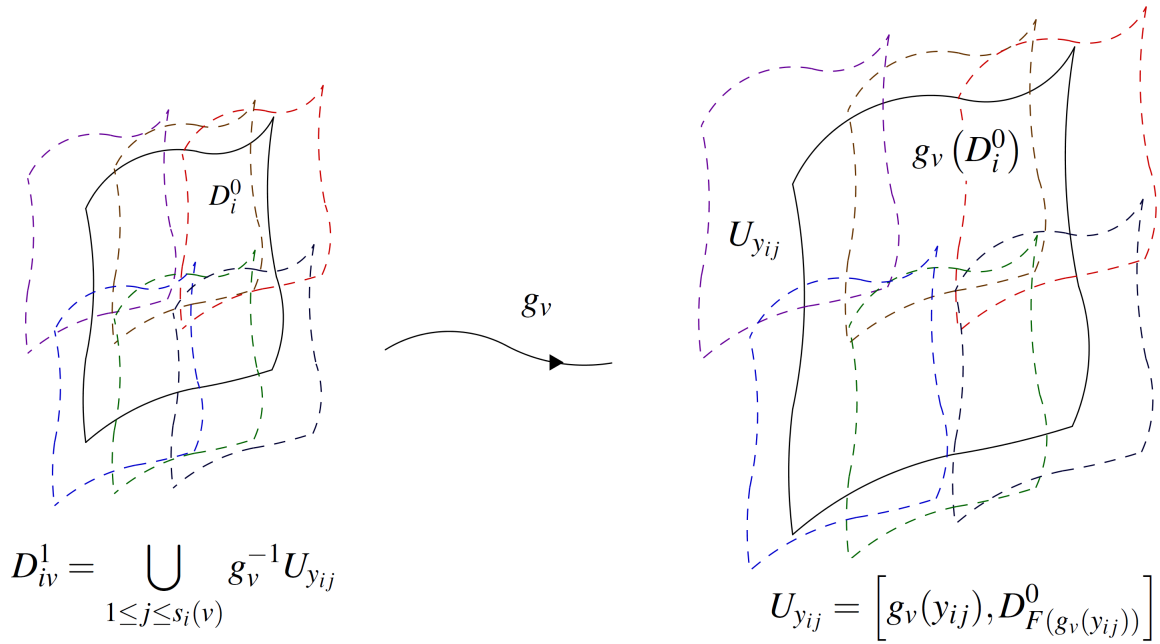
Definimos o primeiro acréscimo de  $D_i^0$  a seguir. Um ideia geométrica do conjunto  $D_{iv}^1$  é apresentado na Figura 7.

$$\begin{aligned} D_{iv}^1 &= \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} g_v^{-1} [g_v(y_{i,j}), D_{F(g_v(y_{i,j}))}^0], \\ D_{ivt}^1 &= \phi^{-t}(D_{iv}^1), \quad t \in \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Utilizando a indução, definimos o  $n$ -ésimo acréscimo por

$$\begin{aligned} D_{iv}^n &= \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(t)} g_v^{-1} [g_v(y_{i,j}), D_{F(g_v(y_{i,j}))}^{n-1}], \\ D_{ivt}^n &= \phi^{-t}(D_{iv}^{n-1}), \quad t \in \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos a construção é necessário garantirmos a boa definição da cadeia crescente  $D_{iv}^n$ .

Figura 7 – Conjunto  $D_{iv}^1$ 

**Lema 3.26.** Dados  $n \geq 1$ ,  $t$  em  $Q$  e  $y$  em  $\mathcal{F}_\beta^{uu}(x_i)$  então  $[y, D_{iv}^n] = \overline{\text{int}} [y, D_{iv}^n]$  em  $\mathcal{F}_\beta^{ss}(y)$  e valem as seguintes inclusões:

1.  $[y, D_{iv}^n] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v+\dots+\xi_v^n)\frac{\beta}{2}}^{ss}(y)$ ;
2.  $\phi^{-t}[y, D_{iv}^n] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v+\dots+\xi_v^n)\frac{\beta}{2}}^{ss}(\phi^{-t}y)$ .

*Demonstração.* A demonstração desse resultado será feita por indução. Como  $y \in \mathcal{F}_\beta^{uu}(x_i)$  e  $y_{ij} \in \mathcal{F}_\beta^{ss}(x_i)$  temos  $[y, y_{ij}] \in \mathcal{F}_{2\beta}^{ss} \cap \mathcal{F}_{2\beta}^u(y_{ij})$  e conseqüentemente  $g_v[y, y_{ij}] \in \mathcal{F}_{2\beta}^u(g_v(y_{ij}))$ . Além disso, pelas hipóteses sobre a constante  $\beta > 0$  vale  $\psi_{y_{ij}}^{-1}[y, y_{ij}] \in \mathcal{F}_{\alpha_0}^{uu}(y_{ij})$  e

$$g_v(\psi_{y_{ij}}^{-1}[y, y_{ij}]) \in \mathcal{F}_{\xi_v \alpha_0}^{uu}(g_v(y_{ij})) \subset \mathcal{F}_a^{uu}(g_v(y_{ij})) \subset \psi_{g_v(y_{ij})}^{-1} [C_{g_v(y_{ij})}^0, g_v(y_{ij})] = C_{g_v(y_{ij})}^0.$$

Uma vez que,  $g_v \circ \psi_{y_{ij}}^{-1}[y, y_{ij}] = \psi_{g_v(y_{ij})}^{-1} \circ g_v[y, y_{ij}]$  podemos garantir  $g_v[y, y_{ij}] \in \Sigma_{F(g_v(y_{ij}))}^0$ . Sendo  $2\beta < \alpha_6$  segue do Lema 3.6 e da Proposição 3.8 que

$$\begin{aligned} g_v[y, D_{iv}^1] &= \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} \left[ g_v[y, y_{ij}], \left[ g_v(y_{ij}), D_{F(g_v(y_{ij}))}^0 \right] \right] \\ &= \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} \left[ g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^0 \right]. \end{aligned}$$

A demonstração do Lema 3.25 garante que existe um ponto  $z_j \in D_i^0$  que satisfaz

$$g_v(z_j) \in g_v(D_i^0) \cap \left[ g_v(y_{ij}), D_{F(g_v(y_{ij}))}^0 \right].$$

Utilizando novamente o Lema 3.6 e que existe  $w \in D_{F(g_v(y_{ij}))}^0$  tal que  $g_v(z_j) = [g_v(y_{ij}), w]$  obtemos

$$\begin{aligned} q &= g_v[y, z_j] = g_v[[y, y_{ij}], z_j] \\ &= [g_v[y, y_{ij}], g_v(z_j)] = [g_v[y, y_{ij}], [g_v(y_{ij}), w]] \\ &= [g_v[y, y_{ij}], w] \in g_v[y, D_i^0] \cap [g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^0]. \end{aligned}$$

Para todo  $u \in D_{F(g_v(y_{ij}))}^0$ , vale

$$[g_v[y, y_{ij}], u] = [[g_v[y, y_{ij}], w], u] = [q, u].$$

O que implica,

$$[g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^0] = [q, D_{F(g_v(y_{ij}))}^0] \subset \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{ss}(q) \subset \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{ss}(g_v[y, D_i^0]).$$

Variando o índice  $j$  verificamos a seguinte inclusão.

$$g_v[y, D_{iv}^1] = \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} [g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^0] \subset \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{ss}(g_v[y, D_i^0]).$$

Como  $[y, D_i^0] \subset \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{ss}(y)$ , pela observação inicial e pelo item 5 do Lema 3.4 obtemos

$$[y, D_{iv}^1] \subset \mathcal{F}_{\frac{\xi_v \beta}{2}}^{ss}[y, D_i^0] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v)\frac{\beta}{2}}^{ss}(y).$$

Analogamente, dado  $y \in \mathcal{F}_{\beta}^{uu}(x_i)$  e  $t \in Q$  temos  $\phi^{-t}[y, D_{iv}^1] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v)\frac{\beta}{2}}^{ss}(\phi^{-t}(y))$ . De fato,

$$\begin{aligned} g_v \circ \phi^{-t}[y, D_{iv}^1] &= \phi^{-t} \circ g_v[y, D_{iv}^1] \\ &= \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} \phi^{-t}[g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^0] \\ &= \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} \phi^{-t}[g_v[y, z_j], D_{F(g_v(y_{ij}))}^0] \\ &\subset \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{ss}(\phi^{-t} \circ g_v[y, z_j]) \\ &\subset \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{ss}(g_v \circ \phi^{-t}[y, D_i^0]). \end{aligned}$$

Suponha agora  $n \geq 2$  e que o resultado é válido para  $n-1$ , ou seja, para  $t \in Q$  e  $y \in \mathcal{F}_{\beta}^{uu}(x_i)$  temos

$$[y, D_{iv}^{n-1}] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v+\dots+\xi_v^{n-1})\frac{\beta}{2}}^{ss}(y) \text{ e } \phi^{-t}[y, D_{iv}^{n-1}] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v+\dots+\xi_v^{n-1})\frac{\beta}{2}}^{ss}(\phi^{-t}(y)).$$



Em particular, para cada  $j$  vale

$$\begin{aligned} \left[ g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^{n-1} \right] &= \left[ g_v[y, z_j], D_{F(g_v(y_{ij}))}^{n-1} \right] \\ &\subset \mathcal{F}_{(1+\dots+\xi_v^{n-1})\frac{\beta}{2}}^{ss}(g_v[y, z_j]) \\ &\subset \mathcal{F}_{(1+\dots+\xi_v^{n-1})\frac{\beta}{2}}^{ss}(g_v[y, D_i^0]). \end{aligned}$$

Pelo Proposição 3.8 segue

$$g_v[y, D_{iv}^n] = \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} \left[ g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^{n-1} \right].$$

Dessa maneira,

$$g_v[y, D_{iv}^n] \subset \mathcal{F}_{(1+\dots+\xi_v^{n-1})\frac{\beta}{2}}^{ss}(g_v[y, D_i^0]).$$

Por fim, aplicando  $g_v^{-1}$  e o Lema 3.4 temos

$$\begin{aligned} [y, D_{iv}^n] &\subset \mathcal{F}_{\xi_v(1+\dots+\xi_v^{n-1})\frac{\beta}{2}}^{ss}([y, D_i^0]) \\ &\subset \mathcal{F}_{(\xi_v+\dots+\xi_v^n)\frac{\beta}{2}}^{ss} \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{ss}(y) \\ &\subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v+\dots+\xi_v^n)\frac{\beta}{2}}^{ss}(y). \end{aligned}$$

Analogamente, provamos  $\phi^{-t}[y, D_{iv}^n] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v+\dots+\xi_v^n)\frac{\beta}{2}}^{ss}(\phi^{-t}(y))$ . A propriedade do interior denso segue da construção e do fato do produto local ser um homeomorfismo local.  $\square$

**Observação 3.27.** Por construção a sequência de conjuntos  $D_{iv}^n$  é encaixada, isto é,

$$D_i^0 \subset D_{iv}^1 \subset \dots \subset D_{iv}^n \subset \dots$$

Note que para todo  $n \geq 0$  vale  $D_{iv}^n \subset \mathcal{F}_{\beta}^{ss}(x_i)$  e, conseqüentemente o conjunto  $D_i^y = \overline{\bigcup_{n \geq 0} D_{iv}^n}$  também está contido em  $\overline{\mathcal{F}_{\beta}^{ss}(x_i)}$ . O conjunto  $D_i^y$  satisfaz  $D_i^y = \overline{\text{int } D_i^y}$  em  $\mathcal{F}_{\beta}^{ss}(x_i)$ . De fato, como  $\bigcup_{n \geq 0} \text{int } D_{iv}^n \subset \text{int } D_i^y$  dado  $y \in D_i^y$  e uma vizinhança qualquer de  $y$   $\mathcal{F}_{\beta}^{ss}(x_i)$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  temos  $U \cap D_{iv}^n \neq \emptyset$  e conseqüentemente  $U \cap \text{int } D_{iv}^n \neq \emptyset$ . Portanto,  $\bigcup_{n \geq 0} \text{int } D_{iv}^n$  é denso em  $D_i^y$  o que implica a densidade de  $\text{int } D_i^y$ .

O próximo lema garante a propriedade de expansão na direção de  $v \in \mathcal{U}$  fixado inicialmente.

**Lema 3.28.** *Seja  $z$  em  $[\mathcal{F}_{\beta}^{uu}(x_i), D_i^y]$ , para  $j(z)$  em  $J$  e  $t(z)$  pertencente a  $\mathbb{R}_+^k \cap \overline{B_{2q+\tau}(0)}$  ou  $\mathbb{R}_-^k \cap \overline{B_{2q}(0)}$  de modo que  $[C_{t(z)j(z)}^0, D_{t(z)j(z)}^y]$  contém  $g_v(z)$ . Temos*

1.  $j(z) = j[z, x_i]$ ;

$$2. g_v[z, D_i^v] \supset [g_v, D_{t(z)j(z)}].$$

*Demonstração.* Tomando  $y = [z, x_i]$  segue que  $[z, D_i^v] = [y, D_i^v]$ , além disso

$$\begin{aligned} g_v[y, D_i^v] &= \overline{\bigcup_{n>0} g_v[y, D_{iv}^n]} \\ &= \overline{\bigcup_{n>0} \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} [g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^{n-1}]} \\ &= \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} \overline{\bigcup_{n>0} [g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^{n-1}]} \\ &= \bigcup_{1 \leq j \leq s_i(v)} [g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^v]. \end{aligned}$$

Os passos são justificados devido ao produto local ser um homeomorfismo local. Como  $z \in [y, D_i^v]$ , para algum  $j(z)$  e  $t(z)$  temos  $g_v(z) \in [g_v[y, y_{ij}], D_{F(g_v(y_{ij}))}^v] \subset [C_{t(z)j(z)}^0, D_{t(z)j(z)}^v]$ .

Dessa maneira, obtemos o resultado desejado

$$g_v[z, D_i^v] = g_v[y, D_i^v] \supset [g_v[y, y_{ij}], D_{t(z)j(z)}^v] = [g_v(z), D_{t(z)j(z)}^v].$$

□

**3ª Etapa:** Agora repetiremos a etapa anterior, ou seja, apresentamos a versão dos Lemas 3.25, 3.26 e 3.28 para o conjunto  $C_i^0$ . Como desejamos exibir a cadeia crescente de conjuntos  $C_{iv}^n$  utilizaremos a aplicação inversa  $g_v^{-1}$ . As ideias são basicamente as mesmas, todavia agora é necessário tomar o cuidado de projetarmos ao longo das órbitas sobre a folheação  $\mathcal{F}^{uu}$ .

**Lema 3.29.** Para cada índice  $i$  em  $\{1, \dots, l\}$  podemos encontrar pontos  $\{w_{ij}\}_{j=1}^{r_i(v)}$  em  $\mathcal{F}_\beta^{uu}(x_i)$  tais que

1.  $g_v^{-1}(C_i^0) \cap \psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1} [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0, g_v^{-1}(w_{ij})] \neq \emptyset$ ;
2.  $g_v^{-1}(C_i^0) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq r_i(v)} \psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1} [C_{F(g_v(y_{ij}))}^0, g_v^{-1}(w_{ij})]$ .

