Renormalização de aplicações unimodais com ordem crítica próxima a $2\mathbb{N}$

Judith Hayde Cruz Torres

Orientador: *Prof. Dr. Daniel Smania Brandão*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

“VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”

Data da Defesa:	12/11/2007
Visto do Orientador:	

USP – São Carlos
Novembro/2007

Renormalização de aplicações unimodais com
ordem crítica próxima a $2\mathbb{N}$

Judith Hayde Cruz Torres

À meus pais, Elsa e Filiberto
com muito carinho.

E aos meus irmãos
Manuel, Marisol, Gilbert, María.

Agradecimentos

Agradeço à Deus por ter sido meu apoio e luz em todo momento ao longo desta caminhada.

Aos meus pais e irmãos que estiveram sempre ao meu lado me incentivando. Sem seu apoio, confiança e amor não seria possível alcançar as minhas conquistas.

Aos meus sobrinhos pelos seus carinhos e alegrias que dão aos meus dias, mesmo à distância.

Ao Professor Dr. Daniel Smania que esteve sempre me orientando. Muito obrigada pela confiança e incentivo recebidos durante toda a minha estada em São Carlos, pelos valiosos ensinamentos, dedicação, acompanhamento e amizade.

Aos professores do ICMC por todos seus ensinamentos. Sou grata a vocês pela dedicação com nós seus alunos.

Às funcionárias do ICMC, pela amizade e atenção dispensada.

Aos meus amigos e colegas do ICMC-USP, com vocês compartilhei muitos momentos de estudo, descontração, alegrias que são inesquecíveis. Obrigada Thiago pela ajuda com o uso do latex, é surpreendente como você sempre tem uma resposta para problemas com o uso deste programa. Em especial, quero agradecer ao Ronny e aos meus amigos Ruth, Walter, Vanessa, Begoña, Eliris, Gloria e Carlos que sempre estiveram presentes, alguns deles na distância, para me ouvir e dar conselhos, não só isso mas também sempre estiveram me alentando e presenteando-me com sua agradável companhia.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

Resumo

Nós estudamos a dinâmica do operador de renormalização atuando no espaço de pares (ϕ, t) , onde ϕ é um difeomorfismo e $t \in [0, 1]$, interpretados como aplicações unimodais $\phi \circ q_t$, onde $q_t(x) = -2t|x|^\alpha + 2t - 1$. Estabelecemos cotas complexas a priori para pares suficientemente renormalizáveis com combinatória limitada e então a utilizamos para mostrar que quando o expoente crítico α está próximo de um número par, o operador de renormalização tem um único ponto fixo, o qual é hiperbólico e possui uma variedade estável de codimensão um que contém todos os pares infinitamente renormalizáveis.

Abstract

We study the dynamics of the renormalization operator acting on the space of pairs (ϕ, t) , where ϕ is a diffeomorphism and $t \in [0, 1]$, interpreted as unimodal maps $\phi \circ q_t$, where $q_t(x) = -2t|x|^\alpha + 2t - 1$. We prove the so called complex bounds for sufficiently renormalizable pairs with bounded combinatorics. This allows us to show that if the critical exponent α is close to an even number then the renormalization operator has a unique fixed point. Furthermore this fixed point is hyperbolic and its codimension one stable manifold contains all infinitely renormalizable pairs.

Sumário

Introdução	3
1 Renormalização Unimodal	9
1.1 Noções usuais da renormalização unimodal	9
1.2 Decomposições	14
1.3 Aplicações univalentes	15
1.4 Cotas reais e complexas a priori	20
2 Operador Composição	33
2.1 Espaços de Banach e seus espaços tangentes.	34
2.2 O operador L	36
2.3 O diferencial de L e suas propriedades	38
3 Operadores de Renormalização Complexos	41
3.1 Operador complexo $\mathcal{R}_\alpha$	41
3.2 Operador complexo $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$	43
3.3 Relação entre os operadores complexos $\mathcal{R}_{2n}$ e $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$	48
4 Hiperbolicidade para $\alpha \sim 2n$	53
4.1 Hiperbolicidade do ponto fixo do operador $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$	53
4.2 Hiperbolicidade para $\alpha \sim 2n$	54

A Operadores compactos	65
A.1 Espectro de um operador compacto	65
B Resultados de análise complexa	67
B.1 Aplicações holomorfas	67
B.2 Aplicações quaseconformes	68
B.3 Aplicações do tipo polinomial	69

Introdução

Investigando o fenômeno da universalidade de propriedades geométricas de certos sistemas dinâmicos, Feigenbaum e P. Coullet & C. Tresser independentemente definiram o operador de renormalização de duplicação de período sobre um espaço apropriado de aplicações unimodais. Importantes contribuições na teoria de renormalização foram motivadas pela conjectura de que o operador de duplicação de período, atuando no espaço de aplicações unimodais, tem um único ponto fixo, o qual é hiperbólico com direção instável uni-dimensional.

O primeiro passo para provar a existência de um ponto fixo para o operador de duplicação de período foi devido a Lanford em 1981. Ele mostrou a existência de ponto fixo para o operador de renormalização com expoente crítico $\alpha = 2$ por meio de uma prova assistida por computador. Sullivan [6] estabeleceu a existência dos conjuntos invariantes do tipo ferradura para o operador renormalização com expoente crítico par, $\alpha = 2n$, onde $n \in \mathbb{N}$, e que estas ferraduras atraem todas as transformações unimodais infinitamente renormalizáveis com combinatória limitada, fazendo uso da dinâmica complexa das aplicações do tipo polinomial no sentido de Douady e Hubbard. Sua combinação de análise real e complexa abriu novas direções na teoria dos sistemas dinâmicos. Posteriormente C. McMullen [3] provou a convergência exponencial da renormalização com combinatória limitada. Finalmente Lyubich [16] provou a conjectura de Feigenbaum-Coullet-Tresser afirmando que o ponto fixo do operador de duplicação de período é hiperbólico, com variedade estável de codimensão um.

Primeiramente faremos uma introdução rápida da definição do operador renormalização $\mathcal{R}$. Fixemos $\alpha > 1$, o chamado expoente crítico. A família unimodal “padrão”

$q_t : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, com $t \in [0, 1]$ e expoente crítico α , é definida por

$$q_t(x) = -2t|x|^\alpha + 2t - 1.$$

Seja $\text{Diff}_+^1([-1, 1])$ o conjunto de difeomorfismos do intervalo $[-1, 1]$, que preservam orientação. Consideremos

$$\mathcal{U} = \text{Diff}_+^1([-1, 1]) \times [0, 1],$$

onde um elemento $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ será interpretado como uma aplicação unimodal

$$f = \phi \circ q_t : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1],$$

com expoente crítico $\alpha > 1$. A aplicação unimodal $f = \phi \circ q_t$ é dita renormalizável se existe um ponto periódico repulsor $p \in (-1, 1)$, tal que a aplicação de primeiro retorno para o intervalo $I_q = [-|p|, |p|]$ é da forma $f^q : I_q \rightarrow I_q$ com $f^q(p) = p$ e $q \geq 2$. A aplicação de primeiro retorno para I_q será, depois de um re-escalamento, uma aplicação unimodal definida no intervalo $[-1, 1]$. O período da renormalização é o menor inteiro q satisfazendo as propriedades acima mencionadas. Assim definimos o operador de renormalização $\mathcal{R}$ tal que para a aplicação unimodal renormalizável $f = \phi \circ q_t$ temos que $\mathcal{R}f$ é uma aplicação unimodal definida como

$$\mathcal{R}f(z) = \frac{1}{p}f^q(pz),$$

$z \in [-1, 1]$. A aplicação unimodal $\mathcal{R}f$ é chamada de renormalização de f .

Existem pelo menos duas dificuldades no estudo do operador renormalização $\mathcal{R}$ quando α não é um número par:

- Não podemos fazer uso de métodos da dinâmica complexa para estudar este operador.
- O operador $\mathcal{R}$ não é diferenciável.

Tendo em vista esses problemas, neste trabalho definimos um novo operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}$ num espaço apropriado de pares (ϕ, t) , onde $\phi \circ q_t$ é uma aplicação unimodal. Um par $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ é renormalizável com ordem crítica α se e somente se a aplicação unimodal $f = \phi \circ q_t$ tem um ciclo, isto é uma coleção $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_q\}$ de intervalos fechados em $[-1, 1]$ satisfazendo:

1. existe um ponto periódico repulsor $p \in (-1, 1)$ com $I_q = [-|p|, |p|]$.
2. $f : I_i \rightarrow I_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, q-1$, é aplicação monótona e sobrejetiva,
3. $f(I_q) \subset I_1$ com $f(p) \in \partial I_1$, o bordo de I_1 ,
4. os interiores de $I_1, I_2, \dots, I_q$ são dois a dois disjuntos.

Os aspectos combinatoriais de uma renormalização são descritos por *permutações unimodais*. Dotando um ciclo $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_q\}$ com a relação de ordem $\prec$ definida por: $I_j \prec I_i$, $j \neq i$ se e somente se $\inf I_j < \inf I_i$. A aplicação $\sigma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ tal que

$$\sigma(I_i) = I_{i+1 \bmod q},$$

é uma permutação. Uma permutação sobre o conjunto ordenado $\mathcal{I}$ é permutação unimodal se esta satisfaz a seguinte condição. Mergulhando $\mathcal{I}$ na reta real preservando a ordem $\prec$, o gráfico da permutação σ sobre $\mathbb{R}^2$ pode ser estendido, pela união dos pontos consecutivos do gráfico de σ por segmentos de retas, para o gráfico que corresponde a uma aplicação unimodal.

Seja σ uma permutação unimodal e

$$\mathcal{U}_\sigma = \{(\phi, t) \in \mathcal{U} \mid f = \phi \circ q_t \text{ tem um ciclo } \mathcal{I} \text{ com } \sigma(\mathcal{I}) = \sigma\}.$$

Seja $I \subset [-1, 1]$ um intervalo orientado e consideremos o operador zoom

$$Z_I : \text{Diff}_+^1([-1, 1]) \rightarrow \text{Diff}_+^1([-1, 1]),$$

o qual faz corresponder ao difeomorfismo $\phi : I \rightarrow \phi(I)$ o difeomorfismo $Z_I(\phi)$, obtido através da normalização do domínio I e imagem $\phi(I)$ para o intervalo $[-1, 1]$ via transformações afins. Os intervalos I e $\phi(I)$ tem a mesma orientação. Seja $(\phi, t) \in \mathcal{U}_\sigma$. Definimos o difeomorfismo que preserva orientação $\phi_0 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, dado por

$$\phi_0 = Z_{\phi^{-1}(I_1)}(\phi).$$

Aqui $I_0 = I_q$. Por outro lado para cada $I_i \in \mathcal{I}$, $i \neq 0$, definimos os difeomorfismos, que preservam orientação $q_i : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ e $\phi_i : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ dados por

$$q_i = Z_{I_i}(q_t) \quad \text{e} \quad \phi_i = Z_{q_t(I_i)}(\phi),$$

donde $q_t(I_i)$ e I_{i+1} são orientados na mesma direção, quer dizer a orientação $o(I_{i+1})$ definida pelo ciclo $\mathcal{I}$. Além disso, seja

$$t_1 = \frac{|q_t(I_q)|}{|\phi^{-1}(I_1)|}.$$

Assim podemos definir o novo operador renormalização

$$\tilde{\mathcal{R}}_\sigma : U_\sigma \rightarrow U$$

por

$$\tilde{\mathcal{R}}_\sigma(\phi, t) = ((\phi_{q-1} \circ q_{q-1}) \circ \cdots \circ (\phi_2 \circ q_2) \circ (\phi_1 \circ q_1) \circ \phi_0, t_1).$$

Observe que para cada σ existe uma única fatorização maximal $\sigma = \langle \sigma_n, \dots, \sigma_2, \sigma_1 \rangle$ tal que

$$\tilde{\mathcal{R}}_\sigma = \tilde{\mathcal{R}}_{\sigma_n} \circ \cdots \circ \tilde{\mathcal{R}}_{\sigma_2} \circ \tilde{\mathcal{R}}_{\sigma_1}.$$

Uma permutação unimodal σ é chamada de *prima* se e somente se $\sigma = \langle \sigma \rangle$. Fazendo uso das permutações unimodais primas obtemos uma partição do conjunto de pares renormalizáveis em $\mathcal{U}$ e assim o operador de renormalização pode ser definido como

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha : \{ \text{pares renormalizáveis} \} = \bigcup_{\sigma \text{ primo}} \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U},$$

donde $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha | \mathcal{U}_\sigma = \tilde{\mathcal{R}}_\sigma$.

Marco Martens [17] provou a existência de pontos fixos do operador de renormalização $\mathcal{R}_\alpha$, de qualquer tipo combinatorial σ , agindo no espaço de aplicações unimodais suaves com expoente crítico $\alpha > 1$. Para este fim ele introduziu o chamado *método de decomposição*.

Uma das principais ferramentas no desenvolvimento do presente trabalho são as chamadas “cotas complexas a priori” (*complex bounds*): esta consiste em achar um domínio

complexo $V \supset [-1, 1]$ tal que para n suficientemente grande a primeira componente de

$$\tilde{\mathcal{R}}(\phi, t) = ((\phi_{q_n-1}^n \circ q_{q_n-1}^n) \circ \dots \circ (\phi_2^n \circ q_2^n) \circ (\phi_1^n \circ q_1^n) \circ \phi_0^n, t_n)$$

é bem definida e univalente em V . Aqui obtemos *cotas complexas* estudando a *decomposição* de difeomorfismos da primeira componente do novo operador renormalização. Nos fazemos uso de cotas reais (*real bounds*) para obter controle sobre a geometria dos ciclos de aplicações N -vezes renormalizáveis, para N suficientemente grande, de combinatória limitada por uma constante $B > 0$, e também fazemos uso de algumas ferramentas de análise complexa. Como consequência deste resultado temos que para cada *par unimodal* infinitamente renormalizável (ϕ, t) com combinatória limitada por $B > 0$, a sequência de aplicações formadas pelas primeiras coordenadas dos pares $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^n(\phi, t)$, $n \geq 1$, forma uma família pré-compacta de aplicações sobre qualquer sub-domínio compacto de V (veja Corolário 1.20).

A vantagem de lidar com o novo operador renormalização é que, devido à propriedade de *cotas complexas*, $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ é um operador analítico complexo compacto e $\alpha \mapsto \tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ é uma família de operadores C^ω (veja a Proposição 3.4). Tudo isto nos permite usar métodos perturbativos para concluir que para α próximo a um número par existe um ponto fixo hiperbólico para $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$.

Para $\alpha = 2n$, usaremos os resultados obtidos por Martens, McMullen, Lyubich and E. de Faria, W. de Melo and Pinto para mostrar que o operador $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$ tem um único ponto fixo o qual é hiperbólico. Isto é obtido introduzindo (Capítulo 2) o operador analítico complexo chamado o *operador composição*

$$L : (\phi, t) \rightarrow \phi \circ q_t.$$

O *operador composição* L relaciona a dinâmica do operador renormalização $\mathcal{R}_{2n}$ com o novo operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$. De fato

$$\mathcal{R}_{2n} \circ L = L \circ \tilde{\mathcal{R}}_{2n}.$$

O operador L não é inversível, porém veremos que ele possui várias propriedades: injetividade, compacidade, e sua derivada $\mathcal{D}L$ tem imagem densa. Tais propriedades nos

permitirão concluir que o espectro do ponto fixo (ϕ^*, t^*) de $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$ coincide como o espectro do ponto fixo $\phi^* \circ q_{t^*}$ de $\mathcal{R}_{2n}$.

No Capítulo 4 apresentaremos resultados de unicidade, hiperbolicidade e universalidade para pontos fixos do operador de renormalização quando consideramos o expoente crítico $\alpha \sim 2n$. Edson de Faria, W. de Melo and A. Pinto [8], com a ajuda de cotas reais e complexas a priori de Sullivan [6] e o resultado de hiperbolicidade de Lyubich [16] (veja também [5]), provaram a hiperbolicidade de algum iterado do operador renormalização $\mathcal{R}_{2n}$ agindo no espaço $\mathcal{U}_{D_{\varepsilon/2}}$ de aplicações holomorfas f no domínio complexo $D_{\varepsilon/2}$, e contínuos na fronteira, da forma $f = \psi(x^2)$ numa vizinhança de $[-1, 1]$, com $f(-1) = f(1) = -1$. Mais precisamente, o Teorema 2.4 em [8] garante que existe um conjunto aberto O , contido no espaço de Banach $\mathcal{U}_{D_{\varepsilon/2}}$, onde $\varepsilon > 0$, e N positivo com a seguinte propriedade: o operador analítico real $\mathcal{R}_{2n}^N : O \rightarrow \mathcal{U}_{D_{\varepsilon/2}}$ tem ponto fixo hiperbólico $f^* = \phi^* \circ q_{t^*} \in O$ com variedade estável de codimensão um. Em outras palavras a derivada do operador de renormalização $\mathcal{DR}^N(\phi^* \circ q_{t^*})$, um operador linear e compacto, tem espectro com um único autovalor simples fora do disco unitário e os outros autovalores estão no interior do disco unitário. Fazendo uso do *operador composição* L obtemos a hiperbolicidade do ponto fixo (ϕ^*, t^*) do operador renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$, com variedade estável de codimensão um.

Na Seção 4.2, para α suficientemente próximo de $2n$, proporcionamos as seguintes respostas positivas para as questões que motivaram nosso trabalho:

- *Unicidade do ponto fixo.* O operador renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ tem um único ponto fixo unimodal $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ (Teorema 4.8).
- *Hiperbolicidade do ponto fixo.* O ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ é hiperbólico, com variedade estável de codimensão um. Além disso $\alpha \rightarrow (\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ é uma função analítica real (Teorema 4.6).
- *Universalidade do ponto fixo.* Se um par unimodal (ϕ, t) é infinitamente renormalizável com ordem crítica α então ele pertence a variedade estável do ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ de $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ (Teorema 4.15).

Capítulo 1

Renormalização Unimodal

Nas Seções 1.1 e 1.2 apresentamos noções usuais dos operadores de *renormalização* $\mathcal{R}$ e $\tilde{\mathcal{R}}$. Nós seguimos as definições e notações para o operador $\mathcal{R}$ de A. Avila, M. Martens e W. de Melo [1]. Usamos a *decomposição* de M. Martens [17] para definir o novo operador de *renormalização* $\tilde{\mathcal{R}}$. Na ultima seção apresentamos a *cota real a priori* para obter controle sobre a geometria dos *ciclos dos pares* N -vezes *renormalizáveis*, para N suficientemente grande, com *combinatória limitada* por uma constante $B > 0$. Também usamos as ferramentas de análise complexa da Seção 1.3 para apresentar o primeiro dos resultados importantes deste trabalho, as *cotas complexas a priori*.

