SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 16.06.2000

Assinatura:

Enlaçamentos de Intervalos*

Andréa Cardoso

Orientador: *Prof. Dr. José Eduardo Prado Pires de Campos*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Área: Matemática.

USP – São Carlos
Junho de 2000

* Trabalho realizado com o apoio da CAPES e da FAPESP

*“Cada dia um novo começo,
uma nova chance de aprender mais sobre nós mesmos,
de se importar mais com os outros,
de rir mais do que ríamos,
de realizar mais do que pensávamos ser possível,
de ser mais do que éramos antes.”*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as oportunidades, Ele é o meu refúgio, a minha força e meu amparo na tribulações.

Gostaria de expressar aqui o meu agradecimento ao professor José Eduardo Prado Pires de Campos por sua dedicada orientação e pelo seu constante incentivo, aos professores da USP e da UNESP de Rio Preto, em especial as professoras Neuza, Teresa e Ires, que sempre me incentivaram a continuar.

Esta minha conquista eu dedico à minha família, onde eu encontro apoio nas horas difíceis e é ela o motivo pelo qual eu luto para evoluir.

Como poderia deixar de agradecer àqueles que não estão ligados a mim por laços de sangue mas sim pelos estreitos laços da amizade e do companherismo, eles fazem parte da minha "família" de amigos. Em especial quero agradecer ao meu querido amigo João, à minha amiga e companheira (tanto que poderia até chamá-la de irmã) Daniela e ao meu amado amigo José pela companhia, pelas horas que passou ao meu lado enquanto eu escrevia esta dissertação. Agradeço também aos amigos mais recentes, mas nem por isso menos especiais, Luciene (pelo carinho e por nossas conversas animadas), Sílvia (por cuidar de mim), Miguel (por me fazer rir com suas brincadeiras), Maria Alice (pela palavra amiga), Vera (pelos conselhos) e Romário (pelo sorriso sempre aberto), eu os amo!

Enfim expresso minha gratidão a todos que direta ou indiretamente contribuíram para o bom andamento e conclusão deste trabalho.

Resumo

Este trabalho apresenta o grupo $C_{1,n}$ das classes de cobordismo de enlaçamentos de intervalos e as generalizações, para este grupo, dos teoremas de Markov e da Representação de Artin para tranças.

Abstract

This work presents the group $C_{1,n}$ of cobordism classes of string links and the generalizations, for this group, of Markov's Theorem and Artin's Representation Theorem for braids.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Tranças	3
1.2 Enlaçamentos	15
2 Fecho Algébrico	22
2.1 Limite Inverso	22
2.2 Fecho Algébrico	24
3 Enlaçamentos de Intervalos	33
3.1 O grupo $C_{1,n}$	33
3.2 Localização de um Enlaçamento de Intervalos	38
3.3 Localização de um Cobordismo	41
3.4 Generalização do Teorema da Representação de Artin	42
4 Teorema de Habegger-Lin	45
4.1 Ação de Habegger-Lin	45
4.2 Cobordismo d -Baseado	49
4.3 O Teorema de Habegger-Lin	53
4.4 O grupo $C_{1,2}$	56
Referências Bibliográficas	59

Introdução

A idéia de Tranças está entre as mais antigas invenções da humanidade, ela aparece por exemplo em objetos, decorações e penteados. Artin introduziu em 1925 o conceito de Trança como objeto matemático com a finalidade de utilizar a Teoria de Tranças no estudo de Nós e Enlaçamentos. Há aplicações desta teoria em Topologia, Geometria, Teoria de Singularidades e Sistemas Dinâmicos, para citar algumas.

Para um número n de fios, as classes de isotopia de Tranças formam um grupo B_n e Artin mostrou que é possível representar cada elemento desse grupo como automorfismos de grupos livres. Alexander mostrou que todo Enlaçamento pode ser obtido pelo fechamento de uma Trança. Em 1935, Markov enunciou uma condição necessária e suficiente para que duas Tranças tenham o mesmo fecho (a menos de isotopia). A demonstração completa deste resultado foi dada por Birman em 1974. Uma breve descrição desta teoria é dada no Capítulo 1 deste trabalho.

A idéia de Trança pode ser generalizada para Enlaçamento de Intervalos, porém as classes de isotopia de Enlaçamento de Intervalos não formam um grupo, Le Dimet mostrou que, para um natural fixo n , o conjunto das classes de cobordismo de Enlaçamentos de Intervalos (Puros) formam um grupo $C_{1,n}$ que contém o grupo das classes de isotopia de Tranças Puras P_n e além disso, obteve uma generalização do Teorema da Representação de Artin para $C_{1,n}$, este teorema pode ser simplificado utilizando-se o isomorfismo obtido por Levine entre o Fecho Algébrico de um Grupo Livre e um certo quociente do Grupo Fundamental do Espaço de Localização de Vogel de um buquê de círculos.

No Capítulo 2 apresentamos a noção do Fecho Algébrico de um grupo livre e o Teorema de Levine.

No Capítulo 3 definimos Enlaçamentos de Intervalos e apresentamos a generalização do Teorema da Representação de Artin devida a Le Dimet, utilizando o isomorfismo de Levine.

O Capítulo 4 traz um Teorema de Habegger e Lin que, como o Teorema de Markov, fornece uma condição necessária e suficiente para que duas classes de cobordismos de Enlaçamentos de Intervalos tenham o mesmo fecho, a menos de Cobordismo. Este Capítulo também apresenta o estudo da comutatividade dos grupos $C_{1,n}$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Tranças

Neste Capítulo apresentamos uma breve descrição da Teoria de Tranças, que tem como alguns de seus resultados principais o Teorema da Representação de Artin e o Teorema de Markov, pois o objetivo deste trabalho é estudar a generalização destes teoremas. A generalização do Teorema da Representação de Artin, devida a Le Dimet, para Enlaçamentos de Intervalos é estudada no Capítulo 3. A generalização do Teorema de Markov, devida a Habegger e Lin, é feita no Capítulo 4.

Sejam I o intervalo $[0, 1]$ e $D^2 \times I$ o cilindro, onde $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ é o disco unitário. Dados n pontos distintos e alinhados $a_1, \dots, a_n$ em D^2 e denotando o conjunto $\{1, \dots, n\}$ por $\underline{n}$, temos a seguinte definição:

Definição 1.1 *Uma trança (geométrica) com n fios é um mergulho próprio linear por partes $\alpha : \underline{n} \times I \rightarrow D^2 \times I$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (1) $\alpha(i, 0) = (a_i, 0)$;
- (2) $\alpha(i, 1) = (a_{\tau(i)}, 1)$, onde τ é uma permutação de $\{1, \dots, n\}$;
- (3) $\alpha(i, t) \cap (D^2 \times \{t\})$ é um conjunto unitário, $\forall i \in \underline{n}$ e $\forall t \in I$

Na próximas figuras exibiremos a representação da Trança no plano, o que facilita o trabalho sem prejudicar a compreensão.

A imagem da restrição $\alpha|_{i \times I}$ é o i -ésimo fio da trança α que denotamos por α_i .

Definição 1.2 *Duas tranças α e β são ditas serem isotópicas se elas têm a mesma permutação τ e se existe um mergulho próprio linear por partes*

$F : \underline{n} \times I \times I \rightarrow D^2 \times I \times I$ tal que:

$F|_{\underline{n} \times I \times \{s\}} : \underline{n} \times I \times \{s\} \rightarrow D^2 \times I \times \{s\}$ é uma trança com permutação τ , $\forall s \in I$;

$F|_{\underline{n} \times I \times \{0\}} = \alpha$;

$F|_{\underline{n} \times I \times \{1\}} = \beta$.

Dadas as tranças β_1 e β_2 definimos o produto $\beta_1\beta_2$ como a trança que resulta da identificação do disco inferior do cilindro que contém β_1 com o disco superior do cilindro que contém β_2 de modo que os pontos $(a_1, 1), \dots, (a_n, 1)$ do cilindro que contém β_2 são identificados com os pontos $(a_1, 0), \dots, (a_n, 0)$ do cilindro que contém β_1 .

β_2 , e o cilindro resultante é contraído.

O conjunto das classes de equivalência das n -tranças com a operação definida acima define um grupo, chamado o **Grupo de Tranças de Artin** e denotado por B_n .

O elemento neutro desse grupo é a classe de equivalência da trança trivial:

O elemento inverso da classe de equivalência de uma trança β é a classe de equivalência da trança β^{-1} :

Se considerarmos o conjunto das classes de equivalência das n -tranças cuja permutação associada τ é a identidade teremos o subgrupo das Tranças Puras, denotado por P_n . Para cada $1 \leq i \leq n - 1$, denotemos por σ_i a n -trança cujo i -ésimo fio passa sobre o $(i + 1)$ -ésimo fio uma única vez e os demais fios são segmentos de reta ligando $(a_j, 0)$ a $(a_j, 1)$, para $j \neq i, i + 1$.

Os próximos resultados apresentam uma caracterização dos geradores e relações dos grupos B_n e P_n , que necessitamos para demonstração do Teorema da Representação de Artin. As demonstrações podem ser encontradas em [Hansen] e [Birman].

Teorema 1.3 (*Teorema da Apresentação de Artin*) O grupo B_n das tranças em n fios admite uma apresentação com geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e relações:

$$(1) \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad 1 \leq i, j \leq n - 1$$

$$(2) \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2$$

Teorema 1.4 *O subgrupo P_n admite uma apresentação com geradores*

$$a_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

e relações:

$$a_{rs}^{-1} a_{ij} a_{rs} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } i < r < s < j \text{ ou } r < s < i < j \\ a_{rj} a_{ij} a_{rj}^{-1}, & \text{se } r < i = s < j \\ a_{rj} a_{sj} a_{ij} a_{sj}^{-1} a_{rj}^{-1}, & \text{se } i = r < s < j \\ a_{rj} a_{sj} a_{rj}^{-1} a_{sj}^{-1} a_{ij} a_{sj} a_{rj}^{-1} a_{sj}^{-1}, & \text{se } r < i < s < j \end{cases}$$

Teorema 1.5 (Teorema da Representação de Artin) *Seja F_n o grupo livre com n geradores $x_1, \dots, x_n$. Então B_n é isomorfo ao subgrupo de $\text{aut}(F_n)$, que denotaremos por $\mathcal{H}_0(F_n)$, constituído dos automorfismos $\tilde{\beta}$ de F_n que satisfazem as seguintes condições:*

$$\bar{\beta}(x_i) = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1}, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\bar{\beta}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n,$$

onde τ é uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ e A_i é uma palavra de F_n .

Por este isomorfismo, à trança elementar σ_i corresponde um automorfismo $\bar{\sigma}_i$ definido por:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i(x_i) &= x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ \bar{\sigma}_i(x_{i+1}) &= x_i \\ \bar{\sigma}_i(x_j) &= x_j, \quad \text{para todo } j \neq i, i+1 \end{aligned}$$

Mais ainda, a permutação τ do automorfismo $\bar{\beta}$ correspondente à trança β é exatamente a permutação da trança.

Dem.: Sejam $D_0 = (D^2 \times \{0\} - \{(a_1, 0), \dots, (a_n, 0)\})$ e

$$D_1 = (D^2 \times \{1\} - \{(a_1, 1), \dots, (a_n, 1)\})$$

Seja a_0 um ponto em D^2 alinhado com $\{a_1, \dots, a_n\}$ e a esquerda desses pontos.

O grupo livre F_n pode ser naturalmente identificado com o grupo fundamental do disco $\pi_1(D_0, (a_0, 0))$ e com $\pi_1(D_1, (a_0, 1))$, onde a cada gerador x_i de F_n associamos o laço

Dada uma trança $\beta \in B_n$, consideremos $D^2 \times I$ com os fios removidos. Correspondendo a β podemos definir uma aplicação $\bar{\beta} : F_n \simeq \pi_1(D_0, (a_0, 0)) \rightarrow F_n \simeq \pi_1(D_1, (a_0, 1))$ obtida empurrando-se um laço $l \in \pi_1(D_0, (a_0, 0))$ ao longo dos vãos

deixados pelos fios de β até um laço $\bar{\beta}(l) \in \pi_1(D_1, (a_0, 1))$.

Se l_1 e l_2 são laços homotópicos em $\pi_1(D_0, (a_0, 0))$, a homotopia entre eles induz uma homotopia entre os laços resultantes. Portanto a aplicação $\bar{\beta}$ está bem definida.

Se $l_1, l_2 \in \pi_1(D_0, (a_0, 0))$ então $\bar{\beta}(l_1 l_2) = \bar{\beta}(l_1) \bar{\beta}(l_2)$ e observemos que a aplicação que puxa um laço em D_1 através dos vãos a um laço em D_0 é a inversa de $\bar{\beta}$. Logo $\bar{\beta}$ é um automorfismo.

Consideremos a aplicação do grupo de tranças $B(n)$ no grupo dos automorfismos $aut(F_n)$ definida por $\beta \mapsto \bar{\beta}$. De acordo com a definição do produto de tranças temos que esta aplicação é um homomorfismo.

O produto $x_1 \dots x_n$ pode ser representado pelo laço

que é homotópico ao laço

Portanto, $\bar{\beta}(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$, para todo $\beta \in B_n$.

Pelo teorema da Apresentação de Artin, $\beta \in B_n$ pode ser escrita como $\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$, $\epsilon_j = \pm 1$, logo podemos escrever $\bar{\beta} = \overline{\sigma_{i_1}^{\epsilon_1}} \circ \dots \circ \overline{\sigma_{i_k}^{\epsilon_k}}$. Assim para descrever $\bar{\beta}$ descreveremos primeiro $\bar{\sigma}_i$.

