

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Robustez da estabilidade assintótica e aproximações de
soluções via wavelets**

Guilherme Kenji Nakassima

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Guilherme Kenji Nakassima

Robustez da estabilidade assintótica e aproximações de soluções via wavelets

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues

USP – São Carlos
Junho de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

N163r Nakassima, Guilherme Kenji
Robustez da estabilidade assintótica e
aproximações de soluções via wavelets / Guilherme
Kenji Nakassima; orientador Hildebrando Munhoz
Rodrigues. -- São Carlos, 2019.
66 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. ESTABILIDADE ESTRUTURAL (EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS). 2. FUNÇÕES QUASE-PERIÓDICAS. 3. ANÁLISE
DE ONDALETAS. 4. SOLUÇÕES PERIÓDICAS. I. Rodrigues,
Hildebrando Munhoz , orient. II. Título.

Guilherme Kenji Nakassima

**Robustness of asymptotical stability and approximation of
solutions via wavelets**

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues

USP – São Carlos
June 2019

*Este trabalho é dedicado à minha futura esposa, Kátia,
cujo apoio e amor foram imprescindíveis.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e à minha (futura) esposa Kátia Satie Sasaki, pelo apoio dado durante esses anos.

Agradeço aos meus amigos e companheiros de graduação, pós-graduação e seminários, com os quais tive proveitosas e divertidas discussões matemáticas e não-matemáticas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues, não somente pela excelente orientação e apoio, mas também por me aceitar como orientando mesmo sem o arcabouço matemático da graduação.

Agradeço aos professores, com quem aprendi muito. Em especial, agradeço ao Prof. Márcio Fuzeto Gameiro, que também acompanhou o trabalho.

Agradeço ao ICMC pela qualidade da educação e pelo ambiente proporcionado.

Por fim, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

*“Mathematics knows no races or geographic boundaries; for mathematics, the cultural world is
one country.”
(David Hilbert)*

RESUMO

NAKASSIMA, G. K. **Robustez da estabilidade assintótica e aproximações de soluções via wavelets**. 2019. 68 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Neste trabalho, estudamos equações diferenciais em espaços de Banach. Duas questões são abordadas: a robustez da estabilidade assintótica, e a aproximação de soluções de sistemas periódicos por wavelets.

Observa-se que a estabilidade exponencial do sistema $\dot{x} = A(t)x$ é qualitativamente preservada pelo sistema perturbado $\dot{x} = A(t)x + B(t)x$ se $B(t)$ for integralmente pequeno. Consequentemente, tal propriedade é preservada por uma perturbação $B(\omega t)x$ para ω suficientemente grande, mesmo se $B(t)$ pertence a uma classe mais geral de funções do que as funções quase-periódicas, aqui apresentada.

Além disso, estudamos o efeito de aproximações de uma função periódica $f(t)$ por wavelets periódicas na solução de um sistema periódico $\dot{x} = Ax + f(t)$. Conclui-se que as soluções do problema inicial podem inclusive ser aproximadas utilizando a wavelet base não-periódica.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Robustez da estabilidade, Funções quase-periódicas, Aproximações de solução, Wavelets periódicas.

ABSTRACT

NAKASSIMA, G. K. **Robustness of asymptotical stability and approximation of solutions via wavelets**. 2019. 68 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

In this work, we study differential equations in Banach spaces. Two questions were considered: the robustness of the asymptotic stability, and the approximation of solutions of periodic systems by wavelets.

It is observed that the exponential stability of the system $\dot{x} = A(t)x$ is qualitatively preserved by the perturbed system $\dot{x} = A(t)x + B(t)x$ if $B(t)$ is integrally small. As a consequence, this property is preserved by a perturbation $B(\omega t)$ for ω sufficiently large, even if $B(t)$ is in a class of functions which is more general than almost-periodic functions, presented here.

Furthermore, we study the effect of approximating a periodic function $f(t)$ by periodic wavelets in the solution of a periodic system $\dot{x} = Ax + f(t)$. It is concluded that the solutions of the initial problem can even be approximated using the non-periodic base wavelet.

Keywords: Dynamical systems, Stability robustness, Almost periodic functions, Approximation of solutions, Periodic wavelets.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Wavelet de Haar e sua função de escala	33
Figura 2 – $\phi_{1,1}(t)$ e $\psi_{1,1}(t)$ para a wavelet de Haar	34
Figura 3 – Processo de periodização de $\phi(t)$ e $\psi(t)$	34
Figura 4 – Processo de periodização de $\phi_{1,1}(t)$ e $\psi_{1,1}(t)$	35
Figura 5 – Espectros para $a = 0.5$ e $\nu = 0.25$	47
Figura 6 – Solução 1-periódica de $\dot{x} = -x + \tilde{\psi}(t)$	60
Figura 7 – $\cos(2\pi t)$ e aproximações por wavelets	62
Figura 8 – Solução do sistema $\dot{x} = -x + \tilde{\psi}_{1,1}(t)$	63
Figura 9 – Solução exata vs Aproximações	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MRA	Análise multirresolução (do inglês <i>Multiresolution Analysis</i>)
qtp	Quase todo ponto

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{L}(\mathbb{X})$ — Espaço dos operadores lineares limitados $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

$T(t, s)$ — Operador de evolução

$L^p(\mathbb{X})$ — Espaço das funções L^p -integráveis

\hat{f} — Transformada de Fourier de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$

$\psi_{j,k}$ — Wavelet ortonormal

$\phi_{j,k}$ — Função de escala

$\tilde{\psi}_{j,k}$ — Periodização da wavelet $\psi_{j,k}$

$\tilde{\phi}_{j,k}$ — Periodização da função de escala $\phi_{j,k}$

$BUC(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ — Espaço das funções limitadas e uniformemente contínuas $f : X \rightarrow Y$

\mathcal{GAP} — Espaço das funções quase-periódicas generalizadas

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ — Valor médio de $A(t)$

\mathbb{X} — Espaço de Banach genérico

$\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ — Norma do espaço \mathbb{X}

$U(t)$ — C_0 -semigrupo

x_f — Solução do sistema $\dot{x} = Ax + f(t)$

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ — Operadores solução

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	PRELIMINARES	25
2.1	Equações diferenciais ordinárias num espaço de Banach	25
2.2	Espaços L^p e Teoria básica de wavelets	28
3	ROBUSTEZ DE SISTEMAS DINÂMICOS	37
3.1	Generalização de funções quase-periódicas	38
3.2	Aplicação em equações diferenciais	41
3.3	Estabilização através de perturbação	48
4	DINÂMICA COM WAVELETS	51
4.1	Introdução	51
4.2	Perturbação de equilíbrio hiperbólico	52
4.3	Soluções de sistemas periódicos com wavelets	55
5	CONCLUSÃO	65
	REFERÊNCIAS	67

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, são estudadas equações diferenciais em espaços de Banach. Duas questões são abordadas: a robustez da estabilidade assintótica e a aproximação de soluções via wavelets.

A primeira questão tem grande valor qualitativo: caso a dinâmica do sistema seja perturbada, o comportamento geral das soluções se alterará? Por exemplo, poderia um sistema estável se tornar instável, ou vice-versa? Tal questão se torna ainda mais importante na descrição e controle de sistemas físicos, pois na modelagem dos mesmos, muitos efeitos acabam desprezados ou simplificados, e é interessante que tais simplificações não interfiram significativamente nas previsões do modelo.

A segunda questão tem uma natureza mais prática. Dado um sistema complexo, podemos aproximar a solução do mesmo usando funções mais simples? Uma resposta positiva se torna bastante atraente se considerarmos o poder computacional existente: Poderíamos decompor um sistema em sistemas mais simples, resolvê-los computacionalmente e recompor a solução original.

O primeiro capítulo é uma introdução geral aos conceitos utilizados ao longo do trabalho. Tal introdução apresentará resultados importantes para os capítulos seguintes. No entanto, não serão apresentadas muitas demonstrações dos resultados pois são relativamente longas e fora do escopo do trabalho. Referências serão apresentadas para consulta, caso necessário. Faremos primeiro uma introdução rápida a alguns conceitos relacionados ao estudo de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach. Em seguida discutiremos brevemente espaços L^2 e transformada de Fourier, para podermos prosseguir com uma introdução às wavelets.

O segundo capítulo é focado no estudo da robustez de um sistema da forma $\dot{x} = A(t)x$ por uma perturbação específica. Mais precisamente, se o sistema $\dot{x} = A(t)x$ possui estabilidade assintótica, estamos interessados em saber se e sob quais condições o sistema

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)x$$

preserva qualitativamente tal característica. Veremos que, para o caso em que $A(t)$ é uma família contínua em t de operadores limitados e $B(t)$ é limitada e integralmente pequena, isto é, existem h, δ positivos tais que:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt \right| < \delta \text{ se } |t_2 - t_1| < h$$

então de fato a estabilidade é preservada. Além disso, introduziremos uma classe mais geral de funções do que funções periódicas ou quase-periódicas, à qual $B(t)$ pertencerá. Nessas condições, existirá uma "frequência" ω_0 para a qual o sistema

$$\dot{x} = A(t)x + B(\omega t)x$$

preserva a estabilidade se $\omega > \omega_0$. Alguns exemplos em dimensão infinita também serão mostrados, bem como um contra-exemplo para uma frequência baixa. Nesse último, veremos que na verdade um sistema instável pode ser estabilizado com uma perturbação periódica de duração curta em relação ao período.

Por fim, o terceiro capítulo é dedicado a aproximações de soluções periódicas de sistemas não-homogêneos periódicos utilizando wavelets, em especial as periódicas. Wavelets são uma base ortonormal do espaço de funções $L^2(\mathbb{R})$; isto é, toda função em $L^2(\mathbb{R})$ pode ser escrita como

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Existem diversos tipos de wavelets, com variados graus de suavidade e outras características, que permitem uma aproximação mais precisa que a tradicional série de Fourier. Uma técnica utilizada para encontrar tais wavelets é a análise multirresolução (MRA). Além disso, se a wavelet também estiver em $L^1(\mathbb{R})$, podemos periodizá-la como

$$\tilde{\psi}_{j,k}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(t+l).$$

Tais wavelets, por sua vez, formam uma base ortonormal das funções 1-periódicas em $L^2([0, 1])$. Considerando então o sistema não-homogêneo

$$\dot{x} = Ax + f(t)$$

num espaço de Hilbert separável \mathbb{H} , sendo $f(t)$ 1-periódica, veremos que a única solução 1-periódica limitada do sistema pode ser aproximada pelas soluções dos sistemas

$$\dot{x} = Ax + \psi(2^j t) e_i \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

com $\{e_i\}_{i \in I}$ base ortonormal no máximo enumerável de \mathbb{H} . Assim, podemos aproximar a solução periódica por uma solução de um sistema não-periódico. Um exemplo simples será apresentado, bem como imagens de uma simulação, para ilustrar as ideias.

PRELIMINARES

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos básicos utilizados no restante do trabalho. Assumimos uma certa familiaridade do leitor com a teoria de Análise Funcional e Equações Diferenciais Ordinárias. Algumas demonstrações serão omitidas.

2.1 Equações diferenciais ordinárias num espaço de Banach

Esta seção busca introduzir alguns conceitos de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach. A teoria de operadores de evolução pode ser vista em (PAZY, 1983). Outras fontes serão citadas ao longo do texto, como (COPPEL, 1978) e (RODRIGUES, 2017).

Seja \mathbb{X} espaço de Banach, e seja $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ o espaço dos operadores lineares $M : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$. Dada $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X})$, $t \mapsto A(t)$ família de operadores limitados, contínua em t , a equação

$$\dot{x} = A(t)x$$

define, para $t \geq s$, um **operador de evolução** $T(t, s) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, de forma que a solução $x(t)$ do sistema acima é dada por $x(t) = T(t, s)x(s)$. (PAZY, 1983) Tal operador possui algumas propriedades úteis:

Proposição 1. Para $0 \leq s \leq t$, temos que:

- i) $T(t, s)$ é um operador linear limitado e $\|T(t, s)\| \leq e^{\int_s^t \|A(\tau)\| d\tau}$.
- ii) $T(s, s) = I$ e $T(t, r)T(r, s) = T(t, s)$ para $s \leq r \leq t$.
- iii) A função $(t, s) \mapsto T(t, s)$ é contínua.
- iv) $\frac{\partial}{\partial t} T(t, s) = A(t)T(t, s)$.

$$v) \frac{\partial}{\partial s} T(t, s) = -T(t, s)A(s).$$

A demonstração dessas propriedades pode ser vista em (PAZY, 1983). Além disso, denotaremos também o caso especial $T(t, 0) = T(t)$.

Duas importantes propriedades do sistema $\dot{x} = A(t)x$ são estabilidade assintótica (RODRIGUES, 2017) e dicotomia exponencial (HENRY, 1981). É importante notar que outras diversas noções de estabilidade podem ser definidas; aqui estamos interessados na estabilidade no sentido de Liapunov.

Definição 1 (Estabilidade assintótica). Dizemos que a solução $x \equiv 0$ do sistema $\dot{x} = f(t, x)$ é **assintoticamente estável** se for estável e, dado t_0 , existir uma vizinhança $\rho(t_0)$ tal que a solução $x(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ para alguma condição inicial $x(t_0) = x_0$ satisfazendo $|x_0| < \rho(t_0)$.

Observação 1. A princípio, podemos estudar a estabilidade assintótica para outras soluções $\varphi(t)$. Porém, como demonstrado em (RODRIGUES, 2017), com a mudança de variável $x = \varphi(t) + z$ mostra-se que tal estudo é equivalente ao estudo da estabilidade da solução nula do sistema equivalente $\dot{z} = f(t, \varphi(t) + z) - f(t, \varphi(t)) = F(t, z)$.