*Demonstração.* Para cada  $z \in C_i^0$  temos que  $g_v^{-1}(z) \in \Sigma_{F(g_v^{-1}(z))}^0$  e os conjuntos

$$\psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} [C_{F(g_v^{-1}(z))}^0, g_v^{-1}(z)] \subset \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{uu}(g_v^{-1}(z))$$

formam uma cobertura por conjuntos fechados em  $\mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{uu}(g_v^{-1}(z))$  cujo interior cobre  $g_v^{-1}(C_i^0)$ . Por compacidade existem pontos  $w_{i1}, \dots, w_{ir}$  que definem uma subcobertura finita desejada. □

Utilizando o Lema 3.29, definimos o primeiro acréscimo de  $C_i^0$  a seguir.

$$\begin{aligned}
C_{iv}^1 &= \bigcup_{1 \leq j \leq r_i(v)} g_v^{-1} \circ \psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0, g_v^{-1}(w_{ij}) \right] \\
&= \bigcup_{1 \leq j \leq r_i(v)} \psi_{w_{ij}}^{-1} \circ g_v^{-1} \left[ C_{F(g_v(w_{ij}))}^0, g_v^{-1}(w_{ij}) \right] \\
C_{ivt}^1 &= \phi^{-t}(C_{iv}^1).
\end{aligned}$$

Por indução, obtemos o  $n$ -ésimo acréscimo de  $C_i^0$ .

$$\begin{aligned}
C_{iv}^n &= \bigcup_{1 \leq j \leq r_i(v)} g_v^{-1} \circ \psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^{n-1}, g_v^{-1}(w_{ij}) \right] \\
&= \bigcup_{1 \leq j \leq r_i(v)} \psi_{w_{ij}}^{-1} \circ g_v^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^{n-1}, g_v^{-1}(w_{ij}) \right] \\
C_{ivt}^n &= \phi^{-t}(C_{iv}^{n-1}).
\end{aligned}$$

No lema a seguir, garantimos a boa definição da cadeia crescente  $C_{iv}^n$ .

**Lema 3.30.** Para cada  $n \geq 1$ , tem  $Q$  e  $y$  em  $\mathcal{F}_\beta^{ss}(x_i)$  temos  $[C_{iv}^n, y] = \overline{\text{int}} [C_{iv}^n, y]$  em  $\mathcal{F}_\beta^{uu}(y)$  e as seguintes inclusões são válidas:

1.  $\psi_y^{-1} [C_{iv}^n, y] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v+\dots+\xi_v^n)\frac{\beta}{2}}^{uu}(y)$ ;
2.  $\phi^{-t} \psi_y^{-1} [C_{iv}^n, y] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v+\dots+\xi_v^n)\frac{\beta}{2}}^{uu}(\phi^{-t}y)$ .

*Demonstração.* Da mesma maneira ao feito para  $D_{iv}^n$ , iremos provar o resultado por indução. Como  $[w_{ij}, y] \in \mathcal{F}_{\alpha_0}^{ss}(w_{ij})$  segue que da hipótese sobre a constante  $\xi_v$  que

$$g_v^{-1}[w_{ij}, y] \in \mathcal{F}_{\xi_v \alpha_0}^{ss}(g_v^{-1}w_{ij}) \subset \mathcal{F}_a^{ss}(g_v^{-1}w_{ij}) \subset \left[ g_v^{-1}w_{ij}, D_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0 \right].$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
g_v^{-1} \circ \psi_y^{-1} [C_{iv}^1, y] &= \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \left( \bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \left[ \psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0, g_v^{-1}(w_{ij}) \right], g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right] \right) \\
&= \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \left( \bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1} \left[ \psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0, g_v^{-1}(w_{ij}) \right], g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right] \right).
\end{aligned}$$

De fato, a igualdade acima é devido ao seguinte fato. Por definição dado  $x \in C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0$  o ponto  $\psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1}[x, g_v^{-1}(w_{ij})]$  é a projeção do ponto  $[x, g_v^{-1}(w_{ij})] \in \mathcal{F}^u(g_v^{-1}(w_{ij}))$  ao longo de sua órbita na folha forte  $\mathcal{F}^{uu}(g_v^{-1}(w_{ij}))$ . Por construção, o ponto  $\psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1}[x, g_v^{-1}(w_{ij})]$  pertence

ao  $\mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{uu}(g_v^{-1}(w_{ij}))$  e existe um vetor  $t = t(x, g_v^{-1}(w_{ij})) \in \mathbb{R}^k$  de modo que  $\psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1}[x, g_v^{-1}(w_{ij})]$  esta em  $\mathcal{F}_{\alpha_0}^{ss}(\phi^t x)$ .

Dessa maneira, para cada  $x \in C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0$  existe  $t = t(x, g_v^{-1}(w_{ij})) \in \mathbb{R}^k$  tal que

$$\psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1}[x, g_v^{-1}(w_{ij})] = \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{uu}(g_v^{-1}(w_{ij})) \cap \mathcal{F}_{\alpha_0}^{ss}(\phi^t x) = [\phi^t x, g_v^{-1}(w_{ij})].$$

Como a aplicação  $\psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1}$  é a projeção ao longo da órbita sobre  $\mathcal{F}_{\alpha_0}^{uu}(g_v^{-1}[w_{ij}, y])$  obtemos o seguinte.

$$\begin{aligned} \psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1} \left[ \psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1}[x, g_v^{-1}(w_{ij})], g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right] &= \psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1} \left[ [\phi^t x, g_v^{-1}(w_{ij})], g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right] \\ &= \psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1} [\phi^t x, g_v^{-1}[w_{ij}, y]] \\ &= \psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1} [x, g_v^{-1}[w_{ij}, y]] \end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que

$$\psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1} \left[ \psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0, g_v^{-1}(w_{ij}) \right], g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right] = \psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0, g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right].$$

A aplicação  $\psi^{-1}$  é a projeção ao longo da órbita dada pela ação. Uma vez que  $g_v^{-1}[w_{ij}, y]$  pertence  $\mathcal{F}_{\alpha_3}^u(g_v^{-1}(y))$  temos que  $\psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ \psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1} = \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1}(g_v^{-1}[w_{ij}, y])$ . Repetindo o argumento acima temos,

$$\psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ \psi_{g_v^{-1}[w_{ij}, y]}^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0, g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right] = \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \left( \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right) \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0, \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right].$$

Assim, podemos obter a contenção a seguir que praticamente concluir parte do resultado.

$$\begin{aligned} g_v^{-1} \circ \psi_y^{-1} [C_{iv}^1, y] &= \bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \psi_{(\psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ g_v^{-1}[w_{ij}, y])}^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0, \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right] \\ &\subset \bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{uu} \left( \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right) \\ &\subset \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}^{uu} (g_v^{-1} \circ \psi_y^{-1} [C_i^0, y]). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi_y^{-1} [C_{iv}^1, y] \subset \mathcal{F}_{\xi_v \frac{\beta}{2}}^{uu} (\psi_y^{-1} [C_i^0, y]) \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v) \frac{\beta}{2}}^{uu} (y).$$

De maneira análoga concluímos a inclusão  $\phi^{-t} \psi_y^{-1} [C_{iv}^1, y] \subset \mathcal{F}_{(1+\xi_v) \frac{\beta}{2}}^{uu} (\phi^{-t} y)$ . Supondo o resultado válido para  $n-1$ , verificamos o passo indutivo uma vez que é válido o seguinte.

$$\begin{aligned} g_v^{-1} \circ \psi_y^{-1} [C_{iv}^n, y] &= \bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \psi_{(\psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ g_v^{-1}[w_{ij}, y])}^{-1} \left[ C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^{n-1}, \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right] \\ &\subset \bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \mathcal{F}_{(1+\dots+\xi_v^{n-1}) \frac{\beta}{2}}^{uu} \left( \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1} \circ g_v^{-1}[w_{ij}, y] \right) \\ &\subset \mathcal{F}_{(1+\dots+\xi_v^{n-1}) \frac{\beta}{2}}^{uu} (g_v^{-1} \circ \psi_y^{-1} [C_i^0, y]). \end{aligned}$$

O mesmo podemos dizer com respeito a  $\phi^{-t} \psi_y^{-1} [C_{iv}^n, y]$ . A igualdade  $[C_{iv}^n, y] = \overline{\text{int} [C_{iv}^n, y]}$  em  $\mathcal{F}_\beta^{uu}(y)$  é devido ao fato do produto local ser um homeomorfismo local e pela construção se tratar de uniões finitas de conjuntos que satisfazem a propriedade.  $\square$

**Observação 3.31.** Considere a cadeia encaixada  $C_i^0 \subset C_{iv}^1 \subset \dots \subset C_{iv}^n \subset \dots$  a qual satisfaz  $C_{iv}^n = \overline{\text{int} C_{iv}^n}$  em  $\mathcal{F}_\beta^{uu}(x_i)$ . De modo análogo ao que foi feito na Observação 3.27 para  $D_i^v$ , obtemos que o conjunto  $C_i^v = \bigcup_{n \geq 0} C_{iv}^n$  também satisfaz  $C_i^v = \overline{\text{int} C_i^v}$  em  $\mathcal{F}_\beta^{uu}(x_i)$ .

Por fim, mostramos que na direção  $v$  o conjunto  $C_i^v$  satisfaz a propriedade de expansão.

**Lema 3.32.** Seja  $z$  em  $[C_i^v, \mathcal{F}_\beta^{ss}(x_i)]$ , para algum  $j(z)$  em  $J$  e  $t(z)$  pertencente ao  $\mathbb{R}_+^k \cap \overline{B_{q+\tau}(0)}$  ou  $\mathbb{R}_-^k \cap \overline{B_q(0)}$  de modo que  $[C_{t(z)j(z)}^v, D_{t(z)j(z)}^0]$  contém  $g_v^{-1}(z)$  então

$$1. \quad g_v^{-1} \psi_z^{-1} [C_i^v, z] \supset \psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} [C_{t(z)j(z)}^v, g_v^{-1}(z)].$$

*Demonstração.* Dado qualquer  $w \in C_i^v$ , como  $\psi_z^{-1} [w, z] \in \mathcal{F}^{uu}(z)$  o iterado  $g_v^{-1} \psi_z^{-1} [w, z]$  pertence a folha  $\mathcal{F}^{uu}(g_v^{-1}(z))$ . Tomando  $y = [x_i, z]$  temos que  $\psi_z^{-1} [C_i^v, z] = \psi_z^{-1} [C_i^v, y]$  e que  $g_v^{-1} [w_{ij}, y] \in [g_v^{-1}(w_{ij}), D_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0]$ . Dessa maneira,

$$\begin{aligned} g_v^{-1} \circ \psi_z^{-1} [C_i^v, y] &= \psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} \left( \overline{\bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \psi_{g_v^{-1}(w_{ij}, y)}^{-1} \left[ \psi_{g_v^{-1}(w_{ij})}^{-1} [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^{n-1}, g_v^{-1}(w_{ij})], g_v^{-1} [w_{ij}, y] \right]} \right) \\ &= \psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} \left( \overline{\bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \bigcup_{n \geq 0} \psi_{g_v^{-1}(w_{ij}, y)}^{-1} [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^{n-1}, g_v^{-1} [w_{ij}, y]]} \right) \\ &= \psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} \left( \bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \psi_{g_v^{-1}(w_{ij}, y)}^{-1} [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^v, g_v^{-1} [w_{ij}, y]] \right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{r_i(v)} \psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^v, g_v^{-1} [w_{ij}, z]] \end{aligned}$$

Como  $z \in [C_i^v, y]$ , para algum  $j$  temos  $g_v^{-1}(z) \in \psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^v, g_v^{-1} [w_{ij}, z]]$ .

Por fim, sendo  $\psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} (g_v^{-1}(z)) = g_v^{-1}(z)$  obtemos

$$g_v^{-1}(z) \in [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^v, g_v^{-1} [w_{ij}, z]] \subset [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^v, D_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^0].$$

Que por sua vez, nos permite concluir

$$\begin{aligned} g_v^{-1} \circ \psi_z^{-1} [C_i^v, z] &\supset \psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^v, g_v^{-1} [w_{ij}, z]] \\ &= \psi_{g_v^{-1}(z)}^{-1} [C_{F(g_v^{-1}(w_{ij}))}^v, g_v^{-1}(z)]. \end{aligned}$$

$\square$

**4ª Etapa:** Iremos estender a propriedade hiperbólica para todo conjunto  $\mathcal{U}$ . Note que, obtemos uma nova família de seções retangulares completa  $\{\Sigma_i^v = [C_i^v, D_i^v]\}$  tal que por construção  $\Sigma_i^v = \overline{\text{int } \Sigma_i^v}$  para todo  $i$ . Considere a seguinte família de seções transladadas.

$$\kappa_{[-q, \tau+q]}^v = \{ \phi^{-tu} \Sigma_i^v \mid t \in [-q, \tau+q], u \in \mathcal{U}, i = 1, \dots, l \}$$

Unindo os Lemas 3.28 e 3.32, obtemos a seguinte condição hiperbólica na coleção  $\kappa_{[-q, \tau+q]}^v$ .

**Proposição 3.33.** *Sejam  $y$  em  $\Sigma_i^v$ , índices  $j, r$  e vetores  $t_1, t_2$ . Então,*

1. Para  $\Sigma_{t_1 j}^v$  em  $\kappa_{[-q, \tau+q]}^v$  contendo  $g_v(y)$ , temos  $g_v[y, D_i^v] \supset [g_v(y), D_{t_1 j}^v]$ ;
2. Para  $\Sigma_{t_2 r}^v$  em  $\kappa_{[-q, \tau+q]}^v$  contendo  $g_v^{-1}(y)$ , temos  $g_v^{-1} \psi_y^{-1}[C_i^v, y] \supset \psi_{g_v^{-1}(y)}^{-1}[C_{t_2 r}^v, g_v^{-1}(y)]$ .

Até o momento não foi colocada nenhuma hipótese sobre a escolha da base  $u_1, \dots, u_k$  formada por elementos de Anosov. Todavia, a fim de estendermos a proposição acima para o conjunto  $\mathcal{U}$  será necessário limitarmos o diâmetro de  $\mathcal{U}$  segundo a observação abaixo.

**Observação 3.34.** Suponha que existam seções retangulares  $\Sigma_1 = [C_1, D_1]$ ,  $\Sigma_2 = [C_2, D_2]$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$  e um elemento de Anosov  $v \in \mathcal{U}$  com  $\|v\| = 1$  de modo que para  $x \in \text{int} \Sigma_1 \cap \phi^{mv} \text{int} \Sigma_2$  tenhamos  $\phi^{-mv}[x, D_1] \supset [\phi^{-mv}(x), D_2]$ . Devido a continuidade da ação e do produto local, existe  $\xi_0 > 0$  tal que se  $\|u - v\| < \xi_0$  temos que  $u \in \mathcal{S}$  e  $\phi^{-mu}[x, D_1] \supset [\phi^{-mu}(x), \phi^t D_2]$ , para algum  $t \in \mathcal{S}$ . De modo análogo, a menos de reduzirmos  $\xi_0 > 0$  temos para

$$x \in \text{int} \Sigma_1 \cap \phi^{-mv} \text{int} \Sigma_2$$

tal que  $\phi^{mv} \circ \psi_x^{-1}[C_1, x] \supset \psi_{\phi^{mv}(x)}^{-1}[C_2, \phi^{mv}(x)]$  segue que para  $\|u - v\| < \xi_0$  então  $u \in \mathcal{S}$  e  $\phi^{mu} \circ \psi_x^{-1}[C_1, x] \supset \psi_{\phi^{mu}(x)}^{-1}[\phi^s C_2, \phi^{mu}(x)]$  para algum  $s \in \mathcal{S}$ .

Assim, iremos supor que a base  $u_1, \dots, u_k$ , que gera o conjunto  $\mathcal{U}$ , é escolhida de modo que o conjunto  $\mathcal{U}$  possui diâmetro no máximo  $\xi_0$ . Assim, podemos tirar a dependência de  $v \in \mathcal{U}$  em  $\Sigma_i^v$  e definir  $\Sigma_i = \Sigma_i^v$  e  $\kappa_{[-q, \tau+q]} = \kappa_{[-q, \tau+q]}^v$  para  $v \in \mathcal{U}$  fixo qualquer. Retirando tal dependência, podemos reformular o Proposição 3.33 da seguinte maneira.