Pela definição de $\bar{\sigma}_i$, é claro que $\bar{\sigma}_i(x_j) = x_j$, para todo $j \neq i, i+1$. Como o fio $i+1$ passa por baixo do fio i na trança σ_i temos que $\bar{\sigma}_i(x_{i+1}) = x_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. O fio i passa sobre o fio $i+1$, assim o laço $\bar{\sigma}_i(x_i)$ passa em frente do ponto $(a_i, 1)$, conforme a figura:

que é homotópico ao laço $x_i x_{i+1} x_i^{-1}$

Desta forma, temos:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_i(x_i) &= x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ \bar{\sigma}_i(x_{i+1}) &= x_i \\ \bar{\sigma}_i(x_j) &= x_j, \quad \text{para todo } j \neq i, i+1\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_i^{-1}(x_i) &= x_{i+1} \\ \bar{\sigma}_i^{-1}(x_{i+1}) &= x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} \\ \bar{\sigma}_i^{-1}(x_j) &= x_j, \quad \text{para todo } j \neq i, i+1\end{aligned}$$

Assim, dada uma trança $\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ existem palavras $A_i \in F_n$, $1 \leq i \leq n$ e uma permutação τ tal que $\bar{\beta}(x_i) = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1}$. Como $\bar{\sigma}_i^{\pm 1}$ troca (a menos de conjugação) os geradores x_i e x_{i+1} em F_n , temos que τ é exatamente a permutação da trança β .

Para completar a demonstração, devemos mostrar que o homomorfismo

$$\begin{aligned}\varphi: B_n &\rightarrow \text{aut}(F_n) \\ \beta &\mapsto \bar{\beta}\end{aligned}$$

é bijetor, o que é demonstrado nos dois lemas que se seguem. $\square$

Nos próximos lemas apresentamos apenas um resumo da demonstração, foram suprimidos os cálculos exaustivos, para maiores detalhes ver [Birman].

Lema 1.6 *Suponhamos que γ é um endomorfismo de um grupo livre F_n em n geradores $x_1, \dots, x_n$, satisfazendo as condições:*

$$i) \quad \gamma(x_i) = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1}, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$ii) \quad \gamma(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n,$$

onde A_i é uma palavra em F_n e τ uma permutação de $\{1, \dots, n\}$. Então existe uma trança $\beta \in B_n$ tal que $\gamma = \bar{\beta}$. Em particular, γ é um automorfismo de F_n .

Dem.: A demonstração do lema é feita por indução sobre o inteiro

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^n L(A_i),$$

onde $L(A_i)$ é o comprimento da palavra A_i .

Se $L(\gamma) = 0$, a trança trivial ε satisfaz $\gamma = \bar{\varepsilon}$.

Suponhamos que o lema é verdadeiro para todo endomorfismo γ satisfazendo as condições acima, onde $L(\gamma) < m$, para $m \geq 1$.

Seja γ um endomorfismo nas condições acima tal que $L(\gamma) = m$. Temos que

$$(*) \quad (A_1 x_{\tau(1)} A_1^{-1}) \dots (A_n x_{\tau(n)} A_n^{-1}) = x_1 \dots x_n$$

como $x_1 \dots x_n$ tem comprimento n , alguns cancelamentos poderão ser feitos^{***} do lado esquerdo da expressão (*). Assim pode-se mostrar que existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal

que:

(a) $x_{\tau(i)}A_i^{-1}$ é absorvido por A_{i+1}

ou (b) A_i^{-1} absorve $A_{i+1}x_{\tau(i+1)}$.

Se ocorrer o caso (a) pode-se verificar que $L(\gamma \circ \bar{\sigma}_i) < L(\gamma)$, e neste caso, pela hipótese de indução, existe uma trança $\beta_0 \in B_n$ tal que $\bar{\beta}_0 = \gamma \circ \bar{\sigma}_i$. Tomando $\beta = \beta_0 \circ \sigma_i^{-1}$ temos $\gamma = \bar{\beta}$, como queríamos.

Se ocorrer o caso (b), de maneira análoga, obtém-se $L(\gamma \circ \bar{\sigma}_i^{-1})$, assim existe uma trança β_0 tal que $\bar{\beta}_0 = \gamma \circ \bar{\sigma}_i^{-1}$. Basta tomar $\beta = \beta_0 \circ \sigma_i$ para obtermos $\gamma = \bar{\beta}$.

Portanto, dado um endomorfismo γ satisfazendo as hipóteses existe uma trança $\beta \in B_n$ tal que $\gamma = \bar{\beta}$. $\square$

Para demonstração do lema seguinte necessitamos de alguns resultados que vamos apenas enunciar.

Seja U_n o subgrupo gerado por $a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{n-1,n}$, onde $a_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$, são os geradores do grupo das Tranças Puras P_n . Temos que

- U_n é um subgrupo normal de P_n ;
- P_n é o produto semi-direto de P_{n-1} e U_n ;
- Toda trança $\beta \in B_n$ pode ser escrita unicamente como $\beta = \beta_2\beta_3 \dots \beta_n\tau_\beta$, onde $\beta_j \in U_j$ e τ_β é uma permutação.

Lema 1.7 *O homomorfismo $\varphi : B_n \rightarrow \text{aut}(F_n)$ definido por*

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_i) : \quad x_i &\mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_{i+1} &\mapsto x_i \\ x_j &\mapsto x_j \text{ se } j \neq i, i+1 \end{aligned}$$

é injetor.

Dem.: Dada uma trança $\beta \in P_n$, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
P_n & \xrightarrow{f} & \text{aut}(U_{n+1}) \\
& \searrow \varphi & \downarrow g \\
& & \text{aut}(F_n)
\end{array}$$

onde $f : U_{n+1} \rightarrow U_{n+1}$ é definida por $f(a_{i,n+1}) = \beta^{-1}a_{i,n+1}\beta$ e g é o isomorfismo induzido da aplicação $a_{i,n+1} \mapsto x_i$. Analisando a apresentação do grupo P_n podemos concluir $\varphi = g \circ f$.

Como a_{r_s} comuta com todos os elementos de U_{n+1} temos que $\ker(f)$ é exatamente o subgrupo dos elementos de P_n que comutam com todos os elementos de U_{n+1} .

Supondo que $\beta \in \ker(\varphi)$ com β distinto da identidade, e observando que β pode ser escrito como $\beta = \beta_2\beta_3 \dots \beta_n\tau_\beta$, onde $\beta_j \in U_j$ e τ_β é a permutação de β , é possível mostrar que cada β_j depende somente de $\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}$ e daí concluir que $\beta_i = 1$ para todo $i = \{1, \dots, n\}$, o que contradiz o fato de β ser distinto da identidade. Segue então que $\ker(\varphi) = 1$. $\square$

1.2 Enlaçamentos

Seja β uma n -trança, por conveniência, vamos representá-la horizontalmente. Seja l uma reta vertical que não intercepta β , conforme mostra a figura.

Podemos promover o fechamento dessa trança tendo l como eixo e identificando $D^2 \times \{0\}$ com $D^2 \times \{1\}$, assim os pontos $(a_i, 0)$ e $(a_i, 1)$ são identificados, e obtemos a seguinte trança fechada.

Observemos que a trança fechada obtida é um mergulho próprio linear por partes de cópias n de S^1 em $\mathbb{R}^3$.

Mais geralmente, definimos

Definição 1.8 *Um enlaçamento com m -componentes é um mergulho próprio linear por partes $l : \underline{m} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou S^3).*

Um enlaçamento é uma união de curvas poligonais simples, fechadas e mutuamente disjuntas. Cada uma dessas curvas será chamada componente do enlaçamento.

De acordo com a definição acima, toda trança fechada é um enlaçamento. A pergunta que procuraremos responder agora é a seguinte:

Que condições um enlaçamento deve satisfazer para ser uma trança fechada?

Para tanto, primeiro precisamos definir uma relação de equivalência no conjunto dos enlaçamentos. Sejam V um enlaçamento e ab um lado de uma das componentes de V . Consideremos um ponto $c \in \mathbb{R}^3$ diferente de a e b , e denotemos por $\Delta(a, b, c)$ o triângulo, possivelmente degenerado, cujos vértices são a, b e c . Se trocarmos a aresta ab pelas arestas $ac \cup bc$ obteremos um novo enlaçamento e dizemos que foi aplicada uma deformação elementar e_{ab}^c . Por outro lado, se ac e bc são lados consecutivos de um enlaçamento V e $V \cap \Delta(a, b, c) = ac \cup bc$, então podemos substituir as arestas ac e bc por ab , neste caso dizemos que foi aplicada uma deformação elementar $(e_{ab}^c)^{-1}$.

Definição 1.9 *Dois enlaçamentos V e V' em $\mathbb{R}^3$ são ditos combinatorialmente equivalentes se um pode ser obtido do outro por uma sequência finita de deformações elementares.*

Sejam V um enlaçamento e l uma reta fixa de $\mathbb{R}^3$ que não intercepta V .

Definição 1.10 *Dizemos que o enlaçamento V está em posição geral em relação a l se nenhuma de suas arestas é coplanar com l .*

Proposição 1.11 *Todo enlaçamento é combinatorialmente equivalente a um enlaçamento em posição geral.*

Dem.: Sejam V um enlaçamento e l uma reta qualquer que não intercepta V . Se ab é uma aresta de V que é coplanar a l , então tomemos um ponto c fora do plano que contém l e ab , mas suficientemente próximo de ab de modo que ac e bc não interceptem as demais arestas de V . Consideremos o enlaçamento $V' = V - ab + ac + bc$, assim realizamos uma deformação elementar e_{ab}^c . Existe um número finito de tais arestas coplanares a l , visto que o número total de arestas é finito. Realizando deformações elementares correspondentes a todas as outras arestas de V que são coplanares a l , obtemos um enlaçamento V^n que está em posição geral e é combinatorialmente equivalente a V , como queríamos. $\square$

Dizemos que um enlaçamento está orientado se suas componentes são curvas orientadas. No que segue, consideramos que um enlaçamento V está em posição geral e que é orientado. Fixamos também uma orientação para l .

Dado um enlaçamento orientado V com eixo l , sejam P um semi-plano com aresta l e ab uma aresta de V , com orientação de a para b . Se, ao girar P da esquerda para a direita, este percorrer a aresta ab no mesmo sentido de sua orientação então a aresta ab é dita **positiva**. Caso contrário, ou seja, se P percorrer a aresta no sentido

contrário à sua orientação então ab é chamada aresta **negativa**.

Proposição 1.12 *Seja $h(V)$ o número de arestas negativas de V . Um enlaçamento V pode ser construído pelo fechamento de uma trança se, e somente se, ele admite uma orientação e um eixo orientado l tal que $h(V) = 0$.*

Dem.: Se V surge pelo fechamento de uma trança então a orientação de V já está estabelecida e o eixo orientado l será o eixo de fechamento da trança. De acordo com estas orientações todas as arestas são positivas, ou seja, $h(V) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que V é um enlaçamento com m componentes que admite uma orientação e um eixo orientado l tal que todas as arestas são positivas. Consideremos um semi-plano arbitrário P com aresta l e façamos um corte em V ao longo desse semi-plano, conforme rodamos P o número de intersecções de P com V mantém-se constante, visto que todas as arestas de V são positivas. Seja n este número. Seguindo o caminho que cada um desses n pontos percorrem enquanto rodamos P obtemos uma n -trança β . Fechando esta trança em torno de l teremos novamente V , o que mostra a proposição. $\square$

Observemos que uma trança fechada em $\mathbb{R}^3$ é um enlaçamento orientado V que admite um eixo orientado l de tal forma que todas as suas arestas são positivas.

A partir de agora $\hat{\beta}$ é a trança fechada obtida pelo fechamento da trança $\beta \in B_n$.

Proposição 1.13 (*Teorema de Alexander*) *Todo enlaçamento V em $\mathbb{R}^3$ é combinatorialmente equivalente a uma trança fechada.*

Dem.: Da proposição 1.11 podemos supor que V é um enlaçamento orientado e que está numa posição geral em relação a um eixo orientado l .

Se todas as arestas de V são positivas então V já é uma trança fechada. Suponhamos então que nem todas as arestas de V são positivas, seja ab uma aresta negativa de V . Se existir um ponto $c \in \mathbb{R}^3$ tal que a aplicação elementar e_{ab}^c pode ser aplicada a V , isto é, $\Delta(a, b, c) \cap V = ab$ e o eixo l intercepta $\Delta(a, b, c)$ num ponto interior do triângulo. Neste caso, $V' = e_{ab}^c(V) = V - ab + ac + cb$ tem uma aresta negativa a menos que V , pois $ac > 0$ e $cb > 0$.

Se não existe um tal ponto c , então fazemos uma partição da aresta ab

$$a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$$

Seja $V' = V - ab + aa_1 + \dots + a_{k-1}b$. É claro que V' é combinatorialmente equivalente a V . Para cada ponto c de ab é possível construir um segmento de reta com ponto inicial c que intercepta l e não intercepta V um única vez. Existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que

c está no segmento $a_{i-1}a_i$, se $a_{i-1}a_i$ for suficientemente pequeno, podemos “abrir” o segmento construído num pequeno triângulo cuja base é $a_{i-1}a_i$. Seja c_i o outro vértice do triângulo. Assim $\Delta(a_{i-1}, a_i, c_i) \cap V' = a_{i-1}a_i$ e l intercepta $\Delta(a_{i-1}, a_i, c_i)$ num ponto interior ao triângulo e as arestas $ac_1, c_1a_1, a_1c_2, \dots, a_{k-1}c_k, c_kb$ são positivas.