Definição 2 (Dicotomia exponencial). A equação $\dot{x} = A(t)x$ tem uma **dicotomia exponencial** em \mathbb{R} , com expoente $\beta > 0$ e limitante M , se existem projeções $P(t)$, $t \in \mathbb{R}$ tais que:

$$i) T(t, s)P(s) = P(t)T(t, s), \quad t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

ii) A restrição $T(t, s)|_{\mathcal{R}(P(s))}$ para $t \geq s$ é um isomorfismo de $\mathcal{R}(P(s))$ sobre $\mathcal{R}(P(t))$, com $T(s, t)$ definida como a inversa de $\mathcal{R}(P(t))$ para $\mathcal{R}(P(s))$.

iii) As seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \|T(t, s)P(s)\| &\leq Me^{-\beta(t-s)}, \quad t \geq s \\ \|T(t, s)(I - P(s))\| &\leq Me^{-\beta(s-t)}, \quad s \geq t \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Suponha agora que $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ é contínua e que a equação $\dot{x} = A(t)x$ tenha uma dicotomia exponencial em \mathbb{R} . Então não existe uma solução $x(t)$ definida e limitada em toda a reta real exceto a solução identicamente nula. (DALECKII; KREIN, 1974)

Seja X_1 o subespaço de \mathbb{X} das condições iniciais em $t = 0$ para as quais as soluções são limitadas para $t \geq 0$; similarmente, seja X_2 o subespaço de \mathbb{X} de condições iniciais em $t = 0$ cujas soluções são limitadas para $t \leq 0$. Então temos $\mathbb{X} = X_1 \oplus X_2$. Se P_1 e P_2 são as projeções de \mathbb{X} sobre X_1 e X_2 , respectivamente, podemos tomar $P(t) = T(t)P_1T^{-1}(t)$. (DALECKII; KREIN, 1974)

Consideremos agora o sistema perturbado $\dot{x} = A(t)x + f(t)$. Temos que:

Proposição 2. Seja $T(t, s)$ operador de evolução de $\dot{x} = A(t)x$, e considere o sistema

$$\dot{y} = A(t)y + f(t).$$

Então a solução do sistema com condição inicial $y(s)$ é dada por:

$$y(t) = T(t, s)y(s) + \int_s^t T(t, \tau)f(\tau) d\tau.$$

Tal fórmula é denominada **Fórmula da Variação das Constantes** (RODRIGUES, 2017).

Uma desigualdade particularmente importante no estudo de equações diferenciais é a **Desigualdade de Gronwall** (RODRIGUES, 2017):

Proposição 3. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta(t), \phi(t)$ funções reais contínuas com $\beta(t) \geq 0$ para todo t . Suponha que, para $a \leq t$,

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\phi(s) ds.$$

Então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)\phi(s) ds}.$$

Demonstração. Defina a função

$$V(\tau) = \int_a^\tau \beta(s)\phi(s) ds.$$

Derivando $V(\tau)$, temos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tau) &= \beta(\tau)\phi(\tau) \\ &\leq \beta(\tau) \left(\alpha + \int_a^\tau \beta(s)\phi(s) ds \right) \\ &= \beta(\tau)\alpha + \beta(\tau)V(\tau) \\ \therefore \dot{V}(\tau) - \beta(\tau)V(\tau) &\leq \alpha\beta(\tau). \end{aligned}$$

Note que $\frac{d}{d\tau} \left(e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds} \right) = -e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds} \beta(\tau)$. Assim, multiplicando ambos os lados por $e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds}$,

$$\begin{aligned} e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds} \dot{V}(\tau) - e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds} \beta(\tau)V(\tau) &\leq e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds} \alpha\beta(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} \left(e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds} V(\tau) \right) &\leq e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds} \alpha\beta(\tau). \end{aligned}$$

Integrando de a a t (lembrando que $V(a) = 0$),

$$\begin{aligned} e^{-\int_a^t \beta(s) ds} V(t) &\leq \alpha \int_a^t e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds} \beta(\tau) d\tau \\ &= \alpha \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left(-e^{-\int_a^\tau \beta(s) ds} \right) d\tau \\ &= \alpha \left(1 - e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \right). \end{aligned}$$

Lembrando que $\phi(t) \leq \alpha + V(t)$, temos finalmente que

$$\begin{aligned}\phi(t) &\leq \alpha + V(t) \\ &\leq \alpha + \alpha e^{\int_a^t \beta(\tau) d\tau} - \alpha \\ &= \alpha e^{\int_a^t \beta(\tau) d\tau}.\end{aligned}$$

□

2.2 Espaços L^p e Teoria básica de wavelets

Nessa seção, introduziremos o conceito de wavelets ortonormais e análise multirresolução (MRA), bem como a periodização de wavelets, utilizadas no Capítulo 4. Para isso, precisaremos antes de uma introdução aos espaços L^p (em especial L^2) e uma definição de transformadas de Fourier em L^2 .

A teoria sobre espaços L^p é bastante clássica e pode ser vista, por exemplo, em (BREZIS, 2011). A literatura sobre transformadas de Fourier em espaços L^2 também é bastante extensa; por exemplo, citamos (FOLLAND, 1992). A maior parte da teoria de wavelets foi estudada em (HERNÁNDEZ; WEISS, 1996), com uma parte da periodização retirada de (PINSKY, 2002).

Definição 3 (Espaços $L^p(\mathbb{X})$). Dado um espaço de medida \mathbb{X} com medida μ , o **espaço** $L^p(\mathbb{X})$ é definido como

$$L^p(\mathbb{X}) := \left\{ f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{X}} |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

munido com a norma

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} = \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aqui, consideraremos \mathbb{R} e \mathbb{C} com a medida de Lebesgue, como usual.

Teorema 1. Os espaços $L^p(\mathbb{X})$ são espaços de Banach. Em especial, $L^2(\mathbb{X})$ é um espaço de Hilbert, sendo equipado com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{X}} f \bar{g} d\mu.$$

Assim, a norma $L^2(\mathbb{X})$ também é dada por

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{X})} = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A demonstração deste Teorema pode ser vista em (BREZIS, 2011).

Além disso, para $L^2(\mathbb{X})$ temos a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{X})} \|g\|_{L^2(\mathbb{X})}$$

e a desigualdade triangular

$$\|f + g\|_{L^2(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{X})} + \|g\|_{L^2(\mathbb{X})}$$

Se $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$, denotamos tal espaço por $l^p(\mathbb{Z})$, que é o espaço das sequências complexas com $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty$.

Alguns resultados importantes sobre convergência em L^1 são enunciados a seguir; as demonstrações são bem conhecidas e podem ser vistas, por exemplo, em (HALMOS, 1988).

Teorema 2 (Convergência Monótona). Sejam $f_n \in L^1(\mathbb{X}, [0, \infty))$ tais que, para quase todo $x \in \mathbb{X}$

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \infty.$$

Para cada $x \in \mathbb{X}$, denote $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{X}} f d\mu$$

Observação 2. Nesse caso, podemos ainda ter $\int_{\mathbb{X}} f d\mu = \infty$.

Teorema 3 (Lema de Fatou). Sejam $f_n \in L^1(\mathbb{X}, [0, \infty))$ tais que, para quase todo $x \in \mathbb{X}$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu < \infty.$$

Então a função $f(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ também pertence a $L^1(\mathbb{X}, [0, \infty))$ e

$$\int_{\mathbb{X}} f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu.$$

Teorema 4 (Convergência Dominada). Sejam $f_n \in L^1(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ funções integráveis convergindo para uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ para quase todo $x \in \mathbb{X}$. Suponha que exista uma função $g \in L^1(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para todo n e quase todo $x \in \mathbb{X}$. Então $f \in L^1(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{X}} f d\mu.$$

Tais teoremas também valem no contexto de espaços L^p para $1 \leq p < \infty$. Tais demonstrações para esses casos são relativamente fáceis. Por exemplo, para o Teorema da Convergência Monótona, note que $h_n(x) := \|f_n(x)\|^p \in L^1(\mathbb{X}, [0, \infty))$. As funções limites do Lema de Fatou e do Teorema da Convergência Dominada também pertencerão aos respectivos espaços L^p . Por fim, embora o Lema de Fatou e o Teorema da Convergência Monótona ainda valham para L^∞ , o Teorema da Convergência Dominada pode falhar para $p = \infty$.

Definição 4 (Ortogonalidade, Ortonormalidade, Base ortonormal). Dado um espaço de Hilbert \mathbb{H} com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dizemos que dois elementos $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$ são **ortogonais** se

$$\langle h_1, h_2 \rangle = 0$$

Uma família $\{h_n\}$ em \mathbb{H} é dita **ortonormal** se para todo $h_j, h_k \in \{h_n\}$

$$\langle h_j, h_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

Dizemos que uma sequência ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma **base ortonormal** se, para todo $u \in \mathbb{H}$, $\|u - \sum_{k=0}^n \langle u, e_k \rangle e_k\| \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$.

Por exemplo, uma sequência ortonormal em $L^2(\mathbb{T})$ é $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$. De fato, tal sequência forma base ortonormal desse espaço: se $f \in L^2(\mathbb{T})$ e $f_k(z) = e^{ikz}$, $k \in \mathbb{Z}$, então $f(x)$ pode ser escrita como $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f_k(x)$, ou seja:

$$\int_{\mathbb{T}} |f(z) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f_k(z)|^2 dz \rightarrow 0$$

Nem todo espaço de Hilbert possui uma base ortonormal enumerável. Na verdade, um espaço de Hilbert possui base ortonormal enumerável se e somente se for separável.

Definição 5 (Transformada de Fourier (\hat{f} ou $\mathcal{F}[f]$), Transformada inversa de Fourier (\check{f})). Dada $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, a **transformada de Fourier** de f é dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

A **transformada inversa** é dada por

$$\check{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Na realidade, a transformada de Fourier e sua inversa podem ser aplicadas a qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$ se as definirmos como:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) e^{-i\xi x} dx \\ \check{g}(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N g(\xi) e^{i\xi x} d\xi \end{aligned}$$

Note que, como esperado, $(\hat{f})^\vee = f$.

Teorema 5 (Plancherel). Dadas $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, suas transformadas satisfazem

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

Em particular, o operador $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}$ é unitário.

A demonstração desses teoremas pode ser vista em (FOLLAND, 1992).

Definição 6 (Wavelet ortonormal). Uma **wavelet ortonormal** em \mathbb{R} é uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ forma uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, onde

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.1)$$

A maior parte das wavelets ortonormais provém de uma análise multirresolução:

Definição 7 (Análise multirresolução, Função de escala). Uma **análise multirresolução** (ou **MRA**) é uma sequência de subespaços fechados encaixados V_j , $j \in \mathbb{Z}$, de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfaz:

$$\text{i) } V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}; \quad (2.2.2)$$

$$\text{ii) } f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}; \quad (2.2.3)$$

$$\text{iii) } \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}; \quad (2.2.4)$$

$$\text{iv) } \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}); \quad (2.2.5)$$

$$\text{v) } \text{Existe uma função } \phi \in V_0 \text{ tal que } \{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ forma base ortonormal de } V_0. \quad (2.2.6).$$

A função ϕ de (2.2.6) é chamada **função de escala** da MRA.

Não é difícil mostrar que, para cada j , $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma base ortonormal de V_j , com $\phi_{j,k}$ definido da mesma forma que $\psi_{j,k}$, isto é,

$$\phi_{j,k}(t) := 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Denotamos o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} como W_j . Assim, pela construção da MRA, temos

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j}$$

As wavelets ortonormais são tomadas como base ortonormal dos espaços W_j , e podem ser calculadas diretamente através da transformada de Fourier. Mais precisamente:

Teorema 6. Sejam $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ uma MRA com função de escala ϕ , e $m_0(\xi)$ uma função 2π -periódica em $L^2([0, 2\pi])$. Uma função $\psi \in W_0 := V_1 \cap V_0^\perp$ é uma wavelet ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ se e somente se existe uma função $v(\xi) \in L^2([0, 2\pi])$ 2π -periódica tal que

$$\begin{aligned} &\bullet |v(\xi)| = 1, \text{ qtp } \xi \in [0, 2\pi]; \\ &\bullet \hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} v(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\phi}(\xi). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Observação 3. A função m_0 é chamada **filtro passa-baixo** da MRA.

A demonstração deste Teorema pode ser vista em (HERNÁNDEZ; WEISS, 1996). Em particular, tomando $v(\xi) = 1$, então da Definição 7 e do Teorema 6 temos uma caracterização para $\phi(t)$ e $\psi(t)$

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(2t - k) \quad (2.2.8)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \phi(2t - k) \quad (2.2.9)$$

com $\alpha_k \in \mathbb{C}$ e $\beta_k = (-1)^{k+1} \overline{\alpha_{k+1}}$. Por vezes, as equações (2.2.8) e (2.2.9) são usadas como as próprias definições de função de escala e wavelet ortonormal, respectivamente.

Veremos agora as wavelets periódicas. Considere uma wavelet ortonormal ψ proveniente de uma MRA com função de escala ϕ . Suponha que $\phi, \psi \in L^1(\mathbb{R})$ e admitem L^1 -majorantes radiais decrescentes, ou seja, $\phi(|x|) \leq r(x)$ e $\psi(|x|) \leq r(x)$, com $r(x) \in L^1([0, \infty))$.

Nessas condições, podemos periodizar as wavelets:

$$\tilde{\phi}_{j,k}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi_{j,k}(x+l) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(2^j(x+l) - k) \quad (2.2.10)$$

$$\tilde{\psi}_{j,k}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x+l) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(2^j(x+l) - k) \quad (2.2.11)$$

Tais somatórios são definidos como

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} f(x+l) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=-n}^n f(x+l).$$

Teorema 7. As séries em (2.2.10) e (2.2.11) convergem na norma $L^1([0, 1])$ e $L^2([0, 1])$. Além disso, são finitas e convergem pontualmente para quase todo $t \in \mathbb{R}$.

Tal Teorema é na verdade um corolário do Teorema 4.2.8 em (PINSKY, 2002). A convergência em $L^2(\mathbb{R})$ é feita da mesma forma que a convergência em $L^1(\mathbb{R})$, usando que $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$.

Note que, de fato, as funções $\tilde{\phi}_{j,k}(x)$ e $\tilde{\psi}_{j,k}(x)$ são 1-periódicas, pois

$$\tilde{\phi}_{j,k}(x+1) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi_{j,k}(x+1+l) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{j,k}(x+m) = \tilde{\phi}_{j,k}(x)$$

com $m = l + 1$.

Similarmente ao espaço $L^2(\mathbb{R})$, o espaço das funções 1-periódicas em $L^2([0, 1])$ pode ser escrito como (HERNÁNDEZ; WEISS, 1996)

$$L^2([0, 1]) = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \tilde{V}_j} = \tilde{V}_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} \tilde{W}_j \right)$$

com \tilde{V}_j e \tilde{W}_j os espaços gerados pelos conjuntos ortonormais $\{\tilde{\phi}_{j,k}\}_{k=0,1,\dots,2^j-1}$ e $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{k=0,1,\dots,2^j-1}$, respectivamente.

Pode-se mostrar que:

- $\tilde{V}_j \subset \widetilde{V_{j+1}}$, e \tilde{W}_j é o complemento ortogonal de \tilde{V}_j em $\widetilde{V_{j+1}}$.
- Apenas $j \geq 0$ são necessários para descrever $L^2([0, 1])$.
- Se $j \leq 0$, V_j é composto apenas de funções constantes.

