Núcleos isotrópicos e positivos definidos sobre espaços compactos 2-homogêneos

Rafaela Neves Bonfim

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-MAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Rafaela Neves Bonfim

Núcleos isotrópicos e positivos definidos sobre espaços compactos 2-homogêneos

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

USP – São Carlos
Agosto de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B713n Bonfim, Rafaela Neves
Núcleos isotrópicos e positivos definidos
sobre espaços compactos 2-homogêneos / Rafaela
Neves Bonfim; orientador Valdir Antonio Menegatto.
- São Carlos - SP, 2017.
60 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Espaços 2-homogêneos. 2. núcleos positivos
definidos. 3. núcleos estritamente positivos
definidos. 4. produtos de núcleos positivos
definidos. 5. polinômios de Jacobi. I. Menegatto,
Valdir Antonio, orient. II. Título.

Rafaela Neves Bonfim

**Positive definite and isotropic kernels on compact two-point
homogeneous spaces**

Doctoral dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC- USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

**USP – São Carlos
August 2017**

Para Deus e minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por estar sempre ao meu lado, dando-me força e renovando meu ânimo a cada dia. Sem Ele não teria alcançado meus objetivos.

Agradeço aos meus pais, Selma e Dair, que sempre me incentivaram e que durante todo esse tempo estiveram ao meu lado, auxiliando-me em todas as minhas dificuldades. Agradeço também ao meu namorado, Michael, por me apoiar sempre.

Aos amigos do ICMC, Gregory, Naldo, Joás, Thiago, Alexandre, Cirilo, Mariele, Miriane e Ana Maria, que fizeram parte dessa trajetória, dividindo momentos de descontração, tornando a caminhada mais agradável.

Ao professor Valdir Menegatto, pela paciência, dedicação e por estar sempre disponível em ajudar.

Agradeço à FAPESP pelo financiamento do projeto de doutorado, com processo de número 2014/14380-2.

“Quando a benção chegar nunca foi sorte, sempre foi Deus.”
(Leandro Sapuahy)

RESUMO

BONFIM, R. **Núcleos isotrópicos e positivos definidos sobre espaços compactos 2-homogêneos.** 2017. 60 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Este trabalho é composto de duas partes distintas, ambas dentro de um mesmo tema: núcleos positivos definidos sobre variedades. Na primeira delas fornecemos uma caracterização para os núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos a valores matriciais sobre um espaço compacto 2-homogêneo. Utilizando-a, investigamos a positividade definida estrita destes núcleos, apresentando inicialmente algumas condições suficientes para garantir tal propriedade. No caso em que o espaço 2-homogêneo não é uma esfera, descrevemos uma caracterização definitiva para a positividade definida estrita do núcleo. Neste mesmo caso, para núcleos a valores no espaço das matrizes de ordem 2, apresentamos uma caracterização alternativa para a positividade definida estrita do núcleo via os dois elementos na diagonal principal da representação matricial do núcleo. Na segunda parte, nos restringimos a núcleos positivos definidos escalares sobre os mesmos espaços e determinamos condições necessárias e suficientes para a positividade definida estrita de um produto de núcleos positivos definidos sobre um mesmo espaço compacto 2-homogêneo. Apresentamos ainda uma extensão deste resultado para núcleos positivos definidos sobre o produto cartesiano de um grupo localmente compacto com uma esfera de dimensão alta, mantendo-se a isotropia na componente esférica.

Palavras-chave: Espaços 2-homogêneos, núcleos positivos definidos, núcleos estritamente positivos definidos, produtos de núcleos positivos definidos, polinômios de Jacobi.

ABSTRACT

BONFIM, R. **Núcleos isotrópicos e positivos definidos sobre espaços compactos 2-homogêneos.** 2017. 60 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

In this work we present a characterization for the continuous, isotropic and positive definite matrix-valued kernels on a compact two-point homogeneous space. After that, we consider the strict positive definiteness of the kernels, describing some independent sufficient conditions for that property to hold. In the case the space is not a sphere, one of the conditions becomes necessary and sufficient for the strict positive definiteness of the kernel. Further, for 2×2 -matrix-valued kernels on a compact two-point homogeneous space which is not a sphere, we present a characterization for the strict positive definiteness of the kernels based upon the main diagonal elements in its matrix representation. In the last part of this work, we restrict ourselves to scalar kernels and determine necessary and sufficient conditions in order that the product of two continuous, isotropic and positive definite kernels on a compact two-point homogeneous space be strictly positive definite. We also discuss the extension of this result for kernels defined on a product of a locally compact group and a high dimensional sphere.

Key-words: Two-point homogeneous spaces, positive definite kernels, strictly positive definite kernels, products of positive definite kernels, Jacobi polynomials.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	17
1 PRELIMINARES	21
1.1 Espaços compactos 2-homogêneos	21
1.2 Núcleos positivos definidos sobre espaços compactos 2-homogêneos	22
2 NÚCLEOS ESTRITAMENTE POSITIVOS DEFINIDOS SOBRE ES- PAÇOS 2-HOMOGÊNEOS	27
2.1 Positividade definida	27
2.2 Positividade definida estrita: condições suficientes	31
2.3 Positividade definida estrita: condições necessárias	35
2.4 Positividade definida estrita no caso de espaços não esféricos . . .	38
2.5 Positividade definida estrita no caso $l = 2$	41
3 PRODUTOS DE NÚCLEOS POSITIVOS DEFINIDOS USUAIS SO- BRE VARIEDADES	47
3.1 O caso do círculo unitário	48
3.2 O caso dos demais espaços homogêneos	49
3.3 Núcleos sobre o produto de um grupo localmente compacto e uma esfera	53
REFERÊNCIAS	57

INTRODUÇÃO

Os estudos apresentados neste trabalho envolvem núcleos positivos definidos sobre um conjunto não vazio X a valores matriciais. Se l é um inteiro positivo fixado, denote por $M_l(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes de ordem l com entradas reais. No caso $l = 1$, identificamos $M_l(\mathbb{R})$ com $\mathbb{R}$. Uma função a valores matriciais

$$\begin{aligned} F : X \times X &\rightarrow M_l(\mathbb{R}) \\ (x, y) &\rightarrow [f_{\mu\nu}(x, y)]_{\mu, \nu=1}^l \end{aligned}$$

é um *núcleo positivo definido* quando as seguintes condições estão satisfeitas:

$$f_{\mu\nu}(x, y) = f_{\mu\nu}(y, x) = f_{\nu\mu}(y, x), \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, l, \quad x, y \in X,$$

e, para cada inteiro positivo n ($\leq$ a cardinalidade de X), qualquer escolha de n pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em X , e quaisquer vetores $B_1, B_2, \dots, B_n$ em $\mathbb{R}^l$ tem-se

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^t F(x_i, x_j) B_j = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\mu, \nu=1}^l B_i^\mu B_j^\nu f_{\mu\nu}(x_i, x_j) \geq 0.$$

Acima, estamos escrevendo

$$B_i^t = (B_i^1, B_i^2, \dots, B_i^l), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Em linguagem matricial, a desigualdade acima equivale ao fato da matriz em blocos $F(x_i, x_j)$, de ordem nl , com bloco $\mu\nu$ dado por $[f_{\mu\nu}(x_i, x_j)]_{\mu, \nu=1}^l$, ser definida não negativa. O núcleo positivo definido F é dito ser *estritamente positivo definido* se as desigualdades acima são estritas, quando pelo menos um dos vetores B_i é não nulo.

Dependendo do contexto, a definição acima pode incorporar a continuidade de F ou alguma outra propriedade desejável para F ou X . Neste trabalho, salvo uma exceção, X será um espaço métrico. Precisamente, X será um espaço métrico compacto 2-homogêneo conforme a caracterização oferecida por Wang ([40]) há muito tempo atrás. Por enquanto, o leitor precisa tão somente saber que esta categoria envolve um certo número de espaços importantes, sendo as esferas unitárias usuais em $\mathbb{R}^n$, munidas de suas distâncias geodésicas usuais, seus representantes mais ilustres. Também poderíamos considerar núcleos a valores matriciais com entradas complexas. Neste caso, uma pequena simplificação poderia ser feita nas definições acima e todo o material a ser desenvolvido no trabalho continuaria válido a menos de pequenas alterações.

A teoria dos *núcleos positivos definidos usuais* ($l = 1$) pode ser encontrada em [5], mas não conhecemos nenhuma referência específica de citação que contenha um texto sistematizado

de boa qualidade sobre núcleos positivos definidos em geral. No caso em que X é um espaço métrico, a continuidade do núcleo é costumeiramente assumida, algo que também faremos neste trabalho. Por outro lado, por razões de aplicabilidade, também assume-se neste caso que o núcleo é *isotrópico*, ou seja, as variáveis estão amarradas explicitamente através da métrica do espaço. Em outras palavras, se d é a métrica de X e F é o núcleo, então exigimos que

$$F(x, y) = f(d(x, y)), \quad x, y \in X,$$

para alguma função f contínua em $\{d(x, y) : x, y \in X\}$ a valores em $M_l(\mathbb{R})$. Os resultados mais relevantes sobre núcleos positivos definidos usuais no contexto métrico foram obtidos por Schoenberg no início do século passado. No caso estrito, os resultados mais interessantes surgiram recentemente, inclusive em situações onde o espaço é compacto 2-homogêneo. Uma síntese de todos estes resultados pode ser encontrada em [13, 21, 42].

Em Estatística, os núcleos positivos definidos a valores matriciais sobre um espaço 2-homogêneo são funções de covariância em várias variáveis atreladas a campos randômicos especiais sobre os espaços. O caso esférico é o mais relevante, uma vez que a esfera usual 3-dimensional modela naturalmente a superfície terrestre em vários problemas da Geo-estatística. Por outro lado, a positividade definida estrita de núcleos como os aqui considerados garante que determinados procedimentos de interpolação, relacionados a dados dispersos em pontos arbitrários no espaço utilizado, sejam resolvidos de forma única. O artigo [19] discute funções de covariância em várias variáveis, enquanto que os textos [32, 33] apresentam um tratamento moderno para a teoria de campos randômicos sobre esferas e outros espaços.

No âmbito da Estatística, a caracterização dos núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos em esferas é geralmente atribuída a E. J. Hannan ([24]) ou a A. M. Yaglom ([44]), os quais supostamente generalizaram o caso usual demonstrado por Schoenberg em 1942. Estas caracterizações formam o alicerce sobre o qual muitos outros trabalhos recentes e relevantes dentro do mesmo tema foram embasados. Citamos, em particular, os trabalhos de C. Ma ([29, 30, 31, 41]) onde algumas questões bem simples sobre positividade definida estrita no contexto esférico são resolvidas. Outras questões não resolvidas dentro deste tema ou relacionadas a ele podem ser encontradas em [21, 37]. No caso usual, os núcleos contínuos, isotrópicos e estritamente positivos definidos em espaços 2-homogêneos foram devidamente caracterizados em [3, 12, 34, 35]. No entanto, excetuando-se o caso usual, não há quaisquer registros sobre caracterizações semelhantes no caso matricial, fato este que motivou parte deste trabalho.

As principais contribuições deste trabalho são:

(i) Apresentamos uma caracterização para os núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre um espaço compacto 2-homogêneo, complementando assim as caracterizações já existentes para os casos esféricos. Nossa demonstração vale para todos os espaços 2-homogêneos e não carrega qualquer linguagem de Estatística.

(ii) No caso em que o espaço compacto 2-homogêneo não é uma esfera, apresentamos uma caracterização para os núcleos contínuos, isotrópicos e estritamente positivos definidos.

(iii) No caso usual $l = 1$, exibimos condições necessárias e suficientes sobre dois núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre um mesmo espaço compacto 2-homogêneo de modo que o produto deles seja estritamente positivo definido.

Além disso, o trabalho ainda contém vários resultados parciais relevantes dentro do mesmo tema, os quais serão enfatizados no momento oportuno.

O trabalho prossegue da seguinte forma. No Capítulo 1, introduzimos os conceitos necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos. Pela mesma razão e, para a conveniência do leitor, apresentamos também alguns resultados previamente provados em fontes variadas. No Capítulo 2, apresentaremos o descrito em (i) e (ii). Este capítulo se completa com alguns resultados parciais e ainda, uma caracterização adicional para os núcleos contínuos, isotrópicos e estritamente positivos definidos sobre um espaço compacto 2-homogêneo, que não uma esfera, no caso específico $l = 2$. Finalmente, iniciamos o Capítulo 3 com a análise do problema (iii) no caso do círculo S^1 para depois considerar o mesmo problema para os demais espaços compactos 2-homogêneos. Na última seção do capítulo, fazemos uma breve discussão sobre núcleos positivos definidos sobre o produto cartesiano de um grupo localmente compacto e uma esfera e, em seguida, resolvemos uma extensão do problema em (iii).

Os resultados do Capítulo 2 estão publicados em [6], enquanto que os resultados do Capítulo 3 fazem parte do preprint [7], o qual já foi submetido para publicação.

PRELIMINARES

Apresentamos neste capítulo, de maneira objetiva, alguns resultados básicos que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho. Inicialmente, definimos os espaços compactos 2-homogêneos e expomos algumas de suas propriedades. Na sequência recapitulamos as caracterizações para os núcleos contínuos, isotrópicos, positivos definidos e estritamente positivos definidos sobre os espaços 2-homogêneos. Finalizamos o capítulo com uma discussão bem sucinta sobre a Fórmula de Linearização e a Fórmula de Adição para os polinômios de Jacobi.

1.1 Espaços compactos 2-homogêneos

Seja M uma variedade Riemanniana e denote por $|xy|$ a distância Riemanniana entre x e y . Se para quaisquer dois pares de pontos (p_1, p_2) e (q_1, q_2) em M , com $|p_1 p_2| = |q_1 q_2|$, existe uma isometria $\varphi : M \rightarrow M$ que leva p_1 em q_1 e p_2 em q_2 , ou seja, $\varphi(p_1) = q_1$ e $\varphi(p_2) = q_2$, dizemos que M é um espaço 2-homogêneo. Esses espaços são também conhecidos como espaços simétricos de posto um ([25]). Os espaços compactos 2-homogêneos foram classificados por Wang ([40]). Ele demonstrou que esses espaços pertencem a uma das seguintes categorias:

1. Esfera unitária S^d , $d=1, 2, \dots$;
2. Espaço projetivo real $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $d=2, 3, \dots$;
3. Espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $d=4, 6, \dots$;
4. Espaço projetivo quaterniônico $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $d=8, 12, \dots$;
5. Espaço projetivo de Cayley $\mathbb{P}^d(\text{Cay})$, $d=16$.

