Sobre teoremas de equilíbrio de Nash

Thaís Fernanda Mendes Monis

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 23/06/2010

Assinatura: ______________________

Sobre teoremas de equilíbrio de Nash

Thaís Fernanda Mendes Monis

Orientador: Prof. Dr. Carlos Biasi

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências: Matemática.

USP - São Carlos
Agosto/2010

Dedico esta tese aos meus pais, Joana e Carlos, e aos meus irmãos, Thalita e Guilherme, com amor e admiração.

Agradecimentos

A todos os que de alguma forma me ajudaram a trilhar esse caminho, meu sincero agradecimento. Aos meus pais, Joana e Carlos, pelos ensinamentos, à minha irmã, Thalita, pelo apoio, e ao meu irmão, Guilherme, por alegrar nossos dias.

Ao meu orientador do doutorado, Professor Doutor Carlos Biasi, por seu modo ímpar de ser. Em especial, pela sua dedicação, amizade e cuidado comigo. Agradeço a generosa troca de ideias e todo o seu incentivo e otimismo.

À Professora Doutora Alice Kimie Miwa Libardi, da Unesp de Rio Claro, que me apresentou ao mundo da Topologia Algébrica. Agradeço pela competente orientação que me prestou na iniciação científica, em meus tempos de graduação, que muito contribuiu para a minha formação acadêmica. Agradeço ainda pela amizade e confiança.

Aos amigos que fiz no ICMC durante a pós-graduação, pelos dias alegres que me proporcionaram. Em particular, ao Marcio, por seu entusiasmo e pela amizade a mim dedicada, aos colegas Jean e Catiana, pela torcida, e à Thaís Jordão, minha amiga irmã, pela amizade e parceria.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho, aplicando métodos da Topologia Algébrica, nós obtivemos novas versões do teorema de equilíbrio de Nash. Nós definimos um conceito de equilíbrio local para jogos não cooperativos, o chamado equilíbrio local fraco, e demonstramos sua existência quando os espaços de estratégia são variedades diferenciáveis e as funções payoff são continuamente diferenciáveis. Nós demonstramos a ineficiência do equilíbrio local fraco no sentido de Pareto.

Abstract

In this work, applying methods of Algebraic Topology, we obtain new versions of the Nash equilibrium theorem. We define a concept of local equilibrium for non-cooperative games, the so-called weak local equilibrium, and we prove its existence when the spaces of strategies are differentiable manifolds and the payoff functions are continuously differentiable. We prove the inefficiency of weak local equilibrium in the Pareto sense.

Sumário

Introdução

Dados um conjunto X e uma função real $p : X \to \mathbb{R}$, uma pergunta pertinente a se fazer é se f possui ou não pontos de máximo ou de mínimo. Da topologia geral, sabemos que a resposta é afirmativa no caso em que X é um espaço topológico compacto e p é uma função contínua. Porém, dadas $n \geq 2$ funções, $p_1, \ldots, p_n : X \to \mathbb{R}$, dificilmente existirá $x \in X$ maximizando simultaneamente cada função p_i, $1 \leq i \leq n$. O interesse na questão de otimizar simultaneamente várias funções surge naturalmente na Teoria dos Jogos e em Economia.

Um jogo não cooperativo em n jogadores é caracterizado pelos seguintes elementos: existem n agentes ou jogadores, numerados de 1 a n. Para cada i entre 1 e n, o i-ésimo jogador possui um conjunto S_i de possíveis estratégias, no qual ele escolhe algum elemento $s_i \in S_i$, sendo que as escolhas de cada jogador são feitas simultaneamente. O resultado da competição para o jogador i é uma função $p_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ que depende das n escolhas $s_1, \ldots, s_n$, chamada sua função "payoff". O axioma de racionalidade que se coloca é que o objetivo de cada jogador é fazer uma escolha s_i de modo a maximizar sua função payoff $p_i(s_1, \ldots, s_n)$, entendendo que para cada $j \neq i$, o j-ésimo jogador está simultaneamente escolhendo s_j com o objetivo de maximizar a sua função payoff p_j. Em sua tese de doutorado, John Forbes Nash Jr. estabeleceu um conceito de solução para jogos não cooperativos, o chamado equilíbrio de Nash, que diz o seguinte: um ponto $(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ é um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$ se

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \geq p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n), \text{ para todo } s_i \in S_i, \ 1 \leq i \leq n.$$

A interpretação é que no equilíbrio nenhum jogador possui incentivo para mudar sua estratégia se os demais não o fizerem.

Nesse trabalho, nós aplicamos métodos da Topologia Algébrica para a obtenção de teoremas de equilíbrio de Nash, puramente do ponto de vista matemático. Nossa motivação pelo tema vem do fato de que as condições que garantem a existência do equilíbrio encontradas na literarura são, em geral, dadas pela Topologia Algébrica. Mais especificamente, o problema relaciona-se com problemas de existência de ponto fixo (por exemplo, [14], [19], [33], [37]). No artigo [32], Jonh Nash provou que se os espaços de estratégia $S_1, \ldots, S_n$ são subconjuntos compactos e convexos de algum espaço euclideano e se as funções payoff $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ são contínuas e tais que cada $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ é linear como uma função de s_i quando as demais coordenadas permanecem fixas, então $p_1, \ldots, p_n$ possuem ao menos um equilíbrio de Nash. A demonstração do resultado é uma aplicação do teorema de ponto fixo de Brouwer. Ainda, enfraquecendo a hipótese de linearidade de $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ por uma hipótese de quaseconcavidade, via o teorema de ponto fixo de Kakutani, Nash demostra a existência do equilíbrio para $p_1, \ldots, p_n$. No capítulo 3, baseados em resultados de pontos de coincidência estabelecidos no capítulo 2, nós demonstramos a existência do equilíbrio de Nash quando as funções payoff $p_1, \ldots, p_n$ são possivelmente não quasecôncavas, porém elas devem ser uma composição de uma função quasecôncava com uma função "bem comportada". Especificamente, nós consideramos a classe das funções $p_1, \ldots p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ tais que os espaços de estratégias $S_1, \ldots, S_n$ são espaços topológicos compactos e as funções payoff são da forma

$$p_i(s_1, \ldots, s_n) = q_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, g_i(s_i), s_{i+1}, \ldots, s_n),$$

onde $C_1, \ldots, C_n$ são subconjuntos compactos e convexos de algum espaço euclideano,

$$q_i : S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times C_i \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$$

é uma função contínua, quasecôncava com respeito a C_i, e $g_i : S_i \to C_i$ é contínua, $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, nós demonstramos que

Teorema 3.3.3. Se existe um subconjunto fechado A de S tal que o homomorfismo induzido $g_{*_d} : \mathrm{H}_d(S, A) \to \mathrm{H}_d(C, \partial C)$ é não nulo, então existe ao menos um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$, onde $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ e ∂C é o bordo de C.

Em [2], Carlos Alós-Ferrer e Ana B. Ania explicitaram um conceito de equilíbrio local quando os conjuntos de estratégia $S_1, \ldots, S_n$ são espaços métricos. O conceito é o seguinte: sejam $S_1, \ldots, S_n$ espaços métricos e $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais. Um ponto $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ em $S_1 \times \cdots \times S_n$ é um equilíbrio local para as funções $p_1, \ldots, p_n$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}), \text{ para todo } s_i \in B(\tilde{s}_i, \varepsilon), \ 1 \leq i \leq n,$$

onde $B(\tilde{s}_i, \varepsilon)$ é a bola aberta em S_i com centro em $\tilde{s}_i$ e raio ε. Assim, numa situação de competição, a interpretação é que no equilíbrio local nenhum jogador possui incentivo para alterar a sua estratégia a uma outra estratégia próxima se os demais jogadores permanecerem fixos em suas respectivas estratégias. Nesse sentido, diz-se que o equilíbrio local é resistente à pequenas mudanças unilaterais. No capítulo 4, nós definimos um novo conceito de equilíbrio local para funções $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ quando $S_1, \ldots, S_n$ são espaços métricos: o chamado equilíbrio local fraco. É o seguinte

Definição 4.1.1. Sejam $(S_1, d_1), \ldots, (S_n, d_n)$ espaços métricos e considere funções reais $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$. Dizemos que $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$ é um **equilíbrio local fraco (abrev., e.l.f.)** para $p_1, \ldots, p_n$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}) + \varepsilon \cdot d_i(s_i, \tilde{s}_i),$$

para todo $s_i \in B(\tilde{s}_i, \delta)$, $1 \leq i \leq n$.

Desse modo, o equilíbrio local e o equilíbrio local fraco possuem a mesma interpretação no estudo de competições. Em ambos os casos, não existe motivação para pequenas mudanças unilaterais de estratégia. Além disso, todo equilíbrio local fraco é candidato a equilíbrio local. Nas seções 4.2, 4.3 e 4.4 do capítulo 4, apresentamos situações nas quais os equilíbrios locais fracos aparecem ora como pontos fixos de uma certa função, ora como pontos de coincidência entre certas funções. Na seção 4.3, nós introduzimos a seguinte classe de espaços ENR's: os ENR's com a propriedade da retração conveniente. Especificamente

Definição 4.3.1. Diremos que um subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ possui a **propriedade da retração conveniente (abrev., p.r.c.)** quando existir uma retração $r : V \to X$, onde V é uma vizinhança aberta de X em $\mathbb{R}^m$, satisfazendo: dados $x_0 \in V$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\langle x_0 - r(x_0), x - r(x_0) \rangle \leq \varepsilon \| x - r(x_0) \|,$$

para todo $x \in X$ com $\|x - r(x_0)\| < \delta$, onde $\langle \ , \ \rangle$ é o produto interno de $\mathbb{R}^m$ e $\| \ \|$ é a norma por ele induzida. Nesse caso, dizemos que $r : V \to X$ é uma retração conveniente.

Exemplo de ENR's com a p.r.c. são as subvariedades de $\mathbb{R}^m$ de classe C^2. Outro exemplo são os subconjuntos fechados e convexos de $\mathbb{R}^m$ e, mais geralmente, os espaços "proximative neighborhood retract" de $\mathbb{R}^m$. Nós provamos

Teorema 4.3.6. Sejam $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas e suponha cada $S_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ compacto e com a p.r.c., $1 \leq i \leq n$. Suponha $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ continuamente diferenciável em uma vizinhança de s_i quando as demais variáveis ficam fixas, $1 \leq i \leq n$. Se $\chi(S_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ então $p_1, \ldots p_n$ admitem ao menos um e.l.f..

O capítulo 5 surgiu de uma sugestão do Professor Doutor Carlos Alberto Maquera Apaza. Ele nos apresentou o artigo [11] onde Pradeep Dubey demonstra a ineficiência, no sentido de Pareto, do equilíbrio de Nash para uma classe de jogos com funções payoff diferenciáveis. O Professor Maquera perguntou-nos se o mesmo não valeria para os equilíbrios locais fracos. Adaptando as ideias do artigo [11], nós demos uma resposta afirmativa para a questão.

Fugindo um pouco da questão do equilíbrio de Nash, o capítulo 6 trata da seguinte questão de otimização: Sejam X, Y espaços compactos e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função real contínua. Dada uma função contínua $\varphi : X \to X$, existe $(x, y) \in X \times Y$ tal que

$$f(x,y) \geq f(x,z) \quad \text{e} \quad f(\varphi(x),y) \geq f(\varphi(x),z),$$

para todo $z \in Y$? Nós mostramos que as condições para uma resposta afirmativa estão relacionadas a teoremas do tipo Borsuk-Ulam.

O conceito de equilíbrio de Nash é, por si só, um achado. Segundo John Milnor ([28], pag. 11)

> "...the ideas in Nash's thesis are simple and rigorous, and provide a firm background, not only for economic theory but also for research in evolutionary biology, and more generally for the study of any situation in which human or nonhuman beings face competition or conflict."

Em 1994, Nash foi agraciado com o prêmio Nobel de Economia não somente pela aplicação de suas ideias nesta área do conhecimento humano como também em diversas outras áreas.

✓

Capítulo

1

Preliminares

Nesse capítulo, apresentamos alguns conceitos básicos utilizados para o desenvolvimento da presente tese. O capítulo é também utilizado para estabelecer notações. Em toda a tese, os espaços topológicos considerados são supostos de Hausdorff, salvo dito o contrário.

1.1 Aplicações de Multivalores

A referência principal dessa seção é o texto [16].

Sejam X e Y espaços topológicos e assuma que um subconjunto $\varphi(x)$ fechado em Y e não vazio é dado, para cada $x \in X$. Nesse caso, dizemos que φ é uma aplicação de multivalores de X em Y e usamos o símbolo $\varphi : X \multimap Y$. Precisamente, uma aplicação de multivalores pode ser definida como sendo um subconjunto $\varphi \subset X \times Y$ tal que, para todo $x \in X$, o conjunto $\varphi_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in \varphi\}$ é fechado em Y e não vazio.

O símbolo $\varphi : X \to Y$ será reservado às funções unívocas, i.e., quando $\varphi(x)$ consiste de um único ponto, para cada $x \in X$.

Seja $\varphi : X \multimap Y$ uma aplicação de multivalores. O gráfico, Γ_φ, de φ é definido por

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}.$$

Também, são definidas duas projeções associadas à φ. São elas

$$p_\varphi : \Gamma_\varphi \to X \quad \text{e} \quad q_\varphi : \Gamma_\varphi \to Y$$

dadas por

$$p_\varphi(x,y) = x \quad \text{e} \quad q_\varphi(x,y) = y$$

para todo $(x,y) \in \Gamma_\varphi$.

Se A é um subconjunto de X então

$$\varphi(A) = \bigcup\{\varphi(x) \mid x \in A\}$$

é chamada a imagem de A pela φ.

Se $\varphi : X \multimap Y$ e $\psi : Y \multimap Z$ são duas aplicações de multivalores, a composição, denotada por $\psi \circ \varphi : X \multimap Z$, é definida por

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \bigcup\{\psi(y) \mid y \in \varphi(x)\}, \text{ para cada } x \in X.$$

Se $X \subset Y$ e $\varphi : X \multimap Y$ é uma aplicação de multivalores, um ponto $x \in X$ é dito um ponto fixo de φ se $x \in \varphi(x)$. Denotamos

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in X \mid x \in \varphi(x)\}.$$

Dada uma aplicação de multivalores $\varphi : X \multimap Y$ e um subconjunto B qualquer de Y, definimos a contraimagen menor, $\varphi^{-1}(B)$, de B pela φ por

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \subset B\}.$$

1.1.1 Semicontinuidade Superior

O conceito de semicontinuidade superior das aplicações de multivalores está relacionado à contraimagem menor de conjuntos abertos.

Definição 1.1.1. *Uma aplicação de multivalores $\varphi : X \multimap Y$ é dita semicontínua superiormente (s.c.s.) se, para todo subconjunto aberto U de Y, o conjunto $\varphi^{-1}(U)$ é aberto em X.*

O próximo resultado exprime uma caracterização das aplicações de multivalores s.c.s. em termos de sequências generalizadas.

Proposição 1.1.2. *Sejam X e Y espaços topológicos e suponha Y compacto. Então, uma aplicação de multivalores $\varphi : X \multimap Y$ é s.c.s. se, e somente se, para quaisquer sequências generalizadas convergentes $(x_\alpha)_{\alpha\in J} \to x$ em X e $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \to y$ em Y tal que $y_\alpha \in \varphi(x_\alpha)$, para todo $\alpha \in J$, tem-se $y \in \varphi(x)$.*

Demonstração:
($\Longrightarrow$) Seja $\varphi : X \multimap Y$ uma aplicação s.c.s. e suponha, por absurdo, que existem sequências generalizadas $(x_\alpha)_{\alpha\in J} \to x$ em X e $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \to y$ em Y tais que $y_\alpha \in \varphi(x_\alpha)$, para todo $\alpha \in J$, e, no entanto, $y \notin \varphi(x)$. Como Y é compacto e $\varphi(x)$ é fechado em Y, obtemos subconjuntos abertos U e V de Y tais que $\varphi(x) \subset U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Sendo φ s.c.s., os conjuntos $\varphi^{-1}(U)$ e $\varphi^{-1}(V)$ são subconjuntos abertos de X. Além disso, $x \in \varphi^{-1}(U)$. Uma vez que temos a convergência $x_\alpha \to x$, existe $\alpha \in J$ tal que

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow x_\beta \in \varphi^{-1}(U).$$

Assim, $\varphi(x_\beta) \subset U$ se $\alpha \leq \beta$ e, consequentemente, $y_\beta \in U$ para $\alpha \leq \beta$. Por outro lado, desde que $y_\alpha \to y$ e $y \in V$, existe $\gamma \in J$ tal que

$$\gamma \leq \beta \Rightarrow y_\beta \in V.$$

Sendo J um conjunto dirigido, existe $\xi \in J$ tal que $\alpha \leq \xi$ e $\gamma \leq \xi$. Logo, $y_\xi \in U \cap V$, o que contradiz o fato de que $U \cap V = \emptyset$.

Portanto, para quaisquer sequências generalizadas $(x_\alpha)_{\alpha\in J} \to x$ em X e $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \to y$ em Y tais que $y_\alpha \in \varphi(x_\alpha)$ para todo $\alpha \in J$, tem-se $y \in \varphi(x)$.

($\Longleftarrow$) Seja $\varphi : X \multimap Y$ tal que para quaisquer sequências generalizadas $(x_\alpha)_{\alpha\in J} \to x$ em X e $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \to y$ em Y com $y_\alpha \in \varphi(x_\alpha)$ para todo $\alpha \in J$, tem-se $y \in \varphi(x)$. Suponha, por absurdo, que φ não é s.c.s.. Então, existe um subconjunto aberto U em Y tal que $\varphi^{-1}(U)$ não é aberto em X e, desse modo, $X - \varphi^{-1}(U)$ não é fechado. Logo, existe uma sequência generalizada $(x_\alpha)_{\alpha\in J} \subset X - \varphi^{-1}(U)$ que converge à $x \in \varphi^{-1}(U)$. Como, para cada $\alpha \in J$, $x_\alpha \notin \varphi^{-1}(U)$, podemos escolher $y_\alpha \in \varphi(x_\alpha)$ tal que $y_\alpha \notin U$. Desde que Y é compacto e $Y - U$ é fechado em Y, temos que $Y - U$ é compacto. Logo, a sequência generalizada $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \subset Y - U$ possui subsequência generalizada convergente em $Y - U$. Sem perda de generalidade, vamos supor $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \to y$, $y \in Y - U$. Pela hipótese, segue que $y \in \varphi(x)$. Porém, $\varphi(x) \subset U$ e $y \notin U$, uma contradição!

Logo, φ é s.c.s.. ■

A hipótese de compacidade do espaço Y na Proposição 1.1.2 é essencial, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.1.3. Considere os conjuntos $X = [0, 1]$ e

$$Y = \{(x, 0) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(\frac{1}{n}, y) \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(0, 1)\}.$$

O espaço Y, conhecido como "o pente e a pulga", não é compacto. Defina a aplicação de multivalores $\varphi : X \multimap Y$ por

$$\varphi(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in Y\}.$$

Se denotamos por $p : Y \to X$ a projeção $p(x, y) = x$, temos que $\varphi(x) = p^{-1}(x)$, para todo $x \in X$.

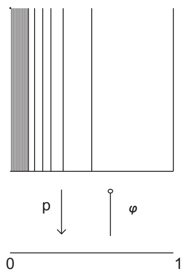

Figura 1.1: "o pente e a pulga"

Mostraremos que φ não é s.c.s. e, no entanto, satisfaz a propriedade de que para quaisquer sequências convergentes $x_n \to x$ em X e $y_n \to y$ em Y tais que $y_n \in \varphi(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $y \in \varphi(x)$.

Suponha que $x_n \to x$ em X e que $y_n \to y$ em Y com $y_n \in \varphi(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $y \in \varphi(x)$. Para isso, devemos mostrar que y é da forma

$$y = (x, z),$$

com $(x, z) \in Y$. Veja que cada y_n é da forma $y_n = (x_n, z_n)$. Como $x_n \to x$, segue que y_n converge a um elemento da forma (x, z). Logo, $y = (x, z) \in Y$ e, portanto, $y \in \varphi(x)$.

Para ver que φ não é s.c.s., considere o subconjunto aberto de Y

$$U = \{(x, y) \in Y \mid \|(x, y) - (0, 1)\| < 1/2\}.$$

Temos que $\varphi^{-1}(U) = \{0\}$, que não é aberto em $[0, 1]$. Logo, φ não é s.c.s..

Exemplo 1.1.4. Seja (M, d) um espaço métrico e $K \subset M$ um subconjunto compacto. Defina a aplicação de multivalores $\varphi : M \multimap K$ por

$$\varphi(x) = \{y \in K \mid d(x, y) = \operatorname{dist}(x, K)\},$$

onde $\operatorname{dist}(x, K) = \inf\{d(x, z) \mid z \in K\}$ é a distância de x à K. A aplicação φ é s.c.s.. De fato, sejam $x_n \to x$ em X e $y_n \to y$ em K tal que $y_n \in \varphi(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja,

$$\operatorname{dist}(x_n, K) = d(x_n, y_n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, dado $z \in K$, temos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite, segue que

$$d(x, y) \leq d(x, z), \text{ para todo } z \in K.$$

Logo,

$$d(x, y) = \text{dist}(x, K)$$

e, portanto, $y \in \varphi(x)$.

Logo, pela Proposição 1.1.2, φ é s.c.s..

Exemplo 1.1.5. Sejam X, Y espaços compactos e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $x \in X$, definimos $f_x : Y \to \mathbb{R}$ por

$$f_x(y) = f(x, y), \text{ para todo } y \in Y.$$

Definimos ainda $\alpha : X \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(x) = \max f_x(Y), \text{ para todo } x \in X.$$

Assim definida, a função α é contínua.

Definimos a aplicação de multivalores $\varphi : X \multimap Y$ por

$$\varphi(x) = \{y \in Y \mid f(x, y) = \alpha(x)\},$$

i.e., $\varphi(x)$ constitui-se dos pontos de Y que realizam o valor máximo de f_x. Assim definida, φ é s.c.s.. De fato, sejam $(x_j)_{j\in J} \to x$ em X e $(y_j)_{j\in J} \to y$ em Y tal que $y_j \in \varphi(x_j)$, para todo $j \in J$. Então, $f(x_j, y_j) = \alpha(x_j)$, para todo $j \in J$. Da continuidade de f e de α, concluímos que $f(x, y) = \alpha(x)$. Logo, $y \in \varphi(x)$.

Portanto, pela Proposição 1.1.2, φ é s.c.s..

As aplicações de multivalores s.c.s. satistazem as seguintes propriedades.

Lema 1.1.6. *Seja X um espaço conexo e $\varphi : X \multimap Y$ uma aplicação de multivalores s.c.s.. Suponha $\varphi(x)$ conexo, para todo $x \in X$. Então*

$$\varphi(X) = \bigcup_{x\in X} \varphi(x)$$

é conexo.

Demonstração: Suponha

$$\varphi(X) = (\varphi(X) \cap U) \bigcup (\varphi(X) \cap V)$$

e

$$(\varphi(X) \cap U) \bigcap (\varphi(X) \cap V) = \emptyset,$$

onde U e V são subconjuntos abertos de Y. Para cada $x \in X$, desde que $\varphi(x)$ é conexo, temos que ou $\varphi(x) \subset U$ ou $\varphi(x) \subset V$, exclusivamente. Desse modo,

$$X = \varphi^{-1}(U) \cup \varphi^{-1}(V)$$

e

$$\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V) = \emptyset.$$

Como φ é s.c.s., os conjuntos $\varphi^{-1}(U)$ e $\varphi^{-1}(V)$ são abertos em X. Desde que X é conexo, segue que $\varphi^{-1}(U) = \emptyset$ ou $\varphi^{-1}(V) = \emptyset$. Portanto,

$$\varphi(X) \cap U = \emptyset \quad \text{ou} \quad \varphi(X) \cap V = \emptyset.$$

Logo, $\varphi(X)$ é conexo. ■

Lema 1.1.7. *Sejam X um espaço compacto e $\varphi : X \multimap Y$ uma aplicação de multivalores s.c.s.. Suponha $\varphi(x)$ compacto, para todo $x \in X$. Então, $\varphi(X)$ é compacto.*

Demonstração: Seja $\{U_\alpha\}_\alpha$ uma família de subconjuntos abertos de Y tal que

$$\varphi(X) \subset \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

Dado $x \in X$, temos

$$\varphi(x) \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$$

e, como $\varphi(x)$ é compacto, existe uma subfamília finita $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$ tal que

$$\varphi(x) \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}.$$

Denote $U_x = U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$. Então,

$$X = \bigcup_{x \in X} \varphi^{-1}(U_x).$$

Sendo φ s.c.s., a família $\{\varphi^{-1}(U_x) \mid x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existem $x_1, \ldots, x_j \in X$ tais que

$$X = \varphi^{-1}(U_{x_1}) \cup \cdots \cup \varphi^{-1}(U_{x_j}).$$

Segue que

$$\varphi(X) \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_j}.$$

Como cada U_x é uma reunião finita de U_α's, temos que $\{U_\alpha\}_\alpha$ possui uma subcobertura finita para $\varphi(X)$.

Portanto, $\varphi(X)$ é compacto. ■

1.2 (Co)Homologia de Čech

Nesse trabalho, consideramos o funtor (co)homologia de Čech definido em [13]. Utilizamos os símbolo $\check{\mathrm{H}}_*$ e $\check{\mathrm{H}}^*$ para a homologia e a cohomologia de Čech, respectivamente.

A teoria de cohomologia de Čech é definida sobre a categoria $\mathcal{A}_1$ dos pares de espaços topológicos (X, A) e suas funções contínuas. O grupo de coeficientes G é tomado numa categoria $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$, onde R é um anel, os objetos de $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ são módulos sobre o anel R e os morfismos de $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ são homomorfismos de R-módulos. Os grupos de cohomologia de Čech, $\check{\mathrm{H}}^q(X, A),\ q \geq 0$, estão na mesma categoria que o grupo de coeficientes G considerado. Todos os axiomas de Eilenberg-Steenrod para cohomologia são verificados. Grupos de cohomologia de Čech com coeficientes em grupos compactos não são definidos.

Os grupos de homologia de Čech são definidos sob as mesmas circunstâncias que os grupos de cohomologia de Čech. No entanto, temos o fato adicional de que se (X, A) é um par compacto, então o grupo de homologia de Čech, $\check{\mathrm{H}}_q(X, A)$, é também definido para G $\in \mathcal{G}_{\mathrm{C}}$, onde $\mathcal{G}_{\mathrm{C}}$ é a categoria cujo os objetos são grupos abelianos compactos e os morfismos são os homomorfismos contínuos. Nesse caso, $\check{\mathrm{H}}_q(X, A)$ está também em $\mathcal{G}_{\mathrm{C}}$. Os axiomas são todos verificados, exceto o axioma da exatidão, que só é válido após drásticas restrições. A sequência de homologia de qualquer par é definida e é demonstrado que ela é semiexata, isto é, a composição de quaisquer dois homomorfismos consecutivos é zero. Para obter a exatidão, devemos nos restringir aos pares (X, A) compactos e o grupo de coeficientes G deve ser ou compacto ou um espaço vetorial sobre um corpo. No caso em que o par (X, A) é também triangularizável, a exatidão da sequência é demonstrada sem a restrição sobre o grupo de coeficientes G. Isto é feito mostrando diretamente que $\check{\mathrm{H}}_q(X, A)$ é isomorfo ao grupo de homologia simplicial $\mathrm{H}_q(X, A)$.

1.3 Variedades de Banach

As referências principais para essa seção são os textos [1] e [23].

Sejam E e F espaços de Banach; $L(E,F)$ denota o conjunto das transformações lineares contínuas de E em F. O espaço $L(E,F)$ é um espaço vetorial normado com norma

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf\{c \geq 0 \mid \|T \cdot x\| \leq c\|x\|,\ \forall x \in E\} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|T \cdot x\|. \end{aligned}$$

Ainda, $L(E,F)$ com a topologia induzida pela norma dada acima é um espaço completo e, portanto, é também um espaço de Banach.

$L^k(E,F)$ denota o espaço de Banach das aplicações k-multilineares contínuas de E em F, isto é, $L^0(E,F) = F$ e $L^{k+1}(E,F) = L(E, L^k(E,F))$. Ainda, $L^k_S(E,F)$ denota o espaço de Banach das aplicações k-multilineares contínuas simétricas de E em F.

Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ um subconjunto aberto e $f : U \to F$ uma função. Dizemos que f é diferenciável em $x \in U$ se existe uma transformação linear $Df(x) \in L(E,F)$ (necessariamente única) tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Df(x) \cdot h\|}{\|h\|} = 0.$$

A função f é de classe C^1 ($f \in \mathcal{C}^1(U,F)$) se f é diferenciável em todo ponto $x \in U$ e a aplicação

$$Df : U \to L(E,F)$$

é contínua. E, a classe de diferenciabilidade de $f : U \to F$ é definida por indução: diz-se que f é de classe C^k ($f \in \mathcal{C}^k(U,F)$) se sua derivada $Df : U \to L(E,F)$ é de classe C^{k-1}. A $(k+1)$-ésima derivada de f é definida indutivamente por

$$D^{k+1}f = D(D^k f) : U \to L(E, L^k(E,F)) = L^{k+1}(E,F).$$

Uma **variedade de Banach local** é simplesmente um conjunto aberto em um espaço de Banach. Um **morfismo de classe C^r de variedades de Banach locais** é uma função de classe C^r entre variedades locais. Isso forma uma categoria. Nela, um morfismo f é chamado um isomorfismo se existe um morfismo g que é inverso de f à direita e à esquerda. Um isomorfismo C^r de variedades locais é chamado um difeomorfismo C^r.

Seja X um espaço topológico. Uma **carta** sobre X é um par (U, α), onde U é um subconjunto aberto de X e α é um homeomorfismo de U sobre uma variedade local.

Duas cartas (U, α) e (V, β) sobre X são ditas C^r compatíveis se a composição

$$\beta \circ \alpha^{-1} : \alpha(U \cap V) \to \beta(U \cap V)$$

é um isomorfismo C^r de variedades locais. Um atlas de classe C^r sobre X é uma coleção de cartas $\{(U, \alpha)\}$ na qual quaisquer duas cartas são C^r compatíveis e tal que os abertos U's cobrem X. Um atlas C^r é dito maximal se ele contém todas as cartas C^r compatíveis com todos os seus elementos. Por fim, uma **variedade de Banach de classe** C^r é um espaço de Hausdorff X, segundo enumerável, juntamente com um atlas maximal de classe C^r.

Sejam X e Y variedades C^r e $f : X \to Y$ uma função. Dadas cartas (U, α) e (V, β) sobre X e Y, respectivamente, tais que $f(U) \subset V$, a representação local de f segundo essas cartas é dada por

$$f_{\alpha\beta} = \beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(U) \to \beta(V).$$

A função f é um morfismo de variedades C^r se para todo $x \in X$ e toda carta (V, β) sobre Y com $f(x) \in V$, existe uma carta (U, α) sobre X tal que $f(U) \subset V$ e $f_{\alpha\beta}$ é um morfismo C^r de variedades locais.

Seja X uma variedade C^{r+1}, $r \geq 0$. Uma curva em X é uma função C^{r+1} de um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contendo o 0 e com valores em X. Duas curvas c_1 e c_2 são tangentes em $x \in X$ se $c_1(0) = c_2(0) = x$ e para alguma (e, portanto, para toda) carta (U, α) em torno de x tem-se

$$(\alpha \circ c_1)'(0) = (\alpha \circ c_2)'(0).$$

Aqui, $(\alpha \circ c)'(0)$ é definido por

$$(\alpha \circ c)'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha \circ c(h) - \alpha \circ c(0)}{h}.$$

Uma curva c é dita em x se $c(0) = x$. A relação de tangência entre as curvas em x é uma relação de equivalência. O espaço tangente a X em x é definido como sendo o conjunto $T_x X$ das classes de equivalência das curvas em x. Cada carta (U, α) determina uma bijeção de $T_x X$ sobre um espaço de Banach E_α. Explicitamente, a classe do caminho c corresponde ao vetor $(\alpha \circ c)'(0)$. Por essa bijeção, é possível transportar a estrutura de espaço vetorial topológico de E_α à $T_x X$. Essa estrutura independe da carta selecionada.

O fibrado tangente de X é definido por

$$TX = \bigcup_{x \in X} T_x X.$$

A aplicação $p_X : TX \to X$ dada por

$$p_X(\dot{x}) = x \quad \text{para} \quad \dot{x} \in T_xX$$

é bem definida. Dado $U \subset X$ aberto, seja $TU = p_X^{-1}(U)$. Dada uma carta (U, α) sobre X com $\alpha(U)$ sendo um conjunto aberto de um espaço de Banach E_α, é bem definida a seguinte bijeção

$$T_\alpha : TU \to \alpha(U) \times E_\alpha$$

dada por

$$T_\alpha(\dot{x}) = (\alpha(p_X(\dot{x})), v),$$

onde $v = (\alpha \circ c)'(0)$, sendo c um elemento da classe de equivalência $\dot{x}$.

Dadas duas cartas (U, α) e (V, β) sobre X, a função

$$T_\beta \circ T_\alpha^{-1} : \alpha(U \cap V) \times E_\alpha \to \beta(U \cap V) \times E_\beta$$

é o homeomorfismo

$$(y, v) \mapsto (\beta \circ \alpha^{-1}(y), D(\beta \circ \alpha^{-1}) \cdot v).$$

Segue que TX possui uma topologia que torna cada T_α um homeomorfismo e, ademais, essa topologia é única. Além disso, como $T_\beta \circ T_\alpha^{-1}$ é um isomorfismo C^r de variedades locais, temos que as cartas $\{TU, T_\alpha\}$ constituem um atlas de classe C^r sobre TX. Deste modo, TX é uma variedade de Banach de classe C^r.

1.3.1 Transversalidade

Sejam Y uma variedade de classe C^r e $W \subset Y$ um subconjunto de Y. Dizemos que W é uma subvariedade de Y se, para todo ponto $y \in W$, existe uma carta (V, β) de Y tal que $\beta(V) = V_1 \times V_2$, onde V_1 e V_2 são vizinhanças abertas da origem em espaços de Banach F_1 e F_2, respectivamente, e tal que $\beta(y) = (0, 0)$ e $\beta(W \cap V) = V_1 \times \{0\}$. Os pares $(W \cap V, \beta|_{(W \cap V)})$ dão uma estrutura de variedade C^r à W.

Dados um espaço topológico X e um subespaço Y de X, dizemos que Y é localmente fechado em X se, para todo ponto $y \in Y$, existe uma vizinhança U de y em X tal que $Y \cap U$ é fechado em U.

Assim, é claro que toda subvariedade é localmente fechada. Ainda, se Y é uma variedade C^r e W é uma sua subvariedade, o espaço tangente T_yW é um subspaço fechado de T_yY que possui complemento fechado, qualquer que seja $y \in W$.

Sejam X e Y variedades de Banach de classe C^1, $f : X \to Y$ uma função de classe C^1 e $W \subset Y$ uma subvariedade de Y. A função f é transversal à W em um ponto $x \in X$ (notação: $f \pitchfork_x W$) se $f(x) \notin W$ ou $f(x) \in W$ e

1. a imagem inversa $[f'(x)]^{-1}(T_{f(x)}W)$ possui complemento fechado, isto é, existe um subespaço vetorial fechado A de T_xX tal que

$$T_xX = A \oplus [f'(x)]^{-1}(T_{f(x)}W),$$

e

2. $$T_{f(x)}Y = f'(x) \cdot T_xX + T_{f(x)}W.$$

A função f é transversal à W (notação: $f \pitchfork W$) se f é transversal à W em todo ponto $x \in X$.

Observe que no caso em que X possui dimensão finita, a condição 1 é redundante.

Sejam $\mathcal{A}$, X e Y variedades C^r, $\mathcal{C}^r(X,Y)$ o conjunto das aplicações de classe C^r de X em Y, e $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^r(X,Y)$ uma função. Para cada $a \in \mathcal{A}$, escrevemos ρ_a em lugar de $\rho(a)$. Dizemos que ρ é uma representação C^r se a aplicação avaliação

$$av_\rho : \mathcal{A} \times X \to Y$$

dada por

$$av_\rho(a,x) = \rho_a(x)$$

é uma função de classe C^r de $\mathcal{A} \times X$ em Y.

Agora, para $k = 1, \ldots, r$, seja $T^k(X)$ o k-ésimo espaço tangente iterado de X, isto é, $T^0(X) = X$ e $T^{k+1}(X) = T(T^k(X))$. Se $f : X \to Y$ é uma função de classe C^r, seja $T^kf : T^k(X) \to T^k(Y)$ a k-ésima derivada de f, isto é, $T^0f = f$ e $T^{k+1}f = T(T^kf)$. Se $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^r(X,Y)$ é uma função qualquer, para cada $k = 0, 1, \ldots, r$, definimos a função

$$\rho^{(k)} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^{r-k}(T^k(X), T^k(Y))$$

por

$$\rho^{(k)}(a) = T^k\rho_a$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Dizemos que ρ é uma pseudorepresentação C^r se cada $\rho^{(k)}$ ($k = 0, 1, \ldots, r$) é uma C^0 representação. Isto é, para cada $k = 0, 1, \ldots, r$, a aplicação $\mathcal{A} \times T^k(X) \to T^k(Y)$ dada por $(a, \dot{x}) \rightsquigarrow T^k\rho_a(\dot{x})$, para $a \in \mathcal{A}$ e $\dot{x} \in T^k(X)$, é contínua.

Claramente, toda representação C^r é uma pseudorepresentação C^r. Ainda, para $r = 0$ esses conceitos coincidem.

Teorema 1.3.1. ***(Openness of Nointersection)*** *Sejam $\mathcal{A}, X, Y$ variedades de Banach C^0, $W \subset Y$ um subconjunto fechado de Y (não necessariamente uma subvariedade), $K \subset X$ um subconjunto compacto de X, e $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(X, Y)$ uma representação C^0. Defina $\mathcal{A}^0_{KW} \subset \mathcal{A}$ por*

$$\mathcal{A}^0_{KW} = \{a \in \mathcal{A} \mid \rho_a(K) \cap W = \emptyset\}.$$

Então, $\mathcal{A}^0_{KW}$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{A}$.

Teorema 1.3.2. ***(Openness of Transversal Intersection)*** *Sejam $\mathcal{A}$, X e Y variedades de Banach de classe C^1, onde X possui dimensão finita, $W \subset Y$ é uma subvariedade fechada de classe C^1, $K \subset X$ é um subconjunto compacto de X, e $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^1(X, Y)$ é uma pseudorepresentação C^1. Então, o subconjunto*

$$\mathcal{A}_{KW} = \{a \in \mathcal{A} \mid \rho_a \pitchfork_x W \text{ para todo } x \in K\}$$

é aberto. Se ρ for uma representação C^1, isso ocorre mesmo que a dimensão de X não seja finita.

Um subconjunto de um espaço topológico é residual quando pode ser expresso como interseção de uma família enumerável de abertos densos. Nem todo conjunto residual é denso. Um espaço topológico é de Baire se todos os seus subconjuntos residuais forem densos. O Teorema da categoria de Baire diz que:

Teorema 1.3.3. ***(Teorema da Categoria de Baire)*** *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Temos ainda o seguinte resultado sobre os espaços de Baire:

Lema 1.3.4.

1. *Espaços de Baire são invariantes por sobrejeções abertas contínuas;*
2. *Um subconjunto aberto de um espaço de Baire é também um espaço de Baire;*
3. *Seja X um espaço com a seguinte propriedade: cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança em X que é um espaço de Baire. Então, X é um espaço de Baire.*

Em vista do Teorema da Categoria de Baire e do Lema 1.3.4, conclui-se que:

Proposição 1.3.5. *Toda variedade de Banach é um espaço de Baire.*

■

Voltando ao contexto de transversalidade, temos:

Teorema 1.3.6. ***(Transversal Density Theorem)*** *Sejam $\mathcal{A}$, X e Y variedades de Banach de classe C^r, $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^r(X,Y)$ uma representação C^r, $W \subset Y$ uma subvariedade (não necessariamente fechada), e $av_\rho : \mathcal{A} \times X \to Y$ a aplicação avaliação. Defina*

$$\mathcal{A}_W = \{a \in \mathcal{A} \mid \rho_a \pitchfork W\}.$$

Assuma que:

1. *X possui dimensão finita n e W possui codimensão finita q em Y;*
2. *$r > \max\{0, n-q\}$;*
3. *$av_\rho \pitchfork W$.*

Então, $\mathcal{A}_W$ é residual (i.e., uma interseção enumerável de conjuntos abertos e densos) em $\mathcal{A}$. Em particular, como $\mathcal{A}$ é um espaço de Baire, temos que $\mathcal{A}_W$ é denso em $\mathcal{A}$.

Capítulo

2

A Teoria de Coincidência de Lefschetz

A Teoria de Coincidência teve início com os trabalhos de S. Lefschetz [24], [25], [26] e [27], do período de 1923 à 1927. Nesses tratados, a cada par de funções contínuas $f, g : M \to N$ entre variedades fechadas e orientadas de mesma dimensão, Lefschetz associa um número inteiro, $\Lambda(f, g)$, com a propriedade de que $\Lambda(f, g) \neq 0$ implica na existência de $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. O número de Lefschetz é definido pela fórmula

$$\Lambda(f, g) = \sum_i (-1)^i \text{traço}_i(f^* g^!) \tag{2.1}$$

onde f^* é o homomorfismo induzido por f sobre os espaços de cohomologia $\mathrm{H}^*(N; \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^*(M; \mathbb{Q})$ e $g^! = D_N^{-1} \circ g_* \circ D_M$. Aqui, g_* é o homomorfismo induzido por g sobre os espaços de homologia $\mathrm{H}_*(M; \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_*(N; \mathbb{Q})$ e $D_M : \mathrm{H}^*(M; \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_*(M; \mathbb{Q})$ e $D_N : \mathrm{H}^*(N; \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_*(N; \mathbb{Q})$ são os isomorfismos da dualidade de Poincaré das respectivas variedades, M e N.

Seja B a categoria onde os objetos são pares ordenados M, N de n-variedades orientadas, conexas, compactas e com bordo não vazio, ∂M e ∂N, respectivamente, e os morfismos são pares ordenados $f, g : M \to N$ de funções contínuas tal que $g(\partial M) \subset \partial N$, ou seja, $g : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ é uma aplicação de pares. Em [27], Lefschetz estendeu seu número de coincidência à categoria B, porém não foi totalmente bem sucedido na generalização de seu teorema de coincidência. Em [30], usando o espaço dobro de uma variedade com bordo, Nakaoka interpreta o número de Lefschetz definido sobre a categoria B em termos do número de Lefschetz original. Então, o teorema de coincidência de Lefschetz para a categoria B segue do teorema original de coincidência de Lefschetz.

Dadas duas funções contínuas $f, g : Z \to N$ definidas sobre um espaço topológico Z e com valores em uma n-variedade fechada, conexa e $\mathbb{F}$-orientada N, ainda que Z não seja uma variedade, sempre existe uma classe de cohomologia $L(f, g) \in H^n(Z)$ tal que $L(f, g) \neq 0$ implica na existência de um ponto $x \in Z$ tal que $f(x) = g(x)$. Nesse capítulo, sob certas hipóteses, nós escrevemos uma fórmula para a classe $L(f, g)$. Como consequência, nós explicitamos alguns teoremas de coincidência. Ainda, nós analisamos a classe de coincidência para funções contínuas $f, g : X \to M$, onde M é uma variedade conexa, compacta, $\mathbb{F}$-orientada e com bordo não vazio, e $g : (X, A) \to (M, \partial M)$ é uma função de pares.

2.1 Uma fórmula para a classe de coincidência $L(f, g)$

Em todo o capítulo, $\mathbb{F}$ denota um corpo. Uma variedade fechada significa uma variedade compacta sem bordo.

Seja N uma n-variedade fechada, conexa e $\mathbb{F}$-orientada. Dadas duas funções contínuas, $f, g : Z \to N$, definidas em um espaço topológico Z e com valores em N, existe uma classe de cohomologia $L(f, g) \in \mathrm{H}^n(Z; \mathbb{F})$ tal que se $L(f, g)$ é não nula então $f(z_0) = g(z_0)$ para algum $z_0 \in Z$. A definição de $L(f, g)$ dá-se do seguinte modo: sejam

$$\zeta \in \mathrm{H}_n(N; \mathbb{F})$$

a classe fundamental da $\mathbb{F}$-orientação de N e

$$\mu \in \mathrm{H}^n(N \times N, N \times N - \Delta; \mathbb{F})$$

a classe de Thom da $\mathbb{F}$-orientação de N, onde

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in N\}$$

é a diagonal de $N \times N$. Ainda, sejam

$$j : N \times N \to (N \times N, N \times N - \Delta)$$

a inclusão e

$$f \times g : Z \to N \times N$$

a função definida por

$$(f \times g)(y) = (f(y), g(y)), \quad \text{para todo} \quad y \in Z.$$

Então,

$$L(f, g) := [j \circ (f \times g)]^*(\mu) \in \mathrm{H}^n(Z; \mathbb{F}).$$

Com a classe $L(f,g)$ assim definida, temos:

Proposição 2.1.1. *Se $L(f,g)$ é um elemento não nulo de $\mathrm{H}^n(Z;\mathbb{F})$ então f e g possuem uma coincidência.*

Demonstração: Suponha que $f(z) \neq g(z)$ para todo $z \in Z$. Temos então a seguinte fatoração

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "(f\times g)"] \arrow[d] & N \times N \arrow[r, "j"] & (N\times N, N\times N - \Delta) \\
N \times N - \Delta \arrow[rr] & & (N\times N - \Delta, N\times N - \Delta) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Logo, $L(f,g) = [j \circ (f \times g)]^*(\mu) = 0.$ ■

Da Proposição 2.1.1, para fazer sentido o estudo de coincidências entre funções $f, g : Z \to N$ do ponto de vista da teoria de Lefschetz, é importante que $\mathrm{H}^n(Z;\mathbb{F})$ seja um espaço vetorial não nulo.

No caso em que Z é também uma n-variedade fechada, conexa e $\mathbb{F}$-orientada, denotando por $\zeta' \in \mathrm{H}_n(Z;\mathbb{F})$ a sua classe fundamental de $\mathbb{F}$-orientação, é sabido que

$$[\zeta', L(f,g)] = \Lambda(f,g) = \sum_i (-1)^i \text{traço}_i(f^* g^!) \tag{2.2}$$

onde $[\ \ ]$ é o produto de Kronecker, f^* é o homomorfismo induzido por f sobre os espaços de cohomologia $\mathrm{H}^*(N;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}^*(Z;\mathbb{F})$ e $g^! = D_N^{-1} \circ g_* \circ D_Z$. Aqui, g_* é o homomorfismo induzido por g sobre os espaços de homologia $\mathrm{H}_*(Z;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}_*(N;\mathbb{F})$ e $D_Z : \mathrm{H}^*(Z;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}_*(Z;\mathbb{F})$ e $D_N : \mathrm{H}^*(N;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}_*(N;\mathbb{F})$ são os isomorfismos da dualidade de Poincaré das respectivas variedades, Z e N (Ver [7], Theorem 14.4, pag. 396).

A seguir, mostraremos que quando g é um fator cohomológico de f, ainda que Z não seja variedade, é possível obter uma expressão para a classe $L(f,g)$, semelhante a da equação (2.2).

2.1.1 A classe $L(f,g)$ quando g é fator cohomológico de f

Nessa subseção, N denota uma n-variedade fechada, conexa e $\mathbb{F}$-orientada, com classe de $\mathbb{F}$-orientação

$$\zeta \in \mathrm{H}_n(N;\mathbb{F})$$

e com classe de Thom

$$\mu \in \mathrm{H}^n(N \times N, N \times N - \Delta; \mathbb{F}).$$

Além disso, $e_n \in \mathrm{H}^n(N;\mathbb{F})$ é tal que $[\zeta, e_n] = 1$ e $e_0 \in \mathrm{H}^0(N;\mathbb{F})$ é a identidade da $\mathbb{F}$-álgebra $\mathrm{H}^*(N;\mathbb{F})$.

Definição 2.1.2. *Sejam $f, g : X \to Y$ duas funções contínuas. Diremos que g é um fator cohomológico de f em dimensão $q > 0$ via homomorfismo*

$$\varphi_q : \mathrm{H}^q(Y;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}^q(Y;\mathbb{F})$$

se $f_q^* = g_q^* \circ \varphi_q$. Isto é, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q(Y;\mathbb{F}) \arrow[r, "f_q^*"] \arrow[d, "\varphi_q"] & \mathrm{H}^q(X;\mathbb{F}) \\
\mathrm{H}^q(Y;\mathbb{F}) \arrow[ur, "g_q^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 2.1.3. **a)** Se $\mathrm{H}^q(Y;\mathbb{F}) = 0$ então para quaisquer $f, g : X \to Y$ tem-se que g é fator cohomológico de f em dimensão q.

b) Se f e g são homotópicas então g é fator cohomológico de f em todas as dimensões.

c) Se g_q^* é um isomorfismo então g é fator cohomológico em dimensão q de toda função $f : X \to Y$.

O próximo resultado nos fornece uma fórmula para a classe $L(f, g)$ quando g é um fator cohomológico de f nas dimensões $1 \leq q \leq n-1$. Os símbolos $\smile$ e $\frown$ significam os produtos cup e cap, respectivamente.

Teorema 2.1.4. *Sejam $f, g : Z \to N$ funções contínuas. Se g é um fator cohomológico de f nas dimensões $0 < q_p < n$ via homomorfismos $\varphi_{q_p} : \mathrm{H}^{q_p}(N;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}^{q_p}(N;\mathbb{F})$, então*

$$L(f, g) = f^*(e_n) + \Lambda(\varphi) g^*(e_n) + (-1)^n g^*(e_n),$$

onde $\Lambda(\varphi) := \sum_{q_p} (-1)^{q_p}$ traço(φ_{q_p}).

Demonstração: A prova segue as ideias encontradas na computação de Λ_f dada em [18], pag. 222. Seja $\{\alpha_i\}$ uma base para a $\mathbb{F}$-álgebra $\mathrm{H}^*(N;\mathbb{F})$ e denote por q_i o número inteiro tal que $\alpha_i \in \mathrm{H}^{q_i}(N;\mathbb{F})$. Para i_0, j_0 tais que $\alpha_{i_0} \in \mathrm{H}^0(N;\mathbb{F})$ e $\alpha_{j_0} \in \mathrm{H}^n(N;\mathbb{F})$, consideraremos $\alpha_{i_0} = e_0$ e $\alpha_{j_0} = e_n$. Pela fórmula de Künneth, os elementos $\alpha_i \times \alpha_j$ formam uma base para $\mathrm{H}^*(N \times N;\mathbb{F})$ e, portanto, $j^*(\mu)$ é da forma

$$j^*(\mu) \;=\; \sum_{i,j} c_{ij}\alpha_i \times \alpha_j$$

onde $c_{ij} = 0$ se $q_i + q_j \neq n$. Segue que

$$\begin{aligned}
& L(f,g) \\
= \;& (f \times g)^*(j^*(\mu)) \\
= \;& \sum_{i,j} c_{ij}(f \times g)^*(\alpha_i \times \alpha_j) \\
= \;& \sum_{i,j} c_{ij} f^*(\alpha_i) \smile g^*(\alpha_j) \\
= \;& \underbrace{c_{i_0j_0} f^*(e_0) \smile g^*(e_n) + c_{j_0i_0} f^*(e_n) \smile g^*(e_0)}_{\text{(I)}} + \underbrace{\sum_{q_i,q_j \neq 0,n} c_{ij} f^*(\alpha_i) \smile g^*(\alpha_j)}_{\text{(II)}}
\end{aligned}$$

Para cada par de inteiros não negativos k, j, seja

$$y_{kj} = [\zeta \frown \alpha_k, \alpha_j] = [\zeta, \alpha_k \smile \alpha_j].$$

Então, $y_{kj} = 0$ se $q_k + q_j \neq n$ e $y_{jk} = (-1)^{q_k(n-q_k)} y_{kj}$ se $q_k + q_j = n$.

Temos que

$$(-1)^{q_k}\alpha_k \;=\; \sum_i \left(\sum_j c_{ji} y_{jk} \right) \alpha_i \quad \text{(ver [18], pag. 223, (29.22).)}$$

Segue que $\sum_j c_{ji} y_{jk} = (-1)^{q_k}\delta_{ik}$, onde

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Em particular,

$$c_{i_0j_0} y_{i_0j_0} = (-1)^n \quad \text{e} \quad c_{j_0i_0} y_{j_0i_0} = 1.$$

Desenvolvimento da parte (I): Desde que e_0 foi tomado como sendo a identidade de $\mathrm{H}^*(N;\mathbb{F})$, temos que $f^*(e_0) = g^*(e_0)$ é a identidade de $\mathrm{H}^*(Z;\mathbb{F})$. Ademais, uma vez que $[\zeta, e_n] = 1$, temos que $e_0 \smile e_n = re_n$, onde $r = [\zeta, e_0 \smile e_n] = y_{i_0j_0} = y_{j_0i_0}$. Assim,

$$\begin{aligned} c_{i_0j_0} f^*(e_0) \smile g^*(e_n) &= c_{i_0j_0} g^*(e_0) \smile g^*(e_n) \\ &= g^*(c_{i_0j_0} e_0 \smile e_n) \\ &= g^*(c_{i_0j_0} y_{i_0j_0} e_n) \\ &= (-1)^n g^*(e_n). \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} c_{j_0i_0} f^*(e_n) \smile g^*(e_0) &= f^*(c_{i_0j_0} e_n \smile e_0) \\ &= f^*(c_{j_0i_0} y_{j_0i_0} e_n) \\ &= f^*(e_n). \end{aligned}$$

<u>**Desenvolvimento da parte (II)**</u>: Como g é um fator cohomológico de f, temos

$$\begin{aligned} \sum_{0<q_i<n} c_{ij} f^*(\alpha_i) \smile g^*(\alpha_j) &= \sum_{0<q_i<n} c_{ij} g^* \varphi_{q_i}(\alpha_i) \smile g^*(\alpha_j) \\ &= g^* \left(\sum_{0<q_i<n} c_{ij} \varphi_{q_i}(\alpha_i) \smile \alpha_j \right). \end{aligned}$$

Escrevendo $\varphi_{q_i}(\alpha_i) = \sum_k a_{ki}\alpha_k$, onde $a_{ki} = 0$ se $q_k \neq q_i$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{0<q_i<n} c_{ij} \varphi_{q_i}(\alpha_i) \smile \alpha_j &= \sum_{i,j} \sum_k a_{ki} c_{ij} \alpha_k \smile \alpha_j \\ &= \sum_{i,k} a_{ki} \sum_j c_{ij} \alpha_k \smile \alpha_j \in \mathrm{H}^n(N; \mathbb{F}). \end{aligned}$$

Se escrevemos $\sum_{i,k} a_{ki} \sum_j c_{ij}\alpha_k \smile \alpha_j = r' e_n$, uma vez que $[\zeta, e_n] = 1$, segue que

$$\begin{aligned} r' &= \left[\zeta, \sum_{i,k} a_{ki} \sum_j c_{ij} \alpha_k \smile \alpha_j \right] \\ &= \sum_{i,k} a_{ki} \sum_j c_{ij} [\zeta, \alpha_k \smile \alpha_j] \\ &= \sum_{i,k} a_{ki} \sum_j c_{ij} y_{kj} \\ &= \sum_{i,k} a_{ki} (-1)^{q_k} \delta_{ik} \\ &= \sum (-1)^{q_k} \text{traço}(\varphi_{q_k}) = \Lambda(\varphi). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{0<q_i<n} c_{ij} f^*(\alpha_i) \smile g^*(\alpha_j) &= g^*(\sum_{0<q_i<n} c_{ij} \varphi_{q_i}(\alpha_i) \smile \alpha_j) \\ &= g^*(\Lambda(\varphi) e_n) = \Lambda(\varphi) g^*(e_n). \end{aligned}$$

Por tudo isso, concluímos que

$$L(f, g) = f^*(e_n) + \Lambda(\varphi) g^*(e_n) + (-1)^n g^*(e_n).$$

■

Corolário 2.1.5. *Sejam $f, g : Z \to N$ funções contínuas. Se g é um fator cohomológico de f nas dimensões $0 < q_p < n$ via homomorfismos $\varphi_{q_p} : \mathrm{H}^{q_p}(N; \mathbb{F}) \to \mathrm{H}^{q_p}(N; \mathbb{F})$ e*

$$f^*(e_n) + \Lambda(\varphi) g^*(e_n) + (-1)^n g^*(e_n) \neq 0$$

então f e g possuem coincidência.

Corolário 2.1.6. *Sejam $f, g : Z \to N$ funções contínuas homotópicas. Então,*

$$L(f, g) = L(g, g) = \chi(N) g^*(e_n).$$

Em particular, se o homomorfismo $g^* : \mathrm{H}^n(N) \to \mathrm{H}^n(Z)$ é não nulo e $\chi(N) \neq 0$ então, para toda função contínua $f : Z \to N$ homotópica à g, existe $x \in Z$ tal que $f(x) = g(x)$.