1.1 Noções usuais da renormalização unimodal

Fixemos $\alpha > 1$, o expoente crítico. A família unimodal “*padrão*” $q_t : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, com $t \in [0, 1]$ e expoente α , é definida por

$$q_t(x) = -2t|x|^\alpha + 2t - 1.$$

O parâmetro t determina o máximo $q_t(0) = 2t - 1$. Seja $\text{Diff}_+^1([-1, 1])$ o conjunto de difeomorfismos C^1 que preservam orientação do intervalo $[-1, 1]$. Este é um subconjunto

aberto do espaço de Banach $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ das aplicações C^1 dotadas com a norma do supremo

$$|f| = \sup_{x \in [-1, 1]} \{|f(x)|, |Df(x)|\}.$$

Considere

$$\mathcal{U} = \text{Diff}_+^1([-1, 1]) \times [0, 1],$$

onde um elemento $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ devera ser interpretado como a aplicação unimodal

$$f = \phi \circ q_t : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1],$$

com expoente crítico $\alpha > 1$. O difeomorfismo ϕ é chamado a parte difeomorfa da aplicação unimodal f . A métrica sobre $\mathcal{U}$ é o produto da métrica induzida pela norma do supremo sobre $\text{Diff}_+^1([-1, 1])$ e a métrica do intervalo.

Definição 1.1 *Uma coleção $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_q\}$ de intervalos fechados em $[-1, 1]$ é chamada de ciclo para a aplicação unimodal f se tem as seguintes propriedades*

1. *Existe um ponto periódico repulsor $p \in (-1, 1)$ com $I_q = [-|p|, |p|]$.*
2. *$f : I_i \rightarrow I_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, q-1$, é aplicação monótona e sobrejetiva.*
3. *$f(I_q) \subset I_1$ com $f(p) \in \partial I_1$, o bordo de I_1 .*
4. *Os interiores de $I_1, I_2, \dots, I_q$ são dois a dois disjuntos.*

Definição 1.2 *Considere uma coleção $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_q\}$ de intervalos fechados em $[-1, 1]$ o qual é dotado com a relação de ordem $\prec$ definida por:*

$$I_j \prec I_i, \quad j \neq i, \quad \text{se e somente se } \inf I_j < \inf I_i.$$

Dizemos que uma aplicação $\sigma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ tal que

$$\sigma(I_i) = I_{i+1} \text{ mod } q,$$

é uma permutação. Chamamos de permutação unimodal σ com respeito á relação de ordem $\prec$ se esta satisfaz a seguinte condição. Mergulhando $\mathcal{I}$ na reta real preservando a

Figura 1.1: Permutação unimodal de quatro elementos.

ordem $\prec$, o gráfico da permutação σ sobre $\mathbb{R}^2$ pode ser estendido, pela união dos pontos consecutivos do gráfico de σ por segmentos de retas, para o gráfico que corresponde a uma aplicação unimodal.

Exemplo 1.3 A figura 1.1 corresponde ao gráfico estendido de uma permutação unimodal σ definida sobre o ciclo $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ de uma aplicação unimodal f , onde os intervalos fechados que formam o ciclo estão ordenados como $I_2 \prec I_4 \prec I_3 \prec I_1$.

Como consequência direta da definição do ciclo $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_q\}$ temos

- $\mathcal{I}$ herda um ordem de $[-1, 1]$,

- a aplicação

$$\sigma = \sigma(\mathcal{I}) : I_i \mapsto I_{i+1} \bmod q$$

sobre $\mathcal{I}$ é uma permutação unimodal,

- a orientação

$$o_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow \{-1, 1\}$$

é definida tal que $o_{\mathcal{I}}(I_i) = 1$ quando $f^i(p)$ é o extremo esquerdo de I_i e $o_{\mathcal{I}}(I_i) = -1$ em outro caso. Assim temos que o ciclo $\mathcal{I}$ é orientado.

Definição 1.4 *Uma aplicação unimodal $f = \phi \circ q_t$ é chamada renormalizável se e somente se tem um ciclo. A aplicação de primeiro retorno para I_q será, depois de um re-escalamento, uma aplicação unimodal. O período da renormalização é o menor q satisfazendo as propriedades acima. Defina o operador de renormalização $\mathcal{R}$ tal que para uma aplicação unimodal renormalizável $f = \phi \circ q_t$ temos que $\mathcal{R}f$ é a aplicação unimodal definida como*

$$\mathcal{R}f(z) = \frac{1}{p}f^q(pz),$$

$z \in [-1, 1]$. A aplicação unimodal $\mathcal{R}f$ é chamada de renormalização de f .

Definição 1.5 *Um par $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ é chamado renormalizável se $f = \phi \circ q_t$ é renormalizável. O período de renormalização de (ϕ, t) é o mesmo de f .*

Seja σ uma permutação unimodal e

$$\mathcal{U}_\sigma = \{(\phi, t) \in \mathcal{U} \mid f = \phi \circ q_t \text{ tem um ciclo } \mathcal{I} \text{ com } \sigma(\mathcal{I}) = \sigma\}.$$

Nos referiremos algumas vezes aos pares em $\mathcal{U}_\sigma$ de σ -renormalizáveis para enfatizar o tipo combinatorial de renormalização em consideração.

Seja $I \subset [-1, 1]$ um intervalo orientado e consideremos o operador zoom

$$Z_I : \text{Diff}_+^1([-1, 1]) \rightarrow \text{Diff}_+^1([-1, 1]),$$

o qual faz corresponder ao difeomorfismo $\phi : I \rightarrow \phi(I)$, o difeomorfismo $Z_I(\phi) : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definido por:

$$Z_I(\phi) = A_{\phi(I)} \circ \phi \circ A_I^{-1},$$

onde a transformação $A_J : J \rightarrow [-1, 1]$ é a única transformação afim, que preserva orientação, que leva o intervalo fechado J para o intervalo $[-1, 1]$. Os intervalos I e $\phi(I)$ tem a mesma orientação.

Seja $(\phi, t) \in \mathcal{U}_\sigma$. Definimos o difeomorfismo que preserva orientação $\phi_0 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ onde

$$\phi_0 = Z_{\phi^{-1}(I_1)}(\phi).$$

Aqui $I_0 = I_q$. Por outro lado para cada $I_i \in \mathcal{I}$, $i \neq 0$, definimos os difeomorfismos, que preservam orientação, $q_i : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ e $\phi_i : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ onde

$$q_i = Z_{I_i}(q_t)$$

e

$$\phi_i = Z_{q_t(I_i)}(\phi),$$

onde $q_t(I_i)$ e I_{i+1} são orientados na mesma direção, isto é a orientação $o(I_{i+1})$ definida pelo ciclo $\mathcal{I}$. Além disso, seja

$$t_1 = \frac{|q_t(I_q)|}{|\phi^{-1}(I_1)|}.$$

Desde que $f(I_q) = \phi \circ q_t(I_q) \subset I_1$, na definição do ciclo $\mathcal{I}$, temos que $t_1 \in [0, 1]$. Isto é equivalente a dizer que

$$q_t(0) \in \phi^{-1}(I_1).$$

Agora podemos passar a definir o operador de renormalização.

Definição 1.6 *O operador de σ -renormalização*

$$\tilde{\mathcal{R}}_\sigma : U_\sigma \rightarrow U$$

é definido por

$$\tilde{\mathcal{R}}_\sigma(\phi, t) = ((\phi_{q-1} \circ q_{q-1}) \circ \dots \circ (\phi_2 \circ q_2) \circ (\phi_1 \circ q_1) \circ \phi_0, t_1). \quad (1.1)$$

O operador de σ -renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_\sigma$ é definido dando lugar ao ciclo $\mathcal{I}$ com $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma$. Para cada σ existe uma única fatorização maximal $\sigma = \langle \sigma_n, \dots, \sigma_2, \sigma_1 \rangle$ tal que

$$\tilde{\mathcal{R}}_\sigma = \tilde{\mathcal{R}}_{\sigma_n} \circ \dots \circ \tilde{\mathcal{R}}_{\sigma_2} \circ \tilde{\mathcal{R}}_{\sigma_1}.$$

Uma permutação unimodal σ é chamada prima se e somente se $\sigma = \langle \sigma \rangle$. Obviamente cada permutação na fatorização maximal é prima. Assim fazendo uso das permutações unimodais primas obtemos uma partição do conjunto de pares renormalizáveis em $\mathcal{U}$.

Definição 1.7 O operador de renormalização denotado por

$$\tilde{\mathcal{R}} : \{\text{pares renormalizáveis}\} = \bigcup_{\sigma \text{ primo}} \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U},$$

é definido como $\tilde{\mathcal{R}}|_{\mathcal{U}_\sigma} = \tilde{\mathcal{R}}_\sigma$.

Definição 1.8 Um par $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ é N -vezes renormalizável se e somente se $\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t)$ é definido para todo $1 \leq n \leq N$.

Fixemos um conjunto finito de permutações primas $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$.

Definição 1.9 Um par N -vezes renormalizável $(\phi, t) \in \mathcal{U}$, para N suficientemente grande, tem combinatória limitada por $B > 0$ se a aplicação unimodal $f = \phi \circ q_t$ tem períodos de renormalização tal que $q_{n+1}/q_n \leq B$, para todo $1 \leq n < N$.

1.2 Decomposições

Nesta seção seguimos basicamente parte da exposição e notação da Seção 2 em [1]. Aqui observamos que a sequência de pares em $\mathcal{U}$, produzida aplicando repetidamente o operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$, é tal que cada um dos pares tem como primeira componente uma decomposição de difeomorfismos e a segunda componente um parâmetro que leva a informação da parte unimodal “padrão” da aplicação unimodal.

Fixemos um par $f = (\phi, t) \in \mathcal{U}$ N -vezes renormalizável e seja $\mathcal{I}^n = \{I_1^n, I_2^n, \dots, I_{q_n}^n\}$ o ciclo correspondente à n -ésima renormalização, $1 \leq n \leq N$. Cada ciclo será particionado em conjuntos

$$\mathcal{I}^n = \bigcup_{k \geq 0}^N L_k^n.$$

Os conjuntos de nível L_k^n , $k \geq 0$, são definidos por indução. Seja

$$\mathcal{I}^0 = L_0^0 = \{[-1, 1]\}.$$

Se $\mathcal{I}^{n+1} \ni I_i^{n+1} \subset I_j^n \in L_k^n$ e $0 \notin I_i^{n+1}$ então $I_i^{n+1} \in L_{k+1}^{n+1}$. Se $0 \in I_i^{n+1}$ então $I_i^{n+1} \in L_0^{n+1}$.

Observe que

$$\mathcal{I}^n = \bigcup_{k \geq 0}^n L_k^n,$$

para $n \leq N$. Primeiro para $I_1^n \in \mathcal{I}^n$, defina o difeomorfismo, que preserva orientação, $\phi_0^n : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ onde

$$\phi_0^n = Z_{\phi^{-1}(I_1^n)}(\phi).$$

Então para cada $I_i^n \in \mathcal{I}^n$, $i \neq 0$, defina os difeomorfismos, que preservam orientação, $q_i^n : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ e $\phi_i^n : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ onde

$$q_i^n = Z_{I_i^n}(q_t)$$

e

$$\phi_i^n = Z_{q_t(I_i^n)}(\phi),$$

onde $q_t(I_i^n)$ e I_{i+1}^n são orientados na mesma direção, isto é com a orientação $o(I_{i+1}^n)$ definida pelo ciclo $\mathcal{I}^n$. Além disso, seja

$$t_n = \frac{|q_t(I_0^n)|}{|\phi^{-1}(I_1^n)|}.$$

As definições acima descrevem a primeira componente de $\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t)$ que consiste da decomposição dos difeomorfismos q_i^n e ϕ_i^n :

$$\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t) = ((\phi_{q_n-1}^n \circ q_{q_n-1}^n) \circ \dots \circ (\phi_2^n \circ q_2^n) \circ (\phi_1^n \circ q_1^n) \circ \phi_0^n, t_n).$$

1.3 Aplicações univalentes

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre a classe de funções univalentes sobre o disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Alguns destes resultados são apresentados sem prova em vista que são bem conhecidos de análise complexa e podem ser encontrados nas referências dadas. Lembremos que um subconjunto não vazio $U \subset \mathbb{C}$ é chamado um domínio se ele é um conjunto aberto e conexo no plano complexo. E uma região é um subconjunto não vazio aberto no plano complexo. Em vista de que cada região

simplesmente conexa propriamente contida no plano complexo é a imagem de $\mathbb{D}$ por uma equivalência conforme, o estudo de funções univalentes sobre $\mathbb{D}$ é equivalente ao estudo de funções univalentes sobre regiões simplesmente conexas arbitrárias.

Os resultados apresentados nesta seção vão nos dar ferramentas que nos permitirão obter “cota complexa a priori” o qual é explicado de maneira detalhada na próxima seção.

Definição 1.10 *Uma função analítica φ é univalente num domínio U se é injetiva.*

Definição 1.11 *A classe $\mathcal{S}$ consiste de todas as funções univalentes φ sobre $\mathbb{D}$ tal que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$*

Seguimos com o Teorema de Distorção de Koebe (1907) o qual proporciona cotas para a derivada de funções univalentes.

Teorema 1.12 ([13]) *Se $\varphi \in \mathcal{S}$, então*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |\varphi'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \text{ se } |z| \leq r.$$

Corolário 1.13 ([9]) *Se $\varphi \in \mathcal{S}$, então*

$$|\arg \varphi'(z)| \leq 2 \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \text{ para } |z| \leq r.$$

Em vista destes resultados podemos estabelecer o seguinte Teorema.

Teorema 1.14 *Para qualquer $K > 1$ e $1 < \epsilon < K/2$ o seguinte se satisfaz: se ϕ é uma aplicação univalente definida na bola $B(0, K)$ satisfazendo $\phi(-1) = -1$, $\phi(1) = 1$ e $\phi([-1, 1]) \subset [-1, 1]$, então*

$$|\phi - \text{id}|_{B(0, \epsilon)} < O\left(\frac{\epsilon}{K}\right).$$

Demonstração. Considere a função

$$\varphi(z) = \frac{\phi(Kz) - \phi(0)}{K\phi'(0)}.$$

Esta função pertence à classe $\mathcal{S}$. De acordo com o Teorema 1.12

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

para $|z| < 1$. Fazendo as substituições apropriadas obtemos

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq \left| \frac{\phi'(Kz)}{\phi'(0)} \right| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

Para $|w| \leq \epsilon$ tome $z = w/K$ assim $|z| \ll 1$ e temos que

$$\left| \frac{\phi'(w)}{\phi'(0)} \right| \geq \frac{1 - \frac{\epsilon}{K}}{(1 + \frac{\epsilon}{K})^3} = 1 - O(\epsilon/K) \quad (1.2)$$

e

$$\left| \frac{\phi'(w)}{\phi'(0)} \right| \leq \frac{1 + \frac{\epsilon}{K}}{(1 - \frac{\epsilon}{K})^3} = 1 + O(\epsilon/K). \quad (1.3)$$

Existe $z_0 \in [-1, 1] \subset B(0, \epsilon)$ tal que $\phi'(z_0) = 1$. Escolhendo $w = z_0$ obtemos

$$1 - O(\epsilon/K) \leq \left| \frac{1}{\phi'(0)} \right| \leq 1 + O(\epsilon/K). \quad (1.4)$$

Assim existe $C > 0$ tal que

$$||(\phi)'(0)| - 1| \leq C \left| \frac{1}{|(\phi)'(0)|} - 1 \right| \leq O(\epsilon/K). \quad (1.5)$$

De Eq. (1.3) para $|w| \leq \epsilon$ temos

$$|(\phi)'(w)| \leq 1 + O(\epsilon/K). \quad (1.6)$$

Aplicando o Corolário 1.13 para φ obtemos

$$|\arg(\phi'(Kz)) - \arg(\phi'(0))| \leq 2 \log \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right) \text{ para } |z| < 1.$$

Como $\phi'(0) \in \mathbb{R}$ temos $\arg(\phi'(0)) = 0$. Para $|w| \leq \epsilon$ tome $z = w/K$ então

$$|\arg(\phi'(w))| \leq 2 \log \left(\frac{1 + \frac{\epsilon}{K}}{1 - \frac{\epsilon}{K}} \right) = O(\epsilon/K). \quad (1.7)$$

De Eq. (1.5) e Eq. (1.7) obtemos

$$\begin{aligned}
 |\phi'(w) - 1| &= ||\phi'(w)|e^{i\arg(\phi'(w))} - 1| \\
 &= |(|\phi'(w)| - 1)e^{i\arg(\phi'(w))} + e^{i\arg(\phi'(w))} - 1| \\
 &\leq ||\phi'(w)| - 1| + |e^{i\arg(\phi'(w))} - 1| \\
 &\leq O(\epsilon/K).
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 |\phi - \text{id}|_{B(0,\epsilon)} &= \left| \int_1^z (\phi'(w) - 1)dw \right| \\
 &\leq \int_1^z |(\phi'(w) - 1)| |dw| \\
 &\leq O(\epsilon/K).
 \end{aligned}$$

□

Agora apresentamos o Teorema Generalizado de Distorção, o qual é uma extensão do Teorema de Distorção.

Teorema 1.15 ([13]) *Se E é um subconjunto compacto de uma região $D \subset \mathbb{C}$, então existe uma constante C (dependendo de E) tal que para qualquer aplicação univalente $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ e qualquer par de pontos $z, w \in E$ temos*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi'(w)|} \leq C.$$

Definimos o conjunto de números complexos cuja distância ao intervalo $[-1, 1]$ é no máximo $\rho > 0$ denotando-o por

$$D_\rho = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, [-1, 1]) < \rho\}.$$

Será chamado de conjunto ρ -estádio .

O seguinte lemma diz quando é possível compor duas aplicações univalentes sobre um domínio com modulo positivo não pequeno. Este resultado será importante para provar na seguinte seção que uma certa família de aplicações analíticas é pre-compacta.

Lema 1.16 ([1]) *Seja $C > 0$ e $E_0 \supset E_1 \supset [-1, 1]$ domínios estritamente encaixados no plano complexo. Existe uma constante $K > 0$ tal que o seguinte se satisfaz. Sejam $\phi : E_0 \rightarrow \mathbb{C}$ e $\psi : E_\psi \rightarrow \mathbb{C}$ aplicações univalentes onde $E_\psi \subset E_1$ e além disso cada uma das aplicações fixam o intervalo $[-1, 1]$ e $|\phi - \text{id}|_{E_0} \leq C$. Existe um $\rho(\phi)$ -estádio $D_{\rho(\phi)} \subset E_\psi$ tal que*

- $\phi(D_{\rho(\phi)}) \subset E_\psi$,
- $\rho(\phi) \geq e^{-K|\phi - \text{id}|_{E_0}} \rho(\psi)$, onde $\rho(\psi)$ é a distancia entre a fronteira de E_ψ ao intervalo $[-1, 1]$.

Em particular, $\psi \circ \phi$ está definido em $D_{\rho(\phi)}$.