Aqui, d denota a dimensão das respectivas variedades. Vamos denotar um espaço compacto 2-homogêneo de dimensão d pelo símbolo $\mathbb{M}^d$, para enfatizar a dimensão.

Um fato interessante sobre esses espaços é que suas geometrias são bastante semelhantes. Em particular, todas as geodésicas dos espaços compactos 2-homogêneos são curvas fechadas e tem o mesmo comprimento, a saber, duas vezes o diâmetro do espaço. Neste trabalho, normalizaremos a distância Riemanniana destes espaços de modo que o diâmetro de cada um deles seja 2π . Vale observar que, quando $\mathbb{M}^d = S^d$, vale a fórmula

$$\cos(|xy|/2) = x \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{M}^d,$$

onde “ $\cdot$ ” é o produto interno usual em $\mathbb{R}^{d+1}$.

Uma propriedade particular dos espaços compactos 2-homogêneos é que alguns deles podem ser mergulhados isometricamente em outros.

Definição 1.1.1. Sejam (M_1, δ_1) e (M_2, δ_2) espaços métricos. Um *mergulho isométrico* de M_1 em M_2 é uma função $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que

$$\delta_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \delta_1(x, y), \quad x, y \in M_1.$$

O seguinte resultado descreve um destes mergulhos, o qual será utilizado à frente ([1, p.66]).

Lema 1.1.2. Se $d \geq 2$, então existe um mergulho isométrico de S^1 em $\mathbb{M}^d$.

Vale ressaltar que o lema acima leva em consideração a normalização que adotamos para os espaços $\mathbb{M}^d$.

Outro conceito que também será importante é o de *variedade antipodal*. Aqui, também temos que levar em conta a normalização previamente adotada.

Definição 1.1.3. A *variedade antipodal* de um ponto $x \in \mathbb{M}^d$ é o conjunto

$$V_x := \{y \in \mathbb{M}^d : |xy| = 2\pi\}.$$

Cabe observar que no caso $\mathbb{M}^d = S^d$, a variedade antipodal V_x é o conjunto unitário $\{-x\}$. Nos demais casos, ela é uma sub-variedade não trivial, logo um conjunto infinito.

1.2 Núcleos positivos definidos sobre espaços compactos 2-homogêneos

Nesta seção, consideramos tão somente núcleos sobre $\mathbb{M}^d$ que são usuais, ou seja, no caso em que $l = 1$.

Uma parte deste trabalho depende fortemente das caracterizações para os núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos usuais sobre um espaço compacto 2-homogêneo. No

caso esférico, tal caracterização foi obtida por I. J. Schoenberg ([38]) e nos demais espaços, elas seguem de um teorema de R. Gangolli ([16]). Relembramos que a isotropia de um núcleo $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow \mathbb{R}$ corresponde à existência de uma função $F_r^d : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$F(x, y) = F_r^d(\cos(|xy|/2)), \quad x, y \in \mathbb{M}^d.$$

Chamaremos F_r^d de *parte isotrópica* (ou *radial*) de F .

Teorema 1.2.1. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow \mathbb{R}$ um núcleo contínuo e isotrópico. Ele é positivo definido se, e somente se, sua parte isotrópica F_r^d possui uma representação em série na forma*

$$F_r^d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{d,\beta} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t), \quad t \in [-1, 1], \quad (1.1)$$

onde $a_k^{d,\beta} \in [0, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $P_k^{((d-2)/2, \beta)}$ é o polinômio de Jacobi de grau k associado ao par $((d-2)/2, \beta)$ e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{d,\beta} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1) < \infty$.

O índice β assume os valores $(d-2)/2, -1/2, 0, 1$ ou 3 dependendo, respectivamente, da categoria à qual $\mathbb{M}^d$ pertence, de acordo com a classificação de Wang.

Como o teorema de representação acima baseia-se fortemente nos polinômios de Jacobi $P_k^{((d-2)/2, \beta)}$, aproveitamos para revisar brevemente algumas de suas propriedades. Lembramos que, quase todas elas, valem não somente para polinômios de Jacobi associados aos pares $((d-2)/2, \beta)$, como para aqueles associados a um par genérico (α, β) como considerado em [39]. Eles formam uma família ortogonal no intervalo $[-1, 1]$, isto é,

$$\int_{-1}^1 P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t) P_l^{((d-2)/2, \beta)}(t) (1-t)^{(d-2)/2} (1+t)^\beta dt = \delta_{k,l} h_l^{d,\beta},$$

onde

$$h_l^{d,\beta} = \frac{2^{\beta+d/2}}{2l+\beta+d/2} \frac{\Gamma(l+d/2)\Gamma(l+\beta+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+\beta+d/2)}, \quad l \in \mathbb{Z}_+.$$

Aqui Γ indica a função gama usual.

No lema abaixo, registramos algumas propriedades específicas dos polinômios de Jacobi ([2, 39]).

Lema 1.2.2. *Valem as seguintes propriedades:*

- (i) $P_k^{((d-2)/2, \beta)}(-t) = (-1)^k P_k^{(\beta, (d-2)/2)}(t)$, $t \in [-1, 1]$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t) [P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)]^{-1} = 0$, $t \in (-1, 1)$;
- (iii) Se $d > 2\beta + 2$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k^{(\beta, (d-2)/2)}(1) [P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)]^{-1} = 0$;
- (iv) $P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1) = \max \{P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t) : t \in [-1, 1]\}$.

Quando $\beta = (d-2)/2$, os polinômios de Jacobi são múltiplos positivos dos polinômios de Gegenbauer $C_k^{(d-1)/2}$:

$$P_k^{((d-2)/2, (d-2)/2)}(t) = \frac{(d/2)_k}{(d-1)_k} C_k^{(d-1)/2}(t), \quad t \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots$$

Neste caso particular, os polinômios de Jacobi de grau par são funções pares, enquanto que aqueles de grau ímpar são funções ímpares.

No caso estrito, temos o resultado abaixo ([3, 12, 34, 35]). Observamos que no caso não esférico o resultado é muito recente.

Teorema 1.2.3. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow \mathbb{R}$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido. Considere a representação dele conforme o Teorema 1.2.1. Então F é estritamente positivo definido se, e somente se, as seguintes condições valem:*

- (i) $\mathbb{M}^d = S^1$: o conjunto $\{k : a_{|k|}^{1,\beta} > 0\}$ intersecta toda progressão aritmética de $\mathbb{Z}$.
- (ii) $\mathbb{M}^d = S^d$, $d \geq 2$: o conjunto $\{k : a_k^{d,\beta} > 0\}$ contém infinitos pares e infinitos ímpares.
- (iii) Demais casos: o conjunto $\{k : a_k^{d,\beta} > 0\}$ contém infinitos inteiros.

Em particular, este resultado ratifica que a positividade definida estrita de um núcleo positivo definido usual sobre $\mathbb{M}^d$, não depende dos valores assumidos pelos escalares $a_k^{d,\beta}$ na representação em série da parte isotrópica do núcleo, e sim do conjunto dos índices k para os quais os coeficientes são positivos.

Concluimos a seção apresentando duas fórmulas importantes que envolvem os polinômios de Jacobi.

Em 1962, Hylleraas ([27]) forneceu uma relação para o produto de polinômios de Jacobi

$$P_k^{(\alpha,\beta)} P_l^{(\alpha,\beta)} = \sum_{m=|k-l|}^{k+l} b_{k,l}^{\alpha,\beta}(m) P_m^{(\alpha,\beta)}, \quad (1.2)$$

onde $b_{k,l}^{\alpha,\beta}(m) \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta > -1$. Um pouco mais tarde, Gasper ([17, 18]) utilizou as informações levantadas por Hylleraas para deduzir o seguinte resultado.

Lema 1.2.4. *Se $\alpha \geq \beta > -1$ e*

$$(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 4)^2(\alpha + \beta + 6) \geq (\alpha - \beta)^2[(\alpha + \beta + 1)^2 - 7(\alpha + \beta + 1) - 24],$$

então os coeficientes $b_{k,l}^{\alpha,\beta}(m)$ na relação anterior são todos não negativos. Além disso, o coeficiente $b_{k,l}^{\alpha,\beta}(k+l)$ é, de fato, positivo.

Não é difícil ver que a não negatividade dos coeficientes está garantida no caso em que $\alpha \geq \beta > -1$ e $\alpha + \beta \geq -1$. Em particular, isso também é verdade nos casos $\alpha = (d-2)/2 > 0$ e $\beta = (d-2)/2, -1/2, 0, 1, 3$, registrados no Teorema 1.2.1. Em outras palavras, para os espaços que estamos considerando neste trabalho, a classe de funções que possui uma representação como no Teorema 1.2.1 é um semigrupo sob multiplicação pontual.

No caso dos polinômios de Gegenbauer, a fórmula de Linearização foi obtida em [11]:

$$C_k^\alpha(t) C_l^\alpha(t) = \sum_{\mu=0}^{k \wedge l} b_{k,l}^\alpha(\mu) C_{k+l-2\mu}^\alpha(t), \quad t \in [-1, 1], \quad (1.3)$$

onde

$$b_{k,l}^\alpha(\mu) = \frac{k+l+\alpha-2\mu}{k+l+\alpha-\mu} \frac{(\alpha)_\mu (\alpha)_{k-\mu} (\alpha)_{l-\mu} (2\alpha)_{k+l-\mu}}{\mu! (k-\mu)! (l-\mu)! (\alpha)_{k+l-\mu}} \frac{(k+l-2\mu)!}{(2\alpha)_{k+l-2\mu}}.$$

Aqui $k \wedge l$ denota o mínimo entre k e l , $(\cdot)_r$ é o símbolo de Pochhammer. Obviamente, todos os coeficientes $b_{k,l}^\alpha(\mu)$ são não negativos. Em um dos casos que estamos interessados neste trabalho, o resultado abaixo é válido.

Lema 1.2.5. *Para $\alpha = (d-1)/2$, $d = 2, 3, \dots$, os coeficientes $b_{k,l}^{\alpha,\beta}(\mu)$ são positivos, $\mu = 1, 2, \dots, k \wedge l$.*

Demonstração. Como $\alpha \geq 1/2 > 0$, todos os símbolos de Pochhammer que aparecem no numerador da expressão que define $b_{k,l}^\alpha(\mu)$ são não nulos, independente dos valores de k , l e μ . O fatorial $(k+l-2\mu)!$ também é sempre positivo. Finalmente, como $\mu \leq k$ e $\mu \leq l$, temos

$$k+l+\alpha-2\mu = (k-\mu) + (l-\mu) + \alpha \geq \alpha \geq 1/2 > 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, k \wedge l.$$

Portanto, $b_{k,l}^\alpha(\mu) > 0$, para todo $\mu = 0, 1, \dots, k \wedge l$. □

Os espaços compactos 2-homogêneos admitem um operador Δ_d de segunda ordem e invariante, chamado de operador de Laplace-Beltrami. Este operador tem espectro discreto, real e não positivo. Ordenando os elementos deste espectro na forma

$$0 = \zeta_0 > \zeta_1 > \zeta_2 > \dots,$$

e definindo $\mathcal{H}_k^d$ como sendo o autoespaço de Δ_d correspondente ao autovalor ζ_k , os espaços $\mathcal{H}_k^d$ são mutuamente ortogonais em $L^2(\mathbb{M}^d, \sigma_d)$, onde σ_d é a medida normalizada de Riemann sobre $\mathbb{M}^d$. Assim, se a dimensão de $\mathcal{H}_k^d$ é denotada por $\delta(k, d)$, podemos tomar uma base ortonormal $\{S_{k,1}^d, S_{k,2}^d, \dots, S_{k,\delta(k,d)}^d\}$ para tal espaço, com respeito ao produto interno de $L^2(\mathbb{M}^d, \sigma_d)$. Um resultado de E. Giné ([20]) garante a *Fórmula de Adição*:

$$P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|xy|/2)) = \frac{1}{c_k^{d,\beta}} \sum_{\alpha=1}^{\delta(k,d)} S_{k,\alpha}^d(x) \overline{S_{k,\alpha}^d(y)}, \quad x, y \in \mathbb{M}^d.$$

Aqui, $c_k^{d,\beta}$ é uma constante positiva que depende de k , d e β . Os elementos da base $S_{k,\alpha}^d$ são comumente chamados de harmônicos esféricos. Mais informações sobre a Fórmula de Adição, sua aplicabilidade e sobre a análise harmônica em geral atrelada aos espaços $\mathbb{M}^d$ podem ser encontradas em [8, 9, 28, 36] e nas referências lá citadas.

NÚCLEOS ESTRITAMENTE POSITIVOS DEFINIDOS SOBRE ESPAÇOS 2-HOMOGÊNEOS

Neste capítulo apresentamos inicialmente uma caracterização para núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$. Lembramos que o caso usual já havia sido explicitado por Schoenberg e Gangolli ([38, 16]), enquanto que o caso matricial para superfícies esféricas já foi descrito em [24, 44], no âmbito da Estatística. Nossa demonstração é universal, no sentido de que vale para todos os espaços compactos 2-homogêneos e não carrega qualquer linguagem estatística em sua comprovação. No restante do capítulo, apresentamos a contribuição mais relevante da tese, ou seja, uma caracterização para os núcleos contínuos, isotrópicos e estritamente positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$, no caso em que $\mathbb{M}^d$ não é uma esfera. Neste mesmo contexto, mas com a restrição $l = 2$, apresentamos uma caracterização adicional para a positividade definida estrita, via os dois elementos diagonais na representação matricial do núcleo. O capítulo descreve ainda vários resultados parciais dentro do mesmo tema, mas sem qualquer restrição sobre l .