Substituindo cada aresta $a_{i-1}a_i$ em V' por $a_{i-1}c_i + c_i a_i$, seja V'' o enlaçamento resultante. Fazendo o mesmo para todas as arestas negativas, obtemos um enlaçamento equivalente a V cujas arestas são todas positivas, como queríamos. $\square$

Definição 1.14 *Uma deformação do tipo $\mathcal{R}$ remove, por deformação elementar, uma aresta positiva do enlaçamento V e a substitui por duas arestas positivas ou vice-versa.*

Uma deformação do tipo $\mathcal{W}$ remove, por duas deformações elementares, uma aresta positiva do enlaçamento V e a substitui por três arestas positivas ou vice-versa.

Vamos enunciar a versão geométrica do Teorema de Markov, segue-se um resumo da demonstração do teorema. A demonstração completa pode ser encontrada em [Birman].

Teorema 1.15 *(Teorema de Markov) Sejam V e V^* duas tranças fechadas. V e V^**

são combinatorialmente equivalentes se, e somente se, existe uma sequência finita de tranças fechadas $V = V_0, V_1, \dots, V_s = V^$ tal que cada V_{i+1} é obtido de V_i por uma deformação do tipo $\mathcal{R}$ ou do tipo $\mathcal{W}$.*

Dem.: Se existe uma sequência finita de tranças fechadas $V = V_0, V_1, \dots, V_s = V^*$ tal que cada V_{i+1} é obtido de V_i por uma deformação do tipo $\mathcal{R}$ ou do tipo $\mathcal{W}$, é claro que V e V^* são combinatorialmente equivalentes.

Para mostrar que a recíproca é verdadeira observemos primeiro que é possível obter o mesmo eixo positivo l para V e V^* , aplicando-se uma série de deformações elementares.

Por hipótese, V e V^* são combinatorialmente equivalentes, logo existe uma sequência finita de deformações elementares que deforma V em V^*

$$V = V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_{r-1} \rightarrow V_r = V^*$$

Sabemos apenas que $h(V) = h(V^*) = 0$, agora quanto a $h(V_i), 0 < i < r$, nada sabemos. Se $h(V_i) = h(V_{i+1}) = 0$ então a deformação $V_i \rightarrow V_{i+1}$ é do tipo $\mathcal{R}$.

Suponhamos então que arestas negativas são introduzidas no estágio i_0 . Cada uma destas arestas deve ser eliminada nas deformações seguintes visto que $h(V^*) = 0$. Se for possível transformar uma tal aresta negativa em duas arestas positivas, por uma deformação elementar, teremos feito uma deformação do tipo $\mathcal{W}$. Caso contrário, podemos subdividir a aresta negativa convenientemente para que ao final tenhamos somente arestas positivas executando, assim uma sequência de deformações do tipo $\mathcal{W}$. □

Capítulo 2

Fecho Algébrico

Neste capítulo estudamos a noção de fecho algébrico no contexto de grupos com base no artigo Link Concordance and Algebraic Closure of Groups de J.P.Levine. A generalização do Teorema da Representação de Artin, obtida por Le Dimet faz uso do grupo fundamental do Espaço de Localização de Vogel de um buquê de círculos. Tal espaço é de difícil compreensão, no entanto, Levine mostrou que um certo quociente deste grupo é isomorfo ao fecho algébrico de um grupo livre, como se vê neste capítulo. No próximo capítulo apresentaremos uma versão do teorema de Le Dimet que incorpora este resultado.

Afim de estudar o fecho algébrico, precisamos de algumas noções preliminares, que apresentamos a seguir.

2.1 Limite Inverso

Definição 2.1 *Um conjunto dirigido é um conjunto Λ juntamente com uma relação de ordem $\leq$ satisfazendo a seguinte propriedade:*

Dados $\lambda, \mu \in \Lambda$ existe $\nu \in \Lambda$ tal que $\lambda \leq \nu$ e $\mu \leq \nu$.

Definição 2.2 *Seja $(\Lambda, \leq)$ um conjunto dirigido. Para cada $\lambda \in \Lambda$ seja G_λ um grupo. Se $\lambda \leq \mu$ consideremos um homomorfismo $\varphi_{\mu\lambda} : G_\mu \rightarrow G_\lambda$ tal que*

i) $\varphi_{\lambda\lambda} = \text{identidade}$

ii) Se $\lambda \leq \mu \leq \nu$ então $\varphi_{\nu\lambda} = \varphi_{\mu\lambda}\varphi_{\nu\mu}$.

Nestas condições, a coleção de grupos e homomorfismos $\{G_\lambda, \varphi_{\mu\lambda}\}$ é um sistema inverso de grupos.

Definição 2.3 Seja $\{G_\lambda, \varphi_{\mu\lambda}\}$ um sistema inverso de grupos. O limite inverso deste sistema é um par $(G, \{f_\lambda\})$, onde G é um grupo e $\{f_\lambda\}$ é uma família de homomorfismos $f_\lambda : G \rightarrow G_\lambda$ com $f_\lambda = \varphi_{\mu\lambda}f_\mu$ sempre que $\lambda \leq \mu$, satisfazendo a seguinte propriedade:

Para todo grupo H e homomorfismos $g_\lambda : H \rightarrow G_\lambda$ tal que $g_\lambda = \varphi_{\mu\lambda}g_\mu$, sempre que $\lambda \leq \mu$, existe um único homomorfismo $g : H \rightarrow G$ tal que $g_\lambda = f_\lambda g$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Denotemos o limite inverso simplesmente por $\lim G_\lambda$, pois este será o único limite usado neste trabalho.

Proposição 2.4 Todo sistema inverso de grupos tem limite inverso.

Dem.: Dado um sistema $\{G_\lambda, \varphi_{\mu\lambda}\}$ seja $G = \{(a_\lambda) \in \prod G_\lambda : a_\lambda = \varphi_{\mu\lambda}(a_\mu) \text{ para todo } \lambda \leq \mu\}$ e consideremos f_λ as restrições das projeções $p_\lambda : \prod G_\lambda \rightarrow G_\lambda$. Dado um grupo H e homomorfismos $g_\lambda : H \rightarrow G_\lambda$ com $g_\lambda = \varphi_{\mu\lambda}g_\mu$, para $\lambda \leq \mu$, definiremos $g : H \rightarrow G$ por $g(x) = (g_\lambda(x)) \in \prod G_\lambda$.

Notemos que $a_\lambda = (g_\lambda(x)) \in G$ pois $\varphi_{\mu\lambda}(a_\mu) = \varphi_{\mu\lambda}(g_\mu(x)) = \varphi_{\mu\lambda}g_\mu(x) = g_\lambda(x) = a_\lambda$, para todo $\lambda \leq \mu$

É claro que g é único pois qualquer homomorfismo g satisfazendo as hipóteses deve satisfazer $p_\lambda(g(x)) = g_\lambda(x)$, para todo $\lambda \in \Lambda$. $\square$

Dizemos que $\{G_i\}$ é a **série central inferior** do grupo G se $G_1 = G$ e $G_{i+1} = [G, G_i]$, onde $[G, G_i]$ é o subgrupo gerado pelos comutadores $aba^{-1}b^{-1}$ com $a \in G$ e $b \in G_i$. Seja $G_\omega = \bigcap_k G_k$.

Para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq j$ temos que $G_j \subseteq G_i$, logo podemos considerar o homomorfismo $\frac{G}{G_j} \rightarrow \frac{G}{G_i}$ induzido da identidade.

Definição 2.5 *O completamento nilpotente de G é o limite inverso $\tilde{G} = \lim \frac{G}{G_i}$.*

Observemos que $\tilde{G}$ é o conjunto das sequências $(a_1G_2, a_2G_3, \dots, a_iG_{i+1}, \dots)$, onde $a_1 \in G_1$ e $a_{i+1} \in a_iG_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, com a multiplicação componente a componente. A cada elemento $a \in G$ podemos associar o elemento $(G_1, aG_2, aG_3, \dots) \in \tilde{G}$, o que nos fornece um homomorfismo. Em particular, se $G = F$ é um grupo livre então tal homomorfismo é injetor, visto que $\bigcap_{k=1}^\infty F_k = \{1\}$, ver [Magnus]. Assim F pode ser visto como um subgrupo de $\tilde{F}$.

2.2 Fecho Algébrico

No que segue, G é um grupo, F é um grupo livre com geradores $x_1, \dots, x_m$ e $F(y_1, \dots, y_k)$ é um grupo livre tendo $y_1, \dots, y_k$ como geradores.

Definição 2.6 *Uma palavra $w \in G * F(y_1, \dots, y_k)$ é dita ser **contrátil** (sobre G) se $w \mapsto 1$ pela projeção $G * F(y_1, \dots, y_k) \rightarrow F(y_1, \dots, y_k)$.*

Proposição 2.7 *Uma palavra $w \in G * F(y_1, \dots, y_k)$ é contrátil se, e somente se, w é um produto de conjugados de elementos de G por elementos de $F(y_1, \dots, y_k)$.*

Dem.: Suponhamos que w é uma palavra da forma $w = f_1g_1f_1^{-1} \dots f_ng_nf_n^{-1}$. A projeção de w em $F(y_1, \dots, y_k)$ é $f_1f_1^{-1} \dots f_nf_n^{-1} = 1$, logo $w \mapsto 1$ pela projeção e portanto w é contrátil.

Reciprocamente, seja $w = f_1g_1f_2g_2 \dots f_ng_n \in G * F(y_1, \dots, y_k)$ uma palavra contrátil, onde $f_i \in F(y_1, \dots, y_k)$ e $g_i \in G$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Podemos reescrever w da seguinte maneira:

$$w = (f_1 g_1 f_1^{-1})(f_1 f_2 g_2 f_2^{-1} f_1^{-1})(f_1 f_2 f_3 g_3 f_3^{-1} f_2^{-1} f_1^{-1}) \dots \\ \dots (f_1 f_2 \dots f_{n-1} g_{n-1} f_{n-1}^{-1} \dots f_2^{-1} f_1^{-1}) f_1 f_2 \dots f_{n-1} f_n g_n$$

Como w é contrátil temos a igualdade $f_1 f_2 \dots f_n = 1$. Assim w é um produto de conjugados de elementos de G por elementos de $F(y_1, \dots, y_k)$ como segue:

$$w = (\tilde{f}_1 g_1 \tilde{f}_1^{-1})(\tilde{f}_2 g_2 \tilde{f}_2^{-1})(\tilde{f}_3 g_3 \tilde{f}_3^{-1}) \dots (\tilde{f}_{n-1} g_{n-1} \tilde{f}_{n-1}^{-1})(1 g_n 1^{-1}), \text{ onde } \tilde{f}_i = f_1 \dots f_i.$$

□

A proposição seguinte nos dá condições para definir o fecho algébrico de um grupo livre.

Proposição 2.8 *Suponhamos que $w_1, \dots, w_k \in F * F(y_1, \dots, y_k)$ são palavras contráteis (sobre F). Então existem elementos $g_1, \dots, g_k \in \tilde{F}$ unicamente determinados, satisfazendo $g_i = w_i(g_1, \dots, g_k), i = 1, \dots, k$, isto é, $\rho(w_i) = g_i$, onde $\rho: \tilde{F} * F(y_1, \dots, y_k) \rightarrow \tilde{F}$ é a identidade em $\tilde{F}$ e $\rho(y_i) = g_i$.*

Dem.: Primeiramente, vamos mostrar que para todo r , existe $g_{ir} \in F$ tal que $g_{ir} \equiv w_i(g_{1r}, \dots, g_{kr}) \pmod{F_r}$ e g_{ir} é único $\pmod{F_r}$. A proposição segue tomando-se $g_i = (g_{i1}F, g_{i2}F_2, g_{i3}F_3, \dots)$.

Por hipótese w_i é contrátil, $i \in \{1, \dots, k\}$. Logo, de acordo com a proposição anterior, podemos escrever w_i como um produto de conjugados $w_i = a_1 b_1 a_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1}$, onde $a_i \in F(y_1, \dots, y_k)$ e $b_i \in F$.

Suponhamos, por indução, que $r = 1$. Sejam $g_{1r}, \dots, g_{kr}$ elementos quaisquer de F , e consideremos a projeção $\rho: F * F(y_1, \dots, y_k) \rightarrow F$ tal que $\rho(y_i) = g_{ir}$ e ρ é a identidade em F . Desta forma $\rho(w_i) = c_1 b_1 c_1^{-1} \dots c_n b_n c_n^{-1}$, onde $c_i = \rho(a_i)$, $i = 1, \dots, n$. Assim $w_i(g_{1r}, \dots, g_{kr}) = c_1 b_1 c_1^{-1} \dots c_n b_n c_n^{-1} \in F$, pois $b_i \in F$ e $g_{ir} \in F$, portanto $g_{ir} \equiv w_i(g_{1r}, \dots, g_{kr}) \pmod{F}$, e é claro que os g_{ir} são únicos $\pmod{F}$.

Para continuar a demonstração observemos que: Se $w \in F * F(y_1, \dots, y_k)$ é uma palavra contrátil, então $w(g_1, \dots, g_k) \in F \pmod{F_r}$ depende somente dos elementos $\{g_i\} \pmod{F_{r-1}}$.

