Assinatura: Ana Paula Lampião Trezona

USP – São Carlos
Janeiro/2005

Aluno: Everaldo de Mello Bonotto

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Marcia Cristina Anderson Braz Federson

Marcia Federson

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

Alexandre Nolasco de Carvalho

Prof. Dr. Sérgio Muniz Oliva Filho

Sérgio Muniz Oliva Filho

Aos meus pais
Heleno e Maria Edinalva
e às minhas irmãs
Eliandra e Edinéia.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sua onipotência e misericórdia.

Aos meus pais, que me deram a oportunidade de estudo e graças a eles pude conquistar mais uma etapa em minha vida.

Aos meus amigos de graduação do curso de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual Paulista - UNESP, campus de Presidente Prudente, SP.

Aos meus amigos de minha turma de mestrado (Aldicio, Andréa, Angela, Daniela, Fábio, Márcio Alexandre, Márcio, Nivaldo, Rafael, Rodrigo, Thiago e Vanda), pelo companherismo e incentivos para minha caminhada.

Aos professores de Presidente Prudente, em especial à Profa. Dra. Monica Fürkotter, pelos conselhos e incentivo a continuar os estudos.

Aos professores e funcionários da USP. Obrigado por tudo!

Agradeço a todos os meus amigos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

Finalmente, sou grato à minha orientadora, a professora Dra. Márcia Federson, que foi de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho, devido ao seu conhecimento científico, sua disposição para auxiliar-me na pesquisa, pela amizade, paciência, confiança, compreensão, sugestões e leitura de cada linha deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um texto, até então inexistente, que compreenda a teoria fundamental dos sistemas semidinâmicos impulsivos. Com este propósito, coletamos resultados de vários artigos e os organizamos dando uma seqüência lógica, unificando terminologias e notações e desenvolvendo as demonstrações de forma mais clara e didática do que originalmente apresentadas. Acrescentamos à teoria básica dos sistemas semidinâmicos impulsivos alguns resultados novos sobre conjugação topológica e estabilidade assintótica.

Abstract

The aim of this work is to present a text that encompasses the basis of impulsive semidynamical systems. In view of this, we collected results from various papers, organized them and unified notations and terminology. We also rewrote the proofs in a more explanatory manner filling the blanks and developing unproved assertions. We contributed to the development of the theory of impulsive semidynamical systems by adding some new results on topologic conjugation and asymptotic stability.

Sumário

Introdução	1
Notações	3
1 Preliminares	5
1.1 Uma Visão Geral sobre Sistemas com Impulsos	5
1.1.1 Sistemas com impulsos em tempos fixados	6
1.1.2 Sistemas com impulsos em tempos variáveis	8
1.1.3 Sistemas autônomos com impulsos	11
1.1.4 Existência e continuação	13
1.2 Sistemas Semidinâmicos	18
1.2.1 Conjuntos invariante e minimal	20
1.2.2 Conjuntos limites	20
1.2.3 Estabilidade	28
2 Sistemas Semidinâmicos Impulsivos	29
2.1 Introdução	29
2.2 Semicontinuidade e Continuidade da Função ϕ	34

2.3	Sistemas Semidinâmicos Discretos Impulsivos	40
2.4	Propriedades Recursivas	41
2.4.1	Minimalidade	41
2.4.2	Recorrência	45
2.4.3	Quase recorrência	49
2.4.4	Quase periodicidade fraca	53
2.5	Conjuntos Limites	55
3	Estabilidade em Sistemas Semidinâmicos Impulsivos	67
3.1	Introdução	67
3.2	Invariância	68
3.3	Estabilidade em Sistemas Básicos e Impulsivos	70
3.4	Estabilidade em Conjuntos Compactos	73
3.5	Estabilidade em Componentes	75
4	Conjugação Topológica e Estabilidade Assintótica	79
4.1	Conjugação Topológica	79
4.2	Estabilidade Assintótica	85
	Referências Bibliográficas	94

Introdução

As equações diferenciais impulsivas (EDIs) descrevem a evolução de sistemas onde o desenvolvimento contínuo de um processo se alterna com mudanças bruscas do estado. Estas equações se valem das equações diferenciais para descrever os estágios de variação contínua do estado, acrescidas de condições que descrevem as descontinuidades de primeira espécie da solução e de suas derivadas nos instantes de impulso. Muitos fenômenos biológicos e físicos, modelos em medicina, em economia, em farmacocinética e teoria de controle, entre outros, podem apresentar efeitos impulsivos. Assim as equações diferenciais impulsivas aparecem como uma descrição natural de fenômenos evolutivos de problemas do mundo real.

O objetivo deste trabalho é apresentar um texto, até então inexistente, que compreenda a teoria fundamental dos sistemas semidinâmicos impulsivos. Com este propósito coletamos resultados de vários artigos e os organizamos dando uma seqüência lógica, unificando terminologias e notações e desenvolvendo as demonstrações de forma mais clara e didática do que originalmente apresentadas. O resultado disto é este texto em português que apresenta a teoria básica dos sistemas semidinâmicos impulsivos. Apresentamos resultados para o caso impulsivo correspondentes ao caso de sistemas básicos (ou sem impulsos). Fizemos alguns ajustes e alterações em algumas demonstrações e incluímos algumas provas e resultados inéditos, como é o caso do Capítulo 4 que trata de conjugação topológica e estabilidade assintótica.

Organizamos os capítulos desta dissertação da forma seguinte. No Capítulo 1, apresentamos a descrição de um sistema com impulsos, bem como os teoremas de existência e continuação de soluções para uma EDI. Em seqüência, introduzimos o conceito de sistemas semidinâmicos e algu-

mas de suas propriedades básicas. Este capítulo se baseia nas referências [1], [2] e [12].

No Capítulo 2, fazemos a descrição de um sistema semidinâmico com a condição de impulso. Descrevemos vários resultados de sistemas semidinâmicos que também são válidos para o caso impulsivo. As principais referências para este capítulo são [4], [5], [8], [9], [10] e [11].

No Capítulo 3, estudamos as condições de estabilidade para os sistemas impulsivos. Os resultados contidos aqui podem ser encontrados em [6].

Finalizando, no Capítulo 4, apresentamos alguns resultados novos realizados pelo autor sobre conjugação topológica e estabilidade assintótica para sistemas semidinâmicos impulsivos. Tais resultados também foram organizados na forma de artigo em [3].

Notações

Seguem algumas notações que aparecem no contexto deste trabalho.

Sejam (X, ρ) um espaço métrico com métrica ρ , $x \in X$, $\varepsilon > 0$, n um natural e A um subconjunto não vazio de X , isto é, $A \subset X$ e $A \neq \emptyset$.

- $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{R}_+$ representa o conjunto dos números reais não-negativos;
- $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Z}_+$ representa o conjunto dos números inteiros não-negativos;
- $\mathbb{R}^n$ representa o espaço euclidiano n -dimensional;
- $\bar{A}$ representa o fecho de A em X ;
- ∂A representa a fronteira de A em X ;
- $\rho(x, A) = \rho_A(x) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$;
- $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(y, x) < \varepsilon\}$;
- $B(A, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, A) < \varepsilon\}$;
- $B[A, \varepsilon] = \{x \in X : \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$;
- $H(A, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, A) = \varepsilon\}$;
- $\mathcal{A}(A, \delta, \eta) = \{x \in X : \delta < \rho_A(x) < \eta\}$.

Vamos representar por $\{x_n\}$ uma seqüência em X , onde n pertence ao conjunto dos números naturais. Às vezes, representaremos $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ simplesmente como

$$x_n \rightarrow x \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty,$$

ou $x_n \rightarrow x$, ficando subtendido que $n \rightarrow +\infty$.

Quando um conceito é introduzido pela primeira vez, as palavras que o definem estão **em negrito**. Indicamos o final de uma demonstração com o símbolo $\square$.

Preliminares

1.1 Uma Visão Geral sobre Sistemas com Impulsos

Vamos iniciar a fundamentação teórica sobre sistemas impulsivos listando e esclarecendo alguns aspectos básicos sobre a teoria das equações diferenciais impulsivas que tratamos abreviadamente por EDIs.

Uma EDI ou sistema impulsivo pode ser representada da forma seguinte. Considera-se

i) uma equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x) \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} \right) \quad (1.1)$$

onde $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$;

ii) subconjuntos $M(t), N(t) \subset \Omega, t \in \mathbb{R}_+$;

iii) funções $A(t) : M(t) \rightarrow N(t), t \in \mathbb{R}_+$.

O comportamento do processo de evolução de i), ii) e iii) acima segue como descrevemos a seguir. Considere uma solução $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ do sistema (1.1) passando pelo ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. O ponto $P_t = (t, x(t))$ inicia seu movimento no ponto inicial $P_{t_0} = (t_0, x_0)$ e move-se ao longo da curva $\{(t, x) : t \geq t_0, x = x(t)\}$ até o tempo $t_1 > t_0$ no qual P_t encontra o conjunto $M(t)$. Em $t = t_1$, o operador $A(t)$ transfere o ponto $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$ para o ponto

$P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+) \in N(t_1)$, onde $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$. Deste modo, o ponto P_t continua seu movimento ao longo da curva $x(t) = x(t; t_1, x_1^+)$, que é solução de (1.1) com condição inicial $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+)$, até encontrar novamente o conjunto $M(t)$ num tempo $t_2 > t_1$. Em seguida, o ponto $P_{t_2} = (t_2, x(t_2))$ é transferido pelo operador $A(t)$ para o ponto $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+) \in N(t_2)$, onde $x_2^+ = A(t_2)x(t_2)$. Agora, o movimento de P_t se inicia em (t_2, x_2^+) ao longo da solução $x(t) = x(t; t_2, x_2^+)$ de (1.1) e o processo segue ao longo da solução de (1.1), caso esta exista.