2.1 Positividade definida

Como já descrito na Introdução, a positividade definida de um núcleo $F = [f_{\mu\nu}]_{\mu,\nu=1}^l : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_l(\mathbb{R})$ demanda que

$$f_{\mu\nu}(x, y) = f_{\mu\nu}(y, x) = f_{\nu\mu}(y, x), \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, l, \quad x, y \in \mathbb{M}^d,$$

e que, para cada inteiro positivo n e qualquer escolha de n pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\mathbb{M}^d$, a matriz $[F(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$, de ordem $ln \times ln$, é definida não negativa. A positividade definida estrita exige, por sua vez, que as matrizes da frase anterior, ou seja, as matrizes $[F(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$, sejam positivas definidas. A isotropia de tais núcleos corresponde à isotropia de cada uma de suas

funções coordenadas $f_{\mu\nu}$, enquanto que a continuidade de um núcleo como acima demanda a continuidade de cada uma das funções coordenadas $f_{\mu\nu}$. Reiteramos que estamos adotando a distância Riemanniana (geodésica) usual em $\mathbb{M}^d$ normalizada, de modo que o diâmetro de cada espaço $\mathbb{M}^d$ seja 2π .

Um exemplo particular de núcleos positivos definidos é fornecido pela proposição abaixo. O leitor não deve se esquecer que o índice superior β , que aparece no polinômio de Jacobi, varia de acordo com a classificação dos espaços compactos 2-homogêneos de Wang.

Proposição 2.1.1. *Seja k um inteiro não negativo fixado. Se A é uma matriz simétrica e definida não negativa de $M_l(\mathbb{R})$, então*

$$F(x, y) = AP_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|xy|/2)), \quad x, y \in \mathbb{M}^d,$$

é um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido em $\mathbb{M}^d$.

Demonstração. Sejam $A = [A^{\mu\nu}] \in M_l(\mathbb{R})$ e n um inteiro positivo. Considere ainda vetores $B_1, B_2, \dots, B_n$ em $\mathbb{R}^l$ e pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $\mathbb{M}^d$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n B_i^t F(x_i, x_j) B_j &= \sum_{i,j=1}^n B_i^t AP_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) B_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{\mu, \nu=1}^l B_i^\mu B_j^\nu A^{\mu\nu} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)). \end{aligned}$$

Introduzindo a Fórmula da Adição vem que

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^t F(x_i, x_j) B_j = \frac{1}{c_k^{d, \beta}} \sum_{\alpha=1}^{\delta(k, d)} \sum_{\mu, \nu=1}^l \sum_{i=1}^n B_i^\mu S_{k, \alpha}^d(x_i) \sum_{j=1}^n B_j^\nu \overline{S_{k, \alpha}^d(x_j)} A^{\mu\nu}.$$

Como a matriz A é definida não negativa e o escalar $c_k^{d, \beta}$ é positivo, concluímos que

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^t F(x_i, x_j) B_j \geq 0.$$

Isso demonstra a positividade definida de F . □

No lema técnico abaixo apresentamos algumas propriedades pontuais dos núcleos positivos definidos.

Lema 2.1.2. *Seja $F = [f_{\mu\nu}]_{\mu, \nu=1}^l$ um núcleo positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$. Valem as seguintes afirmações:*

(i) *Se B é um vetor de $\mathbb{R}^l$, então a fórmula*

$$B^t F B(x, y) = B^t F(x, y) B, \quad x, y \in \mathbb{M}^d,$$

define um núcleo $B^t F B$ positivo definido em $\mathbb{M}^d$.

(ii) *Cada elemento diagonal $f_{\mu\mu}$ é um núcleo positivo definido usual sobre $\mathbb{M}^d$.*

(iii) *Se F é um núcleo contínuo, isotrópico e estritamente positivo definido, então cada elemento da diagonal $f_{\mu\mu}$ é contínuo, isotrópico e estritamente positivo definido.*

Demonstração. A parte (i) segue diretamente da definição de positividade definida. Ela vale até em contextos mais gerais do que o considerado aqui (veja por exemplo, [10, 43]). Os itens (ii) e (iii) são consequências de (i) e de nossas definições. $\square$

O principal teorema desta seção tem enunciado como a seguir.

Teorema 2.1.3. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_l(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo e isotrópico. Então, F é positivo definido se, e somente se, ele tem uma representação na forma*

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|xy|/2)), \quad x, y \in \mathbb{M}^d,$$

onde cada $A_k = [A_k^{\mu\nu}]$ é uma matriz (simétrica) definida não negativa de $M_l(\mathbb{R})$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\mu\nu} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1) < \infty, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, l.$$

Demonstração. Podemos escrever F na forma

$$F(x, y) = [f_{\mu\nu}(\cos(|xy|/2))], \quad x, y \in \mathbb{M}^d, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, l.$$

Observe que estamos pensando em $f_{\mu\nu}$ como a parte isotrópica da função coordenada $\mu\nu$. Devido ao Lema 2.1.2-(ii), cada elemento $f_{\mu\mu}$ é parte isotrópica de um núcleo positivo definido usual sobre $\mathbb{M}^d$. Logo, usando a caracterização de Gangolli temos que

$$f_{\mu\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{d, \beta}(\mu\mu) P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t), \quad t \in [-1, 1], \quad \mu = 1, 2, \dots, l,$$

onde $a_k^{d, \beta}(\mu\mu) \geq 0$ e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{d, \beta}(\mu\mu) P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1) < \infty$. Analisemos agora o caso em que $\mu \neq \nu$. Usando vetores convenientes de $\mathbb{R}^l$, o Lema 2.1.2-(i) revela que $f_{\mu\mu} + f_{\nu\nu} + f_{\mu\nu} + f_{\nu\mu}$ e $f_{\mu\mu} + f_{\nu\nu} - f_{\mu\nu} - f_{\nu\mu}$ são partes isotrópicas de núcleos positivos definidos usuais sobre $\mathbb{M}^d$. Logo, novamente pelo resultado de Gangolli, podemos escrever

$$f_{\mu\mu} + f_{\nu\nu} \pm 2f_{\mu\nu} = f_{\mu\mu} + f_{\nu\nu} \pm f_{\mu\nu} \pm f_{\nu\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k, \pm}^{d, \beta}(\mu\nu) P_k^{((d-2)/2, \beta)},$$

onde $a_{k, \pm}^{d, \beta}(\mu\nu) \geq 0$ e $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k, \pm}^{d, \beta}(\mu\nu) P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1) < \infty$. Como

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[f_{\mu\mu} + f_{\nu\nu} + 2f_{\mu\nu} - (f_{\mu\mu} + f_{\nu\nu} - 2f_{\mu\nu})],$$

temos que

$$f_{\mu\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{d, \beta}(\mu\nu) P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

onde

$$a_k^{d, \beta}(\mu\nu) = \frac{1}{4}(a_{k, +}^{d, \beta}(\mu\nu) - a_{k, -}^{d, \beta}(\mu\nu))$$

e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{d,\beta}(\mu\nu) P_k^{((d-2)/2,\beta)}(1) < \infty$. Introduzindo as informações obtidas acima, na matriz que define F , obtemos a representação matricial

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k^{((d-2)/2,\beta)}(\cos(|xy|/2)), \quad x, y \in \mathbb{M}^d,$$

onde $A_k = [a_k^{d,\beta}(\mu\nu)]$. A simetria de A é óbvia, enquanto que a convergência citada no enunciado do teorema segue claramente do que desenvolvemos acima. Para completar a demonstração da primeira parte é suficiente demonstrar que cada matriz A_k é definida não negativa. Para tanto, demonstraremos que para quaisquer números reais $c_1, c_2, \dots, c_l$ fixados, o núcleo usual

$$G(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu, \nu=1}^l c_{\mu} c_{\nu} a_k^{d,\beta}(\mu\nu) \right) P_k^{((d-2)/2,\beta)}(\cos(|xy|/2)), \quad x, y \in \mathbb{M}^d,$$

é positivo definido, uma vez que a caracterização de Gangolli nos dá de imediato que

$$\sum_{\mu, \nu=1}^l c_{\mu} c_{\nu} a_k^{d,\beta}(\mu\nu) \geq 0,$$

ou seja, A_k é definida não negativa. Sejam então $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos em $\mathbb{M}^d$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ números reais. Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n b_i b_j G(x_i, x_j) &= \sum_{i,j=1}^n b_i b_j \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu, \nu=1}^l c_{\mu} c_{\nu} a_k^{d,\beta}(\mu\nu) \right) P_k^{((d-2)/2,\beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n b_i b_j \left[\sum_{\mu, \nu=1}^l c_{\mu} c_{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{d,\beta}(\mu\nu) P_k^{((d-2)/2,\beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) \right], \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n b_i b_j G(x_i, x_j) &= \sum_{i,j=1}^n b_i b_j \left[\sum_{\mu, \nu=1}^l c_{\mu} c_{\nu} f_{\mu\nu}(\cos(|x_i x_j|/2)) \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n b_i b_j C^t F(x_i, x_j) C \end{aligned}$$

onde $C = (c_1, c_2, \dots, c_l) \in \mathbb{R}^l$. Como o Lema 2.1.2-(i) garante que o núcleo usual $C^t F C$ é positivo definido, a última soma que deduzimos é não negativa. Portanto, G é positivo definido. Reciprocamente, observe que pela Proposição 2.1.1, núcleos matriciais da forma

$$(x, y) \in \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow A P_k^{((d-2)/2,\beta)}(\cos(|xy|/2)),$$

onde $A \in M_l(\mathbb{R})$ é definida não negativa, são contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$. Como a família dos núcleos positivos definidos é fechada por somas finitas e limites pontuais, a parte suficiente do teorema segue. $\square$

Como no caso usual, a critério do leitor, a função matricial

$$F_r^d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

oriunda da representação descrita no teorema anterior, pode ser chamada de *parte isotrópica* de F .

Várias observações merecem ser registradas neste momento. No caso esférico, o Teorema 2.1.3 recupera a caracterização de Hannan e Yaglom, uma vez que neste caso particular, os polinômios de Jacobi tornam-se polinômios de Gegenbauer. Assim sendo, este teorema complementa e estende os resultados de Hannan e Yaglom. O que ainda não existe e carece de investigação, é a construção efetiva de núcleos que se encaixam na representação do teorema. Há de se observar que, no caso usual, tais construções já existem. Por exemplo, se f é a restrição a $[0, \pi]$ de uma função contínua em $[0, \infty)$, que é completamente monótona em $(0, \infty)$, então a fórmula

$$F(x, y) = f(|xy|/2), \quad x, y \in S^d$$

define um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido usual sobre S^d ([21]). Esse fato é um caso particular de um teorema mais geral provado em [34]. Finalmente, é importante mencionar que se um espaço compacto 2-homogêneo está isometricamente mergulhado em um segundo, então qualquer núcleo positivo definido sobre o segundo espaço será positivo definido sobre o primeiro. A versão esférica desta propriedade no contexto usual foi originalmente observada por Schoenberg e recentemente explorada em [21].

2.2 Positividade definida estrita: condições suficientes

Esta seção contém resultados gerais sobre a positividade definida estrita de núcleos positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$. Entre eles, apresentamos uma formulação alternativa para tal conceito e algumas condições suficientes para a positividade definida estrita obtidas com a ajuda da análise matricial. Os resultados que serão apresentados aqui não carregam nenhuma restrição sobre o espaço $\mathbb{M}^d$.

Começamos relembrando uma formulação alternativa para a positividade definida estrita no sentido usual. Uma demonstração pode ser encontrada em [2].

Lema 2.2.1. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow \mathbb{R}$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido. Considere a representação em série para F descrita no Teorema 1.2.1 e defina*

$$J_F^1 = \{k : a_k^{d, \beta} > 0\}.$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) F é estritamente positivo definido.

(ii) Se n é um inteiro positivo e $x_1, x_2, \dots, x_n$ são pontos distintos de $\mathbb{M}^d$, então o sistema

$$\sum_{i=1}^n c_i P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \quad k \in J_F^1, \quad x \in \mathbb{M}^d,$$

tem uma única solução, isto é, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

O segundo lema descreve o fato de que uma matriz definida não negativa pode ser vista como uma matriz de Gram ([26, Capítulo 7]).

Lema 2.2.2. *Uma matriz A em $M_l(\mathbb{R})$ é definida não negativa de posto r se, e somente se, existe um conjunto $\{a^1, a^2, \dots, a^l\}$ de vetores de $\mathbb{R}^l$, contendo um subconjunto linearmente independente com r vetores, tais que a entrada $\mu\nu$ de A é $a^\mu \cdot a^\nu$, onde “ $\cdot$ ” é o produto interno usual de $\mathbb{R}^l$.*

Se $A \in M_l(\mathbb{R})$ tem uma representação de Gram, como descrita no lema acima, então o conjunto ordenado $\{a^1, a^2, \dots, a^l\}$ será chamado *um conjunto de Gram* para A .

Escreveremos $A > 0$ para indicar que a matriz (simétrica) A de $M_l(\mathbb{R})$ é positiva definida. O lema anterior é a chave para demonstrarmos o resultado técnico seguinte.