- Para cada j o espaço \widetilde{W}_j possui dimensão finita 2^j , ao contrário de $L^2(\mathbb{R})$.

Exemplo 1. A wavelet mais simples é a wavelet de Haar, dada por

$$\psi(t) = \chi_{[0, \frac{1}{2})}(t) - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & , \quad \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

A wavelet de Haar provém de uma MRA com função de escala dada por

$$\phi(t) = \chi_{[0,1)}(t).$$

O gráfico de ambas pode ser visto na [Figura 1](#).

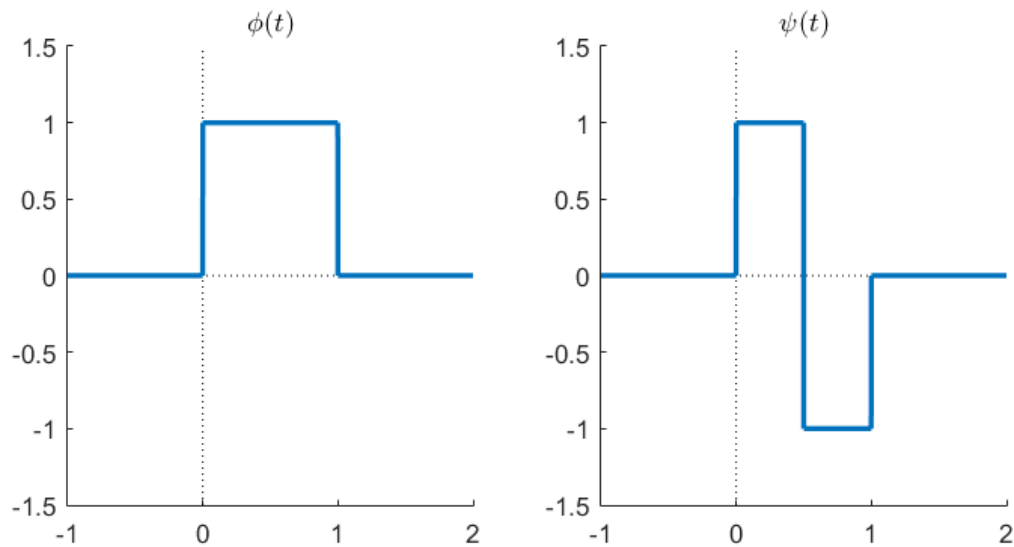


Figura 1 – Wavelet de Haar e sua função de escala

Note que de fato as funções $\phi_{j,k}(t)$ formam base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$; suas combinações lineares formam as chamadas funções simples, usadas na definição da integral de Lebesgue. Para ilustrar, as funções $\phi_{1,1}$ e $\psi_{1,1}$ podem ser vistas na [Figura 2](#).

A [Figura 3](#) ilustra o processo de periodização. É interessante notar que ambas coincidem com a noção de periodização usual (isto é, fazer $\phi(t+1) = \phi(t)$). Na verdade, isso ocorre com todas as wavelets de suporte compacto em $[0, 1)$. Além disso, $\widetilde{\phi}(t)$ tende a uma função constante, como dito anteriormente.

Por fim, a periodização de $\phi_{1,1}(t)$ e $\psi_{1,1}(t)$ pode ser vista na [Figura 4](#).

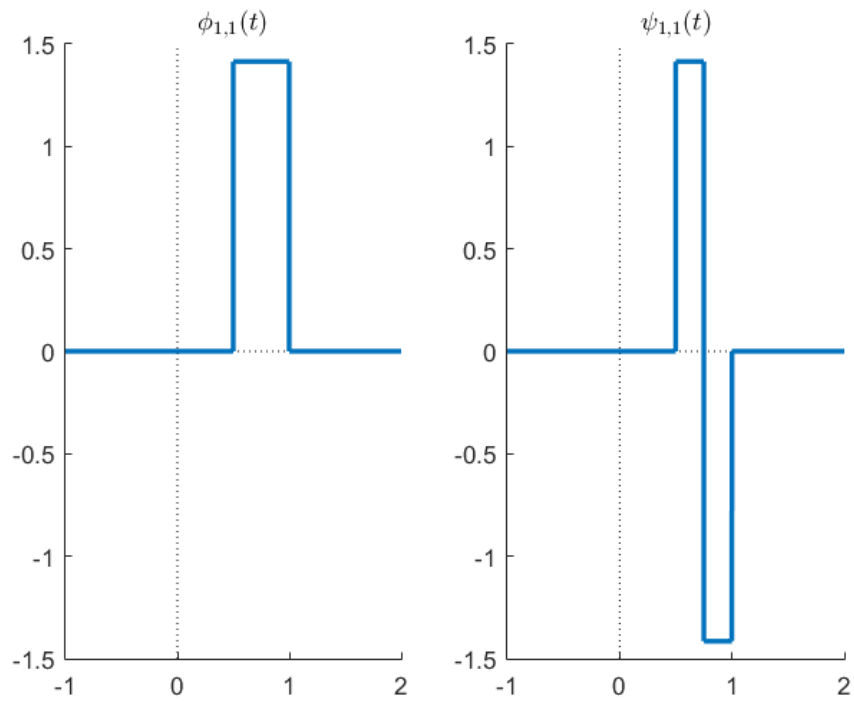


Figura 2 – $\phi_{1,1}(t)$ e $\psi_{1,1}(t)$ para a wavelet de Haar

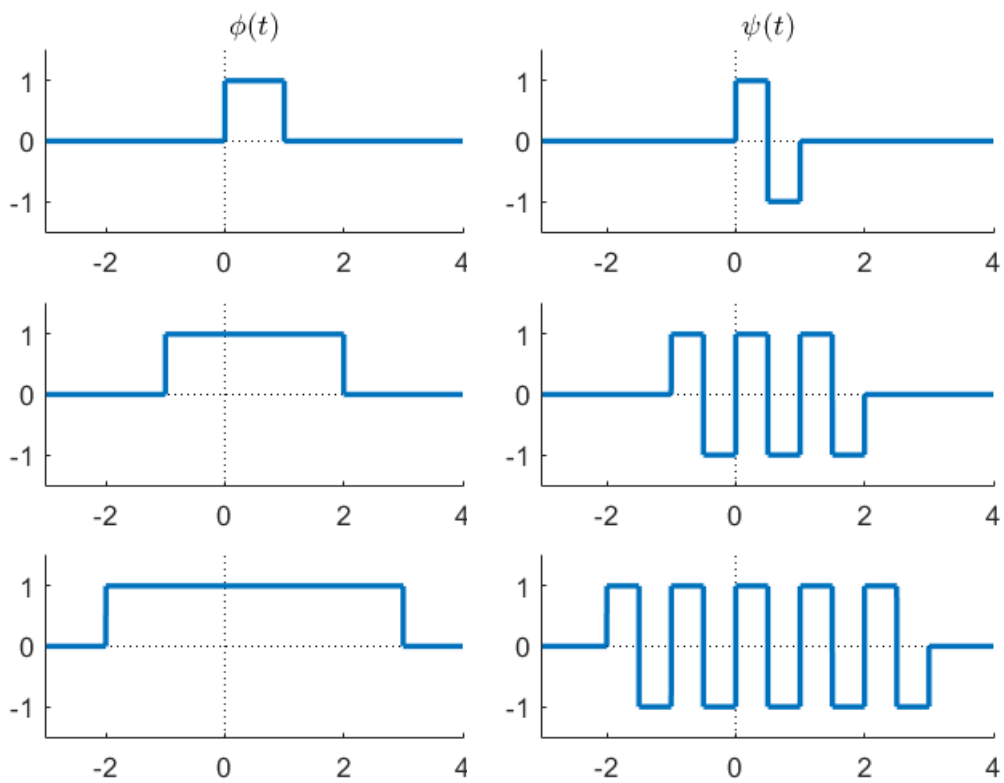
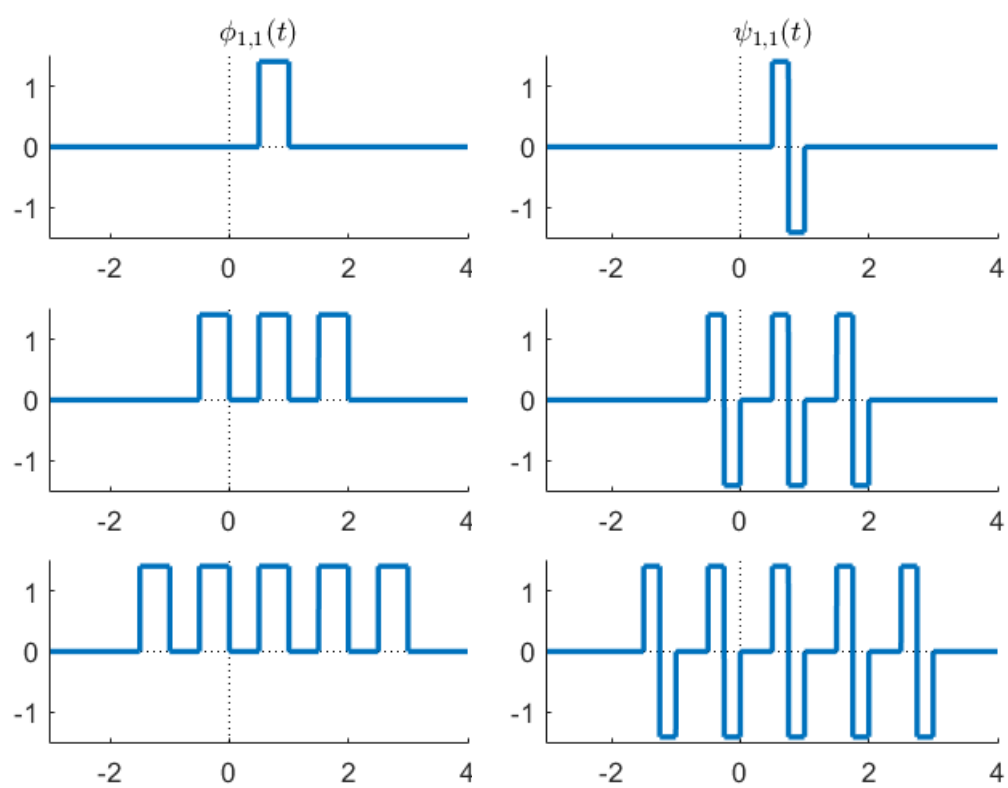


Figura 3 – Processo de periodização de $\phi(t)$ e $\psi(t)$

Figura 4 – Processo de periodização de $\phi_{1,1}(t)$ e $\psi_{1,1}(t)$

ROBUSTEZ DE SISTEMAS DINÂMICOS

Neste capítulo, vamos estudar um caso particular da perturbação estrutural de um sistema dinâmico. Também apresentaremos um contra-exemplo bastante interessante para a robustez da instabilidade, utilizando perturbações periódicas para estabilizar um sistema instável.

Um dos problemas de motivação para essa seção é o sistema

$$\dot{x} = A(t)x + B(\omega t)x$$

onde, no caso em que $B(t)$ é periódico, ω corresponderia a uma certa frequência. Tal problema já foi tratado em (COPPEL, 1978), mas apenas para dimensão finita. Neste trabalho, estudamos o caso de dimensão infinita, para $A(t)$ e $B(t)$ operadores limitados num espaço de Banach para todo t .

Nesse sentido, vemos que a estabilidade assintótica do sistema, com $B(t)$ pertencendo a uma classe mais geral que funções periódicas ou quase-periódicas, é preservada para valores de ω grandes o suficiente. Isso, juntamente com os corolários obtidos, pode ajudar no projeto de sistemas de controle passivos e ativos para perturbações de alta frequência, como ruídos de sinais.

O contra-exemplo para sistemas instáveis é de certa forma surpreendente, e ilustra a noção de que a instabilidade não é "robusta", isto é, perturbações podem levar um sistema instável a se tornar estável. Tal fenômeno pode ser aplicado em alguns sistemas de controle; um exemplo prático (para o qual a perturbação apresentada aqui poderia ser relevante) seria um satélite cuja órbita está acima de uma estação em terra. Tal satélite poderia ter uma órbita levemente instável, bastando um sinal da estação em terra, enviado durante a curta janela de tempo em que o satélite passa por cima da mesma, para estabilizá-lo.

Primeiramente, introduziremos a classe de funções que perturbarão o sistema. Em seguida, veremos que a estabilidade assintótica e a dicotomia exponencial são preservadas qualitativamente se tais perturbações forem "integralmente pequenas", e sua aplicação para o

problema considerado.

Essa seção foi inspirada pelas ideias apresentadas em (COPPEL, 1978) para dimensão finita. A classe de funções foi baseada em (KLOEDEN; RODRIGUES, 2011). Os exemplos foram baseados em (RODRIGUES; SOLÀ-MORALES, 2006) e (RODRIGUES, 2017). Uma parte de teoria espectral será utilizada, e pode ser revista, por exemplo, em (RUDIN, 1976).

3.1 Generalização de funções quase-periódicas

Seja $(\mathbb{X}, |\cdot|)$ um espaço de Banach. Lembrando da definição de uma função quase-periódica (FINK, 1974):

Definição 8 (Função quase-periódica). Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ é dita **quase periódica** se para toda sequência real $\{\alpha_n\}$ existe uma subsequência $\{\hat{\alpha}_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \hat{\alpha}_n)$ existe uniformemente em \mathbb{R} .

Seja $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ o espaço dos operadores lineares $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$. Denote por $BUC(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$ o espaço das funções limitadas e uniformemente contínuas $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Tal espaço é de Banach, com a norma do supremo $\|A\| := \sup_{t \in \mathbb{R}} |A(t)|$. Defina

$$\mathcal{F} := \{A \in BUC(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{X})) \mid A \text{ tem imagem pré-compacta } \mathcal{R}(A)\}$$

Tal classe \mathcal{F} de funções é bastante geral, incluindo funções periódicas e quase-periódicas, bem como outras funções menos recorrentes.

Exemplo 2. Mostremos que as funções quase-periódicas possuem imagem pré-compacta; em particular, funções quase-periódicas pertencentes a $BUC(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$ também pertencerão a \mathcal{F} .

Dada uma função quase-periódica f , seja $\mathcal{R}(f)$ a imagem de f . Assim, para mostrar que $\mathcal{R}(f)$ é pré-compacto em \mathbb{X} , basta mostrar que toda sequência em $\mathcal{R}(f)$ tem uma subsequência convergente em \mathbb{X} . Note que toda sequência de $\mathcal{R}(f)$ é da forma $\{f(t_n)\}$, com $\{t_n\}$ sequência em \mathbb{R} .