A curva descrita por P_t acima é chamada **curva integral** e a função que define esta curva é a **solução** do sistema diferencial impulsivo.

Podemos observar que uma solução de um sistema diferencial impulsivo como acima pode ser:

- a) uma função contínua, se a curva integral $\{(t, x) : t \geq t_0, x = x(t)\}$ não interceptar o conjunto $M(t)$ ou se ela atingir $M(t)$ somente nos pontos fixos do operador $A(t)$;
- b) uma função contínua por partes com um número finito de descontinuidades de primeira espécie, se a curva integral encontrar $M(t)$ em um número finito de pontos que não são pontos fixos do operador $A(t)$;
- c) uma função contínua por partes com uma quantidade enumerável de descontinuidades de primeira espécie, se a curva integral encontrar o conjunto $M(t)$ em uma quantidade enumerável de pontos que não são pontos fixos do operador $A(t)$.

Os instantes $t = t_k$ nos quais a curva integral atinge $M(t)$ são chamados de **momentos de impulso**. Assumiremos que a solução $x(t)$ do sistema impulsivo seja contínua à esquerda em t_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, isto é, $x(t_k^-) := \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h) = x(t_k)$.

Veremos, a seguir, alguns tipos de sistemas diferenciais com impulsos.

1.1.1 Sistemas com impulsos em tempos fixados

Trata-se de equações diferenciais impulsivas que têm momentos de impulsos fixados, ou seja, os impulsos ocorrem em tempos conhecidos de antemão.

Aqui, $M(t)$ representa uma sequência de planos $t = t_k$, onde $\{t_k\}$ é uma sequência de tempos tal

que $t_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Vamos definir o operador $A(t)$, para $t = t_k$, da maneira seguinte. A sequência $\{A(t_k)\}$ de operadores $A(t_k) : \Omega \rightarrow \Omega$ é dada por

$$x \longrightarrow A(t_k)x = x + I_k(x),$$

onde $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$. O conjunto $N(t)$ é definido para $t = t_k$ como sendo $N(t_k) = A(t_k)M(t_k)$.

Com a escolha de $M(t_k)$, $N(t_k)$ e $A(t_k)$, um modelo matemático de um sistema diferencial impulsivo simples em que cada impulso ocorre em tempos fixados pode ser descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.2)$$

onde, para cada $t = t_k$, $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$ e $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h)$. Então qualquer solução $x(t)$ de (1.2) satisfaz:

- i) $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), t \in (t_k, t_{k+1}]$,
- ii) $\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), t = t_k, k = 1, 2, \dots$

O comportamento das soluções de (1.2) é influenciado pelos efeitos impulsivos. Os exemplos a seguir mostram que a continuidade das soluções é afetada pela ação impulsiva.

Exemplo 1.1.1 Considere a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & t \neq k, \\ \Delta x = \frac{1}{x-1}, & t = k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.3)$$

A solução $x(t)$ da equação diferencial ordinária $\dot{x} = 0$ é contínua para todo t . Mas a solução do sistema (1.3), com condição inicial $x(0) = 1$, está definida somente para $0 \leq t \leq 1$, já que a função $I_k(x) = \frac{1}{x-1}$ não é definida para $x = 1$.

Exemplo 1.1.2 Considere a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2, & t \neq \frac{k\pi}{4}, \\ \Delta x = -1, & t = \frac{k\pi}{4}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.4)$$

Neste caso, a solução $x(t)$ do problema de valor inicial (escrevemos abreviadamente PVI) $\dot{x} = 1 + x^2, x(0) = 0$ é contínua no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Em contrapartida, a solução do sistema (1.4) com condição inicial $x(0) = 0$ é dada por

$$x(t) = \tan\left(t - \frac{k\pi}{4}\right), \quad t \in \left(\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4}\right].$$

Tal solução é periódica de período $\frac{\pi}{4}$ e tem descontinuidades de primeira espécie em $t = \frac{k\pi}{4}$, $k = 1, 2, \dots$. A figura a seguir ilustra este fato.

Figura 1.1: Trajetória do sistema impulsivo (1.4), com condição inicial $x(0) = 0$.

1.1.2 Sistemas com impulsos em tempos variáveis

Seja $\{S_k\}$ uma seqüência de superfícies dadas por $S_k : t = \tau_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots$, tais que $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k(x) = +\infty$. Então podemos ter o seguinte sistema diferencial impulsivo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.5)$$

Quando consideramos sistemas com momentos variáveis de efeitos impulsivos, como é o caso de (1.5), situações peculiares podem ocorrer, se comparados aos sistemas com momentos fixos de impulsos. Por exemplo, note que o momento do efeito impulsivo para o sistema (1.5) depende das soluções, isto é, $t_k = \tau_k(x(t_k))$, para cada k . Portanto soluções iniciadas em diferentes pontos terão diferentes pontos de descontinuidade. Também pode ocorrer de uma solução atingir a mesma superfície $t = \tau_k(x)$ várias vezes. Tal comportamento é denominado de **fenômeno de pulso**. Além

disso, soluções diferentes podem coincidir após algum tempo e se comportar como uma solução única após isso. Este fenômeno é chamado de **confluência**.

O exemplo seguinte ilustra alguns destes comportamentos.

Exemplo 1.1.3 Consideremos a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & t \neq \tau_k(x), & t \geq 0, \\ \Delta x = x^2 \operatorname{sgn}(x) - x, & t = \tau_k(x), & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $\tau_k(x) = x + 6k$, com $|x| < 3$, descreve a superfície $S_k : t = \tau_k(x)$, e

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Primeiramente, observemos que as soluções $x(t)$ com condição inicial $x(0) = x_0$, $|x_0| \geq 3$, não sofrem impulso, já que elas não encontram a superfície S_k . As soluções $x(t)$ que se iniciam nos pontos $(0, x_0)$, $1 < x_0 < 3$, sofrem efeito impulsivo um número finito de vezes. Por exemplo, considere a solução $x(t)$ com $x(0) = \sqrt[3]{2}$. Esta solução encontra a superfície S_0 três vezes e não se choca com qualquer superfície S_k além do tempo $t_3 = 2$, como mostra a Figura 1.2.

Figura 1.2: Trajetória do sistema impulsivo (1.6) com $x(0) = \sqrt[3]{2}$.

Se o ponto inicial $x(0) = x_0$ for tal que $0 < x_0 < 1$, então a solução $x(t)$ encontrará a superfície S_k em um número infinito de tempos t_k e teremos $t_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$ bem como $\lim_{k \rightarrow -\infty} x(t_k) = 0$. Observemos a Figura 1.3 para $x_0 = 1/2$.

Figura 1.3: Trajetória para o sistema impulsivo (1.6) com $x(0) = 1/2$.

Por outro lado, a solução $x(t)$, com $-1 < x_0 < 0$, se choca com S_k um número infinito de tempos t_k mas, neste caso, temos $\lim_{k \rightarrow -\infty} t_k = 6$ e $\lim_{k \rightarrow -\infty} x(t_k) = 0$. Vejamos a Figura 1.4.

Figura 1.4: Trajetória do sistema impulsivo (1.6) para $-1 < x(0) < 0$.

As soluções que se iniciam nos pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$ atingem a superfície S_k em tempos t_k que são pontos fixos do operador $A(t) = x^2 \operatorname{sgn}(x)$ e, por esta razão, não há efeito impulsivo. Finalmente, as soluções que começam em $(0, \sqrt[4]{2})$ e $(0, 4)$ se unem em $t \geq 2$ e, portanto, exibem o fenômeno de confluência.

Sistemas diferenciais impulsivos mais gerais do que (1.5) podem ser da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & h(t, x) \neq 0, \\ \Delta x = I_0(t, x), & h(t, x) = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde $h : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função (Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$).

Se $h(t, x) = 0$ tiver uma quantidade enumerável de raízes $t = \tau_k(x)$ para cada x , satisfazendo algumas condições necessárias, então, definindo $I_k(x) = I_0(\tau_k(x), x)$, teremos que (1.7) se reduz a (1.5). Por outro lado, se $h(t, x) = 0$ tiver raízes $\{(t_k, x) : x \in M(t_k)\}$ tais que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$, então (1.7) se reduzirá a (1.2).

1.1.3 Sistemas autônomos com impulsos

Consideremos os conjuntos $M(t) \equiv M$ e $N(t) \equiv N$ independentes de t e seja

$$A(t) \equiv A : M \rightarrow N$$

definida por $Ax = x + I(x)$, onde $I : \Omega \rightarrow \Omega$. Consideremos, também, o sistema diferencial impulsivo autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \notin M, \\ \Delta x = I(x), & x \in M. \end{cases} \quad (1.8)$$

Quando qualquer solução $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ atingir o conjunto M em algum tempo t , o operador A transferirá, instantaneamente, o ponto $x(t) \in M$ para o ponto $y(t) = x(t) + I(x(t))$ que está em N . Como (1.8) é autônomo, o movimento do ponto $x(t)$ será considerado em Ω ao longo da trajetória do sistema (1.8).

