UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Teoria Ergódica em fluxos homogêneos e Teoremas de Ratner

Thiago Rodrigo Ramos

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Thiago Rodrigo Ramos

Teoria ergódica em fluxos homogêneos e teoremas de Ratner

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Daniel Smania Brandão

USP – São Carlos
Agosto de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R175t Ramos, Thiago Rodrigo
 Teoria ergódica em fluxos homogêneos e teoremas
 de Ratner / Thiago Rodrigo Ramos; orientador Daniel
 Smania Brandão. -- São Carlos, 2018.
 85 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
 e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

 1. Teoria ergódica. 2. Espaços homogêneos. 3.
 Grupos de Lie. 4. Teoremas de Ratner. I. Brandão,
 Daniel Smania, orient. II. Título.

Thiago Rodrigo Ramos

**Ergodic theory on homogeneous flows and Ratner's
theorems**

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Daniel Smania Brandão

USP – São Carlos
August 2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Célia, Elias e Beatriz por serem minha família, mesmo eu tendo perdido tantas festas ao longo dos anos.

Agradeço à todos os amigos que fizeram parte da minha jornada em São Carlos.

Também agradeço ao Professor Daniel Smania por todos esses anos como meu orientador, e por sempre servir como minha referência do que é ser um grande profissional.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro da FAPESP (processo: 2016/01411-2), o qual foi essencial para a conclusão deste trabalho.

Em memória de Marina Ratner.

RESUMO

RAMOS, T. R. **Teoria ergódica em fluxos homogêneos e teoremas de Ratner**. 2018. 85 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Neste trabalho, provamos um caso particular do Teorema de Ratner de classificação de medidas, que nos diz que se $X = \Gamma \backslash G$ é um espaço homogêneo, onde G é um grupo de Lie e Γ é um lattice de G , então dado um subgrupo unipotente U de G , conseguimos classificar as medidas ergódicas com relação a ação por translação do grupo U em X .

Além do Teorema de Ratner de classificação de medidas, falamos sobre o Teorema de Ratner de equidistribuição e o Teorema de Ratner do fecho da órbita, que nos dizem como são as órbitas pela ação por translação do grupo U e como é sua dinâmica em X , do ponto de vista da Teoria Ergódica.

Embora estes últimos resultados não sejam provados nesta dissertação, exibimos uma importante aplicação do Teorema de Ratner do fecho da órbita em teoria dos números, provando a Conjectura de Oppenheim, também conhecida como Teorema de Margulis.

Palavras-chave: Teoria Ergódica, Espaços Homogêneos, Grupos de Lie, Teoremas de Ratner.

ABSTRACT

RAMOS, T. R. **Ergodic theory on homogeneous flows and Ratner's theorems.** 2018. [85](#) p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

In this work, we prove a particular case of the Ratner's measure classification theorem, which tell us that if $X = \Gamma \backslash G$ is an homogeneous space, where G is a Lie group and Γ is a lattice of G , then given any unipotent group U of G , we can classify the measures that are ergodic with respect to the translation group action of U in X

In addition to the Ratner's measure classification theorem, we talk about the Ratner's equidistribution theorem and the Ratner's orbit closure theorem, which tell us how the orbit due the action by translation by the group U are and how the dynamics in X is, in an Ergodic Theory point of view.

While we didn't prove the last two Ratner's theorems, we exhibit an important application of the Ratner's orbit closure theorem in number theory, proving the Oppenheim Conjecture, also know as Margulli's Theorem.

Keywords: Ergodic Theory, Homogeneous Spaces, Lie Groups, Ratner's Theorems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	PRELIMINARES	3
2.1	Grupos	3
2.2	Grupos de Lie	8
2.3	Métrica invariante, Medida de Haar e Espaços Homogêneos	12
2.4	Teoria Ergódica	16
3	FLUXOS UNIPOTENTES	25
3.1	Motivação: Ações no toro	25
3.2	Fluxos Unipotentes no toro	29
3.3	Fluxos Unipotentes no Espaço Hiperbólico	33
4	OS TEOREMAS DE RATNER	39
4.1	Introdução	39
4.2	Teorema de Classificação para o grupo $SL_2(\mathbb{R})$: Ideia da prova . . .	41
4.3	Teorema de Classificação para o grupo $SL_2(\mathbb{R})$: Prova completa . .	42
5	ENTROPIA	55
5.1	Introdução	55
5.2	Cálculo de Entropia em Espaços Homogêneos	61
6	A CONJECTURA DE OPPENHEIM	73
	REFERÊNCIAS	81
	Índice	83

INTRODUÇÃO

Considere a translação no n -toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{aligned} T_v : \mathbb{T}^n &\longrightarrow \mathbb{T}^n \\ x &\longmapsto x + v, \end{aligned}$$

onde $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixado.

Sabemos que o fecho da órbita de todo ponto por T_v é um k -toro $\mathbb{T}^k$ com $0 \leq k \leq n$. Além disso, um resultado muito conhecido em Teoria Ergódica é que a translação T_v será ergódica em seu fecho com respeito a medida de Lebesgue m e que a medida m é a única capaz de deixar a translação T_v ergódica. Ou seja, no caso de uma translação no n -toro, conseguimos classificar a órbita de todos os pontos e todas as medidas ergódicas com relação a T_v (Capítulo 2 e Capítulo 3).

Nesta dissertação, estudamos um caso especial do seguinte teorema, devido a Marina Ratner (Capítulo 4):

Teorema 1.1 (Teorema de Ratner de classificação de medidas). Seja G um grupo de Lie, $\Gamma < G$ um lattice, $U < G$ um subgrupo conexo gerado por elementos unipotentes e μ uma medida de probabilidade em $X = \Gamma \backslash G$ que seja ergódica com relação à ação de U em G . Então, existe $x \in X$ e um subgrupo fechado H de G com $U \leq H \leq G$, tal que o suporte de μ é o conjunto xH .

Note que este teorema nos diz que, de forma semelhante ao caso da translação no toro, se $X = \Gamma \backslash G$, onde G é um grupo de Lie, Γ é um lattice de G e U é um grupo unipotente qualquer de G , então também conseguimos classificar as medidas ergódicas com relação a ação do grupo U em X por translação.

Além do Teorema de Ratner de classificação de medidas, falamos brevemente sobre outros dois resultados ligados a Marina Ratner, que em certo sentido, também generalizam a

dinâmica da translação T_v no toro. Estes são o Teorema de Ratner do fecho da órbita — que nos diz como é o fecho de uma órbita pela ação por traslação de um grupo unipotente em X — e o Teorema de Ratner da equidistribuição — que nos diz como um fluxo unipotente se comporta em seu fecho.

O caso especial que provamos do Teorema de Ratner de classificação de medidas acontece quando o grupo de Lie dado é $G = SL_2(\mathbb{R})$ e o subgrupo unipotente de G é

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esse caso específico é importante porque, além de utilizar em sua demonstração (Capítulo 4 e Capítulo 5) ideias importantes da prova no caso geral, também capta um comportamento geométrico importante do fibrado tangente unitário do espaço Hiperbólico (Capítulo 3).

A primeira parte da demonstração do Teorema de Ratner de classificação de medidas no caso $G = SL_2(\mathbb{R})$ foi baseada em (STARKOV, 2000). Porém, para a demonstração de um dos resultados finais, seguimos o argumento dado em (MARGULIS; TOMANOV, 1994), que se baseia num cálculo de entropia em espaços homogêneos (Capítulo 5). Apesar dessa escolha deixar a demonstração do teorema um pouco mais técnica, optamos em fazer dessa forma porque esse é o argumento utilizado para a demonstração do caso geral do teorema. Caso o leitor prefira evitar o argumento via cálculo de entropia, recomendamos a leitura do Lema 16.6 de (STARKOV, 2000). Além disso, caso o leitor queira ter uma ideia da prova no caso geral, recomendamos (MORRIS, 2005).

Finalizamos nosso trabalho com uma importante aplicação do Teorema de Ratner do fecho da órbita em teoria dos números, provando o Teorema de Margulis (Capítulo 6), que nos diz o seguinte:

Teorema 1.2 (Conjectura de Oppenheim - Teorema de Margulis). Seja Q uma forma quadrática real, indefinida, não degenerada com $n \geq 3$ variáveis. Se Q não é um múltiplo escalar de uma forma com coeficientes inteiros, então $Q(\mathbb{Z}^n)$ é denso em $\mathbb{R}$.

PRELIMINARES

2.1 Grupos

Definição 2.1. O par $(G, \cdot)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação binária, define um **grupo** se:

1. Para todos elementos $a, b \in G$, temos que $a \cdot b \in G$.
2. Para todos elementos $a, b, c \in G$, temos que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Existe um elemento $e \in G$ tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$ para todo elemento $a \in G$. Chamamos tal elemento e de elemento neutro.
4. Para todo elemento $a \in G$, existe um elemento a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = e$.

Observação 2.2. Frequentemente vamos omitir o sinal da operação binária de um grupo G e escreveremos a operação entre elementos $a, b \in G$ simplesmente como

$$a \cdot b := ab.$$

Definição 2.3. Um grupo G é **abeliano** se para todos elementos $a, b \in G$ temos que $ab = ba$.

Alguns exemplos clássicos de grupos são: os grupos abelianos $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{C}^n$ com a operação usual de soma; os grupos abelianos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ com a operação usual de multiplicação; qualquer espaço vetorial V com sua operação binária de espaço vetorial. Outro grupo que nos será importante é o seguinte:

Exemplo 2.4. O conjunto

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$$

com a operação de multiplicação é um grupo não abeliano.

Note que o item i da Definição 2.1 é satisfeito pois se $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ então como

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B) \neq 0,$$

temos que $A \cdot B \in GL_n(\mathbb{R})$. Além disso, tomando e como a matriz identidade e dada uma matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tomando A^{-1} como a matriz inversa de A , que existe já que $\det(A) \neq 0$, então os itens ii, iii e iv são satisfeitos.

Definição 2.5. Seja H um subconjunto de um grupo G . Então H é um **subgrupo** de G se para todos elementos $a, b \in H$, temos que

$$a \cdot b^{-1} \in H.$$

Exemplo 2.6. O conjunto

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\},$$

com a operação de multiplicação é um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

Note que dadas matrizes $A, B \in SL_n(\mathbb{R})$, como

$$\det(A \cdot B^{-1}) = \det(A) \det(B^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1,$$

então $SL_n(\mathbb{R})$ é subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

Definição 2.7. Seja H um subgrupo de um grupo G , uma **classe lateral à direita** de H em G é um conjunto da forma

$$Hg = \{hg \mid h \in H\},$$

onde $g \in G$.

Definimos então o **quociente** $H \backslash G$ de G por H como sendo o conjunto de todas as classes laterais à direita de H em G , isto é

$$H \backslash G = \{Hg \mid g \in G\}.$$

Observação 2.8. Analogamente, poderíamos ter definido classes laterais à esquerda como

$$gH = \{gh \mid h \in H\},$$

onde $g \in G$ e o quociente de G por H por

$$G/H = \{Hg \mid g \in G\}.$$

Definição 2.9. Definimos o n -toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$ como sendo o conjunto das classes laterais à direita de $\mathbb{Z}^n$ em $\mathbb{R}^n$ com a topologia do quociente induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n = \{\mathbb{Z}^n + x \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Observação 2.10. Note que dado um elemento $y \in \mathbb{T}^n$, existe um único $x \in [0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$ tal que $y = \mathbb{Z}^n + x \in \mathbb{T}^n$. Chamamos $[0, 1)^n$ de um **domínio fundamental** para o toro $\mathbb{T}^n$. Uma definição mais geral de um domínio fundamental será dada na Seção 2.3.

Pela Observação 2.10, temos que $[0, 1)$ é um domínio fundamental para o toro $\mathbb{T}^1$ (ou simplesmente $\mathbb{T}$). Note que, identificando os pontos em $\mathbb{T}$ por pontos em $[0, 1)$, então $\mathbb{T}$ nada mais é uma representação de um círculo. Portanto, com frequência vamos nos referir à $\mathbb{T}$ como o círculo dado pelos pontos da forma $x \pmod{1}$, com $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.11. Dado um subgrupo H de um grupo G , são equivalentes:

1. Para todo $g \in G$, temos que $gHg^{-1} \subset H$.
2. Para todo $g \in G$, temos que $gHg^{-1} = H$.
3. Para todo $g \in G$, temos que $gH = Hg$.

Se H é um subgrupo de G que satisfaz um desses itens, dizemos que H é **normal** em G e denotamos por $H \triangleleft G$.

Exemplo 2.12. O subgrupo $\mathbb{Z}^n \leq \mathbb{R}^n$ é normal em $\mathbb{R}^n$ com a operação da adição, pois como $\mathbb{R}^n$ é abeliano, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$x + \mathbb{Z}^n - x = \mathbb{Z}^n + x - x = \mathbb{Z}^n.$$

Exemplo 2.13. O subgrupo $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$ é normal em $GL_n(\mathbb{R})$, pois dada uma matriz qualquer $A \in GL_n(\mathbb{R})$, temos que

$$\det(A \cdot SL_n(\mathbb{R}) \cdot A^{-1}) = \det(A) \det(SL_n(\mathbb{R})) \det(A^{-1}) = \det(A) \cdot 1 \cdot \det(A)^{-1} = 1$$

e portanto

$$A \cdot SL_n(\mathbb{R}) \cdot A^{-1} \subset SL_n(\mathbb{R}).$$

Proposição 2.14. Seja H um subgrupo normal de G , então o quociente $H \backslash G$ é um grupo.

Demonstração. Defina o elemento neutro de $H \backslash G$ por $He = H$ e dado um elemento $Ha \in H \backslash G$, defina seu elemento inverso por Ha^{-1} .

Note que dados elementos $Ha, Hb \in H \backslash G$, como $H \triangleleft G$, então

- De fato a operação a multiplicação está bem definida, pois $HaHb = H(aH)b = HHab = Hab$.
- Temos que He é um elemento neutro, pois $HaHe = HeHa = HH ea = HH ae = Ha$.
- Além disso, Ha^{-1} é elemento inverso de Ha pois, $HaHa^{-1} = H(aH)a^{-1} = HHaa^{-1} = H = He$.

Logo, a operação binária em $H \backslash G$ dada por $HaHb = Hab$ está bem definida e portanto $H \backslash G$ é um grupo. □

Corolário 2.15. O n -toro $\mathbb{T}^n$ definido em 2.9 é um grupo abeliano.

Demonstração. Basta notar que $\mathbb{Z}^n$ é normal em $\mathbb{R}^n$. □

Definição 2.16. Sejam H e G dois grupos. Uma função $f : G \rightarrow H$ é um **homomorfismo de grupos** se para todos elementos $a, b \in G$, temos que

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Definição 2.17. Dado um homomorfismo $f : G \rightarrow H$, o **núcleo do homomorfismo** f é o subgrupo normal em G dado por

$$\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\} \leq G,$$

onde e_h é o elementos neutro o grupo H .

Definição 2.18. Sejam H e G dois grupos. Uma função $f : G \rightarrow H$ é um **isomorfismo de grupos** se f é um homomorfismo sobrejetor e

$$\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\} = \{e_g\},$$

onde e_g é o elemento neutro do grupo G . Denotamos o fato de existir um isomorfismo entre os grupos G e H por $G \cong H$ e dizemos que o grupo G é isomorfo ao grupo H .

Teorema 2.19 (Primeiro Teorema do Isomorfismo). Seja $f : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos, então

$$\ker(f) \backslash G \cong f(G).$$

Demonstração. Primeiramente, como f é um homomorfismo, temos que $f(G)$ é um grupo. Agora, como $\ker(f) \triangleleft G$, note que

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \ker(f) \backslash G &\longrightarrow f(G) \\ \ker(f) \cdot g &\longmapsto \tilde{f}(\ker(f)g) = f(g) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos. □

Exemplo 2.20. Considere o seguinte homomorfismo:

$$\begin{aligned} \det : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) &\longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \\ M &\longmapsto \det(M). \end{aligned}$$

Note que $\ker(\det) = SL_n(\mathbb{R})$ já que 1 é o elemento neutro do grupo multiplicativo $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Temos então, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, que

$$SL_n(\mathbb{R}) \backslash GL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Definição 2.21. Sejam G um grupo e X um conjunto, uma **ação do grupo** G em X é uma função $f : G \times X \rightarrow X$ que satisfaz as seguintes propriedades

- i) Para todo $x \in X$ temos que $f(e_G, x) = x$, onde e_G é o elemento neutro do grupo G .
- ii) Para todo $g, h \in G$ e $x \in X$, temos que $f(h, f(g, x)) = f(hg, x)$.

Exemplo 2.22. Considere o conjunto $X = \mathbb{R}^n$ e o grupo $G = GL_n(\mathbb{R})$ com a operação de multiplicação de matrizes, então a função

$$\begin{aligned} f : GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (M, x) &\longmapsto Mx \end{aligned}$$

define uma ação de grupos.

Exemplo 2.23. Considere um grupo G e $H \leq G$ um subgrupo de G e $X = H \backslash G$ o quociente de G por H . Então a função

$$\begin{aligned} f : G \times X &\longrightarrow H \backslash G \\ (a, Hb) &\longmapsto Hba \end{aligned}$$

define uma ação do grupo G em X .

2.2 Grupos de Lie

Nesta seção, nós vamos explicar o que são grupos de Lie e introduzir alguns resultados e definições importantes. O leitor pode procurar mais detalhes em ([ARVANITOGÉORGOS, 2003](#)) e ([HALL, 2015](#)).

Definição 2.24. Seja G uma variedade suave. Dizemos que G é um **grupo de Lie** se:

- i) G é um grupo.
- ii) A multiplicação $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ e a operação de tomar inverso $g \mapsto g^{-1}$ são suaves.

Exemplo 2.25. Alguns exemplos de grupos de Lie, são:

1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n, \mathbb{C}^n$ com a adição.
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com a multiplicação.
3. O círculo $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com a adição.
4. Se G e H são grupos de Lie, então o produto $G \times H$ também é um grupo de Lie e portanto,
5. O n -toro $T^n = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \times \cdots \times \mathbb{T}^1$ com a operação da adição é um grupo de Lie.

Observação 2.26. Note que podemos ter um grupo de Lie H com $\dim(H) = 0$, como é o caso de $\mathbb{Z}^n$.

Teorema 2.27 (Teorema do subgrupo fechado). Se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G , então H é um grupo de Lie.

Demonstração. Ver Teorema 15.29 em ([LEE, 2012](#)). □

Proposição 2.28. O grupo

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$$

com a multiplicação de matrizes é um grupo de Lie.

Demonstração. Note que $GL_n(\mathbb{R})$ é um subconjunto da variedade suave $\mathbb{R}^{n^2}$, já que $GL_n(\mathbb{R}) \subset \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Como a função determinante $\det : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, já que é um polinômio em n^2 coordenadas, temos que o conjunto $GL_n(\mathbb{R})$ é aberto em $\mathbb{R}^{n^2}$ pois

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}\{(-\infty, 0) \cup (0, \infty)\}$$

e portanto $GL_n(\mathbb{R})$ é uma variedade suave.

Agora, dadas as matrizes $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$, note que as entradas da matriz AB são polinômios

definidos pelas entradas das matrizes A e B , logo a multiplicação de matrizes em $GL_n(\mathbb{R})$ é suave.

Só nos falta mostrar que dada a matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$, a operação de inversão $A \mapsto A^{-1}$ também é suave. Mas sabemos que se $A^{-1} = (a'_{ij})$, então

$$a'_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A_{ij})}{\det(A)},$$

onde A_{ij} é a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida excluindo a i -ésima coluna e a j -ésima linha da matriz A . Logo, as entradas da matriz A^{-1} são polinômios definidos pelas entradas da matriz A , ou seja, a inversão também é suave e portanto $GL_n(\mathbb{R})$ é grupo de Lie.

□

Corolário 2.29. Todo subgrupo fechado de $GL_n(\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Demonstração. Como $GL_n(\mathbb{R})$ é grupo de Lie, basta utilizar o Teorema 2.27.