Dada uma sequência $\{f(t_n)\}$, considere a função $F_n(t) = f(t + t_n)$. Sendo f quase-periódica, existe uma subsequência $F_{n_k}(t) = f(t + t_{n_k})$ que converge uniformemente com $k \rightarrow \infty$ para uma função $g(t)$. Logo, $F_{n_k}(0) = f(t_{n_k})$ converge para $g(0) \in \mathbb{X}$.

Teorema 8. \mathcal{F} é um subconjunto fechado de $BUC(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$, portanto é um espaço de Banach.

A demonstração do Teorema 8 usa o seguinte resultado, que é um exercício em (BACHMAN; NARICI, 1998):

Lema 1. Se (\mathbb{X}, d) é um espaço métrico completo, então um subconjunto $A \subset \mathbb{X}$ é relativamente compacto se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto relativamente compacto $B_\varepsilon \subset \mathbb{X}$ tal que $A \subset V_\varepsilon(B_\varepsilon)$, onde $V_\varepsilon(B_\varepsilon) := \{x \in \mathbb{X} \mid d(x, B_\varepsilon) < \varepsilon\}$ é uma ε -vizinhança de B_ε .

Demonstração. [Teorema 8] Primeiramente, mostremos que, dado algum $A \in BUC(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$, se houver uma sequência $\{A_n\}$ em \mathcal{F} tal que $A_n \rightarrow A$, então $\mathcal{R}(A)$ é pré-compacto. Como $A_n \rightarrow A$, para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $\|A_n - A\| < \varepsilon$ se $n \geq n_0$ na norma de $BUC(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$, logo

$$|A_{n_0}(t) - A(t)| < \varepsilon \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Assim, $A(t) \in V_\varepsilon(\mathcal{R}(A_{n_0}))$ para todo $t \in \mathbb{R}$; ou seja, $\mathcal{R}(A) \subset V_\varepsilon(\mathcal{R}(A_{n_0}))$. Se $A_{n_0} \in \mathcal{F}$, então $\mathcal{R}(A_{n_0})$ é relativamente compacto, e portanto, pelo Lema 1, $\mathcal{R}(A)$ é relativamente compacto.

Resta mostrar que $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X})$ é uniformemente contínua. Mas, sendo A limite uniforme de funções uniformemente contínuas, então A também o é. Para observar isso, note que para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $n \geq n_0$. Mas A_{n_0} é uniformemente contínua, logo existe $\delta > 0$ tal que, se $|t - s| < \delta$, então $|A_{n_0}(t) - A_{n_0}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Portanto,

$$|A(t) - A(s)| \leq |A(t) - A_{n_0}(t)| + |A_{n_0}(t) - A_{n_0}(s)| + |A_{n_0}(s) - A(s)| < \varepsilon$$

□

Lema 2. Seja $A \in \mathcal{F}$. Se para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} A(t) dt$ e o limite é uniforme em $a \in \mathbb{R}$, então tal limite é independente de a .

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$. Como $A \in \mathcal{F}$, podemos assumir que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |A(t)| \leq M$, para algum $M \in \mathbb{R}$. Logo

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} A(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt \right| &= \frac{1}{T} \left| \int_a^0 A(t) dt + \int_0^T A(t) dt + \int_T^{a+T} A(t) dt - \int_0^T A(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{T} \left| \int_a^0 A(t) dt + \int_T^{a+T} A(t) dt \right| \\ &\leq \frac{2M|a|}{T} \rightarrow 0 \text{ com } T \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

Dessa forma, definimos:

Definição 9 (Função quase-periódica generalizada). Uma função $A \in \mathcal{F}$ é uma **função quase-periódica generalizada** se existe o seguinte limite em $\mathcal{L}(\mathbb{X})$:

$$\mathbf{A} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} A(t) dt,$$

ou seja, se existe $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $T_0 > 0$ tal que $\left| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} A(t) dt - \mathbf{A} \right| < \varepsilon$, para todo $T > T_0$ e todo $a \in \mathbb{R}$.

Além disso, definimos a classe de funções quase-periódicas generalizadas como

$$\mathcal{GAP} := \{A \in \mathcal{F} \mid A \text{ é uma função quase-periódica generalizada}\}.$$

Lema 3. \mathcal{GAP} é um subespaço fechado de \mathcal{F} .

Demonstração. Sejam $A_n \in \mathcal{GAP}$ tal que $A_n \rightarrow A \in \mathcal{F}$; provemos que $A \in \mathcal{GAP}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $\|A_{n_0} - A\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |A_{n_0}(t) - A(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Como existe $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} A_{n_0}(t) dt = \mathbf{A}_{n_0}$, existe $T_0 > 0$ tal que, se $T_1, T_2 > T_0$,

$$\left| \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} A_{n_0}(t) dt - \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} A_{n_0}(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} A(t) dt - \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} A(t) dt \right| &\leq \left| \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} A(t) dt - \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} A_{n_0}(t) dt \right| + \\ &\quad + \left| \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} A_{n_0}(t) dt - \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} A_{n_0}(t) dt \right| + \\ &\quad + \left| \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} A_{n_0}(t) dt - \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} A(t) dt \right| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, pelo Critério de Cauchy, existe o limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} A(t) dt = \mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{X}), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

e portanto $A(t)$ é uma função quase-periódica generalizada. □

Definição 10 (Valor médio). Dada $A \in \mathcal{GAP}$, definimos o **valor médio** de A como

$$\mathcal{M}(A) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} A(t) dt \in \mathcal{L}(\mathbb{X}).$$

Lema 4. A função $\mathcal{M} : \mathcal{GAP} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X})$ é uniformemente contínua.

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{GAP}$. Então

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(A) - \mathcal{M}(B)| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} A(t) dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} B(t) dt \right| \\ &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} (A(t) - B(t)) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |A(t) - B(t)| \\ &= \|A - B\|. \end{aligned}$$

□

Seja agora

$$\mathcal{O} = \left\{ A \in \mathcal{GAP} \mid \mathcal{M}(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} A(t) dt = 0, \forall a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Corolário 1. \mathcal{O} é um subespaço fechado de \mathcal{GAP} .

Demonstração. Como $\mathcal{M}(A)$ é (uniformemente) contínua, o conjunto $\mathcal{O} = \mathcal{M}^{-1}\{\{0\}\}$ é fechado. \square

Corolário 2. Toda função $A \in \mathcal{GAP}$ pode ser escrita como $A = A_0 + B$, com $A_0 = \mathcal{M}(A)$ e $B \in \mathcal{O}$.

3.2 Aplicação em equações diferenciais

Teorema 9. Sejam $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X})$ duas famílias contínuas em t de operadores, tais que para algum $M > 0$

$$\begin{aligned} \|A(t)\| &\leq M \\ \|B(t)\| &\leq M \end{aligned}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Considere o sistema

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (3.2.1)$$

Suponha que o operador de evolução $T(t, s)$ associado a (3.2.1) satisfaça a condição de estabilidade exponencial, isto é, para alguns $K, \alpha > 0$,

$$\|T(t, s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s. \quad (3.2.2)$$

Suponha também que $B(t)$ seja integralmente pequeno, isto é,

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt \right\| \leq \delta \text{ se } |t_2 - t_1| \leq h. \quad (3.2.3)$$

Nessas condições, o operador de evolução $S(t, s)$ do sistema

$$\dot{y} = (A(t) + B(t))y \quad (3.2.4)$$

satisfaz, com $\tilde{K} = K(1 - \delta)$ e $\tilde{\alpha} = \alpha - 3KM\delta - \frac{\log((1-\delta)K)}{h}$,

$$\|S(t, s)\| \leq \tilde{K}e^{-\tilde{\alpha}(t-s)}, \quad t \geq s. \quad (3.2.5)$$

Além disso, se para algum $\delta < \frac{\alpha}{3MK}$ existe $h > \frac{\log(1+\delta)K}{\alpha-3MK\delta}$ satisfazendo (3.2.3), então o sistema (3.2.4) também é assintoticamente estável.

Note que, se $\delta = 0$ (ou seja, $B(t) = 0$), sendo h arbitrário, recuperamos a estabilidade do sistema original.

Demonstração. Pela Fórmula da Variação das Constantes, o operador de evolução $S(t, s)$ satisfaz a equação integral

$$S(t, s) = T(t, s) + \int_s^t T(t, u)B(u)S(u, s) du.$$

Para calcular essa integral, defina $C(u) := \int_t^u B(\tau) d\tau$. Então $\frac{d}{du}C(u) = B(u)$ e $C(t) = 0$. Note que, diferenciando a seguinte equação e usando as propriedades dos operadores de evolução,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(T(t, u)C(u)S(u, s)) &= -T(t, u)A(u)C(u)S(u, s) + T(t, u)B(u)S(u, s) \\ &\quad + T(t, u)C(u)(A(u) + B(u))S(u, s). \end{aligned}$$

Integrando de s a t , obtemos a integral desejada:

$$\begin{aligned} \int_s^t T(t, u)B(u)S(u, s) du &= -T(t, s)C(s) + \int_s^t T(t, u)A(u)C(u)S(u, s) du \\ &\quad - \int_s^t T(t, u)C(u)A(u)S(u, s) du - \int_s^t T(t, u)C(u)B(u)S(u, s) du. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S(t, s) &= T(t, s) - T(t, s)C(s) + \int_s^t T(t, u)A(u)C(u)S(u, s) du \\ &\quad - \int_s^t T(t, u)C(u)A(u)S(u, s) du - \int_s^t T(t, u)C(u)B(u)S(u, s) du. \end{aligned}$$

Vamos assim estimar a norma de $S(t, s)$. Consideremos primeiro o caso em que $s \leq t \leq s + h$. Nesse caso, note que, sendo $|u - s| \leq |t - s| \leq h$,

$$\|C(u)\| = \left\| \int_t^u B(\tau) d\tau \right\| \leq \delta.$$

Usando também a condição de estabilidade (3.2.2) e a limitação sobre $\|A(t)\|$ e $\|B(t)\|$, temos

$$e^{\alpha t} \|S(t, s)\| \leq Ke^{\alpha s}(1 + \delta) + 3MK\delta \int_s^t e^{\alpha u} \|S(u, s)\| du.$$

Usando a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \|S(t, s)\| &\leq K(1 + \delta)e^{\alpha s} e^{\int_s^t 3MK\delta du} \\ \therefore \|S(t, s)\| &\leq K(1 + \delta)e^{-(\alpha - 3MK\delta)(t-s)}. \end{aligned}$$

Para um $t \geq s$ em geral, perceba que existe um $n \geq 0$ inteiro tal que $s + nh \leq t \leq s + (n + 1)h$. Logo

$$\|S(t, s + nh)\| \leq K(1 + \delta)e^{-(\alpha - 3MK\delta)(t-s-nh)}.$$

Mostraremos, por indução em n , que se $s + nh \leq t \leq s + (n + 1)h$

$$\|S(t, s)\| \leq (K(1 + \delta))^{n+1} e^{-(\alpha - 3MK\delta)(t-s)}.$$

O caso $n = 0$ foi provado anteriormente. Assim, suponha a estimativa satisfeita se $s + (n - 1)h \leq \tau \leq s + nh$. Em particular, para $t = s + nh$,

$$\|S(s + nh, s)\| \leq (K(1 + \delta))^n e^{-(\alpha - 3MK\delta)nh}$$

Para $s + nh \leq t \leq s + (n + 1)h$, note que o operador de evolução $S(t, s)$ pode ser decomposto como $S(t, s) = S(t, s + nh)S(s + nh, s)$, e portanto

$$\begin{aligned} \|S(t, s)\| &\leq \|S(t, s + nh)\| \|S(s + nh, s)\| \\ &\leq K(1 + \delta)e^{-(\alpha - 3MK\delta)(t - s - nh)} (K(1 + \delta))^n e^{-(\alpha - 3MK\delta)nh} \\ &= (K(1 + \delta))^{n+1} e^{-(\alpha - 3MK\delta)(t - s)}, \end{aligned}$$

como queríamos. Por fim, faça $\gamma := \frac{\log((1 + \delta)K)}{h}$. Então, sendo $t \geq s + nh$,

$$((1 + \delta)K)^n = e^{\gamma nh} \leq e^{\gamma(t - s)}.$$

$$\therefore \|S(t, s)\| \leq K(1 + \delta)e^{-(\alpha - 3MK\delta - \frac{\log((1 + \delta)K)}{h})(t - s)} = \tilde{K}e^{-\tilde{\alpha}(t - s)}.$$

□

Proposição 4. Seja $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X})$ função contínua pertencente a \mathcal{GAP} com valor médio zero, tal que $\|B(t)\| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, para todos $\delta > 0$ e $h > 0$, existe $\omega_0 > 0$ tal que, se $\omega > \omega_0$, então $B(\omega t)$ é integralmente pequeno, ou seja,

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} B(\omega t) dt \right\| \leq \delta \text{ se } |t_2 - t_1| < h. \quad (3.2.6)$$

Demonstração. Dados δ, t_1 e t_2 , com $\delta > 0$ e $|t_2 - t_1| \leq h$, dividimos em dois casos:

- $|t_2 - t_1| \leq \frac{\delta}{M}$: Para todo ω ,

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} B(\omega t) dt \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|B(\omega t)\| dt \leq M|t_2 - t_1| \leq \delta.$$

- $\frac{\delta}{M} \leq |t_2 - t_1| \leq h$: Como $B(t) \in \mathcal{GAP}$ e tem valor médio zero, então existe T_0 tal que, se $T \geq T_0$,

$$\left\| \frac{1}{T} \int_s^{s+T} B(t) dt \right\| \leq \frac{\delta}{h}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Com uma mudança de variáveis,

$$\int_{t_1}^{t_2} B(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} B(u) du.$$

Portanto, para $\frac{\delta}{M} \leq |t_2 - t_1| \leq h$,

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} B(\omega t) dt \right\| = \frac{|t_2 - t_1|}{\omega |t_2 - t_1|} \left\| \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} B(u) du \right\| \leq \frac{h}{|\omega t_2 - \omega t_1|} \left\| \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} B(u) du \right\|.$$

Tomando $\omega_0 := \frac{MT_0}{\delta}$, temos que, para $\omega \geq \omega_0$,

$$|\omega t_2 - \omega t_1| \geq \omega_0 |t_2 - t_1| \geq \frac{MT_0}{\delta} \frac{\delta}{M} = T_0.$$

e portanto

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} B(\omega t) dt \right\| \leq \frac{h}{|\omega t_2 - \omega t_1|} \left\| \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} B(u) du \right\| \leq \frac{\delta}{h} h = \delta.$$

□

Corolário 3. Considere o sistema

$$\dot{x} = A(t)x + B(\omega t)x \quad (3.2.7)$$

com $A(t)$ nas condições da 9 e $B(t)$ nas condições da [Proposição 4](#). Então, dados $h > 0$ e $\delta > 0$, para ω suficientemente grande, o sistema (3.2.7) ainda é assintoticamente estável; isto é, seu operador de evolução $\tilde{T}(t, s)$ satisfaz

$$\left\| \tilde{T}(t, s) \right\| \leq \tilde{K} e^{-\tilde{\alpha}(t-s)} \quad (3.2.8)$$

para $\tilde{K} \geq K > 0$ e $0 < \tilde{\alpha} \leq \alpha$.