O exemplo seguinte mostra várias possibilidades interessantes.

Exemplo 1.1.4 Consideremos o sistema diferencial impulsivo em $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2, \alpha < 0, \beta > 0, \\ A : M \rightarrow N, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde os conjuntos $M, N \subset \mathbb{R}^2$ são definidos por

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = \gamma_1^2\}, \quad N = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = \gamma_2^2\},$$

com $\gamma_2 > \gamma_1$, e são tais que, para qualquer ponto $x \in M$, existe o correspondente $Ax = y \in N$ tal que x e y estão sobre a mesma semi-reta que se inicia na origem.

Usando coordenadas polares $x_1 = \rho \cos \theta, x_2 = \rho \sin \theta$, o sistema (1.9) se reduz a

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \alpha \rho, \frac{d\theta}{dt} = \beta, \\ A : (\gamma_1, \theta) \rightarrow (\gamma_2, \theta), \end{cases}$$

onde $M = \{(\rho, \theta) : \rho = \gamma_1\}$ e $N = \{(\rho, \theta) : \rho = \gamma_2\}$. Note que as trajetórias do sistema diferencial correspondente são espirais logarítmicas dadas por

$$\rho = \rho_0 e^{(\alpha/\beta)(\theta - \theta_0)}, \quad \alpha < 0, \beta > 0,$$

as quais tendem à posição estacionária $\rho = 0$, quando $\theta \rightarrow +\infty$.

Como todas as trajetórias do sistema diferencial impulsivo (1.9) que iniciam na região $\rho > \gamma_1$ encontram o círculo $\rho = \gamma_2$, é suficiente considerarmos as trajetórias iniciando sobre o círculo N . A trajetória $\rho = \gamma_2 e^{(\alpha/\beta)(\theta - \theta_0)}$, iniciando em (γ_2, θ_0) , encontra o círculo M em (γ_1, θ_1) , onde $\theta_1 = \theta_0 + \beta t_1 \equiv \theta_0 + \Delta$, com $\Delta = \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$. De fato, pois

$$\rho(\theta) = \gamma_1 \implies \gamma_1 = \gamma_2 e^{(\alpha/\beta)(\theta - \theta_0)} \implies \theta = \theta_1 = \theta_0 + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \theta_0 + \Delta.$$

Além disso, o operador A leva (γ_1, θ_1) sobre N . Então o movimento ocorre ao longo da espiral $\gamma_2 e^{(\alpha/\beta)(\theta - \theta_1)}$ até encontrar M , digamos em (γ_1, θ_2) o qual é transferido pelo operador A para

o ponto (γ_2, θ_2) sobre N , com $\theta_2 = \theta_0 + 2\Delta$. Desta forma, depois do n -ésimo encontro com M , o movimento estará sobre o ponto $(\gamma_2, \theta_0 + n\Delta)$. Por isso, para se estudar o movimento das trajetórias, é suficiente considerarmos a distribuição de todos os pontos $\theta_n = \theta_0 + n\Delta$ sobre o círculo N .

Se $\frac{\Delta}{2\pi}$ for racional, isto é, $\Delta = 2\pi \left(\frac{p}{q}\right)$, com p e q inteiros positivos relativamente primos, então

$$\theta_q = \theta_0 + q\Delta \equiv \theta_0 \pmod{2\pi}$$

e o movimento da trajetória será periódico. Além disso, como θ_0 é arbitrário, então todas as trajetórias iniciando em N serão periódicas.

Se $\frac{\Delta}{2\pi}$ for irracional, dividimos o círculo N em k arcos iguais, cada um de comprimento $\frac{2\pi}{k}$. Pelo fato de $\frac{\Delta}{2\pi}$ não ser racional, nunca teremos $\theta_n \equiv \theta_0 \pmod{2\pi}$. Daí, entre os $(k+1)$ primeiros pontos, $\theta_0, \theta_0 + \Delta, \dots, \theta_0 + k\Delta \pmod{2\pi}$, existirão dois pontos sobre o mesmo arco, digamos $\theta_0 + m\Delta$ e $\theta_0 + l\Delta$, com $m > l$. Seja $s = m - l$. Como $\theta_0 + m\Delta$ e $\theta_0 + l\Delta$ estão sobre o mesmo arco, segue que

$$(\theta_0 + m\Delta) - (\theta_0 + l\Delta) < \frac{2\pi}{k}.$$

Desta forma, o ângulo $s\Delta$ é menor que $\frac{2\pi}{k}$. Assim, na sequência $\{\theta_0 + ns\Delta \pmod{2\pi}\}$, qualquer dois ângulos consecutivos diferem pelo mesmo número $s\Delta < \frac{2\pi}{k}$. Então dados $\varepsilon > 0$ arbitrário e k suficientemente grande, podemos obter $\frac{2\pi}{k} < \varepsilon$. Logo dada qualquer ε -vizinhança de qualquer ponto sobre o círculo N , existe pelo menos um elemento do conjunto $\{\theta_0 + ns\Delta : n \in \mathbb{N}\}$. Assim mostramos que as trajetórias iniciando na região $x_1^2 + x_2^2 > \gamma_1^2$ são densas no anel $\gamma_1^2 < x_1^2 + x_2^2 < \gamma_2^2$.

1.1.4 Existência e continuação

Neste trabalho, vamos tratar de sistemas impulsivos para o caso mais geral onde a ação impulsiva se dá em momentos desconhecidos. Vejamos alguns teoremas básicos para este caso.

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Vamos representar por $C(A, B)$ o conjunto das funções contínuas definidas de A em B e por $C^1(A, B)$ o conjunto das funções de classe C^1 definidas de A em B .

Consideremos o problema de valor inicial para o sistema diferencial impulsivo dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), \\ x(t_0^+) = x_0, & t_0 \geq 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $I_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Consideremos, também, que

- 1) para cada $k = 1, 2, \dots$, temos $\tau_k \in C(\Omega, (0, +\infty))$, $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k(x) = +\infty$ para $x \in \Omega$ (estamos considerando $\tau_0(x) \equiv 0$ e $k \in [1, +\infty)$, k inteiro);
- 2) $S_k : t = \tau_k(x)$ são as superfícies.

Vamos, então, definir uma solução para (1.10).

Definição 1.1.5 Uma função $x : [t_0, t_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$, $a > 0$, será dita uma **solução** de (1.10) se tivermos:

- i) $x(t_0^+) = x_0$ e $(t, x(t)) \in D$, para cada $t \in [t_0, t_0 + a)$;
- ii) $x(t)$ for continuamente diferenciável e satisfizer $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, para cada $t \in [t_0, t_0 + a)$ com $t \neq \tau_k(x(t))$;
- iii) se $t \in [t_0, t_0 + a)$ e $t = \tau_k(x(t))$, então $x(t^+) = x(t) + I_k(x(t))$ e, em cada t , $x(t)$ deverá ser contínua à esquerda e que, para algum $\delta > 0$, $s \neq \tau_j(x(s))$, para todo j e $t < s < \delta$.

Cabe observarmos que, no lugar da condição inicial usual $x(t_0) = x_0$, vamos impor a condição limite $x(t_0^+) = x_0$, que é natural para sistemas do tipo (1.10), já que o ponto (t_0, x_0) pode ser tal que $t_0 = \tau_k(x_0)$ para algum k . Quando $t_0 \neq \tau_k(x_0)$ para qualquer k , entenderemos a condição inicial $x(t_0^+) = x_0$ no sentido usual, isto é, $x(t_0) = x_0$.

Diferentemente dos sistemas diferenciais ordinários (EDOs), o sistema (1.10) pode não ter solução, mesmo que f seja contínua ou continuamente diferenciável, já que a solução $x(t)$ do problema $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, pode estar na superfície S_k . O exemplo seguinte ilustra este fato.

Exemplo 1.1.6 Consideremos, novamente, o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, & t \neq \tau_k(x), \quad t \geq 0, \\ \Delta x = x^2 \operatorname{sgn}(x) - x, & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (1.11)$$

onde $\tau_k(x) = x + 6k$ para $|x| < 3$. Note que $f(t, x) = 1$ é contínua, mas não existe solução para o PVI (1.11) que passa pelo ponto $(1, 1)$, pois a solução do PVI $\dot{x} = 1, x(1) = 1$, é $x(t) = t$. Como a solução $x(t)$ de (1.11) se inicia em $t = 1 \in \tau_0(x)$, ela é transferida para

$$x(1^-) = 1^2 \operatorname{sgn}(1) - 1 + x(1) = x(1) = 1,$$

ou seja, ela não sai da superfície $\tau_0(x)$, o que contradiz a condição iii) da Definição 1.1.5. Portanto o sistema (1.11) não possui solução.

O Exemplo 1.1.6 mostra que precisamos de algumas condições adicionais sobre τ_k e/ou f , além de continuidade, para estabelecermos uma teoria geral de existência para (1.10). Provaremos, então, o teorema seguinte, que pode ser encontrado em [12], pág. 13, com algumas modificações.

Teorema 1.1.7 Assumamos que

- i) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja contínua;
- ii) se $\bar{t} = \tau_k(\bar{x})$ para cada k e qualquer $(\bar{t}, \bar{x}) \in D$, então existirá um $\delta > 0$ tal que

$$t \neq \tau_k(x) \quad (1.12)$$

para quaisquer $0 < t - \bar{t} < \delta$ e $|x - \bar{x}| < \delta$.