**Proposição 3.35.** *Sejam  $y$  em  $\Sigma_i$ , uma direção  $u$  em  $\mathcal{U}$ , índices  $j, r$  e vetores  $t_1, t_2$ . Então,*

1. Para  $\Sigma_{t_1 j}$  em  $\kappa_{[-q, \tau+q]}$  contendo  $\phi^{-mu}(y)$ , temos  $\phi^{-mu}[y, D_i] \supset [\phi^{-mu}(y), D_{t_1 j}]$ ;
2. Para  $\Sigma_{t_2 r} \in \kappa_{[-q, \tau+q]}$  contendo  $\phi^{mu}(y)$ , temos  $\phi^{mu} \psi_y^{-1}[C_i, y] \supset \psi_{\phi^{mu}(y)}^{-1}[C_{t_2 r}, \phi^{mu}(y)]$ .

**5ª Etapa:** Nesse ponto já obtemos seções retangulares que possuem a propriedade hiperbólica para o conjunto  $\mathcal{U}$ . O que faremos agora é uma partição de cada seção retangular da família

$\kappa_{[-q, \tau+q]}$  utilizando a projeção de uma seção na outra, quando existe interseção. Para isso, considere os seguintes conjuntos

$$V_i = \bigcup_{t \in [-2q, \tau+2q]} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \phi^{-tu} \Sigma_i.$$

Para cada  $P \in \kappa_{[-2q, \tau+2q]}$  considere o conjunto de índices  $K_P = \{i \mid V_i \cap P \neq \emptyset\}$ , o qual é finito devido a definição das constantes  $q$  e  $\tau$ . Tome  $i \in K_P$ ,  $x \in V_i \cap P$  e  $\Sigma_{itu}$  contendo  $x$  para algum vetor  $tu$ . Sejam  $P_i = P_{\Sigma_{itu}} = [C_{P_i}, D_{P_i}] \subset P$  as projeções das seções  $\Sigma_{itu}$  na seção retangular  $P$ , conforme Definição 3.14. A partir do conjunto de índices  $R_i = \{j \in K_P \mid P_i \cap P_j \neq \emptyset\}$  tomamos o aberto em  $P$ , dado abaixo, que basicamente é  $P$  exceto os bordos das projeções em  $P$ .

$$\begin{aligned} Z_P &= P \setminus \bigcup_{i \in K_P} \left( \bigcup_{x \in \partial C_{P_i}} [x, D_{P_i}] \cup \bigcup_{y \in \partial D_{P_i}} [C_{P_i}, y] \right) \\ &= P \setminus \bigcup_{i \in K_P} [\partial C_{P_i}, D_{P_i}] \cup [C_{P_i}, \partial D_{P_i}] \\ &= P \setminus \bigcup_{i \in K_P} \partial P_i. \end{aligned}$$

Dado  $R_i$  o conjunto  $\bigcup_{j \in R_i} P_j \subset P$  possui diâmetro muito pequeno comparado a  $\alpha_0$ . Com isso, para cada  $y \in Z_P$  associamos o conjunto de índices  $R(y) = \bigcup_{P_i \ni y} R_i$  para o qual vale o seguinte equivalência; para  $j \in R(y)$ ,  $y \in [y, D_{P_j}]$  se, e somente se,  $y \in P_j$ . Dessa maneira, ficam bem definidos os conjuntos:

$$\begin{aligned} S_s(y) &= \{j \in R(y) \mid [y, D_{P_j}] \ni y\} \\ H_s(y) &= \{j \in R(y) \mid y \notin [y, D_{P_j}]\} \\ D(y) &= \bigcap_{j \in S_s(y)} \text{int}[y, D_{P_j}] \setminus \bigcup_{j \in H_s(y)} [y, D_{P_j}]. \end{aligned}$$

O conjunto  $\text{int}[y, D_{P_j}] = [y, D_{P_j}] \setminus [y, \partial D_{P_j}]$  é homeomorfo à  $\text{int}D_{P_j}$ . O mesmo pode ser dito a respeito de  $\text{int}[C_{P_j}, y] = [C_{P_j}, y] \setminus [\partial C_{P_j}, y]$  e  $\text{int}C_{P_j}$ . Agora considerando a folheação fraca instável temos os seguintes conjuntos.

$$\begin{aligned} S_u(y) &= \{j \in R(y) \mid [C_{P_j}, y] \ni y\} \\ H_u(y) &= \{j \in R(y) \mid y \notin [C_{P_j}, y]\} \\ C(y) &= \bigcap_{j \in S_u(y)} \text{int}[C_{P_j}, y] \setminus \bigcup_{j \in H_u(y)} [C_{P_j}, y]. \end{aligned}$$

Note que tal interseção faz sentido uma vez que estamos trabalhando com os retângulos projetados  $P_i$ . A partir dos conjuntos acima definimos para cada  $y \in Z_P$  a seção retangular

$B(y) = [C(y), D(y)]$ . O próximo lema garante que tais seções  $B(y)$  determinam uma partição de  $Z(p)$ .

**Lema 3.36.** *Se  $y, z \in Z_P$  e  $B(y) \cap B(z) \neq \emptyset$ , então  $B(y) = B(z)$ .*

*Demonstração.* Dado  $j \in H_u(y)$  temos

$$\begin{aligned} [C_{P_j}, D(y)] \cap B(y) &= [[C_{P_j}, y], D(y)] \cap B(y) \\ &= [[C_{P_j}, y] \cap C(y), D(y)] \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Como  $B(y) \subset \bigcup_{j \in R(y)} P_j$  segue que  $R(w) = R(y)$  para todo  $w \in B(y)$ . Além disso, dado  $w \in B(y) \cap Z_P$  vale as igualdades  $S_i(y) = S_i(w)$  e  $H_i(y) = H_i(w)$ ,  $i = s, u$ , devido a igualdade acima. Dado  $w = [w_1, w_2] \in B(y)$ , para cada  $j \in S_u(y)$  existe  $w_j \in C_{P_j}$  tal que  $w_1 = [w_j, y]$  e

$$w = [[w_j, y], w_2] = [w_j, w_2] \in [C_{P_j}, w_2] = [C_{P_j}, w].$$

Por outro lado, se  $j \in S_u(w)$  então  $w \in [C_{P_j}, w] = [C_{P_j}, D(y)]$  o que garante a igualdade devido a observação acima. Sendo  $y = [w_2, w_1]$  e

$$\begin{aligned} C(w) &= \bigcap_{j \in S_u(y)} \text{int}[C_{P_j}, w_2] \setminus \bigcup_{j \in H_u(y)} [C_{P_j}, w_2] \\ D(w) &= \bigcap_{j \in S_s(y)} \text{int}[w_1, D_{P_j}] \setminus \bigcup_{j \in H_s(y)} [w_1, D_{P_j}] \end{aligned}$$

Portanto,  $B(w) = B(y)$  e devido ao fato de  $B(z) \cap B(y) \cap Z_P \neq \emptyset$  podemos concluir que  $B(z) = B(y)$ .  $\square$

A fim de decompor a seção  $P$  é necessário definirmos o que é uma *partição finita* de uma seção retangular.

**Definição 3.37.** *Uma partição finita  $\nu$  de uma seção retangular  $P$  é uma coleção finita de seções retangulares  $\nu = \{Q_i\}$  tais que  $P = \bigcup_i Q_i$  e  $Q_i \cap Q_j \subset \partial Q_i \cap \partial Q_j$  se  $i \neq j$ .*

Dessa modo, o resultado a seguir garante que os conjuntos  $B(z)$  formam uma partição finita da seção retangular  $P$ .

**Lema 3.38.** *A família  $\nu_P = \{\overline{B(z)} \mid z \in Z_P\}$  é uma partição finita de  $P$ .*



*Demonstração.* Como cada  $B(z)$  é determinado pelos conjuntos de índices  $S_i(z)$  e  $H_i(z)$ ,  $i = u, s$ , e pelas seções retangulares  $P_j$  devemos ter apenas uma quantidade finita de diferentes conjuntos desse tipo. Além disso,  $Z_P$  é coberto por  $v_P$  e  $Z_P$  é denso em  $P$ . Supondo

$$B(y) \cap B(z) = \text{int } \overline{B(y)} \cap \text{int } \overline{B(z)} \neq \emptyset,$$

então pelo Lema 3.36 obtemos  $B(y) = B(z)$ . Portanto, devemos ter  $\overline{B(y)} \cap \overline{B(z)} \subset \partial \overline{B(y)} \cap \partial \overline{B(z)}$ , caso  $\overline{B(y)} \neq \overline{B(z)}$ .  $\square$

**6<sup>a</sup> Etapa:** Nessa etapa, fazemos o refinamento final por meio da partição produto e obtemos o sistema de Markov desejado. Até o momento, para cada  $P \in \kappa_{[-2q, \tau+2q]}$  exibimos uma partição finita  $v_P$ . Com isso, variando as seções retangulares obtemos uma família de partições finitas e um conjunto aberto e denso em  $M$  definidos abaixo.

$$\begin{aligned} v &= \{Q \in v_P \mid P \in \kappa_{[-2q, \tau+2q]}\} \\ Z &= M \setminus \bigcup_{Q \in v} \bigcup_{t=0}^{m+2q} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \phi^{-tu} \partial Q. \end{aligned}$$

Pela construção o conjunto  $Z$  é aberto e denso em  $M$ , pois estamos retirando uma parte compacta de folhas forte instáveis e fraca estáveis. Agora estamos prontos para fazer a decomposição final da coleção  $\Sigma = \{\Sigma_i\}_{i=1}^l$ , para tanto dados  $\Sigma_i \in \Sigma$ ,  $B \in v_{\Sigma_i}$ ,  $B_{tu} = \phi^{-tu} B$  e  $z \in B_{tu} \cap Z$  definimos:

$$\begin{aligned} \kappa(z) &= \{P \in z \mid P \in \kappa_{[-q, \tau+q]}\} \\ \kappa(B_{tu}) &= \{P \in \kappa(z) \mid z \in B_{tu} \cap Z\} \\ v(B_{tu}) &= \{B_{tu}Q \mid Q \in v_P \text{ e } P \in \kappa(B_{tu})\} \\ J_{tu}(z) &= \bigcap_{B_{tu}Q \ni z} B_{tu}Q. \end{aligned}$$

Recordando que  $B_{tu}Q = [C_{Q_{tu}}, D_{Q_{tu}}]$  denota a projeção da seção  $Q$  na seção  $B_{tu}$ . Segue da construção que se  $y \in J_{tu}(z) \cap Z$  então  $J_{tu}(z) = J_{tu}(y)$  devido ao fato de  $v_P$  ser uma partição finita em seções retangulares de  $P$ . Portanto, a família

$$\alpha(B_{tu}) = \{J_{tu}(z) \mid z \in B_{tu} \cap Z\}$$

é uma partição finita de  $B_{tu}$ . Considere a partição produto:

$$\alpha(B) = \bigvee_{t=0}^m \bigvee_{u \in \mathcal{U}} \phi_{tu}(B_{tu}).$$

Outro modo de enxergarmos a partição produto acima é da seguinte maneira. Para cada  $y \in B \cap Z$  definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} v_{tu}(y) &= \{Q \mid B_{tuQ} \ni \phi^{-tu}(y), B_{tuQ} \in v(B_{tu})\} \\ v(y) &= \{Q \in v_{tu}(y) \mid t \in [0, m] \text{ e } u \in \mathcal{U}\}. \end{aligned}$$

Portanto, a partição  $\alpha(B)$  satisfaz a seguinte igualdade.

$$\left\{ \bigcap_{Q \in v(y)} \phi(\sum t_i u_i, B_{tuQ}) = \bigcap_{Q \in v(y)} B_{\phi(\sum t_i u_i, Q)}, \quad tu = (t_1, \dots, t_k) \right\}_{y \in B \cap Z}$$

Considere a família de seções retangulares  $\mathcal{M} = \{P \in \alpha(B) \mid B \in v(\Sigma_i), i = 1, \dots, l\}$  juntamente com a holonomia determinada pela base de elementos de Anosov  $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{A}_0$ .

### 7ª Etapa:

**Teorema I.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov transitiva em subcones regulares. Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe um sistema de Markov  $\mathcal{M}$  de modo que cada seção possui diâmetro no máximo  $\varepsilon$ .*

*Demonstração.* Por construção as seções retangulares da família  $\mathcal{M}$  possuem o diâmetro menor que  $\varepsilon$ . Basta verificarmos as condições de contração e expansão. Seja  $x \in \text{int } P_i \cap h_{ij}^{-1}(\text{int } P_j) \cap Z$  de modo que  $P_i, P_j \in \mathcal{M}$  e  $h_{ij}$  é aplicação de holonomia ao longo da órbita da ação com respeito ao subcone gerado pelos elementos  $u_1, \dots, u_k$ . Dado  $y = h_{ij}(x)$  podemos supor que

$$\begin{aligned} P_i = P_i(x) &= [[C_{P_i}, x], [x, D_{P_i}]] \\ P_j = P_j(y) &= [[C_{P_j}, y], [y, D_{P_j}]] \end{aligned}$$

com  $P_i(x) \in \alpha(B(x)), P_j(y) \in \alpha(B(y)), B(x) \in v_{\Sigma_k}, B(y) \in v_{\Sigma_r}$  e  $k, r \in \{1, \dots, l\}$ , conforme 5ª e 6ª etapas. Além disso, a holonomia é dada da maneira a seguir

$$y = h_{ij}(x) = \phi(f_1^{ij}(x)u_1 + \dots + f_k^{ij}(x)u_k, x), \quad f_n^{ij}(x) > 0.$$

Além disso, existem  $0 \leq 2q \leq t \leq \tau \leq m$  e  $u \in \mathcal{U}$  tais que  $f^{ij}(x) = tu$ . A aplicação  $h_{ij}|_{[x, D_{P_i}]}$  é constante devido a invariância da folheação forte instável. Com isso, um primeiro passo da demonstração é provar que  $\phi^{-tu}[y, D_{P_j}] \supset [x, D_{P_i}]$ . Pela 6ª etapa, a definição de  $P_i(x)$  e  $P_j(y)$  garante que

$$[x, D_{P_i}] = \bigcap_{s=0}^m \bigcap_{v \in \mathcal{U}} \bigcap_{Q \in v_{sv}(x)} \phi^{sv} [\phi^{-sv}(x), D_{Q_{sv}}] \quad (3.8)$$

$$[y, D_{P_j}] = \bigcap_{s=0}^m \bigcap_{v \in \mathcal{U}} \bigcap_{P \in v_{sv}(y)} \phi^{sv} [\phi^{-sv}(y), D_{P_{sv}}]. \quad (3.9)$$

Aplicando  $\phi^{tu}$  na igualdade 3.8 obtemos

$$\begin{aligned}\phi^{tu}[x, D_{P_i}] &= \bigcap_{s=0}^m \bigcap_{v \in \mathcal{U}} \bigcap_{Q \in \mathcal{V}_{sv}(x)} \phi^{tu} \circ \phi^{sv} [\phi^{-sv}(x), D_{Q_{sv}}] \\ &= \bigcap_{s=0}^m \bigcap_{v \in \mathcal{U}} \bigcap_{Q \in \mathcal{V}_{sv}(\phi^{-tu}(y))} \phi^{tu+sv} [\phi^{-tu-sv}(y), D_{Q_{sv}}].\end{aligned}\quad (3.10)$$