Observação 2.1.7. No caso em que Z é também uma n-variedade fechada, conexa e $\mathbb{F}$-orientada, denotando por $\zeta' \in \mathrm{H}_n(Z; \mathbb{F})$ sua classe fundamental de $\mathbb{F}$-orientação, temos

$$\Lambda(g, g) = [\zeta', L(g, g)] = [\zeta', \chi(N) g^*(e_n)] = \chi(N) \cdot \mathrm{grau}(g).$$

Esse resultado pode ser encontrado em ([7], Corollary 14.7, pag. 398).

2.2 Variedades com Bordo

Nessa seção, M denota uma n-variedade com bordo $\partial M \neq \emptyset$, conexa, compacta e $\mathbb{F}$-orientada. Os espaços de (co)homologia são todos considerados com coeficientes em $\mathbb{F}$.

Dadas uma função contínua $f : X \to M$ e uma função de pares $g : (X, A) \to (M, \partial M)$, estudamos condições para que exista $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. No caso em que M é o disco n-dimensional D^n, uma condição suficiente sobre a aplicação g é que o homomorfismo induzido $g_n^* : \mathrm{H}^n(D^n, S^{n-1}) \to \mathrm{H}^n(X, A)$ seja não nulo. O próximo teorema mostra que, no caso de uma n-variedade M qualquer, se o homomorfismo $g_n^* : \mathrm{H}^n(M, \partial M) \to \mathrm{H}^n(X, A)$ é não nulo então g possui coincidência com toda função $f : X \to M$ para a qual g é, de um modo especial, fator cohomológico nas dimensões $p = 1, \ldots, n-1$.

Teorema 2.2.1. *Seja (X, A) um par topológico tal que A é aberto ou fechado em X e seja $g : (X, A) \to (M, \partial M)$ uma função contínua tal que $g_n^* : \mathrm{H}^n(M, \partial M) \to \mathrm{H}^n(X, A)$ é não trivial. Se $f : X \to M$ é uma função contínua tal que g é fator cohomológico de f nas dimensões $1 \leq p \leq n-1$ via homomorfismos $\varphi_p : \mathrm{H}^p(M) \to \mathrm{H}^p(M)$ tais que*

$$\Lambda(\varphi) := \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p \, \textit{traço}(\varphi_p) \neq (-1)^{n+1}$$

então f e g possuem ao menos uma coincidência.

Demonstração:

Passo 1: Seja N o espaço obtido da união disjunta $M \times \{0\} \bigcup M \times \{1\}$ por identificação de $(x, 0)$ com $(x, 1)$ para cada $x \in \partial M$. O espaço N é conhecido como o espaço dobro de M. O espaço N é uma n-variedade sem bordo, conexa e compacta. Além disso, existe uma única $\mathbb{F}$-orientação de N que induz a dada $\mathbb{F}$-orientação de M.

A projeção natural $\pi : M \times \{0\} \bigcup M \times \{1\} \to N$ leva cada $M \times \{i\}$ homeomorficamente sobre o subconjunto fechado

$$M_i = \{[(y, i)] \mid y \in M\}$$

de N, $i = 0, 1$, onde $[(y, i)]$ denota a classe de equivalência de (y, i) em N. Denotamos por ∂M_i a imagem de $\partial M \times \{i\}$ pela projeção natural, isto é, $\partial M_i = \{[(y, i)] \mid y \in \partial M\}$. Obviamente, $\partial M_0 = \partial M_1$.

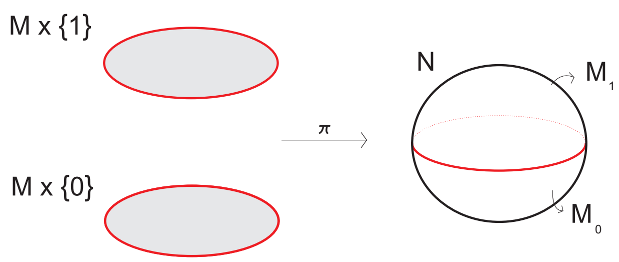

Figura 2.1: Passo 1

Passo 2: Seja $Z = X \bigcup_A X$ o espaço obtido da união disjunta $X \times \{0\} \bigcup X \times \{1\}$ por identificação de $(a, 0)$ com $(a, 1)$ para cada $a \in A$. Sendo A aberto ou fechado em X, segue que cada $X \times \{i\}$ é levado homeomorficamente pela projeção natural $\pi' : X \times \{0\} \bigcup X \times \{1\} \to Z$ sobre o subespaço

$$X_i = \{[(x, i)] \mid x \in X\}$$

de Z, $i = 0, 1$, onde $[(x, i)]$ denota a classe de equivalência de (x, i) em Z. De fato, claramente $\pi'|_{X \times \{i\}} : X \times \{i\} \to X_i$ é uma bijeção contínua. Para ver que a aplicação é também aberta(fechada), note que para cada $C \subset X$ temos

$$\pi'^{-1}(\pi'(C \times \{i\})) = C \times \{i\} \cup ((C \cap A) \times \{j\}), \quad j \in \{0, 1\} - \{i\}.$$

Logo, se A é aberto(fechado) então $\pi'|_{X \times \{i\}} : X \times \{i\} \to X_i$ é aberta(fechada).

Passo 3: A função $g : (X, A) \to (M, \partial M)$ induz uma função contínua $\widetilde{g} : Z \to N$ do seguinte modo: para cada $[(x, i)] \in Z$, definimos

$$\widetilde{g}\,([(x, i)]) = [(g(x), i)]\,.$$

Desde que $g(A) \subset \partial M$, a função $\widetilde{g}$ está bem definida. Temos que X_0 é um retrato de Z e M_0 é um retrato de N via retrações

$$Z \to X_0$$

$$[(x, j)] \to [(x, 0)], \;\; x \in X, \;\; j = 0, 1$$

e

$$N \to M_0$$

$$[(y, j)] \to [(y, 0)], \;\; y \in N, \;\; j = 0, 1.$$

Segue que $\mathrm{H}^p(Z) = \mathrm{H}^p(X_0) \oplus \mathrm{H}^p(Z, X_0)$ e $\mathrm{H}^p(N) = \mathrm{H}^p(M_0) \oplus \mathrm{H}^p(N, M_0)$, para todo p. Além disso, como $\widetilde{g}(X_0) \subset M_0$, temos que o homomorfismo induzido

$$\widetilde{g}_p^* : \mathrm{H}^p(N) \to \mathrm{H}^p(Z)$$

é fatorado do seguinte modo: para cada $(u, v) \in \mathrm{H}^p(M_0) \oplus \mathrm{H}^p(N, M_0)$,

$$\widetilde{g}_p^*(u, v) = (\widetilde{g_1}_p^*(u), \widetilde{g_2}_p^*(v)) \in \mathrm{H}^p(X_0) \oplus \mathrm{H}^p(Z, X_0),$$

onde $\widetilde{g_1} : X_0 \to M_0$ e $\widetilde{g_2} : (Z, X_0) \to (N, M_0)$ são as funções induzidas por $\widetilde{g}$.

Afirmamos que o homomorfismo induzido $\widetilde{g}_n^* : \mathrm{H}^n(N) \to \mathrm{H}^n(Z)$ é não nulo. Afim de prová-lo, é suficiente mostrarmos que $\widetilde{g_2}_n^* : \mathrm{H}^n(N, M_0) \to \mathrm{H}^n(Z, X_0)$ é não nulo. Considere o subespaço $B = \{[(x, j)] \mid x \in A,\ j = 0, 1\}$ de Z. Sejam $j : (X_1, B) \to (Z, X_0)$ e $i : (M_1, \partial M_1) \to (N, M_0)$ as inclusões. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(Z, X_0) \arrow[r, "\widetilde{g_2}"] & (N, M_0) \\
(X_1, B) \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\widetilde{g_2}"] & (M_1, \partial M_1) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Note que, uma vez que $\widetilde{g_2} : (X_1, B) \to (M_1, \partial M_1)$ é como a função $g : (X, A) \to (M, \partial M)$, o homomorfismo $\widetilde{g_2}_n^* : \mathrm{H}^n(M_1, \partial M_1) \to \mathrm{H}^n(X_1, B)$ é não nulo. Outro fato é que $i_n^* : \mathrm{H}^n(N, M_0) \to \mathrm{H}^n(M_1, \partial M_1)$ é um isomorfismo. De fato, temos que ∂M possui uma vizinhança aberta V em M homeomorfa à $\partial M \times [0, 1)$, o chamado colarinho. Sejam $W_1 = \pi(V \times \{0\} \cup M \times \{1\})$ e $W_2 = \pi(V \times \{0\})$ e considere as inclusões $j_1 : (M_1, \partial M_1) \to (W_1, W_2)$ e $j_2 : (W_1, W_2) \to (N, M_0)$. Então, $i = j_2 \circ j_1$. Note que $j_2 : (W_1, W_2) \to (N, M_0)$ é uma excisão e que $(M_1, \partial M_1)$ é um retrato por deformação forte de (W_1, W_2). Logo, j_1^* e j_2^* são isomorfismos. Portanto, i^* é isomorfismo.

Segue que $\widetilde{g_2}_n^* : \mathrm{H}^n(N, M_0) \to \mathrm{H}^n(Z, X_0)$ é não nulo. Portanto, $\widetilde{g}_n^* : \mathrm{H}^n(N) \to \mathrm{H}^n(Z)$ é não nulo.

Passo 4: Seja $f : X \to M$ uma função contínua e suponha que para cada $1 \leq p \leq n-1$ existe um homomorfismo $\varphi_p : \mathrm{H}^p(M) \to \mathrm{H}^p(M)$ tal que $f_p^* = g_p^* \circ \varphi_p$. Da função f, definimos $\widetilde{f} : Z \to N$ por

$$\widetilde{f}([(x, i)]) = [(f(x), 0)],\ x \in X,\ i = 0, 1.$$

Como $f(X_0) \subset M_0$, temos que $\widetilde{f}_p^* : \mathrm{H}^p(N) \to \mathrm{H}^p(Z)$ é fatorado do seguinte modo: para cada $(u, v) \in \mathrm{H}^p(M_0) \oplus \mathrm{H}^p(N, M_0)$, temos

$$\widetilde{f}_p^*(u, v) = (\widetilde{f_1}_p^*(u), \widetilde{f_2}_p^*(v)) \in \mathrm{H}^p(X_0) \oplus \mathrm{H}^p(Z, X_0),$$

onde $\widetilde{f}_1 : X_0 \to M_0$ e $\widetilde{f}_2 : (Z, X_0) \to (N, M_0)$ são as funções induzidas por $\widetilde{f}$. Note que $\widetilde{f}_{2_p}^{\,*}$ é um homomorfismo nulo, qualquer que seja p, pois $\widetilde{f}(Z) \subset M_0$. Portanto,

$$\widetilde{f}_p^*(u,v) = (\widetilde{f}_{1_p}^{\,*}(u), 0), \quad \text{para todo } \ (u,v) \in \mathrm{H}^p(M_0) \oplus \mathrm{H}^p(N, M_0).$$

Além disso, a função $\widetilde{f}_1 : X_0 \to M_0$ é como a função $f : X \to M$. Assim, para cada $1 \leq p \leq n-1$, seja $\psi_p : \mathrm{H}^p(M_0) \oplus \mathrm{H}^p(N, M_0) \to \mathrm{H}^p(M_0) \oplus \mathrm{H}^p(N, M_0)$ dada por

$$\psi_p(u,v) = (\varphi_p(u), 0), \ \text{para todo } u \in \mathrm{H}^p(M_0) \text{ e todo } v \in \mathrm{H}^p(N, M_0).$$

Note que

$$\Lambda(\psi) := \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p \,\text{traço}(\psi_p) = \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p \,\text{traço}(\varphi_p) = \Lambda(\varphi).$$

Além disso,

$$\widetilde{g}_p^* \circ \psi_p = (g_p^* \circ \varphi_p, 0) = (f_p^*, 0) = \widetilde{f}_p^*, \quad 1 \leq p \leq n-1.$$

Logo, pelo Teorema 2.1.4,

$$L(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \widetilde{f}^*(e_n) + (-1)^n \widetilde{g}^*(e_n) + \Lambda(\varphi)\widetilde{g}^*(e_n).$$

Temos ainda que $\widetilde{f}^*(e_n) = 0$, uma vez que $\widetilde{f}(Z) \subset M_0$ e $\mathrm{H}^n(M_0) = 0$. Portanto,

$$L(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = (-1)^n \widetilde{g}^*(e_n) + \Lambda(\varphi)\widetilde{g}^*(e_n).$$

Vimos no ***passo 3*** que $\widetilde{g}^*(e_n) \neq 0$. Agora, tendo, por hipótese, $\Lambda(\varphi) \neq (-1)^{n+1}$, segue que $L(\widetilde{f}, \widetilde{g}) \neq 0$. Logo, $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ possuem uma coincidência. Seja $[(x,i)] \in Z$ tal que $\widetilde{f}[(x,i)] = \widetilde{g}[(x,i)]$. Segue que $[(f(x), 0)] = [(g(x), i)]$ e, portanto, $f(x) = g(x)$. ■

Observação 2.2.2. O Teorema 2.2.1 continua verdadeiro se consideramos a cohomologia de Čech com coeficientes em $\mathbb{F}$ em vez da singular, uma vez que essa teoria satisfaz todos os axiomas de Eilenberg-Steenrod. Explicitamente:

Teorema 2.2.1'. Seja (X, A) um par topológico tal que A é aberto ou fechado em X e seja $g : (X, A) \to (M, \partial M)$ uma função contínua tal que $g_n^* : \mathrm{H}^n(M, \partial M) \to \check{\mathrm{H}}^n(X, A)$ é não trivial. Se $f : X \to M$ é uma função contínua tal que g é fator cohomológico de f nas dimensões $1 \leq p \leq n-1$ via homomorfismos $\varphi_p : \mathrm{H}^p(M) \to \mathrm{H}^p(M)$ tais que

$$\Lambda(\varphi) := \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p \,\text{traço}(\varphi_p) \neq (-1)^{n+1}$$

então f e g possuem ao menos uma coincidência.

A observação acima será útil na extensão de alguns resultados às aplicações de multivalores.

Corolário 2.2.3. *Seja (X, A) um par topológico tal que A é aberto ou fechado em X e seja $g : (X, A) \to (M, \partial M)$ uma função contínua tal que $g_n^* : \mathrm{H}^n(M, \partial M) \to \mathrm{H}^n(X, A)$ é não trivial. Seja $f : X \to M$ homotópica à g. Se n é par e $\chi(M) \neq 0$ então f e g possuem coincidência. Se n é ímpar e $\chi(M) \neq 2$ então f e g possuem coincidência.*

Demonstração: Uma vez que f é homotópica à g, temos que g é fator cohomológico de f em qualquer dimensão p via homomorfismo identidade $id : \mathrm{H}^p(M) \to \mathrm{H}^p(M)$. Considere a família $\varphi = \{id : \mathrm{H}^p(M) \to \mathrm{H}^p(M)\}_{p=1}^{n-1}$. Temos

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^p(M) = \chi(M) - 1.$$

Do Teorema 2.2.1, se $\Lambda(\varphi) = \chi(M) - 1 \neq (-1)^{n+1}$ então f e g possuem coincidência. Logo, se n é par e $\chi(M) \neq 0$ então f e g possuem coincidência e se n é ímpar e $\chi(M) \neq 2$ então f e g possuem coincidência. ■

Exemplo 2.2.4. Considere a variedade produto $M = D^{2l} \times S^k$ de dimensão $2l + k$, cujo bordo é $\partial M = S^{2l-1} \times S^k$. Seja $g : (X, A) \to (D^{2l} \times S^k, S^{2l-1} \times S^k)$ tal que $g_{2l+k}^* : \mathrm{H}^{2l+k}(D^{2l} \times S^k, S^{2l-1} \times S^k) \to \mathrm{H}^{2l+k}(X, A)$ é não nulo. Então, para toda função $f : X \to D^{2l} \times S^k$ homotópica à g existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. De fato, note que

$$\chi(M) = \chi(S^k) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \\ 2, & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases}$$

Agora, $2l + k$ é ímpar se k é ímpar e $2l + k$ é par se k é par. Então, o resultado segue do Corolário 2.2.3.

Um espaço topológico compacto X é dito $\mathbb{F}$-acíclico (com respeito ao funtor H^*) se $\mathrm{H}^0(X; \mathbb{F}) = \mathbb{F}$ e $\mathrm{H}^q(X; \mathbb{F}) = 0$, para todo $q > 0$.

Corolário 2.2.5. *Seja (X, A) um par topológico tal que A é aberto ou fechado em X e seja $g : (X, A) \to (M, \partial M)$ uma função contínua tal que $g_n^* : \mathrm{H}^n(M, \partial M) \to \mathrm{H}^n(X, A)$ é não trivial. Se M é $\mathbb{F}$-acíclico então, para toda função contínua $f : X \to M$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.*

Corolário 2.2.6. *Seja (X, A) um par topológico tal que A é aberto ou fechado em X e seja $g : (X, A) \to (D^n, S^{n-1})$ uma função contínua tal que $g_n^* : \mathrm{H}^n(D^n, S^{n-1}) \to \mathrm{H}^n(X, A)$ é não trivial. Então, para toda função contínua $f : X \to M$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.*

Note que o Corolário 2.2.6 inclui o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer. De fato, basta considerar $X = D^n$, $A = S^{n-1}$ e $g : (D^n, S^{n-1}) \to (D^n, S^{n-1})$ a função identidade.

Uma função contínua $g : X \to Y$ é dita "coincidence producing" se para toda função $f : X \to Y$ tem-se $\mathrm{Coin}(f, g) \neq \emptyset$, onde

$$\mathrm{Coin}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Do Corolário 2.2.5, vemos que se M é uma n-variedade com bordo ∂M não vazio, conexa, compacta, $\mathbb{F}$-orientada e $\mathbb{F}$-acíclica e $g : (X, g^{-1}(\partial M)) \to (M, \partial M)$ é uma aplicação de pares tal que $g_n^* : \mathrm{H}^n(M, \partial M) \to \mathrm{H}^n(X, g^{-1}(\partial M))$ é não trivial, então g é uma função "coincidence producing". Em [8], temos o seguinte:

Teorema 2.2.7 ([8], Theorem 7.1)**.** *Seja $g : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$, onde X e Y são n-variedades com bordo não vazio, triangularizáveis, orientadas, conexas e compactas.*

(i) *Se $n = 1$ então g é "coincidence-producing" se, e somente se, g é sobrejetiva.*

(ii) *Se $n \geq 2$ e Y é $\mathbb{Q}$-acíclico então g é "coincidence-producing" se, e somente se, o homomorfismo $g_* : \mathrm{H}_n(X, \partial X; \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_n(Y, \partial Y; \mathbb{Q})$ é não trivial.*

Exemplo 2.2.8. Seja $g : (D^n, S^{n-1}) \to (D^n, S^{n-1})$ uma função contínua, $n \geq 2$. Então, o homomorfismo $g_n^* : \mathrm{H}^n(D^n, S^{n-1}) \to \mathrm{H}^n(D^n, S^{n-1})$ é não nulo se, e somente se, o homomorfismo $g_{n-1}^* : \mathrm{H}^{n-1}(S^{n-1}) \to \mathrm{H}^{n-1}(S^{n-1})$ é não nulo. Isso segue diretamente do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}^*"] & \mathrm{H}^n(D^n, S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "g_n^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] & \mathrm{H}^n(D^n, S^{n-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde as linhas são exatas.

Considere $I = [0,1]$ e $g : I^2 \to I^2$ dada por $g(x_1, x_2) = (6x_1^3 - 9x_1^2 + 4x_1, \sin \frac{x_2 \pi}{2})$. Então, $g(\partial I^2) \subset \partial I^2$. Ainda, o homomorfismo $g_2^* : \mathrm{H}^2(I^2, \partial I^2) \to \mathrm{H}^2(I^2, \partial I^2)$ é não nulo. De fato, basta provar que o grau de $g : \partial I^2 \to \partial I^2$ é diferente de zero. Considere $c : [0,1] \to \mathbb{C} - \{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\}$ dada por

$$c(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \le t \le 1/4; \\ 1 + (4t-1)i, & 1/4 \le t \le 2/4; \\ (3-4t) + i, & 2/4 \le t \le 3/4; \\ (4-4t)i, & 3/4 \le t \le 1. \end{cases}$$

Então, o grau d de $g : \partial I^2 \to \partial I^2$ é escrito como

$$d = \frac{1}{2\pi i} \int_{g \circ c} \frac{1}{z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}}\, dz, \tag{2.3}$$

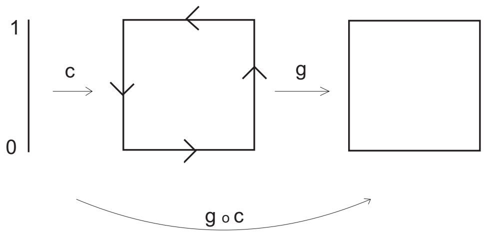

Figura 2.2: Exemplo 2.2.8

Calculando a integral complexa dada em (2.3), concluímos que $d = 1$. Segue que o homomorfismo $g_{*_1} : \mathrm{H}_1(\partial I^2) \to \mathrm{H}_1(\partial I^2)$ é não nulo, o que é equivalente ao homomorfismo $g_1^* : \mathrm{H}^1(\partial I^2) \to \mathrm{H}^1(\partial I^2)$ ser não nulo. Logo, pelo Corolário 2.2.6, para toda função contínua $f : I^2 \to I^2$ existe $x \in I^2$ tal que $f(x) = g(x)$.

Exemplo 2.2.9. Considere X o espaço obtido do toro T^2 retirando-lhe um pequeno disco aberto $\overset{\circ}{D^2}$. Seja $A = \partial X$ e defina $g : (X, A) \to (D^2, S^1)$ como sugere a figura 2.3: g de A sobre S^1 é uma aplicação de grau 1 e g colapsa o conjunto em verde num ponto do interior de D^2. Então, $g_2^* : \mathrm{H}^2(D^2, S^1) \to \mathrm{H}^2(X, A)$ é um homomorfismo não nulo. De fato, como $i_* : \mathrm{H}_1(A) \to \mathrm{H}_1(X)$ é nulo, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{H}_2(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "g_{*_2}"] & \mathrm{H}_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "g_{*_1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{H}_2(D^2,S^1) \arrow[r] & \mathrm{H}_1(S^1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

onde as linhas são exatas. Uma vez que $g_{*_1} : \mathrm{H}_1(A) \to \mathrm{H}_1(S^1)$ é não nulo, segue que $g_{*_2} : \mathrm{H}_2(X, A) \to \mathrm{H}_2(D^2, S^1)$ é não nulo, o que é equivalente ao homomorfismo $g_2^* : \mathrm{H}^2(D^2, S^1) \to \mathrm{H}^2(X, A)$ ser não nulo. Logo, pelo Corolário 2.2.6, para toda $f : X \to D^2$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.

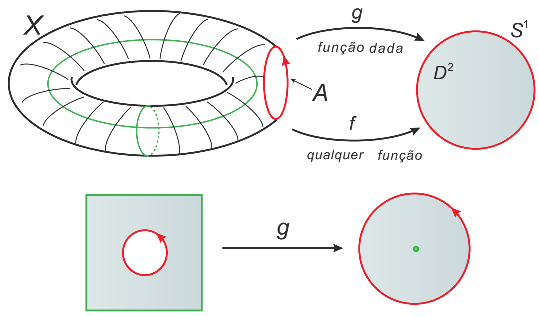

Figura 2.3: Exemplo 2.2.9

Mais geralmente, se M e N são n-variedades com bordo, compactas e $\mathbb{F}$-orientadas e tal que ∂M é conexo então, dada $g : (N, \partial N) \to (M, \partial M)$ contínua, o homomorfismo induzido $g_{*_n} : \mathrm{H}_n(M, \partial M) \to \mathrm{H}_n(N, \partial N)$ é não nulo se o grau da aplicação $g|_{\partial N} : \partial N \to \partial M$ é diferente de zero. De fato, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}_n(N, \partial N) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}_{n-1}(\partial N) \\ & & \downarrow{\scriptstyle g_{*n}} & & \downarrow{\scriptstyle g_{*n-1}} \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}_n(M, \partial M) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}_{n-1}(\partial M) \end{array}$$

onde as linhas são exatas. Sejam $\zeta_N \in \mathrm{H}_n(N, \partial N)$ e $\zeta_M \in \mathrm{H}_n(M, \partial M)$ as classes fundamentais. Então, $\partial(\zeta_N)$ e $\partial(\zeta_M)$ são as classes fundamentais de $\mathbb{F}$-orientação de ∂N e ∂M, respectivamente. Assim, supondo o grau da aplicação $g|_{\partial N} : \partial N \to \partial M$ diferente de zero, temos $\partial(g_{*_n}(\zeta_N)) = g_{*_{n-1}}(\partial(\zeta_N)) \neq 0$. Logo, $g_{*_n}(\zeta_N) \neq 0$ e, portanto, g_{*_n} é não nula.

2.3 Teoremas de ponto fixo de Lefschetz para aplicações de multivalores

Como dissemos no início desse capítulo, o famoso teorema de ponto fixo de Lefschetz foi por ele formulado em 1923 para as variedades fechadas. Mais tarde, em 1928, H. Hopf demonstrou o teorema de Lefschetz para poliedros quaisquer. E, uma vez que todo ANR compacto é homotopicamente equivalente a um poliedro, fica demonstrado que o teorema de Lefschetz é válido também para essa classe de espaços topológicos.

Os primeiros a estudarem teoremas de ponto fixo de Lefschetz para aplicações de multivalores foram S. Eilenberg e D. Montgomery no artigo [12] de 1946. Nesse artigo, dados um espaço métrico ANR compacto M e uma aplicação de multivalores $\varphi : M \multimap M$ acíclica, os autores definem o número de Lefschetz de φ, $\Lambda(\varphi)$, e demonstram que $\Lambda(\varphi) \neq 0$ implica na existência de $x \in M$ tal que $x \in \varphi(x)$. A seguir, apresentaremos a construção de $\Lambda(\varphi)$. Muito importante para a definição de $\Lambda(\varphi)$ é o Teorema de Begle-Vietoris.

Nessa seção, consideramos $\check{\mathrm{H}}_*$ (respectivamente, $\check{\mathrm{H}}^*$) o funtor homologia (respectivamente, cohomologia) de Čech com coeficientes em $\mathbb{Q}$.

Dizemos que um espaço compacto X é acíclico (com respeito ao funtor $\check{\mathrm{H}}_*$) se $\check{\mathrm{H}}_0(X) = \mathbb{Q}$ e $\check{\mathrm{H}}_q(X) = 0$, para todo $q > 0$.

Dizemos que uma aplicação de multivalores s.c.s. $\varphi : X \multimap Y$ é acíclica se, para todo $x \in X$, o conjunto $\varphi(x)$ é acíclico.

Sejam X, Y espaços compactos. Uma função contínua $f : X \to Y$ é chamada uma função de Vietoris se, para todo $y \in Y$, o conjunto $f^{-1}(y)$ é acíclico. Em [3], temos o seguinte resultado sobre as funções de Vietoris:

Teorema de Begle-Vietoris: Sejam X, Y espaços compactos. Se $f : X \to Y$ é uma função de Vietoris então $f_* : \check{\mathrm{H}}_*(X) \to \check{\mathrm{H}}_*(Y)$ é um isomorfismo.

Como dissemos, a teoria de ponto fixo de Lefschetz para aplicações de multivalores acíclicas foi introduzida por S. Eilenberg e D. Montgomery no artigo [12]. Nele, dados um espaço métrico ANR compacto M e uma aplicação de multivalores $\varphi : M \multimap M$ acíclica, os autores definem o número de Lefschetz de φ da seguinte forma:

- Considere $\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in M \times M \mid y \in \varphi(x)\}$ o gráfico de φ. Sejam $p, q : \Gamma_\varphi \to M$ as projeções
$$p(x, y) = x \quad \text{e} \quad q(x, y) = y, \text{ para todo } (x, y) \in \Gamma_\varphi.$$
- Veja que, para cada $x \in M$, $p^{-1}(x) = \{x\} \times \varphi(x)$ é um espaço acíclico, uma vez que $\varphi(x)$ o é. Assim, p é uma função de Vietoris. Logo, pelo teorema de Begle-Vietoris, $p_* : \check{\mathrm{H}}_*(\Gamma_\varphi) \to \check{\mathrm{H}}_*(M)$ é um isomorfismo.

- Finalmente, o número de Lefschetz de φ é definido por

$$\Lambda(\varphi) = \sum_i \text{traço}(q_{*_i} p_{*_i}^{-1}).$$

S. Eilenberg e D. Montgomery demonstraram em [12] que:

Teorema 2.3.1 ([12], Theorem 5)**.** *Sejam M um espaço métrico ANR compacto e $\varphi : M \multimap M$ uma aplicação de multivalores acíclica. Se $\Lambda(\varphi) \neq 0$ então φ possui ponto fixo, isto é, existe $x \in M$ tal que $x \in \varphi(x)$.*

Como consequência do Teorema 2.3.1, eles obtêm:

Teorema 2.3.2 ([12], Theorem 1)**.** *Sejam M um espaço métrico ANR compacto acíclico e $\varphi : M \multimap M$ uma aplicação de multivalores acíclica. Então, existe $x \in M$ tal que $x \in \varphi(x)$.*

E, por conseguinte, o Teorema de ponto fixo de Kakutani:

Teorema de ponto fixo de Kakutani. Seja M um subconjunto compacto e convexo de um espaço euclideano e seja $\varphi : M \multimap M$ uma aplicação de multivalores s.c.s. tal que $\varphi(x)$ é convexo para todo $x \in M$. Então, existe $x \in M$ tal que $x \in \varphi(x)$.