Então, para cada $(t_0, x_0) \in D$, existirá uma solução $x : [t_0, t_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (1.10) para algum $\alpha > 0$.

Demonstração: Pela teoria das EDO's a conclusão é claramente verdadeira para $t_0 \neq \tau_k(x_0)$ qualquer que seja k . Se, porém, $t_0 = \tau_k(x_0)$ para algum k , segue da continuidade de f a existência de uma solução local $x(t)$ de $\dot{x} = f(t, x)$ com $x(t_0) = x_0$. Agora, como $\tau_i(x) < \tau_j(x)$ para $i < j$ e $t_0 = \tau_k(x_0)$, então $t \neq \tau_j(x(t))$ para $j \neq k$ e t suficientemente próximo de t_0 . Por outro lado, a

condição (1.12) não permite a possibilidade de termos $t = \tau_k(x(t))$ em uma vizinhança à direita de t_0 suficientemente pequena. Deste modo, $x(t)$ é uma solução local do sistema (1.10). Isto conclui a demonstração. $\square$

A condição (1.12) é razoável só para funções irregulares $\tau_k(x)$, já que o Teorema das Funções Implícitas implica que, se τ_k for diferenciável em x_0 e $\tau'_k(x_0) \neq 0$, então (1.12) poderá jamais ser válida.

O teorema seguinte exige algumas condições regulares para $\tau_k(x)$.

Teorema 1.1.8 [[12], pág. 14]. Assumamos que

- i) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja contínua;
- ii) $\tau_k : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ sejam diferenciáveis;
- iii) se $t_1 = \tau_k(x_1)$ para algum $(t_1, x_1) \in D$ e para $k \geq 1$, então existirá $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} f(t, x) \neq 1, \quad (1.13)$$

para $(t, x) \in D$ tais que $|x - x_1| < \delta$ e $0 < t - t_1 < \delta$.

Então, para cada $(t_0, x_0) \in D$, existirá uma solução $x : [t_0, t_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ do sistema (1.10) para algum $\alpha > 0$.

Demonstração: A conclusão é trivial, se $t_0 \neq \tau_k(x_0)$ para algum k , pela teoria das EDO's. Se $t_0 = \tau_k(x_0)$ para algum $k \geq 1$ e $x(t)$ for uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ e $x(t_0^+) = x_0$, seja $\sigma(t) = t - \tau_k(x(t))$. Neste caso, $\sigma(t_0) = 0$ e

$$\sigma'(t) = 1 - \frac{\partial \tau_k(x(t))}{\partial x} f(t, x) \quad \left(\sigma' = \frac{d\sigma}{dt} \right).$$

Pela condição (1.13), $\sigma'(t) \neq 0$ em uma pequena vizinhança à direita de t_0 . Logo $\sigma(t)$ deve ser estritamente crescente ou estritamente decrescente naquela vizinhança e, portanto, $t \neq \tau_k(x(t))$ com $0 < t - t_0 < \delta$ para algum $\delta > 0$. Como na demonstração do Teorema 1.1.7, temos $t \neq \tau_j(x(t))$

para $j \neq k$ e $t > t_0$ suficientemente próximo de t_0 . Portanto $x(t)$ é uma solução local de (1.10) e a prova está concluída. $\square$

Considerando o problema de valor inicial (1.10), é importante lembrarmos que:

- i) se $t_0 \neq \tau_k(x_0)$, então a solução $x(t)$ do sistema (1.10) deverá ser entendida como no sentido clássico;
- ii) se $t_0 = \tau_k(x_0)$, então a solução $x(t)$ do sistema (1.10) deverá ser entendida num sentido estendido dependendo da suavidade de f .

Lembramos que uma solução $x(t; t_0, x_0)$ do sistema (1.10), existente em algum intervalo $[t_0, t_0 + a)$ e sofrendo impulsos nos pontos $\{t_i\}$, com $t_0 < t_i < t_0 + a$ e $t_i < t_j$ para $i < j$, pode ser descrita como

$$x(t; t_0, x_0) = \begin{cases} x(t; t_0, x_0), & t_0 \leq t \leq t_1, \\ x(t; t_1, x_1^+), & t_1 < t \leq t_2, \\ \vdots & \\ x(t; t_i, x_i^-), & t_i < t \leq t_{i+1}, \\ \vdots & \end{cases} \quad (1.14)$$

onde $x_i^+ = x_i + I_k(x_i)$ e $x_i = x(t_i)$. Conseqüentemente, mesmo quando $t_0 \neq \tau_k(x_0)$, é possível que, para algum i , (t_i, x_i^-) fique em uma superfície S_j . Neste caso, parte da solução $x(t; t_0, x_0)$ no intervalo $t_i < t \leq t_{i+1}$ consiste de $x(t; t_i, x_i^+)$, que é uma solução do sistema (1.10) em $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ em um sentido estendido. Isto mostra que, mesmo quando (t_0, x_0) não estiver em qualquer superfície S_k , ainda poderemos ter que trabalhar com a solução no sentido estendido.

Agora, vamos nos voltar ao estudo da continuação das soluções de (1.10) à direita. Assim como no caso clássico das EDO's, dada uma solução $x(t)$ de (1.10), definida em $[t_0, t_0 + a)$ com $a > 0$, diremos que uma solução $y(t)$ de (1.10) é uma **continuação própria à direita** de $x(t)$, se $y(t)$ for definida em $[t_0, t_0 + b)$, para algum $b > a$, e $x(t) = y(t)$, para $t \in [t_0, t_0 + a)$. O intervalo $[t_0, t_0 + a)$ é chamado de **intervalo máximo de existência** da solução $x(t)$ de (1.10) sempre que $x(t)$ estiver bem definida em $[t_0, t_0 + a)$ e não tiver qualquer continuação própria à direita.

A respeito da continuação, pode-se notar que a mesma conclusão que àquela clássica dos sis-

temas ordinários vale para o sistema (1.10), ou seja, para uma solução $x(t)$ do sistema (1.10) com intervalo máximo de existência $[t_0, t_0 + a)$, se $a < +\infty$, então ou $x(t)$ se aproximará da fronteira de Ω ou $|x(t)|$ se tornará ilimitado, quando $t \rightarrow (t_0 + a)$. Para simplificar, consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n$. Temos o teorema seguinte.

Teorema 1.1.9 [[12], pág. 16]. Assumamos que $\Omega = \mathbb{R}^n$ e que

- i) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja contínua;
- ii) $I_k \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\tau_k \in C(\Omega, (0, +\infty))$, para todo $k \geq 1$.

Então, para qualquer solução $x(t)$ do sistema (1.10) com um intervalo finito $[t_0, b)$ como intervalo máximo de existência, temos

$$\lim_{t \rightarrow b} |x(t)| = +\infty, \quad (1.15)$$

desde que uma das três condições seguintes esteja satisfeita:

- a) para qualquer $k \geq 1$, $t_1 = \tau_k(x_1)$ implica na existência de um $\delta > 0$ tal que $t \neq \tau_k(x)$ para cada (t, x) , com $0 < t - t_1 < \delta$ e $|x - x_1| < \delta$;
- b) para todo $k \geq 1$, $t_1 = \tau_k(x_1)$ implica que $t_1 \neq \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$, para todo $j \geq 1$;
- c) $\tau_k \in C^1(\Omega, (0, +\infty))$, para todo $k \geq 1$, e $t_1 = \tau_k(x_1)$ implicam que $t_1 = \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$ para algum $j \geq 1$ e

$$\frac{\partial \tau_j(x_1^+)}{\partial x} f(t_1, x_1^+) \neq 1, \quad (1.16)$$

onde $x_1^+ = x_1 + I_k(x_1)$.

A demonstração deste teorema é extensa e não vamos incluí-la aqui. Ela pode ser encontrada em [12], página 16.

1.2 Sistemas Semidinâmicos

Nesta seção, apresentamos alguns aspectos básicos da teoria dos sistemas semidinâmicos. Vamos chamar de sistema básico este tipo de sistema quando não houver condição de impulso. Desta-

camos somente algumas definições e propriedades que serão importantes para melhor compreendermos o caso impulsivo.

Definição 1.2.1 Sejam X um espaço métrico e $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não-negativos. Diremos que a tripla $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ é um **sistema semidinâmico**, se a função

$$\pi : X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X$$

satisfizer as seguintes condições:

- a) $\pi(x, 0) = x$, para todo $x \in X$;
- b) $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$, para quaisquer $x \in X$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$,
- c) π for contínua.

Vamos denotar o sistema semidinâmico $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ simplesmente por (X, π) . Substituindo $\mathbb{R}_+$ por $\mathbb{R}$, dizemos que a tripla $(X, \pi, \mathbb{R})$, nas condições acima, é um **sistema dinâmico**.

Observação 1.2.2 Se substituirmos $\mathbb{R}_+$ por $\mathbb{Z}$ (respectivamente por $\mathbb{Z}_-$), diremos que $(X, \pi, \mathbb{Z})$ (respectivamente, $(X, \pi, \mathbb{Z}_+)$) será um sistema dinâmico discreto (respectivamente, um sistema semidinâmico discreto).

Para cada $x \in X$, a função π induz uma aplicação contínua $\pi_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ definida por $\pi_x(t) = \pi(x, t)$. Esta aplicação é chamada de **trajetória** de x .

Nas próximas três definições, consideramos um sistema semidinâmico (X, π) .