Considere  $n \in R(\phi^{-sv}(y))$  e seja  $P_n$  a projeção de  $\phi^{-rw}\Sigma_n$  em  $\phi^{-sv}\Sigma_r$ . Logo, existe  $t(y) \in B_q(0)$  tal que  $\phi^{rw+t(y)}(\phi^{-sv}y) \in [\mathcal{F}_\beta^{uu}(x_n), D_n]$ . Pela Proposição 3.35, para cada  $\bar{v} \in \mathcal{U}$ , seja  $Q \in \mathcal{K}_{[-q, \tau+q]}$  contendo  $\phi^{-m\bar{v}+rw+t(y)}(\phi^{-sv}(y))$  tal que

$$\phi^{-m\bar{v}} [\phi^{rw+t(y)}(\phi^{-sv}(y)), D_n] \supset [\phi^{-m\bar{v}+rw+t(y)} \circ \phi^{-sv}(y), D_Q].$$

Como  $\phi^{-rw-t(y)} [\phi^{rw+t(y)}(\phi^{-sv}y), D_n] = [\phi^{-sv}(y), D_{P_n}]$  temos

$$\phi^{-m\bar{v}+rw+t(y)} [\phi^{-sv}(y), D_{P_n}] \supset [\phi^{-m\bar{v}+rw+t(y)-sv}(y), D_Q].$$

O que implica,

$$\phi^{sv} [\phi^{-sv}(y), D_{P_n}] \supset \phi^{m\bar{v}-rw-t(y)+sv} [\phi^{-m\bar{v}+rw+t(y)-sv}(y), D_Q].$$

Sendo  $\bar{v} \in \mathcal{U}$  qualquer, podemos escolher  $\bar{v}$  de modo que  $m\bar{v} - rw - t(y) + sv$  pertença ao conjunto  $tu + [0, m] \cdot \mathcal{U}$ . Em outras palavras,  $m\bar{v} - rw - t(y) + sv = tu + s_1 v_1$  e temos

$$\begin{aligned}\phi^{sv} [\phi^{-sv}(y), D_{P_n}] &\supset \phi^{m\bar{v}-rw-t(y)+sv} [\phi^{-m\bar{v}+rw+t(y)-sv}(y), D_Q] \\ &= \phi^{tu+s_1 v_1} [\phi^{-tu-s_1 v_1}(y), D_{Q_{tu+s_1 v_1}}].\end{aligned}$$

Como  $n \in R(\phi^{-sv}(y))$  é qualquer podemos concluir devido as igualdades 3.9 e 3.10 que

$$[y, D_{P_j}] \supset \phi^{tu}[x, D_{P_i}].$$

A demonstração da segunda propriedade hiperbólica segue os mesmos passos do anterior. A contenção que queremos é  $\phi^{tu}\psi_x^{-1}[C_{P_i}, x] \supset \psi_y^{-1}[C_{P_j}, y]$ , visto que a holonomia é constante em  $\mathcal{F}^{uu}$ . Note que, pela 6ª etapa a definição das seções  $P_i$  e  $P_j$  garantem as igualdades abaixo.

$$\begin{aligned}\psi_x^{-1}[C_{P_i}, x] &= \bigcap_{s=0}^m \bigcap_{v \in \mathcal{U}} \bigcap_{Q \in \mathcal{V}_{sv}(x)} \phi^{sv} \circ \psi_{\phi^{-sv}(x)}^{-1} [C_{Q_{sv}}, \phi^{-sv}(x)] \\ &= \bigcap_{s=0}^m \bigcap_{v \in \mathcal{U}} \bigcap_{Q \in \mathcal{V}_{sv}(x)} \psi_x^{-1} \circ \phi^{sv} [C_{Q_{sv}}, \phi^{-sv}(x)]\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\psi_y^{-1}[C_{P_j}, y] = \bigcap_{s=0}^m \bigcap_{v \in \mathcal{U}} \bigcap_{Q \in v_{sv}(y)} \psi_y^{-1} \circ \phi^{sv} [C_{Q_{sv}}, \phi^{-sv}(y)] \quad (3.12)$$

Em particular, para cada  $s \in [0, m]$  e  $v \in \mathcal{U}$ , como  $\phi^{tu}(x) = y$  vale

$$\phi^{tu} \circ \psi_x^{-1} \circ \phi^{sv} [C_{Q_{sv}}, \phi^{-sv}(x)] = \psi_y^{-1} \circ \phi^{sv+tu} [C_{Q_{sv}}, \phi^{-sv-tu}(y)].$$

Fazendo o argumento análogo ao caso anterior, aplicando a Proposição 3.35, obtemos a segunda contenção desejada. O que conclui a demonstração do resultado.  $\square$

### 3.4 Grafo associado a um sistema de Markov

Como primeira aplicação dos sistemas de Markov vamos construir um grafo. Seja  $\mathcal{S}$  o subcone regular gerado pela base  $u_1, \dots, u_k$  de  $\mathbb{R}^k$  associada ao sistema de Markov. Como a ação Anosov  $\phi$  é transitiva em subcones regulares o conjunto não errante  $\Omega(\mathcal{S}) = M$ . Além disso, as órbitas compactas são densas em  $\Omega(\mathcal{S})$ , Teorema 2.30. Pela observação 2.31, para todo  $a \in \mathcal{S}$  os conjuntos  $\Omega(\phi^{ta})$  e  $\Omega(\mathcal{S})$  coincidem. Afim de utilizar esses fatos considere o conjunto de direções  $\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{S} \mid \|u\| = 1\}$ .

A métrica Riemanniana de  $M$  induz uma forma diferenciável que determina uma função área  $A$  sobre as órbitas da ação. O primeiro passo para a construção do grafo é apresentar um resultado de sombreamento. Desse modo, dado  $p \in M$  e  $t \in \mathbb{R}_+^k$  considere o pedaço de órbita

$$\mathcal{O}_p(t) = \{\phi(s_1 u_1 + \dots + s_k u_k, p) \mid 0 \leq s_i \leq t_i, i = 1, \dots, k\}.$$

**Lema 3.39** (Aproximação por órbitas compactas). *Dado um ponto  $p \in M$  e  $\varepsilon > 0$  então existe  $t \in \mathbb{R}_+^k$ , com  $\|t\|$  suficientemente grande, e uma órbita compacta  $\mathcal{O}_q$  contida em uma  $\varepsilon$ -vizinhança de  $\mathcal{O}_p(t)$  em  $M$  tal que*

$$\frac{1}{t_1 \cdots t_k} |A(\mathcal{O}_p(t)) - A(\mathcal{O}_q)| < \varepsilon$$

*Demonstração.* Devido a compacidade do conjunto  $I_t = [0, t_1] \times \dots \times [0, t_k]$  e a continuidade da ação  $\phi$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_t > 0$  tal que para todo  $s \in I_t$

$$d(p, q) < \delta_t \Rightarrow d(\phi(\sum_{i=1}^k s_i u_i, p), \phi(\sum_{i=1}^k s_i u_i, q)) < \varepsilon. \quad (3.13)$$

Queremos obter a aproximação da área das órbitas por vetores em  $\mathcal{S}$ . Desse modo, definimos o conjunto  $\mathbb{R}_{++}^k = \{t \in \mathbb{R}^k \mid t_i > 0, \forall i\}$  e a aplicação  $f : \mathbb{R}_{++}^k \times M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f_t(p) = \frac{1}{t_1 \cdots t_k} A(\mathcal{O}_p(t))$$

A aplicação  $f$  é uniformemente contínua, ou seja, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|t - s\| < \delta \text{ e } d(p, q) < \delta \Rightarrow |f_t(p) - f_s(q)| < \varepsilon. \quad (3.14)$$

Além disso, o Lema 2.2 garante que existem uma vizinhança  $W_t$  de  $\mathcal{O}_p(t)$  em  $\mathcal{O}_p$ , uma vizinhança  $U_t \supset W_t$  de  $\mathcal{O}_p(t)$  em  $M$  e uma retração  $\pi_t : U_t \rightarrow W_t$  tal que  $\pi_t^{-1}(x)$  transverso à folheação  $\mathcal{O}|_{U_t}$  para todo  $x \in W_t$ . Desse modo, a vizinhança  $U_t$  é uma vizinhança trivializadora longa da folheação dada pelas órbitas.

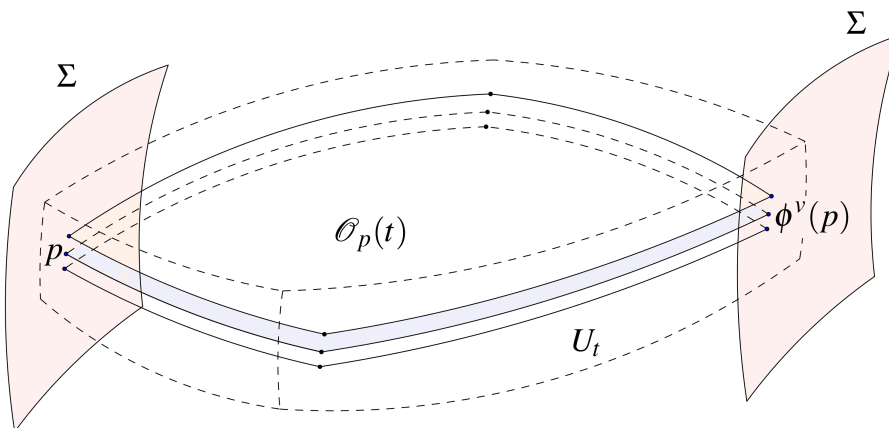


Figura 8 – Vizinhança trivializadora longa  $U_t$  de  $\mathcal{O}_p(t)$

Sendo  $U_t$  aberto em  $M$  existem infinitas órbitas compactas que intersectam  $U_t$ . Assim, temos as informações preliminares suficientes para mostrar como fazer a aproximação de  $f_t(p)$ ,  $p \in \Omega(\mathcal{S})$  e  $t \in \mathbb{R}_{++}^k$  com norma suficientemente grande, pelo valor  $f_t(q)$  que corresponde a área de uma órbita compacta.

Seja  $p \in \Omega(\mathcal{S}) = M$ . Como para todo  $u \in \mathcal{U}$  temos  $\Omega(\phi^{ru}) = \Omega(\mathcal{S})$ , dado  $\varepsilon_1 > 0$ , para cada  $u \in \mathcal{U}$  existem infinitos  $r > 0$  tais que a distância  $d(p, \phi^{ru}(p))$  é estritamente menor que  $\varepsilon_1$ . Assim, podemos obter uma sequência  $(t_n)$ ,  $\|t_n\| \rightarrow \infty$ , tal que existem  $t_{n_1}, \dots, t_{n_k}$  são linearmente independentes. Além disso, se  $\|t_n\| > \|t_{n_k}\|$  então  $t_n$  é combinação linear de  $t_{n_1}, \dots, t_{n_k}$  e  $\mathcal{O}_p(t_n) \subset \mathcal{O}_p(t_{n_i})$ .

Tome  $U_{t_{n_1}}, \dots, U_{t_{n_k}}, U_{t_n}$  os abertos respectivos do Lema 2.2. Seja  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  de modo que a  $\varepsilon$ -vizinhança  $V^{t_m}$  do conjunto compacto  $\mathcal{O}_p(t_m)$  está contido em  $U_{t_m}$ , para todo  $m$  em  $\{n_1, \dots, n_k, n\}$ . Seja  $\delta > 0$  de modo que sejam verificados as implicações 3.13 e 3.14 para os valores  $t_{n_1}, \dots, t_{n_k}$  e  $t_n$ . Pela densidade das órbitas compactas, existe  $q$  cuja órbita é compacta,

$d(q, p) < \delta$  e

$$d\left(\phi\left(\sum_{i=1}^k s_i u_i, p\right), \phi\left(\sum_{i=1}^k s_i u_i, q\right)\right) < \varepsilon, \quad \forall s \in I_n$$

$$|f_{t_m}(p) - f_{t_m}(q)| < \varepsilon, \quad m = n_1, \dots, n_k, n.$$

Pelo Teorema 2.25, em cada direção  $t_m$  obtemos um caminho  $\gamma_m : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$  de modo que  $\gamma_m(0) = 0$ ,  $\gamma_m(1) \in \Gamma_q$  e tal caminho é  $\varepsilon$  próximo do segmento  $[0, \sum_j t_j^m u_j]$ . Assim, obtemos uma base de elementos de Anosov  $\gamma_{n_1}(1), \dots, \gamma_{n_k}(1)$  e  $\gamma_n(1) = \sum \gamma_{n_j}(1)$  e  $f_{t_n}(q)$  é a área total da órbita compacta que contém  $q$ . Portanto, obtemos a aproximação  $|f_{t_n}(p) - \frac{1}{t_1^n \dots t_k^n} A(\mathcal{O}_q)| < \varepsilon$ .  $\square$

Com esse lema garantimos que o  $\mathcal{O}_p(t)$  é  $\varepsilon$  sombreado pela órbita compacta  $\mathcal{O}_q$ . Note que, como o valor da área  $A(\mathcal{O}_q)$  é fixo podemos acrescentar a prova do lema anterior que o ponto  $q$  pertence a uma seção retangular do sistema de Markov.

**Lema 3.40** (Transição realizável por pontos no interior). *Seja  $\mathcal{M}$  um sistema de Markov para a ação Anosov  $\phi$ . Sejam  $\{\Sigma_{i_j}\}_{j=1}^l$  seções retangulares em  $\mathcal{M}$  tais que  $\text{int}\Sigma_{i_j} \cap h_{i_j i_{j+1}}^{-1} \text{int}\Sigma_{i_{j+1}} \neq \emptyset$  para todo  $j$  em  $\{1, \dots, l-1\}$ . Então existe  $x \in \text{int}\Sigma_{i_1}$  tal que  $h_{i_{l-1} i_l} \circ \dots \circ h_{i_1 i_2}(x) \in \text{int}\Sigma_{i_l}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{M}$  um sistema de Markov e considere  $\Sigma_i, \Sigma_j$  e  $\Sigma_r$  em  $\mathcal{M}$  de modo que  $\text{int}\Sigma_i \cap h_{i_j}^{-1} \text{int}\Sigma_j \neq \emptyset$  e  $\text{int}\Sigma_j \cap h_{j_r}^{-1} \text{int}\Sigma_r \neq \emptyset$ . Devido a propriedade hiperbólica das seções temos que

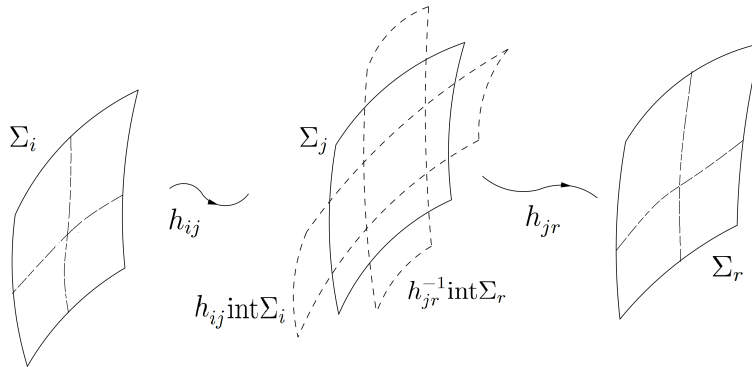


Figura 9 – Propriedade de Markov na holonomia

Assim, existe  $x \in \text{int}\Sigma_i$  de modo que  $h_{j_r} \circ h_{i_j}(x) \in \text{int}\Sigma_r$ . Desse modo, a passos finitos garantimos que existe  $x \in \text{int}\Sigma_{i_1}$  tal que  $h_{i_{l-1} i_l} \circ \dots \circ h_{i_1 i_2}(x) \in \text{int}\Sigma_{i_l}$ .  $\square$

**Definição 3.41.** Um grafo orientando  $\mathcal{G} = (V, E)$  consiste de uma coleção vértices  $V$  e arestas  $E \subset V \times V$ . Uma coleção  $c = (v_0, \dots, v_n)$  é um caminho orientado de  $v_0$  para  $v_n$  se  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  para todo  $i$ . O caminho orientado é fechado se  $v_0 = v_n$ . Diremos que o grafo  $(V, E)$  é completo se todo par  $(v, w) \in V \times V$  existe um caminho orientado de  $v$  para  $w$ .