Para as aplicações de multivalores, o resultado relativo ao Teorema de Ponto Fixo de Brouwer é o Teorema de Ponto Fixo de Kakutani. Nós demonstramos que também o Corolário 2.2.5 possui uma versão com respeito às aplicações de multivalores. É a seguinte:

Teorema 2.3.3. *Sejam (X, A) um par topológico compacto, M uma variedade com bordo, conexa, compacta e orientada e $g : (X, A) \to (M, \partial M)$ uma função contínua tal que $g_n^* : \mathrm{H}^n(M, \partial M) \to \check{\mathrm{H}}^n(X, A)$ é não nulo. Se M é acíclico então, para toda aplicação de multivalores $\varphi : X \multimap M$ acíclica existe $x \in X$ tal que $g(x) \in \varphi(x)$.*

Para demonstrar o Teorema 2.3.3, fazemos uso do teorema de Begle-Vietoris com respeito ao funtor cohomologia de Čech com coeficiente em $\mathbb{Q}$. Precisamos também do seguinte:

Proposição 2.3.4. *Sejam (X, X_0) e (Y, Y_0) pares compactos e $f : (X, X_0) \to (Y, Y_0)$ uma função de pares tal que $f^{-1}(Y_0) = X_0$ e $f^{-1}(y)$ é acíclico para todo $y \in Y$. Então, $f^* : \check{\mathrm{H}}^*(X, X_0) \to \check{\mathrm{H}}^*(Y, Y_0)$ é um isomorfismo.*

Demonstração: A demonstração é uma aplicação do teorema de Begle-Vietoris com respeito ao funtor cohomologia de Čech com coeficiente em $\mathbb{Q}$, do axioma de exatidão para esse funtor e do lema dos cinco. ■

Demostração do Teorema 2.3.3: Seja $\varphi : X \multimap M$ uma aplicação de multivalores acíclica e considere

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in X \times M \mid y \in \varphi(x)\}$$

o gráfico de φ. Considere também as projeções

$$p : \Gamma_\varphi \to X$$

e

$$q : \Gamma_\varphi \to M$$

definidas por

$$p(x, y) = x \quad \text{e} \quad q(x, y) = y, \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in \Gamma_\varphi.$$

Assim, $p^{-1}(x) = \{x\} \times \varphi(x)$, para todo $x \in X$ e, desde que φ é acíclica, concluímos que p é uma função de Vietoris.

Defina

$$\Gamma_A = \{(x, y) \in A \times M \mid y \in \varphi(x)\}$$

e considere a função

$$\tilde{g} : (\Gamma_\varphi, \Gamma_A) \to (M, \partial M)$$

dada por

$$\tilde{g}(x, y) = g(x), \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in \Gamma_\varphi.$$

Note que existe $x \in X$ tal que $g(x) \in \varphi(x)$ se, e somente se, existe $(x, y) \in \Gamma_\varphi$ tal que $\tilde{g}(x, y) = q(x, y)$. Então, para concluir a demonstração, pelo Corolário 2.2.5, é suficiente provarmos que o homomorfismo induzido

$$\tilde{g}_n^* : \mathrm{H}^n(M, \partial M) \to \check{\mathrm{H}}^n(\Gamma_\varphi, \Gamma_A)$$

é não nulo. Note que $p^{-1}(A) = \Gamma_A$ e

$$\tilde{g}(x,y) = (g \circ p)(x,y), \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \Gamma_\varphi.$$

Pela Proposição 2.3.4,

$$p^* : \check{\mathrm{H}}^*(X,A) \to \check{\mathrm{H}}^*(\Gamma_\varphi, \Gamma_A)$$

é um isomorfismo e, desde que

$$g_n^* : \mathrm{H}^n(M, \partial M) \to \check{\mathrm{H}}^n(X,A)$$

é não nulo, concluímos que $\tilde{g}_n^* : \mathrm{H}^n(M,\partial M) \to \check{\mathrm{H}}^n(\Gamma_\varphi, \Gamma_A)$ é não nulo. Logo, pelo Corolário 2.2.5, existe $(x,y) \in \Gamma_\varphi$ tal que $\tilde{g}(x,y) = q(x,y)$. Segue que

$$g(x) = y \in \varphi(x).$$

■

Corolário 2.3.5. *Sejam (X,A) um par topológico compacto e $g : (X,A) \to (D^n, S^{n-1})$ uma função contínua tal que $g_n^* : \mathrm{H}^n(D^n, S^{n-1}) \to \check{\mathrm{H}}^n(X,A)$ é não trivial. Então, para toda aplicação de multivalores $\varphi : X \multimap D^n$ acíclica existe $x \in X$ tal que $g(x) \in \varphi(x)$.*

Capítulo

3

Teoremas de Equilíbrio de Nash

No artigo [32], John Forbes Nash Jr. apresenta os principais resultados de sua tese de doutorado. Dentre eles, o seu reconhecido conceito de solução para jogos não cooperativos - o chamado equilíbrio de Nash - e um teorema de existência de equilíbrio cuja prova envolve o teorema de ponto fixo de Brouwer.

Neste capítulo, nós apresentamos generalizações dos teoremas de Nash sobre equilíbrio para jogos não cooperativos. Uma envolve um resultado de coincidência entre funções unívocas e a outra envolve um resultado de coincidência entre uma função unívoca e uma aplicação de multivalores.

3.1 Jogos não cooperativos

Um jogo não cooperativo em n jogadores constitui-se do seguinte:

- um conjunto de n jogadores, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$; e
- a cada jogador i associa-se um conjunto S_i, chamado o seu **espaço de estratégia**, e uma função $p_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$, chamada a sua função **payoff** (função de retorno ou de pagamento).

Comumente, escreve-se $S = S_1 \times \cdots \times S_n$.

Esse conceito pode ser visto como um modelo para qualquer situação de competição na qual o resultado de cada competidor não depende apenas de suas escolhas mas também das escolhas dos demais envolvidos. O axioma de racionalidade que se coloca é que cada jogador i busca fazer uma escolha s_i de modo a maximizar sua payoff $p_i(s_1, \ldots, s_n)$, entendido que, para cada $j \neq i$, o j-ésimo jogador está simultaneamente escolhendo s_j, também com o objetivo de maximizar o valor da sua payoff p_j.

Exemplo 3.1.1. (Modelo de Cournot para oligopólios) Suponha $n(n \geq 2)$ empresas, $\{1, 2, \ldots, n\}$, produtoras de um mesmo produto homogêneo. Denote por s_i a quantidade desse produto produzida pela empresa i e seja f_i sua função custo de produção, ou seja, para produzir a quantidade s_i, a empresa i tem um gasto $f_i(s_i)$. Suponha ainda que o preço de venda do produto no mercado, denotado por q, depende da quantidade total de produção, ou seja, $q = q(\sum_{j=1}^{n} s_j)$ (função demanda inversa). Supondo que o mercado consome a quantidade total produzida pelas empresas, $\sum_{j=1}^{n} s_j$, o lucro da empresa i é expresso por

$$p_i(s_1, \ldots, s_n) = q(\sum_{j=1}^{n} s_j) \cdot s_i - f_i(s_i).$$

Aqui, o dilema da empresa i é decidir qual a quantidade s_i de produção é mais interessante, lembrando que as demais estão simutaneamente com o mesmo dilema.

Exemplo 3.1.2. (O Dilema do Prisioneiro) Pense na situação em que dois prisioneiros (os jogadores), I e II, são mantidos em salas isoladas afim de confessarem um crime que cometeram. As estratégias possíveis de cada prisioneiro são: confessar ou não confessar. Suponha que a matriz de retorno (número de anos de prisão) é dada pelo seguinte

I \ II	não confessa	confessa
não confessa	(1,1)	(5,0)
confessa	(0,5)	(2,2)

onde o par (a, b) indica a anos de prisão para I e b anos de prisão para II. O objetivo de cada prisioneiro é passar o menor número de anos possível na prisão.

Nesse exemplo, solução interessante para ambos os jogadores é aquela em que os dois não confessam o crime, que pode ser obtida caso eles consigam agir de forma cooperativa entre si. Mas, como eles não podem se comunicar, e mesmo que o fizessem, um não tem garantia de que o outro de fato não confesse e, ainda, a pior situação para um deles é justamente aquela em que ele não confessa e o outro o faz, cada prisioneiro pode chegar a conclusão de que o melhor é confessar. Essa solução em que ambos confessam o crime caracteriza-se exatamente como sendo o equilíbrio de Nash para esse jogo, como ficará claro na próxima seção.

3.2 O equilíbrio de Nash

O conceito de solução para jogos não cooperativos que Nash coloca é o seguinte:

Definição 3.2.1. *Sejam $S_1, \dots, S_n$ conjuntos e considere funções reais $p_1, \dots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$. Dizemos que $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n) \in S$ é um* ***equilíbrio de Nash*** *para $p_1, \dots, p_n$ se*

$$p_i(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \dots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}),$$

para todo $s_i \in S_i$, $1 \leq i \leq n$.

No caso em que $p_1, \dots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ modelam uma competição em n jogadores, onde o espaço de estratégia do i-ésimo jogador é o conjunto S_i e sua função payoff é a função p_i, o equilíbrio de Nash é interpretado como uma solução na qual nenhum jogador possui motivação a mudar de estratégia se os demais não o fizerem.

Os teoremas clássicos de Nash sobre a existência de pontos de equilíbrio são os seguintes:

Teorema 3.2.2 ([32], Theorem 1)**.** *Suponha $S_1, \dots, S_n$ subconjuntos compactos e convexos de algum espaço euclideano e sejam $p_1, \dots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas. Se cada função payoff $p_i(s_1, \dots, s_n)$ é linear como uma função de s_i quando as demais coordenadas permanecem fixas, então $p_1, \dots, p_n$ possuem ao menos um equilíbrio de Nash.*

Teorema 3.2.3 ([31])**.** *Suponha $S_1, \dots, S_n$ subconjuntos compactos e convexos de algum espaço euclideano e sejam $p_1, \dots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas. Se cada função payoff $p_i(s_1, \dots, s_n)$ é quasecôncava como uma função de s_i quando as demais coordenadas permanecem fixas, então $p_1, \dots, p_n$ possuem ao menos um equilíbrio de Nash.*

As provas dos teoremas 3.2.2 e 3.2.3 são aplicações dos teoremas de ponto fixo de Brouwer e de Kakutani, respectivamente. Mais do que isso, em [38] e [39], é demonstrado que os teoremas 3.2.2 e 3.2.3 são equivalentes aos teoremas de ponto fixo de Brouwer e de Kakutani. Existem ainda muitos outros exemplos na literatura onde teoremas de equilíbrio são obtidos via teoremas de ponto fixo (ver [14], [19], [33], [37]).

Inspirados por 3.2.2 e 3.2.3, nós demonstramos teoremas sobre a existência de equilíbrio de Nash quando as funções payoff são possivelmente não quasecôncavas, porém elas devem ser uma composição de uma função quasecôncava com uma função "bem comportada". Explicitamente, nós consideramos os seguintes casos:

Caso 1. Sejam $S_1, \ldots, S_n$ espaços topológicos compactos e sejam $C_1, \ldots, C_n$ subconjuntos compactos e convexos de algum espaço euclideano. Ainda, considere C_i mergulhado no espaço euclideano $\mathbb{R}^{d_i}$ de mesma dimensão. Estudamos condições para a existência de equilíbrio de Nash para funções

$$p_1, \ldots p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$$

da seguinte forma

$$p_i(s_1, \ldots, s_n) = \langle v_i(s_1, \ldots, s_n), g_i(s_i) \rangle + u_i(s_1, \ldots, s_n),$$

onde $\langle \ , \ \rangle$ é o produto interno em $\mathbb{R}^{d_i}$, as funções $v_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^{d_i}$ e $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que não dependem da coordenada s_i e $g_i : S_i \to C_i$ é uma função contínua, $1 \leq i \leq n$. Mostraremos que, neste caso, os pontos de equilíbrio são os pontos de coincidência entre $g : S \to C$ com uma certa função $f : S \to C$, onde $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ e $g(s_1, \ldots, s_n) = (g_1(s_1), \ldots, g_n(s_n))$, para todo $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$.

Veja que se $S_i = C_i$ e $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ é uma função linear afim em s_i, $1 \leq i \leq n$, então, pelo teorema de representação de Riesz, a função p_i assume a forma

$$p_i(s_1, \ldots, s_n) = \langle v_i(s_1, \ldots, s_n), s_i \rangle + u_i(s_1, \ldots, s_n),$$

onde as funções $v_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^{d_i}$ e $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ não dependem da coordenada s_i. Assim, as hipóteses do Teorema 3.2.2 estão inclusas no caso 1.

Caso 2. Aqui, consideramos funções $p_1, \ldots p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ tais que os espaços de estratégias $S_1, \ldots, S_n$ são espaços topológicos compactos e as funções payoff são da forma

$$p_i(s_1, \ldots, s_n) = q_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, g_i(s_i), s_{i+1}, \ldots, s_n),$$

onde $C_1, \ldots, C_n$ são subconjuntos compactos e convexos de algum espaço euclideano,

$$q_i : S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times C_i \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$$

é uma função contínua, quasecôncava com respeito a C_i, e $g_i : S_i \to C_i$ é contínua, $1 \leq i \leq n$. Neste caso, mostraremos que os pontos de equilíbrio aparecem como pontos de coincidência entre a função $g : S \to C$ e uma certa aplicação de multivalores $T : S \multimap C$, isto é, os pontos de equilíbrio são os pontos $\tilde{s} \in S$ tal que $g(\tilde{s}) \in T(\tilde{s})$.

Note que, se $C_i = S_i$ e g_i é a função identidade, estamos nas hipóteses do Teorema 3.2.3.

3.3 Novas versões dos teoremas de Nash

3.3.1 Caso 1

Assuma um jogo em n pessoas, $\{1, \ldots, n\}$, com espaços de estratégias $S_1, \ldots, S_n$ e funções payoff $p_1, \ldots p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$, onde:

1. $S_1, \ldots, S_n$ são espaços compactos;
2. $C_1, \ldots, C_n$ são subconjuntos compactos e convexos do espaço euclideano de mesma dimensão, $\mathbb{R}^{d_1}, \ldots, \mathbb{R}^{d_n}$, respectivamente;
3. $v_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^{d_i}$ e $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que não dependem da coordenada $s_i \in S_i$, $1 \leq i \leq n$;
4. $g_i : S_i \to C_i$ é uma função contínua, $1 \leq i \leq n$;
5. A função payoff $p_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ é definida por
$$p_i(s_1, \ldots, s_n) = \langle v_i(s_1, \ldots, s_n), g_i(s_i) \rangle + u_i(s_1, \ldots, s_n),$$
$1 \leq i \leq n$.

Com essas hipóteses, mostraremos que o problema de existência de equilíbrio de Nash está relacionado com um problema de coincidência de funções. Para isso, utilizamos o seguinte resultado:

Lema 3.3.1. *Sejam H um espaço de Hilbert e C um subconjunto fechado e convexo de H. Para cada $u_0 \in H$ existe um único $v_0 \in C$ tal que*
$$\|u_0 - v_0\| = \inf_{v \in C} \|u_0 - v\|.$$

A aplicação

$$u_0 \to v_0$$

é uma função contínua, que chamaremos de retração natural de H sobre C, a qual denotaremos por $r : H \to C$. Se H é um espaço vetorial real então a retração natural r satisfaz a seguinte desigualdade variacional:

$$\langle u_0 - r(u_0), w - r(u_0)\rangle \leq 0, \text{ para todo } w \in C.$$

Denote $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ e $C = C_1 \times \cdots \times C_n$. Como $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ é um subconjunto compacto e convexo do espaço euclideano $\mathbb{R}^d$, $d = d_1 + \cdots + d_n$, pelo Lema 3.3.1, seja $r : \mathbb{R}^d \to C$ a retração natural que a cada $y \in \mathbb{R}^d$ associa o ponto $r(y) \in C$ que realiza a distância de y a C. Ainda, sejam $f, g : S \to C$ as funções definidas por

$$f(s) = r(g(s) + v(s))$$

e

$$g(s_1, \ldots, s_n) = (g_1(s_1), \ldots, g_n(s_n)),$$

para todo $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$.

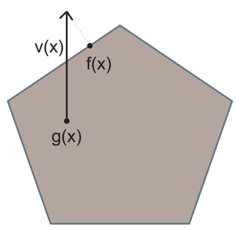

Figura 3.1: Caso 1

Com essa notação, se $f(\tilde{s}) = g(\tilde{s})$ então $\tilde{s}$ é um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$. Além disso, se cada função $g_i : S_i \to C_i$ é sobrejetiva, as coincidências entre f e g constituem exatamente o conjunto dos equilíbrios de Nash para $p_1, \ldots, p_n$. De fato, suponha $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$ tal que $f(\tilde{s}) = g(\tilde{s})$. A retração natural $r : \mathbb{R}^d \to C$ é caracterizada pela desigualdade variacional:

$$\langle y - r(y), w - r(y)\rangle \leq 0, \text{ para todo } w \in C \text{ e todo } y \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1}$$

Sejam $y = g(\tilde{s}) + v(\tilde{s})$ e $w = g(s)$, com $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ arbitrário. Por hipótese,

$$r(y) = r(g(\tilde{s}) + v(\tilde{s})) = f(\tilde{s}) = g(\tilde{s}).$$

Então, de (3.1), concluímos que

$$\langle g(\tilde{s}) + v(\tilde{s}) - g(\tilde{s}), g(s) - g(\tilde{s}) \rangle \leq 0, \text{ para todo } s \in S.$$

Assim,

$$\langle v(\tilde{s}), g(s) - g(\tilde{s}) \rangle \leq 0, \text{ para todo } s \in S. \tag{3.2}$$

De (3.2), segue que

$$\langle v_i(\tilde{s}), g_i(s_i) - g_i(\tilde{s}_i) \rangle \leq 0, \text{ para todo } s_i \in S_i. \tag{3.3}$$

De fato, basta tomar o ponto $(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$ e aplicar (3.2).

Por (3.3), e desde que v_i e u_i não dependem de s_i, temos

$$\begin{aligned}
& p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \\
= \; & \langle v_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n), g_i(s_i) \rangle + u_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \\
= \; & \langle v_i(\tilde{s}), g_i(s_i) \rangle + u_i(\tilde{s}) \\
\leq \; & \langle v_i(\tilde{s}), g_i(\tilde{s}_i) \rangle + u_i(\tilde{s}) \\
= \; & p_i(\tilde{s}).
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{s}$ é um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$.

Por outro lado, suponha $g_i : S_i \to C_i$ sobrejetiva, $1 \leq i \leq n$, e seja

$$\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$$

um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$. Afim de provar que $f(\tilde{s}) = g(\tilde{s})$, note que, uma vez que

$$f(\tilde{s}) = r(g(\tilde{s}) + v(\tilde{s})),$$

pelo Lema 3.3.1, uma condição necessária é que

$$\langle v(\tilde{s}), w - g(\tilde{s}) \rangle \leq 0, \text{ para todo } w \in C.$$

Dado $w = (w_1, \ldots, w_n) \in C$, sendo g_i sobrejetiva, existe $s_i \in S_i$ tal que $g_i(s_i) = w_i$, $1 \leq i \leq n$. Assim,

$$\langle v(\tilde{s}), w - g(\tilde{s}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i(\tilde{s}), g_i(s_i) - g_i(\tilde{s}_i) \rangle.$$

Como $\tilde{s}$ é um equilíbrio para $p_1, \dots, p_n$, temos

$$\begin{aligned} p_i(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \dots, \tilde{s}_n) &= \langle v_i(\tilde{s}), g_i(s_i)\rangle + u_i(\tilde{s}) \\ &\leq \langle v_i(\tilde{s}), g_i(\tilde{s}_i)\rangle + u_i(\tilde{s}), \end{aligned}$$

o que implica que

$$\langle v_i(\tilde{s}), g_i(s_i) - g_i(\tilde{s}_i)\rangle \leq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto,

$$\langle v(\tilde{s}), w - g(\tilde{s})\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i(\tilde{s}), g_i(s_i) - g_i(\tilde{s}_i)\rangle \leq 0.$$

Para concluirmos efetivamente que $f(\tilde{s}) = g(\tilde{s})$, precisamos mostrar que

$$\|v(\tilde{s})\| \leq \|g(\tilde{s}) + v(\tilde{s}) - w\|, \text{ para todo } w \in C.$$

Isso equivale a mostrar que

$$\|v(\tilde{s})\|^2 \leq \|g(\tilde{s}) + v(\tilde{s}) - w\|^2, \text{ para todo } w \in C.$$

De

$$\|g(\tilde{s}) + v(\tilde{s}) - w\|^2 = \|g(\tilde{s}) - w\|^2 + 2\langle g(\tilde{s}) - w, v(\tilde{s})\rangle + \|v(\tilde{s})\|^2,$$

vemos que é suficiente provar que

$$2\langle v(\tilde{s}), w - g(\tilde{s})\rangle \leq \|g(\tilde{s}) - w\|^2,$$

o que de fato ocorre, uma vez que

$$2\langle v(\tilde{s}), w - g(\tilde{s})\rangle \leq 0 \leq \|g(\tilde{s}) - w\|^2.$$

Portanto, $f(\tilde{s}) = g(\tilde{s})$.

Em vista do acima discutido, estabelecemos o seguinte:

Teorema 3.3.2. *Com as hipóteses do caso 1, se existe um subconjunto fechado A de S tal que o homomorfismo induzido $g_{*_d} : \mathrm{H}_d(S, A) \to \mathrm{H}_d(C, \partial C)$ é não nulo, então existe pelo menos um equilíbrio de Nash para $p_1, \dots, p_n$, onde ∂C é o bordo de C e $d = d_1 + \cdots + d_n$ é a dimensão de C. Nesse caso, os equilíbrio são exatamente as coincidências entre f e g.*

Demonstração: Como vimos acima, se $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$ é tal que $g(\tilde{s}) = f(\tilde{s})$ então $\tilde{s}$ é um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$. Assim, afim de provar a existência do equilíbrio, é suficiente provar a existência de pontos de coincidência entre f e g. A existência de coincidências entre f e g é garantida pelo Corolário 2.2.6. Ademais, se $g_{*_d} : \mathrm{H}_d(S, A) \to \mathrm{H}_d(C, \partial C)$ é não nulo então $g : S \to C$ é sobrejetiva. Segue que cada $g_i : S_i \to C_i$ é sobrejetiva e, portanto, os equilíbrios para $p_1, \ldots, p_n$ são exatamente as coincidências entre f e g. ■

3.3.2 Caso 2

Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto convexo. Uma função $f : Y \to \mathbb{R}$ é dita quasecôncava se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $Y_\lambda = \{y \in Y \mid f(y) \geq \lambda\}$ é convexo. Em particular, se $f : Y \to \mathbb{R}$ é quasecôncava e Y é compacto, então o conjunto

$$\{y \in Y \mid f(y) = \max f(Y)\}$$

é um subconjunto convexo e não vazio de Y.

Assuma um jogo em n pessoas, $\{1, \ldots, n\}$, com espaços de estratégias $S_1, \ldots, S_n$ e funções payoff $p_1, \ldots p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$, onde:

1. $S_1, \ldots, S_n$ são espaços compactos;

2. $C_1, \ldots, C_n$ são subconjuntos compactos e convexos do espaço euclideano de mesma dimensão, $\mathbb{R}^{d_1}, \ldots, \mathbb{R}^{d_n}$, respectivamente;

3. $v_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^{d_i}$ e $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que não dependem da coordenada $s_i \in S_i$, $1 \leq i \leq n$;

4. $g_i : S_i \to C_i$ é uma função contínua, $1 \leq i \leq n$;

5. $q_i : S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times C_i \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que

$$q_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, y_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

   é quasecôncava em $y_i \in C_i$ quando as outras coordenadas estão fixas, $1 \leq i \leq n$.

6. A função payoff $p_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ é definida por

$$p_i(s_1, \ldots, s_n) = q_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, g_i(s_i), s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

Com as hipóteses acima, mostraremos que a existência de um equilíbrio de Nash está relacionada a um problema de coincidência entre uma função unívoca e uma aplicação de multivalores.

Denote $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ e considere $g : S \to C$ definida por

$$g(s_1, \ldots, s_n) = (g_1(s_1), \ldots, g_n(s_n)),$$

para todo $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$.

Fixado $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$, para cada $1 \leq i \leq n$, considere a função

$$C_i \to \mathbb{R}$$

dada por

$$y_i \to q_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, y_i, s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

Note que o conjunto

$$T_i(s) = \{y_i \in C_i \mid q_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, y_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) = \max_{w_i \in C_i} q_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, w_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)\}$$

é um subconjunto convexo e não vazio de C_i. Isso se deve ao fato de q_i ser contínua, C_i ser compacto e pela aplicação

$$C_i \to \mathbb{R}$$

dada por

$$y_i \to q_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, y_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

ser quasecôncava. Segue, em particular, que $T_i(s)$ é acíclico, para todo $s \in S$, $1 \leq i \leq n$. Definimos a aplicação de multivalores

$$T : S \to C$$

por

$$T(s) = T_1(s) \times \cdots \times T_n(s).$$

Assim definida, T é uma aplicação de multivalores acíclica.

Com T assim definida, temos que se $g(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in T(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ então $(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ é um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$. De fato, se $g(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in T(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ então $g_i(\tilde{s}_i) \in T_i(\tilde{s})$ para $1 \leq i \leq n$. Segue que

$$q_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, w_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq q_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, g_i(\tilde{s}_i), \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n), \text{ para todo } w_i \in C_i,$$

$1 \leq i \leq n$. Em particular,

$$q_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, g_i(s_i), \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq q_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, g_i(\tilde{s}_i), \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n), \text{ para todo } s_i \in S_i,$$

$1 \leq i \leq n$. Logo,

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}), \text{ para todo } s_i \in S_i, \ 1 \leq i \leq n.$$

Portanto, $\tilde{s}$ é um equilíbrio para $p_1, \ldots, p_n$.

Além disso, se cada g_i é sobrejetiva então, para todo ponto de equilíbrio $(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$, temos $g(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in T(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s_n})$.

Desse modo, estabelecemos o seguinte:

Teorema 3.3.3. *Com as hipóteses do caso 2, se existe um subconjunto fechado A de S tal que o homomorfismo induzido $g_{*_d} : \mathrm{H}_d(S, A) \to \mathrm{H}_d(C, \partial C)$ é não nulo, então existe ao menos um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$, onde ∂C é o bordo de C e $d = d_1 + \cdots + d_n$ é a dimensão de C. Nesse caso, os equilíbrios são exatamente os pontos $\tilde{s} \in S$ tais que $g(\tilde{s}) \in T(\tilde{s})$.*

Demonstração: Como vimos acima, se $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ é tal que $g(\tilde{s}) \in T(\tilde{s})$, então $\tilde{s}$ é um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$. Como $g_{*_d} : \mathrm{H}_d(S, A) \to \mathrm{H}_d(C, \partial C)$ é não nulo, pelo Corolário 2.3.5, existe $\tilde{s} \in S$ tal que $g(\tilde{s}) \in T(\tilde{s})$. Logo, $\tilde{s}$ é um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$. ■

Exemplo 3.3.4. Considere $S_1 = S_2 = [0, 1]$ e $p_1, p_2 : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$p_1(s_1, s_2) = s_2^2(6s_1^3 - 9s_1^2 + 4s_1) + \frac{1}{2}$$

e

$$p_2(s_1, s_2) = (1 - s_1) \sin\left(\frac{\pi}{2} s_2\right).$$

Note que $p_1(s_1, s_2)$ não é quasecôncava em s_1. Logo, os Teoremas 3.2.2 e 3.2.3 não se aplicam nesse caso. No entanto, esse exemplo satisfaz as hipóteses do caso 1. De fato, temos que

$$p_1(s_1, s_2) = q_1(g_1(s_1), s_2)$$

e

$$p_2(s_1, s_2) = q_2(s_1, g_2(s_2)),$$

onde as funções $q_1, q_2 : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$q_1(x_1, x_2) = x_2^2 x_1 + \frac{1}{2}$$

e

$$q_2(x_1, x_2) = (1 - x_1)x_2,$$

$g_1 : [0,1] \to [0,1]$ é dada por

$$g_1(x_1) = 6x_1^3 - 9x_1^2 + 4x_1$$

e $g_2 : [0,1] \to [0,1]$ é dada por

$$g_2(x_2) = \sin(\frac{\pi}{2}x_2).$$

Agora, $q_1(x_1, x_2)$ e $q_2(x_1, x_2)$ são lineares em x_1 e em x_2, respectivamente. Também, como mostramos no exemplo 2.2.8, a função $g : I^2 \to I^2$ dada por

$$g(x_1, x_2) = (6x_1^3 - 9x_1^2 + 4x_1, \sin(\frac{\pi}{2}x_2))$$

satisfaz $g(\partial I) \subset \partial I$ e o homomorfismo induzido $g_{*_2} : \mathrm{H}_2(I^2, \partial I^2) \to \mathrm{H}_2(I^2, \partial I^2)$ é não nulo. Logo, pelo Teorema 3.3.2, as funções p_1, p_2 possuem ao menos um equilíbrio de Nash.