Definição 1.2.3 Para qualquer $x \in X$ fixado, a **órbita positiva** de x é dada pelo conjunto

$$C^+(x) = \{\pi(x, t) : t \in \mathbb{R}_+\}$$

o qual denotaremos, também, por $\pi^+(x)$. Dados $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}_+$ fixados, definimos

$$C^+(x, r) = \{\pi(x, t) : 0 \leq t < r\}.$$

Definição 1.2.4 Para $t \geq 0$ e $x \in X$, denotamos

$$F(x, t) = \{y : \pi(y, t) = x\}$$

e, para $\Delta \subset [0, +\infty)$ e $D \subset X$, definimos

$$F(D, \Delta) = \cup \{F(x, t) : x \in D \text{ e } t \in \Delta\}.$$

Definição 1.2.5 Um ponto $x \in X$ será dito um **ponto inicial**, se $F(x, t) = \emptyset$ para $t > 0$.

1.2.1 Conjuntos invariante e minimal

Seja (X, π) um sistema semidinâmico.

Definição 1.2.6 Um conjunto $L \subset X$ será chamado **positivamente invariante**, se $\pi_t(L) \subset L$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 1.2.7 [[2], pág. 21]. Um conjunto $L \subset X$ será positivamente invariante se, e somente se, para cada $x \in L$ implicar $\pi^+(x) \subset L$.

Definição 1.2.8 Um conjunto $L \subset X$ será chamado **minimal**, se ele for não-vazio, fechado, invariante e não admitir subconjunto próprio com estas propriedades.

Teorema 1.2.9 [[2], pág. 26]. Um conjunto $L \subset X$ será minimal se, e somente se, para cada $x \in L$, tivermos $\overline{C^+(x)} = L$.

1.2.2 Conjuntos limites

Definição 1.2.10 Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Um ponto $y \in X$ será chamado **ponto limite positivo** do ponto $x \in X$, se existir uma sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \in \mathbb{R}_+$ e $t_n \rightarrow +\infty$ de modo que $\pi(x, t_n) \rightarrow y$. O conjunto de todos os pontos limite positivos de x será chamado de **conjunto limite positivo** de x e será dado por

$$L^+(x) = \{y \in X : \text{existe } \{t_n\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ tal que } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \pi(x, t_n) \rightarrow y\}.$$

Tal conjunto descreve o comportamento de $C^+(x)$ no infinito.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos limites.

Exemplo 1.2.11 Consideremos o sistema em coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (1.17)$$

O retrato de fase do sistema (1.17) consiste da trajetória fechada γ coincidindo com o círculo unitário $r = 1$, do ponto dado por $r = 0$, e de trajetórias espirais que se aproximam do círculo γ , quando $t \rightarrow +\infty$. Vejamos a Figura 1.5.

Figura 1.5: Trajetória do sistema (1.17).

Exceto para a trajetória $r = 0$, a trajetória fechada γ é o conjunto limite positivo de todas as trajetórias (incluindo ela mesma) para o sistema (1.17). O conjunto limite positivo da trajetória $r = 0$ é o ponto $r = 0$.

Exemplo 1.2.12 Consideremos, no espaço $\mathbb{R}^2$, um sistema semidinâmico cuja órbita seja dada pela Figura 1.6.

Então, o sistema semidinâmico possui as duas retas $x = \pm 1$ como conjuntos limite positivos para todos os pontos da faixa $-1 < x < 1$.

Figura 1.6: Trajetória do sistema considerado.

O teorema a seguir exhibe algumas propriedades de $C^+(x)$ e $L^+(x)$.

Teorema 1.2.13 [[2], págs. 117, 119]. Dado o sistema semidinâmico (X, π) , com $x \in X$, valem as propriedades:

- i) $\overline{C^+(x)} = C^+(x) \cup L^+(x)$.
- ii) $L^+(x)$ é fechado e invariante.
- iii) Se X for localmente compacto e $L^+(x)$ for compacto, então $L^+(x)$ será conexo.
- iv) Se $\overline{C^+(x)}$ for compacto, então $L^+(x)$ será compacto.
- v) Se X for localmente compacto e $L^+(x)$ for compacto, então $\overline{C^+(x)}$ será compacto.
- vi) Consideremos X localmente compacto e $t \in \mathbb{R}_+$. Se $L^+(x)$ for compacto, então $\rho(\pi(x, t), L^+(x)) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$.

Demonstração:

- i) ($\subset$) Seja $y \in \overline{C^+(x)}$. Então $y \in C^+(x)$ ou y é ponto de acumulação de $C^+(x)$. No segundo caso, existirá uma seqüência $\{y_n\} \subset C^+(x)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Como temos $\{y_n\} \subset C^+(x)$, existirá uma seqüência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $y_n = \pi(x, t_n)$, $t_n \rightarrow +\infty$ e $\pi(x, t_n) \rightarrow y$. Portanto, $y \in L^+(x)$, donde $\overline{C^+(x)} \subset C^+(x) \cup L^+(x)$.

($\supset$) Agora, seja $y \in C^-(x) \cup L^+(x)$. Então $y \in C^+(x)$ ou $y \in L^+(x)$. Se $y \in C^+(x)$, então $y \in \overline{C^+(x)}$. Caso $y \in L^+(x)$, existirá uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \rightarrow +\infty$ e $\pi(x, t_n) \rightarrow y$. Como $\pi(x, t_n) \in C^+(x)$, segue que $y \in \overline{C^+(x)}$. Portanto, $C^+(x) \cup L^+(x) \subset \overline{C^+(x)}$.

ii) Mostremos que $L^+(x)$ é fechado. Para isto, basta provarmos que $\overline{L^+(x)} \subset L^+(x)$. Tomemos $y \in \overline{L^+(x)}$. Então existe uma sequência $\{y_k\} \subset L^+(x)$ tal que $y_k \rightarrow y$. Para cada k arbitrário fixado, existe uma sequência $\{t_n^k\} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n^k \rightarrow +\infty$ e $\pi(x, t_n^k) \rightarrow y_k$. Também existe $N > 0$ tal que $\rho(\pi(x, t_k^k), y_k) < \frac{1}{k}$, para $k > N$. Com isto, consideremos a sequência $t_k = t_k^k$. Note que $t_k \rightarrow +\infty$ e

$$\rho(y, \pi(x, t_k)) \leq \rho(y, y_k) + \rho(y_k, \pi(x, t_k)) \leq \rho(y, y_k) + \frac{1}{k}.$$

Portanto $y \in L^+(x)$ e segue que $L^+(x)$ é fechado.

Mostremos, agora, que $L^+(x)$ é invariante pela π . Seja $y \in L^+(x)$. Logo, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \rightarrow +\infty$ e $\pi(x, t_n) \rightarrow y$. Assim consideremos o ponto $\pi(y, \tau) \in C^+(y)$, onde τ é arbitrário e fixado. Então pela continuidade da π , segue que

$$\pi(x, t_n + \tau) = \pi(\pi(x, t_n), \tau) \rightarrow \pi(y, \tau) \in L^+(x).$$

Assim, $C^+(y) \subset L^+(x)$.

iii) Suponhamos que $L^+(x)$ não seja conexo. Então $L^+(x) = A \cup B$, onde A e B são não-vazios, fechados e disjuntos. Como $L^+(x)$ é compacto, segue que A e B são compactos. Daí, pelo fato de X ser localmente compacto, existirá um $\varepsilon > 0$ de modo que $B[A, \varepsilon]$ e $B[B, \varepsilon]$ sejam compactos e disjuntos. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Então existem sequências $\{t_n\}$ e $\{h_n\}$, com $t_n \rightarrow +\infty$ e $h_n \rightarrow +\infty$, tais que $\pi(x, t_n) \rightarrow a$ e $\pi(x, h_n) \rightarrow b$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\pi(x, t_n) \in B(A, \varepsilon)$, $\pi(x, h_n) \in B(B, \varepsilon)$ e $h_n - t_n > 0$ para todo n . Como os segmentos de trajetórias $\pi(x, t)$, $t_n \leq t \leq h_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, são conjuntos conexos e compactos, eles claramente interceptam $H(A, \varepsilon)$ e $H(B, \varepsilon)$. Em particular, existe uma sequência $\{T_n\}$, $t_n < T_n < h_n$, de maneira que $\pi(x, T_n) \in H(A, \varepsilon)$ o qual é compacto. Deste modo, podemos assumir que $\pi(x, T_n) \rightarrow z$, com $T_n \rightarrow +\infty$, e que $z \in L^+(x)$. Mas, do modo como foi tomado, $z \notin A \cup B$, o que é um absurdo. Portanto $L^+(x)$ é necessariamente conexo.