□

Como praticamente todos os exemplos que utilizaremos ao longo do nosso trabalho serão dados por grupos de matrizes, o corolário anterior é de grande importância, pois para mostrar que um grupo de matrizes é um grupo de Lie, é suficiente mostrar que este grupo é fechado em $GL_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.30. O grupo

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

é um grupo de Lie já que o determinante é uma função contínua e $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$, isto é, $SL_n(\mathbb{R})$ é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua e portanto é fechado em $GL_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.31. O grupo

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid M^{-1} = M^t\}$$

é um grupo de Lie, já que considerando a função contínua

$$\begin{aligned} f : GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto M^{-1} - M^t \end{aligned}$$

temos que $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0\})$, ou seja, $O_n(\mathbb{R})$ também é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua, logo é fechado em $GL_n(\mathbb{R})$.

Definição 2.32. Definimos a **transformação exponencial** em $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como:

$$\begin{aligned} \exp : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}. \end{aligned}$$

Proposição 2.33. Dados $M, N \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, valem as seguintes propriedades:

- i) $\exp(0) = I_n$.
- ii) $\det(\exp(M)) \neq 0$.
- iii) $\exp((a+b)M) = \exp(aM)\exp(bM)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.
- iv) Se $N \cdot M = M \cdot N$ então $\exp(M+N) = \exp(M) \cdot \exp(N) = \exp(N) \cdot \exp(M)$.
- v) Se $\det(N) \neq 0$, então $\exp(N \cdot M \cdot N^{-1}) = N \cdot \exp(M) \cdot N^{-1}$.
- vi) $\|\exp(M)\| \leq \exp(\|M\|)$, com a métrica dada por $\|M\| = \sup_{|x|=1} |Mx|$.
- vii) $\frac{d}{dt} \exp(tM) = \exp(tM) \cdot M$.
- viii) $\det(\exp(M)) = \exp(\text{tr}(M))$, onde $\text{tr}(x)$ representa o traço da matriz M .
- ix) $\exp(M)^t = \exp(M^T)$, onde M^T é a transposta de M .

Proposição 2.34. Seja G um subgrupo fechado de $GL_n(\mathbb{R})$ e denote por $\mathfrak{g}$ o espaço tangente à G na identidade I_n . Então temos que:

$$\mathfrak{g} = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \exp(tM) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Além disso, se $M, N \in \mathfrak{g}$ então

$$[M, N] := M \cdot N - N \cdot M \in \mathfrak{g}.$$

Demonstração. Ver Teorema 3.20 em (HALL, 2015). □

Com essa proposição, podemos definir:

Definição 2.35. Seja G um subgrupo fechado de $GL_n(\mathbb{R})$. Definimos a **álgebra de Lie** de G como sendo o par $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ com

$$\mathfrak{g} = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \exp(tM) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

e $[M, N] = M \cdot N - N \cdot M$.

Definição 2.36. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de algum grupo G e $\mathfrak{h}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é uma **sub-álgebra de Lie** de $\mathfrak{g}$ se $[M, N] \in \mathfrak{h}$ para todos $M, N \in \mathfrak{h}$.

Dado um grupo de Lie G com sua respectiva álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, existe uma correspondência importante entre os subgrupos de Lie $H \leq G$ e as subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$.

A seguir, enunciamos três teoremas que exibem essa correspondência entre grupos de Lie e álgebras de Lie. Mais informações sobre estes resultados podem ser encontradas em (ARVANITOGÉORGOS, 2003), na página 21.

Teorema 2.37. Seja G um grupo de Lie com $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie e seja H subgrupo de Lie de G de tal forma que $\mathfrak{h}$ é sua álgebra de Lie, então $\mathfrak{h}$ é uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.38. Seja G um grupo de Lie com $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie e seja $\mathfrak{h}$ uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, então existe um único subgrupo de Lie conexo H de G de tal forma que $\mathfrak{h}$ é a álgebra de Lie de H .

Teorema 2.39. Sejam G, H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ respectivamente. Se existe um isomorfismo entre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ que preserva a operação $[\cdot, \cdot]$ da álgebra de Lie, então G e H são localmente isomorfos. Além disso, se G e H são simplesmente conexos, então G é isomorfo à H .

Exemplo 2.40. Vamos calcular a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ do grupo

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}.$$

Temos que $M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ se, e só se:

$$\det(\exp(t \cdot M)) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mas pelo item ii da Proposição 2.33, isso é sempre verdade, portanto

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

O exemplo anterior nos diz que o espaço vetorial

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

é a álgebra de Lie do grupo $GL_n(\mathbb{R})$. Considere então o subespaço vetorial V de $\mathfrak{g}$ dado por

$$V = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}.$$

Sabemos que a função traço tr satisfaz

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \text{tr}(BA), & \forall A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}), \\ \text{tr}(A+B) &= \text{tr}(A) + \text{tr}(B), & \forall A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Logo, se A, B são elementos do espaço vetorial V , então

$$\text{tr}([A, B]) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0.$$

Isso quer dizer que, se $A, B \in V$ então $[A, B] \in V$ e portanto V é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Mas então, pelo Teorema 2.38, deve existir um subgrupo de Lie conexo $H \leq G$ do grupo de Lie $GL_n(\mathbb{R})$, de tal forma que V é a álgebra de Lie do grupo H .

Explicitamos o grupo H no seguinte exemplo.

Exemplo 2.41. Vamos calcular a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ do grupo

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

Temos que $M \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ se, e só se,

$$\det(\exp(t \cdot M)) = 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pelo item viii) da Proposição 2.33, temos que

$$\det(\exp(t \cdot M)) = 1, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exp(\operatorname{tr}(t \cdot M)) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

e logo, devemos ter que $\operatorname{tr}(M) = 0$, ou seja:

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}.$$

2.3 Métrica invariante, Medida de Haar e Espaços Homogêneos

Para mais detalhes sobre os resultados exibidos nesta seção, recomendamos a leitura da seção 9.3 em (EINSIEDLER; WARD, 2010).

Proposição 2.42. Se G é um subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, então existe uma métrica $d_G : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$d_G(ga, gb) = d_G(a, b), \quad \forall a, b, g \in G$$

e a topologia induzida pela métrica d_G é equivalente à topologia induzida pela norma euclidiana se considerarmos $G \leq GL_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ como um subespaço topológico de $\mathbb{R}^{n^2}$. Chamamos a métrica d_g de **métrica invariante pela esquerda**.

Definição 2.43. Um subgrupo $\Gamma \leq G$ de um grupo de Lie $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ é **discreto**, se dado um elemento $\gamma \in \Gamma$, existe um raio $r := r(\gamma) > 0$ tal que a bola

$$B_r^G = \{g \in G \mid d_G(g, e_G) < r\}$$

intercepta o subgrupo Γ apenas em γ , isto é

$$\Gamma \cap B_r^G = \{\gamma\}.$$

Observação 2.44. Note que se Γ é um subgrupo discreto de G , então dadas duas sequências (γ_n) e (γ'_n) de elementos de Γ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_G(\gamma_n, \gamma'_n) = 0$$

temos, pela invariância da métrica d_G , que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_G(e_G, \gamma_n^{-1} \gamma'_n) = 0.$$

Portanto, como Γ é discreto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $\gamma_n = \gamma'_n$. Ou seja, deve existir uma constante $\alpha > 0$, tal que para todos elementos $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ vale

$$d_G(\gamma_1, \gamma_2) > \alpha,$$

isto é, existe uma distância mínima $\alpha > 0$ entre os elementos de Γ .

Proposição 2.45. Seja $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ um grupo de Lie e $\Gamma \leq G$ um subgrupo fechado e discreto de G . Então a função $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, onde $X = \Gamma \backslash G$, dada por

$$d_X(\Gamma g_1, \Gamma g_2) = \inf_{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma} d_G(\gamma_1 g_1, \gamma_2 g_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d_G(g_1, \gamma g_2)$$

define uma métrica no quociente X do grupo G por Γ .

Proposição 2.46. Seja $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ um grupo de Lie e $\Gamma \leq G$ um subgrupo discreto de G . Definindo o conjunto

$$B_r^X(x) = \{y \in X \mid d_X(x, y) < r\},$$

temos que para qualquer $x \in X = \Gamma \backslash G$, existe $r(x) > 0$ tal que a transformação

$$\begin{aligned} T : B_r^G &\longrightarrow B_r^X(x) \\ g &\longmapsto xg \end{aligned}$$

é uma isometria. Além disso, se o quociente X for compacto, então podemos escolher $r > 0$, tal que $r(x) = r$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Considere $x = \Gamma h \in X$ e suponha que $g_1, g_2 \in B_{r_0}^G$ para algum $r_0 > 0$. Suponha que $\gamma \in \Gamma$ é tal que

$$d_G(g_1, h^{-1} \gamma h g_2) \leq d_G(g_1, h^{-1} e_g h g_2) \leq d_G(g_1, g_2) \leq 2r_0$$

então, temos que

$$d_G(e_G, h^{-1} \gamma h g_2) \leq d_G(g_1, h^{-1} \gamma h g_2) + d_G(e_G, g_1) \leq 2r_0 + r_0 = 3r_0$$

e logo,

$$d_G(h^{-1} \gamma h, e_G) \leq d_G(h^{-1} \gamma h, g_2^{-1}) + d_G(g_2^{-1}, e_G) \leq 4r_0.$$

Note que $h^{-1} \Gamma h$ também é subgrupo discreto de G , portanto deve existir $r := r(h) > 0$ tal que se $d_G(h^{-1} \gamma h, e_G) < r$ então $h^{-1} \gamma h = e_g$, ou seja, $\gamma = e_g$. Concluímos então que se $r_0 < r$ então

$$d_X(\Gamma h g_1, \Gamma h g_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d_G(h g_1, \gamma h g_2) = d_X(h g_1, e_G h g_2) = d_G(g_1, g_2).$$

□

Observação 2.47. A proposição anterior nos diz que o espaço métrico $X = \Gamma \backslash G$ localmente se parece com o grupo G . Note que o conjunto X possui uma estrutura topológica dada pela métrica induzida d_X , porém não necessariamente possui uma estrutura de grupo de Lie. De fato, como vimos na seção sobre grupos, o conjunto X será um grupo apenas se Γ for um subgrupo normal de G . No caso em que H não é normal em G , temos a seguinte propriedade.

Proposição 2.48. Seja Γ um subgrupo discreto de um grupo de Lie $G \leq GL_n(\mathbb{R})$. O quociente $X = \Gamma \backslash G$ é uma variedade topológica de dimensão $\dim(G)$ e possui uma única estrutura suave tal que a projeção $\pi : G \rightarrow X$ é uma submersão suave. Dizemos que o quociente $X = \Gamma \backslash G$ é um **espaço homogêneo**.

Definição 2.49. Dizemos que G é um **grupo topológico**, se

1. G é um grupo.
2. A multiplicação $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ e a operação de tomar inverso $g \mapsto g^{-1}$ são contínuas.

Teorema 2.50 (Teorema de Haar). Seja G um grupo topológico, metrizável e localmente compacto. Então existe uma medida de Borel m_G , que chamaremos de **Medida de Haar de G** , satisfazendo:

1. A medida m_G é invariante pela esquerda, isto é, $m_G(gA) = m_G(A)$ para todo conjunto Boreliano A e todo elemento $g \in G$.
2. Temos que $m_G(K) < \infty$ para qualquer compacto $K \subset G$.
3. Temos que $m_G(O) > 0$ para qualquer conjunto aberto $O \subset G$.
4. A medida m_G é única a menos de multiplicação por escalares.

Demonstração. Ver Seção 8.3 em (EINSIEDLER; WARD, 2010). □

Definição 2.51. Seja G um grupo de Lie com medida de Haar m_G e $\Gamma \leq G$ um subgrupo de G agindo sobre G por translação. Um **domínio fundamental** para a ação do subgrupo Γ em G , é um conjunto mensurável $F \subset G$ tal que

1. $\Gamma F = G$.
2. Dado qualquer elemento $\gamma \in \Gamma$ com $\gamma \neq e_G$, temos que $m_G(\gamma F \cap F) = 0$.

Definição 2.52. Seja G um grupo de Lie com medida de Haar μ_G e $\Gamma \leq G$ um subgrupo discreto de G . Dizemos que Γ é um **lattice** em G se existe um domínio fundamental F para o subgrupo Γ em G tal que $m_G(F) < \infty$.

Exemplo 2.53. Como já vimos na Seção 2.1 sobre grupos, se $I = [0, 1)$ então o conjunto $\mathcal{F} = I^n$ é um domínio fundamental para a ação do subgrupo $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$, isto é, F é um domínio fundamental para o toro $\mathbb{T}^n$.

Note que devemos ter cuidado com a escolha do intervalo I na construção do domínio fundamental F . Por exemplo, se $I = [0, 1/2)$ então $\mathbb{Z}^n + F \neq \mathbb{R}^n$. Além disso, se, por exemplo, $I = [0, 2)$ então, como $1 \in \mathbb{Z}$, temos que $m((1 + F) \cap F) \neq 0$, onde m é a medida de Lebesgue.

Teorema 2.54. Seja $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ um grupo de Lie com medida de Haar m_G e $\Gamma \leq G$ um lattice em G . Se F_1, F_2 são domínios fundamentais para Γ em G , então $m_G(F_1) = m_G(F_2)$.

Demonstração. Suponha que F_1, F_2 são domínios fundamentais para Γ em G . Temos então que

$$\begin{aligned} F_1 &= \Gamma F_2 \cap F_1, \\ F_2 &= \Gamma F_1 \cap F_2. \end{aligned}$$

Agora, dado $\gamma \in \Gamma$, é claro que

$$\gamma^{-1}(F_1 \cap \gamma F_2) = F_2 \cap \gamma^{-1}F_1.$$

Portanto, como a medida de Haar m_G é invariante à esquerda

$$\begin{aligned} m_G(F_1) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} m_G(F_1 \cap \gamma F_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} m_G(\gamma^{-1}F_1 \cap \gamma F_2) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} m_G(F_2 \cap \gamma^{-1}F_1) = m_G(F_2). \end{aligned}$$

□

Definição 2.55. Seja $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ um grupo de Lie com medida de Haar m_G e $\Gamma \leq G$ um lattice em G com domínio fundamental F . Se X é o espaço homogêneo $X = \Gamma \backslash G$, então a medida de Haar m_G induz uma medida m_X finita em X dada por

$$m_X(B) = m_G(\pi^{-1}(B) \cap F),$$

onde $B \subset G$ é um conjunto mensurável e π é a projeção

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow \Gamma \backslash G \\ g &\longmapsto \Gamma g. \end{aligned}$$

Observação 2.56. Na proposição anterior, utilizamos a medida de Haar de um grupo G para induzir uma medida m_X no espaço homogêneo $X = \Gamma \backslash G$. Devido a este fato, vamos nos referir a medida m_X como medida a **medida de Haar do espaço Homogêneo X** , mesmo quando o quociente X não for um grupo.

2.4 Teoria Ergódica

Neste capítulo vamos introduzir alguns fatos e definições sobre Teoria Ergódica que serão fundamentais ao longo do nosso trabalho. Para isso, assumiremos que o leitor esteja familiarizado com Teoria da Medida. Recomendamos a leitura de (BARTLE, 2014) e (FOLLAND, 2013) para mais detalhes sobre os tópicos de Teoria da Medida, e para maiores detalhes sobre os tópicos de Teoria Ergódica recomendamos os textos (EINSIEDLER; WARD, 2010), (DAJANI; DIRKSIN, 2008) e (VIANA; OLIVEIRA, 2016).

Definição 2.57. Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{B}, \mu)$, onde $\mathcal{B}$ é uma σ -álgebra do conjunto X e μ é uma medida, dizemos que μ é uma **probabilidade** se $\mu(X) = 1$.

Observação 2.58. Note que, se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$, então a medida induzida ν , dada por:

$$\nu(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}, \text{ com } A \text{ conjunto mensurável}$$

é uma probabilidade. Portanto, tomando a normalização acima, podemos supor que qualquer medida finita é uma probabilidade.

Definição 2.59. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $A \subset X$ um conjunto $\mathcal{B}$ -mensurável. Definimos a função característica $1_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ do conjunto mensurável A , como

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Definição 2.60. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que T é **μ -invariante** (ou ainda que T preserva μ ou μ é invariante por T) se para todo conjunto $\mathcal{B}$ -mensurável $A \subset X$

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Exemplo 2.61. Seja o círculo $\mathbb{T}$ com a medida de Lebesgue m induzida da reta. Então a rotação

$$\begin{aligned} T_\alpha : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ x &\longmapsto x + \alpha \pmod{1} \end{aligned}$$

deixa m invariante.

Definição 2.62. Dada uma transformação $T : X \rightarrow X$ e $x \in X$, definimos a **órbita** $\mathcal{O}$ de x por T como:

$$\mathcal{O}(x) = \{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo 2.63. Considere a rotação $T_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ no círculo $\mathbb{T}$. Então a órbita do ponto $x = 0$ é o conjunto $\{n \cdot \alpha \pmod{1} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 2.64 (Teorema de Recorrência de Poincaré). Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável que preserva μ . Se A é um conjunto $\mathcal{B}$ -mensurável com $\mu(A) > 0$ então temos que para quase todo ponto $x \in A$

$$\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \cap A \neq \emptyset.$$

Demonstração. Basta mostrar que o seguinte conjunto tem medida nula:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x \text{ em } A \text{ tal que nenhum iterado de } x \text{ volta para } A\} \\ &= X \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(A) \right). \end{aligned}$$

Note que se $T^{-n}(A_0) \cap T^{-m}(A_0) \neq \emptyset$, $m > n \geq 1$ então podemos tomar $x \in T^{-n}(A_0) \cap T^{-m}(A_0)$ de tal forma que $y = T^n(x) \in A_0$ e

$$T^{m-n}(y) = T^{m-n}T^n(x) = T^m(x).$$

Mas então temos que

$$y \in A_0 \text{ e } T^{m-n}(y) \in A_0,$$

contrariando a definição de A_0 , ou seja, concluímos que as pré-imagens $T^{-n}(A_0)$ são disjuntas. Portanto, utilizando os fatos de que as pré-imagens são disjuntas, T preserva μ e μ é finita (pois estamos num espaço de probabilidade), temos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A_0)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(A_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_0).$$

Como

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A_0)\right) < \infty,$$

é claro que $\mu(A_0) = 0$.

□

Note que sob as mesmas hipóteses do Teorema de Poincaré 2.64, podemos mostrar que se $x \in A$ então não apenas um, mas infinitos iterados de x devem voltar para A . Ou seja,

$$\#\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \cap A = \infty,$$

onde $\#B$ representa a cardinalidade do conjunto B .

Observação 2.65. Note que se retirarmos a hipótese de μ ser finita, a conclusão do teorema pode não ser válida, pois basta considerar $X = \mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue m na reta. Então temos que a transformação $T(x) = x + 1$ preserva m , mas se A é um conjunto mensurável limitado, então para todo $x \in X$:

$$\#\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \cap A < \infty.$$

Teorema 2.66 (Teorema Ergódico de Birkhoff). Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função μ -integrável e $T : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva μ . Então, o limite

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$$

existe para μ quase todo ponto. Além disso, $\bar{f}$ é uma função μ -integrável satisfazendo

$$\int \bar{f} d\mu = \int f d\mu$$

e também

$$\bar{f} \circ T = \bar{f}.$$

Demonstração. Ver (KATZNELSON; WEISS, 1982). □

Utilizando o Teorema Ergódico de Birkhoff, podemos definir o conceito de ergodicidade da seguinte forma:

Definição 2.67. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável que preserva μ . Dizemos que T é **ergódica com relação à medida μ** (ou então que T é μ -ergódica) se dado f uma função μ -integrável, para quase todo ponto $x \in X$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int f d\mu. \quad (2.68)$$

Observação 2.69. Considere f como a função característica de um conjunto mensurável A . Temos então que, se T é ergódica com relação a medida μ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = \int 1_A d\mu = \mu(A),$$

ou seja

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = \mu(A).$$

Agora, note que fixado $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{cases} 1_A(T^i(x)) = 0 & \text{se } T^i(x) \notin A \\ 1_A(T^i(x)) = 1 & \text{se } T^i(x) \in A \end{cases}$$

e portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \# \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n-1 \text{ e } T^i(x) \in A\} = \mu(A).$$

Ou seja, no caso específico de f ser a função característica de um conjunto mensurável A , dizer que T é μ -ergódica implica que para quase todo ponto $x \in X$, a frequência com que os iterados de x visitam A é igual à medida de A .

Corolário 2.70. Considere o espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ onde X tem uma estrutura topológica, $\mathcal{B}$ é a σ -álgebra de Borel do espaço topológico X e μ é uma medida em $\mathcal{B}$ tal que para todo aberto $U \subset X$, temos que $\mu(U) > 0$. Se T é μ -ergódica, então para quase todo x , a órbita $\mathcal{O}(x)$ de x é densa em X .