De fato, $w(y_1, \dots, y_k)$ é contrátil, logo pode ser escrita como produto de conjugados de elementos de F , seja aba^{-1} uma das parcelas desse produto, onde $a = y_{i_1}^{\epsilon_1} \dots y_{i_n}^{\epsilon_n} \in F(y_1, \dots, y_k)$, $\epsilon_j = \pm 1$ e $b \in F$. Substituindo cada y_i por g_i e em seguida trocando cada g_i por um elemento de $g_i F_{r-1}$, como resultado obtemos $a' = g_{i_1}^{\epsilon_1} F_{r-1} \dots g_{i_n}^{\epsilon_n} F_{r-1} = (g_{i_1}^{\epsilon_1} \dots g_{i_n}^{\epsilon_n}) F_{r-1}$. Logo o produto aba^{-1} se transforma em $a f_{r-1} b (a f_{r-1})^{-1}$, onde $f_{r-1} \in F_{r-1}$. Observemos que $aba^{-1} \equiv (a f_{r-1} b f_{r-1}^{-1} a^{-1}) \text{ mod } F_r$ pois $(a f_{r-1} b f_{r-1}^{-1} a^{-1}) \cdot (ab^{-1} a^{-1}) = a(f_{r-1} b f_{r-1}^{-1} a^{-1}) a^{-1}$, $f_{r-1} b f_{r-1}^{-1} \in F_r$, onde $F_r = \{uvu^{-1}v^{-1} : u, v \in F \cup F_{r-1}\}$ é um subgrupo normal. Portanto, se g_i é um elemento de $g_i F_{r-1}$ então $w(g_1, \dots, g_k) \equiv w(g'_1, \dots, g'_k) \text{ mod } F_r$, onde $g'_i \in g_i F_{r-1}$.

Suponhamos agora que o resultado é válido para r , ou seja, suponhamos que existem elementos $g_{1r}, \dots, g_{kr} \in F$ tal que $g_{ir} \equiv w_i(g_{1r}, \dots, g_{kr}) \text{ mod } F_r$. Vamos mostrar que o resultado vale também para $r+1$.

Seja $g_{ir+1} = w_i(g_{1r}, \dots, g_{kr})$ e observemos que $w_i(g_{1r}, \dots, g_{kr}) \equiv g_{ir} \text{ mod } F_r$, por hipótese de indução. Pela observação que fizemos acima, $w_i(g_{1r+1}, \dots, g_{kr+1}) \equiv w_i(g_{1r}, \dots, g_{kr}) \text{ mod } F_{r+1}$, logo, $g_{ir+1} \equiv w_i(g_{1r+1}, \dots, g_{kr+1}) \text{ mod } F_{r+1}$. Portanto $\{g_{1r+1}, \dots, g_{kr+1}\}$ é solução $\text{mod } F_{r+1}$.

Agora devemos nos preocupar com a unicidade da solução. Suponhamos que existam $g'_{1r+1}, \dots, g'_{kr+1} \in F$ tal que $g'_{ir+1} \equiv w_i(g'_{1r+1}, \dots, g'_{kr+1}) \text{ mod } F_{r+1}$, pela unicidade das soluções temos que $g'_{ir+1} \equiv g_{ir} \text{ mod } F_r$. Assim, pela observação acima, $w_i(g'_{1r+1}, \dots, g'_{kr+1}) \equiv w_i(g_{1r}, \dots, g_{kr}) \text{ mod } F_{r+1}$. Portanto $g'_{ir+1} \equiv g_{ir+1} \text{ mod } F_{r+1}$.

Tomemos $g_i = (g_{i1}F, g_{i2}F_2, g_{i3}F_3, \dots)$, o que é possível pois $g_{ir+1} \equiv g_{ir} \text{ mod } F_r$, ou seja, $g_{ir+1} \in g_{ir}F_r$. Portanto $g_i = w_i(g_1, \dots, g_k)$, $i = 1, \dots, k$. $\square$

Definição 2.9 O fecho algébrico $\bar{F}$ de F é a intersecção de todos os subgrupos de $\tilde{F}$ que contém todas as soluções de sistemas $g_i = w_i(g_1, \dots, g_k)$, $i = 1, \dots, k$, onde w_i é uma palavra contrátil (sobre F).

Proposição 2.10 Os elementos de $\bar{F}$ são exatamente aqueles que pertencem a um

conjunto $y_1 = g_1, \dots, y_k = g_k$ de soluções de sistemas de equações $y_i = w_i(y_1, \dots, y_k), i = 1, \dots, k$, onde w_i são palavras contráteis (sobre F).

Dem.: Seja $G \subset \tilde{F}$ o conjunto das soluções $y_1 = g_1, \dots, y_k = g_k$ dos sistemas de equações $y_i = w_i(y_1, \dots, y_k)$. G é um subgrupo que contém as soluções. De fato, se g_1 e g_2 são elementos de G , podemos supor, sem perda de generalidade, que g_1 e g_2 são os dois primeiros elementos da solução $g_1, \dots, g_k$ de um sistema de equações $y_i = w_i(y_1, \dots, y_k)$. Como w_1 e w_2 são contráteis temos que $w_1 w_2$ é contrátil, logo podemos incluir no sistema a equação $y_{k+1} = w_1(y_1, \dots, y_k) w_2(y_1, \dots, y_k)$ cuja solução é $g_{k+1} = g_1 g_2$ e portanto $g_1 g_2 \in G$. Podemos incluir também ao sistema a equação $y_{k+2} = w_1(y_1, \dots, y_k)^{-1}$ cuja solução é g_1^{-1} . Assim, $g_1^{-1} \in G$.

Pela definição de $\tilde{F}$ temos que $\tilde{F} \subset G$, por outro lado se $g \in G$ então g pertence ao conjunto solução de algum sistema de equações, logo $g \in \tilde{F}$. Portanto, $\tilde{F}$ é exatamente o grupo G das soluções $y_1 = g_1, \dots, y_k = g_k$. $\square$

Proposição 2.11 *Dados $g_1, \dots, g_m \in \tilde{F}$, existe um único automorfismo φ de $\tilde{F}$ tal que $\varphi(x_i) = g_i x_i g_i^{-1}, i = 1, \dots, m$. Além disso, se $g_i \in \tilde{F}$ então $\varphi(\tilde{F}) = \tilde{F}$.*

Dem.: Dados $g_1, \dots, g_m \in \tilde{F}$. Cada g_i é uma sequência $g_i = (g_{ir})$, onde $g_{ir} \in \frac{F}{F_r}$, para todo $i = 1, \dots, m; r \in \mathbb{N}$.

Seja $\varphi_r : \frac{F}{F_r} \rightarrow \frac{F}{F_r}$ o endomorfismo que a cada $\bar{x}_i$ associa o conjugado $g_{ir} \bar{x}_i g_{ir}^{-1}$.

Seja $N = \frac{F}{F_r} \rightarrow \frac{F}{F_r}$. N é nilpotente e $\frac{N}{N_2}$ é comutativo, assim o homomorfismo $\varphi'_r : \frac{N}{N_2} \rightarrow \frac{N}{N_2}$, induzido de φ_r , é a identidade. Podemos, portanto utilizar o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [Bourbaki], página 74.

Se $f : G \rightarrow G'$ é um homomorfismo, onde G e G' são grupos nilpotentes, e o homomorfismo induzido $f' : \frac{G}{G_2} \rightarrow \frac{G'}{G'_2}$ é sobrejetor, então f é sobrejetor.

Logo, cada endomorfismo φ_r é sobrejetor.

Todo endomorfismo de um grupo residualmente finito finitamente gerado é um automorfismo (ver [Cohen]). Logo, para mostrar que φ_r é um automorfismo, é sufi-

ciente mostrar que $\frac{F}{F_r}$ é residualmente finito, isto é, dada uma palavra $v \in \frac{F}{F_r} = N$ com $v \neq 1$, existe um subgrupo normal M tal que $\frac{N}{M}$ é finito. F é um grupo livre então F é residualmente finito (ver [Cohen]), logo dado $w \in F$ com $w \neq 1$ existe um subgrupo normal M' tal que $\frac{F}{M'}$ é finito. Em particular tomemos $w \notin F_r$, $wF_r \in \frac{F}{F_r}$ e $M = \frac{M'F_r}{F_r}$ é um subgrupo normal que não contém wF_r pois $w \notin M'$ e sabendo que $\frac{F}{M'}$ é finito, é claro que $\frac{N}{M}$ é finito. Portanto, cada $\varphi_r : \frac{F}{F_r} \rightarrow \frac{F}{F_r}$ é um automorfismo.

Seja $\varphi : \tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$ o limite em r dos automorfismos φ_r . Observemos que φ é definida componente a componente $\varphi(a_0F_1, a_1F_2, \dots) = (\varphi_1(a_0F_1), \varphi_2(a_1F_2), \dots)$. Desta forma, φ é um automorfismo de grupos.

Se $g_i \in \tilde{F}$, para todo $i = 1, \dots, m$, como $\varphi(x_i) = g_i x_i g_i^{-1}$ temos que $\varphi(F) \subseteq \tilde{F}$. Como φ é um automorfismo e $\tilde{F}$ é o fecho algébrico de F temos que $\varphi(\tilde{F})$ pertence ao conjunto das soluções dos sistemas de equações em $\varphi(F) \subseteq \tilde{F}$. Dado um elemento de $\varphi(\tilde{F})$, ele pertence ao conjunto solução de algum sistema de equações em $\varphi(F) \subseteq \tilde{F}$. Mas $\tilde{F}$ é algebricamente fechado, logo este elemento pertence a $\tilde{F}$. Assim $\varphi(\tilde{F}) \subseteq \tilde{F}$.

Para mostrar que $\tilde{F} \subseteq \varphi(\tilde{F})$ é suficiente mostrar que $F \subseteq \varphi(\tilde{F})$, pois $\varphi(\tilde{F})$ é o conjunto das soluções dos sistemas de equações em $\varphi(F)$. Seja G o subgrupo gerado por $\{x_i, g_i\}$, é claro que $F \subset G$. Se $g_i \in \tilde{F}$ então G é normalmente gerado por $\{x_i\}$, logo G é normalmente gerado por $\{g_i x_i g_i^{-1}\}$. Assim, $G \subseteq \varphi(\tilde{F})$. Portanto, $\varphi(\tilde{F}) = \tilde{F}$.

□

O teorema seguinte estabelece uma relação entre o Fecho Algébrico $\tilde{F}$ de um grupo livre F e o Grupo Fundamental do Espaço de Localização de Vogel EW de um buquê de n círculos W , usado por Le Dimet (ver [Le Dimet]).

Observação 2.12 (Le Dimet) *estuda um funtor de Localização entre espaços CW complexos pontuados $E : CW \cdot \rightarrow CW \cdot$.*

$$W \longmapsto E(W),$$

onde EW é chamado Espaço de Localização de Vogel.

Se W é um complexo CW finito então

i) $E(W)$ é o limite direto dos subcomplexos finitos

$$W = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n \subset W_{n+1} \subset \cdots$$

tal que $\frac{W_n}{W}$ é contrátil para todo n ;

(ii) Dado um par (K, L) de complexos CW finitos tal que $\frac{K}{L}$ é contrátil, toda aplicação $L \rightarrow EW$ se estende unicamente (a menos de homotopia) a uma aplicação $K \rightarrow EW$.

Na demonstração do teorema 2.14 vamos nos referir ao Teorema de Stallings que apenas enunciaremos e cuja demonstração se encontra em [Stallings].

Teorema 2.13 (Teorema de Stallings) Se $h : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de grupos que induz um isomorfismo $H_1(A) \rightarrow H_1(B)$ e aplica $H_2(A)$ sobre $H_2(B)$, então h induz um isomorfismo $\frac{A}{A_n} \simeq \frac{B}{B_n}$ e uma imersão $\frac{A}{A_\omega} \rightarrow \frac{B}{B_\omega}$. Se h é sobrejetor, então h induz um isomorfismo $\frac{A}{A_\omega} \simeq \frac{B}{B_\omega}$.

Teorema 2.14 O Fecho Algébrico $\bar{F}$ de um grupo livre F é isomorfo ao quociente $\frac{\pi_1(EW)}{\pi_1(EW)_\omega}$, onde W é o buquê de n círculos $\bigvee_n S^1$.

Dem.: Observemos que o grupo fundamental do buquê de círculos $\pi_1(W)$ é isomorfo a um grupo livre F em n geradores e que, pela observação 2.12, EW é o limite direto de $W \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n \subset W_{n+1} \subset \cdots$, logo podemos considerar o homomorfismo $\eta : F \rightarrow \pi_1(EW)$ induzido pela inclusão $W \rightarrow EW$ e pelo isomorfismo $\pi_1(W) \approx F$.

A estratégia para demonstração do teorema será primeiro definir um homomorfismo $\theta : \pi_1(EW) \rightarrow \bar{F}$ tal que $\theta \circ \eta = i$, onde $i : F \rightarrow \bar{F}$ é a inclusão. Em seguida mostrar que tal homomorfismo é sobrejetor e que $\ker \theta = \pi_1(EW)_\omega$.

Para definir este homomorfismo vamos construir uma sequência de homomorfismos $\theta_n : \pi_1(W_n) \rightarrow \bar{F}$ consistentes com as inclusões $W_n \subset W_{n+1}$ e tomar θ como limite

dessa sequência. Seja $\theta_1 = i \circ h$, onde h é o isomorfismo $\pi_1(W) \approx F$. Suponhamos que θ_n está definida e definiremos $\theta_{n+1} : \pi_1(W_{n+1}) \rightarrow \bar{F}$. Sejam $g_1, \dots, g_p$ geradores de $\pi_1(W_{n+1})$.