- iv) Como X é um espaço métrico, $\overline{C^+(x)} \subset X$ e $L^-(x) \subset X$ (com $L^-(x)$ fechado, $\overline{C^+(x)}$ compacto e $L^+(x) \subset \overline{C^+(x)}$), segue que $L^+(x)$ é compacto.
- v) Como X é localmente compacto e $L^+(x)$ é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B[L^+(x), \varepsilon]$ é compacto. Como $L^+(x)$ é conexo, existe $\tau = \tau(\varepsilon)$ tal que $C_\tau^+(x) \subset B[L^+(x), \varepsilon]$, onde $C_\tau^-(x) = \{\pi(x, t) : t > \tau\}$. Se existisse uma sequência $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty$, com

$$\pi(x, t_n) \in \partial B(L^+(x), \varepsilon),$$

poderíamos assumir, pelo fato de $\partial B(L^+(x), \varepsilon)$ ser compacto, que

$$\pi(x, t_n) \rightarrow y \in \partial B(L^+(x), \varepsilon).$$

Daí, teríamos $y \in L^+(x)$ e $y \in \partial B(L^+(x), \varepsilon)$, o que seria um absurdo. Portanto $C^+(x) = C^+[x, \tau] \cup C_\tau^+(x)$. Assim $\overline{C^+(x)} = C^+[x, \tau] \cup \overline{C_\tau^+(x)}$. Mas $C^+[x, \tau]$ é compacto e $\overline{C_\tau^+(x)}$ também é compacto, pois $\overline{C_\tau^+(x)} \subset B[L^+(x), \varepsilon]$. Portanto $\overline{C^+(x)}$ é compacto.

- vi) Suponhamos que ocorra o contrário. Então existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \rightarrow +\infty$, e existe $\eta > 0$ tal que

$$\rho(\pi(x, t_n), L^-(x)) \geq \eta > 0.$$

Como $\pi(x, t_n) \in \overline{C^+(x)}$, o qual é compacto por v), segue que $\pi(x, t_n) \rightarrow y \in L^+(x)$. Daí,

$$0 < \eta \leq \rho(\pi(x, t_n), L^+(x)) \leq \rho(\pi(x, t_n), y) + \rho(y, L^+(x)).$$

Fazendo $t_n \rightarrow +\infty$, temos

$$0 = \rho(y, L^+(x)) \geq \eta > 0,$$

que é um absurdo. Logo $\rho(\pi(x, t), L^-(x)) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$.

□

Na definição abaixo, apresentaremos o conjunto que descreve o comportamento da trajetória de $x \in X$ perto do infinito.

Definição 1.2.14 Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. O **conjunto prolongado** de x é dado por

$$D^+(x) = \{y \in X : \text{existem } \{x_n\} \subset X \text{ e } \{t_n\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ tais que } x_n \rightarrow x \text{ e } \pi(x_n, t_n) \rightarrow y\}.$$

Exemplo 1.2.15 Um sistema simples que apresenta um ponto de sela pode ser dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2. \end{cases} \quad (1.18)$$

Vejamos o esboço das trajetórias do sistema (1.18) representado na Figura 1.7.

Figura 1.7: Trajetória do sistema (1.18).

Se p for um ponto qualquer do eixo x_1 , então $D^-(p)$ consistirá de todos os pontos sobre $C^+(p)$, bem como dos pontos do eixo x_2 . Caso p não esteja sobre o eixo x_1 , então $D^+(p) = C^+(p)$.

No Exemplo 1.2.15 acima, $D^+(p)$ é conexo. O exemplo seguinte mostra que este fato nem sempre ocorre.

Exemplo 1.2.16 Consideremos o sistema semidinâmico no plano dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_2), \\ \dot{x}_2 = \cos^2(x_2). \end{cases} \quad (1.19)$$

O retrato de fases de (1.19) consiste de trajetórias γ_k dadas por

$$\gamma_k = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\},$$

que são as retas paralelas ao eixo x_1 . Entre qualquer duas retas consecutivas, γ_k s, as trajetórias são dadas por

$$\gamma = \{ (x_1, x_2) : x_1 + c = \sec(x_2) \},$$

onde c é uma constante que depende da trajetória. A trajetória entre as retas $x_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $x_2 = \frac{\pi}{2}$ é dada pela Figura 1.8.

Figura 1.8: Trajetórias do sistema (1.19).

Notemos que, para qualquer ponto $p \in \gamma_{-1}$, temos

$$D^+(p) = C^-(p) \cup \gamma_0 \cup \gamma_{-2}.$$

Aqui, $D^+(p)$ não é conexo. Notemos, também, que $I^+(p) = \emptyset$ para qualquer ponto p no plano.

O próximo teorema mostra algumas propriedades dos conjuntos $C^+(x)$ e $D^-(x)$, para $x \in X$, onde (X, π) é um sistema semidinâmico.

Teorema 1.2.17 [[2], págs. 121, 125]. Seja (X, π) um sistema semidinâmico. Valem as propriedades:

- i) Se $x \in X$, então $\overline{C^+(x)} \subset D^-(x)$.

- ii) Se $x \in X$, então $D^+(x)$ será fechado e positivamente invariante.
- iii) Seja X localmente compacto. Se, para qualquer $x \in X$, $D^+(x)$ for compacto, então $D^+(x)$ também será conexo.
- iv) Se $M \subset X$ for não-vazio e compacto, então $D^+(M)$ será fechado.

Demonstração:

i) Seja $y \in \overline{C^+(x)}$. Logo existe uma seqüência $\{y_n\} \subset C^+(x)$ tal que $y_n \rightarrow y$, isto é, existe uma seqüência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $y_n = \pi(x, t_n)$, com $t_n \rightarrow +\infty$ e $\pi(x, t_n) \rightarrow y$. Portanto, tomando a seqüência $x_n = x$, segue que $\{x_n\} \subset X$, $x_n \rightarrow x$ e $\pi(x_n, t_n) \rightarrow y$, donde $y \in D^+(x)$.

ii) A prova é análoga ao caso (ii) do Teorema 1.2.13.

iii) A prova é semelhante ao caso (iii) do Teorema 1.2.13 e por isso vamos omiti-la.

iv) Seja $y \in \overline{D^+(M)}$. Logo existe uma seqüência $\{y_n\} \subset D^+(M)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Então existem uma seqüência $\{x_n\} \subset M$ e $y_n \in D^+(x_n)$. Como M é compacto, podemos assumir que $x_n \rightarrow x \in M$. Para cada n fixo e arbitrário, existem seqüências $\{x_k^n\}$ e $\{t_k^n\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, tais que $t_k^n \geq 0$, $x_k^n \rightarrow x_n$ e $\pi(x_k^n, t_k^n) \rightarrow y_n$ para $k \rightarrow +\infty$. Também existe $N > 0$ tal que

$$\rho(x_n^n, x_n) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \rho(\pi(x_n^n, t_n^n), y_n) < \frac{1}{n},$$

para $n > N$. Daí, considerando as seqüências $\{x_n^n\}$ e $\{t_n^n\}$, temos

$$\rho(x_n^n, x) \leq \rho(x_n^n, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x)$$

e

$$\rho(\pi(x_n^n, t_n^n), y) \leq \rho(\pi(x_n^n, t_n^n), y_n) + \rho(y_n, y) < \frac{1}{n} + \rho(y_n, y).$$

Portanto $x_n^n \rightarrow x$ e $\pi(x_n^n, t_n^n) \rightarrow y$. Assim $y \in D^+(x)$, ou seja, $y \in D^+(M)$.

Isto completa a prova. □

1.2.3 Estabilidade

Definição 1.2.18 Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $A \subset X$. Diremos que A será π —estável se, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in A$, existir $\delta > 0$ tal que $\pi(B(x, \delta), [0, +\infty)) \subset B(A, \varepsilon)$.

Sistemas Semidinâmicos Impulsivos

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos a teoria dos sistemas semidinâmicos impulsivos, que consiste de um sistema semidinâmico acrescido de uma condição para descrever as discontinuidades de primeira espécie da solução, a saber, os impulsos. Estes sistemas serão nosso objeto de estudo principal.

Definição 2.1.1 Um **sistema semidinâmico impulsivo** $(X, \pi; M, I)$ consiste de um sistema semidinâmico (X, π) juntamente com um subconjunto fechado não-vazio M de X e uma função contínua $I: M \rightarrow X$ tal que a seguinte propriedade seja válida:

Para cada $x \in M$, existe um $\varepsilon_x > 0$ tal que:

$$F(x, (0, \varepsilon_x)) \cap M = \emptyset \quad \text{e} \quad \pi(x, (0, \varepsilon_x)) \cap M = \emptyset.$$

A condição acima mostra que os pontos de M são isolados em todas as trajetórias do sistema (X, π) . Chamamos o conjunto M de **conjunto impulsivo**, a função I de **função impulso** e escrevemos $I(M) = N$. Definimos, também,

$$M^+(x) = (\pi^+(x) \cap M) \setminus \{x\}.$$

O lema a seguir nos diz que, sob certas condições, existirá o menor tempo para o qual a trajetória do sistema impulsivo encontra M .

Lema 2.1.2 [[12], pág. 252]. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Então, para qualquer $x \in X$, existirá um número real positivo s_1 , $0 < s_1 \leq +\infty$, de maneira que $\pi(x, t) \notin M$, $0 < t < s_1$, e se $M^+(x) \neq \emptyset$, então $\pi(x, s_1) \in M$.

Demonstração: Se $M^+(x) = \emptyset$, então $\pi(x, t) \notin M$, para todo $t > 0$. Note que, neste caso, podemos tomar $s_1 = +\infty$ e o lema estará satisfeito. Agora, se $M^+(x) \neq \emptyset$, então existirá pelo menos um $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(x, t_1) \in M$. Como $\pi_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é contínua e M é fechado e não-vazio, então o subconjunto compacto $[0, t_1] \cap \pi_x^{-1}(M)$ de $\mathbb{R}_+$ possui um menor elemento, digamos s_1 , o qual satisfaz o lema. $\square$

Nas definições que seguem, $(X, \pi; M, I)$ denota um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$.