Demonstração. Dado qualquer aberto $A \subset X$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = \mu(A) > 0.$$

Logo, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $T^i(x) \in A$.

□

A seguir, vamos demonstrar algumas equivalências da definição de ergodicidade que nos serão úteis.

Definição 2.71. Considere o espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que um subconjunto mensurável $A \subset X$ é **T -invariante** se $T^{-1}(A) = A$.

Definição 2.72. Considere o espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que uma função μ -integrável é **T -invariante** se $f \circ T = f$.

Proposição 2.73. Considere o espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $T : X \rightarrow X$ uma transformação μ -invariante. São equivalentes:

- i) T é μ -ergódica.
- ii) Se A é um conjunto mensurável T -invariante, então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.
- iii) Se f é uma função μ -integrável T -invariante, então f é constante num conjunto de medida total.

Demonstração. ($i \rightarrow ii$) Considere $f = 1_A$, com A um subconjunto mensurável invariante. Como por hipótese, T é ergódica, pela Definição 2.67

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = \mu(A).$$

Como A é invariante temos $x \in A$ se, e só se, $T(x) \in A$, ou seja, $1_A(x) = 1_A(T(x))$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{1}{n} 1_A(x) = 1_A(x).$$

Portanto temos que,

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = 1_A(x).$$

Concluimos então que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

($ii \rightarrow iii$) Considere $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ invariante, ou seja, $f \circ T = f$. Então temos que para qualquer mensurável $I \subset \mathbb{R}$

$$T^{-1}(f^{-1}(I)) = T^{-1} \circ f^{-1}(I) = (f \circ T)^{-1}(I) = f^{-1}(I),$$

ou seja, $f^{-1}(I)$ é invariante. Por hipótese, para qualquer $I \subset \mathbb{R}$ mensurável, $\mu(f^{-1}(I)) = 0$ ou $\mu(f^{-1}(I)) = 1$. Note que como $\mu(f^{-1}(\mathbb{R})) = 1$, então

$$\alpha = \inf\{a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \mu(f^{-1}([-a, a])) = 1\}$$

está bem definido e $f(x) = \alpha$ para todo $x \in X$.

($iii \rightarrow i$) Seja f uma função integrável. Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff 2.66, temos que

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)),$$

além disso, $\bar{f} \circ T = \bar{f}$, ou seja, $\bar{f}$ é invariante e

$$\int \bar{f} d\mu = \int f d\mu.$$

Por hipótese, temos que $\bar{f}$ é igual a uma constante C em quase todo ponto, ou seja,

$$C = \bar{f} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)). \quad (2.74)$$

Como μ é uma probabilidade e

$$\int \bar{f} d\mu = \int f d\mu,$$

utilizando (2.74) temos que

$$C = C \cdot \underbrace{\mu(X)}_1 = \int C = \int \bar{f} = \int f d\mu.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = C = \int \bar{f} = \int f d\mu,$$

isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int f d\mu,$$

e então T é ergódica com relação a μ .

□

Observação 2.75. Note que a definição de ergodicidade dada em 2.67 só faz sentido quando consideramos um espaço de probabilidade, pois caso contrário, pode acontecer de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = \mu(A) = \infty,$$

para quase todo ponto.

Para eliminar a hipótese da medida ser de probabilidade, usualmente, define-se a ergodicidade de uma transformação T com relação a uma medida μ como feito no item (ii) da Proposição 2.73, isto é, T é ergódica com relação a μ se para todo A conjunto mensurável T -invariante, temos que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Neste texto, porém, optamos por definir ergodicidade como feito em 2.67, pois estaremos sempre trabalhando com espaços de probabilidade e, além disso, esta caracterização será a mais utilizada ao longo do texto.

Exemplo 2.76. Considere o círculo $\mathbb{T}$ e a rotação $T_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$. Vamos mostrar que T_α é ergódica com relação à medida de m Lebesgue se, e somente se, α é irracional.

Demonstração. Suponha que T_α é ergódico e $\alpha \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\alpha = \frac{p}{q}$. Temos então que:

$$T_\alpha(x) = x + \frac{p}{q} \pmod{1},$$

$$T_\alpha^2(x) = x + \frac{2p}{q} \pmod{1},$$

$$\vdots$$

$$T_\alpha^q(x) = x + 0 \pmod{1}.$$

Considere $A \subset X$, com $0 < m(A) < 1/q$ e defina B como:

$$B = A \cup T_\alpha(A) \cup T_\alpha^2(A) \cup \dots \cup T_\alpha^{q-1}(A).$$

Note que se $0 < i \leq q-1$ então

$$T_\alpha^{-1}(T_\alpha^i(A)) = T_\alpha^{i-1}(A)$$

e como $T_\alpha^{-1}(A) = T_\alpha^{q-1}(A)$, temos que B é invariante por T_α . Porém, como $m(T_\alpha(A)) = m(A)$, já que T_α é uma translação no círculo, e $A \subset B$, também temos que

$$0 < m(A) \leq m(B) \leq \sum_{i=0}^{q-1} m(T_\alpha^i(A)) \leq \sum_{i=0}^{q-1} m(A) < q \cdot 1/q = 1.$$

Ou seja, temos que B é T_α invariante e $0 < m(B) < 1$, mas isso contraria o fato de T_α ser ergódico, como vimos no item *ii* da Proposição 2.73, logo α deve ser irracional. Agora suponha que α é irracional, vamos utilizar o item *(ii)* da Proposição 2.73 para mostrar que T_α é ergódica. Para isso, considere uma função característica 1_Y , onde Y é um conjunto mensurável invariante por T_α . Como, $1_Y \in L^2(\mathbb{T}, m)$, temos que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$$

converge para a função 1_Y no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{T}, m)$. Agora, como Y é T_α -invariante, vale a seguinte expressão para quase todo $x \in \mathbb{T}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x} = 1_Y(x) = 1_Y(T_\alpha(x)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n (x+\alpha)},$$

ou seja,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (1 - e^{2\pi i n \alpha}) e^{2\pi i n x} = 0.$$

Pela unicidade dos coeficientes da série de Fourier, temos que

$$a_n (1 - e^{2\pi i n \alpha}) = 0 \tag{2.77}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas se $n \neq 0$, como α é irracional, temos que

$$1 - e^{2\pi i n \alpha} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, (2.77) implica que $a_n = 0$ e portanto concluímos que $m(Y) = 0$ ou $m(Y) = 1$. Além disso, como Y é um conjunto mensurável T_α -invariante qualquer, concluímos que T_α é ergódica pelo item (ii) da Proposição 2.73. $\square$

Corolário 2.78. Se α é irracional, então para todo $x \in \mathbb{T}$, temos que a órbita de x por T_α é densa em $\mathbb{T}$.

Demonstração. Pelo Corolário 2.70 e o exemplo anterior, temos que o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{T}$ com a órbita densa por T_α é denso.

Vamos mostrar então, que dado $\varepsilon > 0$ e $z \in \mathbb{T}$, para todo $y \in \mathbb{T}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|T_\alpha^N(y) - z| < \varepsilon.$$

Como o conjunto dos pontos com órbita densa em $\mathbb{T}$ é denso, existe $x' \in \mathbb{T}$ com órbita densa, tal que $|x' - y| < \varepsilon/2$. Note que, como T_α^n é uma translação, temos que

$$|T_\alpha^n(x') - T_\alpha^n(y)| < \varepsilon/2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, como x' tem órbita densa, dado $z \in \mathbb{T}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|T_\alpha^N(x') - z| < \varepsilon/2.$$

Portanto, temos que

$$|T_\alpha^N(y) - z| < |T_\alpha^N(y) - T_\alpha^N(x')| + |T_\alpha^N(x') - z| < \varepsilon.$$

$\square$

Definição 2.79. Duas medidas de probabilidade μ_1 e μ_2 de um espaço de probabilidade X , são ditas **mutuamente singulares** se existem conjuntos mensuráveis disjuntos A e B tal que $A \cup B = X$ e $\mu_1(B) = \mu_2(A) = 0$. Denotamos o fato de μ_1 e μ_2 serem mutuamente singulares por

$$\mu_1 \perp \mu_2.$$

Proposição 2.80. Seja X um espaço de probabilidade e seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Se μ_1 e μ_2 são duas medidas ergódicas com relação à transformação T e $\mu_1 \neq \mu_2$, então μ_1 e μ_2 são mutuamente singulares.

Demonstração. Sejam μ_1 e μ_2 duas medidas ergódicas com relação à transformação T , como $\mu_1 \neq \mu_2$, então deve existir um conjunto mensurável A , tal que $\mu_1(A) \neq \mu_2(A)$.

Considere então os conjuntos

$$Y_j = \{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = \mu_j(A)\}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Pela Definição de ergodicidade 2.67, temos que $\mu_j(Y_j) = 1$, já que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) = \mu_i(A)$$

vale para quase todo ponto $x \in X$.

Porém, como $\mu_1(A) \neq \mu_2(A)$ então $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ e portanto as medidas são mutualmente singulares.

□

FLUXOS UNIPOTENTES

3.1 Motivação: Ações no toro

Definição 3.1. Considere o grupo aditivo $\mathbb{R}$ e X uma variedade suave com estrutura mensurável. Dizemos que uma ação φ

$$\begin{aligned}\varphi : X \times \mathbb{R} &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto \varphi_t(x)\end{aligned}$$

é um **fluxo suave**, se φ é uma função C^∞ .

Observação 3.2. Frequentemente vamos denotar o fluxo suave $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ simplesmente por $(\gamma_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Definição 3.3. Dado um fluxo $\varphi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ e $x \in X$, definimos a **órbita** $\mathcal{O}$ de x pelo fluxo φ como:

$$\mathcal{O}(x) = \{\varphi_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere o 2-toro $\mathbb{T}^2$, note que se fixarmos $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ com $\beta \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}$, a família de transformações dadas por

$$\gamma([x]) = [x + tv], \tag{3.4}$$

define um fluxo suave, onde $[x] = \mathbb{Z}^2 + x$.

Figura 1 – Representação do fluxo φ em $\mathbb{T}^2$ através do domínio fundamental $[0, 1]^2$.

Queremos estudar o comportamento da órbita de um dado $x \in \mathbb{T}^2$, isto é,

$$\mathcal{O}([x]) = \{[x + tv] \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.5)$$

Antes de mais nada, observe que existe $0 \leq x_1 < 1$ tal que

$$\mathcal{O}([x]) = \mathcal{O}([(x_1, 0)]) = \{ [(x_1, 0) + t \cdot (\alpha/\beta, 1)] \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

Vamos separar nosso problema em dois casos, isto é:

- i) se $\frac{\alpha}{\beta}$ é racional, ou
- ii) se $\frac{\alpha}{\beta}$ é irracional.

Proposição 3.6. Se $\frac{\alpha}{\beta}$ é racional, então a órbita $\mathcal{O}(x)$ é homeomorfa à $\mathbb{T}^1$.

Demonstração. Se $\frac{\alpha}{\beta}$ é racional, a órbita de x é periódica e portanto, homeomorfa a um círculo. □

Proposição 3.7. Se $\frac{\alpha}{\beta}$ é irracional, então a órbita $\mathcal{O}(x)$ é densa em $\mathbb{T}^2$.

Demonstração. Dado $y_0 \in [0, 1)$, considere a reta horizontal r em $\mathbb{T}^2$ dada por

$$r = \{ [(0, y_0) + t \cdot (1, 0)] \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

Então, a órbita de $(x_1, 0)$ intercepta r se, e só se, $t = y_0 \pmod{1}$ e portanto:

$$\mathcal{O}(x) \cap r = \{ (x, y_0) \mid x = x_1 + t \cdot \frac{\alpha}{\beta} \pmod{1} \}.$$

Note que se considerarmos $t \in \mathbb{Z}$, então $x_1 + t \cdot \frac{\alpha}{\beta} \pmod{1}$ é uma rotação no círculo por um ângulo irracional, mas já sabemos pelo Corolário 2.78 que rotações com ângulos irracionais possuem órbitas densas. Logo, $\mathcal{O}(x)$ será densa em r e como r foi uma reta qualquer, $\mathcal{O}(x)$ é densa em $\mathbb{T}^2$.

□

Utilizando as ideias anteriores, não é difícil generalizar esses resultados para o seguinte caso.

Teorema 3.8. Seja $v \in \mathbb{R}^n$, então dado $x \in \mathbb{T}^n$, existe $0 \leq k \leq n$ tal que

$$\overline{\mathcal{O}(x)} = \overline{\{[x + tv] \mid t \in \mathbb{R}\}} \cong \mathbb{T}^k,$$

ou seja, $\overline{\mathcal{O}(x)}$ é isomorfo a um sub-toro $\mathbb{T}^k$.

Definição 3.9. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e seja φ um fluxo suave que preserva μ . Dizemos que φ é um **fluxo ergódico com relação à medida μ** se para quase todo ponto $x \in X$, temos que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt = \int f d\mu, \quad (3.10)$$

onde f é qualquer função μ -integrável.

Análogo ao que fizemos na seção 2.4, temos os seguintes resultados:

Definição 3.11. Considere o espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e φ um fluxo suave em X . Dizemos que um subconjunto mensurável $A \subset X$ é **φ -invariante** se $\varphi_{-t}(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.12. Considere o espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e o fluxo suave φ em X . Dizemos que uma função μ -integrável é **φ -invariante** se $f \circ \varphi_t = f$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.13. Considere o espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e o fluxo φ em X . São equivalentes:

- i) φ é μ -ergódico.
- ii) Se A é um conjunto mensurável φ -invariante, então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.
- iii) Se f é uma função μ -integrável e φ -invariante, então f é constante num conjunto de medida total.

Tendo em vista os resultados anteriores que estendem a nossa definição de ergodicidade para fluxos, e o fato de que o fecho da órbita de um ponto $x \in \mathbb{T}^n$ pelo fluxo φ agora nos é bem conhecido, é natural nos questionarmos se é possível que o fluxo φ seja ergódico em seu fecho, e se sim, com respeito a qual medida.

Lema 3.14. Se G é um grupo compacto e metrizável, então G tem uma métrica compatível invariante pela direita e pela esquerda.

Demonstração. Ver Lema C.2 em (EINSIEDLER; WARD, 2010). □

Teorema 3.15. Seja G um grupo metrizável, compacto e $L_g(x) = gx$. Se μ_G é a medida de Haar de G , então são equivalentes:

- 1. A medida de Haar μ_G é a única L_g -ergódica.
- 2. A transformação L_g é ergódica com relação a μ_G .
- 3. O subgrupo $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em G .

Demonstração. Vamos seguir a demonstração feita em (EINSIEDLER; WARD, 2010).

(1 $\rightarrow$ 2) Óbvio.

(2 $\rightarrow$ 3) Considere Y o fecho do conjunto $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Se $Y \neq X$, considere a métrica compatível invariante pela esquerda e direita dada pelo Lema 3.14 e defina

$$f(x) = \min\{d_G(x, y) \mid y \in Y\}.$$

Como Y é fechado e $Y \neq X$, temos que $f(x)$ é não constante, já que deve existir $x' \in X$ tal que $d_G(x', Y) > 0$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} f \circ L_g(x) = f(gx) &= \min\{d_G(gx, y) \mid y \in Y\} \\ &= \min\{d_G(x, g^{-1}y) \mid y \in Y\} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

já que $g \in Y$. Mas então temos que f é uma função L_g invariante e não constante, logo L_g não pode ser ergódica com relação μ_G pelo item iii) da Proposição 2.73.

(3 $\rightarrow$ 1) Seja μ uma medida L_g -ergódica. Considerando Y o fecho do conjunto $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, temos que $Y = G$ e portanto G deve ser abeliano, já que contém um subgrupo denso e abeliano. Além disso, qualquer medida μ que seja L_g -invariante, é invariante por translação por um subgrupo denso de G .

Considere então, $f \in C(G)$ e tome $\varepsilon > 0$. Como f é contínua e G é compacto, existe $\delta > 0$ tal que para $z, y \in G$

$$d_G(z, y) < \delta \Rightarrow |f(z) - f(y)| < \varepsilon.$$

Como $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em G , então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d_G(g^n, y) < \delta$. Utilizando a invariância da métrica d_G , temos que se $d_G(g^n, y) = d_G(xg^n, xy) < \delta$, então para todo $x \in X$

$$|f(g^n x) - f(yx)| < \varepsilon.$$

Além disso, como

$$\int f(x) \mu(x) = \int f(g^n x) d\mu(x),$$

já que μ é L_g -ergódica e portanto L_g -invariante, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int f(yx) \mu(x) - \int f(x) d\mu(x) \right| &= \left| \int f(yx) d\mu(x) - \int f(g^n x) d\mu(x) \right| \\ &< \int |f(yx) - f(g^n x)| d\mu(x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Mas isso quer dizer que a medida de probabilidade μ é invariante por L_y para todo $y \in Y = G$ e como a medida de Haar μ_G é a única com essa propriedade, temos que $\mu = \mu_G$.

□

Corolário 3.16. Seja φ o fluxo definido em 3.4 em $\mathbb{T}^2$ e $v = (\alpha, \beta)$ com $b \neq 0$ e quociente $\frac{\alpha}{\beta}$ irracional. Então a medida de Lebesgue é a única que deixa o fluxo φ ergódico.

Os resultados acima nos dizem duas coisas: primeiro que o fluxo φ em $\mathbb{T}^2$ é ergódico em seu fecho e segundo que a única medida capaz de deixar o fluxo φ ergódico é a medida de Haar de $\mathbb{T}^2$.

3.2 Fluxos Unipotentes no toro

Definição 3.17. Seja $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ um grupo de Lie. Dizemos que $M \in G$ é um elemento **unipotente** de G , se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(g - I_n)^k = 0,$$

onde I_n é a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

Exemplo 3.18. Considere o grupo H formado pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Note que para qualquer elemento $g \in H$, temos que

$$(g - I_3)^3 = 0.$$

Portanto, todo elemento de H é um elemento unipotente. Chamamos H de grupo de Heisenberg.

Definição 3.19. Dizemos que um grupo G é **gerado** pelo subconjunto $A \subset G$ (ou que A é um gerador de G) se para todo elemento $g \in G$ existe uma sequência finita $a_1, a_2, \dots, a_n$ de elementos de A e uma sequência finita $k_1, k_2, \dots, k_n$ de elementos de $\mathbb{Z}$, tal que

$$g = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}.$$

Definição 3.20. Dizemos que o grupo $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ é **gerado por elementos unipotentes** se existe um subconjunto $U \subset G$ gerador de G , tal que todo elemento $u \in U$ é unipotente.

Exemplo 3.21. É claro que o grupo de Heisenberg é gerado por elementos unipotentes, já que este é unipotente. Porém, note que dada uma matriz M do grupo de Heisenberg, onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

podemos decompor M em elementos unipotentes mais simples, da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No próximo resultado, vamos mostrar que o grupo $SL_2(\mathbb{R})$ é gerado por elementos unipotentes. Enunciamos este exemplo como Lema 3.22 pois esse resultado nos será importante futuramente.

Lema 3.22. O grupo

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{M \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

é gerado por elementos unipotentes.

Demonstração. Vamos mostrar que o grupo $SL_2(\mathbb{R})$ é gerado pelas matrizes unipotentes da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Considere então

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Se $a \neq 0$ e $|a| \neq 1$, como $\det(A) = 1$, temos que $ad - bc = 1$ e portanto definindo $a' = 1/a$ temos

$$A = \begin{pmatrix} 1/a' & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a' & b \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a'b}{a'^2-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a' & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a'b}{a'^2-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, só precisamos mostrar que

$$\begin{pmatrix} 1/a' & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

é gerada por elementos unipotentes. Mas, note que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/a-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, se $a \neq 0$ e $|a| \neq 1$ o resultado vale. Agora, observe que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, é gerada por elementos unipotentes. Observe também que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}.$$

Então, dada uma matriz $A \in SL_2(\mathbb{R})$, é fácil provar que multiplicando A pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

E então deve valer um dos casos abaixo:

- Conseguimos reduzir o nosso problema para o caso em $a \neq 0$ e $|a| \neq 1$;
- A matriz A já é unipotente;
- A matriz A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Definição 3.23. Sejam G um grupo, X um conjunto e $f : G \times X \rightarrow X$ uma ação do grupo G em X . Dizemos que a ação f é uma **ação unipotente**, se G é gerado por elementos unipotentes.