$\pi_1(W_{n+1})$ é normalmente gerado pela imagem da inclusão $j : \pi_1(W_n) \rightarrow \pi_1(W_{n+1})$, logo g_i é um produto de conjugados de $j(h_1), \dots, j(h_k)$, onde $h_1, \dots, h_k$ são geradores de $\pi_1(W_n)$, por elementos de $\pi_1(W_{n+1})$, os quais são gerados por $g_1, \dots, g_p$, assim $g_i = w_i(j(h_1), \dots, j(h_k), g_1, \dots, g_p)$. Substituindo $j(h_1), \dots, j(h_k)$ por letras $y_1, \dots, y_k$ e $g_1, \dots, g_p$ por letras $z_1, \dots, z_p$, segue que $w_i(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_p)$ é tal que $w_i(1, \dots, 1, z_1, \dots, z_p) = 1$, $i = 1, \dots, p$.

$$\text{Seja } G = \frac{\pi_1(W_n) * F(z_1, \dots, z_p)}{\langle z_i^{-1} w_i(h_1, \dots, h_k, z_1, \dots, z_p) \rangle}.$$

Assim temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(W_n) & \xrightarrow{\text{inc}^*} & G \\ & \searrow j \quad \swarrow j' & \\ & \pi_1(W_{n+1}) & \end{array}$$

onde inc^* é a induzida da inclusão e $j'(z_i) = g_i$.

Pela definição de um conjunto algebricamente fechado temos que o homomorfismo $\theta_n : \pi_1(W_n) \rightarrow \bar{F}$ pode ser estendido unicamente a um homomorfismo $\theta'_n : G \rightarrow \bar{F}$. Observemos que cada elemento $g \in G$ pode ser escrito como $g = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n$, onde $a_i \in \pi_1(W_n)$ e $b_i \in F(z_1, \dots, z_p)$, então podemos definir $\theta'_n(g)$ como θ_n em a_i e a identidade em b_i .

Notemos que $\bar{F}$ é residualmente nilpotente, isto é $(\bar{F})_\omega = \{1\}$, pois $\bar{F}$ o é. Sabemos que $\theta'_n(G_\omega) \subseteq \theta'_n(G_i) \subseteq (\bar{F})_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, assim $\theta'_n(G_\omega) \subseteq (\bar{F})_\omega = 1$ logo $\theta'_n(G_\omega) = 1$.

Pelo Teorema de Stallings, $j' : G \rightarrow \pi_1(W_{n+1})$ induz um isomorfismo $\frac{G}{G_\omega} \simeq \frac{\pi_1(W_{n+1})}{\pi_1(W_{n+1})_\omega}$.

$$\begin{array}{ccccc}
& \pi_1(W_n) & \xrightarrow{\text{inc}*} & G & \xrightarrow{\theta'_n} \bar{F} \\
& \swarrow j & \searrow j' & \downarrow q & \nearrow f \\
\pi_1(W_{n+1}) & \xrightarrow[q']{\pi_1(W_{n+1})} & \xrightarrow[g]{\pi_1(W_{n+1})_\omega} & \frac{G}{G_\omega} &
\end{array}$$

Onde q e q' são as aplicações quociente e f é a induzida de θ'_n .

Tomemos $\theta_{n+1} = f \circ g \circ q' : \pi_1(W_{n+1}) \rightarrow \bar{F}$, assim θ_{n+1} estende θ_n . Seja $\theta : \pi_1(EW) \rightarrow \bar{F}$ o limite das θ_n .

Vamos mostrar que θ é sobre. Todo elemento de $\bar{F}$ é parte de uma coleção $g_1, \dots, g_k \in \bar{F}$ satisfazendo as equações $g_i = w_i(x_1, \dots, x_m, g_1, \dots, g_k)$, onde $w_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$ são as palavras tais que $w_i(1, \dots, 1, y_1, \dots, y_k) = 1$. Como $x_1, \dots, x_m$ são geradores de F e $\pi_1(W)$ é isomorfo a F cada x_i é representado pela i -ésima 1-célula de W . Seja K o espaço obtido adjuntando a W 1-células $e_1, \dots, e_k$ representando $y_1, \dots, y_k$ e 2-células $E_1, \dots, E_k$ representando as relações $y_i = w_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$. $\frac{K}{W}$ é contrátil, logo a inclusão $W \rightarrow EW$ se estende unicamente a uma aplicação $f : K \rightarrow EW$, pela observação 2.12.

Seja $\bar{g}_i = f_*(y_i)$. Como $y_i = w_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$ temos que

$$f_*(y_i) = w_i(f_*(x_1), \dots, f_*(x_m), f_*(y_1), \dots, f_*(y_k)),$$

assim $\bar{g}_i = w_i(x_1, \dots, x_m, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k) \in \pi_1(W)$. Podemos aplicar θ a esta equação e obter

$$\theta(\bar{g}_i) = w_i(\theta(x_1), \dots, \theta(x_m), \theta(\bar{g}_1), \dots, \theta(\bar{g}_k)), \quad \text{ou equivalentemente}$$

$\theta(\bar{g}_i) = w_i(x_1, \dots, x_m, \theta(\bar{g}_1), \dots, \theta(\bar{g}_k)) \in F$. Pela unicidade das soluções em $\bar{F}$, temos que $g_i = \theta(\bar{g}_i)$. Portanto θ é sobrejetora.

Resta mostrar que $\text{Ker} \theta = \pi_1(EW)_\omega$. Pelo teorema de Stallings, $\eta : F \rightarrow \pi_1(EW)$ induz um isomorfismo $\frac{F}{F_r} \simeq \frac{\pi_1(EW)}{\pi_1(EW)_r}$, para todo r . Logo temos um isomorfismo $\tilde{\eta} : \bar{F} \rightarrow \widetilde{\pi_1(EW)}$ entre os complementos nilpotentes.

$$\begin{array}{ccccc}
F & \xrightarrow{i} & \bar{F} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{F} \\
& \searrow & \uparrow \theta & & \uparrow \widetilde{\eta^{-1}} \\
& & \pi_1(EW) & \xrightarrow{\alpha} & \widetilde{\pi_1(EW)}
\end{array}$$

$\pi_1(EW) \xrightarrow{\alpha} \widetilde{\pi_1(EW)} \xrightarrow{\widetilde{\eta^{-1}}} \tilde{F}$ é exatamente θ pois θ é unicamente determinado. Como $\ker \alpha = \pi_1(EW)_\omega$ e $\widetilde{\eta^{-1}}$ é um isomorfismo segue que $\ker \theta = \pi_1(EW)_\omega$. $\square$

Capítulo 3

Enlaçamentos de Intervalos

Este Capítulo apresenta o conceito de Enlaçamento de Intervalos, o que generaliza o conceito de Tranças introduzido no Capítulo 1, e o grupo $C_{1,n}$ de Cobordismo de Enlaçamentos de Intervalos. O teorema 3.6 generaliza o Teorema da Representação de Artin.

O Capítulo é baseado no artigo “Cobordisme d'enlacements de disques” de Le Dimet. No entanto, enquanto Le Dimet estuda o Espaço de Localização de Vogel e usa as propriedades desse espaço para demonstrar o teorema 3.7, este trabalho usa o Fecho Algébrico, estudado no capítulo anterior, como ferramenta para a referida demonstração.

3.1 O grupo $C_{1,n}$

Seja $j_0 : \underline{n} \times I \longrightarrow D^2 \times I$ a aplicação $j_0(i, t) = (a_i, t)$, $i \in \underline{n}$

Definição 3.1 *Um enlaçamento de n intervalos é um mergulho próprio linear por partes $f : \underline{n} \times I \rightarrow D^2 \times I$ tal que*

$$f(i, 0) = (a_i, 0) \quad e \quad f(i, 1) = (a_i, 1), \quad i \in \underline{n}$$

Definição 3.2 *Dois enlaçamentos de intervalos $f, g : \underline{n} \times I \rightarrow D^2 \times I$ são isotópicos se existe um mergulho próprio linear por partes $F : \underline{n} \times I \times I \rightarrow D^2 \times I \times I$ tal que*

$F|_{\underline{n} \times I \times \{s\}} : \underline{n} \times I \times \{s\} \rightarrow D^2 \times I \times \{s\}$ é um enlaçamento de intervalos, $\forall s \in I$;

$$F|_{\underline{n} \times I \times \{0\}} = f;$$

$$F|_{\underline{n} \times I \times \{1\}} = g;$$

$$F(i, 0, s) = (a_i, 0, s); e$$

$$F(i, 1, s) = (a_i, 1, s).$$

O conjunto das classes de isotopia de enlaçamentos de n intervalos com o mesmo tipo de operação que a que foi definida para tranças não constitui um grupo. A fim de generalizarmos o grupo de tranças, introduzimos a seguinte definição:

Definição 3.3 *Dois enlaçamentos de intervalos f e g são cobordantes se existe um mergulho próprio linear por partes $F : \underline{n} \times I \times I \rightarrow D^2 \times I \times I$ tal que*

$$F|_{\underline{n} \times I \times \{0\}} = f;$$

$$F|_{\underline{n} \times I \times \{1\}} = g;$$

$$F(i, 0, s) = (a_i, 0, s); e$$

$$F(i, 1, s) = (a_i, 1, s).$$

Cobordismo de enlaçamentos de intervalos é uma relação de equivalência. Seja $C_{1,n}$ o conjunto das classes de equivalência dos enlaçamentos de n intervalos, segundo esta relação.

Consideremos as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : D^2 \times I &\rightarrow D^2 \times I & \alpha_2 : D^2 \times I &\rightarrow D^2 \times I \\ \alpha_1(x, t) &= (x, \frac{t}{2}) & \alpha_2(x, t) &= (x, \frac{1+t}{2}) \end{aligned}$$

e podemos definir o produto $fg : \underline{n} \times I \rightarrow D^2 \times I$ da seguinte forma:

$$fg(i, t) = \begin{cases} \alpha_1 f(i, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2 g(i, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que a classe do enlaçamento j_0 é o elemento neutro desta operação. De fato, fj_0 e j_0f são isotópicos a f e portanto cobordantes a f .

Dado um enlaçamento f , consideremos a aplicação

$$f^{-1} : \underline{n} \times I \rightarrow D^2 \times I$$

$$f^{-1}(i, t) = \alpha f(i, 1 - t) \quad ,$$

onde

$$\alpha : D^2 \times I \rightarrow D^2 \times I$$

$$\alpha(x, t) = (x, 1 - t)$$

Proposição 3.4 *Dado um enlaçamento f , os produtos ff^{-1} e $f^{-1}f$ são cobordantes ao enlaçamento trivial j_0 .*

Dem.: Seja $h' : \partial(I \times I) \rightarrow \partial(I \times I)$ um homeomorfismo tal que $h'(0, 0) = (1, 1)$, $h'(0, 1) = (0, 1)$ e $h'(0 \times I) = (0 \times I) \cup (I \times 0) \cup (1 \times I)$. O homeomorfismo h' pode ser estendido radialmente a um homeomorfismo $h : I \times I \rightarrow I \times I$.

Dado um enlaçamento $f : \underline{n} \times I \rightarrow D^2 \times I$, consideremos a aplicação $F : \underline{n} \times I \times I \rightarrow D^2 \times I \times I$ definida por $(id_{D^2} \times h^{-1}) \circ (f \times id_I) \circ (id_{\underline{n}} \times h)$.

F é claramente um cobordismo entre fj_0f^{-1} e j_0 . Por outro lado, fj_0f^{-1} é cobordante a ff^{-1} . Portanto ff^{-1} é cobordante a j_0 . Analogamente mostra-se que $f^{-1}f$ é cobordante a j_0 . $\square$

Assim as classes de Cobordismo dos Enlaçamentos de n Intervalos formam um grupo que denotaremos por $C_{1,n}$.

Veremos futuramente que este grupo contém o grupo P_n das Tranças Puras, isto é, que duas tranças são isotópicas se, e somente se, elas são cobordantes.

3.2 Localização de um Enlaçamento de Intervalos

Para todo enlaçamento de intervalos $f : \underline{n} \times I \rightarrow D^2 \times I$ pode-se definir uma extensão

$$\bar{f} : \underline{n} \times I \times D^2 \rightarrow D^2 \times I,$$

que é única a menos de isotopia (ver [Le Dimet]).

O exterior $X(f)$ de um enlaçamento de intervalos f é o espaço $(D^2 \times I) - \bar{f}(\underline{n} \times I \times D^2)$ e se X_0 é o disco D^2 menos n discos abertos e disjuntos cujos centros são $a_1, \dots, a_n$ então

$$X(j_0) = X_0 \times I.$$

O bordo $\partial X(j_0)$ se decompõe da seguinte forma:

$$\partial X(j_0) = (\partial X(j_0)_{int}) \cup (\partial X(j_0)_{ext}),$$

onde $(\partial X(j_0))_{int} = \bar{j}_0(\underline{n} \times I \times S^1)$, S^1 é o bordo de D^2 , e

$$(\partial X(j_0))_{ext} = \overline{\partial(D^2 \times I) - \bar{j}_0(\underline{n} \times \{0, 1\} \times D^2)}$$

Observemos que $(\partial X(j_0))_{ext}$ pode ser escrito como

$$(\partial X(j_0))_{ext} = ((\partial X_0)_{ext} \times I) \cup (X_0 \times \partial I).$$

Mais geralmente, podemos definir

$$(\partial(X(f)))_{int} = \bar{f}(\underline{n} \times I \times S^1)$$

$$(\partial X(f))_{ext} = \overline{\partial(D^2 \times I) - \bar{f}(\underline{n} \times \{0, 1\} \times D^2)}$$

Como $f|_{\underline{n} \times \partial I} = j_0|_{\underline{n} \times \partial I}$ temos que $(\partial X(f))_{ext} = (\partial X(j_0))_{ext}$. E portanto,

$$\partial X(f) = (\partial X(f))_{int} \cup (\partial X(j_0))_{ext}.$$

Dado um enlaçamento f , seja $Y(f) = \overline{\partial X(f) - (X(j_0) \times \{0\})}$, observemos que $Y(f)$ é o bordo de $X(f)$ menos $(D^2 \times \{0\})$, assim podemos definir uma equivalência de homotopia que transforma $Y(f)$ em X_0 , X_0 por sua vez pode ser transformado num buquê de n círculos. Desta forma, $Y(f)$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\bigvee_n S^1$.