Definição 2.1.3 Definimos uma função $\phi : X \rightarrow (0, +\infty]$ da forma seguinte. Se $M^+(x) = \emptyset$, então $\phi(x) = +\infty$. Se $M^+(x) \neq \emptyset$, então $\phi(x)$ será o menor valor s (que existe pelo Lema 2.1.2) tal que $\pi(x, t) \notin M$, para $t \in (0, s)$, e $\pi(x, s) \in M$, isto é, $\phi(x)$ será o menor tempo positivo para o qual a trajetória de x encontra M .

Definição 2.1.4 Dado $x \in X$, chamamos $\pi(x, \phi(x))$ de **ponto impulsivo** de x .

Agora, vamos definir a trajetória do sistema semidinâmico impulsivo e, em seguida, vamos descrever tal trajetória de maneira indutiva.

Definição 2.1.5 A **trajetória impulsiva** de x em $(X, \pi; M, I)$ é uma função $\tilde{\pi}_x$ definida sobre um subconjunto $[0, s)$ de $\mathbb{R}_+$ (s pode ser $+\infty$) em X .

Consideremos $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Se $M^+(x) = \emptyset$, então $\tilde{\pi}_x(t) = \pi(x, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$, e $\phi(x) = +\infty$. Porém se $M^+(x) \neq \emptyset$, segue do Lema 2.1.2 que existirá um menor positivo $s_0 \in \mathbb{R}_+$ de maneira que $\pi(x, s_0) = x_1 \in M$ e $\pi(x, t) \notin M$, para $0 < t < s_0$. Então definimos, $\tilde{\pi}_x$ sobre $[0, s_0]$ como sendo

$$\tilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x, t), & 0 \leq t < s_0, \\ x_1^+, & t = s_0, \end{cases}$$

onde $x_1^+ = I(x_1)$ e $\phi(x) = s_0$.

Como $s_0 < +\infty$, o processo continua mas, agora, iniciando em x_1^+ . Deste modo, caso $M^-(x_1^+) = \emptyset$, definimos $\tilde{\pi}_x(t) = \pi(x_1^+, t)$, para $0 \leq t < +\infty$, e $\phi(x_1^+) = +\infty$. E se $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$, segue, novamente do Lema 2.1.2, que existirá um menor positivo $s_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(x_1^+, s_1) = x_2 \in M$ e $\pi(x_1^-, t - s_0) \notin M$, para $s_0 < t < s_0 + s_1$. Definimos $\tilde{\pi}_x$ sobre $[s_0, s_0 + s_1]$ por

$$\tilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_1^+, t - s_0), & s_0 \leq t < s_0 + s_1, \\ x_2^+, & t = s_0 + s_1, \end{cases}$$

onde $x_2^+ = I(x_2)$ e $\phi(x_1^+) = s_1$.

Suponhamos, agora, que $\tilde{\pi}_x$ esteja definida no intervalo $[t_{n-1}, t_n]$ e que $\tilde{\pi}_x(t_n) = x_n^+$, onde $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$. Se $M^-(x_n^+) = \emptyset$, então $\tilde{\pi}_x(t) = \pi(x_n^+, t)$, para $0 \leq t < +\infty$, e $\phi(x_n^+) = +\infty$. Se $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$, então existirá $s_n \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(x_n^+, s_n) = x_{n+1} \in M$ e $\pi(x_n^-, t - t_n) \notin M$, para $t_n < t < t_{n+1}$. Além disso,

$$\tilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_n^+, t - t_n), & t_n \leq t < t_{n+1}, \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}, \end{cases}$$

onde $x_{n+1}^+ = I(x_{n+1})$ e $\phi(x_n^+) = s_n$.

Observemos que $\tilde{\pi}_x$ está definida sobre cada $[t_n, t_{n+1}]$, onde $t_{n+1} = \sum_{i=0}^n s_i$, ou seja, $\tilde{\pi}_x$ está definida sobre $[0, t_{n+1}]$.

O processo acima termina após um número finito de passos, se $M^-(x_n^+) = \emptyset$ para algum n , ou ele continua indefinidamente, se $M^-(x_n^+) \neq \emptyset$, $n = 1, 2, 3, \dots$, e se $\tilde{\pi}_x$ estiver definida no intervalo $[0, T(x))$, onde $T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$.

Notemos que, dado qualquer $x \in X$, uma das três condições será válida:

- i) $M^-(x) = \emptyset$ e, desta forma, a trajetória de x não possui descontinuidades.
- ii) Para algum $n \geq 1$, x_k^+ está definida, para $k = 1, 2, \dots, n$, e $M^-(x_n^+) = \emptyset$. Neste caso, a trajetória de x terá um número finito de descontinuidades.
- iii) Para qualquer $k \geq 1$, x_k^+ está definida e $M^-(x_k^+) \neq \emptyset$. Neste caso, a trajetória de x terá um

número infinito de descontinuidades.

Notemos, também, que se x satisfizer i) ou ii), então $T(x) = +\infty$. Mas se x satisfizer iii), teremos $T(x) = +\infty$ ou $T(x) \in (0, +\infty)$. Em particular, neste trabalho, vamos considerar o caso em que $T(x) = +\infty$.

Definição 2.1.6 Para qualquer $x \in X$ fixado, a **órbita positiva impulsiva** de x no sistema semidinâmico com impulso $(X, \pi; M, I)$ será dada pelo conjunto

$$\tilde{C}^+(x) = \{\tilde{\pi}(x, t) : t \in \mathbb{R}_+\},$$

e seu fecho em X será denotado por $\tilde{K}^+(x)$.

Observação 2.1.7 Escrevemos $\tilde{\pi}_x(t) = \tilde{\pi}(x, t)$, para qualquer t em $[0, +\infty)$. Frequentemente vamos utilizar o seguinte fato: para qualquer t tal que $0 \leq t < +\infty$, existe $k \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ tal que $t = \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+) + t'$, onde $x = x_0^+$ e, conseqüentemente, $\tilde{\pi}(x, t) = \pi(x_k^+, t')$, para $0 \leq t' < \phi(x_k^+)$. Este fato segue imediatamente do item ii) da proposição a seguir.

A proposição seguinte nos diz que $\tilde{\pi}$ satisfaz as mesmas condições da função π como na Definição 1.2.1 do Capítulo 1. Esta proposição encontra-se em [11] e não está demonstrada. Aqui, nós esboçamos sua prova.

Proposição 2.1.8 [[11], pág. 510]. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $x \in X$, então:

- i) $\tilde{\pi}(x, 0) = x$,
- ii) $\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t), s) = \tilde{\pi}(x, t+s)$, $t, s \in [0, +\infty)$.

Demonstração: Se $\tilde{\pi}$ for contínua, a conclusão é imediata.

i) Seja

$$\tilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_n^+, t - t_n), & t_n \leq t < t_{n+1}, \\ x_{n+1}^-, & t = t_{n+1}, \end{cases}$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, $x_0^+ = x$ e $t_0 = 0$, como na descrição feita anteriormente. Segue que

$$\tilde{\pi}_x(0) = \tilde{\pi}_x(t_0) = \pi(x_0^+, t_0 - t_0) = \pi(x, 0) = x.$$

ii) Novamente como em i), consideremos

$$\tilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_n^+, t - t_n), & t_n \leq t < t_{n+1}, \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}. \end{cases}$$

Seja $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \leq t < t_{n+1}$, para algum n . Suponhamos que $0 \leq s < t_{n+1} - t$. Note que, $\phi(\pi(x_n^+, t - t_n)) = t_{n+1} - t$, pois

$$\pi(\pi(x_n^+, t - t_n), t_{n+1} - t) = \pi(x_n^+, t_{n+1} - t_n) = x_{n+1} \in M,$$

e, para qualquer $0 < \lambda < t_{n+1} - t$, temos $t_n < \lambda + t < t_{n+1}$ e

$$\pi(\pi(x_n^+, t - t_n), \lambda) = \pi(x_n^+, t + \lambda - t_n) = \tilde{\pi}(x, \lambda + t) \notin M.$$

Desta forma,

$$\tilde{\pi}(\pi(x_n^+, t - t_n), s) = \pi(\pi(x_n^+, t - t_n), s).$$

e assim

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t), s) = \tilde{\pi}(\pi(x_n^+, t - t_n), s) = \pi(\pi(x_n^+, t - t_n), s) = \pi(x_n^+, t + s - t_n) = \tilde{\pi}(x, t + s).$$

Mas, se $s > t_{n+1} - t$, isto é, $s + t \geq t_{n+1}$, existe um $k \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, tal que $t_{n+k} \leq t + s < t_{n+k+1}$. Logo,

$$\tilde{\pi}(x, t + s) = \pi(x_{n+k}^+, t + s - t_{n+k}).$$

Tomando $y = \pi(x_n^+, t - t_n)$, segue que $y_1^- = x_{n+1}^-, \dots, y_k^+ = x_{n+k}^+$, $k \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ e os momentos de impulsos da trajetória de y são $m_1 < m_2 < \dots < m_k$, sendo que,

$$m_{j+1} - m_j = t_{n+j+1} - t_{n+j}, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

e $m_1 = t_{n+1} - t$. Como $t_{n+k} \leq t + s < t_{n+k+1}$, segue que $m_k \leq s < m_{k+1}$, pois $t_{n+k} - t \leq s \leq t_{n+k+1} - t$ e, além disso,

$$t_{n+k} - t = \sum_{j=2}^k (t_{n+j} - t_{n+j-1}) + t_{n+1} - t = \sum_{j=2}^k (m_j - m_{j-1}) + m_1 = m_k$$

e

$$t_{n+k+1} - t = \sum_{j=2}^{k+1} (t_{n+j} - t_{n+j-1}) + t_{n+1} - t = \sum_{j=2}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) + m_1 = m_{k+1}.$$