Demonstração. Seja $D_\rho \subset E_0$ um ρ -estádio. A prova será dividida em dois casos. Suponha primeiramente que existe $\tilde{C} > 1000$ tal que $\rho(\psi) > \tilde{C}$. Assim, se $z \in \partial D_\rho$ temos o seguinte

$$\text{dist}(\phi(z), [-1, 1]) \leq \text{dist}(\phi(z), z) + \text{dist}(z, [-1, 1]) \leq |\phi - \text{id}|_{E_0} + \rho$$

então

$$\phi(D_\rho) \subseteq D_{|\phi - \text{id}|_{E_0} + \rho}.$$

Tomemos $\rho(\phi) > 0$ tal que

$$\rho(\psi) = \rho(\phi) + |\phi - \text{id}|_{E_0}.$$

Como $\rho(\psi) > \tilde{C}$ assim

$$\rho(\phi) \geq (1 - \frac{1}{\tilde{C}}) |\phi - \text{id}|_{E_0} \rho(\psi).$$

Então obtemos $K > 0$ tal que

$$\rho(\phi) \geq e^{-K|\phi - \text{id}|_{E_0}} \rho(\psi).$$

Finalmente supomos que $\rho(\psi) \leq 1000$. Seja $x \in [-1, 1]$. Fazendo uso do Teorema 1.15 existe $C > 0$ tal que para todo $z, x \in D_{\rho(\psi)}$

$$e^{-C|\phi - \text{id}|_{E_0}} \leq \frac{|D\phi(z)|}{|D\phi(x)|} \leq e^{C|\phi - \text{id}|_{E_0}}.$$

Por outro lado existe $x_0 \in [-1, 1]$ tal que $D\phi(x_0) = 1$ e pelo Teorema do Valor Médio sobre E_0 temos que para todo $z \in D_\rho$ e $x \in [-1, 1]$

$$|\phi(z) - \phi(x)| \leq e^{C|\phi - \text{id}|_{E_0}} |z - x|.$$

Para todo $z \in \partial D_\rho$ existe $x \in [-1, 1]$ tal que $|z - x| = \rho$. Então

$$\text{dist}(\phi(z), [-1, 1]) \leq e^{C|\phi - \text{id}|_{E_0}} \rho$$

para todo $z \in D_\rho$. Tome $\rho(\phi) = e^{-C|(\phi - \text{id})|_{E_0}} \rho(\psi)$. Isto finaliza a prova. $\square$

1.4 Cotas reais e complexas a priori

Apresentamos a ferramenta principal para o desenvolvimento deste trabalho, a chamada *cota complexa a priori* (complex bounds): existe um domínio complexo $V \supset [-1, 1]$ tal que para n suficientemente grande a primeira componente de $\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t)$, onde $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ satisfaz condições apropriadas, é bem definida e univalente em V .

A cota complexa a priori tem tido muitas aplicações no estudo do operador de renormalização $\mathcal{R}_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Uma das mais importantes aplicações é a convergência do operador de renormalização no conjunto de aplicações infinitamente renormalizáveis e a hiperbolicidade deste operador num espaço apropriado. Sullivan [6] introduziu e mostrou esta propriedade para aplicações infinitamente renormalizáveis com combinatória limitada.

Outros resultados relacionados, para aplicações unimodais infinitamente renormalizáveis com combinatória não limitada, foram dados por Lyubich [14], Lyubich e Yampolsky [15], Graczyk e Świątek [11], Levin e van Strien [10]. Smania [4] provou “complex bounds” para aplicações analíticas multimodais, infinitamente renormalizáveis, com combinatória limitada. Recentes resultados foram obtidos por Khan, Lyubich and Kozłowski, Strien and Shen.

Aqui obtemos uma cota complexa a priori para a primeira componente univalente do operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ olhando na *decomposição* de difeomorfismos da primeira componente do operador. Esta ferramenta é útil porque nos permite definir, no Capítulo 3,

o operador de renormalização complexo $\tilde{R}_\alpha$, onde o expoente crítico é $\alpha > 1$. Lembremos que o espaço de Banach $C^3([-1, 1], \mathbb{R})$ é o conjunto das aplicações C^3 dotadas com a norma do supremo

$$|f|_{C^3([-1, 1])} = \sup_{x \in [-1, 1]} \{|f(x)|, |Df(x)|, |D^2f(x)|\}.$$

Teorema 1.17 (Complex Bounds) *Seja $B > 0$ uma constante. Existe $\delta_0 = \delta_0(B) > 0$, tal que o seguinte se satisfaz: para cada conjunto aberto convexo $V \subset \mathbb{C}$ simétrico com respeito ao eixo real contendo o intervalo $I = [-1, 1]$ e para todo $C > 0$, existe $N = N(B, C, V) \geq 1$ tal que se*

- $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação univalente definida em $V \subset \mathbb{C}$.
- $|\phi|_{C^3([-1, 1])} \leq C$, e
- $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ é M -vezes renormalizável com combinatória limitada por B , para $M > N$.

Então para todo $M > n \geq N$ a primeira componente de $\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t)$, está definida e é univalente no domínio complexo $D_{3\delta_0}$.

Antes de entrar nos detalhes da prova deste teorema derivamos os seguintes corolários. Nós apresentamos a prova do Teorema 1.17 no que resta desta seção.

Corolário 1.18 *Para todo $B > 0$ existe $\delta_0(B) > 0$, e $N = N(B, C, \delta_0) \geq 1$ tal que se*

- $\phi : D_{\delta_0/2} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação univalente definida em $D_{\delta_0/2} \subset \mathbb{C}$.
- $|\phi|_{C^3([-1, 1])} \leq C$,
- $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ é M -vezes renormalizável com combinatória limitada por B , para $M > N$.

Então se $M > n \geq N$ temos que a primeira componente de $\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t)$, está definida e é univalente no domínio complexo $D_{2\delta_0}$.

Demonstração. Tomemos $V = D_{\delta_0/2}$ e C como o supremo dos $|\phi|_{C^3([-1,1])}$, onde ϕ é aplicação univalente em $D_{\delta_0/2}$, e é tal que deixa invariante o intervalo $[-1, 1]$ com $\phi(-1) = -1$ e $\phi(1) = 1$. A escolha do C é possível em vista que as aplicações univalentes ϕ definidas sobre $D_{\delta_0/2} \setminus \{-1, 1\}$ formam uma família normal pelo Teorema de Montel [12]. Assim como consequência direta do Teorema 1.17 tem-se o resultado. $\square$

Definição 1.19 Dizemos que um par (ϕ, t) é unimodal se

- Existe uma vizinhança V do intervalo $I = [-1, 1]$ tal que $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação holomorfa com extensão contínua em $\overline{V}$, onde $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(1) = 1$, e $t \in \mathbb{C}$,
- ϕ é univalente em V ,
- ϕ é real na reta real e $t \in [0, 1]$.

Corolário 1.20 Para cada par (ϕ, t) unimodal, infinitamente renormalizável com combinatória limitada por $B > 0$, existe N tal que a sequência formada pelas primeiras componentes dos pares $\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t)$, com $n \geq N$, forma uma família pré-compacta em $D_{2\delta_0}$.

Demonstração. A parte difeomorfa de cada $\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t)$ é um difeomorfismo o qual aplica o intervalo $[-1, 1]$ sobre se mesmo. Na verdade este difeomorfismo analítico é a decomposição de difeomorfismos.

Pelo Teorema 1.17 a parte difeomorfa de cada $\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t)$, onde $n \in \mathbb{N}$, tem extensão univalente sobre um δ_0 -estádio fixo D_{δ_0} contendo o intervalo $[-1, 1]$ o qual não depende de n . Desde que cada uma destas transformações univalentes mantém fixo -1 e 1 , segue do Teorema de Montel que com a norma do supremo sobre todas as funções holomorfas temos que as primeiras componentes dos pares $\tilde{\mathcal{R}}_n(\phi, t)$ forma uma família pré-compacta em $D_{2\delta_0}$. $\square$

Um ingrediente especial na prova do Teorema Complex Bound é dado no seguinte lema onde estabelecemos a *cota real a priori* (real bounds) o qual precisamos para obter controle sobre a geometria dos ciclos de pares N -vezes renormalizáveis, para N suficientemente grande, com combinatória limitada por uma constante $B > 0$.

Nós podemos seguir a prova deste resultado de W. de Melo e van Strien [19], ver Teorema 2.1, Capítulo VI. Primeiro fixemos o expoente crítico $\alpha > 1$.

Lema 1.21 (Real bounds) *Seja $B > 0$ uma constante. Então existe $0 < b < 1$ com a seguinte propriedade: para todo $C > 0$, existe $N = N(B, C) \geq 1$ tal que se $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ é M -vezes renormalizável com combinatória limitada por B com $M > N$, e $|\phi|_{C^3([-1,1])} \leq C$, temos que*

1. *Se $I_i^{n+1} \subset I_j^n$, $l = 1, \dots, m_n$ são os intervalos do $(n+1)$ -ésimo ciclo de renormalização, onde $N \leq n < M$, que estão contidos no intervalo I_j^n do n -ésimo ciclo então*

$$b < \frac{|I_i^{n+1}|}{|I_j^n|} < 1 - b, \quad (1.8)$$

onde $l = 1, \dots, m_n$, para todo $N \leq n < M$.

2. *Se J é uma componente conexa de $I_j^n \setminus \bigcup_{l=1}^{m_n} I_{i_l}^{n+1}$ então*

$$b < \frac{|J|}{|I_j^n|} < 1 - b, \quad (1.9)$$

para todo $N \leq n < M$.

Observação 1.22 *Seja $\alpha > 1$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Nós podemos supor que a constante $b < 1$ do Lema 1.21 é a mesma para os pares $(\phi, t) \in \mathcal{U}$, M -vezes renormalizáveis com combinatória limitada por B , para $M > N$ suficientemente grande, com ordem crítico $\tilde{\alpha}$, onde $|\alpha - \tilde{\alpha}| < \delta$.*

Assim podemos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 1.23 *Seja $B > 0$, $\alpha > 1$, e $C > 0$. Existe $\delta > 0$ e $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, tal que o seguinte se satisfaz: para cada domínio complexo V contendo o intervalo $[-1, 1]$ existe $N = N(B, \alpha, C, V) \geq 1$ tal que*

- se $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ é M -vezes renormalizável com combinatória limitada por B , para $M > N$ suficientemente grande, com ordem crítico $\tilde{\alpha}$, com $|\alpha - \tilde{\alpha}| < \delta$ e ϕ aplicação univalente definida sobre V , e
- $|\phi|_{C^3([-1,1])} \leq C$,

Então para todo $N \leq n < M$ as aplicações $\phi_0^n = Z_{\phi^{-1}(I_1^n)}(\phi)$, $q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t)$ e $\phi_j^n = Z_{\phi^{-1}(I_{j+1}^n)}(\phi)$, onde $j = 1, \dots, q_n - 1$, têm extensões univalentes para aplicações definidas sobre um ε -estádio D_ε .

Demonstração. Seja $\delta > 0$ e $N \geq 1$ como na Observação 1.22. Considere os setores no plano complexo denotado por

$$S_a^+ = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \frac{\pi}{a}\}$$

e

$$S_a^- = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(-z)| < \frac{\pi}{a}\},$$

onde $a > 0$. Suponha que o par $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ satisfaz as hipóteses do Teorema. Fixemos $\mathcal{I}^n = \{I_1^n, I_2^n, \dots, I_q^n\}$ o ciclo correspondente à n -ésima renormalização, $N \leq n \leq M$. Denotemos por x_j^n o ponto da fronteira do intervalo I_j^n , $j \neq 0$, mais próximo ao ponto crítico. Existe um nível de renormalização entre N e n tal que o intervalo que contém o ponto crítico neste nível contém o intervalo I_j^n . Assim escolha o primeiro $k > 0$ tal que $I_0^{n-k} \supset I_j^n$, onde $N \leq n - k < n$. Então I_j^n não está contido em I_0^{n-k+1} . Nós temos dois casos:

Caso I. Primeiro quando $k = 1$ (ver a figura 1.2).

Pelo Lema 1.21 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}(0, x_j^n)}{|I_j^n|} &\geq \frac{|I_0^n|}{2|I_j^n|} \\ &= \frac{|I_0^n|}{2|I_0^{n-1}|} \cdot \frac{|I_0^{n-1}|}{|I_j^n|} \\ &> \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{(1-b)}. \end{aligned}$$

Figura 1.2: Caso $k = 1$, $I_0^{n-1} \supset I_j^n$.

Caso II. Para $k > 1$ (ver a figura 1.3). Podemos ver que I_j^n está contido em algum intervalo $I_{j(n-k+1)}^{n-k+1} \subset I_0^{n-k} - I_0^{n-k+1}$. Na verdade o intervalo I_j^n está contido em uma sequência encaixada de intervalos de níveis inferiores. Assim $I_j^n \subset I_{j(n-1)}^{n-1} \subset \dots \subset I_{j(n-k+2)}^{n-k+2} \subset I_{j(n-k+1)}^{n-k+1}$ e pelo Lema 1.21 temos

$$|I_j^n| < (1-b)^{k-1} |I_{j(n-k+1)}^{n-k+1}| \leq \frac{(1-b)^{k-1}}{2} \cdot (|I_0^{n-k}| - |I_0^{n-k+1}|). \quad (1.10)$$

De Eq.(1.10) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}(0, x_j^n)}{|I_j^n|} &\geq \frac{|I_0^{n-(k-1)}|}{2|I_j^n|} \\ &> \frac{1}{(1-b)^{k-1}} \cdot \frac{|I_0^{n-(k-1)}|}{|I_0^{n-k}| - |I_0^{n-k+1}|} \\ &> \frac{1}{(1-b)^{k-1}} \cdot \frac{|I_0^{n-(k-1)}|}{|I_0^{n-k}|} \\ &> \frac{b}{(1-b)^{k-1}} \\ &\geq \frac{b}{1-b} \end{aligned}$$

Em ambos os casos obtemos

$$\frac{\text{dist}(0, x_j^n)}{|I_j^n|} > \frac{b}{2(1-b)}.$$

Figura 1.3: Caso $k > 1$, $I_0^{n-k} \supset I_j^n$ mas I_j^n não está contido em I_0^{n-k+1} .

Com esta estimativa, podemos definir os difeomorfismos ϕ_0^n , q_j^n e ϕ_j^n , para $j = 1, \dots, q_n - 1$, em um domínio comum no plano complexo. De fato, nós sabemos que o ramo principal da função logaritmo $\log$ é holomorfo sobre o conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$. Sejam $q_t^+ : S_\alpha^+ \rightarrow \mathbb{C}$ e $q_t^- : S_\alpha^- \rightarrow \mathbb{C}$ aplicações univalentes onde

$$q_t^+(z) = -2te^{\tilde{\alpha} \log z} + 2t - 1$$

e

$$q_t^-(z) = -2te^{\tilde{\alpha} \log(-z)} + 2t - 1.$$

Seguimos a prova definindo um domínio comum para as aplicações q_j^n , para $j = 1, \dots, q_n - 1$, tomando em conta dos domínios diferentes para o expoente crítico $\alpha > 1$.

Primeiramente quando $\alpha \in (1, 2)$. Para $I_j^n \subset S_\alpha^+$ (ou $I_j^n \subset S_\alpha^-$) aplicando o operador zoom $Z_{I_j^n}$ para o difeomorfismo $q_t^+|_{I_j^n}$ (ou $q_t^-|_{I_j^n}$). Assim podemos definir $q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t^+)$ (ou $q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t^-)$) sobre o conjunto ϵ_1 -estádio

$$D_{\epsilon_1} = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, [-1, 1]) < \epsilon_1\},$$

onde

$$\epsilon_1 = \frac{b}{2(1-b)}.$$

Este conjunto contém o intervalo $[-1, 1]$.

Agora para $\alpha \geq 2$. Consideremos a distancia a_j do ponto fronteira x_j^n do intervalo $I_j^n \subset S_\alpha^+$ (ou $I_j^n \subset S_\alpha^-$) á fronteira do setor S_α^+ (ou S_α^-). Um cálculo geométrico elementar leva a

Figura 1.4: $a_j > a = \sin(\frac{\pi}{\alpha-\delta}) \cdot \frac{b}{2(1-b)} |I_j^n|$.

seguinte relação

$$a_j = \sin(\frac{\pi}{\alpha}) \cdot \text{dist}(0, x_j^n) > \sin(\frac{\pi}{\alpha-\delta}) \cdot \frac{b}{2(1-b)} |I_j^n|,$$

veja figura 1.4. Faça um zoom do difeomorfismo $q_t^+|_{I_j^n}$ (ou $q_t^-|_{I_j^n}$). Em este caso tome

$$\epsilon_1 = \sin(\frac{\pi}{\alpha-\delta}) \cdot \frac{b}{2(1-b)},$$

assim podemos definir $q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t^+)$ (ou $q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t^-)$) sobre um conjunto ϵ_1 -estádio D_{ϵ_1} .

Denotemos por ϵ_j^n a distancia do intervalo $\phi^{-1}(I_{j+1}^n)$ à fronteira de V . É claro que

$$\epsilon_j^n \geq \text{dist}([-1, 1], \partial V)$$

para todo $j = 0, \dots, q_n - 1$. Existe $N_0 \geq N$ e $K > 1000$ suficientemente grande tal que para todo $N_0 \leq n < M$ temos

$$\text{dist}([-1, 1], \partial V) \geq K|\phi^{-1}(I_{j+1}^n)|,$$

onde $j = 0, \dots, q_n - 1$. Então $\phi_j^n = Z_{\phi^{-1}(I_{j+1}^n)}(\phi)$, para todo $j = 0, \dots, q_n - 1$ e para todo $N_0 \leq n < M$, estão definidos sobre

$$D_K = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, [-1, 1]) < K\}.$$

Escolha $\varepsilon < \epsilon_1$. Nós vemos que ϕ_0^n , e as aplicações q_j^n , ϕ_j^n , para todo $j = 1, \dots, q_n - 1$, estão definidas sobre o ε -estádio

$$D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, [-1, 1]) < \varepsilon\},$$

para todo $N_0 \leq n < M$. □

Observação 1.24 *Nós podemos observar o seguinte:*

1. Note que quando o expoente crítico $\alpha \in (1, 2)$. Nós podemos definir as aplicações $q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t^+)$ (or $q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t^-)$), para todo $j = 1, \dots, q_n - 1$, sobre um domínio comum que é a bola

$$B(0, \frac{1}{2} + \epsilon_1) = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, 0) < \frac{1}{2} + \epsilon_1\},$$

onde

$$\epsilon_1 = \frac{b}{2(1-b)},$$

que contém o intervalo $[-1, 1]$.

Proposição 1.25 *Seja $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ como no enunciado do Teorema 1.23. Existem $N_0 > 0$, $L > 0$, $H > 0$ e $b < 1$ tal que as aplicações $\phi_0^n = Z_{\phi^{-1}(I_1^n)}(\phi)$, $q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t)$ e $\phi_j^n = Z_{\phi^{-1}(I_{j+1}^n)}(\phi)$, onde $j = 1, \dots, q_n - 1$, com extensões univalentes a aplicações definidas sobre um domínio D_ε contendo o intervalo $[-1, 1]$, satisfazem*

$$\sum_{j=0}^{q_n-1} |\phi_j^n - \text{id}|_{D_\varepsilon} \leq Lb^n, \quad (1.11)$$

e

$$\sum_{I_j^n \in L_k^n} |q_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon} \leq H(1-b)^{k-1}, \quad (1.12)$$

para todo $N_0 \leq n < M$.