Lema 2.2.3. *Sejam A uma matriz (simétrica) definida não negativa de $M_l(\mathbb{R})$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos de $\mathbb{M}^d$ e $B_1, B_2, \dots, B_n$ vetores em $\mathbb{R}^l$. Suponha que $\{a^1, a^2, \dots, a^l\}$ é um conjunto Gram de A . Se k é um inteiro não negativo e*

$$\sum_{i,j=1}^n \sum_{\mu,\nu=1}^l B_i^\mu B_j^\nu A^{\mu\nu} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) = 0,$$

então

$$\sum_{\mu=1}^l \left[\sum_{i=1}^n B_i^\mu P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) \right] a^\mu = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d.$$

Em particular, se $A > 0$, tem-se

$$\sum_{i=1}^n B_i^\mu P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, l, \quad x \in \mathbb{M}^d.$$

Demonstração. Introduzindo a representação de Gram de A na primeira igualdade do enunciado do teorema e usando a Fórmula da Adição, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{\mu,\nu=1}^l B_i^\mu B_j^\nu (a^\mu \cdot a^\nu) P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) \\ &= \frac{1}{c_k^{d,\beta}} \sum_{\alpha=1}^{\delta(k,d)} \sum_{i,j=1}^n \sum_{\mu,\nu=1}^l B_i^\mu B_j^\nu (a^\mu \cdot a^\nu) S_{k,\alpha}^d(x_i) \overline{S_{k,\alpha}^d(x_j)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{\alpha=1}^{\delta(k,d)} \left\| \sum_{\mu=1}^l \left[\sum_{i=1}^n B_i^\mu S_{k,\alpha}^d(x_i) \right] a^\mu \right\|^2 = 0,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma usual em $\mathbb{C}^l$. Logo,

$$\sum_{\mu=1}^l \left[\sum_{i=1}^n B_i^\mu S_{k,\alpha}^d(x_i) \right] a^\mu = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \delta(k, d).$$

Fixado $x \in \mathbb{M}^d$, multiplicando a equação acima por $\overline{S_{k,\alpha}^d(x)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, \delta(k, d)$, e usando novamente a Fórmula da Adição, concluímos que

$$\sum_{\mu=1}^l \left[\sum_{i=1}^n B_i^\mu P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) \right] a^\mu = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d.$$

Se A é positiva definida, então o conjunto $\{a^\mu : \mu = 1, 2, \dots, l\}$ é linearmente independente. Portanto, a última afirmação do lema também vale. $\square$

A seguir, utilizamos o lema anterior e outras ferramentas matriciais para descrever condições suficientes para a positividade definida estrita de núcleos contínuos e isotrópicos sobre $\mathbb{M}^d$. O primeiro resultado desta natureza tem sua motivação em caracterização similar para núcleos positivos definidos usuais, levando-se em conta a presença de matrizes positivas definidas na representação em série do núcleo, conforme descrição no Teorema 2.1.3.

Teorema 2.2.4. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_l(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido. Considere a representação de F conforme o Teorema 2.1.3. Para que F seja estritamente positivo definido é suficiente que:*

- (i) $\mathbb{M}^d = S^1$: o conjunto $\{k : A_{|k|} > 0\}$ intersecta toda progressão aritmética em $\mathbb{Z}$.
- (ii) $\mathbb{M}^d = S^d$, $d \geq 2$: o conjunto $\{k : A_k > 0\}$ contenha infinitos pares e infinitos ímpares.
- (iii) Demais casos: o conjunto $\{k : A_k > 0\}$ contenha infinitos inteiros.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos de $\mathbb{M}^d$ e $B_1, B_2, \dots, B_n$ vetores em $\mathbb{R}^l$. Vamos demonstrar que a condição

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^t F(x_i, x_j) B_j = 0$$

implica em $B_i = 0$, para todo i . Segue da equação anterior que

$$\sum_{\mu, \nu=1}^l \sum_{i,j=1}^n B_i^\mu B_j^\nu A_k^{\mu\nu} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) = 0, \quad k \in J_F^l,$$

onde $J_F^l = \{k : A_k \neq 0\}$. Devido ao Lema 2.2.3, podemos concluir que

$$\sum_{i=1}^n B_i^\mu P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \tag{2.1}$$

para $\mu = 1, 2, \dots, l$, $x \in \mathbb{M}^d$ e $k \in \{k : A_k > 0\}$. Sabemos que, se a matriz A_k é positiva definida, então todos os elementos da diagonal principal $A_k^{\mu\mu}$ são maiores que zero. Defina o núcleo $f : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow \mathbb{R}$ pela fórmula

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{d, \beta} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|xy|/2)),$$

onde $a_k^{d,\beta} = A_k^{11}$, se A_k é positiva definida e $a_k^{d,\beta} = 0$, caso contrário. A função f está bem definida e $J_f^1 = \{k : A_k > 0\}$. Levando-se em conta a hipótese em cada um dos itens (i), (ii) e (iii), bem como o Teorema 1.2.3, temos que f é um núcleo estritamente positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$. Como a igualdade (2.1) vale para todo $k \in J_f^1$, concluímos via o Lema 2.2.1, que $B_i^1 = B_i^2 = \dots = B_i^l = 0$, $i = 1, \dots, n$, o que finaliza a demonstração. $\square$

Abaixo escrevemos $A \geq 0$ para indicar que uma matriz (simétrica) A de $M_l(\mathbb{R})$ é definida não negativa e $A \not\geq 0$ para indicar que $A \geq 0$, mas A não é positiva definida. Se $A \in M_l(\mathbb{R})$ e I é um subconjunto próprio ordenado de $\{1, 2, \dots, l\}$, escrevemos $A(I)$ para denotar a submatriz principal de A , definida pelas linhas e colunas indexadas pelos elementos do complementar do conjunto I .

Teorema 2.2.5. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_l(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido e considere a representação de F conforme o Teorema 2.1.3. Seja I um subconjunto próprio de $\{1, 2, \dots, l\}$. Para que F seja estritamente positivo definido é suficiente que:*

- (i) $\mathbb{M}^d = S^1$: os conjuntos $\{k : A_{|k|}(I) > 0\}$ e $\{k : A_{|k|} \not\geq 0; A_{|k|}^{\mu\mu} > 0; A_{|k|}^{\mu\nu} = A_{|k|}^{\nu\nu} = 0, \mu \neq \nu\}$, $\mu \notin I$, intersectem toda progressão aritmética em $\mathbb{Z}$.
- (ii) $\mathbb{M}^d = S^d$, $d \geq 2$: os conjuntos $\{k : A_k(I) > 0\}$ e $\{k : A_k \not\geq 0; A_k^{\mu\mu} > 0; A_k^{\mu\nu} = A_k^{\nu\nu} = 0, \mu \neq \nu\}$, $\mu \notin I$, contenham infinitos pares e infinitos ímpares.
- (iii) Demais casos: os conjuntos $\{k : A_k(I) > 0\}$ e $\{k : A_k \not\geq 0; A_k^{\mu\mu} > 0; A_k^{\mu\nu} = A_k^{\nu\nu} = 0, \mu \neq \nu\}$, $\mu \notin I$, contenham infinitos inteiros.

Demonstração. Vamos demonstrar primeiramente os itens (ii) e (iii). Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos de $\mathbb{M}^d$ e $B_1, B_2, \dots, B_n$ vetores em $\mathbb{R}^l$ tais que

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^t F(x_i, x_j) B_j = 0.$$

O Lema 2.2.3 justifica a equação chave abaixo

$$\sum_{\mu=1}^l \left[\sum_{i=1}^n B_i^\mu P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) \right] a^\mu = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad k \in J_F^l,$$

onde $\{a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^l\}$ é um conjunto de Gram para A_k . Se k é um índice pertencente ao conjunto $\{k : A_k(I) > 0\}$ e $\{k : A_k \not\geq 0; A_k^{\mu\mu} > 0; A_k^{\mu\nu} = A_k^{\nu\nu} = 0, \mu \neq \nu\}$, para algum $\mu \notin I$, temos que $a_k^\mu \neq 0$ e $a_k^\nu = 0$, sempre que $\nu \neq \mu$. Em particular, a equação chave pode ser reduzida a

$$\sum_{i=1}^n B_i^\mu P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad \mu \notin I \quad \text{e}$$

$k \in \{k : A_k(I) > 0\} \cap \{k : A_k \not\geq 0; A_k^{\mu\mu} > 0; A_k^{\mu\nu} = A_k^{\nu\nu} = 0, \mu \neq \nu\}$. Considerando as hipóteses em cada item, (ii) e (iii), e procedendo como na demonstração do teorema anterior, concluímos que

$$B_i^\mu = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \mu \notin I.$$

Logo, a equação chave pode ser reescrita na forma

$$\sum_{\mu \in I} \left[\sum_{i=1}^n B_i^\mu P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) \right] a^\mu = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad k \in J_F^l.$$

Se k é um índice tal que $A_k(I) > 0$ então o conjunto $\{a_k^\mu : \mu \in I\}$ é linearmente independente. Daí, concluímos que

$$\sum_{i=1}^n B_i^\mu P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad k \in S, \quad \mu \in I.$$

Usando novamente o raciocínio empregado na demonstração do Teorema 2.2.4, vem que

$$B_i^\mu = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \mu \in I.$$

Portanto, $B_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. A demonstração do item (i) segue de forma análoga ao que foi feito acima. $\square$

Para completar esta seção, enunciamos a seguir um caso degenerado do teorema anterior. Sua demonstração é feita de forma análoga ao que foi feito acima e por isso será omitida.

Teorema 2.2.6. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_l(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido e considere a representação de F conforme o Teorema 2.1.3. Para que F seja estritamente positivo definido é suficiente que:*

- (i) $\mathbb{M}^d = S^1$: os conjuntos $\{k : A_{|k|} \not\geq 0; A_{|k|}^{\mu\mu} > 0; A_{|k|}^{\mu\nu} = A_{|k|}^{\nu\nu} = 0, \mu \neq \nu\}$, $\mu = 1, 2, \dots, l$, intersectem toda progressão aritmética em $\mathbb{Z}$.
- (ii) $\mathbb{M}^d = S^d$, $d \geq 2$: os conjuntos $\{k : A_k \not\geq 0; A_k^{\mu\mu} > 0; A_k^{\mu\nu} = A_k^{\nu\nu} = 0, \mu \neq \nu\}$, $\mu = 1, 2, \dots, l$, contenham infinitos inteiros pares e infinitos inteiros ímpares.
- (iii) Demais casos: os conjuntos $\{k : A_k \not\geq 0; A_k^{\mu\mu} > 0; A_k^{\mu\nu} = A_k^{\nu\nu} = 0, \mu \neq \nu\}$, $\mu = 1, 2, \dots, l$, contenham infinitos inteiros.

2.3 Positividade definida estrita: condições necessárias

Segundo o Teorema 2.1.3, a parte isotrópica F_r^d de um núcleo contínuo e positivo definido F sobre $\mathbb{M}^d$ possui a representação:

$$F_r^d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t), \quad t \in [-1, 1]$$

onde β está de acordo com a classificação de Wang, cada $A_k = [A_k^{\mu\nu}]$ é uma matriz simétrica e definida não negativa de $M_l(\mathbb{R})$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\mu\nu} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1) < \infty, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, l.$$

Nesta seção, apresentamos uma condição necessária sobre o conjunto J_F^l , de modo que o núcleo seja estritamente positivo definido. Isto por si só, já permite uma comparação com os resultados da seção anterior e também nos dá uma idéia de quão longe estamos de uma condição que seja necessária e suficiente, para garantir a positividade definida estrita do núcleo.

Os resultados desta seção se baseiam fortemente em resultados similares obtidos em [34] para núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos usuais sobre esferas. A idéia é combinar a definição de positividade definida, estimativas para o posto de matrizes e mergulhos isométricos.

Começamos com uma proposição que vale para todos os espaços compactos 2-homogêneos.

Proposição 2.3.1. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_l(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido. Considere a representação de F conforme o Teorema 2.1.3. Para que F seja estritamente positivo definido é necessário que J_F^l seja infinito.*

Demonstração. Supondo que J_F^l seja finito, digamos de cardinalidade N , demonstraremos que se $n > 2l(-N + \sum_{k \in J_F^l} 2^{k+1})$, então é possível escolher n pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\mathbb{M}^d$ de modo que a matrix $[F(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$ seja não singular. Considere um mergulho isométrico $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{M}^d$ como garantido no Lema 1.1.2. Tome n pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\mathbb{M}^d$, de modo que os n pontos $\{\phi^{-1}(x_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ sejam igualmente espaçados em S^1 . Fazendo trocas convenientes de linhas e colunas, podemos reescrever a matriz $[F(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$, de modo que, para cada $\mu, \nu \in \{1, 2, \dots, l\}$, o bloco $\mu\nu$ da nova matriz é da forma

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\mu\nu} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) \right]_{i,j=1}^n.$$

Observe que o posto dessa nova matriz é igual ao posto de $[F(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$. Como $P_k^{((d-2)/2, \beta)}$ é um polinômio de grau k , podemos escrever

$$P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t) = \sum_{r=0}^k b_{k,r} t^r,$$

onde $b_{k,0}, b_{k,1}, \dots, b_{k,k}$ são números reais. Logo,

$$\begin{aligned} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) &= P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|\phi^{-1}(x_i) \phi^{-1}(x_j)|/2)) \\ &= P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\phi^{-1}(x_i) \cdot \phi^{-1}(x_j)) \\ &= \sum_{r=0}^k b_{k,r} (\phi^{-1}(x_i) \cdot \phi^{-1}(x_j))^r. \end{aligned}$$

Como $\{\phi^{-1}(x_1), \phi^{-1}(x_2), \dots, \phi^{-1}(x_n)\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, a matriz de Gram com entradas $\phi^{-1}(x_i) \cdot \phi^{-1}(x_j)$ tem posto não superior a 2. Logo, como o posto do produto de Schur de duas matrizes de mesma ordem é no máximo o produto dos postos das matrizes, cada matriz $((\phi^{-1}(x_i) \cdot \phi^{-1}(x_j))^r)$, $0 \leq r \leq k$, tem posto no máximo 2^r . Consequentemente, cada matriz

$$\left[A_k^{\mu\nu} P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) \right]_{i,j=1}^n$$

tem posto no máximo $\sum_{r=0}^k 2^r = 2^{k+1} - 1$. Portanto, para cada $\mu, \nu = 1, 2, \dots, l$, o posto do bloco $\mu\nu$, é no máximo

$$\sum_{k \in J_F^l} 2^{k+1} - 1 = -N + \sum_{k \in J_F^l} 2^{k+1}.$$

Por fim, segue que o posto de $[F(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$ é no máximo

$$\sum_{\mu, \nu=1}^l \left(-N + \sum_{k \in J_F^l} 2^{k+1} \right) = l^2 \left(-N + \sum_{k \in J_F^l} 2^{k+1} \right).$$

Agora note que se $n > 2l(-N + \sum_{k \in J_F^l} 2^{k+1})$, então, bloco $\mu\nu$ da matriz $F(x_i, x_j)$ tem posto no máximo

$$l^2 \left(-N + \sum_{k \in J_F^l} 2^{k+1} \right) < \frac{nl}{2}$$

e, conseqüentemente, $F(x_i, x_j)$ não tem posto nl . $\square$

No caso esférico, a proposição acima pode ser consideravelmente melhorada.