Definição 3.24. Sejam $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ um grupo e $(\gamma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ um fluxo suave em G . Dizemos que $(\gamma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ é um **fluxo unipotente** se o grupo dado pelos elementos de $(\gamma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ com a operação

$$\gamma_t \circ \gamma_s = \gamma_{t+s}$$

é gerado por elementos unipotentes.

Proposição 3.25. O fluxo suave $\gamma_t([x]) = [x + tv]$ definido em $\mathbb{T}^2$ (ver 3.4), pode ser representado como um fluxo unipotente.

Demonstração. Considere o subgrupo $H_2(\mathbb{R})$ do grupo de Heisenberg dado pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Observe que dadas duas matrizes, M, N em $H_2(\mathbb{R})$, temos que

$$MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y+b \\ 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere então o homomorfismo de grupos ϕ , dado por

$$\phi : (\mathbb{R}^2, +) \longrightarrow (H_2(\mathbb{R}), \cdot)$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\ker \phi = \{(0, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ e $\phi(\mathbb{R}^2) = H_2(\mathbb{R})$, logo pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo 2.19, $(\mathbb{R}^2, +) \cong (H_2, \cdot)$.

Não é difícil mostrar que de fato, ϕ induz um isomorfismo entre os grupos $\mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$ e $H_2(\mathbb{Z}) \backslash H_2(\mathbb{R})$. A partir deste isomorfismo, o fluxo $\gamma_t([x]) = [x + tv]$ pode ser representado como

$$\phi(\gamma_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t\alpha \\ 0 & 1 & t\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o fluxo é unipotente.

□

3.3 Fluxos Unipotentes no Espaço Hiperbólico

Para mais detalhes sobre os resultados e construções desta seção, ver as seções 9.2, 9.3 e 9.4 em (EINSIEDLER; WARD, 2010).

Definição 3.26. Definimos o semiplano hiperbólico $\mathbb{H}$ como

$$\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

com a métrica hiperbólica dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Lema 3.27. O conjunto

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \{I_2, -I_2\} \backslash SL_2(\mathbb{R})$$

é um grupo de Lie.

Definição 3.28. Sejam G um grupo, X um conjunto e $f : G \times X \rightarrow X$ uma ação do grupo G em X . Dizemos que a ação f é uma **ação transitiva**, se dados $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $f(g, x) = y$. Se para todo $x, y \in X$ existir um único $g \in G$ com tal propriedade, dizemos que a ação é **simplesmente transitiva**.

Proposição 3.29. Considere o espaço tangente unitário de $\mathbb{H}$ dado por

$$T^1\mathbb{H} = \{(z, v) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C} \mid \|v\| = 1\}.$$

Então a função $F : PSL_2(\mathbb{R}) \times T^1\mathbb{H} \rightarrow T^1\mathbb{H}$ dada por

$$\begin{aligned} F : PSL_2(\mathbb{R}) \times T^1\mathbb{H} &\longrightarrow T^1\mathbb{H} \\ (M, (z, v)) &\longmapsto \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{v}{(cz+d)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é uma ação do grupo $PSL_2(\mathbb{R})$ em $T^1\mathbb{H}$ simplesmente transitiva.

Demonstração. Ver Lema 9.2 em (EINSIEDLER; WARD, 2010). □

Observação 3.31. Perceba que pela Proposição 3.29, dado um elemento $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$, existe um único elemento $g \in PSL_2(\mathbb{R})$ tal que $F(g, (i, i)) = (z, v)$, dessa forma temos uma identificação única de elementos de $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ por elementos em $PSL_2(\mathbb{R})$, como mostra o desenho abaixo.

Proposição 3.32. Utilizando a identificação dada pela ação F da Proposição 3.29, temos que o conjunto $E = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq 1/2\}$ é um domínio fundamental para a ação de $PSL_2(\mathbb{Z})$ em $PSL_2(\mathbb{R})$. Isto é, $PSL_2(\mathbb{Z})$ é um lattice em $PSL_2(\mathbb{R})$.

Demonstração. Ver Proposição 9.18 em (EINSIEDLER; WARD, 2010). □

Definição 3.33. Dado um lattice Γ do grupo de Lie $PSL_2(\mathbb{R})$, definimos o **fluxo geodésico** no espaço homogêneo $X = \Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{R})$ como

$$\begin{aligned} a: X \times \mathbb{R} &\longrightarrow X \\ (x, s) &\longmapsto xa^s, \end{aligned}$$

onde

$$a^s = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}.$$

Como vimos na Observação 3.31, existe uma identificação única entre o grupo $PSL_2(\mathbb{R})$ e o espaço tangente unitário $\mathbb{T}^1\mathbb{H}$. Então, dado um ponto $x \in X = \Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{R})$, o fluxo geodésico é definido através da parametrização da única geodésica definida pelo ponto $(z, v) \in \mathbb{T}^1\mathbb{H}$, módulo Γ . No caso em que $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$, se considerarmos o domínio fundamental construído na Proposição 3.32, geometricamente o fluxo geodésico em X é como na figura abaixo:

Sempre que o fluxo toca no bordo, aplicamos a transformação $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, no caso em que o fluxo tocou uma das regiões verticais do bordo, e $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ quando o fluxo tocar a região circular do domínio. Dessa forma, o fluxo fica sempre bem definido no domínio fundamental.

Definição 3.34. Dado um lattice Γ do grupo de Lie $PSL_2(\mathbb{R})$, definimos o **fluxo horocíclico** no espaço homogêneo $X = \Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{R})$ como

$$\begin{aligned} u: X \times \mathbb{R} &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto xu^t, \end{aligned}$$

onde

$$u^t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lema 3.35. Seja $g \in PSL_2(\mathbb{R})$ e $h = gu^t$ para algum $t \in \mathbb{R}$, onde u^t é como na definição anterior. Então temos que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} d(ga^s, ha^s) = 0.$$

Demonstração. Pela invariância a esquerda da distância em $PSL_2(\mathbb{R})$, temos que

$$d(ga^s, ha^s) = d(ga^s, gu^t a^s) = d(I_2, a^{-s} u^t a^s),$$

mas

$$a^{-s} u^t a^s = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2s}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que converge para 0 quando s tende ao infinito. $\square$

Portanto, o que o Lema 3.35 nos diz, é que o fluxo horocíclico é definido através da parametrização da variedade estável com relação ao fluxo geodésico módulo Γ , isto é, dado um ponto $g \in PSL_2(\mathbb{R})$, o fluxo horocíclico passa pelos de $h \in \Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{R})$ tal que a distancia entre a geodésica definida por g e a geodésica definida por h convergem para zero em $PSL_2(\mathbb{R})$. Se $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$, considerando o domínio fundamental construído na Proposição 3.32, geometricamente o fluxo horocíclico em $T^1\mathbb{H}$ é dado por círculos tangentes ao eixo horizontal e por retas paralelas ao eixo horizontal.

Se o vetor $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ não aponta verticalmente, então o fluxo horocíclico é dado pela parametrização do único círculo ortogonal a (z, v) e tangente ao eixo horizontal. Se o vetor $(w, u) \in T^1\mathbb{H}$ aponta verticalmente, então o fluxo horocíclico é definido pela reta ortogonal a (w, u) que passa por $w \in \mathbb{H}$.

Terminamos esta seção com um resultado clássico em Teoria Ergódica:

Teorema 3.36. O fluxo geodésico é ergódico com relação a medida de Haar no espaço homogêneo $X = \Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{R})$.

Demonstração. Ver Teorema 9.21 em (EINSIEDLER; WARD, 2010). □

Perceba que o fluxo geodésico não é um fluxo unipotente, portanto não podemos utilizar os Teoremas de Ratner para tirarmos conclusões sobre sua dinâmica em X . Porém, o fluxo horocíclico é um fluxo unipotente, já que é definido pela família de matrizes da forma

$$u^t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na próxima seção, utilizaremos os Teoremas de Ratner para provarmos que o fluxo horocíclico, em certo sentido, se comporta da mesma maneira que o fluxo definido na nossa seção de Motivação sobre ações no toro.

OS TEOREMAS DE RATNER

4.1 Introdução

Definição 4.1. Seja $X = \Gamma \backslash G$ um espaço homogêneo e μ uma medida em X . Então μ é uma **medida homogênea**, se existe um subgrupo fechado $H \leq G$ e $x \in X$, tal que:

1. A medida μ é invariante pela ação do grupo H ;
2. A órbita xH é fechada em X ;
3. O suporte da medida μ é o conjunto xH .

O nosso principal objetivo nessa seção é provar um caso especial do seguinte teorema:

Teorema 4.2 (Teorema de Ratner de classificação de medidas). Seja G um grupo de Lie, $\Gamma < G$ um lattice, $U < G$ um subgrupo conexo gerado por elementos unipotentes e μ uma medida de probabilidade em $X = \Gamma \backslash G$ que seja ergódica com relação à ação de U em G . Então, μ é homogênea.

O teorema acima foi provado na década de 90 pela matemática Marina Ratner (ver (RATNER, 1990a), (RATNER, 1990b), (RATNER, 1991)).

Ao longo dos anos, em colaboração com outros matemáticos como N. Shah (SHAH, 1996), G.M. Tomanov e G. Margulis (MARGULIS; TOMANOV, 1994), a teoria desenvolvida por Marina Ratner foi largamente estendida e como consequência do seu Teorema de classificação de medidas, foram provados outros importantes resultados, como:

Teorema 4.3 (Teorema de Ratner de equidistribuição). Seja G um grupo de Lie, $\Gamma < G$ um lattice e $U = \{U_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ um fluxo suave gerado por elementos unipotentes. Então, existe um subgrupo fechado H de G , tal que para qualquer função contínua $f : xH \rightarrow \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(xU_t) dt = \int_{xH} f d\mu,$$

onde xH é o suporte de uma medida homogênea μ .

Teorema 4.4 (Teorema de Ratner do fecho da órbita). Seja G um grupo de Lie, $\Gamma < G$ um lattice de G e $U < G$ um subgrupo conexo gerado por elementos unipotentes. Então, para todo ponto $x \in \Gamma \backslash G$, existe um subgrupo fechado H de G , tal que $U \leq H \leq G$ e $\overline{xU} = xH$.

O caso especial que vamos estudar acontece quando $G = SL_2(\mathbb{R})$ e

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ou seja, vamos provar que:

Teorema 4.5 (Teorema de Ratner de classificação de medidas em $SL_2(\mathbb{R})$). Considere o grupo de Lie $G = SL_2(\mathbb{R})$ e o lattice $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Seja μ uma medida ergódica com respeito a ação do grupo unipotente U no quociente $X = \Gamma \backslash G$, onde

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Então, μ é homogênea.

Note que se consideramos o lattice $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, então conseguimos uma interpretação geométrica para este resultado, pois como vimos na Seção 3.3, o grupo U representa o fluxo horocíclico no espaço homogêneo $X = PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash PSL_2(\mathbb{R})$, que nada mais é que $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R})$ quocientado pelas matrizes $\{I_2, -I_2\}$.

A escolha desse caso particular é importante, pois exhibe o poder dos Teoremas de Ratner, que nos diz que mesmo no caso não trivial do fluxo horocíclico em $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R})$, este se comporta, em certo sentido, como o fluxo no toro, que estudamos na Seção 3.2.

A demonstração do caso geral do Teorema de Classificação é muito mais técnica e uma ideia geral da prova pode ser encontrada em (MORRIS, 2005). Porém, a demonstração no caso $SL_2(\mathbb{R})$ capta algumas ideias essenciais do caso geral e também é de extrema importância por captar um comportamento geométrico de um quociente num fibrado tangente unitário do espaço Hiperbólico.

Além disso, um dos pontos fundamentais para a demonstração do caso geral do Teorema de Classificação de Ratner, é o cálculo da entropia de translações em espaços homogêneos, e este cálculo fizemos em sua forma mais geral, como é descrito em (MARGULIS; TOMANOV, 1994) no capítulo 9.

4.2 Teorema de Classificação para o grupo $SL_2(\mathbb{R})$: Ideia da prova

Passo 1: Primeiramente decomposmos o grupo $SL_2(\mathbb{R})$ nos subgrupos:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ u^t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \\ A &= \left\{ a^s = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}, \\ H &= \left\{ h^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Passo 2: Dados dois pontos próximo $x, y \in G$, estudamos a distância da órbita de x e y no tempo θ pelo fluxo u^t utilizando o a decomposição anterior e então chegamos que

$$d_G(xu^\theta, yu^\theta) = d_G(I_2, a^S h^R u^{\theta-T}),$$

onde

$$\begin{aligned} S(s, r, \theta) &= \ln(e^s - r\theta e^{-s}) \\ R(s, r, \theta) &= r(1 - r\theta e^{-2s}) \\ T(s, r, \theta) &= \frac{\theta}{e^{2s} - r\theta}. \end{aligned}$$

Passo 3: Provamos a **Propriedade de Ratner**, que nos diz fixando $x \in G$ e tomando $y = xa^s h^r \in G$ suficientemente próximo de x , então dado $0 < \alpha < 1$, considerando θ_α o menor valor tal que

$$|S(s, r, \theta_\alpha)| = \alpha.$$

Então existem constantes $0 < \eta < 1$ e $C > 1$ tal que

$$\alpha/2 \leq |S(s, r, \theta)| \leq \alpha, \quad |R(s, r, \theta)| \leq \frac{C\alpha}{\theta_\alpha} \quad \forall \theta \in [(1-\eta)\theta_\alpha, \theta_\alpha].$$

Lembrando que

$$d_G(xu^\theta, yu^\theta) = d_G(I_2, a^S h^R u^{\theta-T}),$$

esse resultado nos diz que se x, y são pontos bem próximos, então por bastante tempo, isto é, para $\theta \in [(1-\eta)\theta_\alpha, \theta_\alpha]$, teremos que os valores $S(s, r, \theta)$ e $R(s, r, \theta)$ serão bem pequenos e então o fluxo se comportará por muito tempo como uma translação pelo fator $T(s, r, \theta)$, ou seja,

$$d_G(xu^\theta, yu^\theta) \approx d_G(I_2, u^{\theta-T}).$$

Passo 4: Definimos o subgrupo de G dado por

$$\text{stab}(\mu) = \{g \in G \mid \mu(E) = \mu(Eg) \text{ para todo conjunto Boreliano } E \subset X\}.$$

Passo 5: Separamos a demonstração do Teorema em dois casos: se o grupo $A \not\subset \text{stab}(\mu)$ e se $A \subset \text{stab}(\mu)$.

Passo 6: Se $A \not\subset \text{stab}(\mu)$ então provamos que existe $x \in X$ tal que xU é o suporte da medida μ .

Passo 7: Se $A \subset \text{stab}(\mu)$ então provamos que $\text{stab}(\mu) = SL_2(\mathbb{R})$ e então μ é a medida de Haar de $SL_2(\mathbb{R})$ induzida no quociente.

4.3 Teorema de Classificação para o grupo $SL_2(\mathbb{R})$: Prova completa

Nesta seção, utilizaremos (STARKOV, 2000) como texto base.

Proposição 4.6. O grupo $SL_2(\mathbb{R})$ é gerado pelos subgrupos:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ u^t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \\ A &= \left\{ a^s = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}, \\ H &= \left\{ h^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Análogo à demonstração do Lema 3.22.

□

Observação 4.7. Note que $u^{a+b} = u^a u^b$, $u^0 = I_2$, e o mesmo vale para os grupos a e h . Com isso em mente, é fácil ver que os grupos U, A, H formam fluxos suaves.

Proposição 4.8. O grupo A normaliza U e H .

Demonstração. Um cálculo direto nos mostra que

$$\begin{aligned} a^{-s} u^t a^s &= u^{e^{-2s}t}, \\ a^{-s} h^r a^s &= h^{e^{2s}r}. \end{aligned}$$

□

Vamos definir também os subgrupos $B = AU$ e $W = AH$. Note que os conjuntos B e W são de fato grupos, já que A é normal em U e em H .

Além disso, considere

$$U(\delta) = \{u^t \in U \mid |t| < \delta\},$$

$$A(\delta) = \{a^s \in A \mid |s| < \delta\},$$

$$H(\delta) = \{h^r \in H \mid |r| < \delta\},$$

$$B(\delta) = A(\delta)U(\delta),$$

$$W(\delta) = A(\delta)H(\delta).$$

Lema 4.9 (Mudança de coordenadas). Fixados $\theta, s, r \in \mathbb{R}$ temos que

$$a^s h^r u^T = u^\theta a^S h^R$$

se, e só se,

$$\begin{aligned} S(s, r, \theta) &= \ln(e^s - r\theta e^{-s}) \\ R(s, r, \theta) &= r(1 - r\theta e^{-2s}) \\ T(s, r, \theta) &= \frac{\theta}{e^{2s} - r\theta}. \end{aligned}$$

Demonstração. Note que

$$a^s h^r u^T = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u^\theta a^S h^R = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^S & 0 \\ 0 & e^{-S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, temos que

$$\begin{pmatrix} e^S & e^S T \\ re^{-S} & re^{-S} + e^{-S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^S + R\theta e^{-S} & \theta e^{-S} \\ Re^{-S} & e^{-S} \end{pmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} e^S & = e^S + R\theta e^{-S} \\ e^S T & = \theta e^{-S} \\ re^{-S} & = Re^{-S} \\ re^{-S} + e^{-S} & = e^{-S}. \end{cases}$$

Utilizando a terceira equação, podemos trocar Re^{-S} por re^{-S} na primeira equação e então

$$e^S = e^S - \theta re^{-S}$$

e portanto

$$S(s, r, \theta) = \ln(e^S - r\theta e^{-S}).$$

Utilizando a segunda equação e o fato de que $e^S = e^S - \theta re^{-S}$, temos que

$$T(s, r, \theta) = \frac{\theta}{e^S e^S} = \frac{\theta}{e^S (e^S - \theta re^{-S})} = \frac{\theta}{e^{2S} - \theta r}.$$

Para finalizar, utilizando novamente que $e^S = e^S - \theta re^{-S}$, pela terceira equação, temos que

$$R(s, r, \theta) = re^{-S} e^S = re^{-S} (e^S - \theta re^{-S}) = r(1 - \theta e^{-2S}).$$

□

Observação 4.10. Optamos por sempre denotar elementos do grupo U utilizando a letra t ou a letra θ como índice, isto é, os elementos do grupo U são sempre representados da forma u^t ou u^θ , dependendo do contexto. Da mesma forma, para o grupo H sempre utilizaremos a letra r e para o grupo A sempre utilizaremos a letra s . Note que as funções T, S, R que aparecem no lema de mudança de coordenadas foram escolhidas com esse nome para coincidirem com nossa notação, ou seja, T representa a mudança de coordenadas na direção U , S na direção A e R na direção H .

Proposição 4.11. Seja $x \in G$ e $y \in xW$, isto é, y é da forma $y = xa^s h^r$. Então, fixado $\theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$d_G(xu^\theta, yu^\theta) = d_G(I_2, a^S h^R u^{\theta-T}),$$

onde

$$T := T(s, r, \theta), \quad S := S(s, r, \theta), \quad R := R(s, r, \theta),$$

são como no Lema 4.9.

Demonstração. Pela invariância à esquerda da métrica d_G temos que

$$d_G(xu^\theta, yu^\theta) = d_G(xu^\theta, xa^s h^r u^\theta) = d_G(I_2, u^{-\theta} a^s h^r u^\theta).$$

Agora, utilizando o Lema 4.9, temos que

$$d_G(I_2, u^{-\theta} a^s h^r u^\theta) = d_G(I_2, u^{-\theta} u^\theta a^s h^R u^\theta u^{-T}) = d_G(I_2, a^S h^R u^{\theta-T}).$$

□

Observação 4.12. Daqui em diante, sempre estaremos considerando μ uma medida de probabilidade ergódica em X com relação ao fluxo u_t gerado pelos elementos de U . Além disso, dado $x \in X$ e $y = xa^s h^r \in xW(\delta)$, vamos supor que $\delta > 0$ é pequeno o suficiente para que y seja unicamente definido pelos valores $s, r \in \mathbb{R}$.

Note que dessa forma, se $y \in xW(\delta)$, isto é, $y = xa^s h^r$, podemos escrever as funções $T(s, r, \theta)$, $S(s, r, \theta)$, $R(s, r, \theta)$ como $T(y, \theta)$, $S(y, \theta)$, $R(y, \theta)$ já que estes valores estão unicamente definidos.