Proposição 3.5 *Para todo enlaçamento f , a inclusão $Y(f) \hookrightarrow X(f)$ induz uma aplicação normalmente sobrejetora $\pi_1(Y(f)) \rightarrow \pi_1(X(f))$ e um isomorfismo na homologia inteira $H_*(Y(f)) \rightarrow H_*(X(f))$.*

Dem.: Seja $A = Y(f) \cup \bar{f}(\underline{k} \times I \times D^2)$. A função que “achata” A em $D^2 \times \{1\}$ é uma retração por deformação. Como D^2 é contrátil a um ponto p concluímos que A também é contrátil, isto é, $\pi_1(A) = \{1\}$ e as inclusões nos fornecem o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
Y(f) & \longrightarrow & A \\
\downarrow & & \downarrow \\
X(f) & \longrightarrow & D^2 \times I
\end{array}$$

Observemos que o cilindro $D^2 \times I$ pode ser visto como a união $D^2 \times I = A \cup X(f)$ e que $A \cap X(f) = Y(f)$. Assim estamos em condições de aplicar o Teorema de Seifert-Van Kampen no diagrama acima e obter o seguinte push-out:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(Y(f)) & \longrightarrow & \pi_1(A) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_1(X(f)) & \longrightarrow & \pi_1(D^2 \times I)
\end{array}$$

Ou melhor, como A é contrátil o Teorema nos garante que $\pi_1(D^2 \times I) \cong \frac{\pi_1(X(f))}{\langle \pi_1(Y(f)) \rangle^N}$, onde $\langle \pi_1(Y(f)) \rangle^N$ é o subgrupo normal gerado por $\pi_1(Y(f))$. Por outro lado, $\pi_1(D^2 \times I) = 1$, logo $\pi_1(X(f)) = \langle \pi_1(Y(f)) \rangle^N$ e portanto a aplicação $i_* : \pi_1(Y(f)) \rightarrow \pi_1(X(f))$, induzida pela inclusão, é normalmente sobrejetora.

Para demonstrar que a inclusão $i : Y(f) \rightarrow X(f)$ induz um isomorfismo na homologia inteira, devemos primeiramente observar que $H_0(Y(f))$ é isomorfo a $H_0(X(f))$, pois $X(f)$ e $Y(f)$ são ambos conexos por caminho. Para $n > 0$ vamos construir a sequência exata de Mayer-Vietoris para os grupos de homologia:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(D^2 \times I) \rightarrow H_n(Y(f)) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(X(f)) \rightarrow H_n(D^2 \times I) \rightarrow \dots$$

Como $H_n(D^2 \times I) = H_{n+1}(D^2 \times I) = H_n(A) = 0$, temos que $H_n(Y(f))$ é isomorfo a $H_n(X(f))$. Portanto a aplicação $H_*(Y(f)) \rightarrow H_*(X(f))$ induzida da inclusão é um isomorfismo. $\square$

Dados dois complexos finitos pontuados K e L . [Le Dimet] mostra que $\frac{K}{L}$ é contrátil se, e somente se, a inclusão $L \hookrightarrow K$ induz um isomorfismo na homologia

inteira e uma aplicação $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(K)$ normalmente sobrejetora. Logo de acordo com a proposição acima temos que $\frac{X(f)}{Y(f)}$ é contrátil.

Já fizemos referência, no Capítulo 2 ao Funtor de Localização de Vogel

$$E : CW \cdot \rightarrow CW \cdot$$

$$W \mapsto EW,$$

Seja E_n a Localização de Vogel do buquê de n círculos $\bigvee_n S^1$. E_n satisfaz, além das já listadas na observação 2.12, a seguinte propriedade:

Observação 3.6 *Existe uma aplicação (de Localização) $j : \bigvee_n S^1 \rightarrow E_n$ que induz um isomorfismo nos grupos de homologia inteira (veja [Le Dimet]).*

Sejam $s' : X_0 \rightarrow \bigvee_n S^1$ uma equivalência de homotopia e $s : X(j_0) \rightarrow \bigvee_n S^1$ uma aplicação definida por $s(x, t) = s'(x)$.

Dado um enlaçamento f , podemos definir um homeomorfismo $f' : Y(f) \rightarrow Y(j_0)$ satisfazendo as seguintes condições:

$$f'_{|Y(f) - (\partial X(f))_{int}} = id$$

$$f'_{|\partial X(f)_{int}} = \overline{f^{-1}}_{|(\partial X(f))_{int}}$$

Como $\frac{X(f)}{Y(f)}$ é contrátil, pela observação 2.12 propriedade (ii) do espaço de localização E_n , segue que a aplicação $s_{|Y(j_0)} \circ f' : Y(f) \rightarrow \bigvee_n S^1 \subset E_n$ se estende unicamente, a menos de homotopia, a uma aplicação $l(f) : X(f) \rightarrow E_n$, chamada **Localização do Enlaçamento f** .

3.3 Localização de um Cobordismo

Tal qual definimos a Localização de um Enlaçamento de Intervalos, vamos definir a Localização de um Cobordismo, seguindo Le Dimet.

Seja $F : \underline{n} \times I \times I \rightarrow D^2 \times I \times I$ um cobordismo entre dois enlaçamentos f e g . F pode ser estendido a uma aplicação $\bar{F} : \underline{n} \times I \times I \times D^2 \rightarrow D^2 \times I \times I$.

$$\begin{aligned} \text{Sejam } X(F) &= \overline{D^2 \times I \times I - \bar{F}(\underline{n} \times I \times I \times D^2)} \\ Y(F) &= \overline{\partial X(F) - X_0 \times I \times 0} \end{aligned}$$

$Y(F)$ se decompõe da seguinte forma: $Y(F) = X(f) \cup X(g) \cup Z(F)$.

É possível construir um homeomorfismo $F'' : Z(F) \cup Y(f) \cup Y(g) \rightarrow Y(j_0) \times I$, estendendo f e g .

$$\begin{aligned} \text{Seja } F' = F''_{|Z(F)} \text{ e definamos } l'(F) : Y(F) \rightarrow E_n \text{ por } l'(F)|_{X(f)} &= l(f); \\ l'(F)|_{X(g)} &= l(g); \\ l'(F)|_{Z(F)} &= (s|_{Y(j_0)} \times I) \circ F' \end{aligned}$$

Como $\frac{X(F)}{Y(F)}$ é contrátil, $l'(F)$ se estende unicamente, a menos de homotopia, a uma aplicação $l(F) : X(F) \rightarrow E_n$, chamada **Localização do Cobordismo F** .

3.4 Generalização do Teorema da Representação de Artin

Agora estamos em condições de mostrar a generalização do Teorema da Representação de Artin feita por Le Dimet. Antes porém observemos que:

Tranças puras podem ser consideradas como enlaçamentos de intervalos. Mais ainda, tranças isotópicas são também cobordantes, logo a aplicação $i : P_n \rightarrow C_{1,n}$, que associa a cada classe de isotopia $[\alpha]$ a classe de cobordismo de α , está bem definida.

Pelo Teorema da Representação de Artin, P_n é isomorfo ao subgrupo dos automorfismos σ de um grupo livre F_n tais que $\sigma(x_i) = A_i x_i A_i^{-1}$ e $\sigma(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$, onde $x_1, \dots, x_n$ são os geradores de F_n e A_i é uma palavra em F_n . Ou seja, existe

um isomorfismo $\lambda : P_n \rightarrow \mathcal{H}_0(F_n)$ entre o grupo da Tranças Puras e o subgrupo dos automorfismos do grupo livre F_n satisfazendo as condições acima.

Teorema 3.7 *Existe um homomorfismo de grupos $\bar{\lambda} : C_n \rightarrow \mathcal{H}_0(\bar{F})$ tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{H}_0(F_n) \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ C_{1,n} & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \mathcal{H}_0(\bar{F}_n) \end{array}$$

é comutativo, onde $\bar{F}_n$ é o fecho algébrico do grupo livre F_n .

Dem.: Seja f um enlaçamento e $l(f) : X(f) \rightarrow E_n$ sua Localização.

$$\begin{array}{ccccccc} Y(f) & \xrightarrow{f'} & Y(j_0) & \xrightarrow{s} & \bigvee_n S^1 & \xrightarrow{i} & E_n \\ \downarrow & & & & & \nearrow l(f) & \\ X(f) & & & & & & \end{array}$$

Seja $l_*(f) : \pi_1(X(f)) \rightarrow \pi_1(E_n)$ o homomorfismo induzido de $l(f)$. Pelo teorema 2.14, existe um isomorfismo $q : \frac{\pi_1(E_n)}{\pi_1(E_n)_\omega} \rightarrow \bar{F}_n$, assim podemos considerar um homomorfismo $h_f : \pi_1(X(f)) \rightarrow \bar{F}_n$ definido pela composição $h_f = q \circ \pi \circ l_*(f)$, onde $\pi : \pi_1(E_n) \rightarrow \frac{\pi_1(E_n)}{\pi_1(E_n)_\omega}$ é o homomorfismo canônico.

Utilizando o isomorfismo q e o homomorfismo $(i \circ s \circ f')_*$ podemos considerar $x_1, \dots, x_n$ como geradores de $\pi_1(X_0 \times \{1\})$. Sejam $y_1, \dots, y_n$ os geradores de $\pi_1(X_0 \times \{0\})$.

Pelo Teorema da Apresentação de Wirtinger (ver [Rolfsen]), para cada $i \in I$ existe $a_i \in \pi_1(X(f))$ tal que $y_i = a_i x_i a_i^{-1}$. Aplicando h_f temos $h_f(y_i) = h_f(a_i) h_f(x_i) h_f(a_i)^{-1}$. Seja $u_i = h_f(a_i)$ e notemos que $h_f(x_i) = x_i$, logo $h_f(y_i)$ pode ser escrito como $h_f(y_i) = u_i x_i u_i^{-1}$.

Observemos que

$$(*) \quad x_1 \dots x_n = h_f(x_1 \dots x_n) = h_f(y_1 \dots y_n) = \prod (u_i x_i u_i^{-1}),$$

Pela proposição 2.11, dados $u_1, \dots, u_n \in \bar{F}_n$ existe um único automorfismo $\sigma_f : \bar{F}_n \rightarrow \bar{F}_n$ tal que $\sigma_f(x_i) = u_i x_i u_i^{-1}$.

De (*) segue que $\sigma_f(x_1 \dots x_n) = \sigma_f(x_1) \dots \sigma_f(x_n) = \prod (u_i x_i u_i^{-1}) = x_1 \dots x_n$.

Portanto, a cada enlaçamento $f \in C_{1,n}$ podemos associar um elemento $\sigma_f \in \mathcal{H}_0(\bar{F}_n)$. Vamos verificar se esta aplicação está bem definida.

Se f e g são cobordantes, sejam F um Cobordismo entre f e g , $Y(F)$ o exterior desse cobordismo e $l(F) : Y(F) \rightarrow E_n$ sua localização.

Como vimos acima, em $\pi_1(X(f))$ temos $y_i = a_i x_i a_i^{-1}$. Analogamente em $\pi_1(X(g))$, $y_i = b_i x_i b_i^{-1}$. Mas f e g são cobordantes, então $a_i = b_i, \forall i$.

Sejam $u_i = h_f(a_i)$ e $v_i = h_g(a_i)$. Sabemos que $l_*(f) = l_*(F)|_{X(f)}$ e $l_*(g) = l_*(F)|_{X(g)}$, então $v_i = h_g(a_i) = q \circ \pi \circ l_*(g)(a_i) = q \circ \pi \circ l_*(F)(a_i) = q \circ \pi \circ l_*(f)(a_i) = u_i$. Assim, $\sigma_f(x_i) = u_i x_i u_i^{-1} = v_i x_i v_i^{-1} = \sigma_g(x_i)$.

Portanto a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} : C_{1,n} &\rightarrow \mathcal{H}_0(\bar{F}) \\ f &\mapsto \sigma_f \end{aligned}$$

está bem definida. Além disso, $\bar{\lambda}$ é um homomorfismo de grupos.

Nestas condições o diagrama comuta, isto é, que $j \circ \lambda = \bar{\lambda} \circ i$. De fato, seja $f \in P_n$, λ associa a cada f um automorfismo $\sigma'_f : F_n \rightarrow F_n$ satisfazendo as condições já citadas. Temos então:

$$j \circ \lambda(f) = j(\sigma'_f) = \sigma_f \text{ e}$$

$$\bar{\lambda} \circ i(f) = \bar{\lambda}(i(f)) = \sigma_{i(f)} = \sigma_f, \text{ pois } i(f) \text{ é a classe de cobordismo de } f$$

□

Como consequência do teorema, a aplicação i é injetora e portanto podemos considerar o grupo P_n das Tranças Puras como um subgrupo do grupo de cobordismo dos enlaçamentos de intervalos $C_{1,n}$.

Capítulo 4

Teorema de Habegger-Lin

Neste capítulo definiremos uma ação do grupo de cobordismo dos enlaçamentos de $2k$ intervalos $C_{1,2k}$ no grupo $C_{1,k}$, denominada **Ação de Habegger-Lin**, e introduziremos a noção de Cobordismo d -baseado para mostrar um teorema que, ao estilo do Teorema de Markov para Tranças, fornece uma condição necessária e suficiente para que dois Enlaçamentos de intervalos tenham o mesmo fecho.

4.1 Ação de Habegger-Lin

Consideremos o cilindro $D \times I$, identifiquemos $(z, 0)$ com $(z, 1)$, $\forall z \in D$. E ao longo do bordo $\partial D \times I$ façamos a seguinte identificação: Seja $z = (x, y)$, com $x \geq 0, y \leq 0$ e $x^2 + y^2 = 1$, identifiquemos $z = (z, t)$ com $(z, 1/4 - t(mod 1))$, para $t \in I$.