Proposição 2.3.2. *Seja $F : S^d \times S^d \rightarrow M_l(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido e considere a representação de F conforme o Teorema 2.1.3. Para que F seja estritamente positivo definido é necessário que J_F^l contenha infinitos pares e infinitos ímpares.*

Demonstração. A demonstração consiste em uma extensão da demonstração anterior. Suporemos que J_F^l contém tão somente um número finito de pares e exibiremos n , bem como uma quantidade finita de pontos, $x_1, x_2, \dots, x_n$ em S^d , de modo que $F(x_i, x_j)$ seja singular. Podemos escrever $J_F^l = J_0 \cup J_1$, onde cada elemento de J_1 é ímpar e $J_0 \cap J_1 = \emptyset$. O caso em que J_F^l contém tão somente um número finito de ímpares pode ser analisado de maneira similar. Esta decomposição permite escrevermos $F_r^d = F_{r,0}^d + F_{r,1}^d$, onde $F_{r,0}^d$ é o somando de F_r^d indexado por J_0 e $F_{r,1}^d$ é o somando de F_r^d indexado por J_1 . Escreva F_0 para denotar o núcleo sobre S^d com parte isotrópica $F_{r,0}^d$ e F_1 o núcleo sobre S^d com parte isotrópica $F_{r,1}^d$. Inicialmente olhemos para F_1 . Se $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ são pontos distintos sobre S^d , mas dois a dois antipodais, então a matriz $F_1(x_i, x_j)$ tem posto no máximo nl . De fato, para ratificar isso, defina $S = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq 2n \text{ e } x_i = -x_j\}$ e observe que tal conjunto tem cardinalidade n . Para cada $\mu = 1, 2, \dots, l$, denote por e_μ o μ -ésimo vetor na base canônica de $\mathbb{R}^l$. Dado um par (i, j) de S , defina v_μ^{ij} como sendo o vetor $(v_\mu^{ij}(1), v_\mu^{ij}(2), \dots, v_\mu^{ij}(2n))$, onde $v_\mu^{ij}(i) = e_\mu$, $v_\mu^{ij}(j) = e_\mu$ e os demais são vetores nulos de $\mathbb{R}^l$. Temos então um conjunto linearmente independente $\{v_\mu^{ij} : (i, j) \in S\}$ de nl vetores de $\mathbb{R}^{2nl}$. Por outro lado, como cada $P_{2k+1}^{((d-2)/2, \beta)}$, $k \in J_1$, é uma função ímpar, é fácil ver que cada um dos vetores acima pertence ao núcleo de $F_1(x_i, x_j)$. No entanto, se n é suficientemente grande, o teorema anterior implica que o posto de $F_0(x_i, x_j)$ é inferior a nl . Assim, o posto de $F(x_i, x_j)$ é menor do que $2nl$. $\square$

O leitor atento já deve ter observado que a dificuldade em analisar a positividade definida estrita no caso $l \geq 2$, reside essencialmente na seguinte diferença: para $l = 1$, a positividade definida estrita do núcleo F depende tão somente do conjunto J_F^1 e não dos valores assumidos pelos coeficientes $a_k^{d,\beta}$. No caso $l \geq 2$, não é possível demonstrar que a positividade definida estrita depende somente do conjunto J_F^l . Afinal, temos mais possibilidades para as matrizes coeficientes A_k : podem ser nulas, e se não nulas podem ser positivas definidas ou não. Não sendo positivas definidas, elas podem ter postos variados.

2.4 Positividade definida estrita no caso de espaços não esféricos

Nesta seção, considerando apenas o caso em que $\mathbb{M}^d$ não é uma esfera, apresentamos uma condição necessária e suficiente para que um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$ seja estritamente positivo definido.

O lema abaixo é uma consequência da Proposição 2.1.1 e fornece uma descrição alternativa para positividade definida estrita.

Lema 2.4.1. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_l(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido e considere a representação de F conforme o Teorema 2.1.3. Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são pontos distintos em $\mathbb{M}^d$ e $B_1, B_2, \dots, B_n$ são vetores em $\mathbb{R}^l$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\sum_{i,j=1}^n B_i^t F(x_i, x_j) B_j = 0$;
- (ii) $\sum_{i,j=1}^n B_i^t A_k B_j P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) = 0, k \in J_F^l$.

Demonstração. Se (i) vale, então

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j=1}^n B_i^t F(x_i, x_j) B_j = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\mu, \nu=1}^l \sum_{k=0}^{\infty} B_i^t A_k^{\mu\nu} B_j P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n B_i^t A_k B_j P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)). \end{aligned}$$

Como, para cada k , o núcleo

$$A_k P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|xy|/2)), \quad x, y \in \mathbb{M}^d$$

é positivo definido, segue que

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^t A_k B_j P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) = 0, \quad k \in J_F^l.$$

Logo, (ii) vale. A outra implicação é ainda mais óbvia.

□

O principal resultado dessa seção é uma generalização do Teorema 1.2.3, no caso em que $\mathbb{M}^d$ não é a esfera. A partir de agora, vamos usar os polinômios de Jacobi em sua forma normalizada, ou seja, usaremos

$$R_k^{((d-2)/2, \beta)} := \frac{P_k^{((d-2)/2, \beta)}}{P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Teorema 2.4.2. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_l(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido e considere a representação de F conforme o Teorema 2.1.3. Suponha que $\mathbb{M}^d$ não é uma esfera. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) F é estritamente positivo definido;
- (ii) Para todo vetor $B \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$, o conjunto $\{k \in J_F^l : B^t A_k B > 0\}$ é infinito.

Demonstração. Fixado $B \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$, o Lema 2.1.2 implica que a fórmula $F_B := B^t F B$ define um núcleo usual que é contínuo, isotrópico e positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$. É claro que se F é estritamente positivo definido, então o mesmo ocorre com F_B . Neste caso, devido ao Teorema 1.2.3, o conjunto $J_{F_B}^1$ é infinito. Agora, observe que

$$\begin{aligned} F_B(x, y) &= B^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|xy|/2)) \right) B \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} B^t A_k B P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|xy|/2)), \quad x, y \in \mathbb{M}^d. \end{aligned}$$

Segue que a representação em série acima é a representação em série para F_B , como descrito no Teorema 1.2.1. Em particular, temos que $J_{F_B}^1 = \{k \in J_F^l : B^t A_k B > 0\}$. Logo, (i) implica (ii). Para demonstrarmos a outra implicação, suponhamos que (ii) vale e que F não é estritamente positivo definido, e produziremos uma contradição. Existem pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\mathbb{M}^d$ e vetores $B_1, B_2, \dots, B_n$ em $\mathbb{R}^l$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^t F(x_i, x_j) B_j = 0.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $B_1 \neq 0$. Segue, então, do Lema 2.4.1 que

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^t A_k B_j P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) = 0, \quad k \in J_F^l. \quad (2.2)$$

Como $B_1 \neq 0$, o conjunto $K_1 := \{k \in J_F^l : B_1^t A_k B_1 > 0\}$ é infinito por hipótese. Então existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que o conjunto

$$K_2 = \{k \in K_1 : B_{i_0}^t A_k B_{i_0} \geq B_j^t A_k B_j, j = 1, 2, \dots, n\}$$

é infinito. De fato, se para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto $S_i = \{k \in K_1 : B_i^t A_k B_i \geq B_j^t A_k B_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ fosse finito, teríamos $K_1 = \bigcup_{i=1}^n S_i$, ou seja, K_1 seria finito, o que é um absurdo.

Observe que $B_{i_0}^t A_k B_{i_0} \geq B_1^t A_k B_1 > 0$, para todo $k \in K_2$. Portanto, dividindo a expressão (2.2) por $B_{i_0}^t A_k B_{i_0}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i,j=1}^n \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} \frac{P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2))}{P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)} = \\
 &= 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} + \sum_{\substack{i \neq j \\ |x_i x_j| \neq 2\pi}}^n \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} R_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) \\
 &\quad + (-1)^k \frac{P_k^{(\beta, (d-2)/2)}(1)}{P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)} \sum_{\substack{i \neq j \\ |x_i x_j| = 2\pi}}^n \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}}, \quad k \in K_2.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

É fácil ver que

$$0 < \frac{B_j^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k \in K_2.$$

No caso $i \neq j$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|B_i^t A_k B_j| \leq \sqrt{B_i^t A_k B_i} \sqrt{B_j^t A_k B_j} \leq \sqrt{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} \sqrt{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} = |B_{i_0}^t A_k B_{i_0}|$$

ou seja,

$$\left| \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} \right| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k \in K_2.$$

Usando o fato de K_2 ser infinito e o Lema 1.2.2-(ii),(iii), podemos escolher $k \in K_2$ suficientemente grande de forma que

$$\left| \sum_{\substack{i \neq j \\ |x_i x_j| \neq 2\pi}}^n \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} R_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) \right| < \frac{1}{4}$$

e

$$\left| (-1)^k \frac{P_k^{(\beta, (d-2)/2)}(1)}{P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)} \sum_{\substack{i \neq j \\ |x_i x_j| = 2\pi}}^n \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} \right| < \frac{1}{4}.$$

Assim, para esse k , obtemos da equação (2.3) que

$$0 > 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}} \geq \frac{1}{2},$$

uma contradição. □

No caso $l = 1$, a caracterização para positividade definida estrita apresentada no Teorema acima reduz-se àquela mencionada no Teorema 1.2.3. Uma questão pode ser levantada: por que

a demonstração acima não funciona quando $\mathbb{M}^d$ é uma esfera? A resposta reside no simples fato de que no caso esférico, $P_k^{(\beta, (d-2)/2)}(1) = P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)$, $k = 0, 1, \dots$, e a última soma da equação chave na demonstração, isto é,

$$(-1)^k \frac{P_k^{(\beta, (d-2)/2)}(1)}{P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)} \sum_{\substack{i \neq j \\ |x_i x_j| = 2\pi}} \frac{B_i^t A_k B_j}{B_{i_0}^t A_k B_{i_0}}$$

não pode mais ser controlada quando $k \rightarrow \infty$.

Recentemente, o caso esférico foi devidamente resolvido em [23].

Como uma aplicação óbvia do Teorema, é fácil ver que os núcleos positivos definidos descritos na Proposição 2.1.1 nunca serão estritamente positivos definidos. A construção de exemplos concretos de classes de funções que possuem a representação oriunda do teorema anterior não foi possível neste momento, nem mesmo no caso em que $l = 1$.

Vale observar que o Teorema 2.1.3 e o Teorema acima podem ser adaptados para a esfera de Hilbert real S^∞ . Optamos por não colocar esses resultados, pois eles destoam do assunto geral.

2.5 Positividade definida estrita no caso $l = 2$

Nesta seção, fornecemos uma caracterização alternativa para núcleos contínuos, isotrópicos e estritamente positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$, ainda no caso em que tal espaço não é uma esfera, e com a restrição $l = 2$. Já que os elementos da diagonal principal, na representação matricial de um núcleo positivo definido, são núcleos positivos definidos usuais, a idéia básica por trás desta seção está numa tentativa de classificar os núcleos estritamente positivos definidos através de alguma condição envolvendo estes elementos da diagonal.

A seguinte classe de núcleos surgiu naturalmente durante nossa análise.

Definição 2.5.1. ($l = 2$) Um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido F sobre $\mathbb{M}^d$ é dito ser *Schoenberg-singular* se a sua parte isotrópica possui uma representação na forma

$$F_r^2(t) = \left(\sum_{k \in K_1} A_k + A \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) P_k^{((d-2)/2, \beta)}(t), \quad t \in [-1, 1]$$

onde K_1 é um conjunto finito, A é uma matriz (simétrica) definida não negativa de $M_2(\mathbb{R})$, $A \not\geq 0$, cada a_k é um número real não negativo e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1) < \infty$.

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos de $\mathbb{M}^d$. Como a matriz A na representação de um núcleo Schoenberg-singular é definida não negativa, mas não é positiva definida, ela não tem posto máximo, ou seja, suas linhas são linearmente dependentes. Logo, é fácil ver que a matriz em blocos, de ordem $2n$,

$$\left[A \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_j|/2)) \right]_{i,j=1}^n$$

tem posto não superior a n . Como a primeira soma de f é finita, segue da demonstração do Lema 2.3.1 que, para n suficientemente grande, a matriz de ordem $2n$,

$$\left[\sum_{k \in K_1} A_k P_k^{(d-2)/2, \beta}(\cos(|x_i x_j|/2)) \right]_{i,j=1}^n$$

também tem posto menor que n . Assim, concluímos que a matriz

$$[F_r^2(\cos(|x_i x_j|/2))]_{i,j=1}^n$$

não tem posto máximo, ou seja, não é positiva definida. Portanto, um núcleo positivo definido Schoenberg-singular não é estritamente positivo definido.

O Teorema a seguir descreve o passo inicial e técnico na direção da caracterização que pretendemos apresentar.