Corolário 4. Seja $A(t) \in \mathcal{GAP}$ tal que $A(t) = A_0 + B(t)$, com $A_0 = \mathcal{M}(A)$ e $B(t) \in \mathcal{O}$. Suponha $|A_0| \leq M$ e $|B(t)| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Considere os sistemas

$$\dot{x} = A_0 x \quad (3.2.9)$$

$$\dot{y} = A_0 y + B(\omega t)y \quad (3.2.10)$$

Suponha que o operador de evolução $T(t, s) := e^{A_0(t-s)}$ associado a (3.2.9) satisfaça $|T(t, s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)}$ para $t \geq s$, com $K \geq 1$ e $\alpha > 0$.

Seja $S_\omega(t, s)$ operador de evolução de (3.2.10). Nas condições acima, existe $\omega_0 > 0$ tal que, se $\omega \geq \omega_0$,

$$|S_\omega(t, s)| \leq \tilde{K} e^{-\tilde{\alpha}(t-s)}, \quad \forall t \geq s$$

onde $\tilde{K} \geq K$ e $0 < \tilde{\alpha} < \alpha$.

O operador do seguinte exemplo foi retirado de ([RODRIGUES; SOLÀ-MORALES, 2006](#)):

Exemplo 3. Considere o espaço $l^2(\mathbb{C})$ das sequências com coeficientes complexos e quadrado-somáveis em módulo:

$$l^2(\mathbb{C}) := \left\{ x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Nesse espaço, considere a norma usual, ou seja,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Seja o operador *right-shift* $R : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ dado por $R(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$. Pode ser demonstrado que o espectro de R , denotado $\sigma(R)$, é o disco unitário \mathbb{D} em \mathbb{C} . (TAYLOR; LAY, 1980) Além disso, observe que, dada a base ortonormal "canônica" em $l^2(\mathbb{R})$, isto é, formada por vetores da forma $e_j = (\delta_{kj})_{k \in \mathbb{N}}$, podemos colocá-la em forma "matricial":

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Para simplificar a notação, seja

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Dado $0 < a < 1$, defina o operador $L(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (ax_0, ax_1, ax_2 + vx_1, ax_3 + vx_2, \dots)$, cuja representação matricial é

$$L := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & vR + aI \end{pmatrix} = aI + vR_2 = a \left(I - \left(\frac{-v}{a} R_2 \right) \right).$$

Provemos que $\sigma(L) = a\mathbb{D} + v = \{az + v \mid z \in \mathbb{D}\}$, ou seja, um disco de raio v e centro a . Para tanto, vamos calcular o espectro de R_2 ; isto será feito de forma similar ao cálculo do espectro de R .

Observe que $\|R_2\| = 1$, portanto o raio espectral de R_2 deve ser no máximo 1. Considere a equação

$$(R_2 - \lambda I)x = e_1 + e_2.$$

Essa equação tem solução única, dada por $x = (R_2 - \lambda I)^{-1}(e_1 + e_2)$, se tal operador inverso existir. Portanto, o espectro de R_2 é dado pelos λ para os quais essa equação não possui solução

em $l^2(\mathbb{C})$. Tal sistema é representado por

$$\begin{aligned}\lambda x_1 &= 1 \\ \lambda x_2 &= 1 \\ \lambda x_3 &= x_2 \\ &\vdots \\ \lambda x_n &= x_{n-1} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Note que, se $\lambda = 0$, o sistema não tem solução, logo $0 \in \sigma(R_2)$. Se $\lambda \neq 0$, a solução da equação é da forma

$$x = \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^3}, \dots \right).$$

Observe que tal sequência não está em $l^2(\mathbb{C})$ se $|\lambda| < 1$. Portanto, $B(0, 1) \subset \sigma(R_2)$, onde $B(0, 1)$ denota a bola aberta em \mathbb{C} de centro 0 e raio 1. Sendo o espectro compacto (pois R_2 é um operador limitado) e tal que $B(0, 1) \subset \sigma(R_2) \subseteq \mathbb{D}$, segue que $\sigma(R_2) = \mathbb{D}$.

Para a conclusão sobre $\sigma(L)$, precisaremos do Teorema da Aplicação Espectral, cuja demonstração pode ser vista, por exemplo, em (RUDIN, 1976), no contexto mais geral de uma álgebra de Banach:

Teorema 10 (Aplicação Espectral). Seja Ω um aberto em \mathbb{C} e $A \in \mathbb{X}$ tal que $\sigma(A) \subset \Omega$. Seja $f(\lambda)$ uma função complexa holomorfa em Ω , e defina:

$$\tilde{f}(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

onde Γ é uma curva fechada em Ω envolvendo $\sigma(A)$. Então:

- $\tilde{f}(x)$ é inversível em A se e somente se $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(x)$.
- $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$.

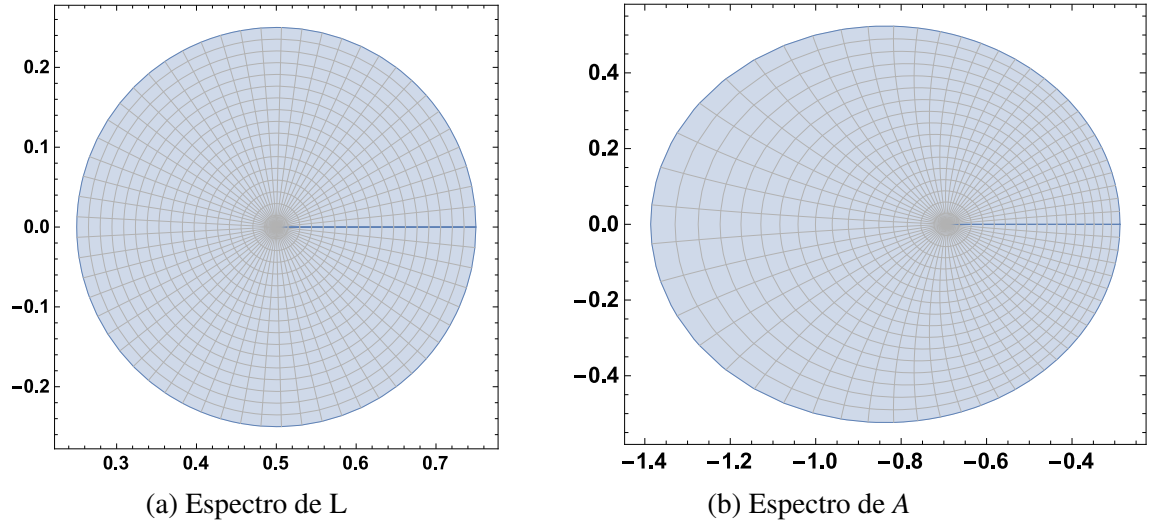
Com tal teorema, note que

$$L = aI + vR_2 = F(R_2)$$

Sendo $f(z) = a + vz$ um polinômio (portanto, holomorfa em todo o plano complexo), pelo Teorema da Aplicação Espectral,

$$\sigma(L) = \sigma(F(R_2)) = f(\sigma(R_2)) = f(\mathbb{D}) = a + v\mathbb{D}.$$

Definimos agora um operador $D := \frac{v}{a}R_2$. Observe que $L = a(I - D)$ e $\|D\| = \frac{v}{a}\|R_2\| = \frac{v}{a}$. Tome $0 < v < \min\{a, 1 - a\}$, e defina $A := \log L = (\log a)I + \log(I - D)$. Note que tal logaritmo

Figura 5 – Espectros para $a = 0.5$ e $v = 0.25$ 

é bem-definido e define um operador limitado, pois, expandindo $\log(I - D)$ em série, temos

$$\|\log(I - D)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \|D\|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{v}{a}\right)^n = -\log\left(1 - \frac{v}{a}\right).$$

Note que $\log\left(1 - \frac{v}{a}\right)$ é bem-definido em \mathbb{R} se e somente se $v < a$, e nesse caso $-\log\left(1 - \frac{v}{a}\right) > 0$.

Tendo definido tal operador A , considere o sistema em $l^2(\mathbb{C})$

$$\dot{x} = Ax.$$

O operador de evolução dessa equação é $T(t, s) = e^{A(t-s)}$. Se $v < a(1 - e^{-a})$, então $a + \log\left(\frac{v}{a}\right) > 0$; ou seja, para $t \geq 0$

$$\|e^{At}\| \leq e^{-(a + \log(\frac{v}{a}))t} \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow \infty.$$

Logo, o sistema $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável.

Considere uma função $b(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com valor médio zero; por exemplo $b(t) = \cos t + d(t)$, onde

$$d(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2} & , \quad -1 \leq t \leq 1; \\ 0 & , \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Defina com essa função o operador

$$B(t) := b(t)R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b(t) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b(t) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Note que $B(t)$ é limitada e uniformemente contínua, pois as funções $d(t)$ e $\cos t$ também são, e R é operador constante limitado. Além disso, $\mathcal{R}(B)$ é pré-compacto em $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ pois $\mathcal{R}(b(t)) = [-1, 2]$.

Provemos que $B(t) \in \mathcal{GAP}$. Dado $T \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2\pi n \leq T \leq 2\pi(n+1)$, logo pela periodicidade do cosseno e pelo suporte compacto de $d(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) dt &= \frac{1}{T} \left(\int_0^T \cos t dt + \int_0^T d(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{2\pi n}^{2\pi n+T} \cos t dt + \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0, T] \cap [-1, 1]}(t) d(t) dt \right) \\ &\leq \frac{1}{T} \left(\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |\cos t| dt + \int_{-1}^1 d(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow 0 \text{ com } T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\mathcal{M}(B(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} B(t) dt = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} b(t) dt \right) R = 0.$$

Assim, como $B(t) \in \mathcal{GAP}$ tem valor médio zero, podemos aplicar o [Corolário 3](#) para observar que existe uma frequência ω_0 tal que o sistema $\dot{x} = Ax + B(\omega t)x$ ainda é assintoticamente estável para todo $\omega \geq \omega_0$.

3.3 Estabilização através de perturbação

O próximo exemplo é um exercício proposto em [\(RODRIGUES, 2017\)](#), e mostra que, se os operadores $A(t)$ e $B(t)$ forem descontínuos, a estabilidade de um sistema periódico pode mudar, mesmo em dimensão baixa. Neste caso, veremos que um sistema instável pode ser estabilizado com uma perturbação ocorrendo num intervalo de tempo pequeno em relação ao período.

Exemplo 4. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2\delta} \\ -\frac{\pi}{2\delta} & 0 \end{pmatrix}$$

com $0 < \alpha < \beta$ e $\delta < T$. Seja $M(t)$ o operador T -periódico dado por

$$M(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < T - \delta \\ -A + B & , T - \delta \leq t < T \end{cases}$$

Considere o sistema $\dot{x} = Ax + M(t)x$; assim temos uma perturbação periódica como no [Corolário 4](#). Além disso, o valor médio de $M(t)$ é $O(T)$ pois

$$\mathcal{M}(M(t)) = (-A + B) \frac{\delta}{T} \rightarrow 0 \text{ com } T \rightarrow \infty$$

Seja $X(t)$ a matriz fundamental desse sistema. Como $M(t)$ é T -periódica e descontínua em apenas dois pontos, a teoria de Floquet ainda pode ser aplicada:

“The theory is valid for $A(t)$ which are periodic and Lebesgue-integrable if (7.1) [o sistema $\dot{x} = A(t)x$, com $A(t) = A(t + T)$] is required to be satisfied except for a set of Lebesgue measure zero. No change in proofs are required.” (HALE, 1980, p.-118)

Assim, o sistema é estável se os autovalores de $X(T)$ (chamada **matriz monodromia**) forem em módulo menores que 1. Tais autovalores são denominados **números característicos** do sistema (RODRIGUES, 2017).

Sendo assim, note que o sistema T -periódico $\dot{x} = Ax + M(t)x$ é dado por

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax & , \quad 0 \leq t < T - \delta \\ Bx & , \quad T - \delta \leq t < T \end{cases}$$

Vamos calcular as matrizes fundamentais e as soluções para os sistemas

i) $\dot{y} = Ay$

ii) $\dot{z} = Bz$

i) Note que os únicos termos não-nulos da matriz A estão na diagonal principal. Logo, a matriz fundamental desse sistema é

$$Y(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}.$$

Assim, dado $y(s) = y_0$ como condição inicial, a solução do sistema $\dot{y} = Ay$ para $t \geq s$ é dada por

$$y(t) = e^{A(t-s)}y_0.$$

ii) Calculando os autovalores da matriz B , temos

$$\det(B - \lambda I) = 0 \implies \lambda_1 = \frac{\pi}{2\delta}i, \lambda_2 = -\frac{\pi}{2\delta}i.$$

Observe que estamos apenas interessados em matrizes fundamentais reais. Portanto, calcularemos o autovetor v associado a um dos autovalores, digamos, λ_1 e tomaremos as partes real e imaginária de $e^{\lambda_1 t}v$ para compor a matriz fundamental, se forem linearmente independentes. Note que a escolha do autovalor não interfere no cálculo pois são conjugados.