Demonstração. Seja $R = \text{dist}([-1, 1], \partial V)$. Para a primeira estimativa definimos

$$K = K(j, n) = \frac{R}{|\phi^{-1}(I_{j+1}^n)|}.$$

Existe $N_0 > 1$ tal que para todo $N_0 \leq n < M$ temos $0 < 1 + \varepsilon < K/4$ e

$$\phi_j^n = Z_{\phi^{-1}(I_{j+1}^n)}(\phi),$$

onde $j = 0, \dots, q_n - 1$, são definidas sobre a bola $B(0, K/2)$. De acordo com o Teorema 1.14

$$|\phi_j^n - \text{id}|_{D_\varepsilon} \leq O\left(\frac{1 + \varepsilon}{K}\right). \quad (1.13)$$

Por outro lado pela cota real a priori existem constantes $L_1 > 0$ e $b < 1$ tal que

$$\sum_{j=1}^{q_n-1} |I_j^n| \leq L_1 b^n,$$

para todo $N_0 \leq n < M$. Como o difeomorfismo ϕ tem derivada limitada estas duas constantes podem ser ajustadas de modo que

$$\sum_{j=1}^{q_n-1} |\phi^{-1}(I_j^n)| \leq L_1 b^n,$$

para todo $N_0 \leq n < M$. Assim temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{q_n-1} \frac{1 + \varepsilon}{K} &= (1 + \varepsilon) \sum_{j=0}^{q_n-1} \frac{|\phi^{-1}(I_{j+1}^n)|}{R} \\ &\leq \frac{(1 + \varepsilon)}{R} L b^n \end{aligned}$$

o qual implica a Eq. (1.11).

Para a segunda estimativa tratamos dois casos:

Caso I. Para $k > 1$ no Caso II do Teorema 1.23 podemos definir para $I_j^n \subset I_0^{n-k} \setminus I_0^{n-k+1}$

$$K_1 = K_1(j, n) = \begin{cases} \frac{|I_0^{n-k+1}|}{2|I_j^n|} & \text{se } 1 < \alpha < 2 \\ \sin\left(\frac{\pi}{\alpha - \delta}\right) \cdot \frac{|I_0^{n-k+1}|}{2|I_j^n|} & \text{se } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Observe que as aplicações univalentes

$$q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t),$$

onde $j = 1, \dots, q_n - 1$, são definidas na bola $B(0, K_1/2)$. Nós temos $1 + \varepsilon < K_1/4$ então pelo Teorema 1.14

$$|q_j^n - \text{id}|_{D_\varepsilon} \leq O\left(\frac{1 + \varepsilon}{K_1}\right). \quad (1.14)$$

Por outro lado obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{I_j^n \subset I_0^{n-k} \setminus I_0^{n-k+1}} \frac{1 + \varepsilon}{K_1} &\leq (1 + \varepsilon) \sum_{I_j^n \subset I_0^{n-k} \setminus I_0^{n-k+1}} \frac{2|I_j^n|}{|I_0^{n-k+1}|} \\ &\leq 2(1 + \varepsilon) \cdot \frac{(1 - b)^{k-1} (|I_0^{n-k}| - |I_0^{n-k+1}|)}{|I_0^{n-k+1}|} \\ &\leq \frac{2(1 + \varepsilon)}{b} \cdot (1 - b)^{k-1}. \end{aligned}$$

Caso II. Para $k = 1$. Do Teorema 1.23, para o intervalo $I_j^n \subset I_0^{n-1}$, onde $N \leq n - k < n < M$, as aplicações univalentes $q_j^n = Z_{I_j^n}(q_t)$ são definidas no ϵ_1 -estádio D_{ϵ_1} , onde $\epsilon_1 > \varepsilon$. Lembremos que $q_j^n(-1) = -1$ e $q_j^n(1) = 1$. Assim considerando as aplicações univalentes q_j^n definidas sobre $D_{\epsilon_1} \setminus \{-1, 1\}$ pelo Teorema de Montel [12] estas formam uma família normal. Então existe $C_1 > 0$ tal que para todo intervalo $I_j^n \subset I_0^{n-1}$, onde $N \leq n - k < n < M$, temos

$$|q_j^n - \text{id}|_{D_\varepsilon} < C_1.$$

Assim dos dois casos concluímos que existe $H > 0$ tal que

$$\sum_{I_j^n \in L_k^n} |q_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon} \leq H(1 - b)^{k-1}. \quad (1.15)$$

□

Agora estamos prontos para apresentar a prova do Teorema de Cotas Complexas.

Prova do Teorema 1.17. Pelo Teorema 1.23 as aplicações ϕ_0^n , q_i^n e ϕ_i^n , para todo $i = 1, \dots, q_n - 1$, tem extensão univalente sobre um conjunto ε -estádio D_ε contendo o intervalo $[-1, 1]$. Seja $D_\varepsilon \supset D_{\varepsilon/2} \supset [-1, 1]$ conjuntos estritamente encaixados. Defina para cada $j = 1, \dots, q_n - 1$ os difeomorfismos

$$\Phi_j^n = \phi_{q_n-1}^n \circ q_{q_n-1}^n \circ \dots \circ \phi_{q_n-j}^n$$

e

$$\Psi_j^n = \phi_{q_n-1}^n \circ q_{q_n-1}^n \circ \cdots \circ \phi_{q_n-j}^n \circ q_{q_n-j}^n.$$

Defina por $\rho(\phi_{q_n-1}^n) := \varepsilon/3$. Vamos a construir por indução os domínios para as aplicações Φ_j^n e Ψ_j^n , para $j = 1, \dots, q_n - 1$. Primeiro seja $j = 1$. Pelo Lema 1.16 existe uma constante $K > 0$ tal que:

A. Para $q_{q_n-j}^n : D_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$ e $\Phi_j^n : D_{\rho(\phi_{q_n-j}^n)} \rightarrow \mathbb{C}$ existe um $\rho(q_{q_n-j}^n)$ -estádio $D_{\rho(q_{q_n-j}^n)} \subset D_{\rho(\Phi_j^n)}$ tal que

- $q_{q_n-j}^n(D_{\rho(q_{q_n-j}^n)}) \subset D_{\rho(\Phi_j^n)}$,
- $\rho(q_{q_n-j}^n) \geq e^{-k|q_{q_n-j}^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \rho(\Phi_j^n)$, onde $\rho(q_{q_n-j}^n)$ e $\rho(\Phi_j^n)$ são as distancias entre a fronteira respectivamente de $D_{\rho(q_{q_n-j}^n)}$ e $D_{\rho(\Phi_j^n)} = D_{\rho(\phi_{q_n-j}^n)}$ ao intervalo $[-1, 1]$.

Note que $D_{\rho(q_{q_n-j}^n)}$ é o domínio de definição da aplicação $\Psi_j^n = \Phi_j^n \circ q_{q_n-j}^n$. Assim de novo pelo Lema 1.16 existe uma constante $K > 0$ tal que:

B. Para $\phi_{q_n-j-1}^n : D_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$ e $\Psi_j^n : D_{\rho(\phi_{q_n-j}^n)} \rightarrow \mathbb{C}$ existe um conjunto $\rho(\phi_{q_n-j-1}^n)$ -estádio $D_{\rho(\phi_{q_n-j-1}^n)} \subset D_{\rho(\Psi_j^n)}$ tal que

- $\phi_{q_n-j-1}^n(D_{\rho(\phi_{q_n-j-1}^n)}) \subset D_{\rho(\Psi_j^n)}$,
- $\rho(\phi_{q_n-j-1}^n) \geq e^{-k|\phi_{q_n-j-1}^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \rho(\Psi_j^n)$, onde $\rho(\phi_{q_n-j-1}^n)$ e $\rho(\Psi_j^n)$ são as distâncias entre a fronteira respectivamente de $D_{\rho(\phi_{q_n-j-1}^n)}$ e $D_{\rho(\Psi_j^n)} = D_{\rho(q_{q_n-j}^n)}$ ao intervalo $[-1, 1]$.

Aqui $D_{\rho(\phi_{q_n-j-1}^n)}$ é o domínio de definição da aplicação $\Phi_{j+1}^n = \Psi_j^n \circ \phi_{q_n-j-1}^n$.

Então para cada $j = 2, \dots, q_n - 1$ aplicamos o Lema 1.16 para o par de aplicações em A e B. Finalmente obtemos um $\rho(\phi_0^n)$ -estádio $D_{\rho(\phi_0^n)}$ que é domínio de definição da aplicação

$$\Psi_{q_n}^n \circ \phi_0^n = \phi_{q_n-1}^n \circ q_{q_n-1}^n \circ \cdots \circ \phi_1^n \circ q_1^n \circ \phi_0^n$$

onde

$$\rho(\phi_0^n) \geq \prod_{i=1}^{q_n-1} e^{-K|q_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \cdot \prod_{i=1}^{q_n-2} e^{-K|\phi_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \cdot \rho(\phi_{q_n-1}^n)$$

Como $\rho(\phi_{q_n-1}^n) = \frac{\varepsilon}{3}$ temos

$$\rho(\phi_0^n) \geq \frac{\varepsilon}{3} \cdot e^{-K \sum_{i=1}^{q_n-1} |q_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \cdot e^{-K \sum_{i=1}^{q_n-2} |\phi_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \quad (1.16)$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{3} \cdot e^{-K \sum_i |q_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \cdot e^{-K \sum_i |\phi_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \quad (1.17)$$

Pela Proposição 1.25 existem $L > 0$, $H > 0$ e $b < 1$ tal que

$$\sum_{I_j^n \in \mathcal{I}_k^n} |q_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon} < H(1-b)^{k-1}$$

e

$$\sum_i |\phi_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon} < Lb^n,$$

para todo $N_0 < n < M$ e $1 \leq k \leq n$. Segue de (1.17) que

$$\begin{aligned} \rho(\phi_0^n) &\geq \frac{\varepsilon}{3} \cdot e^{-K \sum_{k=1}^n \sum_{I_j^n \in \mathcal{I}_k^n} |q_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \cdot e^{-K \sum_i |\phi_i^n - \text{id}|_{D_\varepsilon}} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{3} \cdot e^{-K \sum_{k=1}^\infty H(1-b)^{k-1}} e^{-KL} \\ &= \frac{\varepsilon}{3} \cdot e^{-KH \frac{1}{b} - KL}, \end{aligned}$$

para todo $N_0 < n < M$. Tomando $3\delta_0 = \frac{\varepsilon}{3} \cdot e^{-KH \frac{1}{b} - KL}$ temos que a primeira componente da família $\tilde{\mathcal{R}}^n(\phi, t)$ tem uma extensão univalente sobre o domínio $D_{3\delta_0}$ que não depende de n . $\square$

Capítulo 2

Operador Composição

Na primeira seção definimos alguns espaços de Banach complexos e seus respectivos espaços tangentes. Estes são importantes para definir o *operador composição* L , o qual relaciona o operador de renormalização $\mathcal{R}$ com o novo operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}$ definidos no Capítulo 1, quando $\alpha = 2n$. As seguintes seções mostram propriedades do operador L , a ser definido na Seção 2.2, tais como:

- injetividade (veja Proposição 2.5),
- injetividade de $\mathcal{D}L$ (veja Proposição 2.6),
- $\mathcal{D}L$ tem imagem densa (veja Lema 2.7), e
- compacidade de $\mathcal{D}L$ (veja Lema 2.8).

Isto permite concluir no seguinte capítulo que o espectro do ponto fixo (ϕ^*, t^*) de $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$ coincide com o espectro do ponto fixo $\phi^* \circ q_{t^*}$ de $\mathcal{R}_{2n}$.

2.1 Espaços de Banach e seus espaços tangentes.

Seja $\mathcal{B}_V$ o espaço de Banach complexo de aplicações holomorfas f definidas numa vizinhança V com uma extensão contínua em $\overline{V}$, dotada com a norma do supremo. Seja $\mathcal{A}_V$ o conjunto de aplicações holomorfas $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ com extensão contínua em $\overline{V}$, onde $\varphi(-1) = -1$ e $\varphi(1) = 1$. Este é um subespaço afim de $\mathcal{B}_V$.

Denote por $\mathcal{T}_V$ o espaço de Banach complexo de aplicações holomorfas $\omega \in \mathcal{B}_V$ da forma $\omega = \psi(x^{2n})$ em uma vizinhança de $[-1, 1]$, com $\omega(-1) = \omega(1) = 0$, dotada com a norma do supremo. Seja $\mathcal{U}_V$ o conjunto de aplicações holomorfas $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas em $\overline{V}$ da forma $f = \psi(x^{2n})$ em uma vizinhança de $[-1, 1]$, com $f(-1) = f(1) = -1$. Então $\mathcal{U}_V$ é um espaço afim.

Não é difícil verificar que o espaço tangente de $\mathcal{A}_V$ em φ é $T_\varphi \mathcal{A}_V = \mathcal{F}_V = \{\omega \in \mathcal{B}_V : \omega(-1) = \omega(1) = 0\}$.

Também, é fácil ver que todos os campos de vetores holomorfos ω no espaço tangente $T_f \mathcal{U}_V$ são da forma $\omega = \psi(x^{2n})$ numa vizinhança de $[-1, 1]$, com $\omega(-1) = \omega(1) = 0$. Então $T_f \mathcal{U}_V = \mathcal{T}_V$.

Agora lembremos um resultado de análise complexa. Aqui, $\text{int}(K)$ denota o interior do conjunto K .

Teorema 2.1 (Aproximação polinomial de Mergelyan [20]) *Seja K um subconjunto compacto do plano complexo $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C} \setminus K$ é conexo. Então, qualquer função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, tal que a restrição $f|_{\text{int}(K)}$ é holomorfa, pode ser aproximada uniformemente sobre K por polinômios.*

Assim podemos mostrar o seguinte resultado. Para isto dizemos que um conjunto $W \subset \mathbb{C}$ é $2n$ -simétrico, onde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se $y \in W$, então $x \in W$ para todo x tal que $x^{2n} = y^{2n}$.

Lema 2.2 *Seja $V \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto convexo tal que é simétrico com respeito ao eixo real contendo o intervalo $[-1, 1]$. Seja $f \in \mathcal{U}_V$. O conjunto de campos de vetores polinomiais é denso em $T_f \mathcal{U}_V = \mathcal{T}_V$.*

Demonstração. Seja ω um campo de vetores holomorfo em $\mathcal{T}_V$. A idéia da prova é estender o domínio de ω a um domínio $2n$ -simétrico. Denote por $\lambda = e^{\frac{\pi i}{n}}$ a $2n$ -ésima raiz prima da unidade. Podemos definir para $z \in \lambda^{2n-i}\overline{V}$, $i = 0, \dots, 2n-1$,

$$\omega(z) := \omega(\lambda^i z).$$

Afirmacão: ω é bem definido, uma vez que para $z \in \lambda^{2n-i}V \cap \lambda^{2n-j}V$, $i \neq j$, temos $\omega(\lambda^i z) = \omega(\lambda^j z)$. De fato, existe um $\delta > 0$ pequeno tal que para todo z em uma bola de centro 0 e raio $\delta > 0$, contido em $\lambda^{2n-i}V \cap \lambda^{2n-j}V$, temos

$$\omega(\lambda^i z) = \omega(\lambda^j z) = \psi((\lambda^i z)^{2n}) = \psi(z^{2n}) = \psi((\lambda^j z)^{2n}) = \omega(\lambda^j z).$$

Assim pela analiticidade de ω sobre $\lambda^{2n-i}V \cap \lambda^{2n-j}V$, $i \neq j$, segue a afirmação. Então

$$\omega(z) = \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{\omega(\lambda^i z)}{2n}$$

para todo $z \in W := \bigcup_{i=0}^{2n-1} \lambda^{2n-i}\overline{V}$. Pelo Teorema 2.1 para qualquer $\epsilon > 0$ podemos encontrar um polinômio $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ tal que

$$|\omega(z) - p(z)| < \epsilon \tag{2.1}$$

para todo $z \in W$. Defina

$$\tilde{p}(z) := \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{p(\lambda^i z)}{2n}.$$

Então

$$\tilde{p}(z) = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^m (1 + \lambda^j + \lambda^{2j} + \dots + \lambda^{(2n-1)j}) a_j z^j.$$

Observe que caso $2n|j$

$$(1 + \lambda^j + \lambda^{2j} + \dots + \lambda^{(2n-1)j}) = 2n,$$

caso contrário

$$(1 + \lambda^j + \lambda^{2j} + \dots + \lambda^{(2n-1)j}) = \frac{1 - \lambda^{2nj}}{1 - \lambda^j} = 0.$$

Então

$$\tilde{p}(z) = \sum_{2n|j} a_j z^j.$$

Assim de (2.1)

$$\begin{aligned}
 |\omega(z) - \tilde{p}(z)| &= \left| \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{\omega(\lambda^i z)}{2n} - \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{p(\lambda^i z)}{2n} \right| \\
 &\leq \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{2n} |\omega(\lambda^i z) - p(\lambda^i z)| \\
 &< \epsilon
 \end{aligned}$$

□

2.2 O operador L

Seja I um intervalo limitado da reta real. Denote por $D_a(I)$ o conjunto a -estádio do intervalo I de pontos no plano complexo cuja distancia ao intervalo I é menor que $a > 0$. Tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e considere o conjunto $D_\epsilon([0, 1]) = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(I, z) < \epsilon\}$.

No que segue até o final do capítulo vamos a fixar o expoente crítico $\alpha = 2n$, com $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Considere uma aplicação unimodal definida como uma aplicação $f = \phi \circ q_t : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, com $t \in (0, 1)$, onde $q_t : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, é

$$q_t(x) = -2tx^\alpha + 2t - 1,$$

com expoente crítico α , e ϕ é algum difeomorfismo C^1 , que preserva orientação, de $[-1, 1]$. Denote $A_t(x) = -2tx + 2t - 1$. Então podemos escrever $f = (\phi \circ A_t)(x^\alpha)$. Nós sabemos que a aplicação $\tau : z \mapsto z^\alpha$ é holomorfa no plano complexo sem o zero, e a aplicação

$$A_t : z \mapsto -2tz + 2t - 1,$$

onde $t \in D_\epsilon([0, 1])$, é holomorfa em todo o plano complexo. Note que $q_t = A_t \circ \tau$.

Seja $V \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto contendo o intervalo $[-1, 1]$. Escolha $\tilde{V}$ um conjunto aberto contendo o intervalo $[-1, 1]$ compactamente contido em V tal que $A_t \circ \tau(\tilde{V})$ esta compactamente contido em V .

Definição 2.3 *Definamos o operador composição analítico complexo*

$$L : \mathcal{A}_V \times D_\epsilon([0, 1]) \rightarrow \mathcal{U}_{\tilde{V}}$$

como $L(\phi, t)(z) = \phi \circ q_t(z)$, para z em $\overline{\tilde{V}}$.

Observação 2.4 *É fácil ver que se $(\phi, t) \in \mathcal{U}$ então*

$$L \circ \tilde{\mathcal{R}}(\phi, t) = \mathcal{R} \circ L(\phi, t).$$

Proposição 2.5 (Injetividade de L) *Seja $\alpha > 1$. Se temos $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{A}_V$ e $t, \tilde{t} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que*

$$\phi \circ q_t = \tilde{\phi} \circ q_{\tilde{t}}$$

sobre $[-1, 1]$, então $\phi = \tilde{\phi}$ e $t = \tilde{t}$.