Proposição 4.13. Seja $0 < \alpha < 1$ e $0 < \delta < \alpha/10$ e considere $y \in xW(\delta)$, isto é, $y = xa^s h^r$. Defina θ_α como o menor valor tal que

$$|S(y, \theta_\alpha)| = |S(s, r, \theta_\alpha)| = \alpha.$$

Então temos as seguintes relações

$$\theta_\alpha = \frac{e^s(e^s - e^{\alpha \cdot \text{sgn}(r)})}{r},$$

$$T(y, \theta_\alpha) = \frac{\theta_\alpha}{e^{\alpha \cdot \text{sgn}(r) + s}},$$

$$S(y, \theta_\alpha) = -\alpha \text{sgn}(r),$$

$$R(y, \theta_\alpha) = re^{-\alpha \cdot \text{sgn}(r) - s}.$$

Demonstração. Se $\ln(e^s - r\theta_\alpha e^{-s}) > 0$, então

$$\ln(e^s - r\theta_\alpha e^{-s}) = \alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$e^s - r\theta_\alpha e^{-s} = e^\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\theta_\alpha = \frac{e^s(e^s - e^{\alpha r})}{r}.$$

E no caso de $\ln(e^s - r\theta_\alpha e^{-s}) < 0$, temos que

$$\ln(e^s - r\theta_\alpha e^{-s}) = -\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$e^s - r\theta_\alpha e^{-s} = e^{-\alpha} \quad \Leftrightarrow$$

$$\theta_\alpha = \frac{e^s(e^s - e^{-r\alpha})}{r}.$$

As outras identidade são automáticas uma vez que você sabe o valor de θ_α .

□

Corolário 4.14. Sejam $0 < \alpha < 1$ e $y \in xW(\delta)$ como na Proposição 4.13, então valem as seguintes relações

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \theta_\alpha = \infty,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R(y, \theta_\alpha) = 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{T(y, \theta_\alpha)}{\theta_\alpha} = e^{\alpha \operatorname{sgn}(r)}.$$

O corolário anterior nos mostra um comportamento muito importante da dinâmica do nosso sistema. Note que quanto menor for $\delta > 0$, ou seja, quanto mais próximo o ponto y está de x , maior é a demora para que a direção A do fluxo comece a divergir, isto é, fique maior que uma constante $\alpha > 0$. Além disso, temos que a direção H fica cada vez menor.

O próximo teorema formaliza essas observações e nos dá uma ferramenta crucial para a prova do Teorema de Classificação de Ratner, como veremos mais a frente.

Teorema 4.15 (Propriedade de Ratner). Dados $0 < \alpha < 1$ e $0 < \delta < \alpha/10$ e $y \in xW(\delta)$ de tal forma que $|S(y, \theta_\alpha)| = \alpha$ e $|S(y, \theta)| < \alpha$ se $0 < \theta < \theta_\alpha$, então existem constantes $0 < \eta < 1$ e $C > 1$ tal que

$$\alpha/2 \leq |S(y, \theta)| \leq \alpha, \quad |R(y, \theta)| \leq \frac{C\alpha}{\theta_\alpha}, \quad \forall \theta \in [(1 - \eta)\theta_\alpha, \theta_\alpha].$$

Demonstração. Seja

$$xW^+(\delta) = \{xa^s h^r \mid |s| < \delta, 0 < r < \delta\}$$

e considere $y \in xW^+(\delta)$. Note que dessa forma, θ_α é uma função monótona, crescente com respeito à α . Primeiro vamos encontrar $0 < \eta < 1$ tal que

$$\theta_{\alpha/2} \geq (1 - \eta)\theta_\alpha, \quad \forall 0 < \alpha < 1, \forall y \in xW^+(\delta).$$

Note que para isso, basta mostrarmos que

$$\eta = \inf_{\substack{0 < \alpha < 1 \\ y \in xW^+(\alpha/10)}} \left\{ 1 - \frac{\theta_{\alpha/2}}{\theta_\alpha} \right\} > 0.$$

Como estamos supondo que $|s| < \delta \leq \alpha/10$ temos que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\theta_{\alpha/2}}{\theta_\alpha} &= 1 - \left(\frac{e^s - e^{-\alpha/2}}{e^s - e^{-\alpha}} \right) \\ &= \frac{-e^\alpha + e^{-\alpha/2}}{e^s - e^{-\alpha}} \\ &\geq \frac{-e^\alpha + e^{-\alpha/2}}{e^{\alpha/10} - e^{-\alpha}} \\ &\geq \frac{e^{\alpha/2} - 1}{e^{10\alpha/11} - 1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{10}{22} > 0. \end{aligned}$$

Note que como $\theta_{\alpha/2} \geq (1 - \eta)\theta_\alpha$, temos que se $\theta \in [(1 - \eta)\theta_\alpha, \theta_\alpha]$ então

$$\alpha/2 \leq |S(y, \theta)| \leq \alpha,$$

concluindo a primeira parte do teorema.

Agora vamos mostrar que:

$$C = \sup_{\substack{0 < \alpha < 1 \\ y \in xW^+(\alpha/10) \\ \theta \in [(1-\eta)\theta_\alpha, \theta_\alpha]}} \left\{ \frac{|R(y, \theta)|\theta_\alpha}{\alpha} \right\} < \infty.$$

Como $|s| \leq \alpha/10$

$$\begin{aligned} \frac{R(y, \theta)\theta_\alpha}{\alpha} &= \frac{r(1 - r\theta e^{-2s})(e^{2s} - e^{s-\alpha})}{r\alpha} \leq \frac{e^{2s} - e^{s-\alpha}}{\alpha} \\ &\leq \frac{e^{\alpha/5} - e^{-11\alpha/10}}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 13/10 < \infty. \end{aligned}$$

O caso em que $y \in xW^-(\delta) = \{xa_s h_r \mid |s| < \delta, -\delta < r < 0\}$ é análogo. $\square$

Lema 4.16. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tal que, se $y \in xW(\alpha_\varepsilon)$, isto é, $y = xa^s h^r$ com $|s|, |r| < \alpha_\varepsilon$ e C é um Boreliano tal que $C \subset [0, \theta_{\alpha_\varepsilon}]$, então

$$\left| \frac{m(C)}{m(\phi_y(C))} - 1 \right| < \varepsilon,$$

onde m é a medida de Lebesgue e $\phi_y(x) = T(y, x)$.

Demonstração. Note que,

$$\phi_y(x) = \frac{x}{e^{2s} - xr} \quad \text{e} \quad \phi'_y(x) = \frac{e^{2s}}{(e^{2s} - xr)^2}.$$

Como ϕ'_y é monótona e $\phi'_y(0) = e^{-2s}$ e $\phi'_y(\theta_\alpha) = e^{2s+2\alpha \operatorname{sgn}(r)}$ temos que se $y \in xW(\alpha)$

$$|\phi'_y(x) - 1| \leq e^{2s+2\alpha} - 1 \leq e^{4\alpha} - 1$$

já que $|s| \leq \alpha$. Escolhendo α_ε de tal forma que $e^{4\alpha_\varepsilon} - 1 < \varepsilon$, temos pelo teorema de mudança de variáveis, que se $C \subset [0, \theta_{\alpha_\varepsilon}]$

$$m(\phi_y(C)) \geq m(C)\phi'_y(0) = m(C)e^{-2s}$$

e portanto

$$\left| \frac{m(C)}{m(\phi_y(C))} - 1 \right| \leq e^{2s} - 1 \leq e^{4\alpha_\varepsilon} - 1 < \varepsilon.$$

□

Esse lema nos diz que a função $\phi_y(\theta) = T(y, \theta)$ distorce pouco a medida de Lebesgue, isto é, ela quase deixa a medida invariante.

Definição 4.17. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade com σ -álgebra de Borel. Definimos o estabilizador da medida μ como

$$\operatorname{stab}(\mu) = \{g \in G \mid \mu(E) = \mu(Eg) \text{ para todo conjunto Boreliano } E \subset X\}.$$

Observação 4.18. Não é difícil mostrar que o conjunto $\operatorname{stab}(\mu)$ é na verdade um grupo fechado. Além disso, como o fluxo formado pelos elementos u^t de U é μ -ergódico pela hipótese do Teorema de Ratner de classificação de medidas, temos que $U \subset \operatorname{stab}(\mu)$.

Definição 4.19. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : X \rightarrow X$ uma função $\mathcal{B}$ -mensurável. Definimos o **pushforward** da medida μ pela função f por

$$f_*\mu(E) := \mu(f^{-1}(E)),$$

onde E é um conjunto $\mathcal{B}$ -mensurável.

Lema 4.20. Seja X um espaço métrico, localmente compacto, separável e μ uma medida de probabilidade para X . Seja $f : X \rightarrow X$ é uma transformação Borel mensurável tal que

$$\mu \perp f_*\mu,$$

isto é, as medidas μ e $f_*\mu$ são mutuamente singulares. Então existe um conjunto Y de medida total, tal que

$$f^{-1}(Y) \cap Y = \emptyset.$$

Em particular, $f_*\mu(Y) = 0$ e $\mu(Y^c) = 0$, onde Y^c denota o complementar do conjunto Y .

Demonstração. Como $\mu \perp f_*\mu$, pela definição de medidas mutuamente singulares, existem conjuntos mensuráveis disjuntos A, B tal que A é o suporte da medida μ e B é o suporte da medida $f_*\mu$. Defina

$$Y = A \setminus f^{-1}(A) = A \cap f^{-1}(B).$$

Note que se $x \in Y$ então $f(x) \in B$ e se $x \in f^{-1}(Y)$ então $f(x) \in A$. Como $A \cap B = \emptyset$ temos que

$$f^{-1}(Y) \cap Y = \emptyset.$$

Além disso

$$\begin{aligned} \mu(X \setminus Y) &= \mu(X) - \mu(Y) \\ &= 1 - (\mu(A) - \mu(f^{-1}(A))) \\ &= 1 - \mu(A) + f_*\mu(A) \\ &= 1 - 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, Y tem medida total.

□

Definição 4.21. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $Y \subset X$ um conjunto mensurável e φ_t um fluxo. Definimos então a **média de Birkhoff** do fluxo φ_t no conjunto Y , por

$$S_Y(x, t) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_Y(\varphi_s(x)) ds.$$

Lema 4.22. Sob as hipóteses do Teorema de Ratner de classificação de medidas, seja $Y \subset X$ um conjunto mensurável e $T > 0$, tal que

$$S_Y(x, T) > 1/2,$$

para quase todo ponto $x \in X$. Então, para quase todo $x, y \in X$, existe $t' \in [0, T]$ tal que os elementos $xu^{t'}$ e $yu^{t'}$ estão em Y .

Demonstração. Seja $X' \subset X$ o conjunto mensurável de medida total onde vale

$$S_Y(x, T) > 1/2,$$

para todo ponto.

Suponha então, que para $x, y \in X'$ não exista $t' \in [0, T]$ tal que $u^{t'}x$ e $u^{t'}y$ pertencem ao conjunto Y . Então temos que, $1_Y(u^{t'}x) + 1_Y(u^{t'}y) \leq 1$, já que os dois pontos não podem pertencer ao conjunto Y ao mesmo tempo. Dessa forma, chegaríamos no seguinte absurdo:

$$1 < \frac{1}{T} \int_0^T 1_Y(xu^s) ds + \frac{1}{T} \int_0^T 1_Y(yu^s) ds = \frac{1}{T} \int_0^T 1_Y(xu^s) + 1_Y(yu^s) ds \leq 1.$$

□

Proposição 4.23. Existe um conjunto mensurável $Y \subset X$ tal que

$$\mu(Y) = 1 \text{ e } Y \cap Yq = \emptyset, \forall q \in B - \text{stab}(\mu),$$

onde lembramos que $B = AU$.

Demonstração. Considere $q \in B - \text{stab}(\mu)$ e a translação $f : X \rightarrow X$ definida por $x \mapsto xq^{-1}$. Então

$$f_*\mu(E) := q\mu(E) = \mu(Eq),$$

onde E é um conjunto mensurável.

Note que, como μ é ergódica com relação ao fluxo u^t , então $q\mu$ também será. De fato, suponha que $q\mu$ não é u^t -ergódica. Pelo item ii) da Proposição 3.13, deve existir um subconjunto $E \subset X$, tal que E é invariante pelo fluxo u^t e $0 < q\mu(E) = \mu(Eq) < 1$. Mas então, considerando o conjunto Eq , note que se $q = a^s u^t$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, então

$$Eq u^{t_0} = E a^s u^t u^{t_0} = E a^s u^{t_0} u^t = E u^{e^{2s} t_0} a^s u^t = Eq,$$

isto é, o conjunto Eq é invariante pelo fluxo, porém

$$0 < \mu(Eq) = q\mu(E) < 1,$$

contrariando o fato de μ ser u^t -ergódica.

Portanto, pela Proposição 2.80, temos que $\mu \perp q\mu$ e então, pelo lema anterior, existe Y_q com medida μ total em X , tal que

$$Y_q \cap Y_q q = \emptyset.$$

Seja $K \subset Y_q$ compacto tal que $\mu(K) > 0.99$ e $K \cap Kq = \emptyset$. Como K e Kq são compactos, existe ε_q tal que

$$d_X(K, Kq) \geq \varepsilon_q.$$

Pelo Teorema de Ergodicidade de Birkhoff, existe um conjunto de medida total $Y_{q, \varepsilon_q} \subset X$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_K(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_K(xu^s) ds \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mu(K), \forall x \in Y_{q, \varepsilon_q}.$$

Afirmção: Vamos mostrar que

$$Y_{q, \varepsilon_q} \cap Y_{q, \varepsilon_q} g = \emptyset, \quad \forall g \in qB(\varepsilon_q) = qA(\varepsilon_q)U(\varepsilon_q).$$

Suponha por absurdo que exista $g = qa^s u^t \in qB(\varepsilon_q)$ e $x, y \in Y_{q, \varepsilon_q}$ com $x = yg = yqa^s u^t$ para algum s, t com $|s|, |t| < \varepsilon_q$, ou seja, $Y_{q, \varepsilon_q} \cap Y_{q, \varepsilon_q} g \neq \emptyset$.

Como $x, y \in Y_{q, \varepsilon_q}$, existe um tempo t_0 tal que

$$S_K(y, t_0) \geq 0.9 \text{ e } S_K(x, e^{-2s} t_0) \geq 0.9 \quad (\text{lembrar que } \mu(K) > 0.99).$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
 S_K(x, e^{-2s}t) &= \frac{1}{e^{-2s}t} \int_0^{e^{-2s}t} 1_K(xu^r) dr \\
 &= \frac{1}{e^{-2s}t} \int_0^t e^{-2s} 1_K(xu^{e^{-2s}r'}) dr' \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^t 1_K(xu^{e^{-2s}r'}) dr' \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^t 1_K(xu^{e^{-2s}r'}) dr'.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Portanto, como $S_K(y, t_0)$ e $S_K(x, e^{-2s}t)$ são ambos maiores que $1/2$, pelo mesmo argumento dado no Lema 4.22, garantimos que existe t' tal que os elementos $yu^{t'}$ e $xu^{e^{-2s}t'}$ estão em K . Então, definindo $z = yu^{t'}$, temos que $z \in K$. Além disso, pelo lema de mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}
 yu^{t'}g &= xg^{-1}u^{t'}g = xu^{-t}a^{-s}u^{t'}a^su^t \\
 &= xu^{-t}u^{t'}e^{-2s}u^t \\
 &= xu^{t'}e^{-2s}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Logo, $zg \in K$, e portanto $zg \in K$ e $zq \in Kq$, já que $z \in K$. Mas então

$$\begin{aligned}
 d_X(zg, zq) &= \inf_{\gamma \in \Gamma} d_G(zg, \gamma zq) \leq d_G(zg, I_2 zq) = d_G(I_2, g^{-1}z^{-1}zq) \\
 &= d_G(I, g^{-1}q) = d_G(I, u^{-t}a^{-s}q^{-1}q) = d_G(u^ta^s, I) < \varepsilon_q
 \end{aligned}$$

já que $|s|, |t| < \varepsilon_q$. Mas isso contraria o fato de

$$d_X(K, Kq) > \varepsilon_q.$$

Concluimos então que

$$Y_{q, \varepsilon} \cap Y_{q, \varepsilon}g = \emptyset, \quad \forall g \in qB(\varepsilon).$$

Agora, como $B - \text{stab}(\mu)$ é um conjunto formado por matrizes com coordenadas reais, existe uma sequência densa e enumerável $(q_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset B - \text{stab}(\mu)$. Repetindo o processo que fizemos anteriormente para cada q_i , conseguimos uma sequência de reais positivos $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$B - \text{stab}(\mu) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} q_i B(\varepsilon_i)$$

e a afirmação vale para todo $g \in q_i B(\varepsilon_i)$, isto é

$$Y_{q_i, \varepsilon_i} \cap Y_{q_i, \varepsilon_i}g = \emptyset, \quad \forall g \in q_i B(\varepsilon_i),$$

onde Y_{q_i, ε_i} é um conjunto com medida μ total. Considerando então

$$Y = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_{q_i, \varepsilon_i},$$

concluimos o resultado. □

Teorema 4.26. Seja μ uma medida em X ergódica com relação ao fluxo gerado pelos elementos u^t do grupo U . Se $A \not\subset \text{stab}(\mu)$, então existe um ponto $x \in X$ tal que $\mu(xU) = 1$.

Demonstração. Pelo Lema 4.16, conseguimos $\delta' > 0$ tal que se $y \in xW(\delta')$, isto é, $y = xa^s h^r$ com $|s|, |h| < \delta'$, e se C é um conjunto mensurável tal que $C \subset [0, s_{\delta'}]$, então

$$\left| \frac{m(C)}{m(T(y, C))} - 1 \right| < 0.1,$$

onde m é a medida de Lebesgue e $\phi_y(x) = T(y, x)$.

Considere $\delta > 0$ tal que para todo s com $0 < |s| < \delta \leq \delta'$, temos que $a^s \notin \text{stab}(\mu)$. Note que isso é possível, pois caso contrário teríamos uma sequência $(a_{s_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{stab}(\mu)$ convergindo para a identidade I_2 , e então, conseguimos aproximar qualquer elemento a^s do grupo A por uma combinação de elementos da sequência (a_{s_n}) . Mas como $\text{stab}(\mu)$ é um grupo fechado, teríamos que $A \subset \text{stab}(\mu)$, pois todo ponto de A seria um ponto de acumulação de $\text{stab}(\mu)$.

Pela Propriedade de Ratner 4.15, conseguimos constantes $0 < \eta < 1$ e $C > 1$ tal que

$$\delta/2 \leq |S(y, s)| \leq \delta, \quad |R(y, s)| \leq \frac{C\delta}{s_{\delta}} \quad \forall s \in [(1 - \eta)s_{\delta}, s_{\delta}]$$

dado que $y \in xW(\delta)$. Além disso, pela Proposição 4.23, conseguimos $Y \subset X$, com $\mu(Y) = 1$ e $Y \cap Y(B - \text{stab}(\mu)) = \emptyset$. Logo, existe um compacto $K \subset Y$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu(K) > 1 - \eta/1000 \quad \text{e} \quad d_X(K, Ka^s) \geq \varepsilon$$

para todo $\delta/2 \leq |s| \leq \delta$, já que nesse caso $a^s \notin \text{stab}(\mu)$ e portanto $a^s \in B - \text{stab}(\mu)$.

Como μ é ergódica pela ação do grupo U , existe um conjunto mensurável $F \subset X$ com medida positiva e $t_0 \geq 1$ tal que

$$S_K(x, t) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_K(xu^s) ds \geq 1 - \eta/100,$$

para todo $x \in F$ e $t > t_0$. Portanto, existe $0 \leq t' \leq t$ tal que, se $x, y \in F$, então $xu^{t'} \in K$ e $yu^{t'} \in K$.