Finalmente, no resultado a seguir mostramos como construir um grafo completo para um sistema de Markov.

**Teorema 3.42.** *Dado um sistema de Markov  $\mathcal{M}$  existe um grafo completo  $\mathcal{G}$  tal que cada caminho orientado fechado  $c$  corresponde a uma órbita compacta  $\mathcal{O}_c$  que realiza as transições correspondentes do caminho  $c$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{M}$  um sistema de Markov. Denotamos por  $\Sigma = \bigcup \Sigma_i$  munido com a topologia induzida de  $M$ , o qual satisfaz  $\text{int}\Sigma = \bigcup \text{int}\Sigma_i$  visto que é uma união disjunta. Os vértices do grafo  $V$  serão as seções transversais  $\Sigma_i$ . Dois vértices  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_j$  estão ligados por uma aresta  $(\Sigma_i, \Sigma_j)$  caso  $\text{int}\Sigma_i \cap h_{ij}^{-1} \text{int}\Sigma_j \neq \emptyset$ .

Como a ação é transitiva em subcones regulares, dadas quaisquer seções  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_j$  existe um caminho orientado do vértice  $\Sigma_i$  para o vértice  $\Sigma_j$ . Além disso, pelo Lema 3.40 existe um ponto no interior de  $\Sigma_i$  realizando a transição entre as seções. Desse modo, o grafo  $\mathcal{G}$  é completo.

Seja  $c = (v_0, \dots, v_n)$  um caminho orientado fechado em  $\mathcal{G}$ . Denotemos por  $\Sigma_{v_0}$  a seção transversal do sistema de Markov correspondente ao vértice  $v_0$ . O Lema 3.40 garante que existe um ponto  $x \in \text{int}\Sigma_{v_0}$  que realiza as transições do caminho orientado. Assim, existe  $u \in \mathcal{U}$  e  $t > 0$  tal que  $\phi^{tu}x \in \text{int}\Sigma_{v_0}$ . Aplicando o Lema 3.39, obtemos uma órbita compacta  $\mathcal{O}_c$  que  $\varepsilon$ -sombreia  $\mathcal{O}_p(tu)$  e realiza as mesmas transições correspondentes do caminho  $c$ . Portanto, a cada caminho orientado fechado  $c$  no grafo associamos uma órbita compacta  $\mathcal{O}_c$ .  $\square$





## TEOREMAS DE GHYS

Um problema geral em sistemas dinâmicos é a classificação topológica, sob determinadas condições. Nosso interesse neste problema é de classificação de ações Anosov de  $\mathbb{R}^k$ . Observamos que no caso de ações Anosov de  $\mathbb{Z}^k$ , quando a ação é de codimensão um, temos de fato que estas são topologicamente conjugadas a uma ação Anosov de  $\mathbb{Z}^k$  por automorfismos lineares do toro. Isto segue dos resultados de Franks [5] e Newhouse [6] (que garante que um difeomorfismo de Anosov de codimensão um é topologicamente conjugado a um automorfismo hiperbólico do toro), e outro resultado de Palis-Yoccoz [11] (que prova que os elementos centralizadores de um automorfismo hiperbólico do toro são automorfismos lineares).

No caso abeliano não discreto, isto é quando o grupo é  $\mathbb{R}^k$ , temos a conjectura de Verjovsky que foi mencionada no capítulo anterior. Nesse capítulo iremos apresentar uma solução parcial para esta conjectura estendendo assim um resultado de Ghys em [2]. Nosso objetivo aqui é mostrar, sob algumas condições, que o subfibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é integrável. Consequentemente, devido ao apresentado na última seção do Capítulo 2 poderemos concluir que a ação é suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  em uma variedade compacta.

Uma das ferramentas importantes para obter tal resultado é o sistema de Markov que foi construído no capítulo anterior. Dessa maneira, iremos manter as hipóteses do capítulo anterior, ou seja, supor que a ação Anosov  $\phi$  é transitiva em subcones regulares. Tal fato implica que o conjunto dos pontos não errantes  $\Omega(\mathcal{S}) = M$ , para todo subcone regular  $\mathcal{S}$  contido em uma componente conexa  $\mathcal{A}_0$ .

O resultado principal que iremos provar no presente capítulo é o seguinte.

**Teorema II.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov de classe  $C^2$ , codimensão 1 e irredutível em uma variedade compacta  $M$  de dimensão maior que  $k + 2$ . Se a distribuição  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é de classe  $C^1$ , então a ação  $\phi$  é suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ .*

Note que, as hipóteses do teorema acima implicam que a ação é transitiva em subcones

regulares, Teorema 2.35. Além disso, caso o subfibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  seja integrável então pelos Teoremas 2.47 e 2.45 temos que a ação é topologicamente equivalente a suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ .

A ideia geral da demonstração é provar que  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é integrável. Para isso, na primeira seção iremos colocar o problema de modo que possamos aplicar o Teorema de Frobenius para ações, Teorema 2.12. Além disso, verificamos que basta garantir que as formas  $\beta_j$  são nulas nas direções hiperbólicas. Supondo por absurdo que não seja nula, na segunda seção iremos mostrar que toda medida invariante pela ação  $\phi$  pode ser aproximada por medidas suportadas em órbitas compactas contidas em um certo aberto  $\mathcal{V}$ . Para isso, será necessário utilizarmos os sistemas de Markov construídos no capítulo anterior. Por fim, na última seção apresentamos um lema técnico e mostramos que  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  deve ser integrável.

## 4.1 Integrabilidade de $E^{ss} \oplus E^{uu}$

Como já citado, iremos aplicar as ideias de Ghys. Dessa maneira, pretendemos utilizar o teorema de Frobenius para ações, Teorema 2.12, como apresentado na Seção 2.2. Como sabemos, dado uma ação do  $\mathbb{R}^k$  podemos reescrevê-la utilizando os geradores infinitesimais. Nessa seção utilizaremos tais geradores para tratar o problema de integrabilidade do fibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$ .

Considere uma base  $u_1, \dots, u_k$  vetores unitários de  $\mathbb{R}^k$  contidos em um subcone regular  $\mathcal{A}_0$  e tome o subcone regular gerado pela base

$$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i u_i \mid t_i > 0, \forall i \right\}.$$

Como pretendemos aplicar o sistema de Markov, adicionamos a hipótese, Observação 3.34, sobre diâmetro do conjunto  $\mathcal{U}$ , Equação (3.2).

Considere os campos vetoriais  $X_i(p) = \left( \frac{d}{dt} \phi^{tu_i}(p) \right)_{t=0}$ , com  $i \in \{1, \dots, k\}$ , aos quais associamos as 1-formas diferenciais  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tais que  $\alpha_i$  é 0 em  $F_i = E^{ss} \oplus E^{uu} \bigoplus_{j \neq i} \mathbb{R}X_j$  e 1 no campo vetorial  $X_j$ . Em outras palavras, a forma diferencial  $\alpha_i$  identifica apenas o fluxo  $\phi^{tu_i}$ . Além disso, o Lema 2.11 garante que os campos  $X^i$  são invariantes pelos fluxos  $\phi^{tu_j}$  para todo  $i, j$ .

O fibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é determinado por  $\bigcap_{j=1}^k \ker \alpha_j$ . Dessa maneira, o Teorema 2.12 garante que  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  não ser integrável significa que para algum  $j$  uma das  $(k+2)$ -formas

$$d\alpha_j \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \tag{4.1}$$

não é identicamente nula. Todavia, em vez de mostrar que para todo  $j$  que a forma (4.1) é identicamente nula, iremos mostrar algo mais forte.

**Afirmção 4.1.** Para todo  $j$  em  $\{1, \dots, k\}$  temos  $\beta_j = d\alpha_j = 0$ .

O primeiro passo para provar essa afirmação é reduzir as possibilidades que temos de analisar. Para tanto, considere o lema geral a seguir.

**Lema 4.2** (Apêndice,[14]). *Sejam  $\omega$  uma 1–forma de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) e  $X, Y$  campos vetoriais de classe  $C^1$ , definidos em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Então*

$$d\omega(X, Y) = d(\omega(X)) \cdot Y - d(\omega(Y)) \cdot X + \omega([X, Y]). \quad (4.2)$$

Onde  $[X, Y]$  é o colchete de Lie entre os dois campos vetoriais.

Devido a propriedade hiperbólica da ação Anosov, conseguimos garantir que as direções que determinam a ação estão contidas no núcleo das 2–formas  $\beta_j$ .

**Proposição 4.3.** *Os campos vetoriais  $X_1, \dots, X_k$  estão no núcleo da 2–forma  $\beta_h = d\alpha_h$ , para todo índice  $h \in \{1, \dots, k\}$ .*

*Demonstração.* Como os campos vetoriais  $X_1, \dots, X_k$  determinam a ação  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  temos que tais campos comutam entre si, ou seja, o colchete de Lie entre tais campos é nulo. Dados  $h, i, j \in \{1, \dots, k\}$ , como  $\alpha_h(X_i), \alpha_h(X_j)$  são funções constantes segue que

$$\begin{aligned} \beta_h(X_j, X_i) &= d(\alpha_h(X_j)) \cdot X_i - d(\alpha_h(X_i)) \cdot X_j + \alpha_h([X_j, X_i]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora tome um vetor  $v \in E^{ss}$ , usando que  $\beta_h$  é invariante pelo fluxo  $\phi^{tv_h}$  e vale a igualdade (2.1) obtemos a seguinte igualdade.

$$\beta_h(X_j, v) = \beta_h(d\phi^{tv_h}(X_j), d\phi^{tv_h}(v)) = \beta_h(X_j, d\phi^{tv_h}(v))$$

Como  $d\phi^{tv_h}(v)$  converge a zero, quando  $t \rightarrow \infty$ , segue pela continuidade da forma  $\beta_h$  que  $\beta_h(X_j, v) = 0$ . O argumento para  $v \in E^{uu}$  é análogo, basta fazer  $t \rightarrow -\infty$  que obtemos  $\beta_h(X_j, v) = 0$ .  $\square$

O lema acima garante que o fibrado  $T\phi$  está contido no núcleo das formas  $\beta_i$ . Desse modo, basta analisarmos o que ocorre nos fibrados  $E^{ss}$  e  $E^{uu}$ . O lema técnico a seguir será utilizado para obtermos uma contradição caso alguma das 2–formas diferenciais  $\beta_i$  não seja nula nos fibrados  $E^{ss}$  e  $E^{uu}$ .

**Lema 4.4** (Ghys, [2]). *Seja  $E$  um espaço vetorial euclidiano de dimensão  $(n - k)$  com  $n \geq k + 3$  e suponha que  $E$  possui uma decomposição ortogonal  $S \oplus U$  onde  $U$  é unidimensional. Considere  $f : E \rightarrow E$  uma aplicação linear e  $\beta$  uma forma bilinear simétrica não trivial em  $E$  tais que:*

1.  $S$  e  $U$  são invariantes sobre  $f$ ;

2.  $\beta$  é invariante sobre  $f$ ;
3. Existe uma constante  $\mu$  tal que  $0 < \mu < 1$  e  $\|f(u)\| \leq \mu\|u\|$  para todo  $u \in S$ .

Então  $|\det f| \leq \mu^{n-(k+2)}$ . Em particular, se  $n \geq (k+3)$  temos  $|\det f| < 1$ .

## 4.2 Medidas invariantes pela ação

Para a demonstração iremos supor que a Afirmação 4.1 é falsa, ou seja, que  $\beta_i$  não é identicamente nula para algum  $i$ . Como  $\beta_j$  depende continuamente de  $u_j$  podemos supor que os vetores básicos  $\{u_j\}$  foram escolhidos de modo que as formas  $\beta_j$  não sejam identicamente nulas para todo  $j$ . Seja  $\mathcal{V}$  o aberto não vazio invariante pela ação  $\phi$  dos pontos que não anulam as formas  $\beta_1, \dots, \beta_k$ . Nessa seção iremos provar que toda medida invariante pela ação  $\phi$  pode ser aproximada por medidas invariantes suportadas em órbitas compactas contidas em  $\mathcal{V}$ , Proposição 4.6.

Dado  $v = \sum_{i=1}^k t_i u_i$  tal que para todo  $i$  temos  $t_i > 0$ , seja  $X_v(p) = \left( \frac{d}{dt} \phi^{tv}(p) \right)_{t=0}$  o campo de vetores associado. Dado uma forma de volume  $\Omega$  em  $M$  considere  $g_v = \operatorname{div} X_v : M \rightarrow \mathbb{R}$  o divergente do campo  $X_v$  com respeito a  $\Omega$ , isto é, a função tal que  $\mathcal{L}_{X_v} \Omega = g_v \Omega$  onde  $\mathcal{L}_{X_v}$  é a derivada de Lie.

**Observação 4.5.** Dada uma órbita compacta  $\mathcal{O}_p$  contida em  $\mathcal{V}$  sempre podemos tomar uma base  $e_1, \dots, e_k$  no subgrupo de isotropia da órbita  $\Gamma_p$  de modo que  $e_i$  está no subcone regular  $\mathcal{S}$  gerado pela base  $u_1, \dots, u_k$ . Aplicando o Lema 4.4 para  $E = E^{ss} \oplus E^{uu}$  e  $f = D\phi^{e_i}$  temos  $\det D\phi^{e_i} < 1$  para todo  $i$ . Logo, para qualquer  $x \in \mathcal{O}_p$  vale o seguinte.

$$\int_{t_1=0}^1 \cdots \int_{t_k=0}^1 g_{e_i}(\phi(t_1 e_1 + \cdots + t_k e_k, x)) dt_1 \dots dt_k = \int \int_{t_i=0}^1 g_{e_i}(\phi^{t e_i} y) dt dy < c < 0$$

Na igualdade anterior basta fazer uma mudança de variável. Em particular, dado  $e \in \Gamma_p$  tal que  $e = T_1 u_1 + \cdots + T_k u_k$  com  $T_i > 0$  para todo  $i$  vale a seguinte desigualdade.

$$\frac{1}{T_1 \cdots T_k} \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_k} g_e(\phi(t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k, x)) dt_1 \dots dt_k < c < 0. \quad (4.3)$$

A constante  $c < 0$  é independente da órbita compacta  $\mathcal{O}_p$  e do elemento  $e \in \Gamma_p$  devido a compacidade da variedade  $M$ .

Queremos utilizar a desigualdade 4.3 para obter aproximações das medidas invariantes pela ação  $\phi$ . Para isso utilizamos resultados apresentados na Seção 3.4 na qual apresentamos resultados de sobreamento de pedaços compactos de órbitas e construímos um grafo associado a um sistema de Markov. Nosso objetivo nesse momento é garantir que toda medida de probabilidade invariante pela ação  $\phi$  pode ser aproximada por uma medida invariante suportada no conjunto  $\mathcal{V}$ . Esse fato será importante para obtermos uma contradição com  $\beta_i$  não ser identicamente nula.

**Proposição 4.6.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov de  $\mathbb{R}^k$  transitiva em subcones regulares. Toda medida de probabilidade invariante pela ação  $\phi$  pode ser aproximada por combinações convexas de probabilidades invariantes concentradas em órbitas compactas contidas em  $\mathcal{V}$ .*

*Demonstração.* Note que qualquer medida ergódica invariante  $\mu$  para a ação  $\phi$  pode ser aproximada por medidas de probabilidade concentradas em órbitas compactas. De fato, como a ação é transitiva em subcones regulares  $\mathcal{S}$ , fixada uma base de  $\mathbb{R}^k$  de elementos de Anosov  $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{A}_0$  existe ponto  $p \in M$  tal que, por [22], Teorema 8.13, pg.255, toda função contínua  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

$$\int h d\mu = \lim_{T^i \in \mathbb{R}_{++}^k, \|T^i\| \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1^i \cdots T_k^i} \int_{t_1=0}^{T_1^i} \cdots \int_{t_k=0}^{T_k^i} h(\phi(t_1 u_1 + \dots + t_k u_k, p)) dt_1 \cdots dt_k.$$

Por [22], podemos escolher a sequência  $(T^i)$  de modo que possamos aplicar Lema 3.39. Assim, existem órbitas compactas  $\gamma_i$  que aproximam pedaços de órbitas  $\mathcal{O}_p(T^i)$ . Desse modo, a sequência de medidas invariantes suportadas nas órbitas compactas  $\gamma_i$  convergem para a medida ergódica invariante  $\mu$ .