Demonstração. Suponhamos que

$$\phi \circ q_t = \tilde{\phi} \circ q_{\tilde{t}},$$

sobre $[-1, 1]$. Então para todo $y \in [0, 1]$ obtemos

$$A_t(y) = \phi^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ A_{\tilde{t}}(y).$$

Tome

$$y = \frac{-x + 2\tilde{t} - 1}{2\tilde{t}},$$

onde $x \in [-1, 1]$. É fácil ver que

$$\frac{t}{\tilde{t}}x + \frac{t}{\tilde{t}} - 1 = \phi^{-1} \circ \tilde{\phi}(x). \quad (2.2)$$

Desde que sabemos que $\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}(1) = 1$ e $\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}(-1) = -1$ então $t = \tilde{t}$ e $\phi^{-1} \circ \tilde{\phi} = id$. $\square$

2.3 O diferencial de L e suas propriedades

Pela definição de L para cada (ω, v) em $T_\phi \mathcal{A}_V \times \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}L(\phi, t)(\omega, 0) &= \frac{d}{du}[(\phi + u\omega) \circ q_t]|_{u=0} \\ &= \frac{d}{du}[\phi \circ q_t + u(\omega \circ q_t)]|_{u=0} \\ &= \omega \circ q_t \end{aligned}$$

e pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \mathcal{D}L(\phi, t)(0, v) &= \frac{d}{du}[\phi \circ q_{t+uv}]|_{u=0} \\ &= D\phi(q_t) \cdot \frac{d}{du}(q_{t+uv})|_{u=0} \end{aligned}$$

onde

$$\frac{d}{du}(q_{t+uv}(x))|_{u=0} = 2v(1 - x^{2n}).$$

Assim a derivada de L em $(\phi, t) \in \mathcal{A}_V \times D_\epsilon([0, 1])$ é o operador analítico

$$\mathcal{D}L(\phi, t) : \mathcal{F}_V \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{T}_{\tilde{V}}$$

dado por

$$\mathcal{D}L(\phi, t)(\omega, v)(x) = \omega \circ q_t(x) + D\phi(q_t(x)).2v(1 - x^{2n}), \quad (2.3)$$

para todo x em $\tilde{V}$.

Nas seguintes proposições provaremos algumas propriedades do diferencial DL .

Proposição 2.6 *Seja $(\phi, t) \in \mathcal{A}_V \times (0, 1]$. O operador $\mathcal{D}L(\phi, t)$ é injetivo.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{D}L(\phi, t)(\omega, v)(z) = 0$, para todo $z \in \tilde{V}$. Então de (2.3) temos

$$\omega \circ q_t(z) = -D\phi(q_t(z)).2v(1 - z^{2n}) \quad (2.4)$$

$$\omega \circ q_t(z) = -D\phi(q_t(z)).\frac{v}{t}(q_t(z) + 1) \quad (2.5)$$

De (2.5) temos que para qualquer $y \in [-1, q_t(0)] \subset [-1, 1]$

$$\omega(y) = -D\phi(y) \cdot \frac{v}{t}(y+1), \quad (2.6)$$

Desde que $\omega(y)$ e $D\phi(y) \cdot \frac{v}{t}(y+1)$, são analíticos sobre $[-1, 1]$ temos que a Eq. (2.6) se cumpre para qualquer $y \in [-1, 1]$. Se tomarmos $y = 1$ obtemos

$$\omega(1) = -D\phi(1) \cdot \frac{v}{t}(2)$$

e desde que $\omega(1) = 0$ e $D\phi(1) \neq 0$ isto implica que $v = 0$. Por outro lado a condição $v = 0$ em (2.6) e a analiticidade de ω sobre V implica $\omega(y) = 0$, para todo $y \in V$. Assim $\mathcal{D}L(\phi, t)$ é injetivo. $\square$

Lema 2.7 *Seja $(\phi, t) \in \mathcal{A}_V \times (0, 1]$. A imagem do operador*

$$\mathcal{D}L(\phi, t) : \mathcal{F}_V \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{T}_{\tilde{V}}$$

é densa.

Demonstração. Pelo Lema 2.2 o conjunto de campos de vetores polinomiais é denso em $\mathcal{T}_{\tilde{V}}$. Assim é suficiente mostrarmos que para todo polinômio $\tilde{\omega} \in \mathcal{T}_{\tilde{V}}$, existe $(\omega, v) \in \mathcal{F}_V \times \mathbb{C}$ tal que

$$\mathcal{D}L(\phi, t)(\omega, v) = \tilde{\omega}.$$

Desde que $\tilde{\omega}$ é da forma $\tilde{\omega} = \psi(x^{2n})$, onde ψ é um campo de vetores polinomial numa vizinhança de $[0, 1]$, podemos representa-lo como $\tilde{\omega} = \beta \circ q_t$, onde $\beta = \psi \circ A_t^{-1}$ é um campo de vetores polinomial. Tome

$$\omega(y) = \beta(y) - D\phi(y) \frac{\beta(1)}{2D\phi(1)}(1+y)$$

e

$$v = \frac{\beta(1)t}{2D\phi(1)}.$$

$\square$

Lembremos que um operador linear contínuo T de um espaço de Banach E sobre o espaço de Banach F é compacto se, para cada sequência limitada $\{x_n\}$ em E , a sequência $\{Tx_n\}$ contem uma subsequência convergente para algum limite em F .

Lema 2.8 *Seja $(\phi, t) \in \mathcal{A}_V \times D_\epsilon([0, 1])$. O operador*

$$\mathcal{DL}(\phi, t) : \mathcal{F}_V \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{T}_{\tilde{V}}$$

é compacto.

Demonstração. Seja $\{(\omega_i, v_i)\} \subset \mathcal{F}_V \times \mathbb{C}$ uma sequência limitada, isto é existe uma constante $B > 0$ tal que

$$|\omega_i|_V, |v_i| < B,$$

para todo $i > 0$. Pela definição de L , temos que $\{\mathcal{DL}(\phi, t)(\omega_i, v_i)\}$ é uma sequência de campos de vetores analíticos sobre $\tilde{V}$. Nós tínhamos tomado $\tilde{V}$ compactamente contido em V tal que $q_t(\tilde{V})$ esta compactamente contido em V . Agora tomemos um subconjunto aberto $U \ni \tilde{V}$ compactamente contido em V tal que $q_t(U)$ esta compactamente contido em V . Então

$$|\omega_i|_V = \sup_{x \in V} |\omega_i(x)| \geq \sup_{x \in q_t(U)} |\omega_i(x)| = \sup_{y \in U} |\omega_i \circ q_t(x)| = |\omega_i \circ q_t|_U.$$

Assim $\omega_i \circ q_t$ é limitado sobre U por B . Desde que $D\phi$ é também limitado em $q_t(U) \subset V$ para 2.3 existe $C > 0$ tal que

$$|\mathcal{DL}(\phi, t)(\omega_i, v_i)|_U < C,$$

para todo $i > 0$. Desde que a sequência de aplicações analíticas em U está limitada por uma constante que não depende de $i > 0$ esta forma uma família normal em U , toda sequência $\{\mathcal{DL}(\phi, t)(\omega_i, v_i)\}$ contém uma subsequência convergente sobre $\tilde{V}$. $\square$

Capítulo 3

Operadores de Renormalização Complexos

Na Seção 3.1, fixando o expoente crítico $\alpha = 2n$ onde $n \in \mathbb{N}$, vamos a considerar o operador de renormalização $\mathcal{R}_\alpha$ definido no Capítulo 1 como um operador atuando sobre o espaço de funções holomorfas. Já na Seção 3.2, para o expoente crítico $\alpha > 1$, definimos o novo operador de renormalização complexo $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ agindo no espaço de pares onde a primeira componente é uma aplicação holomorfa e a segunda é um número real. Na última seção, mostraremos que quando $\alpha > 1$ é par, o espectro de $D\mathcal{R}_\alpha$ e $D\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ coincidem nos respectivos pontos fixos dos operadores de renormalização $\mathcal{R}_\alpha$ e $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$.

3.1 Operador complexo $\mathcal{R}_\alpha$

Baseado em métodos reais Marco Martens [17] provou a existência de pontos fixos do operador de renormalização $\mathcal{R}_\alpha$, de qualquer tipo combinatorial, agindo no espaço de aplicações unimodais suaves com expoente crítico $\alpha > 1$. Da definição do operador de

renormalização $\mathcal{R}_\alpha$ temos que seu ponto fixo, denotado por f^* , satisfaz

$$f^*(z) = \frac{1}{p} f^{*q}(pz),$$

para algum $p \in (-1, 1)$ tal que $(f^*)^q(p) = p$.

Dada uma função analítica $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, onde V é um conjunto aberto, defina o conjunto aberto

$$\mathcal{D}_V^n(f) := \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}V.$$

Dado um subconjunto $V \subset \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, denotamos $\lambda V := \{\lambda x : x \in V\}$.

Como uma consequência da cota complexa a priori de Sullivan [6], fixando o expoente crítico $\alpha = 2n$ onde $n \in \mathbb{N}$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ suficientemente grande tal que os domínios $D_{\varepsilon/2} \subseteq D_\varepsilon \subseteq D_{2\varepsilon}$, satisfazem:

- f^* tem extensão continua a $\overline{D}_\varepsilon$ o qual é holomorfo em D_ε , e tem um único ponto crítico em D_ε .
- Nós temos

$$p^{N_1} D_{2\varepsilon} \subseteq \mathcal{D}_{D_{\varepsilon/2}}^{q^{N_1}}(f^*),$$

em outras palavras, podemos iterar $f^* : D_{\varepsilon/2} \rightarrow \mathbb{C}$ ao menos q^{N_1} vezes sobre o domínio $p^{N_1} \overline{D}_{2\varepsilon}$.

Agora podemos definir o operador de renormalização complexo atuando sobre funções holomorfas suficientemente próximas a f^* . Pelo Lema B.1 podemos escolher $\gamma_1 = \gamma_1(\varepsilon, N_1) > 0$ suficientemente pequeno tal que para cada f na bola de centro f^* e raio γ_1 denotada por

$$B(f^*, \gamma_1) := \{f \in \mathcal{U}_{D_{\varepsilon/2}}, |f - f^*| < \gamma_1\},$$

o seguinte se cumpre:

- Existe uma continuação analítica p_f do ponto periódico p de f^* , isto é $f^q(p_f) = p_f$ e $p_f \sim p$.
- Tem-se $p_f D_{2\varepsilon} \subseteq \mathcal{D}_{D_{\varepsilon/2}}^{q^{N_1}}(f)$.

Definimos o operador analítico complexo $\widehat{\mathcal{R}}_{2n} : B(f^*, \gamma_1) \rightarrow \mathcal{U}_{D_{2\varepsilon}}$ como

$$\widehat{\mathcal{R}}_{2n}(f)(z) := \frac{1}{p_f} f^{q^{N_1}}(p_f z). \quad (3.1)$$

Assim definimos a extensão analítica complexa do operador de renormalização como

$$\mathcal{R}_{2n} := i \circ \widehat{\mathcal{R}}_{2n}.$$

Observação 3.1 *Note que temos liberdade para a escolha de $\varepsilon > 0$ e $N_1 > 0$, e $\gamma_1 > 0$. Na Seção 3.3 faremos uma escolha conveniente para estes.*

Segue do seguinte lema que $\mathcal{R}_{2n}$ é um operador compacto.

Lema 3.2 *A inclusão natural $i : \mathcal{U}_{D_{2\varepsilon}} \rightarrow \mathcal{U}_{D_{\varepsilon/2}}$ é um operador compacto entre os espaços de Banach.*

Demonstração. Segue-se do Teorema de Montel. □

Edson de Faria, W. de Melo and A. Pinto [8], com a ajuda das cotas reais e complexas a priori de Sullivan [6] e o resultado de hiperbolicidade de Lyubich [16] (veja também [5]), provaram a hiperbolicidade do ponto fixo do operador de renormalização com respeito a um iterado do operador de renormalização atuando sobre o espaço $\mathcal{U}_{D_{\varepsilon/2}}$ para algum $\varepsilon > 0$. Mais precisamente o Teorema 2.4 em [8] afirma que:

Teorema 3.3 *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe um número positivo $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ e $\gamma_1 > 0$ com a seguinte propriedade. O operador real analítico $\mathcal{R}_{2n} : B(f^*, \gamma_1) \rightarrow \mathcal{U}_{D_{\varepsilon/2}}$, definido pela Eq. (3.1), tem um ponto fixo hiperbólico $f^* = \phi^* \circ q_{t^*} \in B(f^*, \gamma_1)$ com variedade estável de codimensão um.*

3.2 Operador complexo $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$

Em [17, Teorema 2.2] Marco Martens prova que o novo operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$, com expoente crítico $\alpha > 1$, o qual ele chama de operador de *renormalização dinâmico*,

tem pontos fixos de qualquer tipo combinatorial, cuja primeira componente são difeomorfismos $\mathcal{C}^2$ em $[-1, 1]$. Utilizando os métodos da demonstração do Teorema 1.17 e métodos em Martens é possível mostrar que de fato as primeiras componentes de tais pontos fixos de $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ são analíticos e univalentes numa vizinhança do intervalo $[-1, 1]$. Fixemos uma combinatoria σ e denotemos por (ϕ^*, t^*) um ponto fixo analítico do operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ com combinatoria σ .

Pelo Teorema 1.17 temos uma cota complexa a priori para a primeira componente do novo operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$, onde o expoente crítico $\alpha > 1$ é fixo. Assim seja $\delta < \delta_0$ pequeno e $\tilde{N}_1 = \tilde{N}_1(\delta) > 0$ como no Teorema 1.17. E pelo Corolário 1.18 temos que $(\phi^*, t^*) = \tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{\tilde{N}_1}(\phi^*, t^*)$ é um par cuja primeira componente é univalente em $D_{2\delta}$.

Fixemos um par (ϕ, t) $\tilde{N}_1$ -vezes renormalizável, com expoente crítico $\tilde{\alpha}$ suficientemente próximo de α , e seja $\mathcal{I}^{\tilde{N}_1} = \{I_1^{\tilde{N}_1}, I_2^{\tilde{N}_1}, \dots, I_{q_{\tilde{N}_1}}^{\tilde{N}_1}\}$ o ciclo correspondente à $\tilde{N}_1$ -ésima renormalização. Nós sabemos que se (ϕ, t) satisfaz as hipóteses do Teorema 1.17, as aplicações $\phi_0^{\tilde{N}_1} = Z_{\phi^{-1}(I_1^{\tilde{N}_1})}(\phi)$, $q_i^{\tilde{N}_1} = Z_{I_i^{\tilde{N}_1}}(q_t)$ e $\phi_i^{\tilde{N}_1} = Z_{q_t(I_i^{\tilde{N}_1})}(\phi)$, tem extensão univalente em domínios complexos de modo que a composição

$$(\phi_{q_{\tilde{N}_1-1}}^{\tilde{N}_1} \circ q_{q_{\tilde{N}_1-1}}^{\tilde{N}_1}) \circ \dots \circ (\phi_2^{\tilde{N}_1} \circ q_2^{\tilde{N}_1}) \circ (\phi_1^{\tilde{N}_1} \circ q_1^{\tilde{N}_1}) \circ \phi_0^{\tilde{N}_1}$$

está definida em $D_{2\delta}$. Logo pelo Lema B.1 podemos escolher $\tilde{\gamma}_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que o operador $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{\tilde{N}_1}$ tem uma extensão para a bola

$$\tilde{B}((\phi^*, t^*), \gamma) := \{(\phi, t) \in \mathcal{A}_{D_{\delta/2}} \times \mathbb{C}, |(\phi, t) - (\phi^*, t^*)| < \tilde{\gamma}_1\},$$

como uma transformação $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha : \tilde{B}((\phi^*, t^*), \tilde{\gamma}_1) \rightarrow \mathcal{A}_{D_{2\delta}} \times \mathbb{C}$, definida pela expressão

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha(\phi, t) = ((\phi_{q_{\tilde{N}_1-1}}^{\tilde{N}_1} \circ q_{q_{\tilde{N}_1-1}}^{\tilde{N}_1}) \circ \dots \circ (\phi_2^{\tilde{N}_1} \circ q_2^{\tilde{N}_1}) \circ (\phi_1^{\tilde{N}_1} \circ q_1^{\tilde{N}_1}) \circ \phi_0^{\tilde{N}_1}, t_{\tilde{N}_1}),$$

onde

$$t_{\tilde{N}_1} = \frac{|q_t(I_0^{\tilde{N}_1})|}{|\phi^{-1}(I_1^{\tilde{N}_1})|}.$$

A inclusão natural $j : \mathcal{A}_{D_{2\delta}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}_{D_{\delta/2}} \times \mathbb{C}$ é um operador compacto entre os espaços de Banach. Então definimos o operador de renormalização complexo por

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha = j \circ \tilde{\mathcal{R}}_\alpha.$$

Na seguinte proposição provamos que o novo operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ é analítico complexo.