3.4 Equilíbrios de Nash vistos como pontos fixos de uma aplicação de multivalores

Sejam $S_1, \ldots, S_n$ espaços compactos e $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas.

Fixado $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$, para cada $1 \leq i \leq n$, considere o conjunto

$$T_i(s) = \{x_i \in S_i \mid p_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, x_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) = \max_{y_i \in S_i} p_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, y_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)\}.$$

Pelo Exemplo 1.1.5, assim definida,

$$T_i : S \multimap S_i$$

é uma aplicação de multivalores s.c.s..

Defina $T : S \multimap S$ por

$$T(s) = T_1(s) \times \cdots \times T_n(s), \text{ para todo } s \in S.$$

Então, T é uma aplicação de multivalores s.c.s. e $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$ é um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$ se, e somente se, $\tilde{s} \in T(\tilde{s})$.

Essa correspondência 1-1 entre os equilíbrios de Nash de $p_1, \ldots, p_n$ e os pontos fixos de T é encontrada no artigo [37]. Nesse artigo, como uma aplicação direta do Teorema 2.3.1 de Eilenberg e Montgomery, L. Tesfatsion explicita:

Teorema 3.4.1. *Suponha $S_1, \ldots, S_n$ espaços métricos ANR's e $T(s)$ acíclico, para todo $s \in S$. Se $\Lambda(T) \neq 0$ então $p_1, \ldots, p_n$ possuem ao menos um equilíbrio de Nash.*

Caso particular do Teorema 3.4.1 é o Teorema de Nash (Teorema 3.2.3).

Daremos, a seguir, para jogos em dois jogadores, outra maneira de relacionar os equilíbrios de Nash de um jogo com os pontos fixos de uma aplicação de multivalores.

3.4.1 Jogos em dois jogadores

Sejam S_1, S_2 espaços compactos e sejam $p_1, p_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas. Para cada ponto $s_1 \in S_1$ e cada ponto $s_2 \in S_2$, definimos os conjuntos

$$T_1(s_1) = \{y_2 \in S_2 \mid p_2(s_1, y_2) = \max_{y \in S_2} p_2(s_1, y)\}$$

e

$$T_2(s_2) = \{x_1 \in S_1 \mid p_1(x_1, s_2) = \max_{x \in S_1} p_1(x, s_2).$$

Assim definidas, $T_1 : S_1 \multimap S_2$ e $T_2 : S_2 \multimap S_1$ são aplicações de multivalores s.c.s.. Considere a composição $T : S_1 \multimap S_1$ dada por

$$T(s_1) = (T_2 \circ T_1)(s_1) = \bigcup \{T_2(y) \mid y \in T_1(s_1)\}.$$

Então, p_1, p_2 admitem equilíbrio de Nash se, e somente se, T possui ponto fixo. De fato, suponha $\tilde{s}_1 \in T(\tilde{s}_1)$. Então, existe $\tilde{s}_2 \in S_2$ tal que $\tilde{s}_2 \in T_1(\tilde{s}_1)$ e $\tilde{s}_1 \in T_2(\tilde{s}_2)$. Segue que $p_2(\tilde{s}_1, s_2) \leq p_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ e $p_1(s_1, \tilde{s}_2) \leq p_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$, para todo $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$. Logo, $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ é um equilíbrio de Nash para p_1, p_2. A recíproca é clara.

Nessas condições, estabelecemos o seguinte resultado:

Proposição 3.4.2. *Suponha $S_1 = [a, b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, e $T_1(s_1)$, $T_2(s_2)$ conexos, para todo $s_1 \in [a, b]$ e todo $s_2 \in S_2$. Então, existe ao menos um equilíbrio de Nash para p_1, p_2.*

Demonstração: Como vimos acima, é suficiente provarmos que $T : [a, b] \multimap [a, b]$ possui um ponto fixo. Veja que $T(x) = (T_2 \circ T_1)(x)$ é conexo, para todo $x \in [a, b]$. De fato, basta aplicar o Lema 1.1.6 a $T_2 : T_1(x) \multimap [a, b]$.

Considere o gráfico de T

$$\Gamma_T = \{(x, y) \in [a, b] \times [a, b] \mid y \in T(x)\}$$

e seja $f : \Gamma_T \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x - y$. O gráfico Γ_T é um espaço conexo. De fato, considere a aplicação de multivalores $\psi : [a,b] \multimap [a,b] \times [a,b]$ dada por

$$\psi(x) = \{x\} \times T(x), \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Então, ψ é uma aplicação de multivalores s.c.s. e com valores conexos. Logo, pelo Lema 1.1.6,

$$\psi([a,b]) = \Gamma_T$$

é conexo. Se $a \in T(a)$ ou $b \in T(b)$, o resultado segue. Agora, suponha que $a \notin T(a)$ e $b \notin T(b)$. Então,

$$a < c, \text{ para todo } c \in T(a)$$

e

$$d < b, \text{ para todo } d \in T(b).$$

Logo, f assume valores positivos e valores negativos. Como Γ_T é conexo, $f(x,y) = 0$ para algum $(x,y) \in \Gamma_T$. Logo, $x = y \in T(x)$. ■

Exemplo 3.4.3. (Onde não há equilíbrio de Nash) Considere $p_1, p_2 : [-1,1] \times D^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$p_1(x,y) = -y_1 x, \ x \in [-1,1], \ y = (y_1, y_2) \in D^2$$

e

$$p_2(x,y) = (2y_1 + x)^2 + y_2^2, \ x \in [-1,1], \ y = (y_1, y_2) \in D^2.$$

Então, $T_1 : [-1,1] \multimap D^2$ é dada por

$$T_1(x) = \begin{cases} \{(-1,0)\}, & \text{para } x \in [-1,0), \\ \{(1,0)\}, & \text{para } x \in (0,1], \\ \{(\pm 1, 0)\}, & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

e $T_2 : D_2 \multimap [-1,1]$ é dada por

$$T_2(y_1,y_2) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{para } y_1 \in (0,1], \\ \{1\}, & \text{para } y_1 \in [-1,0), \\ [-1,1], & \text{para } y_1 = 0. \end{cases}$$

Segue que $T = T_2 \circ T_1 : [-1,1] \multimap [-1,1]$ é dada por

$$T(x) = \begin{cases} \{-1,1\}, & \text{para } x = 0, \\ \{-1\}, & \text{para } x > 0, \\ \{1\}, & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Logo, T não possui ponto fixo e, portanto, p_1, p_2 não possuem equilíbrio de Nash.

Exemplo 3.4.4. Sejam $p_1, p_2 : [0,1] \times S^n \to \mathbb{R}$ da forma

$$p_1(x,y) = v_1(y)x + u_1(y)$$

$$p_2(x,y) = \langle v_2(x), y \rangle + u_2(x),$$

onde $v_1, u_1 : S^n \to \mathbb{R}$, $v_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $u_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Então,

$$T_1(x) = \begin{cases} S^n, & \text{se } v_2(x) = 0, \\ \frac{v_2(x)}{\|v_2(x)\|}, & \text{se } v_2(x) \neq 0. \end{cases}$$

e

$$T_2(y) = \begin{cases} [0,1], & \text{se } v_1(y) = 0, \\ 0, & \text{se } v_1(y) < 0, \\ 1, & \text{se } v_1(y) > 0. \end{cases}$$

Assim, T_1 e T_2 assumem apenas valores conexos. Logo, pela Proposição 3.4.2, p_1, p_2 possuem equilíbrio de Nash.

Capítulo

4

Equilíbrio Local

Neste capítulo, nós definimos um conceito de equilíbrio local para funções $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ quando $S_1, \ldots, S_n$ são espaços métricos: o chamado equilíbrio local fraco. Nosso objetivo é mostrar que o equilíbrio local fraco é detectável por pontos fixos ou por pontos de coincidência. Para isso, nós introduzimos uma classe especial de espaços ENR's: os ENR's com a propriedade da retração conveniente.

4.1 Definições

Dados um espaço métrico (M, d), um número real $\varepsilon > 0$ e um ponto $x_0 \in M$, denotamos por $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x_0, x) < \varepsilon\}$ a bola aberta com centro em x_0 e raio ε.

Sejam $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, funções reais definidas em um produto cartesiano $S = S_1 \times \cdots \times S_n$. Como vimos no capítulo anterior, um equilíbrio de Nash para as funções $p_1, \ldots, p_n$ é um ponto $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ em $S_1 \times \cdots \times S_n$ tal que $p_i(\tilde{s}) \geq p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n)$, qualquer que seja $s_i \in S_i$, $1 \leq i \leq n$.

Em [2], C. Alós-Ferrer e A. B. Ania explicitam um conceito de equilíbrio local quando os conjuntos de estratégia $S_1, \ldots, S_n$ são espaços métricos. O conceito é o seguinte: Sejam $S_1, \ldots, S_n$ espaços métricos e $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais. Um ponto $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ em $S_1 \times \cdots \times S_n$ é um equilíbrio local para as funções $p_1, \ldots, p_n$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}), \text{ para todo } s_i \in B(\tilde{s}_i, \varepsilon),\ 1 \leq i \leq n,$$

onde $B(\tilde{s}_i, \varepsilon)$ é a bola aberta em S_i com centro em $\tilde{s}_i$ e raio ε. Assim, numa situação de competição, a interpretação é que no equilíbrio local nenhum jogador possui incentivo para alterar a sua estratégia a uma outra estratégia próxima se os demais jogadores permanecerem fixos em suas estratégias. É nesse sentido que dizemos que o equilíbrio local é resistente à pequenas mudanças unilaterais.

Introduziremos agora o conceito de equilíbrio local fraco.

Definição 4.1.1. *Sejam $(S_1, d_1), \ldots, (S_n, d_n)$ espaços métricos e considere funções reais $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$. Dizemos que $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$ é um **equilíbrio local fraco (abrev., e.l.f.)** para $p_1, \ldots, p_n$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}) + \varepsilon \cdot d_i(s_i, \tilde{s}_i),$$

para todo $s_i \in B(\tilde{s}_i, \delta)$, $1 \leq i \leq n$.

Veja que podemos dizer que o equilíbrio local e o equilíbrio local fraco possuem a mesma interpretação quando estudamos competições. Em ambos os casos, não existe motivação para pequenas mudanças unilaterais de estratégia. Além disso, todo equilíbrio local fraco é candidato a equilíbrio local.

No que segue, puramente do ponto de vista matemático, apresentamos situações nas quais os equilíbrios locais fracos aparecem ora como pontos fixos de uma certa função, ora como pontos de coincidência entre certas funções.

4.2 A existência do equilíbrio local fraco

O teorema clássico sobre a existência do equilíbrio de Nash ([32], Theorem 1) diz que se as funções $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ são tais que cada espaço de estratégia S_i é um subconjunto compacto e convexo de algum espaço euclideano, cada função payoff $p_i : S \to \mathbb{R}$ é contínua como uma função de n variáveis e $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ é linear como uma função de s_i quando as outras variáveis estão fixas, então existe ao menos um equilíbrio de Nash para $p_1, \ldots, p_n$. Nosso próximo teorema mostra a existência do e.l.f. trocando a hipótese de linearidade sobre p_i por uma condição de diferenciabilidade.

Teorema 4.2.1. *Sejam $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas e suponha que cada espaço de estratégia S_i é um subconjunto compacto e convexo de algum espaço euclideano. Se $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ é continuamente diferenciável em s_i, $1 \leq i \leq n$, então existe ao menos um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$.*

Demonstração: Considere S_i mergulhado no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{m_i}$ de mesma dimensão. Supondo $p_i : S \to \mathbb{R}$ contínua como uma função de n variáveis e $p_i(s_1, \ldots, s_n)$

continuamente diferenciável em s_i, $1 \leq i \leq n$, podemos construir um campo vetorial contínuo $v : S \to \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n}$,

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \to (v_1(s), \ldots, v_n(s)) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n},$$

da seguinte forma: a componente $v_i(s)$ na direção $\mathbb{R}^{m_i}$ é o vetor gradiente $\vec{\nabla}_{s_i} p_i(s)$ da função p_i quando considerada como uma função de s_i, com s_j fixo para $j \neq i$. Isto é, $v_i(s)$ é o vetor gradiente da aplicação

$$y_i \in S_i \to p_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, y_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

no ponto s_i. Nesse contexto e com essa notação, temos:

Lema 4.2.2. (Formulação do e.l.f. via desigualdade variacional) *Com as hipóteses do Teorema 4.2.1, $\tilde{s} \in S$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$ se $\tilde{s}$ é uma solução para a desigualdade variacional*

$$\langle v(\tilde{s}), s - \tilde{s} \rangle_{\mathbb{R}^m} \leq 0, \quad \textit{para todo} \quad s \in S, \tag{4.1}$$

onde $\langle \ , \ \rangle_{\mathbb{R}^m}$ é o produto interno em $\mathbb{R}^m$, $m = m_1 + \cdots + m_n$.

Demonstração do Lema 4.2.2: Da definição do campo v, dados $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ e $x_i \in S_i$, temos

$$p_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, x_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) = p_i(s) + \langle v_i(s), x_i - s_i \rangle + r_i(x_i - s_i)\|x_i - s_i\|,$$

com $\lim_{h \to 0} r_i(h) = 0$. Suponha que $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$ é uma solução de (4.1). Dado $s_i \in S_i$, tome o ponto $s = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$. Então,

$$0 \geq \langle v(\tilde{s}), s - \tilde{s} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle v_i(\tilde{s}), s_i - \tilde{s}_i \rangle_{\mathbb{R}^{m_i}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) &= p_i(\tilde{s}) + \langle v_i(\tilde{s}), s_i - \tilde{s}_i \rangle + r_i(s_i - \tilde{s}_i)\|s_i - \tilde{s}_i\| \\ &\leq p_i(\tilde{s}) + r_i(s_i - \tilde{s}_i)\|s_i - \tilde{s}_i\|. \end{aligned}$$

Uma vez que $\lim_{h \to 0} r_i(h) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_i > 0$ tal que se $\|s_i - \tilde{s}_i\| < \delta_i$ então $r_i(s_i - \tilde{s}_i) < \varepsilon$ e, portanto,

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}) + \varepsilon\|s_i - \tilde{s}_i\|.$$

Considere $\delta = \min\{\delta_i, 1 \leq i \leq n\}$. Então,

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}) + \varepsilon\|s_i - \tilde{s}_i\|,$$

para todo $s_i \in B(\tilde{s}_i, \delta)$, $1 \leq i \leq n$.

Logo, $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$. ■

Continuação da demonstração do Teorema 4.2.1: Em vista do Lema 4.2.2, para concluirmos a prova do Teorema 4.2.1, é suficiente mostrarmos que a desigualdade variacional (4.1) possui ao menos uma solução. Considere a retração natural

$$r : \mathbb{R}^m \to S$$

onde, para cada $x \in \mathbb{R}^m$, $r(x) \in S$ é o ponto de S que realiza a distância entre x e o conjunto S. Como vimos no capítulo anterior, tal retração é caracterizada pela desigualdade variacional

$$\langle x - r(x), y - r(x) \rangle \leq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m \text{ e todo } y \in S. \tag{4.2}$$

Considere a função $f : S \to S$ dada por

$$f(s) = r(s + v(s)), \quad \text{para todo} \quad s \in S.$$

Desde que $f : S \to S$ é contínua e S é um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^m$, pelo teorema de ponto fixo de Brouwer, existe $\tilde{s} \in S$ tal que $f(\tilde{s}) = \tilde{s}$. Portanto,

$$\tilde{s} = r(\tilde{s} + v(\tilde{s})).$$

Mostraremos que $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$. Da desigualdade (4.2), sabemos que

$$\langle \tilde{s} + v(\tilde{s}) - r(\tilde{s} + v(\tilde{s})), s - r(\tilde{s} + v(\tilde{s})) \rangle \leq 0, \text{ para todo } s \in S.$$

Como $r(\tilde{s} + v(\tilde{s})) = \tilde{s}$, segue que

$$\langle v(\tilde{s}), s - \tilde{s} \rangle \leq 0, \text{ para todo } s \in S.$$

Logo, pelo Lema 4.2.2, $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots p_n$. ■

Observação 4.2.3. Dado $S \subset \mathbb{R}^m$ compacto e convexo, se $s \in S$ não está no bordo de S dizemos que s está no interior relativo de S e denotamos por $\mathrm{ir}(S)$ o conjunto constituído por tais pontos. Sejam $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais como no Teorema 4.2.1 e seja $\tilde{s} \in \mathrm{ir}(S)$. Então,

$$v(\tilde{s}) = (v_1(\tilde{s}), \ldots, v_n(\tilde{s})) = 0$$

se $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$. Isso é uma consequência dos seguinte fatos:

Proposição 4.2.4. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x_0 \in (a,b)$ e com a propriedade de que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon|x - x_0|$ quando $|x - x_0| < \delta$. Então, $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ um número real positivo qualquer. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < h < \delta$ então $f(x_0 + h) \leq f(x_0) + \varepsilon h$. Assim, para $0 < h < \delta$ temos

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \varepsilon$$

e, portanto,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \varepsilon.$$

Da arbitrariedade de ε, concluímos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Analogamente, para $-\delta < h < 0$ temos $f(x_0 + h) \leq f(x_0) - \varepsilon h$ e, portanto,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq -\varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq -\varepsilon.$$

Novamente, da arbitrariedade de ε, concluímos que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Portanto,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0.$$

■

Corolário 4.2.5. *Seja V um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $x_0 \in V$ e suponha que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon\|x - x_0\|,$$

sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Então, a derivada da função f no ponto x_0, $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é identicamente nula.

Observe também que, por outro lado, se $v(\tilde{s}) = 0$ então $\tilde{s}$ é um ponto fixo da função $f : S \to S$ definida na demonstração do Teorema 4.2.1 por $f(s) = r(s + v(s))$. Ainda, pela prova do Teorema 4.2.1, segue que $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$. Dessas considerações, se denotamos

$$ELF(p_1, \ldots, p_n) = \{\tilde{s} \in S \mid \tilde{s} \text{ é um e.l.f. para } p_1, \ldots, p_n\},$$

temos

Lema 4.2.6. $ELF(p_1, \ldots, p_n) \cap \mathrm{ir}(S) = \{\tilde{s} \in \mathrm{ir}(S) \mid v(\tilde{s}) = 0\}$.

Observação 4.2.7. Com as hipóteses do Teorema 4.2.1, vimos que toda solução $\tilde{s} \in S$ para a desigualdade variacional

$$\langle v(\tilde{s}), s - \tilde{s}\rangle_{\mathbb{R}^m} \leq 0, \text{ para todo } s \in S,$$

é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$. Podemos demonstrar ainda mais: os equilíbrios locais fracos para $p_1, \ldots, p_n$ são exatamente as soluções da desigualdade variacional acima e, portanto, são exatamente os pontos fixos da função $f : S \to S$ definida na demonstração do Teorema 4.2.1. De fato, suponha $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$ um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$ e seja $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ qualquer. Temos

$$\langle v(\tilde{s}), s - \tilde{s}\rangle_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i(\tilde{s}), s_i - \tilde{s}_i\rangle_{\mathbb{R}^{m_i}}.$$

Assim, mostraremos que

$$\langle v_i(\tilde{s}_i), s_i - \tilde{s}_i\rangle \leq 0, \text{ para cada } 1 \leq i \leq n,$$

donde seguirá que

$$\langle v(\tilde{s}), s - \tilde{s}\rangle \leq 0.$$

Como S_i é convexo, temos que $\tilde{s}_i + t(s_i - \tilde{s}_i) \in S_i$ para todo $t \in [0, 1]$. Pela definição de $v_i(\tilde{s})$, temos

$$\langle v_i(\tilde{s}), s_i - \tilde{s}_i\rangle = \lim_{t \to 0^+} \frac{p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_i + t(s_i - \tilde{s}_i), \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) - p_i(\tilde{s})}{t}.$$

Agora, como estamos supondo que $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $t\|s_i - \tilde{s}_i\| < \delta$ implica em

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_i + t(s_i - \tilde{s}_i), \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}) + \varepsilon\, t\, \|s_i - \tilde{s}_i\|.$$

Desse modo, vemos que, para t suficientemente pequeno,

$$\frac{p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_i + t(s_i - \tilde{s}_i), \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) - p_i(\tilde{s})}{t} \leq \varepsilon \|s_i - \tilde{s}_i\|,$$

seguindo que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_i + t(s_i - \tilde{s}_i), \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) - p_i(\tilde{s})}{t} \leq \varepsilon \|s_i - \tilde{s}_i\|.$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, concluímos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_i + t(s_i - \tilde{s}_i), \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) - p_i(\tilde{s})}{t} \leq 0.$$

Portanto, $\langle v_i(\tilde{s}), s_i - \tilde{s}_i \rangle \leq 0$, qualquer que seja $1 \leq i \leq n$. Segue que

$$\langle v(\tilde{s}), s - \tilde{s} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i(\tilde{s}), s_i - \tilde{s}_i \rangle_{\mathbb{R}^{m_i}} \leq 0.$$

Exemplo 4.2.8. Considere as funções $p_1, p_2 : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$p_1(x, y) = -xy \ \text{ e } \ p_2(x, y) = (2y + x)^2.$$

As funções p_1, p_2 não admitem equilíbrio de Nash. De fato, considere as aplicações de multivalores $T_1, T_2 : [-1, 1] \to [-1, 1]$ definidas por

$$T_1(y) = \{x \in [-1, 1] \mid p_1(x, y) = \max_{t \in [-1,1]} p_1(t, y)\}$$

$$T_2(x) = \{y \in [-1, 1] \mid p_2(x, y) = \max_{s \in [-1,1]} p_2(x, s)\}$$

Vimos no Capítulo 3 que $(\tilde{x}, \tilde{y})$ é um equilíbrio de Nash para p_1, p_2 se, e somente se,

$$\tilde{x} \in (T_1 \circ T_2)(\tilde{x}) = \bigcup_{y \in T_2(\tilde{x})} T_1(y).$$

Mostraremos que $T = T_1 \circ T_2$ não possui ponto fixo, fato que implicará na impossibilidade de um equilíbrio de Nash para p_1, p_2. Dados $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, temos

$$T_1(y) = \begin{cases} [-1, 1], & \text{se } y = 0 \\ -1, & \text{se } y > 0 \\ 1, & \text{se } y < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad T_2(x) = \begin{cases} \{-1, 1\}, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Assim,

$$T_1 \circ T_2(x) = \begin{cases} \{-1, 1\}, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x > 0 \\ 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Segue que $T_1 \circ T_2$ não possui ponto fixo e, portanto, p_1, p_2 não admitem equilíbrio de Nash.

No entanto, pelo Teorema 4.2.1, existe e.l.f. para p_1, p_2. Para identificá-los, em vista da prova do Teorema 4.2.1, consideramos a retração natural $r : \mathbb{R}^2 \to [-1,1] \times [-1,1]$, que é dada por

$$r(x,y) = \begin{cases} (x,y), & \text{se } x, y \in [-1,1] \\ (x,1), & \text{se } x \in [-1,1] \text{ e } y \geq 1 \\ (x,-1), & \text{se } x \in [-1,1] \text{ e } y \leq -1 \\ (1,y), & \text{se } x \geq 1 \text{ e } y \in [-1,1] \\ (-1,y), & \text{se } x \leq -1 \text{ e } y \in [-1,1] \\ (1,1), & \text{se } x \geq 1 \text{ e } y \geq 1 \\ (1,-1), & \text{se } x \geq 1 \text{ e } y \leq -1 \\ (-1,-1), & \text{se } x \leq -1 \text{ e } y \leq -1 \\ (-1,1), & \text{se } x \leq -1 \text{ e } y \geq 1 \end{cases}$$

Consideramos também o campo vetorial

$$v(x,y) = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,y), \frac{\partial p_2}{\partial y}(x,y) \right) = (-y, 8y + 4x)$$

e, por fim, resolvemos a equação

$$r\left((x,y) + v(x,y)\right) = (x,y),$$

cujas soluções são $(0,0)$, $(-1, \frac{1}{2})$, $(1, -\frac{1}{2})$ e $(-1,1)$.

Portanto, $(0,0)$, $(-1, \frac{1}{2})$, $(1, -\frac{1}{2})$ e $(-1,1)$ são todos os equilíbrios locais fracos para p_1, p_2. Ainda, o e.l.f. $(-1,1)$ é na verdade um equilíbrio local para p_1, p_2. De fato, veja que

$$p_1(x,1) = -x \leq 1 = p_1(-1,1), \text{ para todo } x \in [-1,1]$$

e

$$p_2(-1,y) = (2y-1)^2 \leq 1 = p_2(-1,1), \text{ para todo } y \in [0,1].$$

Exemplo 4.2.9. Considere o modelo clássico de Cournot para oligopólios: suponha $m \geq 2$ empresas, $\{1, 2, \ldots, m\}$, produtoras de um mesmo produto homogêneo. Denote por s_i a quantidade desse produto produzida pela empresa i e seja f_i sua função custo de produção, ou seja, para produzir a quantidade s_i, a empresa i tem um gasto $f_i(s_i)$. Suponha ainda que o preço de venda do produto no mercado, denotado por q, depende da quantidade total de produção, ou seja, $q = q\left(\sum_{j=1}^m s_j\right)$, a chamada função demanda inversa. Então, o lucro da empresa i é expresso por

$$p_i(s_1, \ldots, s_m) = q\left(\sum_{j=1}^m s_j\right) \cdot s_i - f_i(s_i).$$

O dilema do produtor j é decidir qual a quantidade s_j a ser produzida de modo a maximizar o seu lucro, dadas as quantidades s_i produzidas pelos demais produtores $i \neq j$. Fixados intervalos compactos $I_1, I_2, \ldots, I_m$ em $\mathbb{R}$, se q e f_i, $1 \leq i \leq m$, são continuamente diferenciáveis, pelo Teorema 4.2.1, esse problema possui ao menos uma solução $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$ resistente à pequenas mudanças unilaterais em $I_1 \times \cdots \times I_m$. Essas soluções são exatamente as soluções para a desigualdade variacional

$$\sum_{i=1}^{m} \left[q' \left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{s}_j \right) \cdot \tilde{s}_i + q \left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{s}_j \right) - f_i'(\tilde{s}_i) \right] \cdot (s_i - \tilde{s}_i) \leq 0, \quad \forall\, s = (s_1, \ldots, s_n) \in S, \tag{4.3}$$

$S = I_1 \times \cdots \times I_m$.

É sabido que se as funções p_i são diferenciáveis e côncavas em s_i então as soluções de (4.3) constituem exatamente os equilíbrios de Nash para $p_1, \ldots, p_m$ (Ver [29], pag. 212).

4.3 Uma classe mais geral de espaços de estratégia

Nessa seção, como uma consequência do teorema de ponto fixo de Lefschetz, provaremos que o e.l.f. ocorre para uma classe mais geral de espaços de estratégia, os ENR's com a propriedade da retração conveniente.

Seja X um espaço topológico. Denotamos por $\mathrm{H}_i(X)$ o i-ésimo espaço vetorial de homologia singular de X com coeficientes em $\mathbb{Q}$. Dada $f : X \to Y$ uma função contínua, seja $f_{*i} : \mathrm{H}_i(X) \to \mathrm{H}_i(Y)$ o homomorfismo induzido por f sobre os espaços de homologia. Se $X = Y$ e $\mathrm{H}_i(X)$ é finitamente gerado então o número traço(f_{*i}) é definido como sendo o traço da matriz associada a f_{*i} com respeito a alguma base de $\mathrm{H}_i(X)$.

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Se existe uma retração $r : V \to X$, onde V é uma vizinhança aberta de X em $\mathbb{R}^m$, o espaço X é dito um retrato euclideano de vizinhança ou, brevemente, um espaço ENR ("euclidean neighborhood retract").