Novamente pelos resultados ergódicos provados em [22], sabemos que as medidas ergódicas para a ação  $\phi$  são extremais no conjunto compacto convexo de todas as medidas invariantes pela ação  $\phi$ . Dessa maneira, para provar o resultado é suficiente mostrar que as medidas invariantes suportadas em órbitas compactas pode ser aproximadas por medidas suportadas em órbitas compactas contidas em  $\mathcal{V}$ . Para tal fim, vamos utilizar o grafo  $\mathcal{G}$  associado a um sistema de Markov  $\mathcal{M}$  construído no Teorema 3.42.

Como as seções do sistema de Markov podem ter o diâmetro tão pequeno quanto se queira, podemos supor que uma das seções retangulares está contida no aberto  $\mathcal{V}$ . Seja  $p_0 \in \mathcal{G}$  o vértice correspondente a seção retangular  $\Sigma_{p_0}$  contida em  $\mathcal{V}$ .

Dada uma órbita compacta  $\mathcal{O}_q$ , seja  $\Sigma_p$  uma seção retangular que intersecta a órbita  $\mathcal{O}_q$ . Associamos a  $\mathcal{O}_q$  um caminho orientado fechado  $\gamma$  iniciando no vértice  $p \in \mathcal{G}$ . Seja  $\gamma^k$  esse mesmo caminho orientado fechado iterado  $k$  vezes. Como o grafo é completo existe um caminho orientado  $\delta$  de  $p_0$  para  $p$  e um caminho orientado  $\delta'$  de  $p$  para  $p_0$ .

Desse modo,  $\delta\gamma^k\delta'$  é um caminho orientado fechado em  $p_0$ . Pelo Teorema 3.42 associamos uma órbita compacta  $\mathcal{O}_{\delta\gamma^k\delta'}$  realizando as respectivas transições entre as seções retangulares correspondentes do caminho orientado fechado  $\delta\gamma^k\delta'$ . Note que,  $\mathcal{O}_{\delta\gamma^k\delta'}$  esta contida em  $\mathcal{V}$  que é invariante pela ação. Seja  $\mu_k$  a medidas de probabilidade suportada em  $\mathcal{O}_{\delta\gamma^k\delta'}$  e  $\mu_q$  a medida suportada em  $\mathcal{O}_q$ . Quando  $k$  tende ao infinito, as medidas  $\mu_k$  dão mais peso a região que contém  $\mathcal{O}_q$ . Portanto,  $\mu_k$  convergem para a medida  $\mu_q$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

### 4.3 Prova do Teorema II

Nessa seção provamos o teorema principal desse capítulo. Para isso, considere o seguinte lema técnico.

**Lema 4.7.** *Seja  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave tal que  $\int h d\mu < 0$  para toda medida de probabilidade  $\mu$  invariante por  $\phi$  em  $M$ . Para cada  $v \in \mathcal{U}$  existe uma função suave  $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h + X_v(f_v) < 0$ . Onde  $X_v(f_v)$  denota a derivada de  $f_v$  na direção de  $X_v$ .*

*Demonstração.* Considere uma função  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int h d\mu < 0$  para toda medida  $\mu$  que é  $\phi$ -invariante. Para  $T \in \mathbb{R}_{++}^k$  com  $\|T\|$  suficientemente grande a função  $h_T$  é negativa, ou seja,

$$\begin{aligned} h_T(x) &= \frac{1}{T_1 \cdots T_k} \int_{t_1=0}^{T_1} \cdots \int_{t_k=0}^{T_k} h(\phi(t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k, x)) dt_1 \cdots dt_k \\ &= \frac{1}{T_1 \cdots T_k} \int_{\mathcal{O}_T(x)} h \\ &< 0. \end{aligned}$$

De fato, suponha que existem sequências  $x_n \in M$  e  $T_n \in \mathbb{R}_{++}^k$ ,  $\|T_n\| \rightarrow \infty$ , de modo que  $h_{T_n}(x_n) \geq 0$ . Considere a medida de probabilidade  $\mu_n$  uniformemente distribuída em  $\mathcal{O}_{T_n}(x_n)$ . Logo, qualquer limite fraco da sequência  $\mu_n$  é uma medida de probabilidade invariante  $\mu$  tal que  $\int h d\mu \geq 0$  contrariando a hipótese.

Para cada  $v \in \mathcal{U}$  tomando  $t > 0$  suficientemente grande de modo que  $h_{tv}$  seja negativa. Assim, a função  $k_v(x) = \frac{1}{t} \int_0^t h(\phi(sv, x)) ds$  também é negativa. Considere duas medidas de probabilidade em  $\mathbb{R}$ , a primeira é a medida de Dirac  $\delta_0$  que dá massa ao ponto 0 e a segunda é  $\gamma_{tv}$  que é uniformemente distribuída no segmento  $[0, tv]$ . Então a diferença  $\gamma_{tv} - \delta_0$  é derivativo (no sentido de distribuições) da função

$$\begin{aligned} s \in \mathbb{R} \rightarrow (\gamma_{tv} - \delta_0)(] - \infty, s[) &= \frac{s}{t} - 1 & \text{se } s \in [0, t] \\ &= 0 & \text{c./c.} \end{aligned}$$

Em outras palavras, temos a seguinte fórmula para toda função suave  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) \Psi'(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \Psi(s) ds - \Psi(0).$$

Considere a função  $f_v$  dada abaixo

$$f_v(x) = \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) h(\phi(sv, x)) ds.$$

Segue da construção que a função  $f_v$  satisfaz  $h + X_v(f_v) = k_v < 0$ . □

Assumindo a Proposição 4.6 e o Lema 4.7, podemos terminar a prova do teorema verificando que  $\mathcal{V}$  deve ser vazio. De fato, assumindo que  $\mathcal{V} \neq \emptyset$ , a Proposição 4.6 garante que para cada  $\nu \in \mathcal{U}$  temos  $\int h_\nu d\mu < 0$  para toda medida de probabilidade invariante pela ação  $\phi$ . O último lema implica que existe uma função  $f_\nu$  tal que  $h_\nu + X_\nu(f_\nu) < 0$ . Assim, o divergente de  $X_\nu$  com respeito a forma de volume  $\Omega_\nu = \exp(f_\nu)\Omega$  é dado pela fórmula a seguir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_\nu}\Omega_\nu &= \exp(f_\nu)X_\nu(f_\nu)\Omega + \exp(f_\nu)h_\nu\Omega \\ &= (h_\nu + X_\nu(f_\nu))\Omega_\nu \end{aligned}$$

Sendo  $h_\nu + X_\nu(f_\nu)$  negativo implica que a medida associada à  $\Omega_\nu$  é contrativa na direção do fluxo  $\phi^{t\nu}$ . O que é uma contradição, pois a massa total de  $M$  tem de ser preservada pela ação  $\phi$ , em particular pelo fluxo  $\phi^{t\nu}$ .





## TEOREMA DE PLANTE

Nesse capítulo, de maneira independente dos Capítulos 3 e 4, continuamos nosso estudo para apresentar resultados na direção da conjectura de Verjovsky para ações. Neste sentido, mostramos a seguinte dicotomia:

**Teorema IV** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov transitiva por subcones regulares. Então existem duas possibilidades:*

1. *Cada folha instável forte e estável forte é densa em  $M$ , ou;*
2. *A ação  $\phi$  é uma suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  em uma variedade compacta de codimensão  $k$ .*

Este teorema generaliza um resultado de Plante para fluxos de Anosov, obtido em [4]. Observemos que neste teorema a ação não é necessariamente de codimensão um. A prova do Teorema IV será dada em três etapas que a seguir descrevemos. Na Seção 5.1, sob a condição de transitividade por cones da ação, mostramos a minimalidade de  $\mathcal{F}^{ss}$  (resp.  $\mathcal{F}^{uu}$ ) é dada pela densidade das folhas desta folheação nos pontos cuja órbita compacta, Proposição 5.3. Em seguida, na Seção 5.2, tomamos  $K$ , o fecho de uma folha instável forte, não densa em  $M$ , por um ponto cuja órbita é compacta e mostramos que:  $M$  é um fibrado sobre o toro  $\mathbb{T}^k$  com fibra  $K$  e as fibras são invariantes pela ação. Consequentemente a ação  $\phi$  é uma suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  no toro  $\mathbb{T}^k$  (ver Proposição 5.4). Finalmente na Seção 5.3, mostramos o teorema principal deste capítulo. Primeiro, supondo que o primeiro item do Teorema IV não ocorra, então a Proposição 5.3 garante a existência do fibrado dado pela Proposição 5.4. Além disso pelas Proposições 5.6 e 5.7 obtemos que o sub-fibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é integrável. Concluímos a prova do teorema mostrando que a fibra  $K$  é uma folha tangente a este sub-fibrado.

Uma consequência importante deste resultado junto com o Teorema 2.35 para ações de codimensão um é a seguinte:

**Teorema III.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov de codimensão um de classe  $C^2$  em uma variedade compacta  $M$  de dimensão maior que  $k + 2$ . Se uma das folheações  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^{uu}$  não é minimal, então a ação  $\phi$  é suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ .*

## 5.1 Densidade das folhas instáveis e estáveis

Considere uma ação Anosov transitiva em subcones regulares  $\phi$  de  $\mathbb{R}^k$  sobre a variedade compacta conexa  $M$ . Fixemos  $\mathcal{A}_0$  uma componente conexa do conjunto dos elementos de Anosov  $\mathcal{A}$ . Recordando que um subcone regular  $\mathcal{S}$  é um cone aberto convexo contido na componente  $\mathcal{A}_0$ . Seguindo a notação utilizada por Plante, [4], definimos os pontos periódicos da ação com respeito ao subcone regular  $\mathcal{S}$ .

**Definição 5.1** (Conjunto de pontos periódicos). Um ponto  $x \in M$  é um *ponto periódico* para um subcone regular  $\mathcal{S}$  se existe  $v \in \mathcal{S}$  tal que  $\phi^v(x) = x$ . O conjunto de todos os pontos periódicos de  $\mathcal{S}$  será denotado por  $\text{Per}(\mathcal{S})$ .

Como vimos no capítulo inicial, a Proposição 2.24 garante que qualquer órbita cujo subgrupo de isotropia contém um elemento de Anosov é compacta. Por outro lado, o subgrupo de isotropia de uma órbita compacto é um reticulado em  $\mathbb{R}^k$ . Segue da Proposição 2.28 diz que todo reticulado em  $\mathbb{R}^k$  contém um elemento de Anosov em  $\mathcal{S}$ . Dessa maneira, o conjunto  $\text{Per}(\mathcal{S})$  é formado por todas as órbitas compactas da ação  $\phi$ .

O conjunto não errante  $\Omega(\mathcal{S})$  concentra a parte interessante da dinâmica respectiva ao subcone regular  $\mathcal{S}$ . A Proposição 2.30, generaliza o resultado de difeomorfismos e fluxos de Anosov, garante que o conjunto  $\text{Per}(\mathcal{S})$  é denso em  $\Omega(\mathcal{S})$ .

Para analisarmos a densidade das folhas fracas  $\mathcal{F}^u$  e  $\mathcal{F}^s$ , podemos nos restringir a um subconjunto de cada folha. Para um ponto  $x \in M$  considere os seguintes conjuntos.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^u(x) &= \bigcup_{v \in \mathcal{S}} \phi^v \mathcal{F}^{uu}(x) \\ \mathcal{F}_{\mathcal{S}}^s(x) &= \bigcup_{v \in \mathcal{S}} \phi^{-v} \mathcal{F}^{ss}(x)\end{aligned}$$

Sob a condição que a ação Anosov é transitiva em subcones regulares, então os conjuntos acima são densos na variedade. Em particular, as folhas fracas  $\mathcal{F}^u(x)$  e  $\mathcal{F}^s(x)$  são densas na variedade  $M$  para todo  $x \in M$ .

**Proposição 5.2.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov transitiva em subcones regulares, então para todo subcone regular  $\mathcal{S}$  e para todo  $x$  os conjuntos  $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^u(x)$  e  $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^s(x)$  são densos em  $M$ .*

*Demonstração.* Como a ação é transitiva em subcones regulares temos  $\Omega(\mathcal{S}) = M$ . Fixe um ponto  $x \in M$  e tome  $z \in \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^u(x)}$ . Utilizando o Teorema 2.19, do produto local, para cada  $\delta > 0$  considere a vizinhança produto de  $z$  em  $M$  dada por:

$$N_\delta(z) = [\mathcal{F}_\delta^{ss}(z), \mathcal{F}_\delta^u(z)]^s.$$

Como órbitas compactas são densas em  $\Omega(\mathcal{S})$ , Proposição 2.30, existe órbita compacta  $L$  que intersecta  $N_\delta(z)$ . Mais ainda pelo Teorema 2.25, *Closing lemma*, existe  $v \in \mathcal{S} \cap \Gamma_L$  tal que para todo  $y \in L \cap N_\delta(z)$  temos  $\phi^v(y) = y$ . Observe que se  $y \in L \cap N_\delta(z)$  então  $\mathcal{F}^{ss}(y) \cap \mathcal{F}^u(z) \neq \emptyset$ . Além disso, para todo  $w \in \mathcal{F}^{ss}(y) \cap \mathcal{F}^u(z)$  temos  $\phi^{nv}(w) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ .

Como  $\phi^v \overline{\mathcal{F}_\mathcal{S}^u(x)} \subset \overline{\mathcal{F}_\mathcal{S}^u(x)}$  garantimos que  $L \cap N_\delta(z)$  está contido em  $\overline{\mathcal{F}_\mathcal{S}^u(x)}$ . Pela densidade das órbitas compactas segue que  $N_\delta(z) \subset \overline{\mathcal{F}_\mathcal{S}^u(x)}$  e por conexidade temos  $\overline{\mathcal{F}_\mathcal{S}^u(x)} = M$ . Repetindo os argumentos para a vizinhança  $N_\delta(z) = [\mathcal{F}_\delta^s(z), \mathcal{F}_\delta^{uu}(z)]^u$  e iterando por  $\phi^{-v}$ , obtemos de maneira análoga a densidade de  $\mathcal{F}_\mathcal{S}^s(x)$ .  $\square$

O próximo resultado apresenta o que ocorre quando a densidade em órbitas compactas. Apesar de apresentarmos esse resultado para a folheação forte instável, o argumento para a folheação forte estável é inteiramente análogo.