Proposição 3.4 *A transformação $(\phi, t, \alpha) \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}_\alpha(\phi, t)$ é analítica complexa nas variáveis (ϕ, t) e analítico real na variável α .*

Demonstração. Seja (ϕ^*, t^*) o ponto fixo do operador $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$. Seja $p = p(\phi, t) \in (0, 1)$ o ponto periódico da aplicação $\phi \circ q_t$, com período $q \geq 2$, isto é $(\phi \circ q_t)^q(p) = p$, que é a continuação analítica do ponto periódico na fronteira do intervalo central do ciclo de renormalização de $\phi^* \circ q_{t^*}$. E seja $b = b(\phi, t) \in (p, 1)$ satisfazendo $(\phi \circ q_t)^q(b) = -p$. Denotemos por $\phi(\tilde{p}) = p$ e $\phi(\tilde{b}) = b$. Suponhamos que $\tilde{N}_1 = 1$ para simplificar um pouco a notação. Assim nós temos que

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha(\phi, t) = (F((\phi, t), \alpha), \rho((\phi, t), \alpha)),$$

onde

$$F((\phi, t), \alpha) = \frac{1}{p}(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \circ q_t \circ \phi}_{2q-1 \text{ termos}} \circ \gamma_2^{-1}(x)),$$

$$\gamma_2^{-1}(x) = \frac{\tilde{b} - \tilde{p}}{2} \cdot (x + 1) + \tilde{p}, \quad \text{e} \quad \rho((\phi, t), \alpha) = \frac{2t - 1 - q_t(p)}{\tilde{b} - q_t(p)} = \frac{2tp^\alpha}{\tilde{b} - \tilde{p}}.$$

Primeiro derivamos F com respeito a (ϕ, t) e α . Assim

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\phi F \cdot \omega)(x) &= -\frac{1}{p}(\mathcal{D}_\phi p \cdot \omega)(x) F(x) + \frac{1}{p}[D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ q_t \circ \phi}_{2q-1})(\gamma_2^{-1}(x))(\mathcal{D}_\phi \gamma_2^{-1} \cdot \omega)(x) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{q-1} D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ q_t}_{2i})(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ \gamma_2^{-1}(x)}_{2q-1-2i}) \\ &\quad \omega(\underbrace{q_t \circ \cdots q_t \circ \phi \circ \gamma_2^{-1}(x)}_{2(q-1)-2i})], \\ (\mathcal{D}_t F \cdot v)(x) &= -\frac{1}{p}(\mathcal{D}_t p \cdot v)(x) F(x) + \frac{1}{p}[D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ q_t \circ \phi}_{2q-1})(\gamma_2^{-1}(x))(\mathcal{D}_t \gamma_2^{-1} \cdot v)(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q-1} D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ q_t}_{2q-1-2i})(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ \gamma_2^{-1}(x)}_{2i}) \\ &\quad (\mathcal{D}_t q_t \cdot v)(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi \circ \gamma_2^{-1}(x)}_{2i-1})], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\alpha F \cdot \tau)(x) &= -\frac{1}{p}(\mathcal{D}_\alpha p \cdot \tau)(x) F(x) + \frac{1}{p} [D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ q_t \circ \phi}_{2q-1})(\gamma_2^{-1}(x))(\mathcal{D}_\alpha \gamma_2^{-1} \cdot \tau)(x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{q-1} D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ q_t}_{2q-1-2i})(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi}_{2i} \circ \gamma_2^{-1}(x)) \\
&\quad (\mathcal{D}_\alpha q_t \cdot \tau)(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi}_{2i-1} \circ \gamma_2^{-1}(x))].
\end{aligned}$$

Observe que $\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi}_{2i-1} \circ \gamma_2^{-1}(x)$, onde $x \in D_{\delta/2}$ e $i = 1, \dots, q-1$, pertence ao domínio S_α^+ ou S_α^- , os quais foram introduzidos na prova do Teorema 1.23. Sejam q_t^+ e q_t^- como definidos na mesma prova. Quando $\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi}_{2i-1} \circ \gamma_2^{-1}(x) \in S_\alpha^+$ obtemos

$$(\mathcal{D}_t q_t \cdot v)(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi}_{2i-1} \circ \gamma_2^{-1}(x)) = -2v \exp(\alpha \log(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi}_{2i-1} \circ \gamma_2^{-1}(x))) + 2v,$$

e

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\alpha q_t \cdot \tau)(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi}_{2i-1} \circ \gamma_2^{-1}(x)) &= -2t \log(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi}_{2i-1} \circ \gamma_2^{-1}(x)) \\
&\quad \exp(\alpha \log(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi}_{2i-1} \circ \gamma_2^{-1}(x))) \tau
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, q-1$. Aqui $\log$ é o ramo de logaritmo definido em S_α^+ . Agora quando $\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots q_t \circ \phi}_{2i-1} \circ \gamma_2^{-1}(x) \in S_\alpha^-$ o cálculo das derivadas parciais é análogo. Da relação $(\phi \circ q_t)^q(p) = p$ derivando com respeito a (ϕ, t) e α obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\phi p \cdot \omega)(x) &= \frac{1}{1 - D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ q_t \circ \phi \circ q_t}_{2q})(p)} \\
&\quad \sum_{i=0}^q D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ q_t}_{2i})(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \cdots \phi \circ q_t}_{2q-2i}(p)) \omega(\underbrace{q_t \circ \cdots q_t \circ \phi \circ q_t}_{2q-1-2i}(p)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_t p \cdot v)(x) &= \frac{1}{1 - D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \dots \circ \phi \circ q_t \circ \phi \circ q_t}_{2q})(p)} \\
&\quad \sum_{i=0}^q D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \dots \circ \phi}_{2q-1-2i})(\underbrace{q_t \circ \dots \circ \phi \circ q_t}_{2i+1}(p)) (\mathcal{D}_t q_t \cdot v)(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \dots \circ q_t \circ \phi \circ q_t}_{2i}(p)),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\alpha p \cdot \tau)(x) &= \frac{1}{1 - D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \dots \circ \phi \circ q_t \circ \phi \circ q_t}_{2q})(p)} \\
&\quad \sum_{i=0}^q D(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \dots \circ \phi}_{2q-1-2i})(\underbrace{q_t \circ \dots \circ \phi \circ q_t}_{2i+1}(p)) (\mathcal{D}_\alpha q_t \cdot \tau)(\underbrace{\phi \circ q_t \circ \dots \circ q_t \circ \phi \circ q_t}_{2i}(p)).
\end{aligned}$$

As derivadas parciais para b com respeito a ϕ , t e α são obtidas da seguinte relação

$$(\phi \circ q_t)^q(b) = -p$$

e elas podem ser obtidas de forma similar ao cálculo da derivadas parciais de p . Das relações $\phi(\tilde{p}) = p$ e $\phi(\tilde{b}) = b$ temos

$$(\mathcal{D}_{(\phi,t)} \tilde{p} \cdot (\omega, v))(x) = \frac{(\mathcal{D}_{(\phi,t)} p \cdot (\omega, v))(x) - \omega(\tilde{p})}{D\phi(\tilde{p})},$$

e

$$(\mathcal{D}_\alpha \tilde{p} \cdot \tau)(x) = \frac{(\mathcal{D}_\alpha p \cdot \tau)(x)}{D\phi(\tilde{p})}$$

similarmente

$$(\mathcal{D}_{(\phi,t)} \tilde{b} \cdot (\omega, v))(x) = \frac{(\mathcal{D}_{(\phi,t)} b \cdot (\omega, v))(x) - \omega(\tilde{b})}{D\phi(\tilde{b})},$$

e

$$(\mathcal{D}_\alpha \tilde{b} \cdot \tau)(x) = \frac{(\mathcal{D}_\alpha b \cdot \tau)(x)}{D\phi(\tilde{b})}.$$

Logo das derivadas obtidas se pode obter facilmente as derivadas parciais de

$$\gamma_2^{-1}(x) = \frac{\tilde{b} - \tilde{p}}{2} \cdot (x + 1) + \tilde{p}.$$

Por outro lado $\rho((\phi, t), \alpha)$ tem as seguintes derivadas parciais

$$(\mathcal{D}_{\phi\rho} \cdot \omega)(x) = \frac{Dq_t(p)(\mathcal{D}_\phi p \cdot \omega)(x)(\tilde{b} - \tilde{p}) - 2tp^\alpha((\mathcal{D}_\phi \tilde{b} \cdot \omega)(x) - (\mathcal{D}_\phi \tilde{p} \cdot \omega)(x))}{(\tilde{b} - \tilde{p})^2},$$

$$(\mathcal{D}_t \rho \cdot v)(x) = \frac{2vp^\alpha}{\tilde{b} - \tilde{p}} - \frac{Dq_t(p)\mathcal{D}_t p \cdot (v)(x)(\tilde{b} - \tilde{p}) - 2tp^\alpha((\mathcal{D}_t \tilde{b} \cdot v)(x) - (\mathcal{D}_\phi \tilde{p} \cdot v)(x))}{(\tilde{b} - \tilde{p})^2},$$

e

$$(\mathcal{D}_\alpha \rho \cdot \tau)(x) = \frac{(2tp^\alpha \tau \log p + Dq_t(p)(\mathcal{D}_\alpha p \cdot \tau)(x))(\tilde{b} - \tilde{p}) - 2tp^\alpha((\mathcal{D}_\alpha \tilde{b} \cdot \tau)(x) - (\mathcal{D}_\alpha \tilde{p} \cdot \tau)(x))}{(\tilde{b} - \tilde{p})^2}.$$

Quando o ponto periódico $p \in (-1, 0)$ temos que $b \in (-1, p)$ e o cálculo das derivadas parciais seguem de forma similar. $\square$

3.3 Relação entre os operadores complexos $\mathcal{R}_{2n}$ e $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$

Agora considere o expoente crítico $\alpha = 2n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Com as notações da seção anterior, escolha $\delta > 0$, $\tilde{N}_1$ e $\tilde{\gamma}_1$ como na Seção 3.2. Seja ε_0 tal que

$$q_{t^*}(\overline{D}_{2\varepsilon_0}) \subseteq D_{\delta/2}.$$

E escolha $\varepsilon < \varepsilon_0$, N_1 e $\gamma_1 > 0$ como no Teorema 3.3. Logo escolhemos $N = N_1 \cdot \tilde{N}_1$ e consideramos este na definição dos operadores $\mathcal{R}_{2n}$ e $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$ das seções anteriores.

Desde que $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$ é analítico existe $\tilde{C} > 1$ tal que

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2n}(\tilde{B}_{\delta/2}((\phi^*, t^*), \tilde{\gamma})) \subseteq \tilde{B}_\delta((\phi^*, t^*), \tilde{C} \cdot \tilde{\gamma}),$$

para todo $\tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}_1$. Logo existe $\tilde{\gamma}_2$ tal que se

$$|(\phi, t) - (\phi^*, t^*)| < \tilde{C} \cdot \tilde{\gamma}_2$$

então $\phi \circ q_t$ esta definida em $\overline{D}_{2\varepsilon}$. Em particular para cada $\tilde{\gamma} \leq \tilde{\gamma}_2$ temos definidos os seguintes operadores de composição

$$L : \tilde{B}_{\delta/2}((\phi^*, t^*), \tilde{\gamma}) \rightarrow \mathcal{U}_{2\varepsilon},$$

e

$$L : \tilde{B}_{\delta/2}((\phi^*, t^*), \tilde{C} \cdot \tilde{\gamma}) \rightarrow \mathcal{U}_{2\varepsilon}.$$

Seja $\tilde{\gamma}_3 > 0$ tal que se $\tilde{\gamma} \leq \tilde{\gamma}_3$ então

$$L(\tilde{B}_{\delta/2}((\phi^*, t^*), \tilde{\gamma})) \subseteq B_{2\varepsilon}(\phi^* \circ q_{t^*}, \gamma_1).$$

Seja $\tilde{\gamma} \leq \min\{\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3\}$. Logo observarmos que as seguintes composições são possíveis

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{j \circ \tilde{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{R}}} & & \\
 \tilde{B}_{\delta/2}((\phi^*, t^*), \tilde{\gamma}) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{R}}} & \tilde{B}_{\delta}((\phi^*, t^*), \tilde{C} \cdot \tilde{\gamma}) & \xrightarrow{j} & \tilde{B}_{\delta/2}((\phi^*, t^*), \tilde{C} \cdot \tilde{\gamma}) \\
 \downarrow L & & & & \downarrow L \\
 B_{2\varepsilon}(\phi^* \circ q_{t^*}, \gamma_1) & & & & \mathcal{U}_{2\varepsilon} \\
 \downarrow k & & & & \downarrow k \\
 B_{\varepsilon/2}(\phi^* \circ q_{t^*}, \gamma_1) & \xrightarrow{\hat{\mathcal{R}}} & \mathcal{U}_{\varepsilon} & \xrightarrow{i} & \mathcal{U}_{\varepsilon/2} \\
 & & \xleftarrow{i \circ \hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}} & &
 \end{array}$$

$L = k \circ L$ (curved arrow from $\tilde{B}_{\delta/2}$ to $B_{\varepsilon/2}$) $L = k \circ L$ (curved arrow from $\tilde{B}_{\delta/2}$ to $\mathcal{U}_{\varepsilon/2}$)

Em particular temos que

$$\mathcal{R} \circ L = L \circ \tilde{\mathcal{R}}.$$

Já para os respectivos espaços tangentes temos as seguintes composições:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{(\phi^*, t^*)}} & & \\
 \mathcal{F}_{D_{\delta/2}} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{(\phi^*, t^*)}} & \mathcal{F}_{D_{\delta}} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & \mathcal{F}_{D_{\delta/2}} \times \mathbb{C} \\
 \downarrow \mathcal{D}L_{(\phi^*, t^*)} & & & & \downarrow \mathcal{D}L_{(\phi^*, t^*)} \\
 \mathcal{T}_{D_{2\varepsilon}} & & & & \mathcal{T}_{D_{2\varepsilon}} \\
 \downarrow k & & & & \downarrow k \\
 \mathcal{T}_{D_{\varepsilon/2}} & \xrightarrow{\mathcal{D}\hat{\mathcal{R}}_{\phi^* \circ q_{t^*}}} & \mathcal{T}_{D_{\varepsilon}} & \xrightarrow{i} & \mathcal{T}_{D_{\varepsilon/2}} \\
 & & \xleftarrow{\mathcal{D}\mathcal{R}_{\phi^* \circ q_{t^*}}} & &
 \end{array}$$

$\mathcal{D}L_{(\phi^*, t^*)}$ (curved arrow from $\mathcal{F}_{D_{\delta/2}} \times \mathbb{C}$ to $\mathcal{T}_{D_{\varepsilon/2}}$) $\mathcal{D}L_{(\phi^*, t^*)}$ (curved arrow from $\mathcal{F}_{D_{\delta/2}} \times \mathbb{C}$ to $\mathcal{T}_{D_{\varepsilon/2}}$)

E podemos observar que

$$\mathcal{D}\mathcal{R}_{L(\phi^*, t^*)} \cdot \mathcal{D}L_{(\phi^*, t^*)} = \mathcal{D}L_{(\phi^*, t^*)} \cdot \mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{(\phi^*, t^*)}.$$

Note que, pela Observação 2.4, $L(\phi^*, t^*)$ é ponto fixo do operador $\mathcal{R}$. Assim uma importante relação entre os operadores $\mathcal{R}$ e $\tilde{\mathcal{R}}$ é o seguinte resultado.

Proposição 3.5 *Seja $(\phi^*, t^*) \in \mathcal{A}_{D_{\delta/2}} \times (0, 1]$ ponto fixo do operador $\tilde{\mathcal{R}}$ e $L(\phi^*, t^*)$ o correspondente ponto fixo de $\mathcal{R}$. Então*

$$\sigma(\mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{(\phi^*, t^*)}) = \sigma(\mathcal{D}\mathcal{R}_{L(\phi^*, t^*)}).$$

Demonstração. Denotemos por $f_* = (\phi^*, t^*)$. Seja $\lambda \neq 0$ um autovalor de $\mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{f_*}$ com autovetor $v \neq 0$, isto é

$$\mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{f_*} v = \lambda v.$$

Pela relação de composição sobre os espaços tangentes mostrada acima temos

$$\mathcal{D}\mathcal{R}_{L(f_*)} \cdot \mathcal{D}L_{f_*} = \mathcal{D}L_{f_*} \cdot \mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{f_*}.$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathcal{R}_{L(f_*)} \cdot \mathcal{D}L_{f_*}(v) &= \mathcal{D}L_{f_*} \cdot \mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{f_*}(v) \\ \mathcal{D}\mathcal{R}_{L(f_*)}(\mathcal{D}L_{f_*} v) &= \lambda(\mathcal{D}L_{f_*} v) \end{aligned}$$

assim λ é autovalor de $\mathcal{D}\mathcal{R}_{L(f_*)}$ com $\mathcal{D}L_{f_*} v \neq 0$ da Proposição 2.6. Finalmente da compacidade dos operadores $\mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{f_*}$ e $\mathcal{D}\mathcal{R}_{L(f_*)}$ e o Teorema A.3 segue-se que $\sigma(\mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{f_*}) \subset \sigma(\mathcal{D}\mathcal{R}_{L(f_*)})$.

Tome $\tilde{\omega} \in \mathcal{T}_{D_{\varepsilon/2}}$. Nós sabemos que $\tilde{\omega}(x) = \psi(x^{2n})$, onde ψ é holomorfo numa vizinhança de 0. Como $\tilde{\omega}(x) = \sum a_i x^i$, se $2n \nmid i$ então $a_i = 0$, assim $\psi(x) = \sum a_{2ni} x^i$. O raio de convergência para ψ denotado por r_ψ não depende do raio de convergência de $\tilde{\omega}$ denotado por $r_{\tilde{\omega}}$ porque

$$\begin{aligned} r_\psi &= \frac{1}{\limsup_i \sqrt[i]{|a_{2ni}|}} \\ &\geq \left(\frac{1}{\limsup_i \sqrt[i]{|a_i|}} \right)^{2n} \\ &= r_{\tilde{\omega}}^{2n}. \end{aligned}$$

Nós sabemos que ψ é definido ao menos na bola de centro 0 e raio $(\frac{\varepsilon}{2})^{2n}$. Na verdade ψ é definido num $\theta(2n, \varepsilon)$ -estádio do intervalo $[0, 1]$ porque $\tilde{\omega}$ é definido numa vizinhança do intervalo $[-1, 1]$. Tomemos $\mu(2n, \varepsilon, t) > 0$ tal que a imagem do $\mu(2n, \varepsilon, t)$ -estádio $D_{\mu(2n, \varepsilon, t)}$, por $A_{t^*}^{-1}$, está contida no $\theta(2n, \varepsilon)$ -estádio do intervalo $[0, 1]$. Agora defina

$$F : \mathcal{T}_{D_{\varepsilon/2}} \rightarrow \mathcal{F}_{D_{\mu(2n, \varepsilon, t)}} \times \mathbb{C}$$

por

$$F(\tilde{\omega}) = (\omega, v), \quad (3.2)$$

onde

$$\omega(y) = \psi \circ A_{t^*}^{-1}(y) - D\phi^*(y) \frac{\psi \circ A_{t^*}^{-1}(1)}{2D\phi^*(1)}(1 + y)$$

e

$$v = \frac{\psi \circ A_{t^*}^{-1}(1)t^*}{2D\phi^*(1)}.$$

Seja $\lambda \neq 0$ um autovalor de $\mathcal{DR}_{L(f_*)}$ com autovetor $w \neq 0$, isto é

$$\mathcal{DR}_{L(f_*)} w = \lambda w.$$

Pela densidade da imagem do operador $\mathcal{DL}$ existe uma sequência v_s tal que $\mathcal{DL}_{f_*} v_s \rightarrow w$.

Como F é um operador compacto então

$$F \circ \mathcal{DL}_{f_*} v_s = i(v_s) \rightarrow F(w).$$

Então

$$\mathcal{DL}_{f_*} \cdot \mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{f_*} i(v_s) = \mathcal{DR}_{L(f_*)} \cdot \mathcal{DL}_{f_*} i(v_s)$$

Tomando o limite quando $s \rightarrow \infty$ assim

$$\mathcal{DL}_{f_*} \cdot \mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{f_*} F(w) = \mathcal{DR}_{L(f_*)} i(w)$$

Aplicando F na ultima equação temos

$$\mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{L(f_*)} F(w) = \lambda F i(w).$$

Finalmente diminuindo o domínio de w , se for necessário, que contém o intervalo $[-1, 1]$, temos

$$\mathcal{DR}_{L(f*)} F(w) = \lambda F(w).$$

□

Denotemos por V_β e $\tilde{V}_\lambda$ os autoespaços associados ao autovalor $\beta \in \sigma(\mathcal{DR}_{L(\phi^*, t^*)})$ e $\lambda \in \sigma(\mathcal{DR}_{(\phi^*, t^*)})$ respectivamente, isto é

$$V_\beta = N(\mathcal{DR}_{L(\phi^*, t^*)} - \beta Id) = \{v : (\mathcal{DR}_{L(\phi^*, t^*)} - \beta Id)v = 0\}$$

e

$$\tilde{V}_\lambda = N(\mathcal{DR}_{(\phi^*, t^*)} - \lambda Id) = \{(\omega, t) : (\mathcal{DR}_{(\phi^*, t^*)} - \lambda Id)(\omega, t) = 0\}.$$

Observe que estes autoespaços associados aos autovalores não dependem dos domínios de definição das aplicações que formam os autoespaços respectivos desde que ao aplicar o operador de renormalização ($\mathcal{R}$ ou $\tilde{\mathcal{R}}$) estes terminam definidos num domínio maior.