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um ENR compacto. Então, os espaços $\mathrm{H}_i(X)$ são finitamente gerados e $\mathrm{H}_j(X) = 0$ para todo j suficientemente grande ([10], Proposition 4.11, pag. 103). Portanto, é bem definido o número

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{H}_i(X),$$

chamado a característica de Euler de X. Além disso, se $f : X \to X$ é uma função contínua, está bem definido o número

$$\Lambda(f) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \text{traço}(f_{*i}),$$

chamado o número de Lefschetz de f. É claro que se f é uma função homotópica à função identidade então $\Lambda(f) = \chi(X)$. O teorema de ponto fixo de Lefschetz afirma que se $\Lambda(f) \neq 0$ então f possui ao menos um ponto fixo.

Definição 4.3.1. *Diremos que um subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ possui a* ***propriedade da retração conveniente (abrev., p.r.c.)*** *quando existir uma retração $r : V \to X$, onde V é uma vizinhança aberta de X em $\mathbb{R}^m$, satisfazendo: dados $x_0 \in V$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\langle x_0 - r(x_0), x - r(x_0)\rangle \leq \varepsilon \|x - r(x_0)\|,$$

para todo $x \in X$ com $\|x - r(x_0)\| < \delta$, onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno de $\mathbb{R}^m$ e $\|\ \|$ é a norma por ele induzida. Nesse caso, dizemos que $r : V \to X$ é uma retração conveniente.

Exemplo 4.3.2. Todo subconjunto fechado e convexo K de $\mathbb{R}^m$ possui a p.r.c.. De fato, como já mencionado, a retração natural $r : \mathbb{R}^m \to K$ que a cada $x \in \mathbb{R}^m$ associa o ponto $r(x) \in K$ que realiza a distância de x a K satisfaz $\langle x_0 - r(x_0), x - r(x_0)\rangle \leq 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e todo $x \in K$.

A próxima proposição nos dá outro exemplo de espaços com a p.r.c.:

Proposição 4.3.3. *Toda variedade M contida em $\mathbb{R}^m$, de classe C^2, com ou sem bordo, possui a p.r.c..*

Demonstração: Seja $M \subset \mathbb{R}^m$ uma variedade de classe C^2. Então, M possui uma vizinhança tubular V em $\mathbb{R}^m$. A retração $r : V \to M$ que a cada ponto $x \in V$ associa o pé do único segmento normal que o contém é uma retração conveniente. De fato, temos que r é uma aplicação diferenciável de classe C^1. Assim, dado $x_0 \in V$ e $x \in M$, temos

$$\begin{aligned} x = r(x) &= r(r(x_0)) + r'(r(x_0)) \cdot (x - r(x_0)) + \rho(x - r(x_0)) \\ &= r(x_0) + r'(r(x_0)) \cdot (x - r(x_0)) + \rho(x - r(x_0)) \end{aligned}$$

com

$$\lim_{h\to 0}\frac{\rho(h)}{\|h\|}=0,$$

onde $r'(r(x_0)) : \mathbb{R}^n \to T_{r^2(x_0)}M$ é a derivada de r no ponto $r(x_0)$, lembrando que $r^2(x_0) = r(x_0)$.

Desde que $r'(r(x_0))\cdot(x - r(x_0)) \in T_{r(x_0)}M$, segue que

$$\langle x_0 - r(x_0), r'(r(x_0))\cdot(x - r(x_0))\rangle = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle x_0 - r(x_0), x - r(x_0)\rangle &= \langle x_0 - r(x_0), \rho(x - r(x_0))\rangle \\ &\leq \|x_0 - r(x_0)\|\|\rho(x - r(x_0))\|.\end{aligned}$$

Uma vez que $\lim_{h\to 0}\rho(h)/\|h\| = 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - r(x_0)\| < \delta$ então

$$\|\rho(x - r(x_0))\| \leq \frac{\epsilon}{\|x_0 - r(x_0)\|}\|x - r(x_0)\|.$$

Logo, para $x \in M$ tal que $\|x - r(x_0)\| < \delta$, temos

$$\langle x_0 - r(x_0), x - r(x_0)\rangle \leq \epsilon\|x - r(x_0)\|.$$

Portanto, M possui a p.r.c.. ∎

Seja X um subconjunto fechado do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ e seja V uma vizinhança aberta de X em $\mathbb{R}^n$. Uma função contínua $r : V \to X$ é chamada uma "proximative retraction" (ou projeção métrica) se

$$\|r(y) - y\| = \operatorname{dist}(y, X), \text{ para todo } y \in V.$$

Evidentemente, toda "proximative retraction" é uma retração. No entanto, nem toda retração é uma "proximative retraction".

Um subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um "proximative neighborhood retract" (escreve-se $K \in$ PANR) se existem uma vizinhança aberta V de K em $\mathbb{R}^n$ e uma "proximative retraction" $r : V \to K$.

Temos o seguinte:

Proposição 4.3.4. *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Se $K \in$ PANR então K é um* ENR *with the p.r.c..*

Demonstração: Suponha $K \in$ PANR e seja $r : V \to K$ uma "proximative retraction". Então, r é uma retração conveniente. De fato, sejam $x_0 \in V$ e $x \in K$ quaisquer. Desde que r é uma "proximative retraction", $\|x_0 - x\| \geq \|x_0 - r(x_0)\|$.

Dado $\varepsilon > 0$, se $\varepsilon \geq \|x_0 - r(x_0)\|$ então

$$\langle x_0 - r(x_0), x - r(x_0)\rangle \leq \varepsilon\|x - r(x_0)\|, \text{ para todo } x \in K.$$

Suponha $0 < \varepsilon < \|x_0 - r(x_0)\|$. Seja $0 < \theta < \pi/2$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\varepsilon}{\|x_0 - r(x_0)\|}.$$

Assim, se tomamos $\delta = 2\varepsilon$, é fácil mostrar que, para todo $x \in K$ tal que $\|x - r(x_0)\| < \delta$, o ângulo α entre $(x_0 - r(x_0))$ e $(x - r(x_0))$ está em $(\theta, \pi]$ (Ver figura 4.1).

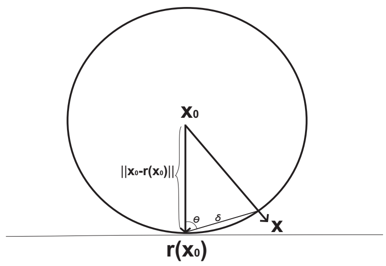

Figura 4.1: Proposição 4.3.4

Logo, para todo $x \in K$ tal que $\|x - r(x_0)\| < \delta$, temos

$$\begin{aligned}\langle x_0 - r(x_0), x - r(x_0)\rangle &\leq \frac{\varepsilon}{\|x_0 - r(x_0)\|}\|x_0 - r(x_0)\|\|x - r(x_0)\| \\ &= \varepsilon\|x - r(x_0)\|.\end{aligned}$$

Portanto, r é uma retração conveniente e, assim, K é um ENR com a p.r.c.. ■

É fácil provar que o produto cartesiano de um número finito de espaços com a p.r.c. é também possuidor da p.r.c..

Proposição 4.3.5. *Sejam $X_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}, \ldots, X_n \subset \mathbb{R}^{m_n}$ espaços com a p.r.c.. Então o produto cartesiano $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ possui a p.r.c..*

Demonstração: Desde que X_i possui a p.r.c., seja $r_i : V_i \to X_i$ uma retração conveniente, $1 \leq i \leq n$. Sejam $V = V_1 \times \cdots \times V_n$ e $r : V \to X$ a retração definida por

$$r(y_1, \ldots, y_n) = (r_1(y_1), \ldots, r_n(y_n)), \text{ para todo } (y_1, \ldots, y_n) \in V.$$

Dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $1 \leq i \leq n$, se $y_i \in V_i$ e $\|x_i - r(y_i)\| < \delta$, então

$$\langle y_i - r(y_i), x_i - r(y_i) \rangle \leq \frac{\varepsilon}{n} \|x_i - r(y_i)\|.$$

Assim, se $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$ e $\|x - r(y)\| < \delta$, segue que

$$\langle y - r(y), x - r(y) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i - r(y_i), x_i - r(y_i) \rangle \leq \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i - r(y_i)\| \leq \varepsilon \|x - r(y)\|.$$

Logo, $r : V \to X$ é uma retração conveniente e, portanto, X possui a p.r.c.. ■

Uma formulação mais geral do Teorema 4.2.1 é a seguinte:

Teorema 4.3.6. *Sejam $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas e suponha cada $S_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ compacto e com a p.r.c., $1 \leq i \leq n$. Suponha $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ continuamente diferenciável em uma vizinhança de s_i quando as demais variáveis ficam fixas, $1 \leq i \leq n$. Se $\chi(S_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ então $p_1, \ldots p_n$ admitem ao menos um e.l.f..*

Afim de provar o Teorema 4.3.6, faremos uso do seguinte lema.

Lema 4.3.7. *Seja X um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ e seja V uma vizinhança aberta de X em $\mathbb{R}^m$. Então, dado um campo contínuo de vetores, $v : X \to \mathbb{R}^m$, existe $t_1 > 0$ tal que $x + tv(x) \in V$ para todo $x \in X$ e todo $t \in [0, t_1]$.*

Demonstração: Suponha $v : X \to \mathbb{R}^m$ um campo contínuo de vetores. Se $v(x) = 0$ para todo $x \in X$, não há o que provar. Agora, se supomos que $v(x) \neq 0$ para algum $x \in X$, então o número real $u = \max_{x \in X}\{\|v(x)\|\}$ é positivo.

Para todo $x \in X$, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B(x, \epsilon_x) \subset V$. Desde que X é compacto, obtemos uma subcobertura finita $\{B(x_i, \frac{\epsilon_{x_i}}{4})\}_{i=1}^{l}$ com

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{l} B(x_i, \frac{\epsilon_{x_i}}{4}) \subset \bigcup_{i=1}^{l} B(x_i, \epsilon_{x_i}) \subset V.$$

Tomamos $\epsilon = \min_{1 \leq i \leq l}\{\frac{\epsilon_{x_i}}{4}\}$ e consideramos $t_1 = \frac{\epsilon}{u}$. Desse modo, $x + tv(x) \in V$ para todo $x \in X$ e todo $t \in [0, t_1]$. De fato, dado $x \in X$, temos que $x \in B(x_i, \frac{\epsilon_{x_i}}{4})$, para algum x_i. Se $v(x) = 0$, a conclusão é trivial. Se $v(x) \neq 0$ então, dado $t \in [0, t_1]$, temos que

$$t \leq t_1 = \frac{\epsilon}{u} \leq \frac{\epsilon_{x_i}}{4u} \leq \frac{\epsilon_{x_i}}{4\|v(x)\|}.$$

Segue que

$$\|x + tv(x) - x_i\| \leq \|x - x_i\| + t\|v(x)\| \leq \frac{\epsilon_{x_i}}{4} + \frac{\epsilon_{x_i}}{4\|v(x)\|}\|v(x)\| = \frac{\epsilon_{x_i}}{2} < \epsilon_{x_i}.$$

Portanto, $x + tv(x) \in B(x_i, \epsilon_{x_i}) \subset V$.

Consequentemente, $x + tv(x) \in V$ para todo $x \in X$ e todo $t \in [0, t_1]$. ■

Demonstração do Teorema 4.3.6: Assim como na demonstração do Teorema 4.2.1, consideramos o campo vetorial contínuo $v : S \to \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n}$ definido por

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \to (v_1(s), \ldots, v_n(s)) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n}$$

onde a componente $v_i(s)$ na direção $\mathbb{R}^{m_i}$ é o vetor gradiente $\vec{\nabla}_{s_i} p_i(s)$ no ponto s para a função p_i quando considerada como uma função continuamente diferenciável em s_i, com s_j fixo para $j \neq i$. Como os espaços $S_1, \ldots, S_n$ possuem a p.r.c., pela Proposição 4.3.5, o espaço S também possui. Desse modo, seja $r : V \to S$ uma retração conveniente e, como no Lema 4.3.7, seja $t_1 > 0$ tal que $s + tv(s) \in V$ para todo $s \in S$ e todo $t \in [0, t_1]$. Assim, temos bem definida a função $f : S \to S$ dada por

$$f(s) = r(s + t_1 v(s)).$$

Note que a função f é homotópica a função identidade $id_S : S \to S$ via homotopia $H : X \times [0, t_1] \to X$ definida por $H(x, t) = r(x + tv(x))$, para todo $x \in X$ e todo $t \in [0, t_1]$. Logo, $\Lambda(f) = \chi(S)$.

Se supomos $\chi(S_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, então, $\chi(S) = \chi(S_1) \cdot \cdots \cdot \chi(S_n) \neq 0$ ([18], pag. 198). Segue que $\Lambda(f) \neq 0$. Logo, pelo teorema de ponto fixo de Lefschetz, f possui ao menos um ponto fixo. Seja $\tilde{s} \in S$ um tal ponto fixo. Afirmamos que $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$. De fato, temos que $\tilde{s} = f(\tilde{s}) = r(\tilde{s} + t_1 v(\tilde{s}))$ e, desde que r é uma retração conveniente, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - r(\tilde{s} + t_1 v(\tilde{s}))\| = \|x - \tilde{s}\| < \delta$$

implica que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{s} + t_1 v(\tilde{s}) - r(\tilde{s} + t_1 v(\tilde{s})), x - r(\tilde{s} + t_1 v(\tilde{s})) \rangle &= t_1 \langle v(\tilde{s}), x - \tilde{s} \rangle \\ &\leq \frac{t_1 \varepsilon}{2} \|x - \tilde{s}\|. \end{aligned}$$

Além disso, da definição de $v(\tilde{s})$, podemos assumir que se $\|\tilde{s} - s\| < \delta$ então

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}) + \langle v_i(\tilde{s}), s_i - \tilde{s}_i \rangle + \frac{\varepsilon}{2} \|s_i - \tilde{s}_i\|,$$

$1 \leq i \leq n$. Portanto, se $s \in S$ e $\|s - \tilde{s}\| < \delta$ então

$$p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \leq p_i(\tilde{s}) + \varepsilon\|s_i - \tilde{s}_i\|,$$

$1 \leq i \leq n$.

Logo, $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$. ■

Corolário 4.3.8. *Sejam $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas e suponha que cada $S_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ é um "proximative neighborhood retract" compacto, $1 \leq i \leq n$. Suponha $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ continuamente diferenciável em s_i quando as demais variáveis ficam fixas, $1 \leq i \leq n$. Se $\chi(S_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ então $p_1, \ldots, p_n$ possuem ao menos um e.l.f..*

Demonstração: Pela Proposição 4.3.4, todo "proximative neighborhood retract" compacto possui a p.c.r.. Desse modo, basta aplicar o Teorema 4.3.6. ■

Corolário 4.3.9. *Sejam $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas e suponha que cada $S_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ é uma variedade diferenciável compacta de classe C^2, com ou sem bordo, $1 \leq i \leq n$. Suponha $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ continuamente diferenciável em s_i quando as demais variáveis ficam fixas, $1 \leq i \leq n$. Se $\chi(S_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ então $p_1, \ldots, p_n$ possuem ao menos um e.l.f..*

Demonstração: Pela proposição 4.3.3, toda variedade de classe C^2 possui a p.r.c.. Logo, basta aplicar o Teorema 4.3.6.

Outro argumento é que toda variedade compacta de classe C^2, com ou sem bordo, é um "proximative neighborhood retract" (Ver [16], pp. 21). Assim, basta aplicar o Corolário 4.3.8. ■

Observação 4.3.10. Sejam $p_1, \ldots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ funções reais como no Corolário 4.3.9. Analogamente à Observação 4.2.3, se $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$ e cada $\tilde{s}_i \in S_i - \partial S_i$, então $v(\tilde{s}) = 0$. Reciprocamente, se $v(\tilde{s}) = 0$, pela demostração do Teorema 4.3.6, $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$. Assim, denotando por

$$ELF(p_1, \ldots, p_n) = \{\tilde{s} \in S \mid \tilde{s} \text{ é um e.l.f. para } p_1, \ldots, p_n\},$$

temos

Lema 4.3.11. *$ELF(p_1, \ldots, p_n) \cap (S - \partial S) = \{\tilde{s} \in (S - \partial S) \mid v(\tilde{s}) = 0\}$.*

4.4 O e.l.f. como coincidência de funções

Nessa seção, apresentamos condições para a existência de e.l.f. para a seguinte classe de funções $p_1, \dots, p_n : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$:

- $S_1, \dots, S_n$ são espaços compactos;
- $X_1, \dots, X_n$ são variedades, com ou sem bordo, conexas, compactas e $\mathbb{F}$-orientadas, contidas em algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, N suficientemente grande;
- $v_i : S \to \mathbb{R}^N$, $u_i : S \to \mathbb{R}$ e $g_i : S_i \to X_i$ são funções contínuas, $1 \leq i \leq n$, onde $S = S_1 \times \cdots \times S_n$;
- $p_i(s_1, \dots, s_n) = \langle v_i(s_1, \dots, s_n), g_i(s_i) \rangle + u_i(s_1, \dots, s_n)$, onde $\langle \ , \ \rangle$ é o produto interno em $\mathbb{R}^N$.

Denote $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ e $S = S_1 \times \cdots \times S_n$. Seja $g : S \to X$ definida por

$$g(s_1, \dots, s_n) = (g_1(s_1), \dots, g_n(s_n)).$$

Com essas hipóteses, temos:

Teorema 4.4.1. *Suponha que cada X_i é uma m_i-variedade com a p.r.c., cada função $g_i : S_i \to X_i$ é lipschitziana e que $v_i(s_1, \dots, s_n)$ e $u_i(s_1, \dots, s_n)$ não dependem de s_i, $1 \leq i \leq n$. Além disso, suponha que uma das seguintes condições é satisfeita:*

D1. *As variedades $X_1, \dots, X_n$ são todas sem bordo, $\chi(X_i) \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $g^* : H^m(X;\mathbb{F}) \to H^m(S;\mathbb{F})$ é um homomorfismo não nulo, onde $m = m_1 + \cdots + m_n$;*

D2. *$\partial X_j \neq \emptyset$ para algum j e $g^* : H^m(X, \partial X;\mathbb{F}) \to H^m(S, g^{-1}(\partial X);\mathbb{F})$ é um homomorfismo não nulo. Além disso, m é par e $\chi(X) \neq 0$ ou m é ímpar e $\chi(X) \neq 2$, onde $m = m_1 + \cdots + m_n$.*

Então, $p_1, \dots, p_n$ possuem ao menos um e.l.f..

Antes de provar o Teorema 4.4.1, estabelecemos alguns resultados preliminares.

Analogamente ao Lema 4.3.7, temos:

Lema 4.4.2. *Sejam S um espaço topológico compacto arbitrário, X um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ e V uma vizinhança aberta de X em $\mathbb{R}^N$. Então, dadas funções contínuas $v : S \to \mathbb{R}^N$ e $g : S \to X$, existe $t_1 > 0$ tal que $g(s) + tv(s) \in V$ para todo $s \in S$ e todo $t \in [0, t_1]$.*

Sejam S um espaço topológico compacto e $X \subset \mathbb{R}^N$ uma n-variedade conexa, compacta e $\mathbb{F}$-orientada (com ou sem bordo). Suponha que X possui a p.r.c.. Dadas funções contínuas $v : S \to \mathbb{R}^N$ e $g : S \to X$, temos a seguinte proposição envolvendo um problema variacional:

Proposição 4.4.3. *Suponha que uma das seguintes condições é satisfeita:*

C1. $\partial X = \emptyset$, $\chi(X) \neq 0$ *e* $g^* : H^n(X; \mathbb{F}) \to H^n(S; \mathbb{F})$ *é um homomorfismo não nulo;*

C2. $\partial X \neq \emptyset$ *e* $g^* : H^n(X, \partial X; \mathbb{F}) \to H^n(S, g^{-1}(\partial(X)); \mathbb{F})$ *é um homomorfismo não nulo. Além disso, n é par e $\chi(X) \neq 0$ ou n é ímpar e $\chi(X) \neq 2$.*

Então, existe $\tilde{s}$ com a propriedade: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\langle v(\tilde{s}), x - g(\tilde{s}) \rangle \leq \epsilon \|x - g(\tilde{s})\|$$

para todo $x \in X$ com $\|x - g(\tilde{s})\| < \delta$.

Demonstração: Uma vez que $X \subset \mathbb{R}^N$ possui a p.r.c., considere $r : V \to X$ uma retração conveniente. Pelo Lema 4.4.2, seja $t_1 > 0$ tal que $g(s) + tv(s) \in V$ para todo $s \in S$ e todo $t \in [0, t_1]$. Desse modo, fica bem definida a função $f : S \to X$ dada por

$$f(s) = r(g(s) + t_1 v(s)).$$

Além disso, f é homotópica à g via homotopia $H : S \times [0, t_1] \to X$ definida por

$$H(s, t) = r(g(s) + tv(s)).$$

Logo, tendo satisfeita a condição **C1** ou a condição **C2**, pelo Corolário 2.1.6 (condição **C1**) ou pelo Corolário 2.2.3 (condição **C2**), existe $\tilde{s} \in S$ tal que $f(\tilde{s}) = g(\tilde{s})$. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Como r é uma retração conveniente, existe $\delta > 0$ tal que

$$\langle g(\tilde{s}) + t_1 v(\tilde{s}) - r(g(\tilde{s}) + t_1 v(\tilde{s})), x - r(g(\tilde{s}) + t_1 v(\tilde{s})) \rangle \leq t_1 \epsilon \|x - r(g(\tilde{s}) + t_1 v(\tilde{s}))\|$$

para todo $x \in X$ com $\|x - r(g(\tilde{s}) + t_1 v(\tilde{s}))\| < \delta$. Como $g(\tilde{s}) = f(\tilde{s}) = r(g(\tilde{s}) + t_1 v(\tilde{s}))$, segue que

$$\langle v(\tilde{s}), x - g(\tilde{s}) \rangle \leq \epsilon \|x - g(\tilde{s})\|$$

para todo $x \in X$ tal que $\|x - g(\tilde{s})\| < \delta$. ■

Demonstração do Teorema 4.4.1: Supondo que cada X_i possui a p.r.c., pela Proposição 4.3.5, X também possui. Seja $v : S \to \mathbb{R}^{n \cdot N}$ a função definida por

$$v(s) = (v_1(s), \ldots, v_n(s)).$$

Tendo satisfeita uma das condições **D1** ou **D2**, pela Proposição 4.4.3, existe $\tilde{s} \in S$ com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\langle v(\tilde{s}), x - g(\tilde{s}) \rangle \leq \varepsilon \|x - g(\tilde{s})\|$$

para todo $x \in X$ com $\|x - g(\tilde{s})\| < \delta$.

Afirmamos que $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots p_n$. De fato, para cada $1 \leq i \leq n$, seja $c_i > 0$ uma constante de Lipschitz para g_i, isto é,

$$\|g_i(s_i) - g_i(y_i)\| \leq c_i d_i(s_i, y_i), \text{ quaisquer } s_i, y_i \in S_i.$$

Seja $c = \max_{1 \leq i \leq n}\{c_i\}$. Da natureza de $\tilde{s}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $\|g(\tilde{s}) - x\| < \delta$ então

$$\langle v(\tilde{s}), x - g(\tilde{s}) \rangle \leq \frac{\varepsilon}{c} \|x - g(\tilde{s})\|.$$

Agora, pela continuidade de g, obtemos $\delta' > 0$ tal que

$$d(s, \tilde{s}) < \delta' \Rightarrow \|g(s) - g(\tilde{s})\| < \delta.$$

Seja $s_i \in S_i$ com $d_i(s_i, \tilde{s}_i) < \delta'$ e considere o ponto

$$s = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) \in S.$$

Então, $d(s, \tilde{s}) = d_i(s_i, \tilde{s}_i) < \delta'$. Segue que

$$\|g(s) - g(\tilde{s})\| = \|g_i(s_i) - g_i(\tilde{s}_i)\| < \delta$$

e, portanto,

$$\langle v(\tilde{s}), g(s) - g(\tilde{s}) \rangle = \langle v_i(\tilde{s}), g_i(s_i) - g_i(\tilde{s}_i) \rangle \leq \frac{\varepsilon}{c} \|g_i(s_i) - g_i(\tilde{s}_i)\|.$$

Como $v_i(s_1, \ldots, s_n)$ e $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ não dependem de s_i, temos

$$\begin{aligned}
p_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) &= \langle v_i(\tilde{s}), g_i(s_i) \rangle + u_i(\tilde{s}) \\
&\leq \langle v_i(\tilde{s}), g_i(\tilde{s}_i) \rangle + u_i(\tilde{s}) + \frac{\varepsilon}{c} \|g_i(s_i) - g_i(\tilde{s}_i)\| \\
&\leq \langle v_i(\tilde{s}), g_i(\tilde{s}_i) \rangle + u_i(\tilde{s}) + \frac{\varepsilon}{c} \cdot c_i \cdot d_i(s_i, \tilde{s}_i) \\
&\leq \langle v_i(\tilde{s}), g_i(\tilde{s}_i) \rangle + u_i(\tilde{s}) + \varepsilon \cdot d_i(s_i, \tilde{s}_i) \\
&= p_i(\tilde{s}) + \varepsilon \cdot d_i(s_i, \tilde{s}_i).
\end{aligned}$$

Isso demonstra que $\tilde{s}$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n$. ■

Capítulo 5

A ineficiência do equilíbrio local fraco

Em economia, uma situação é eficiente no sentido de Pareto quando não for possível melhorar a payoff de um agente sem degradar a payoff de qualquer outro. Nesse capítulo, nosso objetivo é mostrar a ineficiência, no sentido de Pareto, do equilíbrio local fraco para jogos com funções payoff diferenciáveis.

5.1 A ineficiência do equilíbrio de Nash

Como dissemos, a interpretação de um ponto de equilíbrio de Nash é que, nele, nenhum jogador possui motivação para mudar sua estratégia se os demais não o fizerem. Isso não significa que um ponto de equilíbrio seja um resultado particularmente desejável para um jogo. Na verdade, devemos pensar num ponto de equilíbrio simplesmente como uma descrição do que é provável que aconteça em uma situação na qual os jogadores perseguem seus objetivos individuais sem qualquer tipo de cooperação, quer por falta de comunicação ou simplesmente por não existir o interesse em cooperar. Um exemplo clássico é o bem conhecido e estudado Dilema do Prisioneiro no qual existem dois jogadores (prisioneiros), I e II, que são chamados em salas isoladas para confessarem um crime que cometeram. A matriz de retorno (número de anos de prisão) é a seguinte:

I \ II	não confessa	confessa
não confessa	(1,1)	(5,0)
confessa	(0,5)	(2,2)

onde o par (a, b) indica a anos de prisão para I e b anos de prisão para II. O objetivo de cada prisioneiro, é claro, é passar o menor número de anos possível na prisão. O único equilíbrio de Nash para esse jogo é a situação em que ambos confessam o crime. Porém, solução mais interessante para ambos é aquela na qual ambos não confessam, que pode ser obtida caso os prisioneiros consigam agir de forma cooperativa entre si. Assim, o equilíbrio de Nash desse jogo não é eficiente no sentido de Pareto.

No artigo [11], P. Dubey apresenta uma prova matemática de que, para uma certa classe de jogos, os equilíbrios de Nash são, "em geral", ineficientes no sentido de Pareto. Adaptando suas ideias, mostramos que o mesmo ocorre com o equilíbrio local fraco.

5.1.1 Definições

Seja W uma variedade diferenciável e sejam $p_i : W \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, n funções reais diferenciáveis, onde a dimensão de W é maior ou igual ao número de funções, isto é, $\dim W \geq n$. Em geral, é impossível encontrar um ponto $x \in W$ que maximize simultaneamente cada função p_i, $1 \leq i \leq n$. Uma outra noção de otimização que se coloca é a seguinte:

Definição 5.1.1. *Um ponto $x \in W$ é dito eficiente Pareto para $p_1, \ldots, p_n$ quando satisfaz a seguinte condição:*

Se $p_i(y) \geq p_i(x)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ então $p_i(y) = p_i(x)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Essa definição traduz a ideia de Pareto de que uma situação é eficiente se não for possível aumentar o lucro de um agente sem diminuir o lucro de outro.

Veja que $x \in W$ não ser eficiente Pareto para $p_1, \ldots, p_n$ significa que existe $y \in W$ tal que $p_i(y) \geq p_i(x)$ para todo i e $p_j(y) > p_j(x)$ para algum j. Assim, quando $W = S_1 \times \cdots \times S_n$ e $p_1, \ldots, p_n : W \to \mathbb{R}$ são as funções payoff de uma competição em n jogadores, com espaços de estratégia $S_1, \ldots, S_n$, se $s = (s_1, \ldots, s_n) \in W$ não é eficiente Pareto, significa que existe uma solução $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ tão boa quanto s para todos os jogadores e mais lucrativa para pelo menos um dos jogadores.

Nesse capítulo, nosso objetivo é mostrar que, em geral, equilíbrios locais fracos não são eficientes Pareto.