Assim, o autovetor associado a $\lambda = \frac{\pi}{2\delta}i$ é dado por

$$(B - \lambda I)v = 0 \implies v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ é autovetor complexo de } B.$$

Calculando $e^{\lambda t} v$,

$$e^{\lambda t} v = e^{\frac{\pi}{2\delta} i} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2\delta} t \\ \sin \frac{\pi}{2\delta} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{2\delta} t \\ -\cos \frac{\pi}{2\delta} t \end{pmatrix}.$$

Note que, de fato, as partes real e imaginária de $e^{\lambda t} v$ são linearmente independentes. Logo, uma matriz fundamental $\tilde{Z}(t)$ é dada por

$$\tilde{Z}(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2\delta} & \sin \frac{\pi t}{2\delta} \\ \sin \frac{\pi t}{2\delta} & -\cos \frac{\pi t}{2\delta} \end{pmatrix}$$

e a matriz principal (ou seja, a matriz fundamental $Z(t)$ com $Z(0) = I$) é dada por

$$Z(t) = e^{Bt} = \tilde{Z}(t)\tilde{Z}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2\delta} & -\sin \frac{\pi t}{2\delta} \\ \sin \frac{\pi t}{2\delta} & \cos \frac{\pi t}{2\delta} \end{pmatrix}.$$

Portanto, dado $z(s) = z_0$ como condição inicial, a solução do sistema $\dot{z} = Bz$ para $t \geq s$ é

$$y(t) = e^{B(t-s)} z_0.$$

Sendo assim, para $0 \leq t \leq T - \delta$, a solução de $\dot{x} = Ax + M(t)x$ para uma condição inicial $x(0) = x_0$ é

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

e para $T - \delta \leq t < T$ é

$$x(t) = e^{B(t-(T-\delta))} x(T - \delta) = e^{B(t-(T-\delta))} e^{A(T-\delta)} x_0.$$

Portanto, a matriz fundamental $X(t)$ é dada por

$$X(t) = \begin{cases} e^{At}, & 0 \leq t < T - \delta, \\ e^{B(t-(T-\delta))} e^{A(T-\delta)}, & T - \delta \leq t < T. \end{cases}$$

Vamos finalmente calcular os números característicos η . Note que

$$X(T) = e^{B\delta} e^{A(T-\delta)} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha(T-\delta)} & 0 \\ 0 & e^{-\beta(T-\delta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{\alpha(T-\delta)} \\ -e^{-\beta(T-\delta)} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \det(X(T) - \eta I) = 0 \implies \eta^2 = -e^{-(\beta-\alpha)(T-\delta)}.$$

Note que $\beta - \alpha > 0$ e $T - \delta > 0$; portanto, $|\eta| < 1$.

Observe que o sistema $\dot{x} = Ax$ é um sistema instável, pois tem um autovalor com parte real positiva. No entanto, basta chavear o sistema (ou, se preferir, introduzir uma perturbação $C(t) = (B - A)x$ em $T - \delta \leq t \leq T$) para que o sistema se torne estável. Além disso, tal δ pode ser arbitrariamente pequeno em relação a T ; porém, como esperado, o ganho da perturbação (representada em B pelos termos $\frac{\pi}{2\delta}$) deve aumentar para assegurar a estabilidade.

DINÂMICA COM WAVELETS

4.1 Introdução

Nessa seção, veremos como aproximar a solução do sistema $\dot{x} = Ax + f(t)$ utilizando wavelets.

A motivação por trás desse estudo é principalmente a computação das soluções desse sistema. A ideia é decompor $f(t)$ em wavelets periódicas $\tilde{\psi}(t)$ e estudar o comportamento da solução do sistema $\dot{x} = Ax + \tilde{\psi}(t)$, e como tais soluções podem ser recompostas para aproximar a solução do sistema original.

Pode-se perguntar o motivo de utilizarmos wavelets, sendo que a técnica tradicional para tratar problemas periódicos é a transformada de Fourier. No entanto, ao decompor funções menos suaves, por exemplo com descontinuidades ou pontos não-diferenciáveis, podem ser necessários muitos coeficientes de Fourier. Wavelets se adaptam bem a tais problemas, pois algumas possuem graus menores de suavidade e modelam melhor tais funções.

Primeiramente, mostraremos a existência e unicidade de uma solução limitada dessa equação com $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ e $f \in L^2([0, T], \mathbb{X})$ T-periódica. Em seguida, estudaremos como aproximar as soluções utilizando as wavelets estudadas no Capítulo 2. Por fim, um exemplo ilustrará as técnicas apresentadas.

A existência e unicidade de soluções limitadas é um resultado clássico, podendo ser vista por exemplo em (RODRIGUES; CARABALLO; GAMEIRO, 2017). Por fim, o estudo dos sistemas com wavelets foi baseado em (RODRIGUES; CARABALLO; GAMEIRO, 2017), embora o estudo específico das soluções periódicas com wavelets seja (até o conhecimento do autor) original.

4.2 Perturbação de equilíbrio hiperbólico

Seja \mathbb{X} um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, e seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $U(t)$, para $t \geq 0$. Seja $P : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ uma projeção e $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Nessas condições, vamos mostrar que, dada uma função $f(t)$, seja em $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ ou T -periódica em $L^2([0, T], \mathbb{X})$, existe uma única solução limitada $x_f(t)$ do sistema

$$\dot{x} = Ax + f(t) \quad (4.2.1)$$

Teorema 11. Suponha que a seguinte dicotomia exponencial seja satisfeita, para algumas constantes $K, \alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|U(t)P\| &\leq Ke^{-\alpha t} \quad , \quad t \geq 0 \\ \|U(t)(I-P)\| &\leq Ke^{\alpha t} \quad , \quad t \leq 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Se $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, então existe uma única solução limitada em \mathbb{R} de (4.2.1) dada por

$$x_f(t) = \int_{-\infty}^t U(t-s)Pf(s) ds + \int_t^{\infty} U(t-s)(I-P)f(s) ds \quad (4.2.3)$$

Tal unicidade é no sentido "em quase todo ponto" (qtp), ou seja, se $x_f(t)$ e $y_f(t)$ são duas soluções limitadas de (4.2.1), então $x_f(t) \neq y_f(t)$ somente num conjunto de medida nula. Além disso, x_f satisfaz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x_f(t)\| \leq K \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.4)$$

Demonstração. Supondo a convergência das integrais, a verificação de que (4.2.3) é de fato solução do sistema é direta.

A unicidade da solução vem do fato que, se $x_f(t)$ e $y_f(t)$ são ambas soluções limitadas do sistema, então $x_f(t) - y_f(t)$ é solução limitada do sistema homogêneo $\dot{x} = Ax$, cuja única solução limitada é a solução nula.

Verifiquemos que a integral de fato converge. Na verdade, verificaremos que tal solução é limitada, e a convergência da integral segue do mesmo argumento. Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \|x_f(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|U(t-s)P\| \|f(s)\| ds + \int_t^{\infty} \|U(t-s)(I-P)\| \|f(s)\| ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{\alpha s} \|f(s)\| ds + Ke^{\alpha t} \int_t^{\infty} e^{-\alpha s} \|f(s)\| ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t} \left(\int_{-\infty}^t e^{2\alpha s} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^t \|f(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad Ke^{\alpha t} \left(\int_t^{\infty} e^{-2\alpha s} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{\infty} \|f(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= K \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

□

Para funções T -periódicas em $L^2([0, T])$ (as quais serão identificadas com o próprio espaço $L^2([0, T])$), temos um resultado similar.

Teorema 12. Suponha que a dicotomia exponencial (4.2.2) seja satisfeita para $K, \alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|U(t)P\| &\leq Ke^{-\alpha t} \quad , \quad t \geq 0 \\ \|U(t)(I-P)\| &\leq Ke^{\alpha t} \quad , \quad t \leq 0 \end{aligned}$$

Se $f \in L^2([0, T], \mathbb{X})$ é T -periódica, então existe uma única solução T -periódica limitada, dada por

$$x_f(t) = \int_{-\infty}^t U(t-s)Pf(s) ds + \int_t^{\infty} U(t-s)(I-P)f(s) ds. \quad (4.2.5)$$

Além disso, x_f satisfaz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x_f(t)\| \leq K^* \|f\|_{L^2([0, T])} \quad (4.2.6)$$

onde $K^* = K^*(K, \alpha, T) = K \left(\frac{e^{2\alpha T} - 1}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 + e^{\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} \right)$.

Demonstração. Supondo a convergência das integrais, a verificação de que (4.2.5) é solução de (4.2.1) é imediata, e a verificação da unicidade é a mesma para o Teorema 11. Provemos assim que x_f é T -periódica. Calculando $x_f(t+T)$, temos

$$\begin{aligned} x_f(t+T) &= \int_{-\infty}^{t+T} U(t+T-s)Pf(s) ds + \int_{t+T}^{\infty} U(t+T-s)(I-P)f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t U(t-\sigma)Pf(\sigma+T) d\sigma + \int_t^{\infty} U(t-\sigma)(I-P)f(\sigma+T) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^t U(t-\sigma)Pf(\sigma) d\sigma + \int_t^{\infty} U(t-\sigma)(I-P)f(\sigma) d\sigma \\ &= x_f(t). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que, de fato, a integral converge e que x_f é limitada. Dado $t \in \mathbb{R}$, existe

$N \in \mathbb{Z}$ tal que $(N-1)T \leq t \leq NT$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|x_f(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|U(t-s)P\| \|f(s)\| ds + \int_t^{\infty} \|U(t-s)(I-P)\| \|f(s)\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^t Ke^{-\alpha(t-s)} \|f(s)\| ds + \int_t^{\infty} Ke^{\alpha(t-s)} \|f(s)\| ds \\
&\leq \sum_{m=-\infty}^{N-1} \int_{mT}^{(m+1)T} Ke^{-\alpha(t-s)} \|f(s)\| ds + \sum_{n=N-1}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} Ke^{\alpha(t-s)} \|f(s)\| ds \\
&= \sum_{m=-\infty}^{N-1} \int_0^T Ke^{-\alpha(t-\sigma-mT)} \|f(\sigma)\| d\sigma + \sum_{n=N-1}^{\infty} \int_0^T Ke^{\alpha(t-\sigma-nT)} \|f(\sigma)\| d\sigma \\
&\leq \sum_{m=-\infty}^{N-1} \left(\int_0^T K^2 e^{-2\alpha(t-\sigma-mT)} d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|f(\sigma)\|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + \sum_{n=N-1}^{\infty} \left(\int_0^T K^2 e^{2\alpha(t-\sigma-nT)} d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|f(\sigma)\|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{N-1} Ke^{-\alpha(t-mT)} \left(\int_0^T e^{2\alpha\sigma} d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2([0,T])} + \\
&\quad + \sum_{n=N-1}^{\infty} Ke^{\alpha(t-nT)} \left(\int_0^T e^{-2\alpha\sigma} d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2([0,T])} \\
&= K \left(\sum_{m=-\infty}^{N-1} e^{-\alpha(t-mT)} \left(\frac{e^{2\alpha T} - 1}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=N-1}^{\infty} e^{\alpha(t-nT)} \left(\frac{1 - e^{-2\alpha T}}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \|f\|_{L^2([0,T])} \\
&\leq K_1 \left(\sum_{m=-\infty}^{N-1} e^{-\alpha(t-mT)} + \sum_{n=N-1}^{\infty} e^{\alpha(t-nT)} \right) \|f\|_{L^2([0,T])},
\end{aligned}$$

onde $K_1 = K \left(\frac{e^{2\alpha T} - 1}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$. Como $(N-1)T \leq t \leq NT$, então

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha(t-mT)} &\leq e^{-\alpha((N-1)-m)T} \\
e^{\alpha(t-nT)} &\leq e^{\alpha(N-n)T},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\|x_f(t)\| &\leq K_1 \left(\sum_{m=-\infty}^{N-1} e^{-\alpha((N-1)-m)T} + \sum_{n=N-1}^{\infty} e^{\alpha(N-n)T} \right) \|f\|_{L^2([0,T])} \\
&= K_1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha T m} + \sum_{n=-1}^{\infty} e^{-\alpha T n} \right) \|f\|_{L^2([0,T])} \\
&= K_1 \left(\frac{2}{1 - e^{-\alpha T}} + e^{\alpha T} \right) \|f\|_{L^2([0,T])} \\
&= K_1 \left(\frac{1 + e^{\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} \right) \|f\|_{L^2([0,T])} \\
&= K^* \|f\|_{L^2([0,T])}.
\end{aligned}$$

□

Sejam \mathcal{F} o espaço das funções limitadas em \mathbb{R} , e \mathcal{P} o espaço das funções T -periódicas limitadas, ambos munidos da norma do supremo (note que assim $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$). Defina os operadores solução \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{X}) &\rightarrow \mathcal{F} \\ f &\mapsto x_f \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 : L^2([0, T], \mathbb{X}) &\rightarrow \mathcal{P} \\ g &\mapsto x_g \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

com x_f a solução do sistema (4.2.1) para dada f em seus respectivos espaços. Pelo Teorema 11, temos o seguinte Corolário:

Corolário 5. Os operadores \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 definidos em (4.2.7) e (4.2.8) são operadores lineares contínuos.

Demonstração. A linearidade decorre da linearidade dos operadores e da integral em (4.2.3) e (4.2.5). As limitações de \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 vêm das estimativas em (4.2.4) e (4.2.6). \square

4.3 Soluções de sistemas periódicos com wavelets

Nessa seção, consideraremos \mathbb{X} um espaço de Hilbert separável. Assim, como \mathbb{X} possui uma base finita ou enumerável $\{e_i\}_{i \in I}$, podemos decompor uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ em suas componentes como

$$f(t) = \sum_{i \in I} f^i(t) e_i.$$

Além disso, se $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, então cada $f^i \in L^2(\mathbb{R})$. Portanto, cada f^i pode ser aproximada por wavelets periódicas, justificando os procedimentos nessa seção.

Dada uma aproximação de uma função 1-periódica $f^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ por wavelets periódicas

$$f^i(t) \approx \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(t) e_i$$

nosso objetivo será encontrar uma forma de escrever a solução do sistema aproximado

$$\dot{x} = Ax + f(t) \approx Ax + \sum_{i \in I} \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(t) e_i.$$

À primeira vista, o sistema aproximado pode parecer mais complexo. No entanto, podemos reduzir o problema para uma forma muito mais simples, utilizando as relações entre as $\tilde{\psi}_{j,k}$.