**Proposição 5.3.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov transitiva em subcones regulares. Suponha que  $\mathcal{F}^{uu}(p)$  ( $\mathcal{F}^{ss}(p)$ ) é denso para todo  $p \in \text{Per}(\mathcal{S})$  então  $\mathcal{F}^{uu}(x)$  ( $\mathcal{F}^{ss}(x)$ ) é denso em  $M$  para todo  $x \in M$ .*

*Demonstração.* Iremos provar para  $\mathcal{F}^{uu}$ , o argumento para  $\mathcal{F}^{ss}$  é análogo. Dados  $W \in \mathcal{F}^{uu}$  uma folha arbitrária fixa,  $x \in M$  e  $\varepsilon > 0$ , mostremos que  $W \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ . Para isso, dado  $r > 0$  seja  $N_r(x)$  o conjunto aberto

$$N_r(x) = \bigcup_{y \in \mathcal{F}_r^{uu}(x)} \mathcal{F}_r^s(x). \quad (5.1)$$

Dado  $r > 0$  existe  $\delta = \delta(r)$  tal que  $B_\delta(x) \subset N_r(x)$  para todo  $x \in M$ . Devido a hipótese sobre a ação temos  $\Omega(\mathcal{S}) = M$ , o que garante pela densidade das órbitas compactas que podemos tomar uma cobertura finita  $B_{\delta(\varepsilon/2)}(p_1), \dots, B_{\delta(\varepsilon/2)}(p_m)$  de  $M$  tal que  $p_i \in \text{Per}(\mathcal{S})$ . Tomamos  $v_i \in \Gamma_{p_i} \cap \mathcal{S}$  e afirmamos que existe  $t > 0$  tal que

$$\phi^{tv_i}(\mathcal{F}_{\varepsilon/2}^{uu}(p_i)) \cap B_{\varepsilon/2}(x) \neq \emptyset, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Sendo  $\mathcal{F}^{uu}(p_i)$  denso, existe  $T > 0$  tal que  $\mathcal{F}_T^{uu}(p_i) \cap B_{\varepsilon/2}(x) \neq \emptyset$  para todo  $i$ . Note que, como  $B_{\varepsilon/2}(x)$  é aberto em  $M$  existe  $c > 0$  tal que

$$\phi^{tv_i}(\mathcal{F}_T^{uu}(p_i)) \cap B_{\varepsilon/2}(x) \neq \emptyset, \quad |t| < c\|v_i\|, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Pelo do Teorema 4.6 (pág.47, [23]), podemos encontrar  $t$  positivo arbitrariamente grande de modo que  $|t - n_i| < c\|v_i\|$  para alguns inteiros  $n_i = n_i(t)$  com  $i = 1, \dots, k$ . A afirmação

segue tomando  $t > 0$  suficientemente grande de modo que  $\phi^{n_i v_i}(\mathcal{F}_{\varepsilon/2}^{uu}(p_i)) \supset \mathcal{F}_T^{uu}(p_i)$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . De fato,

$$\begin{aligned} & \phi^{n_i v_i}(\mathcal{F}_{\varepsilon/2}^{uu}(p_i)) \supset \mathcal{F}_T^{uu}(p_i) \\ \Rightarrow & \mathcal{F}_{\varepsilon/2}^{uu}(p_i) \supset \phi^{-n_i v_i}(\mathcal{F}_T^{uu}(p_i)) \\ \Rightarrow & \phi^{t v_i}(\mathcal{F}_{\varepsilon/2}^{uu}(p_i)) \supset \phi^{(t-n_i)v_i}(\mathcal{F}_T^{uu}(p_i)) \end{aligned}$$

Fixemos  $t > 0$  satisfazendo a afirmação, para algum  $j \in \{1, \dots, k\}$  temos

$$\phi^{-t v_j}(W) \cap B_{\delta(\varepsilon/2)}(p_j) \neq \emptyset.$$

Sejam  $q \in \mathcal{F}_{\varepsilon/2}^{uu}(p_j) \cap \phi^{-t v_j}(B_{\varepsilon/2}(x))$  e  $y \in \phi^{-t v_j}(W) \cap \mathcal{F}_{\varepsilon/2}^s(q)$ . Assim,  $d(y, q) < \varepsilon/2$  implica  $d(\phi^{t v_j}(y), \phi^{t v_j}(q)) < \varepsilon/2$ . Portanto,

$$d(x, \phi^{t v_j}(y)) \leq d(x, \phi^{t v_j}(q)) + d(\phi^{t v_j}(q), \phi^{t v_j}(y)) \leq \varepsilon.$$

Como  $\phi^{t v_j}(y) \in W$ , segue o resultado. □

Esse resultado encerra a parte sobre densidade.

## 5.2 Existência de uma fibração transversal à ação

Nem sempre as folhas das folheações  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^{uu}$  são densas em  $M$ . Por exemplo, se a ação Anosov  $\phi$  é suspensão de uma ação Anosov de  $\mathbb{Z}^k$  então cada folha de  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^{uu}$  está contida em uma subvariedade compacta de codimensão  $k$  em  $M$ . Mais ainda, neste caso a  $M$  é um fibrado cujas fibras são invariantes pela ação. Se apenas supomos que uma das folhas fortes não é densa, então pela Proposição 5.3, existe uma folha forte não densa passando por ponto cuja órbita é compacta. Nestas condições obtemos a Proposição 5.4.

A cada ponto  $p \in \text{Per}(\mathcal{S})$  podemos associar geradores  $e_1, \dots, e_k$  do subgrupo de isotropia  $\Gamma_p$  que são elementos do subcone regular  $\mathcal{S}$ . Como  $\Gamma_p$  é um reticulado, podemos escolher tais geradores de modo que possuam norma mínima. Além disso, tais geradores formam uma base de  $\mathbb{R}^k$ . A partir desses geradores, podemos definir o paralelogramo de elementos de Anosov a seguir.

$$I_p = \{t_1 e_1 + \dots + t_k e_k \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, k, t_i \neq 0, \text{ para algum } i\}$$

O conjunto  $I_p$  realiza completamente à órbita  $\mathcal{O}_p$ .

**Proposição 5.4.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov transitiva em subcones regulares. Seja  $p \in \text{Per}(\mathcal{S})$  tal que  $\mathcal{F}^{uu}(p)$  ( $\mathcal{F}^{ss}(p)$ ) não é denso em  $M$ . Então  $M$  é fibrada sobre o toro  $\mathbb{T}^k$  com fibra*

$K = \overline{\mathcal{F}^{uu}(p)} = (\mathcal{F}^{ss}(p))$  e a ação  $\phi$  é uma suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  sobre  $K$  formada pelos homeomorfismos  $h_i : K \rightarrow K$  com  $i = 1, \dots, k$ .

*Demonstração.* Novamente iremos provar para a folheação  $\mathcal{F}^{ss}$ , o argumento para a folheação  $\mathcal{F}^{ss}$  é análogo. Como a órbita de  $p$  é compacta e  $I_p$  realiza a órbita total de  $p$  temos

$$\bigcup_{v \in I_p} \overline{\phi^v(\mathcal{F}^{uu}(p))} = \bigcup_{v \in \mathcal{S}} \overline{\phi^v(\mathcal{F}^{uu}(p))} \supset \bigcup_{v \in \mathcal{S}} \phi^v(\mathcal{F}^{uu}(p)) = \mathcal{F}_{\mathcal{S}}^u(p).$$

Sendo a variedade  $M$  compacta então  $\overline{\phi^v(\mathcal{F}^{uu}(p))}$  é um subconjunto compacto e consequentemente  $\phi(I_p, \overline{\phi^v(\mathcal{F}^{uu}(p))}) = \bigcup_{v \in I_p} \overline{\phi^v(\mathcal{F}^{uu}(p))}$  é compacto, em particular fechado. Sendo  $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^u(p)$  denso em  $M$  temos

$$M = \bigcup_{v \in I_p} \overline{\phi^v(\mathcal{F}^{uu}(p))}.$$

Seja  $K \subset \mathcal{F}^{uu}(p)$  não vazio um conjunto minimal com respeito as seguintes condições:

1.  $K$  é fechado em  $M$ ;
2.  $K$  é  $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado;
3.  $\phi^{e_i}(K) = K$  para  $i = 1, \dots, k$ .

Tal conjunto existe pelo *Lema de Zorn*. Como  $K$  é  $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado então  $K$  é união de folhas da folheação  $\mathcal{F}^{uu}$ . As condições 1,2 e 3 implicam

$$M = \bigcup_{v \in I_p} \phi^v(K) = \phi(I_p, K).$$

A família  $\{\phi^v K\}_{v \in I_p}$  define uma partição de  $M$ . De fato, suponha  $K \cap \phi^v(K) \neq \emptyset$  para algum  $v \in \mathcal{S}$ . Como tal interseção satisfaz os itens (1), (2) e (3), segue pela minimalidade que  $K \cap \phi^v(K) = K$  e, portanto,  $K \subset \phi^v(K)$ . Note ainda que para todo  $u \in \mathcal{S}$  os conjuntos  $\phi^{-u}(K)$  e  $\phi^u(K)$  satisfazem as condições (1), (2) e (3). Sendo  $K$  minimal e  $\phi^{-v}(K) \subset K$  devemos ter  $\phi^v(K) = K$ .

Defina  $s_i = \inf\{t > 0 \mid \phi^{te_i}(K) \cap K \neq \emptyset\}$  para  $i = 1, \dots, k$ . Afirmamos que  $s_i > 0$ . De fato, suponha que para algum  $e_i > 0$  existe  $t > 0$  arbitrariamente pequeno de modo que  $\phi^{te_i}(K) \cap K \neq \emptyset$ . Pelo parágrafo anterior, isto implica que  $K \supset \phi^{nte_i}(K)$  para  $t$  arbitrariamente pequeno e para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Assim, o conjunto  $\{t \in \mathbb{R} \mid K \supset \phi^{te_i}(K)\}$  é denso em  $\mathbb{R}$ . Consequentemente,  $K \supset \phi^{te_i}(K)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Dado o segmento  $[0, e_i]$  contido em  $\mathbb{R}^k$ , por continuidade para cada  $t \in [0, 1]$  existe  $\delta_t > 0$  tal que se  $v \in B(te_i, \delta_t)$  então  $\phi^v(K) \cap K \neq \emptyset$ . Considere  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$  de modo que

$$[0, e_i] \subset \bigcup_{j=0}^k B(t_j e_i, \delta_{t_j}).$$

Podemos supor sem perda de generalidade que  $B(t_j e_i, \delta_{t_j}) \cap B(t_l e_i, \delta_{t_l}) \neq \emptyset$  se  $|j - l| > 1$ . Fixemos  $j$  que determina o menor diâmetro da interseção  $B_j = B(t_j e_i, \delta_{t_j}) \cap B(t_{j+1} e_i, \delta_{t_{j+1}})$  e tome  $y \in [0, e_i] \cap B_j$  e  $\alpha > 0$  de maneira que  $B(y, \alpha) \subset B_j$ . Consequentemente,

$$\mathcal{S}_1(y) = \bigcup_{t \in [0, 1]} tB(y, \alpha) \subset \bigcup_{j=0}^k B(t_j e_i, \delta_{t_j}).$$

Como para todo  $v \in \mathcal{S}_1(y)$  temos  $\phi^v(K) \cap K \neq \emptyset$ , segue que  $\mathcal{S}(y) = \bigcup_{t > 0} tB(y, \alpha)$  é um cone aberto tal que para todo  $v \in \mathcal{S}(y)$  temos  $\phi^v(K) \cap K \neq \emptyset$ . Diminuindo  $\alpha$  se necessário, temos  $\mathcal{S}(y) \subset \mathcal{S}$ . Uma vez que, o subgrupo de isotropia  $\Gamma_p$  é um reticulado podemos tomar uma nova base  $\{u_i\}$  de  $\mathbb{R}^k$  em  $\Gamma_p$ . Iremos escolher  $u_1 = e_i$  e os outros termos  $u_j = \sum t_l e_l$  com  $t_l \geq 0$  e  $u_j \in \mathcal{S}(y)$ .

Seja  $\mathcal{S}(u_1, \dots, u_k) = \{\sum t_i u_i \mid t_i \geq 0\} \subset \mathcal{S}$  gerado pela base  $u_1, \dots, u_k$ . Para cada  $v \in \mathcal{S}(u_1, \dots, u_k)$  temos  $\phi^v(K) \cap K \neq \emptyset$  e, pela observação inicial temos  $\phi^v(K) = K$ . Portanto,

$$K = \bigcup_{v \in \mathcal{S}(u_1, \dots, u_k)} \phi^v K = \bigcup_{v \in \mathcal{S}} \phi^v K. \quad (5.2)$$

Sendo  $K$  fechado e saturado pela folheação  $\mathcal{F}^{uu}$ , segue do Lema 5.2 e da Igualdade 5.2 que  $K = M$ . Isso é uma contradição, pois  $K \subset \overline{\mathcal{F}^{uu}(p)}$  e por hipótese  $\mathcal{F}^{uu}(p)$  não é denso em  $M$ . Portanto, cada  $s_i$  é estritamente positivo e  $M$  pode ser escrito através da seguinte união disjunta.

$$M = \bigcup_{0 \leq t_1 \leq s_1} \dots \bigcup_{0 \leq t_k \leq s_k} \phi(t_1 e_1 + \dots + t_k e_k, K).$$

Sendo  $\phi^v(K)$  um conjunto  $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado para todo  $v \in \mathcal{S}$  e a união acima é disjunta, segue que  $\mathcal{F}^{uu}(p)$  deve estar contida em alguma das fibras e, assim  $K = \overline{\mathcal{F}^{uu}(p)}$ . Definimos a projeção  $M \rightarrow \mathbb{T}^k$  dado por  $\phi(t_1 e_1 + \dots + t_k e_k, x) \rightarrow (t_1 \bmod s_1, \dots, t_k \bmod s_k)$  onde  $x \in K$  e os homeomorfismos  $h_i = \phi^{s_i e_i}|_K$  com  $i = 1, \dots, k$  determinam a ação de  $\mathbb{Z}^k$  sobre  $K$ .  $\square$

### 5.3 Prova do Teorema IV

Nas proposições 5.6 e 5.7 estabelecemos uma relação entre densidade das folhas fortes e integrabilidade do subfibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$ . Concluímos a prova do teorema mostrando que, com nossas hipóteses, a fibra  $K$  (dada pela Proposição 5.4) é uma folha tangente ao subfibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$ .

Para iniciarmos as questões sobre integrabilidade é necessário apresentarmos a noção de *simultaneamente integrável* para ações de Anosov de  $\mathbb{R}^k$  sobre uma variedade  $M$ .

Considere  $N = [\mathcal{F}_\delta^s(x), \mathcal{F}_\delta^{uu}(x)]^u$  uma vizinhança produto, Teorema 2.19, do ponto  $x$  em  $M$ . Se  $y$  e  $z$  estão na mesma folha forte instável em  $N$ , então existe  $\rho > 0$  tal que a aplicação  $\pi_{y,z} : \mathcal{F}_\rho^s(y) \rightarrow \mathcal{F}_\delta^s(z)$  dada pela projeção ao longo das folhas instáveis é bem definida.

**Definição 5.5.** As folheações  $\mathcal{F}^{uu}$  e  $\mathcal{F}^{ss}$  serão ditas *simultaneamente integráveis na vizinhança produto*  $N$  se para  $y, z$  e  $\rho$  como acima temos

$$\pi_{y,z}(\mathcal{F}^{ss}(u) \cap \mathcal{F}_\rho^s(y)) \subset \mathcal{F}^{ss}(\pi_{y,z}(u)) \cap \mathcal{F}_\delta^s(z), \quad \forall u \in \mathcal{F}_\rho^s(y). \quad (5.3)$$

As folheações  $\mathcal{F}^{uu}$  e  $\mathcal{F}^{ss}$  serão *simultaneamente integráveis* se todo ponto de  $M$  esta em uma vizinhança produto  $N$  em que as folheações são simultaneamente integráveis. Neste caso, também dizemos que os subfibrados  $E^{ss}$  e  $E^{uu}$  são simultaneamente integráveis.