Seja B o espaço quociente de $D \times I$ após as identificações acima descritas.

B é uma 3-bola que pode ser decomposta em três 3-bolas B_+, B_0 e B_- , que correspondem ao produto cartesiano de D com $[0, 1/4], [1/4, 1/2] \cup [3/4, 1]$ e $[1/2, 3/4]$, respectivamente. Os k pontos em B correspondentes a $(a_i, 0) \in D \times I$ serão denotados por p_i , os pontos $(a_i, 3/4), (a_i, 1/4)$ e $(a_i, 1/2)$ serão denotados por $p'_i, \tilde{p}_i$ e $\tilde{p}'_i$, respectivamente.

$B_0 \cap B_+ \subset B$ têm $2k$ pontos distinguidos.

Podemos considerar um enlaçamento de $2k$ intervalos β como um mergulho (próprio) $\beta : 2\underline{k} \times I \rightarrow B_0$, tal que para todo $i \in \underline{k}$, $\beta(i, 0) = p_i, \beta(i, 1) = p'_i, \beta(k+i, 0) = \tilde{p}_{k-i+1}$ e $\beta(k+i, 1) = \tilde{p}'_{k-i+1}$.

Um enlaçamento de k intervalos f pode ser considerado como um mergulho

$f : \underline{k} \times I \rightarrow B_-$ tal que $f(i, 0) = p'_i$ e $f(i, 1) = \tilde{p}'_i, \forall i \in \underline{k}$. A “união” de f e β resulta num mergulho $\underline{k} \times I \rightarrow B_0 \cup B_-$.

Vamos identificar $B_0 \cup B_-$ com B_- , empurrando B_0 em uma vizinhança colar de B_- . Como resultado teremos um enlaçamento de k intervalos $\underline{k} \times I \rightarrow B_-$, que chamaremos de $\beta \cdot f$. Observemos que devemos inverter a orientação de $\beta(i \times I)$, para $i \in k + 1, \dots, 2k$.

Seja $j'_0 : \underline{k} \times I \rightarrow B_+$ o enlaçamento trivial de k intervalos, onde $j'_0(i, 0) = \tilde{p}_i$ e $j'_0(i, 1) = p_i$. Consideremos agora a “união” de j'_0 e $\beta \cdot f$.

No caso particular em que β é o enlaçamento de $2k$ intervalos trivial, esta “união” é

um enlaçamento de k componentes chamado o fecho do enlaçamento de k intervalos f que denotaremos por $\hat{f}$.

Em $D \times I \times I$ podemos identificar $(z, 0, s)$ com $(z, 1, s)$, $\forall z \in D, \forall s \in I$. Para todo $t, s \in I$ identificaremos (z, t, s) com $(z, 1/4 - t(\text{mod } 1), s)$, $\forall z = (x, y) \in \partial D$ tal que $x \geq 0$ e $y \leq 0$. Com estas identificações obtemos um espaço homeomorfo a $B \times I$.

Se f e g são enlaçamentos cobordantes, podemos considerar o cobordismo entre eles como um mergulho $F : \underline{k} \times I \times I \rightarrow B_- \times I$ tal que $F|_{\underline{k} \times I \times \{0\}} = f$, $F|_{\underline{k} \times I \times \{1\}} = g$ e, $F(i, 0, s) = (p'_i, s)$ e $F(i, 1, s) = (\tilde{p}'_i, s)$, $\forall i \in \underline{k}, \forall s \in I$. Da mesma forma, se β e γ são cobordantes então podemos considerar um cobordismo entre eles como um mergulho $\Gamma : \underline{2k} \times I \times I \rightarrow B_0 \times I$ tal que $\Gamma|_{\underline{2k} \times I \times \{0\}} = \beta$, $\Gamma|_{\underline{2k} \times I \times \{1\}} = \gamma$ e para todo $i \in \underline{k}, s \in I$ temos que $\Gamma(i, 0, s) = (p_i, s)$, $\Gamma(i, 1, s) = (p'_i, s)$, $\Gamma(k+i, 0, s) = (\tilde{p}_{k-i+1}, s)$ e $\Gamma(k+1, 1, s) = (\tilde{p}'_{k-i+1}, s)$.

A “união” de F e Γ , após empurrarmos $(B_0 \times I) \cup (B_- \times I)$ em $B_- \times I$, nos fornece um mergulho $\Gamma \cdot F : \underline{k} \times I \times I \rightarrow B_- \times I$, que, claramente, é um cobordismo entre $\beta \cdot f$ e $\gamma \cdot g$.

De acordo com essas considerações, é possível definir uma ação do grupo $C_{1,2k}$ no grupo $C_{1,k}$, chamada **Ação de Habbeger Lin**.

4.2 Cobordismo d -Baseado

Definição 4.1 *Seja L um enlaçamento orientado e ordenado e D o disco unitário $\{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 1\}$ com a orientação usual. Se $j : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um mergulho linear por partes tal que para todo $i \in \underline{k}$ a intersecção de $j(D)$ com a i -ésima componente de L é $j(a_i)$ e todos os números de intersecções são 1, então dizemos que $j(D)$ é uma d -base para L e que $(L, j(D))$ é um **enlaçamento d -baseado**.*

Definição 4.2 *Dados L e L' dois enlaçamentos cobordantes com k componentes e C um cobordismo entre eles, sejam $j(D)$ e $j'(D)$ d -bases para L e L' , respectivamente. Consideremos um mergulho $J : D \times I \rightarrow S^3 \times I$ tal que $J(D \times \{t\}) \subseteq S^3 \times I$ e $J(D \times \{t\}) \cap C = \{J(a_i, t) / i \in \underline{k}\}$, $J(D \times \{0\}) = j(D)$, $J(D \times \{1\}) = j'(D)$, $\forall t \in I$. Dizemos que $J(D \times I)$ é uma d -base para C .*

O par $(C, J(D \times I))$ é chamado um **Cobordismo d -baseado** entre os enlaçamentos d -baseados $(L, j(D))$ e $(L', j'(D))$.

Dado um enlaçamento de k intervalos, existe uma d -base usual $j_0(D) = D_{1-\epsilon} \times \{1/8\}$ dada por $j_0(z) = ((1-\epsilon)z, 1/8)$, para seu fecho $\hat{f}$, onde ϵ é suficientemente pequeno para que o disco $D_{1-\epsilon}$ de raio $1-\epsilon$ intercepte cada fio do enlaçamento $\hat{f}$.

Da mesma forma podemos definir uma d -base usual $J_0(D \times I) = D_{1-\epsilon} \times \{1/8\} \times$

I para o fecho $\widehat{C}$ do cobordismo C entre dois enlaçamentos de intervalos, onde $J_o : D \times I \rightarrow D_{1-\epsilon} \times \{1/8\} \times I \subseteq B \times I \subseteq S^3 \times I$ é o mergulho $J_o(z, t) = ((1 - \epsilon)z, 1/8, t), \forall z \in D, \forall t \in I$. Existe uma bijeção φ que associa a cada classe de isotopia de enlaçamentos de intervalos uma classe de isotopia de enlaçamentos d -baseados, dada por $\varphi(f) = (\hat{f}, j_0(D))$. φ é chamada de **bijeção de Habegger-Lin** (ver [Habegger-lin]).

Proposição 4.3 *Existe uma bijeção $\tilde{\varphi}$ entre o grupo $C_{1,k}$ e o conjunto das classes de cobordismos d -baseados de enlaçamentos d -baseados com k componentes.*

Dem.: Suponhamos que f e g são enlaçamentos cobordantes. Como já vimos, $(\hat{f}, j_0(D))$ e $(\hat{g}, j_0(D))$ são d -baseado cobordantes. Seja $\tilde{\varphi}(f)$ a classe de cobordismo d -baseado de $(\hat{f}, j_0(D))$. Observemos que $\tilde{\varphi}$ é sobrejetora, visto que φ é bijetora.

Vamos mostrar a injetividade de $\tilde{\varphi}$. Dados dois enlaçamentos d -baseados cobordantes $(L, j(D))$ e $(L', j'(D))$, sejam $f, g \in C_k$ tais que $\varphi(f) = (L, j(D))$ e $\varphi(g) = (L', j'(D))$. Usando o Teorema da Extensão de Isotopia, existe um enlaçamento L'' isotópico a L' tal que $(L', j'(D))$ e $(L'', j(D))$ são d -baseado cobordantes. Seja N uma pequena vizinhança produto da d -base do cobordismo F entre L e L' de tal forma que $F \cap N$ seja o cobordismo trivial entre o enlaçamento de intervalos trivial j_0 e ele mesmo. Podemos aplicar uma isotopia em $B \times I = B_+ \times I \cup B_0 \times I \cup B_- \times I$ tal que $F \cap N$ é aplicado em $B_+ \times I \cup B_0 \times I$. Assim $F - F \cap N \subset B_- \times I$, o que nos dá um cobordismo entre f e g , como queríamos.

Portanto, $\tilde{\varphi}$ é uma bijeção.

□

Definição 4.4 *Sejam L_1, L_2 enlaçamentos orientados que não se interceptam e $b : I \times I \rightarrow S^3$ um mergulho próprio. Se $b(I \times I) \cap L_1 = b(I \times 0), b(I \times I) \cap L_2 = b(I \times 1)$ e se as orientações de L_1 e L_2 induzem a mesma orientação em $b(I \times I)$, definimos*

$L_1 +_b L_2$ como sendo o enlaçamento $[(L_1 \cup L_2) - b(I \times \partial I)] \cup b(\partial I \times I)$, com orientação induzida de $L_1 \cup L_2$.

Definição 4.5 *Seja $\bigcup_{i=1}^k D_i$ a união disjunta de k cópias do disco D . Uma aplicação ribbon é uma aplicação linear por partes $g : \bigcup_{i=1}^n D_i \rightarrow S^3$ sem pontos triplos, para a qual existe um conjunto finito J tal que o conjunto dos pontos duplos consiste de arcos mutuamente disjuntos em $\bigcup_{i=1}^k D_i$ que podem ser escritos como pares $(I_j, I_{j'})$, com $j \in J$ tal que $g(I_j) = g(I_{j'})$, com I_j mergulhado propriamente em $\bigcup_{i=1}^k D_i$ e $I_{j'} \subset \text{int} \left(\bigcup_{i=1}^k D_i \right)$, $\forall j \in J$. As auto-interseções de $g \left(\bigcup_{i=1}^k D_i \right)$ em $g(I_j) = g(I_{j'})$ são transversas.*

Definição 4.6 *Sejam L_1 e L_2 enlaçamentos orientados. Escrevemos $L_1 \xrightarrow{r} L_2$ se existe, para algum natural k , uma aplicação ribbon $g : \bigcup_{i=1}^k D_i \rightarrow S^3 - L_1 \subset S^3$ e mergulhos próprios $b_i : I \times I \rightarrow S^3$ tais que $L_2 = (\dots((L_1 +_{b_1} \partial g(D_1)) +_{b_2} \partial g(D_2)) \dots +_{b_k} \partial g(D_k))$.*

O seguinte teorema pode ser encontrado em [Tristram].

Teorema 4.7 Tristram *Sejam L_1, L_2 enlaçamentos orientados. L_1 e L_2 são cobordantes se, e somente se, existe uma seqüência de enlaçamentos orientados $L^1, \dots, L^m$ tal que $L^1 = L_1, L^m = L_2$ e para $j = 1, \dots, m-1$, $L^j \xrightarrow{r} L^{j+1}$ ou $L^{j+1} \xrightarrow{r} L^j$.*

Proposição 4.8 *Sejam $(L_1, j_1(D))$ e $(L_2, j_2(D))$ enlaçamentos orientados d -baseados. Se L_1 e L_2 são cobordantes então existem um enlaçamento orientado L e d -bases $j(D)$ e $j'(D)$ tais que $(L, j(D))$ é d -baseado cobordante a $(L_1, j_1(D))$ e $(L, j'(D))$ é d -baseado cobordante a $(L_2, j_2(D))$.*

Dem.: Um cobordismo C entre dois enlaçamentos orientados L_1 e L_2 é uma isotopia se $C \cap (S^3 \times \{1/2\})$ é um enlaçamento orientado tal que existem seqüências de enlaçamentos orientados $L_1 = L_1^1, \dots, L_1^{m_1} = L$ e $L_2 = L_2^1, \dots, L_2^{m_2} = L$ com $L_i^j \xrightarrow{r} L_i^{j+1}$, para $i = 1, 2$ e $j = 1, \dots, m_i - 1$ (ver [Gordon]). É suficiente considerar

o caso $L_1 \xrightarrow{r} L$, isto é $L = (\dots((L_1 +_{b_1} \partial g(D_1)) +_{b_2} \partial g(D_2)) \dots +_{b_n} \partial g(D_n))$, para alguma aplicação ribbon $g : \bigcup_{i=1}^n D_i \rightarrow S^3 - L_1$ e mergulhos próprios $b_i : I \times I \rightarrow S^3$.

Por uma isotopia, é possível obter uma outra d -base $j^1(D)$ e um vizinhança B_1 de $g(D_n) \cup b_n(I \times I)$ tal que $j^1(D) \cap B_1 = \emptyset$.

Repetindo este processo, obtemos para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ uma d -base $j^i(D)$ com $j^n(D) = j(D)$ e uma vizinhança B_i de $g(D_{n-i+1}) \cup b_{n-i+1}(I \times I)$ tal que $j^i(D) \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_i) = \emptyset$.

Notemos que $(L_1, j(D))$ é d -baseado cobordante a $(L_1, j_1(D))$ e que existe um cobordismo entre L_1 e L_2 que é trivial fora de $(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) \times I$, assim temos um cobordismo entre $(L_1, j(D))$ e $(L, j(D))$.