Primeiramente, fixaremos um $j \in \mathbb{Z}$ e estudaremos como as soluções para os diferentes $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ se relacionam:

Teorema 13. Dado $x_0 \in \mathbb{X}$, sejam $f_1(t) = \tilde{\phi}_{j,k}(t)x_0$ e $f_2(t) = \tilde{\psi}_{j,k}(t)x_0$, para alguns $j, k \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq k \leq 2^j - 1$. Sejam $\tilde{x}_{j,k}$ e $\tilde{y}_{j,k}$ soluções de $\dot{x} = Ax + f_1(t)$ e $\dot{y} = Ay + f_2(t)$, com A como no Teorema 11. Então

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{j,k}(t) &= \tilde{x}_{j,0}(t - 2^{-j}k), \\ \tilde{y}_{j,k}(t) &= \tilde{y}_{j,0}(t - 2^{-j}k).\end{aligned}$$

Demonstração. Faremos apenas para $\tilde{x}_{j,k}$; para $\tilde{y}_{j,k}$ o raciocínio é análogo. Note que

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{j,k}(t) &= \int_{-\infty}^t U(t-s)P\tilde{\phi}_{j,k}(s)x_0 ds + \int_t^{\infty} U(t-s)(I-P)\tilde{\phi}_{j,k}(s)x_0 ds \\ &= \int_{-\infty}^t U(t-s)P \left(2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(2^j(s+l) - k) \right) x_0 ds \\ &\quad + \int_t^{\infty} U(t-s)(I-P) \left(2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(2^j(s+l) - k) \right) x_0 ds.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\sigma = s - 2^{-j}k$,

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{j,k}(t) &= \int_{-\infty}^{t-2^{-j}k} U(t-\sigma-2^{-j}k)P \left(2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(2^j(\sigma+l)) \right) x_0 d\sigma \\ &\quad + \int_{t-2^{-j}k}^{\infty} U(t-\sigma-2^{-j}k)(I-P) \left(2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(2^j(\sigma+l)) \right) x_0 d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{t-2^{-j}k} U(t-2^{-j}k-\sigma)P\tilde{\phi}_{j,0}(\sigma)x_0 d\sigma \\ &\quad + \int_{t-2^{-j}k}^{\infty} U(t-2^{-j}k-\sigma)(I-P)\tilde{\phi}_{j,0}(\sigma)x_0 d\sigma = \\ &= \tilde{x}_{j,0}(t - 2^{-j}k).\end{aligned}$$

□

Vamos agora mostrar que podemos recuperar a solução periódica para $\tilde{\phi}_{j,0}(t)$ a partir de uma periodização da solução para $\phi_{j,0}(t)$:

Teorema 14. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $U(t)$, para $t \geq 0$. Suponha que exista uma projeção $P : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ que satisfaça a dicotomia exponencial como em (4.2.2). Sejam $\tilde{x}_{j,0}(t)$ e $\tilde{y}_{j,0}(t)$, respectivamente, as soluções dos sistemas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \tilde{\phi}_{j,0}(t)e_i = Ax + 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(2^j(t+l))e_i, \\ \dot{y} &= Ay + \tilde{\psi}_{j,0}(t)e_i = Ay + 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(2^j(t+l))e_i.\end{aligned}$$

Além disso, sejam $x^*(t)$ e $y^*(t)$ respectivamente as soluções dos sistemas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jt)e_i = Ax + \phi_{j,0}(t)e_i, \\ \dot{y} &= Ay + 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jt)e_i = Ay + \psi_{j,0}(t)e_i.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{j,0}(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} x^*(t+l), \\ \tilde{y}_{j,0}(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} y^*(t+l).\end{aligned}$$

Demonstração. Faremos apenas para $\tilde{x}_{j,0}$, para $\tilde{y}_{j,0}$ o raciocínio é análogo. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\phi_{j,0}(t) \geq 0$; para o caso geral, basta separar $\phi_{j,0}(t)$ nas partes positiva e negativa, e depois usar a linearidade dos operadores solução.

Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}x_n(t) &= \int_{-\infty}^t U(t-s)P \sum_{l=-n}^n \phi_{j,0}(s+l) e_i ds + \int_t^{\infty} U(t-s)(I-P) \sum_{l=-n}^n \phi_{j,0}(s+l) e_i ds \\ &= \sum_{l=-n}^n \int_{-\infty}^t U(t-s)P \phi_{j,0}(s+l) e_i ds + \sum_{l=-n}^n \int_t^{\infty} U(t-s)(I-P) \phi_{j,0}(s+l) e_i ds \\ &= \sum_{l=-n}^n \left(\int_{-\infty}^{t+l} U(t-\sigma+l)P \phi_{j,0}(\sigma) e_i d\sigma + \int_{t+l}^{\infty} U(t-\sigma+l)(I-P) \phi_{j,0}(\sigma) e_i d\sigma \right) \\ &= \sum_{l=-n}^n x^*(t+l).\end{aligned}$$

Além disso, como $\phi_{j,0}(t) \geq 0$, então o somatório é estritamente crescente em n . Logo, podemos usar o Teorema da Convergência Monótona e

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^t U(t-s)P \sum_{l=-n}^n \phi_{j,0}(s+l) e_i ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{\infty} U(t-s)(I-P) \sum_{l=-n}^n \phi_{j,0}(s+l) e_i ds \right) \\ &= \int_{-\infty}^t U(t-s)P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=-n}^n \phi_{j,0}(s+l) \right) e_i ds + \\ &\quad + \int_t^{\infty} U(t-s)(I-P) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=-n}^n \phi_{j,0}(s+l) \right) e_i ds \\ &= \int_{-\infty}^t U(t-s)P \tilde{\phi}_{j,0}(t) e_i ds + \int_t^{\infty} U(t-s)(I-P) \tilde{\phi}_{j,0}(t) e_i ds \\ &= \tilde{x}_{j,0}(t).\end{aligned}$$

□

Assim, conseguimos uma simplificação considerável no cálculo das soluções. Reunimos todas as condições utilizadas até aqui no seguinte Corolário:

Corolário 6. Seja \mathbb{X} um espaço de Hilbert separável com base no máximo enumerável $\{e_i\}_{i \in I}$. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $U(t)$, para $t \geq 0$. Suponha que exista uma projeção $P : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ que satisfaça a dicotomia exponencial como em (4.2.2).

Seja também $\{1\} \cup \{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k=0,1,\dots,2^j-1}$ base de wavelets ortonormais do espaço das funções 1-periódicas em $L^2([0,1])$. Seja $f \in L^2([0,1], \mathbb{X})$ 1-periódica, tal que $f = \sum_{i \in I} f^i e_i$, $f \in L^2([0,1])$. Nessas condições, considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + f_J(t) \quad (4.3.1)$$

com f_J aproximação de f por wavelets periódicas até a resolução J , isto é,

$$f_J(t) = \sum_{i \in I} \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k}^i \tilde{\psi}_{j,k}(t) e_i \quad , \quad c_{j,k}^i = \langle f^i, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle_{L^2([0,1])}.$$

Se $x_j^*(t)$ é a solução do sistema $\dot{x} = Ax + 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t)$, então a solução $\tilde{x}_J(t)$ do sistema (4.3.1) é dada por

$$\tilde{x}_J(t) = \sum_{i \in I} \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,k}^i x_j^*(t + n - 2^{-j}k) e_i.$$

Exemplo 5. Seja $\psi(t)$ a wavelet de Haar, dada por

$$\psi(t) = \chi_{[0, \frac{1}{2})}(t) - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & , \quad \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

Seja $\tilde{\psi}(t)$ sua periodização dada por (2.2.11), e considere o sistema unidimensional

$$\dot{x} = -x + \tilde{\psi}(t). \quad (4.3.2)$$

Vamos encontrar a solução 1-periódica desse sistema. Em seguida, conforme o Teorema 14, mostraremos que tal solução pode ser obtida utilizando a solução do sistema

$$\dot{y} = -y + \psi(t). \quad (4.3.3)$$

Note que a equação homogênea $\dot{z} = -z$ possui como solução $z(t) = e^{-t}$, e portanto é assintoticamente estável. Assim, para esse sistema, temos $P = I$, $I - P = 0$ e $U(t-s) = e^{-(t-s)}$. Pelo Teorema 12, com n inteiro tal que $n \leq t \leq n+1$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)} \tilde{\psi}(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^n e^{-(t-s)} \tilde{\psi}(s) ds + \int_n^t e^{-(t-s)} \tilde{\psi}(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^n e^{-(n-s)} e^{n-t} \tilde{\psi}(s) ds + \int_n^t e^{-(t-s)} \tilde{\psi}(s) ds \\ &= x(n) e^{n-t} + \int_n^t e^{-(t-s)} \tilde{\psi}(s) ds. \end{aligned}$$

Como $\psi(t)$ é contínua por partes, separaremos em dois casos:

- $n \leq t < n + \frac{1}{2}$: Nesse caso, $\tilde{\psi}(t) = 1$, e portanto

$$\int_n^t e^{-(t-s)} \tilde{\psi}(s) ds = \int_n^t e^{-(t-s)} ds = 1 - e^{n-t}.$$

- $n + \frac{1}{2} \leq t < n + 1$: Nesse caso, $\tilde{\psi}(t) = -1$, e temos que considerar a parcela da integral em $[n, n + \frac{1}{2})$. Logo

$$\begin{aligned} \int_n^t e^{-(t-s)} \tilde{\psi}(s) ds &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} e^{-(t-s)} ds - \int_{n+\frac{1}{2}}^t e^{-(t-s)} ds \\ &= \left(e^{n+\frac{1}{2}-t} - e^{n-t} \right) e^{-t} - \left(e^t - e^{n+\frac{1}{2}} \right) e^{-t} \\ &= (2e^{\frac{1}{2}} - 1)e^{n-t} - 1. \end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema (4.3.2) é dada por

$$x(t) = x(n)e^{n-t} + \begin{cases} 1 - e^{n-t} & , \quad n \leq t < n + \frac{1}{2}, \\ (2e^{\frac{1}{2}} - 1)e^{n-t} - 1 & , \quad n + \frac{1}{2} \leq t < n + 1. \end{cases}$$

Por fim, sendo $x(t)$ 1-periódica, devemos ter

$$x(n) = x(n+1) \implies x(n) = \frac{2e^{\frac{1}{2}} - 1 - e}{e - 1}.$$

$$\therefore x(t) = \left(\frac{2e^{\frac{1}{2}} - 1 - e}{e - 1} \right) e^{n-t} + \begin{cases} 1 - e^{n-t} & , \quad n \leq t < n + \frac{1}{2}, \\ (2e^{\frac{1}{2}} - 1)e^{n-t} - 1 & , \quad n + \frac{1}{2} \leq t < n + 1. \end{cases}$$

Vamos agora calcular a solução periódica a partir da solução $y(t)$ de (4.3.3). A solução desse sistema para $0 \leq t < 1$ é dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)} \psi(s+1) ds. \quad (4.3.4)$$

Note que a expressão é mesma do sistema (4.3.2) com $n = 0$. Para $t < 0$ e $t \geq 1$, temos que $\psi(t) = 0$, e portanto a solução do sistema (4.3.3) é

$$y(t) = \begin{cases} y(0)e^{-t} & , \quad t < 0, \\ (y(0) - 1)e^{-t} + 1 & , \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ (y(0) + 2e^{\frac{1}{2}} - 1)e^{-t} - 1 & , \quad \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ ((y(0) + 2e^{\frac{1}{2}} - 1)e^{-1} - 1)e^{-t+1} & , \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Tal solução só é limitada em \mathbb{R} se $y(0) = 0$. Dessa forma, a solução para $t + n$, $n \in \mathbb{Z}$, é dada por

$$y(t+n) = \begin{cases} 0 & , \quad t+n < 0, \\ -e^{-(t+n)} + 1 & , \quad 0 \leq t+n < \frac{1}{2}, \\ (2e^{\frac{1}{2}} - 1)e^{-(t+n)} - 1 & , \quad \frac{1}{2} \leq t+n < 1, \\ ((2e^{\frac{1}{2}} - 1)e^{-1} - 1)e^{-t+1-n} & , \quad t+n \geq 1. \end{cases}$$

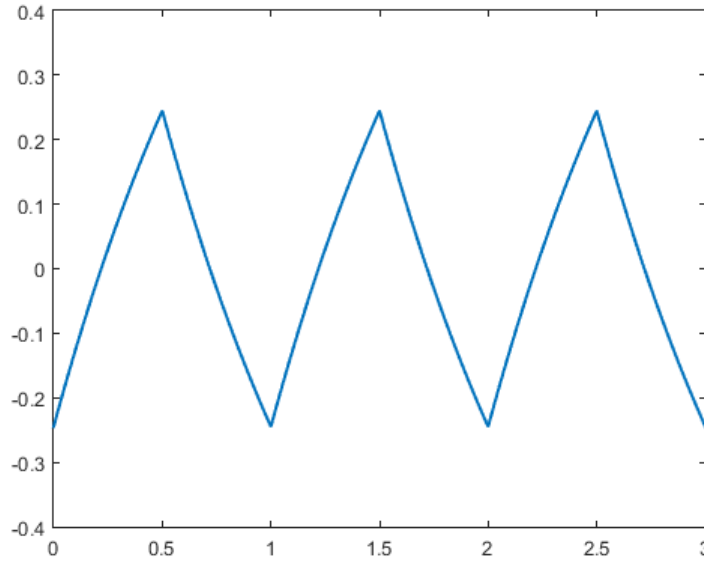


Figura 6 – Solução 1-periódica de $\dot{x} = -x + \tilde{\psi}(t)$

Primeiro, considere $t \in [0, 1)$; assim temos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \mathbb{Z}} y(t+n) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} y(t+n) + y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} y(t+n) \\
 &= 0 + y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} ((2e^{\frac{1}{2}} - 1)e^{-1} - 1)e^{-t+1-n} \\
 &= y(t) + ((2e^{\frac{1}{2}} - 1)e^{-1} - 1)e^{-t+1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \\
 &= y(t) + (2e^{\frac{1}{2}} - 1 - e)e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-1}} - 1 \right) \\
 &= \left(\frac{2e^{\frac{1}{2}} - 1 - e}{e - 1} \right) e^{-t} + y(t) \\
 &= x(t).
 \end{aligned}$$

Para $t \notin [0, 1)$, observe que existe um único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \leq t < k+1$. Portanto, fazendo as mudanças de variável $\sigma = s+l$ e $\tau = t-k$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=-n}^n y(t+l) &= \sum_{l=-n}^n \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)} \psi(s+l) ds \\
 &= \sum_{l=-n}^n \int_{-\infty}^{t+l} e^{-(t-\sigma+l)} \psi(\sigma) d\sigma \\
 &= \sum_{l=-n}^n \int_{-\infty}^{\tau+k+l} e^{-(\tau+k+l-\sigma)} \psi(\sigma) d\sigma.
 \end{aligned}$$

Reindexando o somatório com $m = k + l$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{l=-n}^n y(t+l) &= \sum_{m=k-n}^{k+n} \int_{-\infty}^{\tau+m} e^{-(\tau+m-\sigma)} \psi(\sigma) d\sigma \\ &= \sum_{m=k-n}^{k+n} y(\tau+m). \end{aligned}$$

Como k é finito, então fazendo $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} y(t+l) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} y(\tau+m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} y(t-k+m)$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. Isso também mostra que tal somatório é de fato 1-periódico, pois k pode ser qualquer inteiro. A solução pode ser vista na [Figura 6](#).