Teorema 2.5.2. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido. Considere a sua representação matricial $F = [f_{\mu\nu}]_{\mu,\nu=1}^l$ e também a representação fornecida pelo Teorema 2.1.3. Suponha que $\mathbb{M}^d$ não é uma esfera e que F não é Schoenberg-singular. Para que F seja estritamente positivo definido, é suficiente que, ambas as condições $A_k \not\equiv 0$ e $A_k^{11}A_k^{12}A_k^{21}A_k^{22} > 0$ valham simultaneamente para infinitos inteiros k em J_F^2 .*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos em $\mathbb{M}^d$ e $B_1, B_2, \dots, B_n$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Tendo em vista o Lema 2.2.3, vamos demonstrar que se $A_k \not\equiv 0$ e $A_k^{11}A_k^{12}A_k^{21}A_k^{22} > 0$ valem simultaneamente para infinitos inteiros k em J_F^2 , então a única solução da equação chave

$$\sum_{\mu=1}^2 \left[\sum_{i=1}^n B_i^\mu P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) \right] a_k^\mu = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\equiv 0\},$$

onde $\{a_k^1, a_k^2\}$ é um conjunto de Gram para A_k , é a trivial, ou seja, $B_1 = B_2 = \dots = B_n = 0$. Se $k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\equiv 0\}$, então o conjunto de Gram para A_k é linearmente dependente. Logo, para cada k neste conjunto, existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que $a_k^1 = \lambda_k a_k^2$. Mas se $A_k^{11}A_k^{12}A_k^{21}A_k^{22} > 0$, temos que $\lambda_k \neq 0$ e $a_k^2 \neq 0$. Substituindo o valor de a_k^1 na equação chave e dividindo a equação por $P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)$ obtemos

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_k B_i^1 + B_i^2) R_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\equiv 0\}.$$

Como cada A_k é definida não negativa, sabemos que $2|A_k^{\mu\nu}| \leq A_k^{11} + A_k^{22}$, $\mu, \nu = 1, 2$, e daí $|\lambda_k| \leq 1$ ou $|\lambda_k| \geq 1$. Vamos considerar três possibilidades para a sequência (λ_k) . Caso 1: Se a sequência (λ_k) é limitada, fixemos $\gamma \in \{1, 2, \dots, n\}$ e introduzimos $x = x_\gamma$ na equação chave. Obtemos, então,

$$\lambda_k B_\gamma^1 + B_\gamma^2 + \sum_{i \neq \gamma} (\lambda_k B_i^1 + B_i^2) R_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_\gamma|/2)) = 0, \quad k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\equiv 0\},$$

quando $\cos(|x_i x_\gamma|/2) \neq -1, i \neq \gamma$ e, caso contrário,

$$\begin{aligned} \lambda_k B_\gamma^1 + B_\gamma^2 + (-1)^k \frac{P_k^{(\beta, (d-2)/2)}(1)}{P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)} \sum_{x_i \in V_{x_\gamma}} (\lambda_k B_i^1 + B_i^2) \\ + \sum_{x_i \notin V_{x_\gamma} \cup \{x_\gamma\}} (\lambda_k B_i^1 + B_i^2) R_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_\gamma|/2)) = 0, \end{aligned}$$

para $k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\geq 0\}$. Neste caso, fazendo $k \rightarrow \infty$ concluímos, via o Lema 1.2.2, que a sequência $(\lambda_k B_\gamma^1)$ converge para $-B_\gamma^2$. Em particular, se $B_1^\gamma = 0$, temos $B_2^\gamma = 0$. Como γ é arbitrário temos duas possibilidades: $B_i^1 = B_i^2 = 0$, para todo i , ou $B_i^1 \neq 0$, para algum i e, neste caso, a sequência (λ_k) converge. Observe que se a segunda possibilidade ocorrer temos

$$LB_i^1 + B_i^2 = 0, \quad i \in \{\gamma : B_\gamma^1 \neq 0\},$$

onde L é o limite da sequência (λ_k) . Daí, $LB_i^1 + B_i^2 = 0$, para todo i , e podemos escrever

$$\sum_{i=1}^n (LB_i^1 + B_i^2) P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\geq 0\}.$$

Fazendo a diferença entre a equação acima e a equação chave obtemos:

$$(L - \lambda_k) \sum_{i=1}^n B_i^1 P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\geq 0\}.$$

Como F não é Schoenberg-singular, a sequência (λ_k) não é eventualmente constante. Logo, considerando uma subsequência se necessário, podemos assumir que $\lambda_k \neq L$ para todo k . Consequentemente,

$$\sum_{i=1}^n B_i^1 P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\geq 0\}.$$

Dado $\gamma \in \{1, 2, \dots, n\}$ e fazendo $x = x_\gamma$ na equação acima obtemos

$$B_\gamma^1 + \sum_{i \neq \gamma} B_i^1 R_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_\gamma|/2)) = 0, \quad k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\geq 0\},$$

quando $\cos(|x_i x_\gamma|/2) \neq -1, i \neq \gamma$ e, caso contrário,

$$B_\gamma^1 + (-1)^k \frac{P_k^{(\beta, (d-2)/2)}(1)}{P_k^{((d-2)/2, \beta)}(1)} \sum_{x_i \in V_{x_\gamma}} B_i^1 + \sum_{x_i \notin V_{x_\gamma} \cup \{x_\gamma\}} B_i^1 R_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x_\gamma|/2)) = 0,$$

para $k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\geq 0\}$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ em ambos os casos obtemos, via Lema 1.2.2, que $B_\gamma^1 = 0$, ou seja, $B_i^1 = 0$ para todo i , uma contradição.

Caso 2: Se a sequência $(1/\lambda_k)$ é limitada, como $a_k^1 = \lambda_k a_k^2$ e $a_k^1 \neq 0$, temos $a_k^2 = \lambda_k^{-1} a_k^1$. Reescrevendo a equação chave obtemos:

$$\sum_{i=1}^n (B_i^1 + \lambda_k^{-1} B_i^2) P_k^{((d-2)/2, \beta)}(\cos(|x_i x|/2)) = 0, \quad x \in \mathbb{M}^d, \quad k \in J_F^2 \cap \{k : A_k \not\geq 0\}.$$

Basta agora repetir o processo acima para provar que $B_1 = B_2 = 0$.

Caso 3: Se (λ_k) é uma união disjunta de duas sequências $(\lambda_{k_r}) \cup (\lambda_{k_s})$, onde (λ_{k_r}) e $(\lambda_{k_s}^{-1})$ são limitadas, usando os mesmos argumentos deduzimos que, para cada i , $(B_i^1 \lambda_{k_r})$ converge para $-B_i^2$ e (B_i^2 / λ_{k_s}) converge para $-B_i^1$. Portanto $B_i^1 = 0$ se, e somente se, $B_i^2 = 0$, para cada i . Para completar os argumentos, vamos demonstrar que não pode ocorrer $B_i^1 \neq 0$, para algum i . De fato, se este fosse o caso, teríamos

$$L_1 B_i^1 + B_i^2 = B_i^1 + L_2 B_i^2 = 0, \quad i \in \{\gamma : B_\gamma^1 \neq 0\},$$

onde L_1 é o limite de (λ_{k_r}) e L_2 é o limite de $(\lambda_{k_s}^{-1})$. Dessa última igualdade teríamos que $L_2 L_1 B_i^1 + L_2 B_i^2 = 0$, e, por conseguinte, $(L_2 L_1 - 1) B_i^1 = 0$, $i \in \{\gamma : B_\gamma^1 \neq 0\}$. Mas, se $L_1 L_2 \neq 1$, então $B_i^1 = B_i^2 = 0$ para todo $i \in \{\gamma : B_\gamma^1 \neq 0\}$, uma contradição. Se $L_1 L_2 = 1$, toda a sequência (λ_k) é limitada e assim retornamos ao primeiro caso considerado. Em particular, $B_1 = B_2 = 0$, novamente uma contradição. $\square$

O principal resultado dessa seção é o teorema seguinte.

Teorema 2.5.3. *Seja $F : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ um núcleo contínuo, isotrópico e positivo definido. Considere ambas, a sua representação matricial $F = [f_{\mu\nu}]_{\mu, \nu=1}^l$ e a representação fornecida pelo Teorema 2.1.3. Suponha que $\mathbb{M}^d$ não é uma esfera e que F não é Schoenberg-singular. Para que F seja estritamente positivo definido, é necessário e suficiente, que os núcleos usuais f_{11} e f_{22} sejam estritamente positivos definidos.*

Demonstração. A parte necessária é consequência do Lema 2.1.2–(iii). No que segue, suponha que f_{11} e f_{22} são estritamente positivos definidos. Se $A_k > 0$ para infinitos inteiros k , o Teorema 2.2.4 implica que F é estritamente positivo definido. Então, podemos assumir que $A_k > 0$ apenas para uma quantidade finita de inteiros k . Para prosseguir, vamos considerar a função definida por

$$F_1(x, y) = F(x, y) - \sum_{k: A_k > 0} A_k P_k^{(d-2)/2, \beta}(\cos(|xy|/2)), \quad (x, y) \in \mathbb{M}^d$$

e também os conjuntos infinitos

$$J_1 = \{k \in J_{F_1}^2 : A_k \not\geq 0; A_k^{11} > 0\} \quad \text{and} \quad J_2 = \{k \in J_{F_1}^2 : A_k \not\geq 0; A_k^{22} > 0\}.$$

Temos duas possibilidades a analisar:

(i) $J_1 \cap J_2$ é finito: neste caso, $J_1 \setminus J_2$ e $J_2 \setminus J_1$ são infinitos e disjuntos. Em particular, os conjuntos

$$\{k \in J_{F_1}^2 : A_k \not\geq 0; A_k^{\mu\mu} > 0; A_k^{\mu\nu} = A_k^{\nu\nu} = 0, \mu \neq \nu\}, \quad \mu = 1, 2,$$

são infinitos e o Teorema 2.2.6 implica que F_1 é estritamente positivo definido.

(ii) $J_1 \cap J_2$ é infinito: aqui precisamos considerar alguns subcasos.

(a) $J_1 \setminus J_2$ é finito e $J_2 \setminus J_1$ é infinito: tome $I = \{1\}$ e observe que os conjuntos $\{k : A_k(I) > 0\}$ e $\{k \in J_{F_1}^2 : A_k \not\geq 0; A_k^{22} > 0; A_k^{12} = A_k^{11} = 0\}$ são infinitos. Aplicando o Teorema 2.2.5 obtemos

que F_1 é estritamente positivo definido.

(b) $J_1 \setminus J_2$ é infinito mas $J_2 \setminus J_1$ é finito: o processo é análogo ao subcaso anterior e, da mesma forma, F_1 é estritamente positivo definido.

(c) $J_1 \setminus J_2$ e $J_2 \setminus J_1$ são finitos: aqui temos que $A_k \not\geq 0$ e $A_k^{11}A_k^{12}A_k^{21}A_k^{22} > 0$ para infinitos inteiros k em $J_{F_1}^2$. Como o conjunto $\{k : A_k > 0\}$ é finito e F_1 não é Schoenberg-singular, o Teorema 2.5.2 implica que F_1 é estritamente positivo definido.

Para finalizar, se F_1 é estritamente positivo definido, o mesmo acontece com o núcleo F . Portanto a demonstração está completa. $\square$

Não conseguimos provar uma versão do teorema acima no caso $l \geq 3$. Uma tentativa de adaptar sua demonstração, a fim de incluir o caso em que os espaços compactos 2-homogêneos são as esferas, também não funcionou. Além de um problema técnico, semelhante ao mencionado depois do Teorema 2.4.2, uma adaptação da demonstração acima para o caso esférico produz vários subcasos, alguns deles difíceis de serem tratados.

PRODUTOS DE NÚCLEOS POSITIVOS DEFINIDOS USUAIS SOBRE VARIEDADES

Neste capítulo, consideramos tão somente núcleos usuais sobre $\mathbb{M}^d$. Dados dois núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$, o produto deles tem as mesmas propriedades. Neste capítulo obtemos condições necessárias e suficientes sobre os núcleos de modo que o seu produto seja estritamente positivo definido. Posteriormente, resolvemos o mesmo problema para núcleos positivos definidos sobre $G \times S^d$, onde G é um grupo localmente compacto, S^d é a esfera unitária em $\mathbb{R}^{d+1}$ e ambos os núcleos são contínuos e isotrópicos com respeito à componente de S^d .

Sejam F e G dois núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$. A desigualdade de Oppenheim ([26, p.480]) revela que se um deles é não nulo e o outro é estritamente positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$, então o produto FG é estritamente positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$. Por outro lado, o produto de dois núcleos que são positivos definidos mas não estritamente positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$, pode ser estritamente positivo definido. De fato, se $\mathbb{M}^d = S^d$, $d \geq 2$, tome F com parte isotrópica definida pelos coeficientes

$$a_0^{d,\beta} = a_1^{d,\beta} = 1, \quad a_k^{d,\beta} = 0, \quad k \neq 0, 1,$$

e G com parte isotrópica definida pelos coeficientes

$$a_{2k+1}^{d,\beta} = 3^{-2k-1}, \quad a_{2k}^{d,\beta} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Então, a parte isotrópica de FG se encaixa no contexto do Teorema 1.2.3-(ii), ou seja, FG é estritamente positivo definido. Este exemplo justifica plenamente que o problema que consideramos neste capítulo é relevante e não trivial.

A análise do problema descrito acima não pode ser feita de maneira universal dentro da categoria dos espaços compactos 2-homogêneos. Devemos respeitar o desmembramento imposto pelo Teorema 1.2.3.