Se trocarmos $(L_1, j_1(D))$ por $(L_2, j_2(D))$ e usarmos os mesmos argumentos obteremos $j'(D)$. $\square$

4.3 O Teorema de Habegger-Lin

Seja $S_k(1)$ o estabilizador de $1 \in C_{1,k}$ para a Ação de Habegger-Lin do grupo $C_{1,2k}$ no conjunto $C_{1,k}$, isto é, $S_k(1) = \{\beta \in C_{1,2k} : \beta \cdot 1 = 1\}$. Habegger e Lin enunciaram em [Habegger-Lin 2] o seguinte teorema:

Teorema 4.9 *Sejam f_1 e f_2 enlaçamentos de intervalos. Então $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2$ são enlaçamentos ordenados e orientados cobordantes se, e somente se, existe $\beta \in S_k(1)$ tal que f_1 e $\beta \cdot f_2$ são enlaçamentos de intervalos cobordantes.*

Dem.: Suponhamos que f_1 e $\beta \cdot f_2$ são enlaçamentos de intervalos cobordantes, onde $\beta \in S_k(1)$. Existe uma involução da bola $B = B_+ \cup B_0 \cup B_-$ que aplica B_- em B_+ e mantém $D \times 3/8 \cup D \times 7/8$ fixo. A “união” da identidade em B_+ , de β em B_0 e de f_2 em B_- é $\widehat{\beta \cdot f_2}$. Aplicando a involução descrita acima, a imagem desta união será a união de f_2^{-1} em B_+ e $\beta^{-1} \cdot 1$, que por sua vez é cobordante a união de f_2^{-1} em B_+ e a identidade em $B_0 \cup B_-$, visto que $\beta^{-1} \in S_k(1)$. Por outra involução da bola B obtemos $1 \cdot f_2$, isto é, $\hat{f}_2$. Assim, $\widehat{\beta \cdot f_2}$ é cobordante a $\hat{f}_2$. Por hipótese f_1 e $\beta \cdot f_2$ são cobordantes, portanto $\hat{f}_1$ é cobordante a $\hat{f}_2$.

Reciprocamente, Suponhamos que $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2$ são cobordantes e consideremos os enlaçamentos d -baseados $(\hat{f}_1, j_0(D))$ e $(\hat{f}_2, j_0(D))$, onde $j_0(D)$ é a d -base usual. Pela proposição 4.8, existe um enlaçamento L e d -bases $j_1(D)$ e $j_2(D)$ tal que $(L, j_1(D))$ é d -baseado cobordante a $(\hat{f}_1, j_0(D))$ e $(L, j_2(D))$ é d -baseado cobordante a $(\hat{f}_2, j_0(D))$.

Pela bijeção de Habegger-Lin, existe um enlaçamento de intervalos h correspondendo a $(L, j_2(D))$, ou seja, $(\hat{h}, j_0(D))$ é isotópico a $(L, j_2(D))$.

Vamos supor que $\hat{h}$ está mergulhado em B de tal forma que a intersecção deste enlaçamento de intervalos com $B_+ \cup B_0$ é o enlaçamento de intervalos trivial. A menos de isotopia $j_1(D)$ é uma d -base para este enlaçamento.

Se $j_1(D)$ intercepta $\hat{h}$ em B_- , nós trocamos, $(\hat{h}, j_1(D))$ por $(\widehat{h h^{-1} h}, j_1(D))$

Por um cobordismo d -baseado.

Por uma rotação de B obtemos uma nova d -base $j_1'(D)$ agora em $B_0 \cup B_+$.

Consideremos uma vizinhança produto de N de $j_1'(D)$ em $B_0 \cup B_+$ de tal forma que $\widehat{hh^{-1}h} \cap N$ é enlaçamento de intervalos trivial.

Por uma isotopia, podemos transformar a vizinhança produto de forma que a intersecção da imagem de $\widehat{hh^{-1}h}$ com B_+ é um enlaçamento de k intervalos trivial.

Assim a intersecção da imagem de $\widehat{hh^{-1}h}$ com B_0 é um enlaçamento de $2k$ intervalos β . E portanto podemos escrever $(\widehat{hh^{-1}h}, j_1'(D))$ como $\beta \cdot h$.

Pela involução da bola B que aplica B_- em B_+ e mantém $(D \times 3/8) \cup (D \times 7/8)$ fixo, podemos ver que $\beta^{-1} \cdot 1$ é cobordante a 1 , e consequentemente $\beta \in S_k(1)$.

Logo $(\hat{h}, j_1(D))$ é d -baseado cobordante a $(\beta \cdot \hat{h}, j_0(D))$, para algum $\beta \in S_k(1)$. Como, $(\hat{h}, j_1(D))$ é d -baseado cobordante a $(\hat{f}_1, j_0(D))$ e $(\hat{h}, j_0(D))$ é d -baseado cobordante a $(\hat{f}_2, j_0(D))$ temos, pela proposição 4.3, que f_1 e $\beta \cdot f_2$ são cobordantes. $\square$

4.4 O grupo $C_{1,2}$

De acordo com a proposição 3.7, duas tranças são cobordantes se, e somente se, elas são isotópicas. Logo podemos considerar o grupo P_n das Tranças Puras como subgrupo de $C_{1,n}$, como P_n não é comutativo para $n \geq 3$, concluímos que $C_{1,n}$ também não é comutativo para $n \geq 3$. $C_{1,1}$ é comutativo pois é claramente isomorfo ao Grupo de Cobordismo de Nós. Resta saber se $C_{1,2}$ é comutativo, pois nada podemos concluir da inclusão $P_2 \subseteq C_{1,2}$, visto que P_2 é comutativo. Nesta secção, estudaremos a comutatividade de $C_{1,2}$.

Seja θ um grafo com dois vértices v_1, v_2 e três arestas e_1, e_2, e_3 cada uma delas unindo v_1 e v_2 . Consideremos a orientação de v_1 para v_2 em cada aresta.

Definição 4.10 *Seja $f : \theta \rightarrow S^3$ um mergulho. A imagem $f(\theta)$ é chamada uma θ -curva.*

Consideremos dois mergulhos $f : \theta \rightarrow S_1^3$ e $g : \theta \rightarrow S_2^3$, onde S_1^3 e S_2^3 são 3-esferas. Removendo pequenas bola centradas em $f(v_2)$ e $g(v_1)$ de S_1^3 e S_2^3 , respectivamente, e identificando os bordos de tal maneira que as imagens da i -ésima aresta fiquem unidas, obtemos a soma conexa de f e g , $f \# g : \theta \rightarrow S^3 = S_1^3 \# S_2^3$.

Taniyama definiu o Grupo das classes de cobordismo dos mergulhos de uma θ em S^3 com a operação soma conexa. Este grupo é chamado Grupo de Cobordismo de θ -curvas e será denotado por Θ (ver [Taniyama]).

Miyazaki provou que o grupo de cobordismo das θ -curvas não é comutativo (ver [Miyazaki]). Segue da proposição abaixo que $C_{1,2}$ não é comutativo.

Proposição 4.11 *Existe uma extensão de grupos*

$$1 \rightarrow P_2 \xrightarrow{j_2} C_{1,2} \xrightarrow{\alpha} \Theta \rightarrow 1$$

Dem.: Dado um enlaçamento $f \in C_2$. Consideremos $D \times I \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq S^3$ e três intervalos I_0, I_1, I_2 mergulhados em S^3 , conforme a figura.

Desta forma obtemos uma θ -curva, logo podemos associar a cada enlaçamento de intervalos f uma θ -curva $\alpha(f)$.

Um cobordismo entre enlaçamentos de intervalos pode ser estendido a um cobordismo entre as respectivas θ -curvas.

Assim a aplicação $\alpha : C_{1,2} \rightarrow \Theta$ está bem definida e é claramente um homomorfismo e notemos que α é sobrejetora:

De fato, dada uma θ -curva podemos, sem mudar a sua classe de cobordismo, deslocar um dos seus vértices ao longo de uma das arestas de tal maneira que no final esta não tenha nós. Esta aresta faz o papel de I_2 .

Dado um enlaçamento $f \in C_{1,2}$ cujo linking number entre seus fios é n , existe uma única trança $b(f) \in P_2$ cujo linking number entre seus fios é também n .

Por Taniyama, a classe de cobordismo de f está no núcleo de α se, e somente se, o fecho de $b(f^{-1}).f$ é cobordante ao enlaçamento trivial (ver [Taniyama]), pela proposição anterior, $\widehat{b(f^{-1}).f}$ é cobordante a 1 se e somente se $b(f^{-1}).f$ é cobordante a 1 em $C_{1,2}$.

Utilizando-se o linking number, vê-se que se f e g são enlaçamentos cobordantes então $b(f^{-1})$ e $b(g^{-1})$ são tranças isotópicas. Assim o cobordismo entre f e g induz

um cobordismo entre $b(f^{-1}).f$ e $b(g^{-1}).g$.

Consideremos a aplicação $\beta : C_{1,2} \rightarrow C_{1,2}$ que associa à classe de cobordismo de f a classe de cobordismo de $b(f^{-1}).f$.

Notemos que P_2 está no centro de $C_{1,2}$, para verificar este fato basta observarmos que σ_1^2 é um gerador de P_2 e que $\sigma_1^2.f = f.\sigma_1^2$, $\forall f \in C_{1,2}$

Como P_2 está no centro de $C_{1,2}$ temos que

$$\beta(fg) = b(g^{-1}f^{-1}).fg = b(g^{-1}).b(f^{-1}).fg = b(f^{-1}).b(g^{-1}).fg = b(f^{-1}).f.b(g^{-1}).g = \beta(f).\beta(g).$$

Logo, a aplicação β é um homomorfismo de grupos.

Do que vimos acima, $\ker \beta = \ker \alpha$. Por outro lado, a classe de cobordismo de f está no núcleo de β se e somente se f for cobordante a $b(f^{-1})^{-1} = b(f)$, isto é, se e somente se $f \in \text{im } j_2$. Logo $\ker \alpha = \ker \beta = \text{im } j_2$.

Portanto, temos uma extensão de grupos

$$1 \rightarrow P_2 \xrightarrow{j_2} C_{1,2} \xrightarrow{\alpha} \Theta \rightarrow 1$$

□

Referências Bibliográficas

- [**Alexander**] J.W.Alexander, A lemma on systems of knotted curves. Porc. Nat. Acad. Science USA 9 (1923), 93-95.
- [**Birman**] J.S.Birman, Braids, Links and Mapping Class Groups. Annals of Mathematics Studies 82, Princeton Univ. Press, 1975.
- [**Bourbaki**] Bourbaki, Algebra I.
- [**Campos**] J.E.P.P.de Campos, Boundary string links, Ph.D Dissertation, Brandeis University (1998).
- [**Campos**] J.E.P.P.de Campos, Boundary string links, Journal of Knot Theory and its Ramifications.
- [**Cohen**] D.E.Cohen, Combinatorial Group Theory: a topological approach.
- [**Gordon**] C.McA.Gordon, Ribbon concordance of knots in the 3-sphere, Math. Ann. 257 (1981), 157-170.
- [**Habegger-Lin**] N.Habegger and X.S.Lin, The classification of links, Journal of the American Mathematical Society, vol. 3, number 2 (April 1990).
- [**Habegger-Lin 2**] N.Habegger and X.S.Lin, On Milnor's Invariants and the Concordance Classification of Links (preprint).
- [**Hansen**] V.L.Hansen, Braids and Coverings, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [**Le Dimet**] J.Y.Le Dimet, Cobordism d'enlacements de disques, Memoire de la Société Mathématique de France, 32, Supplément au Bulletin de la S.M.F., Tome 116, fascicule 2 (1988).
- [**Levine**] J.P.Levine, Link concordance and algebraic closure groups, Comment. Math. Helvetici 64 (1989), 236-255.
- [**Magnus**] W.Magnus, A.Karrass, D.Solitar, Combinatorial Group Theory.
- [**Miyazaki**] Miyazaki, The theta-curve cobordism, Transactions of the American

Mathematical Society, vol. 299, number 2 (February 1987).

[Markov] A.A.Markov, Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe. Recueil Mathematique Moscou - Math. Sb. 1 (1935), 73-78.

[Massey] W.S.Massey, Algebraic Topology an introduction.

[Rofsen] D.Rofsen, Knots and Links, Publish or Perish, Inc., 1990.

[Stallings] Stallings, Homology and central series of groups, Journal of Algebra 2, 170-181, 1965.

[Taniyama] Taniyama, Cobordism of theta-curves in S^3 , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1993.

[Tristram] A.G.Tristram, Some cobordism invariants for links, Proc. Cambridge Philos. Soc. 66 (1969), 251-264.

ERRATA

Na dissertação “Enlaçamentos de Intervalos” a situação descrita pela figura da página 9 é melhor representada por:

E a figura da página 35 fica substituída pela seguinte:

Maiores detalhes sobre as referências bibliográficas são dadas a seguir:

[**Bourbaki**] N. Bourbaki, Elements of Mathematics, Algebra I, Chapters 1-3, Springer-Verlag, 1989.

[**Campos**] J.E.P.P.de Campos, Boundary string links, Journal of Knot Theory and its Ramifications, Vol. 8, no. 7 (1999), 855-878.

[**Cohen**] D.E.Cohen, Combinatorial Group Theory: a topological approach, Cambridge University Press, 1989.

[**Magnus**] W.Magnus, A.Karrass, D.Solitar, Combinatorial Group Theory, Dover Publications inc, 1976.

[**Massey**] W.S.Massey, Algebraic Topology an introduction, Springer-Verlag, 1989.