Proposição 3.6 *Seja $(\phi^*, t^*) \in \mathcal{A}_{D_{\delta/2}} \times (0, 1]$ o ponto fixo do operador $\tilde{\mathcal{R}}$. Se $\lambda \in \sigma(\mathcal{DR}_{(\phi^*, t^*)}) \setminus \{0\}$ então $\dim V_\lambda = \dim \tilde{V}_\lambda$.*

Demonstração. Pelo Teorema A.4 temos que V_λ e $\tilde{V}_\lambda$ são espaços finito dimensionais. Defina a aplicação continua

$$T : \tilde{V}_\lambda \rightarrow V_\lambda$$

por $T(v) = \mathcal{DL}_{(\phi^*, t^*)}(v)$. Desde que $\mathcal{DL}_{(\phi^*, t^*)}$ é injetivo temos que $\dim \text{Ker}(T) = 0$. Então $\dim \tilde{V}_\lambda = \dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T) \leq \dim V_\lambda$. Também podemos definir a aplicação injetiva contínua

$$\tilde{T} : V_\lambda \rightarrow \tilde{V}_\lambda$$

por $\tilde{T}(\tilde{w}) = F(\tilde{w})$, onde F é definida pela expressão 3.2. Então $\dim V_\lambda \leq \dim \tilde{V}_\lambda$. □

Capítulo 4

Hiperbolicidade para $\alpha \sim 2n$

4.1 Hiperbolicidade do ponto fixo do operador $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$

Seguindo com a notação da Seção 3.3 do Capítulo 3 temos o seguinte resultado de hiperbolicidade para o novo operador de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$ que seria análogo ao Teorema 3.3 para este operador.

Teorema 4.1 *Seja $\alpha = 2n$ o expoente crítico. Existe um número positivo N tal que o operador $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$, como definido na Seção 3.3, tem um único ponto fixo unimodal (ϕ^*, t^*) . Além disso (ϕ^*, t^*) é hiperbólico com variedade estável de codimensão um.*

Demonstração. A existência do ponto fixo (ϕ^*, t^*) para o operador $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$ é garantida por Martens [17]. Desde que

$$L \circ \tilde{\mathcal{R}}_{2n}(\phi^*, t^*) = \mathcal{R}_{2n} \circ L(\phi^*, t^*),$$

ver Observação 2.4, segue que $\phi^* \circ q_{t^*}$ é ponto fixo do operador $\mathcal{R}_{2n}$. E por Sullivan [6] (garante unicidade do ponto fixo) e pelo Teorema 3.3 temos que o operador $\mathcal{R}_{2n}$ tem ponto fixo hiperbólico $f^* = \phi^* \circ q_{t^*} \in B(f^*, \gamma_1)$ com variedade estável de codimensão um. Segue

das Proposições 3.5 e 3.6 que o ponto fixo (ϕ^*, t^*) do operador $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$ é hiperbólico com variedade estável de codimensão um. A unicidade do ponto fixo segue da Proposição 2.5.

□

4.2 Hiperbolicidade para $\alpha \sim 2n$

Agora pretendemos perturbar o expoente crítico $\alpha = 2n$. Mostraremos que se o expoente crítico α é proximo a $2n$, $\alpha \sim 2n$, o operador $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ tem um ponto fixo hiperbólico $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ com variedade estável de codimensão um. Na seção anterior mostramos este resultado para $\alpha = 2n$. Fixemos uma combinatória σ . Denotamos por $\mathcal{H}_\alpha(C, \eta, M)$ o espaço dos pares (ϕ, t) satisfazendo

1. $\phi \in \mathcal{A}_{D_\eta}$ onde ϕ é univalente sobre D_η ,
2. ϕ é real sobre a reta real,
3. $|\phi|_{C^3([-1,1])} \leq C$,
4. (ϕ, t) é M -vezes renormalizável com combinatória σ e expoente crítico $\alpha \sim 2n$.

Nós podemos restabelecer o Teorema 1.15 na seguinte forma

Teorema 4.2 (Complex bounds) *Existe δ_0 e C_0 tal que o seguinte se satisfaz: para todo $C > 0$ e $\eta > 0$ existe $N_0 = N_0(C, \eta)$ tal que se $(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C, \eta, M)$ com $M > N_0$ então $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^n(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, M - n)$ para $M > n \geq N_0$.*

Corolário 4.3 *Existe δ_0 , C_0 e $N_0 = N_0(C_0, \delta_0)$ tal que*

- $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{N_0}(\mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty)) \subset \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty)$.
- Para todo C, η existe $N = N(C, \eta)$ tal que para todo $k \geq 0$ temos

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{N+kN_0}(\mathcal{H}_\alpha(C, \eta, \infty)) \subset \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty).$$

Demonstração. Para provar a primeira afirmação do corolário seja $(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty)$. Pelo teorema anterior existe $N_0 = N_0(C_0, \delta_0)$ tal que se $(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty)$ então $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{N_0}(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty)$. Assim a primeira afirmação fica provada. Agora pelo Teorema 4.2 para todo $C > 0$ e $\eta > 0$ existe $N = N(C, \eta)$ tal que se $(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C, \eta, \infty)$ então $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^N(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty)$. Logo pela primeira afirmação para todo $k \geq 0$ temos que

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{N+kN_0}(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty).$$

□

Corolário 4.4 *Todo ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ unimodal do operador $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ pertence a $\mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty)$.*

Demonstração. Temos que $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ é infinitamente renormalizável com combinatória σ isto pois seu correspondente ponto fixo $\phi_\alpha^* \circ q_{t_\alpha^*}$ do operador $\mathcal{R}_\alpha$ é infinitamente renormalizável com combinatória σ . Logo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*) \in \mathcal{H}_\alpha(C, \eta, \infty)$, para algum $C > 0$ e $\eta > 0$. Assim o resultado segue do Teorema 4.2. □

No que segue do presente trabalho vamos a entrar nos detalhes das provas das seguintes afirmações que motivaram nosso trabalho quando o expoente crítico α é próximo a um número par:

- O operador renormalização $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ tem um único ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$. Além disso o ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ é hiperbólico.
- A variedade estável do ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ tem codimensão um.
- Se o par (ϕ, t) é infinitamente renormalizável por $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$. Este faz parte da variedade estável do ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$.

Assim começamos definindo um novo operador

$$F((\phi, t), \alpha) = \tilde{\mathcal{R}}_\alpha(\phi, t) - (\phi, t),$$

o qual será essencial na prova das duas primeiras afirmações feitas acima.

Proposição 4.5 *O operador F é analítico complexo nas variáveis (ϕ, t) e analítico real na variável α .*

Demonstração. Isto é consequência da Proposição 3.4. $\square$

Teorema 4.6 *Existe $\eta > 0$ e uma aplicação real analítica $\alpha \rightarrow (\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$, onde $\alpha \in (2n - \eta, 2n + \eta)$, tal que $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ é o ponto fixo hiperbólico para o operador $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$, com variedade estável de codimensão um.*

Demonstração. Da Proposição 4.5 temos que F é analítico complexo nas variáveis (ϕ, t) e analítico real na variável α . Além disso

$$\mathcal{D}\tilde{\mathcal{R}}_{2n}(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*) - id$$

é invertível porque (ϕ_{2n}^*, t_{2n}^*) é ponto fixo hiperbólico de $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$, logo pelo Teorema da Função Implícita existe $\eta > 0$ e uma aplicação real analítica $\alpha \rightarrow (\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$, onde $\alpha \in (2n - \eta, 2n + \eta)$, tal que

$$F((\phi_\alpha^*, t_\alpha^*), \alpha) = F((\phi_{2n}^*, t_{2n}^*), 2n) = 0.$$

Assim obtemos o ponto fixo hiperbólico $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ para o operador $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$. Note que $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ tem variedade estável de codimensão um. $\square$

O seguinte resultado é uma simples consequência do Teorema de Montel e das cotas reais a priori para aplicações infinitamente renormalizáveis, como descrito no Capítulo 1.

Proposição 4.7 *Se $(\phi_\alpha, t_\alpha) \in \mathcal{H}_\alpha(C, 2\eta, \infty)$ e $\alpha \rightarrow \beta$, com $\beta > 1$, então existe uma subsequência α_i tal que*

$$(\phi_{\alpha_i}, t_{\alpha_i}) \rightarrow (\phi_\beta, t_\beta),$$

no espaço $\mathcal{A}_{D_\eta} \times \mathbb{C}$ e $(\phi_\beta, t_\beta) \in \mathcal{H}_\beta(C, \eta, \infty)$.

Teorema 4.8 *Para cada $\alpha \sim 2n$, existe um único ponto fixo unimodal $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ de $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$, e este pertence a $\mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty)$.*

Demonstração. Desde que (ϕ_{2n}^*, t_{2n}^*) é ponto fixo hiperbólico, existe uma vizinhança $V_1 = B((\phi_{2n}^*, t_{2n}^*), \eta)$ de (ϕ_{2n}^*, t_{2n}^*) tal que para $\alpha \sim 2n$, existe um único ponto fixo de $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ em V_1 . Portanto basta mostrarmos que $\alpha \sim 2n$ *todo* ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ de $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ pertence a V_1 . De fato, suponha que existe uma sequência $\alpha_s \rightarrow 2n$, onde $s \rightarrow \infty$, e pontos fixos $(\phi_{\alpha_s}^*, t_{\alpha_s}^*)$ de $\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha_s}$ tais que

$$|\phi_{\alpha_s}^* - \phi_{2n}^*|_{D_\delta} \geq \eta \text{ ou } |t_{\alpha_s}^* - t_{2n}^*| \geq \eta. \quad (4.1)$$

Pelo Corolário 4.3

$$(\phi_{\alpha_s}^*, t_{\alpha_s}^*) \in \mathcal{H}_{\alpha_s}(C_0, \delta_0, \infty).$$

E pela definição de $\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha_s}$ temos que

$$(\phi_{\alpha_s}^*, t_{\alpha_s}^*) = \tilde{\mathcal{R}}_{\alpha_s}(\phi_{\alpha_s}^*, t_{\alpha_s}^*)$$

está em $\mathcal{H}_{\alpha_s}(C_0, 2\delta_0, \infty)$. Então $(\phi_{\alpha_s}^*, t_{\alpha_s}^*)$ é uma família pré-compacta sobre $\mathcal{A}_{D_{\delta_0}} \times \mathbb{C}$, em particular existe uma subsequência $(\phi_{\alpha_{s_i}}^*, t_{\alpha_{s_i}}^*)$ convergindo para $(\phi, t) \in \mathcal{H}_{2n}(C_0, \delta_0, \infty)$. Observe que como

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha_{s_i}}(\phi_{\alpha_{s_i}}^*, t_{\alpha_{s_i}}^*) = (\phi_{\alpha_{s_i}}^*, t_{\alpha_{s_i}}^*),$$

quando $s_i \rightarrow 2n$, temos que $(\phi, t) \in \mathcal{H}_{2n}(C_0, \delta_0, \infty)$ é um ponto fixo do operador $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}$. Então pela unicidade do ponto fixo para $\alpha = 2n$ temos

$$(\phi, t) = (\phi_{2n}^*, t_{2n}^*).$$

Isto leva a uma contradição com a Eq. (4.1). □

Teorema 4.9 (Convergência) *Se $(\phi, t) \in B_\delta((\phi^*, t^*), \tilde{\gamma})$ é um par unimodal, infinitamente renormalizável com combinatória σ , então temos que $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^i(\phi, t) \in B_\delta((\phi^*, t^*), \tilde{\gamma})$, para todo i suficientemente grande e*

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^i(\phi, t) \rightarrow_i (\phi^*, t^*)$$

em $\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}$.

Demonstração. Note que pelas cotas complexas a priori, temos que

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^i(\phi, t) \in \mathcal{H}_{2n}(C_0 \cdot \delta_0, \infty),$$

para todo i suficientemente grande. Suponhamos que a conclusão do teorema não é verdadeira. Assim existe $\eta > 0$ e um par (ϕ, t) infinitamente renormalizável com expoente crítico $2n$ tal que

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{i_j}(\phi, t) - (\phi^*, t^*)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} > \eta, \quad (4.2)$$

onde $i_j \rightarrow_j \infty$. Temos que a primeira componente de $\{\tilde{\mathcal{R}}_{2n} \circ \tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{i_j-1}(\phi, t)\}$ está definida e é univalente em $\overline{D}_{2\delta}$. Logo esta forma uma família pré-compacta em $\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}$, em particular existe uma subsequência convergente

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{i_j}(\phi, t) \rightarrow (\tilde{\phi}, \tilde{t}).$$

Como o operador de composição L satisfaz

$$L \circ \tilde{\mathcal{R}}_{2n} = \mathcal{R}_{2n} \circ L$$

segue que

$$\mathcal{R}_{2n}^{i_j}(\phi \circ q_t) = \mathcal{R}_{2n}^{i_j} \circ L(\phi, t) \rightarrow_j L(\tilde{\phi}, \tilde{t}) = \tilde{\phi} \circ q_{\tilde{t}}.$$

Por Sullivan [6] (veja também [3]) o operador $\mathcal{R}_{2n}$ possui um único ponto fixo $\phi^* \circ q_{t^*}$. Além disso

$$\mathcal{R}_{2n}^i(\phi \circ q_t) \rightarrow_i \phi^* \circ q_{t^*},$$

para todo $\phi \circ q_t$ infinitamente renormalizável. Assim $\phi^* \circ q_{t^*} = \tilde{\phi} \circ q_{\tilde{t}}$. Pela Proposição 2.5 temos que $\tilde{\phi} = \phi^*$ e $\tilde{t} = t^*$. Isto nos leva a uma contradição com a Eq. (4.2). $\square$

Na prova do seguinte resultado fazemos uso de aplicações do tipo polinomial, quaseconformalidade, argumento de pullback de Sullivan entre outros. As definições destes podem ser encontrados no apêndice. Para mais detalhes veja [19], [7], [2] e [3].

Teorema 4.10 (Equicontinuidade) *Seja $(\phi, t) \in \mathcal{H}_{2n}(C, \delta_0, \infty)$. Então existe i_0 tal que para todo $\tilde{\gamma} > 0$ existe $\tilde{\eta} > 0$ com a seguinte propriedade. Se $(\psi, v) \in \mathcal{H}_{2n}(C, \delta_0, \infty)$ satisfaz*

$$|(\phi, t) - (\psi, v)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} < \tilde{\eta}$$

então

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^i(\psi, v) - \tilde{\mathcal{R}}_{2n}^i(\phi, t)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} < \tilde{\gamma}$$

para todo $i \geq i_0$.

Demonstração. Primeiramente mostraremos a seguinte afirmação: existe i_0 tal que para todo $\gamma > 0$ existe $\eta > 0$ com a seguinte propriedade: Se

$$(\psi, v) \in \mathcal{H}_{2n}(C, \delta_0, \infty)$$

satisfaz

$$|(\phi, t) - (\psi, v)|_{\mathcal{A}_{D_{\delta_0}} \times \mathbb{C}} < \eta$$

então

$$|\mathcal{R}_{2n}^i(\psi \circ q_v) - \mathcal{R}_{2n}^i(\phi \circ q_t)|_{D_\varepsilon} < \gamma$$

para todo $i \geq i_0$. De fato, como a aplicação $f := \phi \circ q_t$ é uma aplicação unimodal analítica em uma vizinhança V_0 do intervalo $[-1, 1]$, com ponto crítico de ordem $2n$, pelo teorema de cotas complexas de Sullivan [6], para i_0 suficientemente grande existe uma extensão do tipo polinomial

$$\mathcal{R}_{2n}^{i_0} f: U_f \rightarrow U,$$

onde $[-1, 1] \subset U_f \subset U$. Se $(\psi, v) \in \mathcal{H}_{2n}(C, \delta_0, \infty)$ é próximo de (ϕ, t) , então $g = \psi \circ q_v$ estará próximo a f , logo $\mathcal{R}_{2n}^{i_0} g$ tem uma extensão do tipo polinomial

$$\mathcal{R}_{2n}^{i_0} g: U_g \rightarrow U.$$

Aqui podemos escolher U de modo que o disco U_g move-se holomorficamente com respeito a g . Em particular, via teoria dos movimentos holomórficos, o argumento de pullback

de Sullivan (veja [19]) e a inexistência de campos de linhas invariantes com suporte no conjunto de Julia cheio de f , existe um homeomorfismo quasiconforme $h_g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(\mathcal{R}^{i_0} g) \circ h_g(x) = h_g \circ (\mathcal{R}^{i_0} f)(x) \quad (4.3)$$

para todo $x \in U_f$, além disso a quasiconformalidade $Q(g)$ de h_g satisfaz

$$Q(\psi \circ q_v) \rightarrow 1 \text{ quando } (\psi, v) \rightarrow (\phi, t).$$

Note que todas as futuras renormalizações de f e g são conjugadas por reescalamentos da mesma conjugação h_g , logo a quasiconformalidade de tais conjugações são igualmente limitadas por $Q(\psi \circ q_v)$. Consequentemente, como h_g e todos estes reescalamentos que dão origem a conjugações entre as renormalizações fixam 1 e -1 , segue que h_g e as conjugações entre as correspondentes renormalizações de f e g convergem uniformemente para a identidade em partes compactas de $\mathbb{C}$ quando (ψ, v) converge para (ϕ, t) .

Desde que pelas cotas complexas a priori obtidas no Capítulo 1, as sequências $\mathcal{R}_{2n}^i f$ e $\mathcal{R}_{2n}^i g$ são limitadas em $\mathcal{U}_{D_\varepsilon}$, segue da Eq. (4.3) que se (ψ, v) é suficientemente próximo de (ϕ, t) então

$$|\mathcal{R}_{2n}^i(\psi \circ q_v) - \mathcal{R}_{2n}^i(\phi \circ q_t)|_{D_\varepsilon} < \gamma$$

se $i \geq i_0$. Concluimos portanto a prova da afirmação.

Suponha por absurdo que exista uma sequência (ψ_j, v_j) tal que

$$|(\phi, t) - (\psi_j, v_j)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} \rightarrow_j 0$$

mas

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{i_j}(\psi_j, v_j) - \tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{i_j}(\phi, t)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} > \tilde{\gamma}, \quad (4.4)$$

com $i_j \geq i_0$ e $i_j \rightarrow_j \infty$.