Utilizando o Corolário 4.14, defina $0 < \xi < \delta$ pequeno o suficiente para que se $x \in X$ e $y \in xW(\xi)$, então $s_{\delta} \geq 10t_0$ e $C\delta/s_{\delta} < \varepsilon/10$. Perceba que com essa escolha, conseguimos $t' \in [(1 - \eta)s_{\delta}, s_{\delta}]$ tal que $xu^{t'} \in K$ e $yu^{t'} \in K$, pois caso isto não fosse verdade, como já sabemos que existe tal $t' \in [0, s_{\delta}]$, então t' estaria estritamente contido em $[0, (1 - s_{\delta})\eta]$ e portanto

$$\begin{aligned}
S_K(x, s_\delta) + S_K(y, s_\delta) &= \frac{1}{s_\delta} \int_0^{s_\delta(1-\eta)} 1_K(xu^s) ds + \frac{1}{s_\delta} \int_{s_\delta(1-\eta)}^{s_\delta} 1_K(xu^s) ds \\
&+ \frac{1}{s_\delta} \int_0^{s_\delta(1-\eta)} 1_K(yu^s) ds + \frac{1}{s_\delta} \int_{s_\delta(1-\eta)}^{s_\delta} 1_K(yu^s) ds \\
&= \frac{1}{s_\delta} \int_0^{s_\delta(1-\eta)} 1_K(xu^s) + 1_K(yu^s) ds \\
&+ \frac{1}{s_\delta} \int_{s_\delta(1-\eta)}^{s_\delta} 1_K(xu^s) + 1_K(yu^s) ds \\
&\leq \frac{2s_\delta(1-\eta)}{s_\delta} + \frac{s_\delta - s_\delta(1-\eta)}{s_\delta} = 2 - \eta.
\end{aligned}$$

Mas então teríamos que

$$S_K(x, s_\delta) \leq 2 - \eta - S_K(y, s_\delta) \leq 2 - \eta - 1 + \eta/100 < 1 - \eta/100,$$

contrariando o fato de $S_K(x, s_\delta) \geq 1 - \eta/100$.

Vamos mostrar que $F \cap O_\xi(x) \subset xB(\xi)$, onde $O_\xi(x)$ representa a bola aberta de raio ξ e centro x .

Suponha que isso não seja verdade, então existe $x, y \in F$ com $y = xa^s h^r$ e $|s| < \xi$ e $0 < |r| < \xi$. Pela escolha de ξ , temos que $s_\delta > t_0$ e $T(y, s_\delta) > t_0$, então é claro que $S_K(x, s_\delta) \geq 1 - \eta/100$ e $S_K(x, T(y, s_\delta)) \geq 1 - \eta/100$. Além disso, como $\delta < \delta'$ via Lema 4.16, conseguimos um valor $t' \in [(1-\eta)s_\delta, s_\delta]$ tal que $xu^{t'} \in K$ e $yu^{T(y, t')} \in K$. Mas então, pelo lema de mudança de coordenadas 4.9 temos que

$$yu^{T(y, t')} = xu^{t'} a^{S(y, t')} h^{R(y, t')}$$

e pela propriedade de Ratner 4.15, temos

$$\delta/2 \leq |S(y, t')| \leq \delta \quad \text{e} \quad |R(y, t')| \leq \frac{C\delta}{s_\delta} < \varepsilon/10.$$

Como $yu^{T(y, t')} \in K$ e $xu^{t'} \in K$, então é claro que $xu^{t'} a^{S(y, t')} \in Ka^{S(y, t')}$ e consequentemente,

$$\begin{aligned}
d_X(K, Ka^{S(y, t')}) &\leq d_X(yu^{T(y, t')}, xu^{t'} a^{S(y, t')}) \\
&= d_X(xu^{t'} a^{S(y, t')} h^{R(y, t')}, xu^{t'} a^{S(y, t')}) \leq \varepsilon/10
\end{aligned}$$

contrariando o fato de que $d_X(K, Ka^s) \geq \varepsilon$ para todo $\delta/2 \geq |s| \leq \delta$ e portanto, temos que $F \cap O_\xi(x) \subset xB(\xi)$.

Para finalizar, note que como

$$Y \cap Y(B - \text{stab}(\mu)) = \emptyset,$$

então

$$Y \cap xB(\xi) \subset U.$$

Além disso, como $\mu(F) > 0$ e $\mu(Y) = 1$, deve existir $x \in F \cap Y$ tal que $\mu(F \cap O_\xi(x)) > 0$, logo

$$0 < \mu(F \cap O_\xi(x)) < \mu(xB(\xi)) = \mu(Y \cap xB(\xi)) < \mu(xU),$$

mas como μ é ergódica pela ação do grupo U , então $\mu(xU) = 1$, concluindo o resultado. $\square$

O resultado acima conclui o caso em que $A \not\subset \text{stab}(\mu)$. Vamos supor daqui em diante que $A \subset \text{stab}(\mu)$.

Definição 4.27. Dado $a^s \in A$, defina a função $h_\mu(a^s)$ como

$$h_\mu(a^s) = \log |\det(\text{Ad}_U(a^s))|^{-1},$$

onde $\text{Ad}_U(a^s)$ representa a transformação por conjugação $x \mapsto a^s x a^{-s}$ em U .

A prova dos próximos lemas será dada na seção 5.2.

Lema 4.28. Seja μ uma medida qualquer de tal forma que $A \subset \text{stab}(\mu)$, então

$$h_\mu(a^s) \leq 2|s|.$$

Valendo a igualdade se, e só se, $U \subset \text{stab}(\mu)$.

De forma análoga

Lema 4.29. Seja μ uma medida qualquer de tal forma que $A \subset \text{stab}(\mu)$, então

$$h_\mu(a^{-s}) \leq 2|s|.$$

Valendo a igualdade se, e só se, $H \subset \text{stab}(\mu)$.

Lema 4.30. Vale a seguinte igualdade

$$h_\mu(a^s) = h_\mu(a^{-s})$$

Teorema 4.31. Seja μ uma medida em X ergódica com relação à U . Se $A \subset \text{stab}(\mu)$, então μ é a medida de Haar de X .

Demonstração. Como $A \subset \text{stab}(\mu)$ e μ é ergódica com relação à U , pelos lemas anteriores temos que

$$h_\mu(a^{-s}) = h_\mu(a^s) = 2|s|.$$

Mas isso quer dizer que A , H e U estão contidos em $\text{stab}(\mu)$. Como $SL_2(\mathbb{R})$ é gerado por A , H e U , temos que $\text{stab}(\mu) = SL_2(\mathbb{R})$ e portando a medida μ é a medida de Haar de $SL_2(\mathbb{R})$ induzida no espaço homogêneo X , como definido em 2.55, já que esta é a única invariante por qualquer translação. $\square$

ENTROPIA

5.1 Introdução

Ao longo desta seção, utilizaremos (ROKHLIN, 1967) como texto base.

Definição 5.1. Seja $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de probabilidade. Uma **partição mensurável** $\alpha \subset \mathcal{B}$ de X é uma coleção finita ou enumerável de subconjuntos disjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X.$$

Dada uma partição α de X e um elemento x , vamos denotar por $\alpha(x)$ o único elemento de α que contém x .

Definição 5.2. Dada uma partição mensurável α de um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$, definimos a **entropia da partição** $H(\alpha)$ por

$$H(\alpha) := - \sum_{i=1}^{\infty} \log(\mu(A_i)) \mu(A_i).$$

Definição 5.3. Dadas duas partições α e β de X , definimos a **entropia condicional** $H(\beta|\alpha)$ por

$$H(\beta|\alpha) := - \sum_{A_i \in \alpha} \mu(A_i) \sum_{B_j \in \beta} \mu(B_j|A_i) \log(\mu(B_j|A_i))$$

Definição 5.4. Sejam α e β duas partições de X . Definimos a **soma das partições** α e β , denotada por $\alpha \vee \beta$, como

$$\alpha \vee \beta = \{A_i \cap B_j \mid A_i \in \alpha, B_j \in \beta\}.$$

Lema 5.5. Temos que

$$H(\alpha \vee \beta) = H(\alpha) + H(\beta|\alpha)$$

Demonstração. Pela definição, se $A_i \in \alpha$ e $B_j \in \beta$, então

$$\begin{aligned} H(\beta|\alpha) &:= - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j|A_i) \log(\mu(B_j|A_i)) \\ &= - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(B_j \cap A_i)}{\mu(A_i)} \log\left(\frac{\mu(B_j \cap A_i)}{\mu(A_i)}\right) \\ &= - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A_i) \log\left(\frac{\mu(B_j \cap A_i)}{\mu(A_i)}\right) \\ &= - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A_i) \log(\mu(B_j \cap A_i)) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A_i) \log(\mu(A_i)) \\ &= H(\alpha \vee \beta) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A_i) \log(\mu(A_i)) \\ &= H(\alpha \vee \beta) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \log(\mu(A_i)) \\ &= H(\alpha \vee \beta) - H(\alpha) \end{aligned}$$

□

Definição 5.6. Dadas duas partições finitas α e β de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, então

1. Temos que β é um **refinamento** de α , se $\beta(x) \subset \alpha(x)$ e denotamos isso por $\alpha \leq \beta$.
2. Dizemos que α e β são **partições independentes** se $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ para todo $A \in \alpha$ e $B \in \beta$ e denotamos isso por $\alpha \perp \beta$.

Lema 5.7. Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável invariante por uma probabilidade μ . Então temos que

$$a_n := H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right)$$

é subaditiva, isto é, vale a desigualdade $a_{n+k} \leq a_n + a_k$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Considerando a partição

$$\beta = \bigvee_{i=n}^{n+m-1} T^{-i}\alpha,$$

pelo Lema 5.5, temos que

$$\begin{aligned} a_{n+m} &= H\left(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} T^{-i}\alpha\right) = H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) + H\left(\bigvee_{i=n}^{n+m-1} T^{-i}\alpha \mid \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \\ &\leq H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) + H\left(\bigvee_{i=n}^{n+m-1} T^{-i}\alpha\right). \end{aligned}$$

Fazendo $j = -n + i$ temos que

$$H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) + H\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j-n}\alpha\right) = a_n + H\left(T^{-n} \bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j}\alpha\right)$$

Como T preserva medida, temos que $H\left(T^{-n} \bigvee_{j=0}^{m-1} T^{-j}\alpha\right) = a_m$ e portanto

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

□

Definição 5.8. Dada uma partição finita α do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e uma transformação T que preserva μ , definimos a **entropia da transformação T dada a partição α** por:

$$h_\mu(T; \alpha) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right).$$

Proposição 5.9. O limite

$$h_\mu(T; \alpha) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right)$$

está bem definido.

Demonstração. Seja

$$a_n := H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right).$$

Como esta sequência é subaditiva, dados $n, m \in \mathbb{N}$ temos que

$$a_{n \cdot m} \leq a_m + a_{n \cdot (m-1)} \leq \dots \leq n \cdot a_m.$$

Portanto, dado $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{nk}}{nk} \leq \frac{a_k}{k}. \quad (5.10)$$

Pelo algoritmo de divisão de Euclides, dado $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$m = nk + l,$$

onde $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Utilizando 5.10, temos que

$$\frac{a_m}{m} = \frac{a_{n \cdot k}}{nk+l} + \frac{a_l}{nk+l} \leq \frac{a_{nk}}{nk} + \frac{a_l}{nk+l} \leq \frac{a_k}{k} + \frac{a_l}{nk+l}.$$

Tomando o limite quando m tende ao infinito, como k está fixado, temos que n tende ao infinito, e então

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_m}{m} \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_k}{k} + \frac{a_l}{nk+l} \right) \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_k}{k} + \frac{a_k}{m} \right) = \frac{a_k}{k}$$

Da mesma forma, conseguimos que

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_m}{m} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{k}$$

Concluimos então que o limite $\frac{a_m}{m}$ existe e é igual ao seu limite inferior. $\square$

Proposição 5.11. Vale a seguinte equivalência:

$$h_\mu(T; \alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^n T^{-i} \alpha \right).$$

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 5.5, temos que

$$H \left(\bigvee_{i=0}^n T^{-i} \alpha \right) = H \left(\alpha \vee \left(\bigvee_{i=1}^n T^{-i} \alpha \right) \right) = H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^n T^{-i} \alpha \right) + H \left(\bigvee_{i=1}^n T^{-i} \alpha \right).$$

E portanto, indutivamente, temos

$$\begin{aligned} H \left(\bigvee_{i=0}^n T^{-i} \alpha \right) &= H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i} \alpha \right) + H \left(\bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i} \alpha \right) = H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i} \alpha \right) + H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \alpha \right) \\ &= H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i} \alpha \right) + H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^{n-2} T^{-i} \alpha \right) + H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^{n-2} T^{-i} \alpha \right) \\ &\quad \dots \\ &= H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i} \alpha \right) + H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^{n-2} T^{-i} \alpha \right) + \dots + H(\alpha). \end{aligned}$$

Temos então, que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^k T^{-i} \alpha \right) = \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^n T^{-i} \alpha \right) - \frac{1}{n} H(\alpha)$$

Como

$$H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^k T^{-i} \alpha \right) \leq H \left(\alpha \mid \bigvee_{i=1}^{k-1} T^{-i} \alpha \right) \leq \dots \leq H(\alpha) \leq H(\alpha)$$

temos que a sequência dos $H(\alpha | \bigvee_{i=1}^k T^{-i}\alpha)$ é decrescente e limitada inferiormente por zero, ou seja, é convergente

Portanto,

$$\sum_{k=1}^n H(\alpha | \bigvee_{i=1}^k T^{-i}\alpha)$$

é Cesàro convergente para $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\alpha | \bigvee_{i=1}^n T^{-i}\alpha)$.

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\alpha | \bigvee_{i=1}^n T^{-i}\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} H(\alpha | \bigvee_{i=1}^k T^{-i}\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^n T^{-i}\alpha) - \frac{1}{n} H(\alpha) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^n T^{-i}\alpha) \\ &= h_\mu(T; \alpha) \end{aligned}$$

□

Definição 5.12. Seja T uma transformação mensurável em um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ que preserva μ . Então a **entropia de T com respeito a medida μ** é definida como

$$h_\mu(T) = \sup h_\mu(T; \alpha)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições mensuráveis de X com $H(\alpha) < \infty$.

Definição 5.13. Seja $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de partições de um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$, tal que $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ e $H(\alpha_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma **sequência de partições geradora** de $\mathcal{B}$, se

$$\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right) = \mathcal{B}$$

onde $\sigma(A)$ representa a menor σ -álgebra contendo $A \subset \mathcal{B}$.

Teorema 5.14. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, onde T é metrizável. Se $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de partições de X com entropia finita, tal que $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ e

$$\text{diam}(\alpha_k(x)) \rightarrow 0$$

para quase todo $x \in X$. Então $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gera $\mathcal{B}$.

Demonstração. Dado um aberto U qualquer, temos que, para quase todo $x \in X$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_{n_x}(x) \subset U.$$

Considere $\mathcal{A}$ a álgebra gerada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Note que $\mathcal{A}$ é enumerável, já que é formado por uniões e interseções finitas de conjuntos de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, que por sua vez é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Além disso, para quase todo $x \in X$, temos que $\alpha_{n_x}(x) \in \mathcal{A}$, ou seja, existe apenas uma quantidade enumerável de possibilidades para $\alpha_{n_x}(x)$. Portanto, podemos escrever o aberto U como

$$U = \bigcup_{x \in U} \alpha_{n_x}$$

de tal forma que a união $\bigcup_{x \in U} \alpha_{n_x}$ é enumerável e portanto pertence a $\sigma(\mathcal{A})$. Mas então $\sigma(\mathcal{A})$ contém todos os abertos e portanto é igual à σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}$. $\square$

Teorema 5.15 (Kolmogorov-Sinai). Seja $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de partições mensuráveis com entropia finita que geram $\mathcal{B}$. Então

$$h_\mu(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_\mu(T; \alpha_n).$$

Definição 5.16. Dizemos que uma partição α é uma **partição geradora por T** , onde T é uma transformação mensurável invertível que preserva μ se

$$\bigvee_{j=-(n-1)}^{n-1} T^{-j} \alpha \rightarrow \mathcal{B}.$$

Denotamos o limite de $\bigvee_{j=-(n-1)}^{n-1} T^{-j} \alpha$ por α_T .

Definição 5.17. Dizemos que uma partição α é uma **partição geradora forte por T** , onde T é uma transformação mensurável que preserva μ se

$$\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} \alpha \rightarrow \mathcal{B}.$$

Denotamos o limite de $\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} \alpha$ por α^- .

Proposição 5.18 (Teorema de Sinai). Se α é uma partição geradora forte com entropia finita, ou T é invertível e α é uma geradora por T com entropia finita, então

$$h_\mu(T) = h_\mu(T; \alpha).$$

Demonstração. No caso de α se uma geradora forte, basta definir a sequência de partições α_n por

$$\alpha_n = \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} \alpha$$

e utilizar o Teorema de Kolmogorov-Sinai 5.15.

No caso de α ser uma partição geradora por T , com T inversível, note que se γ e β são duas partições, então

$$T\gamma \vee \beta = T(\gamma \vee T^{-1}\beta)$$

e portanto, como T preserva μ

$$H\left(\bigvee_{j=-(n-1)}^{n-1} T^{-j} \alpha\right) = H\left(\bigvee_{j=0}^{2(n-1)} T^{-j} \alpha\right)$$

ou seja,

$$h_\mu(T; \bigvee_{j=-(n-1)}^{n-1} T^{-j} \alpha) = h_\mu(T; \alpha)$$

e então basta usar o Teorema de Kolmogorov-Sinai 5.15 novamente. $\square$

5.2 Cálculo de Entropia em Espaços Homogêneos

O nosso objetivo nesta seção é desenvolver o argumento utilizado na prova do Teorema 4.31. Para isso, ao longo do texto, vamos considerar $G = SL_2(\mathbb{R})$, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ um lattice, $s = a^s \in A$ e definir os conjuntos:

$$W^- = W_G^-(s) = \{x \in G \mid s^n x s^{-n} \rightarrow I_2 \text{ quando } n \rightarrow -\infty\},$$

$$W^+ = W_G^+(s) = \{x \in G \mid s^n x s^{-n} \rightarrow I_2 \text{ quando } n \rightarrow +\infty\},$$

$$Z = Z_G(s) = \{x \in G \mid s x s^{-1} = x\}.$$

Note que no caso no nosso caso, $W^- = H$, $W^+ = U$ e $Z = A$.

Escolha $p \in \text{support}(\mu)$ e ε, δ de tal forma que

$$x \mapsto xp, x \in D := H(\delta)A(\varepsilon)U(\varepsilon)$$

seja um homeomorfismo em $D' := Dp \in \Gamma \backslash G = X$. Vamos definir também $C' = A(\varepsilon)U(\varepsilon)p$ e $B' = H(\delta)$.

Lema 5.19. Fixe s de tal forma $\text{diam}(sXs^{-1}) \leq \frac{1}{10} \text{diam}(X)$ para todo $X \subset B'$. Dado $c \in C$ qualquer, existe um subconjunto $E_c \subset Hc$ contendo c tal que:

i) se $s^n E_c \cap E \neq \emptyset$ para algum $c \in C$, $n > 0$, então $s^n E_c \subset E$.

ii) E_c é aberto em Hc (com a topologia induzida) e $E := \bigcup_{c \in C} E_c$ é aberto em X .

iii) $E_c \subset B'_c$;

Demonstração. Seja B' a bola centrada em I de raio $a/2$ e B_0 a bola centrada em I de raio $a/10$. Dado $c \in C$, vamos definir E_c de tal forma que x está em E_c se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\{c_0 = c, c_1, \dots, c_p\}$ é uma sequência de elementos de C e $\{n_0 = 0, n_1, \dots, n_p\}$ é uma sequência de naturais positivos satisfazendo:

- $x \in s^{n_p} B_0 c_p$.
- $s^{n_{i-1}} B_0 c_{i-1} \cap s^{n_i} B_0 c_i \neq \emptyset$.

com $1 \leq i \leq p$.

Vamos denotar por $p(x) \in \mathbb{N}$ o menor natural satisfazendo as propriedades acima.

Prova do item i: É claro que se $s^n E_c \cap E \neq \emptyset$ então existe $d \in C$ tal que $s^n E_c \cap E_d \neq \emptyset$.