3.1 O caso do círculo unitário

Os polinômios de Jacobi $P_k^{(-1/2, -1/2)}$ são múltiplos positivos dos polinômios de Tchebyshev de primeira espécie T_k ([39]). Sem perda de generalidade, podemos assumir que os polinômios de Tchebyshev são normalizados por $T_k(1) = 1$, $k = 0, 1, \dots$, e escrever

$$T_k(t) = \cos(k \arccos t), \quad t \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots$$

Da identidade trigonométrica

$$\cos k\theta \cos l\theta = \frac{1}{2} \cos(k+l)\theta + \frac{1}{2} \cos(k-l)\theta, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+,$$

vem que

$$\begin{aligned} T_k(t)T_l(t) &= \cos(k \arccos t) \cos(l \arccos t) \\ &= \frac{1}{2} \cos((k+l) \arccos t) + \frac{1}{2} \cos((k-l) \arccos t) \\ &= \frac{1}{2} [T_{k+l}(t) + T_{|k-l|}(t)], \quad t \in [-1, 1], \quad k, l \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

No que segue, suponha que F e G sejam núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre S^1 . Logo, suas partes isotrópicas possuem uma representação em série como a fornecida pelo Teorema 1.2.1. Podemos reescrevê-las trocando $P_k^{(-1/2, -1/2)}$ por T_k . Em particular, podemos escrever ($t \in [-1, 1]$)

$$\begin{aligned} F_r^1(t)G_r^1(t) &= \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k^{1,-1/2}(F_r^1) a_l^{1,-1/2}(G_r^1) T_k(t) T_l(t) \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k^{1,-1/2}(F_r^1) a_l^{1,-1/2}(G_r^1) \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} \cos[(k+l) \arccos t] + \frac{1}{2} \cos[|k-l| \arccos t] \right\}. \end{aligned}$$

A segunda igualdade é justificada pela convergência absoluta da primeira série dupla em $t = 1$. Fazendo um rearranjo dos termos obtemos

$$\begin{aligned} F_r^1(t)G_r^1(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=\mu} a_k^{1,-1/2}(F_r^1) a_l^{1,-1/2}(G_r^1) \right) T_{k+l}(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{|k-l|=\nu} a_k^{1,-1/2}(F_r^1) a_l^{1,-1/2}(G_r^1) \right) T_{|k-l|}(t), \quad t \in [-1, 1], \end{aligned}$$

ou seja,

$$F_r^1(t)G_r^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{1,-1/2}(F_r^1 G_r^1) T_m(t), \quad t \in [-1, 1],$$

onde

$$a_0^{1,-1/2}(F_r^1 G_r^1) = \frac{1}{2} a_0^{1,-1/2}(F_r^1) a_0^{1,-1/2}(G_r^1) + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu}^{1,-1/2}(F_r^1) a_{\mu}^{1,-1/2}(G_r^1),$$

$$a_1^{1,-1/2}(F_r^1 G_r^1) = \frac{1}{2} \left[a_1^{1,-1/2}(F_r^1) a_0^{1,-1/2}(G_r^d) + a_0^{1,-1/2}(F_r^d) a_1^{1,-1/2}(G_r^1) \right] \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu}^{1,-1/2}(F_r^1) a_{\mu+1}^{1,-1/2}(G_r^1) + a_{\mu+1}^{1,-1/2}(F_r^1) a_{\mu}^{1,-1/2}(G_r^1),$$

e

$$a_m^{1,-1/2}(F_r^1 G_r^1) = \frac{1}{2} \sum_{v=0}^m a_v^{1,-1/2}(F_r^1) a_{m-v}^{1,-1/2}(G_r^1) \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu}^{1,-1/2}(F_r^1) a_{\mu+m}^{1,-1/2}(G_r^1) + a_{\mu+m}^{1,-1/2}(F_r^1) a_{\mu}^{1,-1/2}(G_r^1), \quad m \geq 2.$$

Agora, é fácil ver que para um inteiro m fixado, $a_{|m|}^{1,-1/2}(F_r^1 G_r^1) > 0$ se, e somente se, $m \in \{\pm k \pm l : a_k^{1,-1/2}(F_r^1) a_l^{1,-1/2}(G_r^1) > 0\}$. Podemos agora demonstrar o teorema abaixo.

Teorema 3.1.1. *Sejam F e G núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre S^1 e considere as representações em séries de suas partes isotrópicas de acordo com o Teorema 1.2.1. Então, FG é estritamente positivo definido se, e somente se, o conjunto*

$$\{\pm k \pm l : a_k^{1,-1/2}(F_r^1) a_l^{1,-1/2}(G_r^1) > 0\}$$

intersecta cada progressão aritmética em $\mathbb{Z}$.

Demonstração. Pelo descrito antes do enunciado do teorema, temos que

$$F_r^1(t) G_r^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{1,-1/2}(F_r^1 G_r^1) T_m(t), \quad t \in [-1, 1],$$

e

$$\{m : a_{|m|}^{1,-1/2}(F_r^1 G_r^1) > 0\} = \{\pm k \pm l : a_k^{1,-1/2}(F_r^1) a_l^{1,-1/2}(G_r^1) > 0\}.$$

Logo o resultado segue diretamente do Teorema 1.2.3. □

3.2 O caso dos demais espaços homogêneos

Nesta seção, estendemos o Teorema 3.1.1 para os outros espaços compactos 2-homogêneos. Tratamos primeiramente do caso em que $\mathbb{M}^d = S^d$, $d \geq 2$. Obtemos uma caracterização semelhante àquela fornecida no caso do círculo unitário.

Teorema 3.2.1. *($d \geq 2$) Sejam F e G núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre S^d e considere as representações em séries de suas partes isotrópicas de acordo com o Teorema 1.2.1. Então, FG é estritamente positivo definido se, e somente se, o conjunto*

$$\{k + l : a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) > 0\}$$

contém infinitos pares e infinitos ímpares.

Demonstração. No caso em que $\alpha = \beta$, os polinômios de Jacobi são múltiplos positivos dos polinômios de Gegenbauer C_k^α . Em particular, temos

$$P_k^{(\alpha-1/2, \alpha-1/2)}(t) = \frac{(\alpha+1/2)_k}{(2\alpha)_k} C_k^\alpha(t), \quad t \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots$$

Logo, podemos pensar na expansão da parte isotrópica de núcleos positivos definidos sobre S^d , $d \geq 2$, em termos dos polinômios de Gegenbauer $C_k^{(d-1)/2}$. Considerando a representação em série para F_r^d e G_r^d de acordo com o Teorema 1.2.1, temos que

$$F_r^d(t)G_r^d(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) C_k^{(d-1)/2}(t) C_l^{(d-1)/2}(t), \quad t \in [-1, 1].$$

Como $C_k^{(d-1)/2}(t) \leq C_k^{(d-1)/2}(1)$, $k = 0, 1, \dots$ e $t \in [-1, 1]$, temos que

$$\begin{aligned} F_r^d(t)G_r^d(t) &= \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) C_k^{(d-1)/2}(t) C_l^{(d-1)/2}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) C_k^{(d-1)/2}(1) \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) C_l^{(d-1)/2}(1), \end{aligned}$$

e logo a série do produto das partes isotrópicas converge. Utilizando a Fórmula de Linearização 1.3 para polinômios de Gegenbauer, podemos reescrever a igualdade acima, obtendo:

$$F_r^d(t)G_r^d(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) \sum_{\mu=0}^{k \wedge l} b_{k,l}^{(d-1)/2} C_{k+l-2\mu}^{(d-1)/2}(t), \quad t \in [-1, 1].$$

Logo, podemos rearranjar os termos da séries acima obtendo

$$F_r^d(t)G_r^d(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m C_m^{(d-1)/2}(t), \quad t \in [-1, 1]$$

onde

$$A_m = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{\substack{|k-l|=m-2j \\ k+l \geq m}} a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) b_{k,l}^{(d-1)/2}(k \wedge l - j), \quad m = 0, 1, \dots$$

A expressão acima corresponde à representação em série de Fourier-Gegenbauer da parte isotrópica do núcleo FG , de acordo com o Teorema 1.2.1. Observe que, se

$$a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) > 0,$$

para algum par (k, l) , tomando $m = k + l$ e $j = k \wedge l$ concluímos que

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{\substack{|k-l|=m-2j \\ k+l \geq m}} a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) b_{k,l}^{(d-1)/2}(k \wedge l - j) \\ &\geq a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) b_{k,l}^{(d-1)/2}(0) > 0. \end{aligned}$$

Em particular, $A_{k+l} > 0$. Então,

$$\{k+l : a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d)a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) > 0\} \subset \{m : A_m > 0\}.$$

Assim, se o conjunto $\{k+l : a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d)a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) > 0\}$ contém infinitos pares e infinitos ímpares, o mesmo ocorre com o conjunto $\{m : A_m > 0\}$. Portanto, pelo Teorema 1.2.1, FG é estritamente positivo definido. Por outro lado, se $A_m > 0$, para algum m , então

$$a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d)a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d)b_{k,l}^{(d-1)/2}(k \wedge l - j) > 0,$$

para pelo menos um j em $\{0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor\}$. Consequentemente, existe um j como acima e um par (k, l) tal que

$$|k-l| + 2j = m \leq k+l \text{ e } a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d)a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d)b_{k,l}^{(d-1)/2}(k \wedge l - j) > 0.$$

Em particular, $a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d)a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) > 0$, para algum par (k, l) satisfazendo $k+l \geq m$, com $k+l$ e m tendo a mesma paridade. De fato, é fácil ver que $k+l$ e m tem a mesma paridade se, e somente se, $|k-l|$ e m também possuem a mesma paridade. Fica provado então que a condição no enunciado do teorema é necessária para a positividade definida estrita do produto. $\square$

Para fechar essa seção fornecemos um resultado para os espaços 2-homogêneos que não são as esferas.

Teorema 3.2.2. *Sejam F e G núcleos contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$ e considere as representações em séries de suas partes isotrópicas de acordo com o Teorema 1.2.1. Suponha que $\mathbb{M}^d$ não é uma esfera. Então, FG é estritamente positivo definido se, e somente se, o conjunto $\{k+l : a_k^{d,\beta}(F_r^d)a_l^{d,\beta}(G_r^d) > 0\}$ é infinito.*

Demonstração. Suponha que o conjunto $\{k+l : a_k(F_r^d)a_l(G_r^d) > 0\}$ é infinito. Considerando a representação em série para F_r^d e G_r^d de acordo com o Teorema 1.2.1, temos

$$F_r^d(t)G_r^d(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k^{d,\beta}(F_r^d)a_l^{d,\beta}(G_r^d)P_k^{((d-2)/2,\beta)}(t)P_l^{((d-2)/2,\beta)}(t), \quad t \in [-1, 1].$$

Como $|P_k^{((d-2)/2,\beta)}(t)| \leq P_k^{((d-2)/2,\beta)}(1)$, $k = 0, 1, \dots$ e $t \in [-1, 1]$, concluímos, como no Teorema anterior, que a série do produto das partes isotrópicas converge. Utilizando a Fórmula de Linearização para polinômios de Jacobi (1.2) temos

$$F_r^d(t)G_r^d(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k^{d,\beta}(F_r^d)a_l^{d,\beta}(G_r^d) \sum_{m=|k-l|}^{k+l} b_{k,l}^{(d-2)/2,\beta}(m)P_m^{((d-2)/2,\beta)}(t), \quad t \in [-1, 1].$$

Podemos reescrever

$$F_r^d(t)G_r^d(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m R_m^{((d-2)/2,\beta)}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

onde

$$A_m = \sum_{j=0}^m \sum_{\substack{|k-l|=m-j \\ k+l \geq m}} a_k^{d,\beta}(F_r^d) a_l^{d,\beta}(G_r^d) b_{k,l}^{(d-2)/2,\beta}(m), \quad m = 0, 1, \dots$$

É fácil ver que $|k-l| = k+l-2k \wedge l$ e $2k \wedge l \leq k+l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Para cada par (k, l) tal que $a_k^{d,\beta}(F_r^d) a_l^{d,\beta}(G_r^d) > 0$ temos, via o Lema 1.2.4 que, $a_k^{d,\beta}(F_r^d) a_l^{d,\beta}(G_r^d) b_{k,l}^{(d-2)/2,\beta}(k+l)$ é um somando positivo de A_{k+l} . Como $\{k+l : a_k^{d,\beta}(F_r^d) a_l^{d,\beta}(G_r^d) > 0\}$ é infinito, concluímos que $A_m > 0$ para infinitos inteiros m . Logo, o Teorema 1.2.3-(iii) garante que FG é estritamente positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$. Para demonstrar a outra implicação do teorema, suponha que o conjunto $\{k+l : a_k^{d,\beta}(F_r^d) a_l^{d,\beta}(G_r^d) > 0\}$ é finito. Seja $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{M}^d$ um mergulho isométrico, como garantido pelo Lema 1.1.2. Escolha $n \geq 2^{M+N+2} - 2^{M+1} - 2^{N+1} + 2$, e tome n pontos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\mathbb{M}^d$, de modo que os n pontos $\{\phi^{-1}(x_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ sejam igualmente espaçados em S^1 . Considere a matriz A , de ordem $n \times n$, com entrada $\mu\nu$

$$F_r^d(\cos(|\phi^{-1}(x_\mu) \phi^{-1}(x_\nu)|/2)) G_r^d(\cos(|\phi^{-1}(x_\mu) \phi^{-1}(x_\nu)|/2)).$$

Se $\{k+l : a_k^{d,\beta}(F_r^d) a_l^{d,\beta}(G_r^d) > 0\}$ é finito podemos reescrever a entrada $\mu\nu$ da matriz A da seguinte forma

$$\sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N a_k^{d,\beta}(F_r^d) a_l^{d,\beta}(G_r^d) P_k^{((d-2)/2,\beta)}(\phi^{-1}(x_\mu) \cdot \phi^{-1}(x_\nu)) P_l^{((d-2)/2,\beta)}(\phi^{-1}(x_\mu) \cdot \phi^{-1}(x_\nu)),$$

onde $\cdot$ é produto interno usual em $\mathbb{R}^2$ e M, N são inteiros não negativos fixados. Como $\{\phi^{-1}(x_1), \phi^{-1}(x_2), \dots, \phi^{-1}(x_n)\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, a matriz de Gram com entradas $(\phi^{-1}(x_\mu) \cdot \phi^{-1}(x_\nu))^k$ tem posto no máximo 2^k . Assim, pelo Teorema do Produto de Schur ([26, p. 479]), concluímos que o posto de A não é superior a

$$\sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N 2^k 2^l = (2^{M+1} - 1)(2^{N+1} - 1) < n.$$

Isso mostra que a matriz A não possui posto máximo e, consequentemente, o núcleo

$$(x, y) \in \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \rightarrow f(\cos(|xy|/2))g(\cos(|xy|/2))$$

não pode ser estritamente positivo definido. □

O Teorema anterior permite a seguinte reformulação.

Teorema 3.2.3. *Sejam F e G núcleos não nulos, contínuos, isotrópicos e positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$. Suponha que $\mathbb{M}^d$ não é uma esfera. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) FG é um núcleo estritamente positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$;
- (ii) F ou G é um núcleo estritamente positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$.