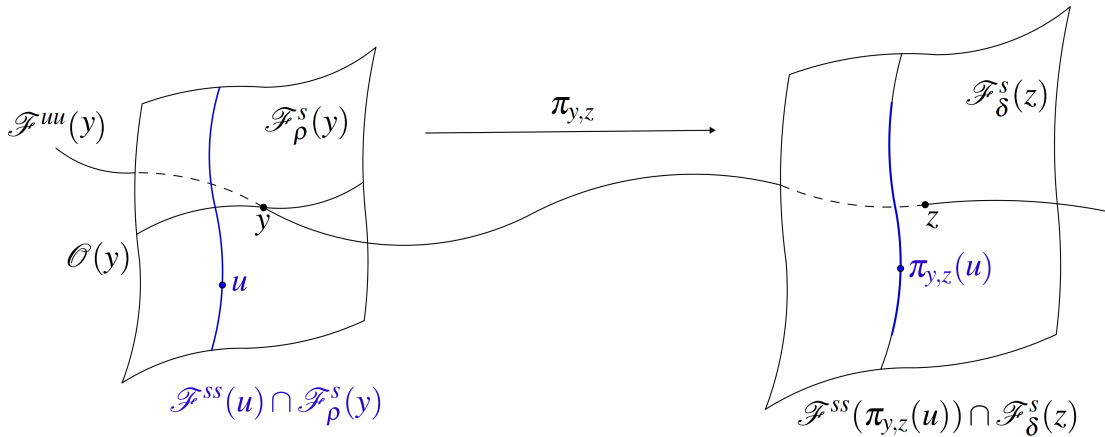


Figura 10 – A projeção ao longo da folheação forte instável preserva as folhas fortes estáveis.

Queremos utilizar a noção de simultaneamente integrável para relacionar com a integrabilidade no sentido de folheações apresentada no Capítulo 2. O resultado a seguir garante que tal definição é equivalente a integrabilidade do par  $E^{ss} \oplus E^{uu}$ .

**Proposição 5.6.** *Seja  $\phi$  uma ação Anosov transitiva em subcones regulares.  $\mathcal{F}^{uu}$  e  $\mathcal{F}^{ss}$  são simultaneamente integráveis se, e somente se,  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  é integrável.*

*Demonstração.* Caso  $E^{ss} \oplus E^{uu}$  seja integrável é imediato que  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^{uu}$  são simultaneamente integráveis. Suponha agora que  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^{uu}$  são simultaneamente integráveis.

Sejam  $p \in M$  e  $y \in \mathcal{F}_{\delta/2}^{uu}(p)$  temos  $\pi_{p,y}(p) = y$  e  $\pi_{p,y}(w) = \mathcal{F}_{\delta/2}^{uu}(w) \cap \mathcal{F}_{\delta/2}^s(y) = [w, y]^s$  para todo  $w \in \mathcal{F}_{\delta/2}^s(p)$ . Assim,  $[\mathcal{F}_{\delta/2}^{ss}(p), y]^s = \pi_{p,y}(\mathcal{F}_{\delta/2}^{ss}(p)) \subset \mathcal{F}_{\delta/2}^s(y)$  e

$$V(p, \delta/2) = [\mathcal{F}_{\delta/2}^{ss}(p), \mathcal{F}_{\delta/2}^{uu}(p)]^s = \bigcup_{y \in \mathcal{F}_{\delta/2}^{uu}(p)} [\mathcal{F}_{\delta/2}^{ss}(p), y]^s \subset \bigcup_{y \in \mathcal{F}_{\delta/2}^{uu}(p)} \mathcal{F}_{\delta/2}^s(y).$$

Note que, esses os discos  $V(p, \delta/2)$  são invariantes pelo subcone regular  $\mathcal{S}$  no sentido que para todo  $v \in \mathcal{S}$  existe  $\alpha$  e  $\beta$  positivos tais que  $\phi^v V(p, \alpha) \subset V(\phi^v(p), \beta)$ . Além disso, através das vizinhanças  $N$ , podemos verificar que  $L(p) = \bigcup_{y \in \mathcal{F}^{uu}(p)} \mathcal{F}^{ss}(y)$  é uma subvariedade de  $M$  de codimensão  $k$ .

Denotemos por  $\mathcal{F}$  a coleção de subvariedades dada acima cujo fibrado tangente é  $E^{ss} \oplus E^{uu}$ . Precisamos verificar que tal coleção é de classe  $C^1$ . Devido a invariância pelo subcone  $\mathcal{S}$ , podemos definir em cada ponto  $p \in \text{Per}(\mathcal{S})$  uma carta coordenada  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+n}$  ( $k+n = \dim M$ ) da seguinte maneira.

O subgrupo de isotropia  $\Gamma_p$  é um reticulado em  $\mathbb{R}^k$ , assim podemos fixar uma base  $\{u_1, \dots, u_k\}$  do  $\mathbb{R}^k$  contida em  $\mathcal{S} \cap \Gamma_p$ . Seja  $B \subset L(p)$  uma bola aberta contida na folha  $L(p)$  de  $\mathcal{F}$  que contém o ponto  $p$  e  $\eta : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  um mergulho de classe  $C^1$ . Defina  $B_\delta^k$  a bola de centro  $(1, 0, \dots, 0)$  e raio  $\delta$  em  $\mathbb{R}^k$

$$U = \bigcup_{(t_1, \dots, t_k) \in B_\delta^k} \phi(t_1 u_1 + \dots + t_k u_k, B)$$

e de modo que se  $\delta > 0$  for suficientemente pequeno então a aplicação  $B \times B_\delta^k \rightarrow U$  dada por  $(x, (t_1, \dots, t_k)) \mapsto \phi(t_1 u_1 + \dots + t_k u_k, x)$  é um homeomorfismo e  $t_1 u_1 + \dots + t_k u_k \in \mathcal{S}$ . Definimos  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+n}$  por  $\psi(\phi(t_1 u_1 + \dots + t_k u_k, x)) = (\eta(x), (t_1, \dots, t_k))$ . A aplicação  $\psi$  é de classe  $C^1$ . Como  $\text{Per}(\mathcal{S})$  é denso em  $M$  a coleção de cartas  $\{\psi\}$  determinam a folheação  $\mathcal{F}$  de classe  $C^1$  de  $M$ .  $\square$

O resultado anterior estabelece uma definição alternativa para a noção de integrabilidade do subfibrado  $E^{ss} \oplus E^{uu}$ . Dessa maneira, precisamos relacionar a densidade das folhas forte com a integrabilidade do par  $E^{ss} \oplus E^{uu}$ .

**Proposição 5.7.** *Se alguma folha forte instável ou forte estável não é densa em  $M$  então  $\mathcal{F}^{uu}$  e  $\mathcal{F}^{ss}$  são simultaneamente integráveis.*

*Demonstração.* Vamos supor que alguma folha de  $\mathcal{F}^{uu}$  não é densa. Pela Proposição 5.3 existe uma  $\mathcal{F}^{uu}(p)$  que não é densa em  $M$  para algum ponto  $p \in \text{Per}(\mathcal{S})$ . Logo podemos aplicar a Proposição 5.4. Seja  $K = \overline{\mathcal{F}^{uu}(p)}$  a fibra que é saturada pela folheação  $\mathcal{F}^{uu}$ . Note que,  $K$  também é saturada por  $\mathcal{F}^{ss}$ . De fato, dados  $u$  e  $v$  pontos na mesma folha estável forte, pela definição das funções  $h_i$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(h_i^n(u), h_i^n(v)) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Como cada  $h_i$  deixa as fibras invariantes concluímos que  $u$  e  $v$  devem estar na mesma fibra, ou seja, as fibras são saturadas por  $\mathcal{F}^{ss}$ . Considere a aplicação  $\pi_{y,z} : \mathcal{F}_\rho^s(y) \rightarrow \mathcal{F}_\rho^s(z)$  como definida anteriormente onde  $y$  e  $z$  estão na mesma folha instável na vizinhança produto. Sendo



a aplicação  $\pi_{y,z}$  a projeção ao longo da folheação  $\mathcal{F}^{uu}$ , os conjuntos  $\pi_{y,z}(\mathcal{F}^{ss}(y) \cap \mathcal{F}_\rho^s(y))$  e  $\mathcal{F}^{ss}(y) \cap \mathcal{F}_\rho^s(y)$  estão na mesma fibra, pois as fibras são saturadas

Suponha que  $\pi_{y,z}(\mathcal{F}^{ss}(y) \cap \mathcal{F}_\rho^s(y))$  não esteja contido em  $\mathcal{F}^{ss}(z) \cap \mathcal{F}_\delta^s(z)$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de 0 em  $\mathbb{R}^k$  tal que para todo  $t \in U$  implica que  $\phi(t_1e_1 + \dots + t_ke_k, K) \cap K \neq \emptyset$ . Tal fato é uma contradição com a Proposição 5.4 e, portanto segue o resultado.  $\square$

Agora já estamos prontos para concluir a dicotomia entre densidade das folhas fortes estáveis e instáveis e a ação ser suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$ .

**Teorema IV.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$  uma ação Anosov transitiva em subcones regulares tal que para algum subcone regular  $\mathcal{S}$  temos  $\Omega(\mathcal{S}) = M$ . Então existem duas possibilidades:*

1. *Cada folha instável forte e estável forte é densa em  $M$ , ou;*
2. *A ação  $\phi$  é uma suspensão de uma ação de  $\mathbb{Z}^k$  em uma variedade compacta de codimensão  $k$ .*

*Demonstração.* Se alguma folha instável ou estável não é densa em  $M$  então  $E^{uu} \oplus E^{ss}$  é integrável. Seja  $L$  uma folha da folheação  $\mathcal{F}$  que integra  $E^{uu} \oplus E^{ss}$  e seja  $K$  uma fibra da fibração dada pela Proposição 5.4 tal que  $L \subset K$ . Como  $L$  contém uma folha estável forte segue que  $L$  é densa em  $K$ .

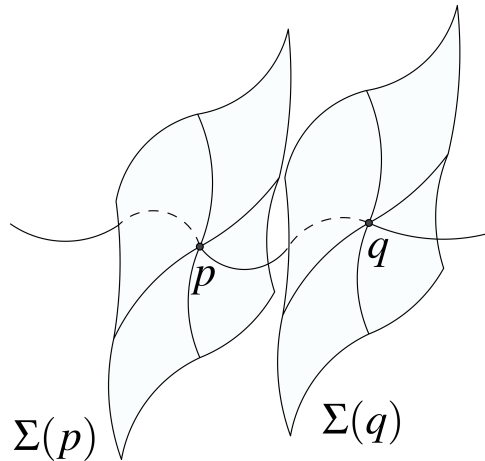


Figura 11 – Proximidade entre os pontos  $p$  e  $q$  contidos em  $L$ .

Suponha que  $L$  não é fechada e tome um ponto  $z \in \bar{L}$ . Dado  $\beta > 0$  considera a seguinte seção transversal  $\Sigma(z) = [\mathcal{F}_\beta^{uu}(z), \mathcal{F}_\beta^{ss}(z)]^s$ , a partir da qual obtemos a vizinhança

$$V(z) = \bigcup_{t_1=0}^1 \cdots \bigcup_{t_k=0}^1 \phi(t_1e_1 + \dots + t_ke_k, \Sigma(z)).$$

Desse modo, existem  $p$  e  $q$  em  $L \cap V(z)$  que são arbitrariamente próximos na métrica de  $M$  mas arbitrariamente separados na métrica induzida em  $L$ , conforme Figura 11. Sendo  $E^{ss}$  e  $E^{uu}$  simultaneamente integráveis, existe  $\alpha > 0$  tal que as seções  $\Sigma(p) = [\mathcal{F}_\alpha^{uu}(p), \mathcal{F}_\alpha^{ss}(p)]^s$  e  $\Sigma(q) = [\mathcal{F}_\alpha^{uu}(q), \mathcal{F}_\alpha^{ss}(q)]^s$  estão contidas em  $L \cap V(z)$ .

Nesse ponto obtemos uma contradição, pois tal fato garante que existe  $(t_1, \dots, t_k)$  de norma arbitrariamente pequena de modo que  $\phi(t_1 e_1 + \dots + t_k e_k, K) \cap K \neq \emptyset$ . Portanto,  $L$  é fechada e podemos concluir a igualdade  $L = K$ .  $\square$

## REFERÊNCIAS

---



---

- [1] T. Barbot and C. Maquera, *On integrable codimension one Anosov actions of  $\mathbb{R}^k$* , vol. 29, pp. 803–822. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2011.
- [2] E. Ghys, *Codimension one Anosov flows and suspensions*, vol. 1331 of *Lectures Notes in Math.*, pp. 59–72. Berlin: Springer, 1988.
- [3] M. Ratner, *Markov partitions for Anosov flows on  $n$ -dimensional manifolds*, vol. 15, pp. 92–114. *Israel J. of Math*, 1973.
- [4] J. Plante, *Anosov flows*, vol. 94, pp. 729–754. *American Journal of Mathematics*, 1972.
- [5] J. Franks, “Anosov diffeomorphisms,” vol. 14 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, (Providence, RI), pp. 61–93, American Mathematical Society, 1970.
- [6] S. Newhouse, *On codimension one Anosov diffeomorphisms*, vol. 92, pp. 761–770. American Mathematical Society, 1970.
- [7] A. Manning, *There are no new Anosov diffeomorphisms on tori*, vol. 96 of *American Journal of Mathematics*, pp. 422–429. Johns Hopkins University Press, 1974.
- [8] C. Bonatti and R. Langevin, *Un exemple de flot d’Anosov transitif transverse à un tore et non conjugué à une suspension*, vol. 14, pp. 633–643. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1994.
- [9] S. Simic, *Codimension one Anosov flows and a conjecture of Verjovsky*, vol. 17, p. 1211–1231. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1997.
- [10] M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub, *Invariant manifolds*, vol. 583 of *Lectures Notes in Math.*, pp. 1015–1019. Berlin: Springer, 1977.
- [11] J. Palis and J.-C. Yoccoz, *Centralizers of Anosov diffeomorphisms on tori*, vol. 22 of *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, pp. 99–108. Elsevier, 1989.
- [12] T. Barbot and C. Maquera, *Transitivity of codimension-one Anosov actions of  $\mathbb{R}^k$  on closed manifold*, vol. 31, pp. 1–22. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2011.
- [13] R. Bowen, *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*, vol. 91, pp. 725–747. *American Journal of Math.*, 1970.

- 
- [14] C. Camacho and A. Lins, *Geometric theory of foliations*. Boston: Birkhauser, 1985.
- [15] C. Pugh and M. Shub, *Ergodicity of Anosov actions*, vol. 15, pp. 1–23. *Inventiones Mathematicae*, 1972.
- [16] A. L. Onishchik and A. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*. Springer Series in Soviet Mathematics, New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 ed., 1990.
- [17] A. Katok and R. Spatzier, *First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity*, vol. 79 of *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, pp. 131–156. Springer-Verlag, 1994.
- [18] R. Adler and B. Weiss, *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*, vol. 57, pp. 1573–1576. *Proc. Nat. Acad. of Science*, 1967.
- [19] Y. Sinai, *Markov partitions and C-diffeomorphisms*, vol. 2, pp. 64–89. *Func. Anal. and its Appl.*, 1968.
- [20] Y. Sinai, *Construction of Markov partitions*, vol. 2, pp. 245–253. *Func. Anal. and its Appl.*, 1968.
- [21] M. Pollicott, *A thermodynamics approach to locally symmetric manifolds of higher rank*, vol. 46, pp. 283–304. *Portugaliae Mathematica*, 1989.
- [22] M. Einsiedler and T. Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory*, vol. 259 of *Graduate Texts in Mathematics*. New York: Springer-Verlag London, 2011.
- [23] I. Niven, *Irrational numbers*, vol. 11. *Carus Math. Monograph*, 1956.
- [24] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu, *Manifolds, tensor analysis, and applications*, vol. 75 of *Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer-Verlag London, second ed., 1988.
- [25] J. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, vol. 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. New York: Springer-Verlag London, 2012.
- [26] R. Adler, *Symbolic dynamics and Markov partitions*, pp. 1–51. No. 1, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1998.