Vamos mostrar que $s^n E_c \subset E_d$. Tome $x \in s^n E_c$, pela definição de E , existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\{c_0 = c, c_1, \dots, c_p\}$ é uma sequência de elementos de C , $\{n_0 = 0, n_1, \dots, n_p\}$ é uma sequência de naturais positivos satisfazendo

$$x \in s^{(n_p+n)} B_0 c_p$$

e também

$$s^{(n_{i-1}+n)} B_0 c_{i-1} \cap s^{(n_i+n)} B_0 c_i \neq \emptyset.$$

Seja $y \in s^n E_c \cap E_d$, então existem $k, l \in \mathbb{N}$ tal que $\{c'_0 = c, c'_1, \dots, c'_k\}$, $\{d_0 = d, d_1, \dots, d_l\}$ são sequências de elementos de C , $\{n'_0 = 0, n'_1, \dots, n'_k\}$, $\{m_0 = 0, m_1, \dots, m_l\}$ são sequências de naturais positivos tais que

- Temos que $y \in s^{(n'_k+n)} B_0 c'_k$.
- Temos que $y \in s^{m_l} B_0 d_l$.
- Para $1 \leq i \leq k$, temos que $s^{(n'_{i-1}+n)} B_0 c'_{i-1} \cap s^{(n'_i+n)} B_0 c'_i \neq \emptyset$.
- Para $1 \leq i \leq l$, temos que $s^{m_{i-1}} B_0 c'_{i-1} \cap s^{m_i} B_0 c'_i \neq \emptyset$.

Considerando a sequência de naturais

$$\{0, m_1, m_2, \dots, m_l, n'_k + n, n'_{k-1} + n, \dots, n'_1 + n, n + 0, n + n_1, \dots, n_p + n\}$$

e a sequência de elementos em C

$$\{d_0 = d, d_1, \dots, d_l, c'_k, \dots, c'_1, c'_0 = c_0 = c, c_1, c_2, \dots, c_p\}$$

temos o resultado. De fato, note que se $x \in s^{(n_p+n)} B_0 c_p$, então

$$s^n B_0 c \cap s^{(n'_1+n)} B_0 c'_1 \neq \emptyset$$

e portanto

$$s^{(n'k+n)}B_0c_k \cap s^{m_l}B_0d_l \neq \emptyset$$

já que $y \in s^{(n'_k+n)}B_0c_k \cap s^{m_l}B_0d_l$. E as outras interseções são satisfeitas pela escolha da sequência $\{m_0 = 0, m_1, \dots, m_l\}$. Logo $s^n E_c \subset E$.

Prova do item ii: É automático pela nossa definição.

Prova do item iii: Vamos provar por indução em $p(x)$.

É claro que o resultado é válido quando $p(x) = 0$. Assuma que provamos para todo $y \in E_d$ com $p(y) \leq k - 1$.

Seja $x \in E_c$ com $p(x) = k$ e com sequências $\{c_0 = c, c_1, \dots, c_p\}$ e $\{n_0 = 0, n_1, \dots, n_p\}$. Vamos mostrar que $n = n_j = \min\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ é maior que zero.

Suponha $n = n_j = 0$, então pela construção dos conjuntos E_d temos que $x \in E_{c_j}$.

Usando a hipótese de indução, temos que $x \in B'c_j$, ou seja, $x \in B'C'$ e portanto $x \in B'c$. Como definimos B' para a translação ser um homeomorfismo, isto é,

$$(B'd_1 \cap B'd_2 \neq \emptyset) \Rightarrow (d_1 = d_2).$$

temos que $c_0 = c_j$, contrariando a minimalidade de $p(x)$. Além disso a hipótese de indução nos dá que

$$\bigcup_{i=1}^j s^{n_i} B_0 c_i \subset s^n B' c_j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=j}^k s^{n_i} B_0 c_i \subset s^n B' c_j$$

com $n > 0$. Utilizando a hipótese que $\text{diam}(sXs^{-1}) \leq \frac{1}{10}\text{diam}(X)$, temos que

$$\begin{aligned} \text{diam}\left(\bigcup_{i=1}^k s^{n_i} B_0 c_i\right) &\leq \text{diam}\left(\bigcup_{i=1}^j s^{n_i} B_0 c_i\right) + \text{diam}\left(\bigcup_{i=j}^k s^{n_i} B_0 c_i\right) \\ &\leq \text{diam}(s^n B' c_j) + \text{diam}(s^n B' c_j) \\ &\leq \text{diam}(s^n B' s^{-n} s^n c_j) + \text{diam}(s^n B' s^{-n} s^n c_j) \\ &\leq \frac{1}{10} \text{diam}(B' s^n c_j) + \frac{1}{10} \text{diam}(B' s^n c_j) \\ &\leq \frac{1}{10} \frac{a}{2} + \frac{1}{10} \frac{a}{2} = \frac{a}{10}. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\text{diam}\left(\bigcup_{i=0}^k s^{n_i} B_0 c_i\right) \leq \text{diam}(B_0 c_0) + \text{diam}\left(\bigcup_{i=1}^k s^{n_i} B_0 c_i\right) \leq \frac{a}{10} + \frac{a}{10} < \frac{a}{2} = \text{diam}(B'c),$$

mas $\bigcup_{i=0}^k s^{n_i} B_0 c_i$ contém c e x , logo $x \in B'c$.

□

Definição 5.20. Dizemos que uma partição mensurável ξ de $(X = G/\Gamma, \mu)$ é subordinada à um subconjunto fechado W de G se pra quase todo ponto x valer:

- i) $\xi(x) \subset Wx$.
- ii) o fecho de $\xi(x)$ é compacto em Wx .
- iii) $\xi(x)$ contém uma vizinhança de x em Wx .

Definição 5.21. Dadas duas partições mensuráveis η e η' de $(X = G/\Gamma, \mu)$, dizemos que $\eta \leq \eta'$ se $\eta'(x) \subset \eta(x)$ pra quase todo ponto.

Definição 5.22. Dado $s \in G$ e η uma partição, vamos definir a partição $s\eta$ por:

$$(s\eta)(x) = s(\eta(s^{-1}x)).$$

Para finalizar, dizemos que η é s -invariante se $\eta \leq s\eta$.

Teorema 5.23. Assuma que μ é s -ergódica. Então existe uma partição mensurável, enumerável η do espaço de medida (X, μ) onde vale:

- i) η é subordinada ao W^- ;
- ii) η é s -invariante;
- iii) a entropia condicional $H(s\eta|\eta)$ é igual a entropia $h(s, \mu)$ do automorfismo $x \mapsto sx$ com $x \in X$.

Demonstração. Vamos provar que é suficiente encontrar uma partição enumerável ξ tal que $H(\xi) < \infty$ e $\eta(x) = \xi^-(x)$ para quase todo $x \in E$. A construção de tal partição está feita com detalhes em (MARGULIS; TOMANOV, 1994) na página 382, vamos apenas completar a prova provando com detalhes que de fato é isso é suficiente.

Primeiramente, note que

$$\eta^- = \bigvee_{k=0}^{\infty} s^{-k} \eta = \bigvee_{k=0}^{\infty} s^{-k} \bigvee_{j=0}^{\infty} s^{-j} \xi = \bigvee_{i=0}^{\infty} s^{-i} \eta = \eta,$$

ou seja, $\eta^- = \eta = \xi^-$. Agora, vamos mostrar que $\xi_s(x) = \{x\}$. Para isso, considere dois pontos $x, y \in E$ tal que $\xi_s(x) = \xi_s(y)$. Como E tem medida positiva, pelo teorema de recorrência de

Poincaré, existem infinitos $k \in \mathbb{N}$ tal que $s^{-k}x \in E$ e consequentemente $s^{-k}y \in E$. Portanto se $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de tal forma que $s^{-k_n}x, s^{-k_n}y \in E$, pela terceira propriedade do Lema 5.19 temos que

$$s^{-k_n}x, s^{-k_n}y \in E_{c_n}$$

para algum $E_{c_n} \subset B'c_n \subset W^-c_n$, ou seja,

$$x, y \in s^{k_n}E_{c_n} \subset s^{k_n}B'c_n.$$

Mas então

$$\begin{aligned} \text{diam}(s^{k_n}E_{c_n}) &\leq \text{diam}(s^{k_n}B'c_n) \leq \text{diam}(s^{k_n}B's^{-k_n}s^{k_n}c_n) \\ &\leq \frac{1}{10^{k_n}} \text{diam}(B's^{k_n}c_n) \\ &= \frac{1}{10^{k_n}} \text{diam}(B') \end{aligned}$$

e concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(s^{k_n}E_{c_n}) = 0.$$

Como $x \in \xi_s(x)$, temos que $x = y$ e $\xi_s(x) = \{x\}$. Além disso, como $\mu(E) > 0$ e μ é ergódica, dado $x \in X$ existem infinitos $k \in \mathbb{N}$ tal que $s^{-k}x \in E$ e portanto ξ é uma partição geradora pelo Teorema 5.14.

Agora, defina $\eta_i = \bigvee_{k=0}^i s^{-k}\xi$. Então temos que η_i gera $\xi^- = \eta$ e também que $(\eta_i)^- = \eta$.

Além disso,

$$(\eta_i)_s = \bigvee_{-\infty}^{\infty} s^{-j}\eta_i = \bigvee_{-\infty}^{\infty} \bigvee_{k=0}^i s^{-(k+j)}\xi = \xi_s$$

e portanto η_i também é partição geradora para todo i . Logo,

$$h(s, \mu) = h(s, \eta_i) = H(\eta_i | s^{-1}(\eta_i)^-) = H(\eta_i | s^{-1}\eta)$$

Fazendo i tender ao infinito, temos

$$h(s, \mu) = \lim_{i \rightarrow +\infty} H(\eta_i | s^{-1}\eta) = H(\eta | s^{-1}\eta) = H(s\eta | \eta).$$

□

Note que na demonstração do teorema anterior pedimos que a medida μ seja α^s -ergódica. Porém, sabemos apenas que μ é U -ergódica, já que estamos sob a hipótese do Teorema de Ratner de classificação de medidas. Entretanto, também estamos supondo que $A \subset \text{stab}(\mu)$ e dessa forma, conseguimos o seguinte resultado:

Lema 5.24. Seja μ uma probabilidade de $X = \Gamma \backslash SL_2(\mathbb{R})$ invariante pelo fluxo geodésico A e pelo fluxo horocíclico U . Então μ é A -ergódica em todo ponto que μ for U -ergódica.

Demonstração. Baseada na prova de (STARKOV, 2000), Lema 14.1.

Primeiro, vamos mostrar que

$$I(s) = \int_X \phi(x) f(xa^s) d\mu \rightarrow 0, \quad s \rightarrow +\infty,$$

dado que ϕ e f são funções limitadas e uniformemente contínuas e

$$\int_X f d\mu = 0.$$

Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $0 < \delta < 1$ tal que

$$|\phi(x) - \phi(z)| < \varepsilon, \quad \forall x, z \in X, \quad d_X(x, z) < \delta.$$

Como estamos supondo que a ação de U é ergódica, existe $t_0 > 1$ e $Y \subset X$ tal que $\mu(Y) > 1 - \varepsilon$ e $|S_f(y, t)| < \varepsilon$ para todo $y \in Y$ e $t > t_0$, onde

$$S_f(x, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(xu^s) ds.$$

Tomando $s_0 > 0$ grande a suficiente, tal que $e^{-2s_0} = \delta$ e $s > s_0$, então para $Y_s := Ya^s$ temos que $\mu(Y_s) = \mu(Y) > 1 - \varepsilon$ e então, se $s' = \delta e^{2s} \geq t_0$, temos

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(\int_X \phi(xu^s) f(xu^s a^{-s}) d\mu \right) ds \\ &= \int_X \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \phi(xu^s) f(xu^s a^{-s}) ds \right) d\mu \\ &= \int_X \left(\frac{\phi(x)}{\delta} \int_0^\delta \phi(xu^s) f(xa^{-s} u^{e^{2s}}) ds \right) d\mu + \varepsilon_1 \\ &= \int_X \left(\frac{\phi(x)}{s'} \int_0^{s'} \phi(xu^s) f(xa^{-s} u^s) ds \right) d\mu + \varepsilon_1 \\ &= \int_X \phi(x) S_f(xa^{-s}, s') d\mu + \varepsilon_1 \\ &= \int_{Y_s} \phi(y) S_f(ya^{-s}, s') d\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Onde ε_1 aparece pois ϕ é uniformemente contínua, ε_2 porque ϕ e f são limitadas e ε_3 pela escolha de Y .

Agora, dados C, D conjuntos μ -mensuráveis com medida positiva, tomando $f(x) = 1_C(x) - \mu(C)$ e $\phi(x) = 1_D(x)$, por um argumento de aproximação por funções contínuas, temos que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_X 1_D(x) (1_C(xa^s) - \mu(C)) d\mu = \mu(D \cap Ca^s) - \mu(D)\mu(C) = 0$$

Ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mu(Ca^s \cap D) = \mu(C)\mu(D).$$

Tomando $D = C$, note que se C é invariante por a^s , então como μ é invariante por A

$$\mu(C) = \mu(C)^2$$

e então, $\mu(C) = 0$ ou $\mu(C) = 1$ e portanto, a medida μ é A -ergódica em todo ponto que μ for U -ergódica. $\square$

Lema 5.25. Seja T um automorfismo de um espaço de probabilidade (X, μ) , e seja f uma função mensurável, positiva, definida em X tal que

$$\log_2^- \frac{f \circ T}{f} \in L^1(X, \mu)$$

onde $\log_2(x)^- = \min\{\log_2(x), 0\}$. Então vale:

1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log g(T^n(x)) = 0, \text{ quase todo ponto;}$$

2.

$$\int_X \log_2 \frac{f \circ T}{f} d\mu = 0.$$

Demonstração. Provada baseada em (STRELCYN *et al.*, 1982), Proposição 2.2.

Como

$$\log_2^- \frac{f \circ T}{f} \in L^1(X, \mu)$$

pelo Teorema Ergódico de Birkhoff 2.66, como toda função h pode ser decomposta em $h = h^+ - h^-$ com $h^+, h^- \geq 0$, temos que para μ quase todo ponto o limite abaixo converge

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 \frac{f(T^{n+1}(x))}{f(T^n(x))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 \frac{f(T^{n+1}(x))}{n} = K$$

e também

$$\int_X \log_2 \frac{f \circ T}{f} d\mu = \int_X K d\mu$$

podendo ser infinito dos dois lados, já que não sabemos se $\log_2^+ \frac{f \circ T}{f} \in L^1(X, \mu)$. Como f é mensurável, e portanto $0 < f < \infty$ para quase todo ponto, temos que $\frac{1}{n}f$ converge para 0 para quase todo ponto e então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{x \in X \mid \left| \frac{1}{n} \log_2(f(T^n(x))) \right| \geq \varepsilon\}) = 0$$

pois T é invariante por μ . Isto quer dizer que $\frac{1}{n} \log_2(f(T^n(x)))$ converge para 0 em medida e então existe uma subsequência tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \log_2 f(T^{n_k+1}(x)) = 0$$

para μ quase todo ponto. Mas então temos que $K = 0$ provando o item 1 e 2. □

Lema 5.26. Seja V um subgrupo fechado de W^- normalizado por s , isto é, $sVs^{-1} = V$ e η uma partição mensurável de $(X = G \backslash \Gamma, \mu)$ subordinada a V . Assuma que $\eta \leq s\eta$ e que para quase todo $x \in X$, a medida condicional $\mu_{x,\eta}$ de μ em $\eta(x)$ é proporcional a restrição de $\eta(x)$ de uma medida invariante por V em Vx . Então a medida μ é invariante pela ação de V .

Demonstração. Ver (MARGULIS; TOMANOV, 1994), Lema 9.5. □

Proposição 5.27. Seja V um subgrupo fechado de W^- normalizado por s a seja η uma partição mensurável de X , invariante por s e subordinada a V . Então vale

i) Se μ é V invariante, então $H(s\eta|\eta) = \log_2(|\det(\text{Ad}_{W_G^+}(g))|^{-1})$.

ii) $H(s\eta|\eta) \leq \log_2(|\det(\text{Ad}_{W_G^+}(g))|^{-1})$. E se vale a igualdade, então μ é invariante por V .

Demonstração. Como $\eta \leq s\eta$ para μ quase todo $x \in X$, temos uma partição η_x de $\eta(x)$ tal que $n_x(y) = (s\eta)(y)$ para quase todo $y \in \eta(x)$.

Denote por τ a medida de Haar de V . Como $\eta(x) \subset Vx$ temos que τ induz uma medida em $\eta(x)$ que denotaremos também por τ .

Seja $L(x) = \tau(\eta(x))$ e $\tau_x = \tau/L(x)$, para $x \in X$ e μ_x a probabilidade condicional em $\eta(x)$ induzida por μ . Fazendo $p(x) = \tau_x(\eta_x(x))$ e $r(x) = \mu_x(\eta_x(x))$, como $\eta_x(x) = s(\eta(s^{-1}x))$

temos que

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \tau_x(\eta_x(x)) \\
 &= \frac{\tau(\eta_x(x))}{L(x)} \\
 &= \frac{\tau((s\eta)(x))}{L(x)} \\
 &= \frac{\tau(s(\eta(s^{-1}x)))}{L(x)} \\
 &= \frac{\tau(\eta(s^{-1}x)) |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(g))|^{-1}}{L(x)} \\
 &= \frac{L(s^{-1}x) |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(g))|^{-1}}{L(x)}
 \end{aligned}$$

onde $|\det(\text{Ad}_{W_G^+}(g))|$ aparece na última igualdade devido a mudança do elemento de volume da medida τ .

Como η é subordinada a V , temos que $L(x) = \tau(\eta(x))$ é uma função mensurável e positiva já que τ é a medida de Haar de V e também temos que como $p(x) = \tau_x(\eta_x(x))$, então $p(x) \leq 1$. Logo,

$$\log_2 \frac{L(s^{-1}x)}{L(x)} \in L^1(X).$$

Então pelo Lema 5.25,

$$\int_X \log_2 \frac{L(s^{-1}x)}{L(x)} d\mu(x) = 0$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 \int_X \log_2 p(x) d\mu(x) &= \int_X \log_2 \frac{L(s^{-1}x) |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(s))|^{-1}}{L(x)} d\mu(x) \\
 &= \int_X \log_2 \frac{L(s^{-1}x)}{L(x)} d\mu(x) + \int_X |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(s))|^{-1} d\mu(x) \\
 &= -\log_2 |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(s))|.
 \end{aligned}$$

Item i): Assuma que μ é V -invariante, portanto $\mu_x = \tau_x$ para quase todo ponto $x \in X$, já que μ_x também é invariante e a medida de Haar é única com essa propriedade. Em particular, pela construção de $p(x)$ e $r(x)$, temos que $p(x) = r(x)$ em quase todo ponto, mas então

$$\log |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(s))| = - \int_X \log_2 p(x) d\mu(x) = - \int_X \log_2 r(x) d\mu(x) = H(s\eta|\eta),$$

já que

$$\begin{aligned}
 - \int_X \log_2 r(x) d\mu(x) &= - \int_X \log \mu_x(\eta_x(x)) d\mu(x) \\
 &= - \int_X \log \mu_x((s\eta)(x)) d\mu(x) \\
 &= - \sum_{N_i \in \eta} \mu(N_i) \sum_{M_j \in s\eta} \mu(m_j|N_i) \log(\mu(M_j|N_i)) \\
 &= H(s\eta|\eta).
 \end{aligned}$$

Provando o item i).

Item ii): Seja $Y_i(x)$, $1 \leq i < +\infty$, os elementos da partição enumerável η_x de $\eta(x)$. Temos então que

$$\int_X \log p(y) d\mu_x(y) - \int_X \log r(y) d\mu_x(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \log_2 \frac{\tau_x(Y_i(x))}{\mu_x(Y_i(x))} \mu_x(Y_i(x)).$$

Também temos que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \tau_x(Y_i(x)) \leq 1, \tag{5.28}$$

e que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_x(Y_i(x)) = 1. \tag{5.29}$$

Note que em 5.28, podemos ter uma desigualdade de fato já que só temos que $\eta(x) \subset Vx$ e então a diferença desses dois conjuntos pode ter medida positiva (lembrando que τ é a medida de Haar de V).

Usando a convexidade da função $\log$, temos que

$$\int_{\eta(x)} \log_2 p(y) d\mu_x(y) \leq \int_{\eta(x)} \log_2 r(y) d\mu_x(y) \tag{5.30}$$

por 5.29, 5.28 e o fato de que $p(x) = \tau_x(\eta_x(x))$ e $r(x) = \mu_x(\eta_x(x))$. Além disso, a igualdade acima vale se, e só se, $p(y) = q(y)$ para todo $y \in \eta(x)$.