Demonstração. Se FG é um núcleo estritamente positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$, temos que o conjunto $\{k+l : a_k^{d,\beta}(F_r^d) a_l^{d,\beta}(G_r^d) > 0\}$ é infinito. Mas se $k+l$ é tal que $a_k^{d,\beta}(F_r^d) a_l^{d,\beta}(G_r^d) > 0$,

então $a_k^{d,(d-2)/2}(F_r^d) > 0$ e $a_l^{d,(d-2)/2}(G_r^d) > 0$. Isso implica que F e G são núcleos estritamente positivos definidos sobre $\mathbb{M}^d$. Reciprocamente, suponha sem perda de generalidade que F é estritamente positivo definido, ou seja, o conjunto $\{k : a_k^{d,\beta}(F_r^d) > 0\}$ é infinito. Como G é não nulo, existe um $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ tal que $a_l^{d,\beta}(G_r^d) \neq 0$. Assim, para esse l , o conjunto $\{k+l : a_k^{d,\beta}(F_r^d)a_l^{d,\beta}(G_r^d) > 0\}$ é infinito, ou seja, FG é um núcleo estritamente positivo definido sobre $\mathbb{M}^d$. $\square$

3.3 Núcleos sobre o produto de um grupo localmente compacto e uma esfera

Alguns dos resultados apresentados nesta tese podem ser estendidos em várias direções. Aqui, como extensão dos resultados deste Capítulo 3, apresentamos alguns resultados sobre produtos de núcleos positivos definidos sobre $G \times S^d$, onde G é um grupo localmente compacto. Este contexto apareceu na literatura em 2016, com a publicação do trabalho [4].

Se G é um grupo localmente compacto com operação $*$ e elemento neutro e , vamos considerar núcleos positivos definidos sobre $G \times S^d$ da seguinte forma

$$F((u, x), (v, y)) = f(u^{-1} * v, x \cdot y), \quad u, v \in G, \quad x, y \in S^d,$$

onde f é uma função contínua com domínio $G \times [-1, 1]$ a valores complexos. Em analogia com os outros capítulos, poderemos chamar a função f de parte isotrópica de F . Apenas para evitar qualquer confusão, reiteramos que a positividade de F corresponde ao fato de que dado $n \geq 1$, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ e $(u_1, x_1), (u_2, x_2), \dots, (u_n, x_n)$ pontos distintos sobre $G \times S^d$ tem-se

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n \overline{c_\mu} c_\nu f(u_\mu^{-1} * u_\nu, x_\mu \cdot x_\nu) \geq 0.$$

De acordo com [4], a positividade definida de um núcleo F , como acima, corresponde à seguinte representação em série para sua parte isotrópica f :

$$f(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^d(f; u) C_k^{(d-1)/2}(t), \quad (u, s) \in G \times [-1, 1],$$

onde $\{a_k^d(f; \cdot)\}$ é uma sequência de funções contínuas sobre G , as quais definem núcleos

$$(u, v) \in G^2 \rightarrow a_k^d(f; u^{-1} * v)$$

que são positivos definidos sobre G e $\sum_k a_k^d(f; e) C_k^{(d-1)/2}(1) < \infty$. As funções $a_k^d(f; \cdot)$, que aparecem acima, tem uma forma integral fechada dada por

$$a_k^d(f; u) = c(k, d) \int_{-1}^1 f(u, s) C_k^{(d-1)/2}(s) (1-s^2)^{(d-2)/2} ds, \quad u \in G,$$

na qual $c(k, d)$ é uma constante positiva, dependendo de k e d , cujo valor exato não tem importância nos argumentos adiante.

O próximo resultado descreve uma caracterização para positividade definida estrita no contexto acima. Ela segue de um resultado mais geral demonstrado em ([22]).

Teorema 3.3.1. ($d \geq 2$) *Seja f a parte isotrópica de um núcleo positivo definido sobre $G \times S^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *O núcleo $((u, x), (v, y)) \in (G \times S^d)^2 \rightarrow f(u^{-1} * v, x \cdot y)$ é estritamente positivo definido;*
- (ii) *Para cada inteiro positivo p ($\leq$ a cardinalidade de G), pontos distintos $u_1, u_2, \dots, u_p$ de G e cada vetor não nulo c de $\mathbb{C}^p$, a função*

$$t \in [-1, 1] \rightarrow \sum_{\mu, \nu=1}^p c_\mu \bar{c}_\nu f(u_\mu^{-1} * v_\nu, t),$$

é a parte isotrópica de um núcleo estritamente positivo definido sobre S^d .

Nossa contribuição para este contexto é o seguinte resultado.

Teorema 3.3.2. ($d \geq 2$) *Sejam f e g partes isotrópicas de núcleos positivos definidos sobre $G \times S^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *O produto fg é a parte isotrópica de um núcleo estritamente positivo definido sobre $G \times S^d$;*
- (ii) *O conjunto*

$$\left\{ k + l : c^t \left[a_k^d(f; u_\mu^{-1} * u_\nu) a_l^d(g; u_\mu^{-1} * u_\nu) \right]_{\mu, \nu=1}^p \bar{c} > 0 \right\} \quad (3.1)$$

contém infinitos inteiros pares e infinitos inteiros ímpares, sempre que $p \geq 1$, $u_1, u_2, \dots, u_p$ são pontos distintos de G e c é um vetor não nulo de $\mathbb{C}^p$.

Demonstração. Devido ao Teorema 3.3.1, a função fg é a parte isotrópica de um núcleo estritamente positivo definido sobre $G \times S^d$ se, e somente se, para todo $p \geq 1$, pontos distintos $u_1, u_2, \dots, u_p$ em G e cada vetor não nulo c de $\mathbb{C}^p$, a função $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(t) = \sum_{\mu, \nu=1}^p c_\mu \bar{c}_\nu f(u_\mu^{-1} * v_\nu, t) g(u_\mu^{-1} * v_\nu, t)$$

é a parte isotrópica de um núcleo estritamente positivo definido sobre S^d . Introduzindo a representação em série para f e g , podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$h(t) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \left[\sum_{\mu, \nu=1}^p c_\mu \bar{c}_\nu a_k^d(f; u_\mu^{-1} * v_\nu) a_l^d(g; u_\mu^{-1} * v_\nu) \right] C_k^{(d-1)/2}(t) C_l^{(d-1)/2}(t).$$

Em outras palavras,

$$h(t) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \left\{ c^t \left[a_k^d(f; u_\mu^{-1} * u_\nu) a_l^d(g; u_\mu^{-1} * u_\nu) \right]_{\mu, \nu=1}^p \bar{c} \right\} C_k^{(d-1)/2}(t) C_l^{(d-1)/2}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

onde c é um vetor com entradas $c_1, c_2, \dots, c_p$. Observe que a não negatividade dos coeficientes, na expansão acima, segue do fato das funções contínuas $a_k^d(f, \cdot)$ e $a_l^d(g, \cdot)$, $k, l = 0, 1, \dots$, definirem núcleos positivos definidos sobre G e do fato de um produto de Schur de duas matrizes definidas não negativas ser também uma matriz definida não negativa. Repetindo os argumentos utilizados na Seção 3.2, obtemos que h é a parte isotrópica de um núcleo estritamente positivo definido sobre S^d se, e somente se,

$$\left\{ k + l : c^t \left[a_k^d(f; u_\mu^{-1} * u_\nu) a_l^d(g; u_\mu^{-1} * u_\nu) \right]_{\mu, \nu=1}^p \bar{c} > 0 \right\}$$

contém infinitos pares e infinitos ímpares. □

A análise da positividade definida estrita de produtos de núcleos positivos definidos sobre o grupo localmente compacto $\mathbb{R}^d$ foi originalmente considerada em [14, 15]. Nessas referências, o leitor pode encontrar explicações sobre a praticabilidade e as vantagens computacionais, e também simplificações implícitas pelo uso de tais produtos na literatura geo-estatística. De qualquer forma, cabe ressaltar que uma caracterização para a positividade definida estrita de um produto de núcleos sobre $\mathbb{R}^d$ ainda é um problema em aberto.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Askey. *Orthogonal polynomials and special functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1975.
- [2] V. S. Barbosa; V. A. Menegatto, *Differentiable positive definite functions on two-point homogeneous spaces*. J. Math. Anal. Appl. 434 (2016), no. 1, 698-712.
- [3] V. S. Barbosa; V. A. Menegatto, *Strictly positive definite kernels on two-point compact homogeneous space*. Math. Ineq. Appl. 19 (2016), no. 2, 743-756.
- [4] C. Berg; E. Porcu, *From Schoenberg coefficients to Schoenberg functions*. Constr. Approx. 45 (2017), no. 2, 217-241.
- [5] C. Berg; J. P. R. Christensen; P. Ressel, *Harmonic analysis on semigroups. Theory of positive definite and related functions*. Graduate Texts in Mathematics, 100. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [6] R. N. Bonfim; V. A. Menegatto, *Strict positive definiteness of multivariate covariance functions on compact two-point homogeneous spaces*. J. Multivariate Anal. 152 (2016), 237-248.
- [7] R. N. Bonfim; J. C. Guella; V. A. Menegatto, *Strict positive definiteness of product covariance functions on manifolds*. Submetido, 2017.
- [8] B. Bordin, A. K. Kushpel, J. Levesley, S. A. Tozoni, *Estimates of n -widths of Sobolev's classes on compact globally symmetric spaces of rank one*. J. Funct. Anal. 202 (2003), no. 2, 307-326.
- [9] G. Brown; Feng Dai, *Approximation of smooth functions on compact two-point homogeneous spaces*. J. Funct. Anal. 220 (2005), no. 2, 401-423.
- [10] J. Buescu, A. C. Paixão, *Positive definite matrices and differentiable reproducing kernel inequalities*. J. Math. Anal. Appl. 320 (2006), no. 1, 279-292.
- [11] L. Carlitz, *The product of two ultraspherical polynomials*. Proc. Glasgow Math. Assoc. 5 (1961), 76-79.
- [12] D. Chen; V. Menegatto; X. Sun, *A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres*. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 9, 2733-2740.

- [13] W. Cheney; W. Light, *A course in approximation theory*. Reprint of the 2000 original. Graduate Studies in Mathematics, 101. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [14] S. De Iaco; D. E. Myers; D. Posa, *On strict positive definiteness of product and product-sum covariance models*. J. Statist. Plann. Inference 141 (2011), no. 3, 1132-1140.
- [15] S. De Iaco; D. E. Myers; D. Posa, *Strict positive definiteness of a product of covariance functions*. Comm. Statist. Theory Methods 40 (2011), no. 24, 4400-4408.
- [16] R. Gangolli, *Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters*. Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.) 3 (1967), 121-226.
- [17] G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials I*. Canad. J. Math. 22 (1970), 171-175.
- [18] G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials II*. Canad. J. Math. 22 (1970), 582-593.
- [19] M. G. Genton, W. Kleiber, *Cross-covariance functions for multivariate geostatistics*. Statist. Sci. 30 (2015), no. 2, 147-163.
- [20] E. Giné, *The addition formula for the eigenfunctions of the Laplacian*. Adv. Math. 18 (1975), no. 1, 102-107.
- [21] T. Gneiting, *Strictly and non-strictly positive definite functions on spheres*. Bernoulli 19 (2013), no. 4, 1327-1349.
- [22] J. C. Guella ; V. A. Menegatto, *From Schoenberg coefficients to Schoenberg functions: a unifying framework*. Submetido, 2016.
- [23] J. C. Guella; V. A. Menegatto; E. Porcu, *Strictly positive definite multivariate covariance functions on spheres*. Submetido, 2017.
- [24] E. J. Hannan, *Multiple time series*. John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1970.
- [25] S. Helgason, *The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds*. Acta Math. 113 (1965), 153-180.
- [26] R. Horn; C. R. Johnson, *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [27] E. A. Hylleraas, *Linearization of products of Jacobi polynomials*. Math. Scand. 10 (1962), 189-200.

- [28] A. Kushpel; S. A. Tozoni, *Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces*. Constr. Approx. 35 (2012), no. 2, 137-180.
- [29] C. Ma, *Isotropic covariance matrix functions on all spheres*. Math. Geosci. 47 (2015), no. 6, 699-717.
- [30] C. Ma, *Isotropic covariance matrix polynomials on spheres*. Stoch. Anal. Appl. 34 (2016), no. 4, 679-706.
- [31] C. Ma, *Stationary and isotropic vector random fields on spheres*. Math. Geosci. 44 (2012), no. 6, 765-778.
- [32] A. Malyarenko, *Invariant random fields on spaces with a group action*. With a foreword by Nikolai Leonenko. Probability and its Applications (New York). Springer, Heidelberg, 2013.
- [33] D. Marinucci, G. Peccati, *Random fields on the sphere. Representation, limit theorems and cosmological applications*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 389. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [34] V. A. Menegatto, *Strictly positive definite kernels on the Hilbert sphere*. Appl. Anal. 55 (1994), no. 1-2, 91-101.
- [35] V. A. Menegatto; C. P. Oliveira; A. P. Peron, *Strictly positive definite kernels on subsets of the complex plane*. Comput. Math. Appl. 51 (2006), no. 8, 1233-1250.
- [36] S. S. Platonov, *On some problems in the theory of the approximation of functions on compact homogeneous manifolds*. (Russian) Mat. Sb. 200 (2009), no. 6, 67-108; translation in Sb. Math. 200 (2009), no. 5-6, 845-885.
- [37] E. Porcu; A. Alegria; R. Furrer, *Modeling temporally evolving and spatially globally dependent data*, preprint, 2017.
- [38] I. J. Schoenberg, *Positive definite functions on spheres*. Duke Math. J. 9, (1942). 96-108.
- [39] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*. Fourth edition. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.
- [40] Hsien-Chung Wang, *Two-point homogeneous spaces*. Ann. Math. 55 (1952), no. 2, 177-191.
- [41] R. Wang; J. Du; C. Ma, *Covariance matrix functions of isotropic vector random fields*. Comm. Statist. Theory Methods 43 (2014), no. 10-12, 2081-2093.

- [42] H. Wendland, *Scattered data approximation*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 17. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [43] T. Xie, *Positive definite matrix-valued functions and matrix variogram modeling*. Thesis (Ph.D.), The University of Arizona, 1994.
- [44] A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions*. Vol. I. Basic results. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1987.