Note que, pelas cotas complexas e reais a priori, que

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{i_j}(\psi_j, v_j) = (\psi_{j,i_j}, v_{j,i_j}),$$

onde ψ_{j,i_j} é univalente em $D_{2\delta}$, mantém fixos 1 e -1 e

$$0 < \inf_j v_{j,i_j} \leq \sup_j v_{j,i_j} < 1.$$

assim nós podemos supor que a segunda coordenada destes pares convergem para algum $v_\infty \in (0, 1)$. Como ψ_{i,i_j} é univalente em $D_{2\delta}$, tomando uma subsequência, se for necessário, podemos supor que ψ_{i,i_j} converge para alguma aplicação univalente ψ_∞ em $\overline{D}_\delta$. Em particular

$$\mathcal{R}_{2n}^{i_j}(\psi_j \circ q_{v_j}) = L(\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{i_j}(\psi_j, v_j)) \rightarrow_j \psi_\infty \circ q_{v_\infty}.$$

Por outro lado, pela afirmação que provamos no início desta demonstração e o Teorema 4.9 obtemos

$$\mathcal{R}_{2n}^{i_j}(\psi_j \circ q_{v_j}) \rightarrow_j \phi^* \circ q_{t^*}.$$

Logo $\psi_\infty \circ q_{v_\infty} = \phi^* \circ q_{t^*}$. Pela Proposição 2.5 concluímos que

$$(\psi_\infty, v_\infty) = (\phi^*, t^*).$$

Assim

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{i_j}(\psi_j, v_j) - (\phi^*, t^*)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} \rightarrow_j 0. \quad (4.5)$$

Mas Eq. (4.4) e o Teorema 4.9 implicam que

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{i_j}(\psi_j, v_j) - (\phi^*, t^*)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} > \tilde{\gamma}/2$$

para j suficientemente grande, o que certamente contradiz Eq. (4.5). $\square$

Seja $a > 0$ uma constante. Denotemos por $B_a^\infty(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ o conjunto de pares de aplicações infinitamente renormalizável (ϕ, t) por $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ tal que

$$|(\phi, t) - (\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} < a.$$

Teorema 4.11 *Para todo $\gamma > 0$ existe N_2 tal que para todo $\alpha \sim 2n$ temos*

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{N_2}(\mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty)) \subset B_\gamma^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*). \quad (4.6)$$

Demonstração. Seja $\gamma > 0$. Afirmamos que existe M_2 tal que

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{M_2}(\mathcal{H}_{2n}(C_0, \delta_0, \infty)) \subset B_{\gamma/2}^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*). \quad (4.7)$$

De fato, suponhamos que existe uma sequência $(\phi_i, t_i) \in \mathcal{H}_{2n}(C_0, \delta_0, \infty)$ tal que para uma subsequência $j_i \rightarrow \infty$ temos que

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{j_i}(\phi_i, t_i) - (\phi_{2n}^*, t_{2n}^*)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} > \gamma/2. \quad (4.8)$$

Pelo Corolário 4.3 obtemos que $\tilde{\mathcal{R}}_{2n}(\phi_i, t_i) \in \mathcal{H}_{2n}(C_0, 2\delta_0, \infty)$, em particular temos que forma uma família pré-compacta em $\mathcal{A}_{D_{\delta_0}} \times \mathbb{C}$. Assim existe uma subsequência, a qual denotamos da mesma forma, tal que

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2n}(\phi_i, t_i) = j \circ \tilde{\mathcal{R}}_{2n}(\phi_i, t_i) \rightarrow (\phi, t),$$

onde $(\phi, t) \in \mathcal{H}_{2n}(C_0, \delta_0, \infty)$. Pelo Teorema 4.9 temos que para $\gamma > 0$ existe $k_0 > 0$ tal que para todo $k > k_0$

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^k(\phi_i, t_i) - (\phi_{2n}^*, t_{2n}^*)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} < \frac{\gamma}{8}.$$

E fazendo uso do Teorema 4.10 existe $i_0 > 0$ e $k_1 > 0$ tal que para todo $i > i_0$ e $k > k_1$ temos que

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^k(\tilde{\mathcal{R}}_{2n}(\phi_i, t_i)) - \tilde{\mathcal{R}}_{2n}^k(\phi, t)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} < \frac{\gamma}{8}.$$

Logo para $k > \max\{k_0, k_1\}$ obtemos

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{k+1}(\phi_i, t_i) - (\phi_{2n}^*, t_{2n}^*)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} < \frac{\gamma}{4}$$

o que contradiz a Eq. (4.8). Logo a afirmação acima é verdadeira.

Afirmamos que podemos tomar $N_2 = M_2 + 1$ para $\alpha \sim 2n$. Caso contrário existe uma sequência $\alpha_s \rightarrow 2n$ e $(\phi_s, t_s) \in \mathcal{H}_{\alpha_s}(C_0, \delta_0, \infty)$ tal que

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha_s}^{M_2+1}(\phi_s, t_s) - (\phi_{2n}^*, t_{2n}^*)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} > \gamma. \quad (4.9)$$

Temos que primeira componente dos pares na família $\{\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha_s}(\phi_s, t_s)\}$ tem uma extensão complexa univalente para $D_{2\delta_0}$. Assim esta é uma família pré-compacta sobre $\mathcal{A}_{D_{\delta_0}} \times \mathbb{C}$. Em particular existe uma subsequência $\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha_{s_i}}(\phi_{s_i}, t_{s_i})$ sobre $\mathcal{A}_{D_{\delta_0}} \times \mathbb{C}$ que converge para $(\tilde{\phi}, \tilde{t}) \in \mathcal{H}_{2n}(C_0, \delta_0, \infty)$. Da afirmação acima temos

$$\tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{M_2}(\tilde{\phi}, \tilde{t}) \in B_{\gamma/2}^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*).$$

Por outro lado

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha_{s_i}}^{M_2+1}(\phi_{s_i}, t_{s_i}) \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}_{2n}^{M_2}(\tilde{\phi}, \tilde{t})$$

em $\mathcal{A}_{D_{\delta_0}} \times \mathbb{C}$. Assim para i suficientemente grande temos

$$|\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha_{s_i}}^{M_2+1}(\phi_{s_i}, t_{s_i}) - (\phi_{2n}^*, t_{2n}^*)|_{\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}} < \gamma,$$

o que contradiz Eq. (4.9). $\square$

Definição 4.12 *A variedade estável do ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$, denotado por $W^s = W^s(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$, é definida como*

$$W^s := \{(\phi, t) \text{ unimodal} : \tilde{\mathcal{R}}_\alpha^n(\phi, t) \rightarrow_n (\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)\}$$

Por

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^n(\phi, t) \rightarrow_n (\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$$

entende-se que $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^n(\phi, t)$ pertence a $\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}$ para n suficientemente grande, e que $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^n(\phi, t)$ converge para $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ em $\mathcal{A}_{D_\delta} \times \mathbb{C}$.

Definição 4.13 *Seja V_1 uma vizinhança do ponto fixo $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ do operador $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$. Defina*

$$\mathcal{N}_{V_1}^k(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*) := \{(\phi, t) : \tilde{\mathcal{R}}_\alpha^j(\phi, t) \in V_1, 0 \leq j \leq k\},$$

onde $k \in \mathbb{N} \cup \infty$. Além disso, definimos

$$\mathcal{N}_{V_1}^\infty(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{V_1}^k(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*),$$

ou seja, o conjunto dos pares tal que todos os seus iterados estão próximos de $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$.

Agora estamos prontos para definir a variedade estável local.

Definição 4.14 *Para cada vizinhança V de $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ definimos a correspondente variedade estável local*

$$W_V^s(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*) := W^s(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*) \cap \mathcal{N}_V^\infty(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*).$$

Como $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ é ponto fixo hiperbólico, podemos escolher V_1 convenientemente de modo que

$$W_{V_1}^s(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*) := \mathcal{N}_{V_1}^\infty(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*). \quad (4.10)$$

Teorema 4.15 *Para $\alpha \sim 2n$ temos que todo par unimodal (ϕ, t) , infinitamente renormalizável com combinatoria σ e com ordem α , pertence a variedade estável do único ponto fixo unimodal $(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*)$ de $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$, isto é*

$$\bigcup_{C>0} \bigcup_{\eta>0} \mathcal{H}_\alpha(C, \eta, \infty) \subseteq W^s(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*).$$

Demonstração. Seja V_1 satisfazendo a Eq. (4.10). Escolha $\gamma > 0$ tal que $B_\gamma(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*)$ está contido em V_1 .

Afirmção I. Existe γ_1 tal que para todo $\alpha \sim 2n$ temos

$$B_{\gamma_1}^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*) \subset W_{V_1}^s.$$

De fato, seja N_2 como no Teorema 4.11. Escolha $\gamma_1 < \gamma$ suficientemente pequeno tal que para todo $i = 1, \dots, N_2$,

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^i B_{\gamma_1}^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*) = \tilde{\mathcal{R}}_\alpha \circ \tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{i-1} B_{\gamma_1}^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*) \subset B_\gamma^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*) \cap \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty).$$

Pelo Teorema 4.11 obtemos $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{i+kN_2} B_{\gamma_1}^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*) \subset B_\gamma^\infty(\phi_2^*, t_2^*) \subset V_1$, para todo k e $i = 1, \dots, N_2$. Assim segue a afirmação.

Afirmção II. Se $(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C, \eta, \infty)$, para algum $C > 0$ e $\eta > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^N(\phi, t) \in B_{\gamma_1}^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*)$$

no espaço $\mathcal{A}_{D_{\delta_0}} \times \mathbb{C}$. De fato, pelo Teorema 4.2 existe N_0 tal que para $\alpha \sim 2n$ e $(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C, \eta, \infty)$,

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{N_0}(\phi, t) \in \mathcal{H}_\alpha(C_0, \delta_0, \infty).$$

E pelo Teorema 4.11 para todo $\gamma_1 > 0$ existe N_2 tal que

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^{N_0+N_2}(\phi, t) \in B_{\gamma_1}^\infty(\phi_{2n}^*, t_{2n}^*).$$

Assim usando as afirmações acima segue facilmente que

$$\bigcup_{C>0} \bigcup_{\eta>0} \mathcal{H}_\alpha(C, \eta, \infty) \subseteq W^s(\phi_\alpha^*, t_\alpha^*).$$

□

Apêndice A

Operadores compactos

A.1 Espectro de um operador compacto

Sejam E, F espaços de Banach. Denote $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço de operadores lineares com domínio E e posto em F .

Definição A.1 Dizemos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é compacto se, para cada sequência limitada $\{x_n\}$ em E , a sequência $\{Tx_n\}$ contém uma subsequência convergindo para algum limite em F . Denote por $\mathcal{K}(E, F)$ o conjunto de operadores compactos e defina $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Observe que um operador linear compacto é contínuo. Pois, a descontinuidade de T poderia implicar a existência de uma sequência $\{x_n\}$ tal que $|x_n| \leq 1$ e $|Tx_n| \rightarrow \infty$, e isto não pode acontecer se T é compacto.

Definição A.2 Seja $T \in \mathcal{L}(E)$. O conjunto resolvente é

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \in \mathcal{L}(E) \text{ é bijetivo} \}.$$

O espectro $\sigma(T)$ é o complemento do conjunto resolvente, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$. Dizemos que λ é autovalor e escrevemos $\lambda \in VP(T)$ se

$$N(T - \lambda I) \neq 0.$$

Teorema A.3 *Seja $T \in \mathcal{K}(E)$, com $\dim E = \infty$. Então*

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$,
3. *temos uma das seguintes proposições*
 - $\sigma(T) = 0$
 - $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é finito,
 - $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é uma sequência acumulando em zero.

Teorema A.4 *Se $T \in \mathcal{K}(E)$, com $\dim E = \infty$, e λ é um escalar não nulo, então o autoespaço associado a λ , $N(T - \lambda I)$, é finito-dimensional.*

Apêndice B

Resultados de análise complexa

B.1 Aplicações holomorfas

Nós fazemos uso do seguinte resultado na extensão dos operadores de renormalização para operadores analíticos complexos.

Lema B.1 *Sejam $f_i : \bar{V}_i \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, aplicações contínuas, holomorfas no domínio V_i respectivamente e K um conjunto compacto contido em V_1 tal que $f_i \circ f_{i-1} \circ \cdots \circ f_1$ está definido em K , e $f_i \circ f_{i-1} \circ \cdots \circ f_1(K) \subset V_{i+1}$, para todo $i < n$. Então existe $\gamma = \gamma(K)$ tal que se $g_i : \bar{V}_i \rightarrow \mathbb{C}$ são funções holomorfas que satisfazem*

$$|g_i - f_i|_{V_i} \leq \gamma$$

então $g_i \circ g_{i-1} \circ \cdots \circ g_1$ está definido em K , para todo $i \leq n$.

Outra das ferramentas importantes usada ao longo do trabalho foi o Teorema de Montel.

Definição B.2 *Seja X uma variedade complexa, e seja $\mathcal{F}$ uma família de aplicações holomorfas $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Então $\mathcal{F}$ é uma família normal se para cada sequência f_n em $\mathcal{F}$*

tem uma subsequência a qual converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de X . O limite f_∞ é de novo uma aplicação holomorfa com valores em $\hat{\mathbb{C}}$.

Teorema B.3 (Montel) *Seja X uma variedade complexa, e seja $\mathcal{F}$ uma família de aplicações holomorfas $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ as quais omitem três valores. Isto é, existem três pontos distintos $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que $f(X) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ para qualquer $f \in \mathcal{F}$. Então $\mathcal{F}$ é uma família normal.*

A prova deste resultado segue do Lema de Schwarz e o fato que a esfera de três buracos é coberta pelo disco unitário. Mais geralmente temos

Corolário B.4 *Seja $s_i : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $i = 1, 2, 3$ três aplicações holomorfas cujos gráficos são disjuntos. Então o conjunto $\mathcal{F}$ de aplicações holomorfas $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cujos gráficos são disjuntos dos gráficos de $\{s_1, s_2, s_3\}$ é uma família normal.*

B.2 Aplicações quaseconformes

Qualquer superfície de Riemann A com $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, disco unitário menos o zero ou o anel

$$A(R) = \{z : 1 < |z| < R\}$$

para algum $R \in (1, \infty)$. No caso que A é isomorfo a $A(R)$, o modulo de A é definido por

$$\text{mod}(A) = \frac{\log R}{2\pi}.$$

Por convenção $\text{mod}(A) = \infty$ nos outros dois casos.

Definição B.5 *Um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ entre superfícies de Riemann X e Y é K -quaseconforme, $K \geq 1$ se para todo anel $A \subset X$,*

$$\frac{1}{K} \text{mod}(A) \leq \text{mod} f(A) \leq K \text{mod}(A).$$

Uma aplicação f é 1-quaseconforme se e somente se f é conforme no sentido usual.

B.3 Aplicações do tipo polinomial

Para qualquer polinômio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grau $d > 1$, o conjunto de Julia cheio $K(f)$ é o conjunto compacto de pontos cujas iterações permanecem limitadas; sua fronteira é o conjunto de Julia $J(f)$.

Definição B.6 *Uma aplicação do tipo polinomial $f : U \rightarrow V$ é uma aplicação holomorfa própria entre domínios simplesmente conexos U e V em $\mathbb{C}$ tal que $\overline{U}$ é um subconjunto compacto de V .*

O conjunto de Julia cheio $K(f)$ é definido por

$$K(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U);$$

e o conjunto de Julia $J(f)$ é igual à fronteira de $K(f)$ em $\mathbb{C}$.

Definição B.7 *Sejam f e g duas aplicações do tipo polinomial. Dizemos que f e g são equivalentes híbridos se existe uma conjugação quaseconforme ϕ entre elas, definida numa vizinhança dos seus respectivos conjuntos de Julia cheio, tal que $\overline{\partial}\phi = 0$ sobre $K(f)$.*

O seguinte resultado é devido a Douady e Hubbard:

Teorema B.8 *Qualquer aplicação do tipo polinomial f é equivalente híbrido a (uma restrição apropriada de) um polinômio g do mesmo grau. Quando $K(f)$ é conexo, o polinômio g é único a menos de uma conjugação afim.*

Referências Bibliográficas

- [1] A. AVILA, M. MARTENS, AND W.DE MELO, *On the dynamics of the renormalization operator*, Global Analysis On Dynamical Systems, p. 449-460, (2001).
- [2] C. MCMULLEN, *Complex dynamics and renormalization*, Annals of Mathematics Studies,135, Princeton University Press,Princeton, (1994).
- [3] C. MCMULLEN, *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*, Annals of Mathematics Studies 142, Princeton University Press, Princeton, (1996).
- [4] D. SMANIA, *Complex bounds for multimodal maps: bounded combinatorics*, Institute of Physics Publising, Nonlinearity 14 1311-1330, (2001).
- [5] D. SMANIA, *On the hyperbolicity of the period-doubling fixed point*, Transactions of the American Mathematical Society, ISSN 0002-9947, Vol. 358, N° 4, p. 1827-1846, (2006).
- [6] D. SULLIVAN, *Bounds, quadratic differentials and renormalization conjectures*, AMS Centennial Publications 2, Mathematics into the Twenty-first Century, A.M.S., Providence, RI, p. 417-466, (1992).
- [7] E.DE FARIA AND W.DE MELO, *One dimensional dynamics: the mathematical tools*, Publicações do 23o Colóquio Brasileiro de Matemática (2001).
- [8] E.DE FARIA, W.DE MELO, AND A. PINTO, *Global hyperbolicity of renormalization for C^r unimodal mappings*, Ann. of Math., Princeton, v. 164, p. 731-824, (2006).

- [9] G. BACHMAN AND L. NARICI, *Functional analysis*, Brooklyn: New York, Academic Press International Edition (1966).
- [10] G. LEVIN AND S. VAN STRIEN, *Local connectivity of the Julia set of real polynomials*, Ann. of Math. (2) 147, no. 3, p. 471-541 (1998).
- [11] J. GRACZYK AND G. SWIATEK, *Polynomial-like property for real quadratic polynomials*, Topology Proc. 21, p. 33-112 (1996).
- [12] JOHN B. CONWAY, *Functions of one complex variable I*, Springer-Verlag, 2nd ed. (1978).
- [13] JOHN B. CONWAY, *Functions of one complex variable II*, Springer-Verlag, (1995).
- [14] M. LYUBICH, *Dynamics of quadratic polynomials*, I,II Acta Math. 178 185-297, (1997).
- [15] M. LYUBICH AND M. YAMPOLSKY, *Dynamics of quadratic polynomials: complex bounds for real maps*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 47 1249-55, (1997).
- [16] M. LYUBICH, *Feigenbaum-Coullet-Tresser universality and Milnor's Hairiness Conjecture*, Ann. of Math.(2), 149 319-420, (1999).
- [17] M. MARTENS, *The periodic points of renormalization*, Ann. of Math. 147, p. 543-584, (1998).
- [18] SERGE LANG, *Differential manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, (1972).
- [19] W. DE MELO AND S. VAN STRIEN, *One-dimensional dynamics*, 1. ed. Springer-Verlag, (1993).
- [20] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, (1987).

Índice Remissivo

Aplicação

do tipo polinomial, 69

renormalizável, 12

unimodal, 9

univalente, 16

Autoespaço, 52, 66

Autovalor, 50, 66

Ciclo, 10

Combinatória limitada, 14

Conjunto

$2n$ -simétrico, 34

a -estádio, 18, 36

de Julia cheio, 69

Cota

complexa a priori, 20

real a priori, 22

Espectro, 66

Família normal, 67

Operador

compacto, 65

composição, 37

de renormalização $\tilde{\mathcal{R}}$, 14, 44

de renormalização $\mathcal{R}$, 12, 43

Par

renormalizável, 12

unimodal, 22

Período da renormalização, 12

Permutação, 10

Permutação unimodal, 10

Quaseconforme, 68

Teorema

de Montel, 68

Aproximação polinomial, 34

Complex Bounds, 21

de Distorção de Koebe, 16

Generalizado de Distorção, 18

Variedade estável, 63