Mas então, por 5.30, temos que

$$H(s\eta|\eta) \leq \log |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(s))|^{-1}.$$

Agora, se

$$H(s\eta|\eta) = \log |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(s))|^{-1},$$

então temos que $\tau_x((s^k\eta)(x)) = \mu_x((s^k\eta)(x))$ para todo $k > 0$ e para quase todo $x \in X$. Como η é uma partição geradora, como mostramos em 5.23, temos que $\mu_x = \tau_x$ para quase todo $x \in X$, já que está será uma partição por ponto, isto é, a partição de x é $\{x\}$ para quase todo $x \in X$. Utilizando o lema anterior, temos que μ é invariante por V . $\square$

Perceba que a Proposição 5.27 conclui o Teorema 4.31. Pois, podemos considerar

$$V = H = \left\{ h^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

e portanto

$$H(s\eta|\eta) \leq |\log |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(s))|^{-1}| = 2|s|$$

já que H já é normalizado por A .

Mas, é fácil ver que

$$\log_2 |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(s))|^{-1} = \log_2 |\det(\text{Ad}_{W_G^+}(-s))|^{-1} = 2|s|,$$

pela mudança de coordenadas $s \mapsto -s$.

Agora, como μ é U invariante já que é U -ergódica, vale a igualdade e portanto, μ também será invariante por H . Logo, a medida μ é invariante por A, H e U e então é invariante por todo o grupo $SL_2(\mathbb{R})$. Concluimos assim o Teorema 4.31.

A CONJECTURA DE OPPENHEIM

Teorema 6.1 (Conjectura de Oppenheim - Teorema de Margulis). Seja Q uma forma quadrática real, indefinida, não degenerada com $n \geq 3$ variáveis. Se Q não é um múltiplo escalar de uma forma com coeficientes inteiros, então $Q(\mathbb{Z}^n)$ é denso em $\mathbb{R}$.

A conjectura de Oppenheim foi proposta por Oppenheim em 1929 e completamente provada por Margulis em 1987 utilizando as técnicas de teoria ergódica em espaço homogêneos que desenvolvemos ao longo do nosso trabalho.

Nesta seção, utilizaremos o Teorema de Ratner do fecho da órbita 4.4 para provarmos a Conjectura de Oppenheim, também conhecida com Teorema de Margulis.

Definição 6.2. Uma **forma quadrática** real Q de ordem n é um polinômio homogêneo de grau 2 em n variáveis com coeficientes reais.

Observe que, dado uma forma quadrática Q nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ podemos associar uma matriz A_Q simétrica com coeficientes reais, de tal forma que

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x A_Q x^T$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e x^T é a transposição do vetor x .

Exemplo 6.3. Considere $Q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 4xz + y^2 + 4\pi z^2$. Então temos

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

é uma forma quadrática de grau 3 com a matriz associada A_Q

$$A_Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4\pi \end{pmatrix}.$$

Definição 6.4. Uma forma quadrática Q real de grau n é **indefinida** se Q assume valores positivos e negativos.

Exemplo 6.5. Temos que:

- $Q_1(x, y) = x^2 - y^2$ é indefinida, já que $Q_1(1, 0) = 1$ e $Q_1(0, 1) = -1$.
- $Q_2(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ é definida, já que $Q_2(x, y) = (x - y)^2 \geq 0$.
- A forma quadrática dada no exemplo 6.3 é indefinida, já que

$$Q(1, -2, 0) = -3 \quad \text{e} \quad Q(1, 0, 0) = 1.$$

Definição 6.6. Uma forma quadrática real Q de grau n é **degenerada** se a matriz associada A_Q tem determinante nulo, ou equivalente, existe uma mudança de coordenadas que transforma Q numa forma quadrática de grau menor que n .

Exemplo 6.7. Temos que:

- A forma quadrática definida no exemplo 6.3 é não degenerada, já que

$$\det(A_Q) = -4(1 + 3\pi) \neq 0.$$

- A forma quadrática de grau 3

$$Q_2(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

é degenerada, já que $\det(A_{Q_2}) = 0$. Note que, existe uma mudança de coordenadas que faz com que Q_2 fique na seguinte forma

$$Q_2(u, v, w) = v^2 + 2w^2 = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

mas $v^2 + 2w^2$ é uma forma quadrática de grau 2.

Definição 6.8. Dada Q uma forma quadrática real de grau n , então

$$SO(Q) = \{h \in SL_n(\mathbb{R}) \mid Q(vh) = Q(v), \forall v \in \mathbb{R}^n\}$$

é chamado de **grupo de isometrias** de Q ou também **grupo ortogonal especial** de Q .

Observação 6.9. No caso especial da forma quadrática Q ser da forma

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_{m+n}) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \dots - x_{m+n}^2$$

denotaremos seu grupo de isometrias por $SO(m, n)$.

Proposição 6.10. Seja $\mathfrak{so}(2, 1)$ a álgebra de Lie do grupo $SO(2, 1)$, então

$$\mathfrak{so}(2, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & d \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demonstração. Observe que dada $M \in SL_3(\mathbb{R})$, então $M \in SO_2(\mathbb{R})$ se, e só se:

$$M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, dada uma matriz $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, como $A \in \mathfrak{so}(2, 1)$ se, e só se, $\exp(t \cdot A) \in SO(2, 1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\exp(t \cdot A)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \exp(t \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mas então

$$\exp(-t \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \exp(t \cdot A)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definindo

$$I_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e utilizando o item v da Proposição 2.33, temos que

$$\exp(-t \cdot A) = \exp(t \cdot I_{2,1}^{-1} \cdot A^T \cdot I_{2,1})$$

Agora, derivando como no item vii da Proposição 2.33, temos que

$$-A \cdot \exp(-t \cdot A) = I_{2,1}^{-1} \cdot A^T \cdot I_{2,1} \cdot \exp(t \cdot I_{2,1}^{-1} \cdot A^T \cdot I_{2,1})$$

e finalmente, fazendo $t = 0$, concluímos que a matriz A deve satisfazer:

$$-A = I_{2,1}^{-1} \cdot A^T \cdot I_{2,1}. \quad (6.11)$$

Se substituirmos a matriz A por

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & h \end{pmatrix}$$

então a expressão 6.11 nos dá que

$$\mathfrak{so}(2, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & d \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Como já foi dito, o nosso objetivo nesta seção é utilizar o Teorema de Ratner do fecho da órbita 4.4 para provar a Conjectura de Oppenheim, enunciada em 6.1.

Para isso, precisamos encontrar um grupo G de Lie, um lattice Γ de G e um subgrupo U de G que seja gerado por elementos unipotentes.

Lema 6.12. Seja $SO(2, 1)^\circ$ a componente conexa do grupo $SO(2, 1)$ que contém a identidade. Então $SO(2, 1)^\circ$ é gerada por elementos unipotentes.

Demonstração. Vimos na Seção 2.2, que a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2$ do grupo $SL_2(\mathbb{R})$ é formada pelas matrizes de traço nulo, ou seja

$$\mathfrak{sl}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pelo Teorema 2.39, se conseguirmos um isomorfismo entre $\mathfrak{sl}_2$ e $\mathfrak{so}(2, 1)$ que preserve o produto $[\cdot, \cdot]$ teremos que $SO(2, 1)^\circ$ é localmente isomorfo ao grupo $SL_2(\mathbb{R})$, e este último é gerado por elementos unipotentes como provamos no Lema 3.22. Note que o isomorfismo abaixo preserva $[\cdot, \cdot]$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} . \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Concluimos então, que o grupo de isometrias de uma forma quadrática da forma

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

é gerado por elementos unipotentes. A ideia que utilizaremos para provar 6.1 é utilizar a ação do grupo $SO(2, 1)^\circ$ no espaço homogêneo $SL_3(\mathbb{Z}) \backslash SL_3(\mathbb{R})$.

Porém, para fazermos isso, precisamos mostrar que é suficiente supor no enunciado da Conjectura de Oppenheim 6.1 que a forma quadrática Q é da forma

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Proposição 6.13. Seja $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica, então existem matrizes $O \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $D \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de tal forma que O é ortogonal ($OO^T = O^T O = I_n$), D é diagonal e

$$M = ODO^T.$$

Lema 6.14. Seja Q uma forma quadrática de grau $n \geq 3$, não degenerada, indefinida e que não seja múltiplo escalar de uma forma quadrática com coeficientes inteiros. Então existem vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}^n$ tal que a forma quadrática Q' de grau 3 dada por

$$Q'(x_1, x_2, x_3) = Q(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3), \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

também é não degenerada, indefinida e não é múltipla escalar de uma forma quadrática com coeficientes inteiros.

Demonstração. Pela Proposição 6.13, após uma mudança de coordenadas, podemos supor que a matriz associada à forma quadrática Q é da forma

$$A_Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

com $\alpha_i \neq 0$, $0 \leq i \leq n$ já que Q é não degenerada. Como Q não é múltipla escalar de uma forma quadrática com coeficientes inteiros, então devem existir α_m, α_n tal que $\frac{\alpha_m}{\alpha_n}$ é irracional.

Além disso, podemos supor que $\frac{\alpha_m}{\alpha_n}$ é negativo, pois caso contrário todos as entradas α_i teriam o mesmo sinal, contrariando o fato de Q ser indefinida. Logo, se $e_i \in \mathbb{Z}^n$ é o vetor com entradas nulas exceto na coordenada i , onde vale 1, tomando $v_1 = e_m$, $v_2 = e_n$ e $v_3 = e_k$ onde $k \neq m, n$, teremos que, supondo $\alpha_n < 0$ e $\alpha_m > 0$

$$Q'(x_1, x_2, x_3) = Q(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3) = |\alpha_m| x_m^2 + |\alpha_k| x_k^2 - |\alpha_n| x_n^2$$

é uma forma quadrática de grau 3, indefinida, não degenerada e que não é múltipla escalar de uma forma em $\mathbb{Z}$, pois se existir $\beta \in \mathbb{R}$ tal que βQ é uma forma com coeficientes inteiros, então $\beta \alpha_m, \beta \alpha_k, \beta \alpha_n \in \mathbb{Z}$ e então teríamos que $\frac{\beta \alpha_m}{\beta \alpha_n} \in \mathbb{Q}$, contrariando a escolha de α_m e α_n .

□

Lema 6.15. A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2, 1)$ é uma sub-álgebra maximal da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ (como no exemplo 2.41), isto é, se $\mathfrak{h}$ é uma sub-álgebra de Lie tal que

$$\mathfrak{so}(2, 1) \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$$

então $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2, 1)$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_3$.

Demonstração. Ver Seção 1.2 de (MORRIS, 2005)

□

Corolário 6.16. O subgrupo de Lie $SO(2, 1)^\circ$ é um subgrupo de Lie maximal em $SL_3(\mathbb{R})$, isto é, se H é um subgrupo de Lie de $SL_3(\mathbb{R})$ tal que

$$SO(2, 1)^\circ \leq H \leq SL_3(\mathbb{R}),$$

então $H = SO(2, 1)^\circ$ ou $H = SL_3(\mathbb{R})$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie do subgrupo H . Então pelo Teorema 2.37 temos que $\mathfrak{h}$ é uma sub-álgebra de Lie das álgebras de Lie $\mathfrak{so}(2, 1)$ e $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ dos grupos $SO(2, 1)$ e $SL_3(\mathbb{R})$, respectivamente. Pelo Lema anterior, temos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2, 1)$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_3$. Utilizando então o Teorema 2.38, temos que $SO(2, 1)^\circ$ é um subgrupo conexo maximal.

□

Demonstração da Conjectura de Oppenheim. Pelo Lema 6.14, podemos supor que a forma quadrática Q tem grau 3. Além disso, pela Proposição 6.13, temos que

$$Q = Q_0 \circ O_Q,$$

onde

$$Q_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

e O_Q é uma matriz ortogonal 3×3 . É fácil ver que existe uma constante $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proporcional ao determinante de O_Q tal que

$$Q = \alpha \cdot Q_0 \circ g_Q,$$

onde $g \in SL_3(\mathbb{R})$.

Considere então nas hipóteses do Teorema de Ratner do fecho da órbita 4.4:

- O grupo de Lie $G = SL_3(\mathbb{R})$;
- O lattice $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$ de G ;

- O grupo conexo gerado por elementos unipotentes $U = SO(2, 1)^\circ$ (ver Lema 3.22).
- O elemento $x = \Gamma g_Q \in \Gamma/G$.

Pelo Teorema de Ratner do fecho da órbita, existe um subgrupo fechado H de G , tal que $U \leq H \leq G$ e $\overline{xU} = xH$, mas pelo Corolário 6.16, sabemos que

$$H = SO(Q)^\circ$$

ou então que

$$H = SL_3(\mathbb{R}).$$

Lema 6.17. Se $H = SO(Q)^\circ$ então Q é uma forma quadrática múltipla escalar de uma forma quadrática com coeficientes inteiros.

Demonstração. Ver o Capítulo 4 em (MORRIS, 2005). □

Portanto, podemos concluir que $H \neq SO(Q)^\circ$ já que Q não é múltipla escalar de uma forma com coeficientes inteiros por hipótese.

Logo, $H = SL_3(\mathbb{R})$ e então, pelo Teorema de de Ratner 4.4

$$\overline{SL_3(\mathbb{Z})g_Q \cdot SO(2, 1)^\circ} = SL_3(\mathbb{R}). \quad (6.18)$$

Como $Q = \alpha \cdot Q_0 \circ g_Q$, temos que

$$Q(\mathbb{Z}^3) = \alpha \cdot Q_0(\mathbb{Z}^3 g_Q) = \alpha \cdot Q_0(\mathbb{Z}^3 SL_3(\mathbb{Z})g_Q).$$

Além disso, pela Definição do grupo de isometrias de uma forma quadrática 6.8, vale

$$Q(\mathbb{Z}^3) = \alpha \cdot Q_0(\mathbb{Z}^3 SL_3(\mathbb{Z})g_Q U) = \alpha \cdot Q_0(\mathbb{Z}^3 SL_3(\mathbb{Z})g_Q SO(2, 1)^\circ).$$

Agora, por 6.18 e pela continuidade da forma quadrática, temos que

$$\overline{Q(\mathbb{Z}^3)} = \overline{\alpha \cdot Q_0(\mathbb{Z}^3 SL_3(\mathbb{Z})g_Q SO(2, 1)^\circ)} = \alpha \cdot Q_0(\mathbb{Z}^3 G) = \alpha \cdot Q_0(\mathbb{Z}^3 SL_3(\mathbb{R})).$$

É claro que $\mathbb{Z}^3 SL_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$, já que dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, se $a \neq 0$, então

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

e os casos em que $a = 0$ são resolvidos de forma semelhante. Portanto, temos que

$$\overline{Q(\mathbb{Z}^3)} = \alpha \cdot Q(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R},$$

já que Q é indefinida.

Concluimos então que a Conjectura de Oppenheim é verdadeira. □

REFERÊNCIAS

ARVANITOGEOORGOS, A. **An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces**. American Mathematical Society, 2003. (Student mathematical library). ISBN 9780821827789. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Z4vxBwAAQBAJ>. Citado nas páginas 8 e 10.

BARTLE, R. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. Wiley, 2014. (Wiley Classics Library). ISBN 9781118626122. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=aE1YBAAAQBAJ>. Citado na página 16.

DAJANI, K.; DIRKSIN, S. **A Simple Introduction to Ergodic Theory**. 2008. <http://www.staff.science.uu.nl/~kraai101/lecturenotes2009.pdf>. Citado na página 16.

EINSIEDLER, M.; WARD, T. **Ergodic Theory: with a view towards Number Theory**. Springer London, 2010. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780857290212. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=PiDET2fS7H4C>. Citado nas páginas 12, 14, 16, 28, 33, 34 e 37.

FOLLAND, G. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. Wiley, 2013. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts). ISBN 9781118626399. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=wI4fAwAAQBAJ>. Citado na página 16.

HALL, B. **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction**. Springer International Publishing, 2015. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9783319134673. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=didACQAAQBAJ>. Citado nas páginas 8 e 10.

KATZNELSON, Y.; WEISS, B. A simple proof of some ergodic theorems. **Israel Journal of Mathematics**, v. 42, n. 4, p. 291–296, Dec 1982. ISSN 1565-8511. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02761409>. Citado na página 18.

LEE, J. **Introduction to Smooth Manifolds**. Springer New York, 2012. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9781441999825. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=xygVcKGPnNwC>. Citado na página 8.

MARGULIS, G. A.; TOMANOV, G. M. Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces. **Inventiones mathematicae**, v. 116, n. 1, p. 347–392, Dec 1994. ISSN 1432-1297. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01231565>. Citado nas páginas 2, 39, 41, 64 e 68.

MORRIS, D. **Ratner's Theorems on Unipotent Flows**. University of Chicago Press, 2005. (Chicago Lectures in Mathematics). ISBN 9780226539843. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=DMbDldOzgMYC>. Citado nas páginas 2, 40, 78 e 79.

RATNER, M. On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups. **Acta Math.**, Institut Mittag-Leffler, v. 165, p. 229–309, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02391906>>. Citado na página 39.

_____. Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups. **Inventiones mathematicae**, v. 101, n. 2, p. 449–482, 1990. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/143812>>. Citado na página 39.

_____. Raghunathan’s topological conjecture and distributions of unipotent flows. **Duke Math. J.**, Duke University Press, v. 63, n. 1, p. 235–280, 06 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1215/S0012-7094-91-06311-8>>. Citado na página 39.

ROKHLIN, V. A. Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations. **Russian Mathematical Surveys**, v. 22, n. 5, p. 1, 1967. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0036-0279/22/i=5/a=R01>>. Citado na página 55.

SHAH, N. A. Invariant measures and orbit closures on homogeneous spaces for actions of subgroups generated by unipotent elements. In: **Proceedings of the International Colloquium on Lie Groups and Ergodic Theory Mumbai**. [S.l.]: Dani, 1996. Citado na página 39.

STARKOV, A. **Dynamical Systems on Homogeneous Spaces**. American Mathematical Society, 2000. (MMONO Series). ISBN 9780821813898. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=qAPkngEACAAJ>>. Citado nas páginas 2, 42 e 66.

STRELCYN, J.-M. *et al.* A proof of the estimation from below in pesin’s entropy formula. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 2, n. 2, p. 203–219, 1982. Citado na página 67.

VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Foundations of Ergodic Theory**. Cambridge University Press, 2016. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). ISBN 9781107126961. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=vIRyCwAAQBAJ>>. Citado na página 16.

álgebra de Lie, 10

órbita, 25

ação

de grupo, 7

simplesmente transitiva, 33

transitiva, 33

unipotente, 32

Conjectura de Oppenheim, 2, 73

domínio fundamental, 14

do n-toro, 5

entropia

condicional, 55

da partição, 55

de uma transformação, 57, 59

ergodicidade, 20, 28

da rotação no círculo, 21

de uma transformação mensurável, 19, 27

rotação irracional, 23

espaço homogêneo, 14

fluxo

ergódico, 27

geodésico, 35

horocíclico, 35

suave, 25

unipotente, 32

forma quadrática, 2, 73

degenerada, 74

indefinida, 74

função característica, 16

grupo, 3

$\mathbb{T}^n$, 5
 $GL_n(\mathbb{R})$, 4
 $O_n(\mathbb{R})$, 9
 $SL_n(\mathbb{R})$, 4, 9
abeliano, 3
de isometrias de uma forma quadrática, 74
de Lie, 8
discreto, 12
gerado por elementos unipotentes, 30
homomorfismo, 6
isomorfismo, 6
núcleo de um homomorfismo, 6
normal, 5
quociente, 4
topológico, 14
unipotente, 30

invariante

conjunto, 19
função mensurável, 20, 28
subconjunto, 27

lattice, 15

lema de mudança de coordenadas, 43

médida de Birkhoff, 49

métrica invariante, 12

medida

de Haar, 14
de Haar de um espaço homogêneo, 15
de probabilidade, 16
ergódica, 19, 27
estabilizador, 48
homogênea, 39
invariante, 16
mutualmente singular, 23
pushforward, 48
mutualmente singular, 23

partição

geradora, 59, 60

- geradora forte, 60
 - independente, 56
 - invariante, 64
 - mensurável, 55
 - refinamento, 56
 - soma, 56
 - subordinada, 64
- rotação no círculo, 16
- teorema
- de Haar, 14
 - de Margulis, 2, 73
 - de Ratner
 - da equidistribuição, 40
 - de classificação de medidas, 1, 39
 - de classificação de medidas em $SL_2(\mathbb{R})$, 40
 - do fecho da órbita, 40
 - de Recorrência de Poincaré, 17
 - de Sinai, 60
 - do subgrupo fechado, 8
 - Ergódico de Birkhoff, 18
 - propriedade de Ratner, 46
- transformação
- ergódica, 19, 20, 27
 - exponencial, 10
 - invariante, 16