Observação 4. O procedimento usado para wavelet de Haar pode ser estendido para todas as wavelets de suporte compacto.

Exemplo 6. Considere o sistema unidimensional

$$\dot{x} = -x + \cos(2\pi t)$$

A solução 1-periódica exata desse sistema é dada por

$$x(t) = \frac{1}{1+4\pi^2} \cos(2\pi t) + \frac{2\pi}{1+4\pi^2} \sin(2\pi t)$$

Aproximaremos $\cos(2\pi t)$ pela wavelet periódica de Haar. Note que, nesse caso, a única componente não nula de $\tilde{\psi}_{j,k}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(t+n)$ no intervalo $[0, 1)$ é $\psi_{j,k}(t)$. Logo, calculando os coeficientes $c_{j,k}$,

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \langle \cos(2\pi t), \tilde{\psi}_{j,k}(t) \rangle_{L^2([0,1])} \\ &= \int_0^1 \cos(2\pi t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(t+n) dt \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \int_0^1 \cos(2\pi t) \psi(2^j t - k) dt \\ &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-k}^{2^j - k} \cos\left(\frac{2\pi}{2^j}(s+k)\right) \psi(s) ds \\ &= 2^{-\frac{j}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{2^j}(s+k)\right) ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos\left(\frac{2\pi}{2^j}(s+k)\right) ds \right) \\ &= 2^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{2^j}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{2^j}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{2^j}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{2^j}k\right) \right) \\ &\quad - 2^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{2^j}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{2^j}(k+1)\right) - \frac{2^j}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{2^j}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) \right) \\ &= \frac{2^{\frac{j}{2}}}{2\pi} \left(-\sin\left(\frac{2\pi}{2^j}k\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{2^j}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{2^j}(k+1)\right) \right). \end{aligned}$$

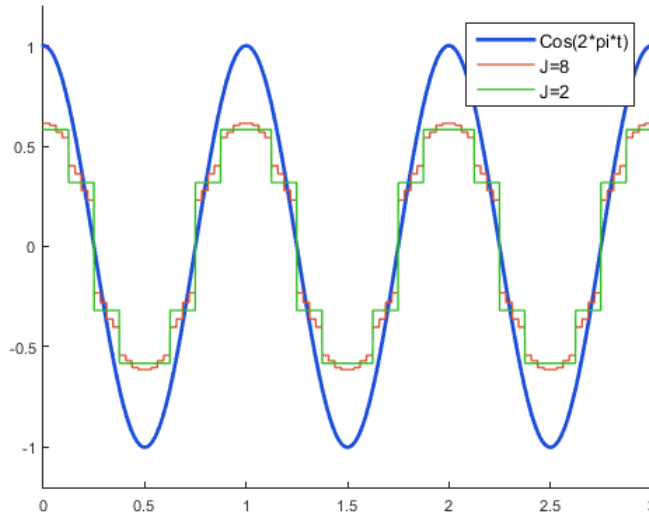


Figura 7 – $\cos(2\pi t)$ e aproximações por wavelets

A Figura 7 mostra as aproximações por wavelets periódicas da função $f(t) = \cos(2\pi t)$. A aproximação não parece tão boa, mas isso se deve à baixa resolução e ao fato da wavelet de Haar ser descontínua, enquanto o cosseno é uma função suave; portanto, espera-se que uma boa aproximação precise de uma resolução alta. No entanto, veremos que mesmo essa resolução baixa já aproxima bem a solução do sistema.

Considere o sistema

$$\dot{x}^* = -x^* + 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t).$$

Usando um procedimento semelhante ao utilizado no último exemplo, conclui-se que a solução limitada em \mathbb{R} desse sistema é

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0, \\ 2^{\frac{j}{2}} (1 - e^{-t}) & , \quad 0 \leq t < 2^{-(j+1)}, \\ 2^{\frac{j}{2}} \left((2e^{2^{-(j+1)}} - 1) e^{-t} - 1 \right) & , \quad 2^{-(j+1)} \leq t < 2^{-j}, \\ 2^{\frac{j}{2}} \left(2e^{2^{-(j+1)}} - 1 - e^{2^{-j}} \right) e^{-t} & , \quad t \geq 2^{-j}. \end{cases}$$

A solução para $j = 1$ e $k = 1$ pode ser vista na Figura 8.

Assim, a solução $\tilde{x}_{j,k}(t)$ da equação $\dot{x} = -x + \tilde{\psi}_{j,k}(t)$ para $0 \leq t < 1$ é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{j,k}(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^*(t - 2^{-j}k + n) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \left(2e^{2^{-(j+1)}} - 1 - e^{2^{-j}} \right) e^{-t+2^{-j}k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \right) + x^*(t - 2^{-j}k) \\ &= \frac{2^{\frac{j}{2}} \left(2e^{2^{-(j+1)}} - 1 - e^{2^{-j}} \right) e^{-t+2^{-j}k}}{e - 1} + x^*(t - 2^{-j}k). \end{aligned}$$

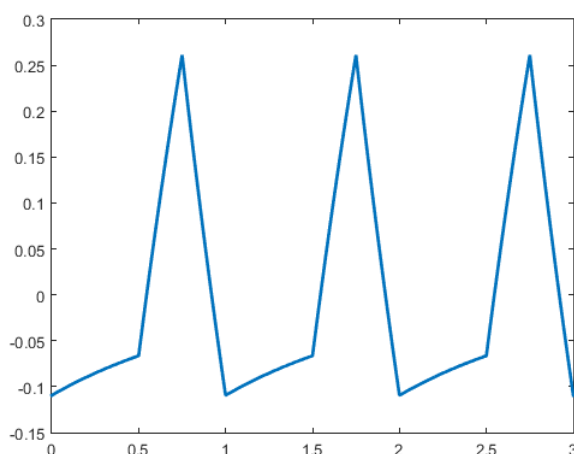


Figura 8 – Solução do sistema $\dot{x} = -x + \tilde{\psi}_{1,1}(t)$

Observe que para $j = 0$ e $k = 0$ recuperamos a solução para $\tilde{\psi}(t)$. Além disso, como no último exemplo, se $t \notin [0, 1)$, basta encontrar $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $t = s - n_0$, com $s \in [0, 1)$. A Figura 9 mostra a solução exata comparada com algumas aproximações.

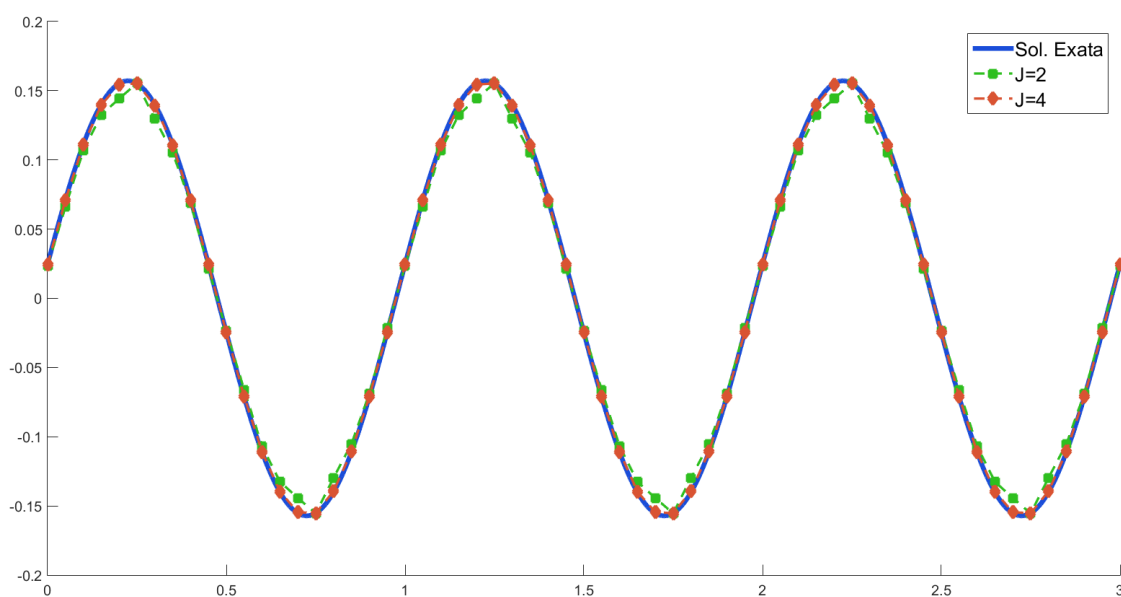


Figura 9 – Solução exata vs Aproximações

Note que, mesmo para uma resolução baixa, a solução aproximada não difere muito da exata; isso porque, ao contrário da wavelet de Haar, a solução é contínua, portanto mais suave. Assim, sendo a solução ainda suave, esperava-se de fato uma melhora na aproximação.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram considerados os problemas de robustez de estabilidade e aproximações de soluções por wavelets.

Verificou-se a estabilidade assintótica do sistema $\dot{x} = A(t)x + B(\omega t)x$ em espaços de Banach para valores grandes de ω , e $A(t), B(t)$ operadores limitados, com $B(t)$ numa classe de funções denominada funções quase-periódicas generalizadas, aqui apresentada. Para tanto, verificamos a estabilidade do sistema $\dot{x} = A(t)x + B(t)x$ para $B(t)$ integralmente pequeno, ou seja,

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt \right\| \leq \delta \text{ se } |t_1 - t_2| \leq h$$

e verificamos que tal condição é satisfeita por $B(\omega t)$, para ω suficientemente grande. Foram também apresentados alguns corolários imediatos, bem como um exemplo em dimensão infinita.

Também foi apresentado um contra-exemplo para a instabilidade; ou seja, a instabilidade em geral não é robusta em relação a alguns tipos de perturbações. Isso se dá mesmo em dimensão baixa; o contra-exemplo apresentado é um sistema em dimensão dois. Ao aplicarmos uma perturbação periódica num intervalo de tempo pequeno, vemos pela teoria de Floquet que um sistema instável pode se tornar estável.

Além disso, resultados de aproximações da solução de um sistema $\dot{x} = Ax + f(t)$ com f periódica também foram obtidos. Para tanto, decompomos $f(t)$ em wavelets periódicas $\tilde{\psi}(t)$ e verificamos como as soluções de cada sistema $\dot{x} = Ax + \tilde{\psi}(t)$ se relacionam com a wavelet original. Observou-se que, se $f(t)$ é aproximada por wavelets periódicas por $f_J(t)$ até a resolução J , isto é,

$$f_J(t) = \sum_{i \in I} \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k}^i \tilde{\psi}_{j,k}(t) e_i \quad , \quad c_{j,k}^i = \langle f^i, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle_{L^2([0,1])}$$

então a solução aproximada $\tilde{x}_J(t)$ do sistema original é dada por

$$\tilde{x}_J(t) = \sum_{i \in I} \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,k}^i x_j^*(t + n - 2^{-j}k) e_i.$$

onde $x_j^*(t)$ é a solução de $\dot{x} = Ax + 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t)$. Assim, a solução original não somente se relaciona com a solução usando wavelets periódicas, mas mesmo com a wavelet base que origina a wavelet periódica. O exemplo com a wavelet de Haar ilustra tal técnica, e também mostra sua eficiência.

Para trabalhos futuros, existem algumas ideias para ambos os assuntos:

- Para a estabilidade, podemos também considerar operadores ilimitados, como o laplaciano. Isso poderia levar a importantes conclusões sobre estabilidade de soluções de equações diferenciais parciais lineares, como a equação do calor, equação da onda e equação da viga.
- Considerar a estabilidade de dicotomias exponenciais, tanto de operadores limitados e ilimitados.
- Expandir o contra-exemplo de instabilidade para dimensões maiores e mesmo em dimensão infinita.
- Estender o restante do trabalho feito em (RODRIGUES; CARABALLO; GAMEIRO, 2017) para wavelets periódicas: caracterização das variedades estável e instável, atratores e outros.

REFERÊNCIAS

- BACHMAN, G.; NARICI, L. **Functional Analysis**. Mineola: Dover Publications, 1998. Citado na página 38.
- BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer-Verlag, 2011. Citado na página 28.
- COPPEL, W. **Dichotomies in Stability Theory**. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1978. Citado nas páginas 25, 37 e 38.
- DALECKII, J.; KREIN, M. **Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space**. Providence: American Mathematical Society, 1974. Citado na página 26.
- FINK, A. M. **Almost Periodic Differential Equations**. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1974. Citado na página 38.
- FOLLAND, G. B. **Fourier Analysis and Its Applications**. Belmont: Wadsworth & Brooks/Cole, 1992. Citado nas páginas 28 e 30.
- HALE, J. **Ordinary Differential Equations**. Malabar: Krieger Publishing Company, 1980. Citado na página 49.
- HALMOS, P. R. **Measure Theory**. New York: Springer-Verlag New York, 1988. Citado na página 29.
- HENRY, D. **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1981. Citado na página 26.
- HERNÁNDEZ, E.; WEISS, G. **A First Course on Wavelets**. Boca Raton: CRC Press, 1996. Citado nas páginas 28, 31 e 32.
- KLOEDEN, P. E.; RODRIGUES, H. M. Dynamics of a class of ODEs more general than almost periodic. **Nonlinear Analysis**, v. 74, n. 7, p. 2695–2719, 2011. Citado na página 38.
- PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. New York: Springer-Verlag New York, 1983. Citado nas páginas 25 e 26.
- PINSKY, M. A. **Introduction to Fourier Series and Wavelets**. Pacific Grove: Brooks/Cole, 2002. Citado nas páginas 28 e 32.
- RODRIGUES, H. M. **Equações Diferenciais Ordinárias**. São Carlos: ICMC-USP, 2017. Citado nas páginas 25, 26, 27, 38, 48 e 49.
- RODRIGUES, H. M.; CARABALLO, T.; GAMEIRO, M. Dynamics of a class of odes via wavelets. **Communications on Pure and Applied Analysis**, v. 16, n. 6, p. 2337–2355, 2017. Citado nas páginas 51 e 66.

RODRIGUES, H. M.; SOLÀ-MORALES, J. Invertible contractions and asymptotically stable ODE'S that are not C^1 -linearizable. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, v. 18, n. 4, p. 961–974, 2006. Citado nas páginas 38 e 44.

RUDIN, W. **Functional Analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1976. Citado nas páginas 38 e 46.

TAYLOR, A.; LAY, D. **Introduction to Functional Analysis**. Malabar: Krieger Publishing Company, 1980. Citado na página 45.