5.2 A ineficiência do e.l.f.

A próxima proposição nos dá uma condição necessária para um ponto $x \in W$ ser eficiente Pareto para $p_1, \ldots, p_n$. Nela, T_xW denota o espaço tangente a W no ponto x e $Dp_i(x) : T_xW \to \mathbb{R}$ é a derivada de p_i em x. Ainda, $Dp_i(x) \cdot v$ denota o valor da transformação linear $Dp_i(x)$ no ponto $v \in T_xW$.

Proposição 5.2.1. *Se $x \in W$ é um ponto eficiente Pareto para $p_1, \ldots, p_n$ então os funcionais lineares $Dp_1(x), Dp_2(x), \ldots, Dp_n(x) : T_xW \to \mathbb{R}$ são linearmente dependentes.*

Para demonstrar a Proposição 5.2.1, faremos uso do seguinte lema:

Lema 5.2.2. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão r finita. Sejam $L_1, \ldots, L_n : V \to \mathbb{R}$ funcionais lineares linearmente independentes (e, portanto, $n \leq r$). Então, a transformação linear $L : V \to \mathbb{R}^n$ dada por*

$$L(v) = (L_1(v), \ldots, L_n(v)), \text{ para todo } v \in V$$

é sobrejetiva.

Demonstração: Seja $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ uma base de V. Então, a matriz M da transformação linear L, relativa à base $\mathfrak{B}$ de V e à base canônica de $\mathbb{R}^n$, é dada por

$$M = \begin{pmatrix} L_1(v_1) & \cdots & L_1(v_r) \\ L_2(v_1) & \cdots & L_2(v_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_n(v_1) & \cdots & L_n(v_r) \end{pmatrix}_{n \times r}$$

Para mostrarmos que L é sobrejetiva é suficiente mostrarmos que as linhas de M são linearmente independentes. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1(L_1(v_1), \ldots, L_1(v_r)) + \cdots + \alpha_n(L_n(v_1), \ldots, L_n(v_r)) = (0, \cdots, 0).$$

Então,

$$\begin{cases} \alpha_1 L_1(v_1) + \cdots + \alpha_n L_n(v_1) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 L_1(v_r) + \cdots + \alpha_n L_n(v_r) = 0 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} (\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_n L_n)(v_1) = 0 \\ \vdots \\ (\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_n L_n)(v_r) = 0 \end{cases}$$

Desde que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ é base de V, concluímos que $\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_n L_n$ é o funcional nulo. Uma vez que $L_1, \ldots, L_n$ são linearmente independentes, concluímos que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Logo, as linhas da matriz M são linearmente independentes e, portanto, a trasformação linear L é sobrejetiva. ∎

Demonstração da Proposição 5.2.1: Seja $x \in W$ e suponha $Dp_1(x), \ldots, Dp_n(x)$ linearmente independentes. Então, pelo Lema 5.2.2, a aplicação $D : T_xW \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$D(v) = (Dp_1(x) \cdot v, \ldots, Dp_n(x) \cdot v), \text{ para todo } v \in T_xW,$$

é sobrejetiva. Logo, existe $v \in T_xW$ tal que $Dp_i(x) \cdot v > 0$ para $1 \leq i \leq n$. Seja $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \to W$ tal que $\varphi(0) = x$ e $\varphi'(0) = v$. Então,

$$p_i(\varphi(t)) = p_i(x) + tDp_i(x) \cdot v + r_i(t)$$

com

$$\lim_{t \to 0} \frac{r_i(t)}{|t|} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Tome $c = \min_{1 \leq i \leq n}\{Dp_i(x) \cdot v\}$ e seja $\delta > 0$ tal que

$$-ct < r_i(t) < ct$$

sempre que $0 < t < \delta$, $1 \leq i \leq n$. Então, para $0 < t < \delta$ temos:

$$\begin{aligned} p_i(\varphi(t)) &= p_i(x) + tDp_i(x) \cdot v + r_i(t) \\ &\geq p_i(x) + tc + r_i(t) \\ &> p_i(x) \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq n$. Concluímos assim que x não é um eficiente Pareto. ∎

Para conhecer condições suficientes para $x \in W$ ser eficiente Pareto, sugerimos o artigo [35] de S. Smale.

No artigo [11], P. Dubey considerou a seguinte classe de jogos: jogos em n jogadores, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 2$, onde cada espaço de estratégia S_i é um simplexo finito dimensional. A hipótese adicional é de que cada função payoff $p_i : S \to \mathbb{R}$ é de classe C^2. Isso significa que, considerando S mergulhado em um espaço euclideano, existe uma vizinhança V de S na qual p_i se estende com classe C^2.

Considere U o espaço vetorial real das funções reais de classe C^2 definidas sobre S. Ainda, considere U munido da norma C^2

$$\|u\| = \sup\{\|u(s)\|, \|Du(s)\|, \|D^2u(s)\| \mid s \in S\}, \quad \forall u \in U.$$

O espaço $(U, \| \;\|)$ é um espaço de Banach.

O espaço de jogos não cooperativos considerado em [11] é $U^n = \underbrace{U \times \cdots \times U}_{n \text{ vezes}}$: para cada $u = (p_1, \ldots, p_n) \in U^n$, p_i denota a função payoff do jogador i.

Um subconjunto de um espaço topológico é dito residual quando pode ser expresso como interseção de uma família enumerável de abertos densos. Nem todo conjunto residual é denso. Um espaço topológico é de Baire se todos os seus subconjuntos residuais são densos. O Teorema da categoria de Baire diz que todo espaço métrico completo e todo espaço localmente compacto são espaços de Baire.

Dado $u = (p_1, \ldots, p_n) \in U^n$, denote por $N(u)$ e $P(u)$ o conjunto dos equilíbrios de Nash e o conjunto dos pontos eficientes Pareto para $p_1, \ldots, p_n$, respectivamente. Dubey demonstrou o seguinte:

Teorema 5.2.3 ([11]). *Existe um subconjunto residual U_0 de U^n (e, portanto, denso) tal que para todo $u \in U_0$*

(i) *$N(u)$ é um conjunto finito.*

(ii) *Se $s = (s_1, \ldots, s_n) \in N(u) \cap P(u)$ então ao menos um s_j é um vértice.*

No nosso contexto, os espaços de estratégia $S_1, \ldots, S_n$ serão variedades diferenciáveis compactas de classe C^2, com ou sem bordo, mergulhadas em algum espaço euclideano. Assim, seja $S = S_1 \times \cdots \times S_n \subset \mathbb{R}^N$.

Consideraremos jogos da forma $p_1, \ldots, p_n : S \to \mathbb{R}$, onde cada p_i é uma aplicação de classe C^2. Com isso, queremos dizer que existe uma vizinhança V de S em $\mathbb{R}^N$ na qual cada p_i se estende com classe C^2.

Fixada uma vizinhança V de S em $\mathbb{R}^N$, considere o espaço vetorial real

$$\mathcal{C}^2(V, \mathbb{R}) = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \in C^2\}$$

das funções reais de classe C^2 definidas sobre V. Sobre $\mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$, consideramos a norma

$$\|f\|_2 = \sup\{\|f(x)\|, \|Df(x)\|, \|D^2 f(x)\| \mid x \in V\}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R}),$$

e consideramos o subconjunto

$$\mathcal{B}^2(V, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R}) \mid \|f\|_2 < \infty\}.$$

Então:

Proposição 5.2.4. **i)** *$\mathcal{B}^2(V, \mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$;*

ii) *$\| \ \|_2$ é uma norma sobre $\mathcal{B}^2(V, \mathbb{R})$;*

iii) *$\mathcal{B}^2(V, \mathbb{R})$ com a norma $\| \ \|_2$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Ver [1], Proposição 10.1 e Teorema 10.2.

Seja $U = \mathcal{B}^2(V, \mathbb{R})$. Identificaremos nosso espaço de jogos não cooperativos com o produto cartesiano $U^n = \underbrace{U \times \cdots \times U}_{n \text{ vezes}}$: cada $u = (p_1, \ldots, p_n) \in U^n$ corresponde ao jogo não cooperativo em n pessoas onde o espaço de estratégia do i-ésimo jogador é a variedade S_i e sua payoff é dada pela restrição $p_i : S \to \mathbb{R}$.

Dado $u = (p_1, \ldots, p_n) \in U^n$, denotaremos por $N(u)$, $ELF(u)$ e $P(u)$ o conjunto dos equilíbrios de Nash, dos equilíbrios locais fracos e dos pontos eficientes Pareto para $p_1, \ldots, p_n : S \to \mathbb{R}$, respectivamente. É claro que $N(u) \subset ELF(u)$. Nosso objetivo é mostrar que, para a classe de jogos que estamos considerando, temos, "em geral", $ELF(u) \cap P(u) = \emptyset$. Explicitamente:

Teorema 5.2.5. *Existe um subconjunto residual U_0 de U^n (e, portanto, denso em U^n) tal que para todo $u \in U_0$*

(i) *$ELF(u)$ é um conjunto finito.*

(ii) *$ELF(u) \cap P(u) \cap (S - \partial S) = \emptyset$. Ainda, se $dimS_j \geq 2$ para todo j, U_0 pode ser tomado de modo que $ELF(u) \cap P(u) = \emptyset$, para todo $u \in U_0$.*

Demonstração: Primeiro, vamos nos focar nos pontos que não estão no bordo da variedade S.
Passo 1. Seja Λ um conjunto finito de índices e sejam $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ coberturas abertas de S tais que:

- $B_\lambda = B_1^\lambda \times \cdots \times B_n^\lambda$, $A_\lambda = A_1^\lambda \times \cdots \times A_n^\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$.
- $B_\lambda \subset \overline{B_\lambda} \subset A_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$.
- Cada A_i^λ é uma vizinhança coordenada em S_i via carta $\varphi_i^\lambda : A_i^\lambda \to \mathbb{R}^{k_i}$.

Passo 2. Seja $\lambda \in \Lambda$ fixado. Mostraremos que existe um subconjunto residual U_λ^* de U^n tal que: para cada $u \in U_\lambda^*$,

$$ELF(u) \cap (S - \partial S) \cap \overline{B_\lambda} \quad \text{é finito}$$

$$\text{e}$$

$$ELF(u) \cap P(u) \cap (S - \partial S) \cap \overline{B_\lambda} = \emptyset.$$

De fato, seja

$$\varphi_\lambda = (\varphi_1^\lambda, \ldots, \varphi_n^\lambda) : A_\lambda \to \mathbb{R}^{k_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{k_n}$$

definida por

$$\varphi_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_1^\lambda(x_1), \ldots, \varphi_n^\lambda(x_n)), \quad \text{para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in A_\lambda.$$

Temos que

$$A_\lambda - \partial A_\lambda = (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda)$$

é uma variedade de classe C^2, sem bordo, de dimensão $k = k_1 + \cdots + k_n$. Além disso, a restrição

$$p_i : (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda) \to \mathbb{R}$$

é de classe C^2. Seja

$$D : U^n \times (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda) \to \mathbb{R}^{n\cdot k}$$

definida por: dados

$$u = (p_1, \ldots, p_n) \in U^n \text{ e } s = (s_1, \ldots, s_n) \in (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda),$$

$$D(u,s) = \begin{bmatrix} \vec{\nabla}(p_1 \circ \varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(s)) \\ \vdots \\ \vec{\nabla}(p_n \circ \varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(s)) \end{bmatrix}_{n \times k}$$

onde a i-ésima linha da matriz $D(u,s)$ é o vetor gradiente de $(p_i \circ \varphi_\lambda^{-1})$ no ponto $\varphi_\lambda(s)$, o qual denotamos por $\vec{\nabla}(p_i \circ \varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(s))$.

Fixado $u \in U^n$, denotamos

$$D_u : (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda) \to \mathbb{R}^{n \cdot k}$$

a função obtida por restrição de D, isto é,

$$D_u(s) = D(u,s), \quad \text{for every} \quad s \in (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda).$$

Seja

$$r(j) = \sum_{i=1}^{j} k_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^{n \cdot k}$ serão úteis afim de caracterizarmos os conjuntos $ELF(u)$ e $P(u)$, respectivamente:

$$ELF^* = \{A_{n \times k} \in \mathbb{R}^{n \cdot k} \mid A_{ij} = 0 \ \text{ para } \ r(i-1)+1 \leq j \leq r(i)\}$$

e

$$P^* = \{A_{n \times k} \in \mathbb{R}^{n \cdot k} \mid \text{as linhas de } A \text{ são linearmente dependentes}\}$$

pois:

- Como vimos no Lema 4.3.11, se $s \in S - \partial S$ é um e.l.f. para $p_1, \ldots, p_n : S \to \mathbb{R}$, então o vetor gradiente $\vec{\nabla}_{s_i} p_i(s)$ é nulo, $1 \leq i \leq n$. Segue que as coordenadas $(r(i-1)+1)$ à $(r(i))$ do vetor gradiente $\vec{\nabla}(p_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(s)) \in \mathbb{R}^k$ são todas nulas.

  Portanto,
  $$s \in (A_\lambda - \partial A_\lambda) \cap ELF(u) \Longrightarrow s \in D_u^{-1}(ELF^*).$$

- Além disso, pela Proposição 5.2.1, se $s \in S - \partial S$ é um ponto ótimo Pareto para $p_1, \ldots, p_n : S \to \mathbb{R}$, então

  $$Dp_1(s), \ldots, Dp_n(s) : T_{s_1}(S_1 - \partial S_1) \times \cdots \times T_{s_n}(S_n - \partial S_n) \to \mathbb{R}$$

  são linearmente dependentes. Segue que o conjunto

  $$\{\vec{\nabla}(p_1 \circ \varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(s)), \ldots, (p_n \circ \varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(s))\}$$

  é linearmente dependente. Portanto,

  $$s \in (A_\lambda - \partial A_\lambda) \cap P(u) \Longrightarrow s \in D_u^{-1}(P^*).$$

Segue que

$$s \in (A_\lambda - \partial A_\lambda) \cap ELF(u) \cap P(u) \Longrightarrow s \in D_u^{-1}(ELF^* \cap P^*).$$

A seguir, algumas propriedades dos conjuntos ELF^* e P^*.

Lema 5.2.6. **i)** *ELF^* é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n \cdot k}$, que é fechado em $\mathbb{R}^{n \cdot k}$, de codimensão k.*

ii) *P^* é uma união finita de subvariedades $P_1^*, \ldots, P_l^*$ de $\mathbb{R}^{n \cdot k}$.*

iii) *$ELF^* \cap P^*$ é escrito como uma união finita de subvariedades $H_1^*, \ldots, H_l^*$ de $\mathbb{R}^{n \cdot k}$, cada uma com codimensão maior ou igual à $k+1$.*

Demonstração: O item (i) é trivial.

Para o item (ii), para cada $\rho = 0, \ldots, n-1$, seja

$$S(n, k; \rho) = \{A \in \mathbb{R}^{n \cdot k} \mid \text{posto } A = \rho\}.$$

Então,

$$P^* = \bigcup_{\rho=0}^{n-1} S(n, k; \rho).$$

Além disso, cada $S(n, k; \rho)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n \cdot k}$ de dimensão

$$d_\rho = nk - (n - \rho)(k - \rho)$$

e codimensão $(n-\rho)(k-\rho)$ (Ver [20], pag. 78).

Para o item (iii), o conjunto $ELF^* \cap S(n, k; \rho)$ é uma subvariedade de $S(n, k; \rho)$ de codimensão igual à k em $S(n, k; \rho)$, $\rho = 1, \ldots, n-1$. Portanto, a interseção $ELF^* \cap S(n, k; \rho)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n \cdot k}$ de codimensão $k + (n-\rho)(k-\rho)$, $\rho = 1, \ldots, n-1$. Para $\rho = 0$, temos que $S(n, k; 0)$ é o conjunto unitário constituído da matriz nula. ■

Temos o seguinte fato sobre a função

$$D : U^n \times (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda) \to \mathbb{R}^{n \cdot k}$$

Lema 5.2.7. *Seja M uma subvariedade de classe C^1 e com codimensão $q > k-1$ em $\mathbb{R}^{n \cdot k}$. Então, existe um subconjunto residual U_M de U^n tal que D_u é transversal à M para todo $u \in U_M$.*

Demonstração: A demonstração segue do Transversal Density Theorem. De fato, a função

$$U^n \to \mathcal{C}^1((A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda), \mathbb{R}^{n \cdot k})$$

dada por

$$u \to D_u : (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda) \to \mathbb{R}^{n \cdot k}$$

é uma C^1-representação. Além disso,

$$D : U^n \times (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda) \to \mathbb{R}^{n \cdot k}$$

é transversal à M, para toda subvariedade M de $\mathbb{R}^{n \cdot k}$. De fato, sejam

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nk} \end{bmatrix}$$

em $\mathbb{R}^{n \cdot k}$ e $(u_0, s_0) \in U^n \times (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda)$ quaisquer, $u_0 = (p_1, \ldots, p_n)$. Defina o caminho diferenciável $(u_t, s_t)|_{t \in \mathbb{R}}$ em $U^n \times (A_\lambda - \partial A_\lambda)$ por:

$$s_t = s_0, \quad \text{para todo } t, \quad \text{e} \quad u_t = (p_1^t, \ldots, p_n^t)$$

onde

$$p_i^t(x) = p_i(x) + \langle ty^i, \varphi_\lambda(x) \rangle, \quad \text{para todo } x = (x_1, \ldots, x_n) \in (A_1^\lambda - \partial A_1^\lambda) \times \cdots \times (A_n^\lambda - \partial A_n^\lambda),$$

onde $y^i = (y_{i1}, \ldots, y_{ik}) \in \mathbb{R}^k$. Assim, a composição $p_i^t \circ \varphi_\lambda^{-1}$ é dada por

$$(p_i^t \circ \varphi_\lambda^{-1})(w) = (p_i \circ \varphi_\lambda^{-1})(w) + \langle ty^i, w \rangle, \quad \text{para todo } w \in \varphi(A_\lambda).$$

Segue que

$$\vec{\nabla}(p_i^t \circ \varphi_\lambda^{-1}) = \vec{\nabla}(p_i \circ \varphi_\lambda^{-1}) + ty^i$$

e, portanto,

$$D(u_t, s_t) = D(u_0, s_0) + \begin{bmatrix} ty_{11} & \cdots & ty_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ty_{n1} & \ldots & ty_{nk} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} D(u_t, s_t)|_{t=0} = y.$$

Isso mostra que

$$D'(u_0, s_0) : U^n \times T_{s_0}(A_\lambda - \partial A_\lambda) \to \mathbb{R}^{n \cdot k}$$

é sobrejetiva, para todo $(u_0, s_0) \in U^n \times (A_\lambda - \partial A_\lambda)$.

Além disso, dada uma subvariedade M de $\mathbb{R}^{n\cdot k}$,

$$D'(u_0, s_0)^{-1}(T_x M)$$

possui codimensão finita em $U^n \times T_{s_0}(S - \partial S)$, onde $x = D(u_0, s_0)$. Assim,

$$D'(u_0, s_0)^{-1}(T_x M)$$

possui complemento fechado em $U^n \times T_{s_0}(A_\lambda - \partial A_\lambda)$. Logo, concluímos que D é transversal à M em todo ponto $(u_0, s_0) \in U^n \times (A_\lambda - \partial A_\lambda)$, para qualquer subvariedade M de $\mathbb{R}^{n\cdot k}$.

Desde que $1 > k - q$, pelo Transversal Density Theorem,

$$U_M = \{u \in U^n \mid D_u \pitchfork M\}$$

é residual em U^n. Em particular, U_M é denso em U^n. ■

Continuação da demonstração do Teorema 5.2.5: Considere os conjuntos residuais

$$U_{ELF^*}, U_{H_1^*}, \ldots, U_{H_l^*} \text{ de } U^n$$

dados pelo Lema 5.2.7 para as subvariedades $ELF^*, H_1^*, \ldots, H_l^*$, respectivamente. Seja

$$U_\lambda^* = U_{ELF^*} \cap U_{H_1^*} \cap \cdots \cap U_{H_l^*}.$$

Então, U_λ^* é residual em U^n também. Além disso, para cada $u \in U_\lambda^*$,

$$\text{codim} D_u^{-1}(ELF^*) = \text{codim}(ELF^*) = k.$$

Uma vez que a dimensão de $(A_\lambda - \partial A_\lambda)$ é exatamente k, segue que $D_u^{-1}(ELF^*)$ é um conjunto discreto. Note que $D_u^{-1}(ELF^*) \cap \overline{B_\lambda}$ é fechado em $\overline{B_\lambda}$. Desde que $\overline{B_\lambda}$ é compacto, segue que $D_u^{-1}(ELF^*) \cap \overline{B_\lambda}$ é finito. Como

$$ELF(u) \cap (S - \partial S) \cap \overline{B_\lambda} \subset D_u^{-1}(ELF^*) \cap \overline{B_\lambda},$$

temos que

$$ELF(u) \cap (S - \partial S) \cap \overline{B_\lambda}$$

é um conjunto finito, para todo $u \in U_\lambda^*$. Além disso, para cada $u \in U_\lambda^*$,

$$\text{codim} D_u^{-1}(H_j^*) = \text{codim} H_j^* \geq k + 1,$$

$j = 1, \ldots, l$. Como $\dim(A_\lambda - \partial A_\lambda) = k$, segue que

$$D_u^{-1}(H_j^*) = \emptyset, \quad \text{para todo } u \in U_\lambda^*,$$

$j = 1, \ldots, l$. Logo, como

$$ELF(u) \cap P(u) \cap (S - \partial S) \cap \overline{B_\lambda} \subset D_u^{-1}(ELF^* \cap P^*) = \bigcup_{j=1}^{l} D_u^{-1}(H_j^*),$$

concluímos que

$$ELF(u) \cap P(u) \cap (S - \partial S) \cap \overline{B_\lambda} = \emptyset,$$

para todo $u \in U_\lambda^*$.

Passo 3. Considere o subconjunto residual U^* de U^n dado por

$$U^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^*.$$

Assim, para todo $u \in U^*$,

$$ELF(u) \cap (S - \partial S)$$

é um conjunto finito e

$$ELF(u) \cap P(u) \cap (S - \partial S) = \emptyset.$$

Passo 4. Nos focamos agora nos pontos do bordo de S. Dado $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \partial S$, considere a subvariedade $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ de $\mathbb{R}^N$, onde

$$X_i = \begin{cases} \partial S_i, & \text{se } \; s_i \in \partial S_i \\ S_i - \partial S_i, & \text{se } \; s_i \notin \partial S_i \end{cases}$$

Se $\dim S_i \geq 2$ para cada i tal que $s_i \in \partial S_i$ então, analogamente ao caso anterior, obtemos um subconjunto residual U_R^* de U^n tal que

$$ELF(u) \cap X \;\; \text{é finito}$$

e

$$ELF(u) \cap P(u) \cap X = \emptyset$$

para todo $u \in U_R^*$, onde $R = \{i \mid s_i \in \partial S_i\}$.

Se $\dim S_j = 1$ para algum j tal que $s_j \in \partial S_j$, o subconjunto residual U_R^* de U^n obtido pelo método acima satisfaz apenas $ELF(u) \cap X$ finito, para todo $u \in U_R^*$.

Passo 5. Para finalizar, tomamos U_0 como sendo a interseção dos U_R^* obtidos no Passo 4 com o U^* obtido no Passo 3. ∎

Observação 5.2.8. Pelo Corolário 4.3.9, se $\chi(S_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$, então

$$ELF(u) \neq \emptyset \ \text{ para todo } \ u \in U^n.$$

Isso mostra que o Teorema 1.3.6 não é uma trivialidade no caso em que $\chi(S_i) \neq 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Capítulo

6

Um problema de otimização e teoremas do tipo Borsuk-Ulam

Nesse capítulo, nos focamos no seguinte problema de otimização: Sejam X, Y espaços compactos e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função real contínua. Dada uma função contínua $\varphi : X \to X$, existe $(x, y) \in X \times Y$ tal que

$$f(x, y) \geq f(x, z) \;\text{ e }\; f(\varphi(x), y) \geq f(\varphi(x), z),$$

para todo $z \in Y$? Mostraremos que as condições para uma resposta afirmativa estão relacionadas a teoremas do tipo Borsuk-Ulam.

6.1 O problema

Sejam X, Y espaços compactos e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função real contínua. Para cada $x \in X$, denotamos por $f_x : Y \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f_x(y) = f(x, y), \text{ para todo } y \in Y.$$

Definimos também $\alpha : X \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(x) = \max f_x(Y), \text{ para todo } x \in X.$$

A função α assim definida é contínua. A sua continuidade decorre do seguinte:

Lema 6.1.1. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função tal que $\overline{f(X)}$ é compacto. Suponha que f satisfaz a seguinte propriedade: para cada sequência generalizada $(x_j)_{j\in J} \to x$ em X, se $(f(x_j))_{j\in J}$ converge para $y \in Y$ então $y = f(x)$. Então, f é uma função contínua.*

Demonstração: Suponha que f não é contínua. Então, existe um subconjunto fechado F de Y tal que $f^{-1}(F)$ não é fechado em X. Segue que existe uma sequência generalizada $(x_j)_{j\in J}$ em $f^{-1}(F)$ que converge a um ponto $x \notin f^{-1}(F)$. Assim, $(f(x_j))_{j\in J}$ é uma sequência generalizada em F e $f(x) \notin F$. Além disso, desde que $\overline{f(X)}$ é um conjunto compacto, a sequência generalizada $(f(x_j))_{j\in J}$ possui subsequência generalizada $(f(x_j))_{j\in J'}$ que converge a um ponto $y \in \overline{f(X)}$. Como F é fechado, segue que $y \in F$. Desse modo, obtemos uma sequência generalizada $(x_j)_{j\in J'}$ tal que converge a $x \in X$, $(f(x_j))_{j\in J'}$ converge a $y \in Y$ e $y \neq f(x)$, o que contradiz a hipótese feita sobre f.

Portanto, f é contínua. ■

Provemos a continuidade de α: Primeiro, note que $\alpha(X)$ é um subconjunto compacto do conjunto $f(X\times Y)$. Assim, pelo Lema 6.1.1, é suficiente mostrarmos que, para toda sequência generalizada convergente $(x_j)_{j\in J} \to x$ em X, se $(\alpha(x_j))_{j\in J}$ converge a $r \in \mathbb{R}$ então $r = \alpha(x)$. Assim, suponha $(x_j)_{j\in J} \to x$ em X e $(\alpha(x_j))_{j\in J} \to r$ em $\mathbb{R}$. Para cada $j \in J$, existe $y_j \in Y$ tal que $f(x_j, y_j) = \alpha(x_j)$, ou seja,

$$f(x_j, z) \leq f(x_j, y_j), \text{ para todo } z \in Y. \tag{6.1}$$

Uma vez que Y é compacto, a sequência generalizada $(y_j)_{j\in J}$ possui subsequência generalizada $(y_j)_{j\in J'} \to y$ em Y. Da continuidade de f, a sequência generalizada $(f(x_j, y_j))_{j\in J'}$ converge a $f(x, y)$ e, por hipótese, $(f(x_j, y_j))_{j\in J'}$ converge a r. Assim, $r = f(x, y)$. Por (6.1), juntamente com a continuidade de f, segue que

$$f(x, z) \leq f(x, y), \text{ para todo } z \in Y. \tag{6.2}$$

Portanto, $\alpha(x) = f(x, y) = r$, o que demonstra a continuidade de α.

Proposição 6.1.2. *Seja X um espaço conexo e $\varphi : X \to X$ uma função contínua. Suponha K um subconjunto compacto e não vazio de X tal que $\varphi(K) \subset K$. Então, para cada função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $g(x) = g(\varphi(x))$.*

Demonstração: Seja $g : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua arbitrária e considere a função $h : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = g(x) - g(\varphi(x)), \text{ para todo } x \in X.$$

Como K é compacto, existem $x_0, x_1 \in K$ tais que

$$g(x_0) \leq g(x) \leq g(x_1), \text{ para todo } x \in K.$$

Como $\varphi(K) \subset K$, temos que $\varphi(x_0), \varphi(x_1) \in K$. Logo,

$$g(x_0) \leq g(\varphi(x_0)) \quad \text{e} \quad g(\varphi(x_1)) \leq g(x_1).$$

Segue que $h(x_0) \leq 0$ e $h(x_1) \geq 0$. Como X é conexo, existe $x \in X$ tal que $h(x) = 0$ e, portanto, $g(x) = g(\varphi(x))$. ■

Retornemos ao contexto do início da seção: X, Y são compactos, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua e $\alpha : X \to Y$ é definida por

$$\alpha(x) = \max f_x(Y), \text{ para todo } x \in X.$$

Vimos que α é uma função contínua. Então, dada uma função contínua $\varphi : X \to X$, se assumimos X conexo, pela Proposição 6.1.2, existe $x \in X$ tal que $\alpha(x) = \alpha(\varphi(x))$. Logo, existem $y_1, y_2 \in Y$ tais que

$$f(x, y_1) = f(\varphi(x), y_2) \quad \text{e}$$

$$f(x, y_1) \geq f(x, z) \quad \text{e} \quad f(\varphi(x), y_2) \geq f(\varphi(x), z), \text{ para todo } z \in Y.$$

Em palavras, existe $x \in X$ tal que as funções f_x e $f_{\varphi(x)}$ possuem o mesmo valor de máximo. Questão mais difícil é saber se existe um ponto $(x, y) \in X \times Y$ tal que y realiza ambos os valores de máximo de f_x e $f_{\varphi(x)}$. Isto é, existe $(x, y) \in X \times Y$ tal que

$$f(x, y) \geq f(x, z) \ \text{ e } \ f(\varphi(x), y) \geq f(\varphi(x), z), \text{ para todo } z \in Y \ ?$$

Essa questão pode ser formulada em termos de um problema de coincidência. De fato, defina a aplicação de multivalores $T : X \multimap Y$ por

$$T(x) = \{y \in Y \mid f(x, y) = \alpha(x)\}, \text{ para todo } x \in X.$$

Com T assim definida, temos que $y \in Y$ realiza ambos os valores de máximo de f_x e $f_{\varphi(x)}$ se, e somente se, $y \in T(x) \cap T(\varphi(x))$. Veja que, pelo Exemplo 1.1.5, T é s.c.s..

No artigo [4], C. Biasi e D. de Mattos desenvolveram a seguinte questão: Dados X um espaço topológico, $\varphi : X \to X$ uma função contínua e $f : X \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua tal que $f(\varphi^2(x)) = f(x)$, para todo $x \in X$, existe $x_0 \in X$ tal que $f(\varphi(x_0)) = f(x_0)$? Eles provaram o seguinte:

Teorema 6.1.3 ([4], Theorem 1.1). *Sejam X um espaço Hausdorff e A um subconjunto compacto, conexo e localmente conexo por caminhos de X. Seja $\varphi : X \to X$ uma função contínua tal que $\varphi(A) \subset A$. Suponha $id_* - \varphi_* : i_*(\mathrm{H}_1(A, \mathbb{Q})) \to i_*(\mathrm{H}_1(A, \mathbb{Q}))$ sobrejetiva, onde $i : A \hookrightarrow X$ é a inclusão e $id : X \to X$ é a identidade. Então, para toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}^2$ ou existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(\varphi(x))$ ou existe um ponto $x \in A$ tal que $f(\varphi(x)) \in [f(\varphi^2(x)), f(x)]$. Em particular, se $f(\varphi^2(x)) = f(x)$ para todo $x \in A$, existe um ponto $x_0 \in X$ tal que $f(\varphi(x_0)) = f(x_0)$.*

Infelizmente, as técnicas por eles usadas não puderam ser aplicadas para funções $f : X \to \mathbb{R}^n$ com $n > 2$.

Nós demonstraremos uma versão do Teorema 6.1.3 substituindo a função contínua $f : X \to \mathbb{R}^2$ por uma aplicação de multivalores $T : X \multimap \mathbb{R}^2$ acíclica com valores compactos. Como consequência, obtemos situações onde a resposta para a questão colocada no início do capítulo é positiva.

6.2 Teoremas de Borsuk-Ulam para aplicações de multivalores

Dados $p, q \in \mathbb{R}^2$, denotamos por $[p, q]$ o segmento fechado em $\mathbb{R}^2$ que une p e q.

Os próximos resultados são simplesmente as versões de [[4], Theorem 1.1] e [[4], Corollary 2.10.] para a homologia de Čech. Aqui, o espaço A não precisa ser localmente conexo por caminhos.

Proposição 6.2.1. *Sejam X um espaço compacto e A um subconjunto compacto e conexo de X. Seja $\varphi : X \to X$ uma função contínua tal que $\varphi(A) \subset A$ e suponha $id_* - \varphi_* : i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A; \mathbb{Q})) \to i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A; \mathbb{Q}))$ sobrejetiva. Então, para toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}^2$, ou existe $x \in X$ tal que $f(\varphi(x)) = f(x)$ ou existe $x \in A$ tal que*

$f(\varphi(x)) \in [f(\varphi^2(x)), f(x)]$. Em particular, se $f(\varphi^2(x)) = f(x)$ para todo $x \in A$, existe $x_0 \in X$ tal que $f(\varphi(x_0)) = f(x_0)$.

Corolário 6.2.2. *Sejam X um espaço compacto e A um subconjunto compacto e conexo de X. Seja $\varphi : X \to X$ uma função contínua tal que $\varphi(A) \subset A$ e $\varphi^3 = id_X$. Se $id_* - \varphi_* : i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q})) \to i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q}))$ é sobrejetiva, então para toda função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $g(x) = g(\varphi(x)) = g(\varphi^2(x))$.*

Exemplo 6.2.3. Seja $n \geq 2$ e $\omega \in S^1$ uma $2n$-ésima raiz da unidade, $\omega \neq 1$. Considere $\varphi_0 : S^1 \to S^1$ a rotação dada por $\varphi_0(z) = \omega z$, para todo $z \in S^1$. Agora, considere S^2 como sendo a suspensão $S(S^1)$ de S^1. Definimos $\varphi : S^2 \to S^2$ por

$$\varphi[(t,z)] = [(-t, \varphi_0(z))], \ t \in [-1,1], \ z \in S^1,$$

onde $[(t,z)]$ denota a classe de equivalência (t,z) em $S(S^1)$. Seja $h : S^1 \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua arbitrária (por exemplo, a inclusão). Seja $f_0 : S^1 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f_0(z) = h(z^n)$, para todo $z \in S^1$. Assim, $f_0(\varphi_0^2(z)) = f_0(z)$, para todo $z \in S^1$. Finalmente, defina $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ por, para cada $z \in S^1$,

$$f[(t,z)] = (t,0) + (1 - |t|) f_0(z).$$

Com essa construção, temos $f(\varphi^2(x)) = f(x)$, para todo $x \in S^2$, e φ não é involução. Pelo Teorema 6.2.1 de C. Biasi e D. de Mattos, existe $x_0 \in S^2$ tal que $f(\varphi(x_0)) = f(x_0)$.

6.2.1 Teoremas principais

Teorema 6.2.4. *Sejam X compacto e $A \subset X$ compacto e conexo. Seja $\varphi : X \to X$ uma função contínua tal que $\varphi(A) \subset A$. Suponha $id_* - \varphi_* : i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q})) \to i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q}))$ sobrejetiva. Então, para toda aplicação de multivalores $T : X \multimap \mathbb{R}^2$ acíclica e com valores compactos, ou existe $x \in X$ tal que $T(x) \cap T(\varphi(x)) \neq \emptyset$, ou existem $x \in A$, $u_0 \in T(x)$, $u_1 \in T(\varphi(x))$ e $u_2 \in T(\varphi^2(x))$ tais que $u_1 \in [u_2, u_0]$.*

Demonstração: Seja $T : X \multimap \mathbb{R}^2$ uma aplicação de multivalores acíclica e considere o subconjunto $\tilde{X}$ de $X^{\mathbb{N}} \times T(X)^{\mathbb{N}}$ definido por

$$\tilde{X} = \{(x, \varphi(x), \varphi^2(x), \cdots, u_0, u_1, u_2, \cdots) \mid x \in X, \ u_n \in T(\varphi^n(x)), \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Temos que $T(x)$ é um subconjunto compacto e acíclico de $\mathbb{R}^2$, para cada $x \in X$. Pelo Lema 1.1.7, $T(X)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$.

Pelo teorema de Tychonoff, $X^{\mathbb{N}} \times T(X)^{\mathbb{N}}$ é compacto.

Mostraremos que o espaço $\tilde{X}$ é compacto. Para isso, basta mostrar que $\tilde{X}$ é fechado em $X^{\mathbb{N}} \times T(X)^{\mathbb{N}}$. Seja $(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in J}$ uma sequência generalizada em $\tilde{X}$, onde

$$\tilde{x}_\alpha = (x_\alpha, \varphi(x_\alpha), \varphi^2(x_\alpha), \ldots, u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}, u_{\alpha 2}, \ldots),\ u_{\alpha_i} \in T(\varphi^i(x_\alpha)),$$

que converge a $\tilde{x} \in X^{\mathbb{N}} \times T(X)^{\mathbb{N}}$, onde

$$\tilde{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, y_0, y_1, y_2, \ldots).$$

Portanto, $x_\alpha \to x_0$ e $\varphi^i(x_\alpha) \to x_i$, para todo $i \geq 1$. Como φ é contínua, segue que $x_i = \varphi^i(x_0)$. Além disso, $u_{\alpha_i} \to y_i$, para todo $i \geq 0$. Como T é s.c.s. com valores compactos, $\varphi^i(x_\alpha) \to \varphi^i(x_0)$ e $u_{\alpha_i} \in T(\varphi^i(x_\alpha))$, pela Proposição 1.1.2, segue que $y_i \in T(\varphi^i(x_0))$, para todo $i \geq 0$. Assim, $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Logo, $\tilde{X}$ é fechado em $X^{\mathbb{N}} \times T(X)^{\mathbb{N}}$ e, portanto, $\tilde{X}$ é compacto.

Analogamente,

$$\tilde{A} = \{(x, \varphi(x), \varphi^2(x), \cdots, u_0, u_1, u_2, \cdots) \mid x \in A,\ u_n \in T(\varphi^n(x)),\ n \in \mathbb{N}\}$$

é um subconjunto compacto de $\tilde{X}$.

Considere a função $\Phi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ dada por

$$\Phi(x, \varphi(x), \varphi^2(x), \cdots, u_0, u_1, u_2, \cdots) = (\varphi(x), \varphi^2(x), \cdots, u_1, u_2, \cdots).$$

É claro que $\Phi(\tilde{A}) \subset \tilde{A}$. Além disso, podemos provar que

$$id_* - \Phi_* : j_*(\breve{H}_1(\tilde{A}; \mathbb{Q})) \to j_*(\breve{H}_1(\tilde{A}; \mathbb{Q}))$$

é sobrejetiva, onde $j : \tilde{A} \to \tilde{X}$ é a função inclusão. De fato, seja $s : \tilde{X} \to X$ dada por

$$s(x, \varphi(x), \varphi^2(x), \cdots, u_0, u_1, u_2, \cdots) = x.$$

Então, $s^{-1}(x)$ é homeomorfo ao espaço acíclico $\prod_{i=0}^{\infty} T(\varphi^i(x))$, para cada $x \in X$. Seque que s é uma função de Vietoris. Portanto, pelo Teorema de Begle-Vietoris, $s_* : \breve{\mathrm{H}}_*(\tilde{X}, \mathbb{Q}) \to \breve{\mathrm{H}}_*(X, \mathbb{Q})$ é um isomorfismo. Note que $\varphi \circ s = s \circ \Phi$. Então,

$$s_*(id_* - \Phi_*) = s_* - s_*\Phi_* = s_* - \varphi_* s_* = (id_* - \varphi_*)s_*.$$

Desde que $(id_* - \varphi_*)$ é sobrejetiva e s_* é bijetiva, seque que $s_*(id_* - \Phi_*)$ é sobrejetiva. Ainda, desde que s_* é bijetiva, segue que $(id_* - \Phi_*)$ é sobrejetiva.

Finalmente, seja $f : \tilde{X} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, \varphi(x), \varphi^2(x), \cdots, u_0, u_1, u_2, \cdots) = u_0.$$

Pela Proposição 6.2.1, ou existe $\tilde{x} = (x, \varphi(x), \varphi^2(x), \cdots, u_0, u_1, u_2, \cdots) \in \tilde{X}$ tal que

$$f(\tilde{x}) = f(\Phi(\tilde{x})),$$

ou existe $\tilde{x} = (x, \varphi(x), \varphi^2(x), \cdots, u_0, u_1, u_2, \cdots) \in \tilde{A}$ tal que

$$f(\Phi(\tilde{x})) \in [f(\Phi^2(\tilde{x})), f(\tilde{x})].$$

Assim, ou $T(x) \cap T(\varphi(x)) \neq \emptyset$ para algum $x \in X$, ou existem $x \in A$, $u_0 \in T(x)$, $u_1 \in T(\varphi(x))$ e $u_2 \in T(\varphi^2(x))$ tais que $u_1 \in [u_2, u_0]$. ∎

Teorema 6.2.5. *Sejam X um espaço compacto e $\varphi : X \to X$ uma função contínua. Seja A um subconjunto compacto e conexo de X tal que $\varphi(A) \subset A$ e $id_* - \varphi_* : i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q})) \to i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q}))$ é sobrejetiva. Então, para toda aplicação de multivalores $T : X \multimap \mathbb{R}^2$ acíclica e com valores compactos tal que $T(x) \subset T(\varphi^2(x))$, para todo $x \in X$, existe $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) \cap T(\varphi(x_0)) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Seja $T : X \multimap \mathbb{R}^2$ uma aplicação de multivalores acíclica tal que, para cada $x \in X$, $T(x) \subset T(\varphi^2(x))$. Considere os conjuntos

$$\tilde{X} = \{(x, \varphi(x), u, v) \mid x \in X,\ u \in T(x),\ v \in T(\varphi(x))\}$$

e

$$\tilde{A} = \{(x, \varphi(x), u, v) \mid x \in A,\ u \in T(x),\ v \in T(\varphi(x))\}.$$

Analogamente ao teorema anterior, os conjuntos $\tilde{X}$ e $\tilde{A}$ são subconjuntos compactos de $X^2 \times T(X)^2$.

Considere a função $\Phi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ definida por

$$\Phi(x, \varphi(x), u, v) = (\varphi(x), \varphi^2(x), v, u).$$

A aplicação Φ é bem definida pois, para cada $(x, \varphi(x), u, v) \in \tilde{X}$, temos $v \in T(\varphi(x))$ e $u \in T(x) \subset T(\varphi^2(x))$. Além disso, $\Phi(\tilde{A}) \subset \tilde{A}$.

Seja $j : \tilde{A} \to \tilde{X}$ a inclusão. Então,

$$id_* - \Phi_* : j_*(\check{\mathrm{H}}_1(\tilde{A};\mathbb{Q})) \to j_*(\check{\mathrm{H}}_1(\tilde{A};\mathbb{Q}))$$

é sobrejetiva. De fato, como no teorema anterior, a sobrejetividade segue do fato de que $\varphi \circ s = s \circ \Phi$, onde $s : \tilde{X} \to X$ é dada por $s(x, \varphi(x), u, v) = x$, a qual é uma função de Vietoris.

Finalmente, defina $f : \tilde{X} \to \mathbb{R}^2$ por

$$f(x, \varphi(x), u, v) = u.$$

Assim, $f(\Phi^2(x,\varphi(x),u,v)) = f(x,\varphi(x),u,v)$, para todo $(x,\varphi(x),u,v) \in \tilde{X}$. Portanto, pela Proposição 6.2.1, existe $(x,\varphi(x),u,v) \in \tilde{X}$ tal que

$$f(\Phi(x,\varphi(x),u,v)) = f(x,\varphi(x),u,v).$$

Segue que $u = v \in T(x) \cap T(\varphi(x))$. ■

Corolário 6.2.6. *Sejam X um espaço compacto e $\varphi : X \to X$ uma involução livre. Suponha A um subconjunto compacto e conexo de X tal que $\varphi(A) \subset A$ e $id_* - \varphi_* : i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q})) \to i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q}))$ é sobrejetiva. Então, para toda aplicação de multivalores $T : X \multimap \mathbb{R}^2$ acíclica e com valores compactos existe $x \in X$ tal que $T(x) \cap T(\varphi(x)) \neq \emptyset$.*

Observação 6.2.7. No Corolário 6.2.6, quando $X = A = S^2$ e φ é a função antipodal, temos a versão clássica do teorema de Borsuk-Ulam para as aplicações de multivalores no caso 2-dimensional.

Teorema 6.2.8. *Sejam X compacto e $A \subset X$ compacto e conexo. Seja $\varphi : X \to X$ uma função contínua tal que $\varphi(A) \subset A$ e $\varphi^3 = id_X$. Suponha $id_* - \varphi_* : i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q})) \to i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q}))$ sobrejetiva. Então, para toda aplicação de multivalores $G : X \multimap \mathbb{R}$ acíclica e com valores compactos existe $x \in X$ tal que $G(x) \cap G(\varphi(x)) \cap G(\varphi^2(x)) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Seja $G : X \multimap \mathbb{R}$ uma aplicação de multivalores acíclica. Considere os espaços

$$\tilde{X} = \{(x,\varphi(x),\varphi^2(x),u,v,w) \mid x \in X, u \in G(x), v \in G(\varphi(x)), w \in G(\varphi^2(x))\}$$

e

$$\tilde{A} = \{(x,\varphi(x),\varphi^2(x),u,v,w) \mid x \in A, u \in G(x), v \in G(\varphi(x)), w \in G(\varphi^2(x))\}.$$

Seja $s : \tilde{X} \to X$ a função dada por

$$s(x,\varphi(x),\varphi^2(x),u,v,w) = x.$$

Como nas demonstrações anteriores, $\tilde{X}$ e $\tilde{A}$ são espaços compactos e s é uma função de Vietoris. Portanto, o homomorfismo induzido $s_* : \check{\mathrm{H}}_*(\tilde{X};\mathbb{Q}) \to \check{\mathrm{H}}_*(X;\mathbb{Q})$ é um isomorfismo. Seja $\Phi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ definida por

$$\Phi(x,\varphi(x),\varphi^2(x),u,v,w) = (\varphi(x),\varphi^2(x),x,v,w,u).$$

Note que $\Phi^3 = id_{\tilde{X}}$ and $s \circ \Phi = \varphi \circ s$. Seja $j : \tilde{A} \to \tilde{X}$ a inclusão. Como nas demonstrações anteriores, temos que

$$id_* - \Phi_* : j_*(\check{\mathrm{H}}_1(\tilde{A};\mathbb{Q})) \to j_*(\check{\mathrm{H}}_1(\tilde{A};\mathbb{Q}))$$

é um homomorfismo sobrejetivo. Seja $g : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, \varphi(x), \varphi^2(x), u, v, w) = u.$$

Pelo Corolário 6.2.2, existe $\tilde{x} = (x, \varphi(x), \varphi^2(x), u, v, w) \in \tilde{X}$ tal que $g(x) = g(\Phi(x)) = g(\Phi^2(x))$. Assim, $u = v = w$. Segue que

$$G(x) \cap G(\varphi(x)) \cap G(\varphi^2(x)) \neq \emptyset.$$

■

6.3 Aplicações

Em vista dos resultados da seção anterior, podemos formular o seguinte:

Proposição 6.3.1. *Seja X um espaço compacto e $\varphi : X \to X$ uma função contínua. Suponha $A \subset X$ compacto e conexo tal que $\varphi(A) \subset A$ e $id_* - \varphi_* : i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q})) \to i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A;\mathbb{Q}))$ é sobrejetiva. Então, dada uma função contínua $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, onde Y é um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y) = f(\varphi^2(x), y)$, para todo $(x,y) \in X \times Y$ e $f_x : Y \to \mathbb{R}$ é quasecôncava para todo $x \in X$, existe $(x,y) \in X \times Y$ tal que*

$$f(x,y) \geq f(x,z) \quad e \quad f(\varphi(x),y) \geq f(\varphi(x),z),$$

para todo $z \in Y$.

Demonstração: Sejam $Y \subset \mathbb{R}^2$ compacto e convexo e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ como no enunciado do teorema. Então, definimos a função $\alpha : X \to Y$ por

$$\alpha(x) = \max f_x(Y)$$

e a aplicação de multivalores $T : X \multimap Y$ dada por

$$T(x) = \{y \in Y \mid f(x,y) = \alpha(x)\}.$$

Então, $T(x)$ é convexo para cada $x \in X$, seguindo que T é acíclica. Além disso, desde que $f(x,y) = f(\varphi^2(x), y)$ para todo $(x,y) \in X \times Y$, temos que $T(x) = T(\varphi^2(x))$, para todo $x \in X$. Logo, pelo Teorema 6.2.8, existe $x \in X$ tal que $T(x) \cap T(\varphi(x)) \neq \emptyset$. Como já dissemos, todo $(x, y) \in X \times Y$ tal que $y \in T(x) \cap T(\varphi(x))$ satisfaz

$$f(x, y) \geq f(x, z) \;\text{ e }\; f(\varphi(x), y) \geq f(\varphi(x), z),$$

para todo $z \in Y$. ■

Exemplo 6.3.2. Seja $Y \subset \mathbb{R}^2$ compacto e convexo. Sejam $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\varphi^2 : S^2 \to S^2$ funções contínuas tais que $g(\varphi^2(x)) = g(x)$ para todo $x \in S^2$ (veja o Exemplo 6.2.3). Assim, $f : S^2 \times Y \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \langle g(x), y \rangle,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^2$, é uma função contínua que satisfaz $f(x, y) = f(\varphi^2(x), y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Além disso, f_x é quasecôncava para todo $x \in S^2$.

Corolário 6.3.3. *Seja $Y \subset \mathbb{R}^2$ compacto e convexo. Para cada função contínua $f : S^2 \times Y \to \mathbb{R}$ tal que f_x é quasicôncava existe $(x, y) \in S^2 \times Y$ tal que*

$$f(x, y) \geq f(x, z) \;\text{ e }\; f(-x, y) \geq f(-x, z),$$

para todo $z \in Y$.

Observação 6.3.4. O Corolário 6.3.3 é ainda verdadeiro se Y é um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. De fato, essa é uma consequência do teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de multivalores acíclicas no caso n-dimensional.

A hipótese de quaseconcavidade sobre f na Proposição 6.3.1 é essencial, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 6.3.5. Seja $f : S^2 \times D^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 2x_1 y_1^2 - x_2 y_2^2 + x_3 y_1,$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ e $y = (y_1, y_2) \in D^2$. Então, não existe ponto $(x, y) \in S^2 \times D^2$ tal que

$$f(x, y) \geq f(x, z) \;\text{ e }\; f(-x, y) \geq f(-x, z),$$

para todo $z \in D^2$. De fato, para $T : S^2 \to D^2$ dada por

$$T(x) = \{y \in D^2 \mid f(x, y) = \max f_x(D^2)\},$$

não existe $x \in S^2$ tal que $T(x) \cap T(-x) \neq \emptyset$.

Finalizamos com o seguinte:

Proposição 6.3.6. *Sejam X compacto e $A \subset X$ compacto e conexo. Seja $\varphi : X \to X$ uma função contínua tal que $\varphi(A) \subset A$ e $\varphi^3 = id_X$. Suponha $id_* - \varphi_* : i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A; \mathbb{Q})) \to i_*(\check{\mathrm{H}}_1(A; \mathbb{Q}))$ sobrejetiva. Então, para toda função contínua $f : X \times J \to \mathbb{R}$, onde J é um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, tal que f_x é quasecôncava para todo $x \in X$, existe $(x_0, t_0) \in X \times J$ tal que*

$$f(x_0, t_0) \geq f(x_0, t), \quad f(\varphi(x_0), t_0) \geq f(\varphi(x_0), t) \quad e$$

$$f(\varphi^2(x_0), t_0) \geq f(\varphi^2(x_0), t),$$

para todo $t \in J$.

Demonstração: Como feito anteriormente, defina a função $\alpha : X \to J$ por

$$\alpha(x) = \max f_x(J)$$

e a aplicação de multivalores $G : X \multimap J$ por

$$G(x) = \{t \in J \mid f(x, t) = \alpha(x)\}.$$

Assim definida, G é uma aplicação de multivalores acíclica e, pelo Teorema 6.2.8, existe $x_0 \in X$ tal que $G(x_0) \cap G(\varphi(x_0)) \cap G(\varphi^2(x_0)) \neq \emptyset$. Agora, todo $t_0 \in G(x_0) \cap G(\varphi(x_0)) \cap G(\varphi^2(x_0))$ satisfaz

$$f(x_0, t_0) \geq f(x_0, t), \quad f(\varphi(x_0), t_0) \geq f(\varphi(x_0), t) \quad \text{e}$$

$$f(\varphi^2(x_0), t_0) \geq f(\varphi^2(x_0), t),$$

para todo $t \in J$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Abraham, R., Robbin, J., *Transversal mappings and flows.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[2] Alós-Ferrer, C., Ania, A.B., *Local equilibria in economic games.* Econom. Lett., 70, no. 2, 165-173 (2001).

[3] Begle, E.G., *The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces.* Ann. of Math., 51, no. 2, 534-543 (1950).

[4] Biasi, C., de Mattos, D., *A Non-standard Version of the Borsuk-Ulam Theorem.* Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **53** (2005), no. 1, 111-119.

[5] Biasi, C., Monis, T.F.M., *Some coincidence theorems and its applications to existence of local Nash equilibrium.* (artigo aceito para publicação)

[6] Border, K. C., *Fixed point theorems with applications to economics and game theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[7] Bredon, G. E., *Topology and Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer-Verlag, New York, 1993.

[8] Brown, R. F., Schirmer, H., *Nielsen coincidence theory and coincidence-producing maps for manifolds with boundary.* Topology Appl., **46**, no. 1, 65-79 (1992).

[9] Debreu, G., *A social equilibrium existence theorem.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 38, 886-893 (1952).

[10] Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology.* Berlin; New York : Springer-Verlag, 1972.

[11] Dubey, P., *Inefficiency of Nash Equilibria.* Mathematics of Operations Research **11**, no. 1, 1-8 (1986).

[12] Eilenberg, S., Montgomery, D., *Fixed point theorems for multi-valued transformations.* Amer. J. Math., 68, 214-222 (1946).

[13] Eilenberg, S., Steenrod, N., *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.

[14] Glicksberg, I.L., *A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points.* Proc. Amer. Math. Soc. 3, 170-174 (1952).

[15] Górniewicz, L., *Once more on the Lefschetz fixed point theorem.* Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **55**, no. 2, 161-170 (2007).

[16] Górniewicz, L., *Topological fixed point theory of multivalued mappings.* Second edition. Topological Fixed Point Theory and Its Applications, 4. Springer, Dordrecht, 2006.

[17] Granas, A., Dugundji, J., *Fixed point theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.

[18] Greenberg, M. J., *Lectures on algebraic topology.* W.A. Benjamin, Inc., California, 1971.

[19] Heikkilä, S., Reffett, K., *Fixed point theorems and their applications to theory of Nash equilibria.* Nonlinear Anal., 64, no. 7, 1415-1436 (2006).

[20] Hirsch, M. W., *Differential Topology.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[21] Hu, S., *Homotopy theory.* Pure and Applied Mathematics **8**, Academic Press, New York-London, 1959.

[22] Jaworowski, J. W., Powers, M. J., Λ*-spaces and fixed point theorems.* Fund. Math. 64, 157-162 (1969).

[23] Lang, S., *Introduction to differentiable manifolds.* Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London-Sydney, 1967.

[24] Lefschetz, S., *Continuous transformations of manifolds.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **9**, 90-93 (1923).

[25] Lefschetz, S., *Intersections of complexes on manifolds.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **11**, 290-292 (1925).

[26] Lefschetz, S., *Intersections and transformations of complexes and manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc., **29**, 1-49 (1926).

[27] Lefschetz, S., *Manifolds with boundary and their transformations.* Trans. Amer. Math. Soc., **29**, 429-462 (1927).

[28] Milnor, J., *A nobel prize for John Nash.* Math. Intelligencer, 17, no. 3, 11-17 (1995).

[29] Nagurney, A., *Network economics. A variational inequality approach.* Second edition. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.

[30] Nakaoka, M., *Coincidence Lefschetz numbers for a pair of fiber preserving maps.* J. Math. Soc. Japan, **32**, 751-779 (1980).

[31] Nash, J.F., *Equilibrium points in n-person games* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.S., 36, 48-49 (1950).

[32] Nash, J.F., *Non-cooperative games* Ann. of Math., 54, no. 2, 286-295 (1951).

[33] Nikaidô, H., Isoda, K., *Note on non-cooperative convex games.* Pacific J. Math., 5, 807-815 (1955).

[34] Powers, M. J., *Lefschetz fixed point theorems for a new class of multi-valued maps.* Pacific J. Math. 42, 211-220 (1972).

[35] Smale, S., *Optimizing Several Functions.* Manifolds-Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973), Univ. Tokyo Press, Tokyo, pp. 69-75 (1975).

[36] Tan, K.K., Yu, J., Yuan, X.Z., *Existence theorems of Nash equilibrium for non-cooperative n-person games.* Internat. J. Game Theory, 24, no. 3, 217-222 (1995).

[37] Tesfatsion, L., *Pure strategy Nash equilibrium points and the Lefschetz fixed point theorem.* Internat. J. Game Theory, 12, no. 3, 181-191 (1983).

[38] Torres-Martínez, J. P., *Fixed points as Nash equilibria.* Fixed Point Theory and Applications, Hindawi Publishing Corporation, Article ID 36135, 1-4 (2006).

[39] Zhao, J., *The equivalence between four economic theorems and Brouwer's fixed point theorem.* Working Paper, Departament of Economics, Iowa State University, Iowa, 2002.

Índice Remissivo