Portanto $\tilde{\pi}(y, s) = \pi(y_k^+, s - m_k)$. Mas como

$$\begin{aligned} s - m_k &= s - (m_k - m_1) - m_1 = s - (t_{n+k} - t_{n+1}) - m_1 = \\ &= s - t_{n+k} + t_{n+1} - (t_{n+1} - t) = t + s - t_{n+k}, \end{aligned}$$

temos

$$\pi(y_k^+, s - m_k) = \pi(x_{n+k}^+, t + s - t_{n+k}).$$

Lembremos que $y = \pi(x_n^+, t - t_n)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t), s) &= \tilde{\pi}(\pi(x_n^+, t - t_n), s) = \tilde{\pi}(y, s) = \pi(y_k^+, s - m_k) \\ &= \pi(x_{n+k}^+, t + s - t_{n+k}) = \tilde{\pi}(x, t + s). \end{aligned}$$

A demonstração está concluída. $\square$

2.2 Semicontinuidade e Continuidade da Função ϕ

Em [8], Teorema 4, página 126, a continuidade de ϕ é investigada. Este teorema nos diz que, se em um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$, uma condição especial for satisfeita para todo $x \in M$, então ϕ será contínua sobre X . Entretanto há um problema neste teorema, pois a continuidade foi provada em termos da semicontinuidade superior e inferior; foi assumido que vale a semicontinuidade inferior para a função ϕ . Entretanto em [5], o autor mostra que esta função ϕ nem sempre é semicontínua inferiormente. No que segue, vamos apresentar condições para que a

função ϕ seja contínua. Antes, porém, vamos dar algumas definições e resultados auxiliares.

Definição 2.2.1 Seja (X, π) um sistema semidinâmico. Um conjunto fechado S contendo $x \in X$ será chamado de **seção** ou λ -**seção** através de x , com λ real positivo, se existir um conjunto fechado L tal que:

- (a) $F(L, \lambda) = S$;
- (b) $F(L, [0, 2\lambda])$ seja uma vizinhança de x ;
- (c) $F(L, \mu) \cap F(L, \nu) = \emptyset$, para $0 \leq \mu < \nu \leq 2\lambda$.

Chamaremos o conjunto $F(L, [0, 2\lambda])$ de **tubo** (ou λ -**tubo**) e o conjunto L de **barra**.

O próximo lema é apresentado em [4], pág. 300, mas sua demonstração está incompleta. A seguir, apresentamos uma prova completa para este resultado.

Lema 2.2.2 Seja (X, π) um sistema semidinâmico. Se S for uma λ -seção através de x , $x \in X$, e $\mu \leq \lambda$, então S será uma μ -seção através de x .

Demonstração: Tomemos a barra $L_\mu = F(L_\lambda, \lambda - \mu)$, onde L_λ é uma barra do λ -tubo. Note que L_μ é fechado, pois π é contínua. Assim temos:

- a) $F(L_\mu, \mu) = S$;
- b) $F(L_\mu, [0, 2\mu])$ é vizinhança de x ;
- c) $F(L_\mu, \sigma) \cap F(L_\mu, \nu) = \emptyset$, para $0 \leq \sigma < \nu \leq 2\mu$.

Com efeito. Provemos cada um destes ítems.

a) Temos

$$x \in F(L_\mu, \mu) \Leftrightarrow \pi(x, \mu) \in L_\mu = F(L_\lambda, \lambda - \mu) \Leftrightarrow \pi(\pi(x, \mu), \lambda - \mu) \in L_\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi(x, \lambda) \in L_\lambda \Leftrightarrow x \in F(L_\lambda, \lambda) = S.$$

b) Como $F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ é uma vizinhança de x , existe um aberto U_1 de x tal que

$$x \in U_1 \subset F(L_\lambda, [0, 2\lambda]).$$

Seja $T = F(L_\lambda, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda])$. Note que T é fechado, pois dada uma sequência y_n em T , com $y_n \rightarrow y$, existe uma sequência $t_n \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ tal que $\pi(y_n, t_n) \in L_\lambda$. Como $[0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ é compacto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $t_n \rightarrow \tau$, $\tau \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$. Segue da continuidade da π que

$$\pi(y_n, t_n) \rightarrow \pi(y, \tau).$$

Como L_λ é fechado, temos $\pi(y, \tau) \in L_\lambda$. Portanto $y \in T$. Por outro lado, como $S \subset T^c$, onde T^c denota o complementar de T em X , existe um aberto U_2 contendo x tal que $T \cap U_2 = \emptyset$. Assim, $x \in U_1 \cap U_2 \subset F(L_\mu, [0, 2\mu])$.

c) Suponhamos que $F(L_\mu, \sigma) \cap F(L_\mu, \nu) \neq \emptyset$, para $0 \leq \sigma < \nu \leq 2\mu$. Desta forma, existe $y \in F(L_\mu, \sigma) \cap F(L_\mu, \nu)$, isto é,

$$\pi(y, \sigma) \in L_\mu = F(L_\lambda, \lambda - \mu)$$

e

$$\pi(y, \nu) \in L_\mu = F(L_\lambda, \lambda - \mu).$$

Logo,

$$\pi(y, \sigma + \lambda - \mu) \in L_\lambda$$

e

$$\pi(y, \nu + \lambda - \mu) \in L_\lambda,$$

o que é um absurdo, pois $0 \leq \sigma + \lambda - \mu < \nu + \lambda - \mu \leq 2\lambda$ e S é uma λ -seção por hipótese.

A demonstração está, portanto, terminada. $\square$

Na próxima definição, apresentaremos a condição TC para um tubo.

Definição 2.2.3 Seja (X, π) um sistema semidinâmico. Qualquer tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ dado pela seção S através de $x \in X$ tal que

$$S \subset M \cap F(L, [0, 2\lambda])$$

será denominado um **TC-tubo** através de x . Diremos que um ponto $x \in M$ satisfaz a **Condição de Tubo** e escreveremos abreviadamente (TC), se existir um TC-tubo, $F(L, [0, 2\lambda])$, através de x .

O próximo resultado é consequência do Lema 2.2.2 e das definições acima.

Lema 2.2.4 [[5], pág. 5]. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e suponhamos que um ponto $x \in X$ satisfaça a condição (TC) com uma λ -seção S . Então, para qualquer $\eta < \lambda$, o conjunto S também será uma η -seção com um TC-tubo.

Definição 2.2.5 Diremos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é **semicontínua superiormente** no ponto $a \in X$ quando, para cada $\varepsilon > 0$ dado, pudermos obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $\rho(x, a) < \delta$ implicam que $f(x) < f(a) + \varepsilon$. Diremos que f é semicontínua superiormente quando ela o for em cada ponto de X . Analogamente, f será dita **semicontínua inferiormente** em $a \in X$ quando, para cada $\varepsilon > 0$ dado, pudermos obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $\rho(x, a) < \delta$ implicam que $f(x) > f(a) - \varepsilon$. Em termos de seqüências, f será semicontínua superiormente em $a \in X$ se, para toda seqüência de pontos $x_n \in X$, com $x_n \rightarrow a$, tivermos $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(a)$. Uma afirmação análoga vale para a semicontinuidade inferior. Diremos, então, que f é **contínua** num ponto se, e somente se, ela for superiormente e inferiormente contínua neste ponto.

No Teorema 2.2.6 a seguir, vamos mostrar a condição que um ponto pertencente ao conjunto M deve satisfazer para que ϕ seja contínua superiormente nele.

Teorema 2.2.6 [[5], pág. 5]. Se, em um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$, cada ponto pertencente ao conjunto impulsivo M satisfizer a condição (TC), então ϕ será semicontínua superiormente.

Demonstração: É suficiente mostrarmos a continuidade superior em um ponto x no caso em que $\phi(x) = u \in (0, +\infty)$. Neste caso, $\pi(x, u) = y \in M$ e $\pi(x, (0, u)) \cap M = \emptyset$. Pelo Lema 2.2.4, podemos tomar $\varepsilon < u$ tal que $U = F(L, [0, 2\varepsilon])$ seja um TC-tubo com uma ε -seção através de y igual a $F(L, \varepsilon)$. Existe uma vizinhança V de x tal que $\pi(V, u) \subset U$. Assim, $\pi(z, u) \in F(L, [0, 2\varepsilon])$, para

qualquer $z \in V$. Além disso, dado qualquer $z \in V$, existe um $\eta_z \in [0, 2\varepsilon]$ tal que $\pi(z, u + \eta_z) \in I$. Como $\varepsilon < u$, segue que $u + \eta_z - \varepsilon > 0$ e

$$\pi(z, u + \eta_z - \varepsilon) \in F(L, \varepsilon) = S \subset M.$$

Daí, $\phi(z) \leq u + \eta_z - \varepsilon < u + \varepsilon$. Portanto fica provada a semicontinuidade superior de ϕ em x . $\square$

O teorema seguinte diz que, se $x \notin M$, então ϕ será semicontínua inferiormente em x .

Teorema 2.2.7 [[5], pág. 5]. Assumamos que $(X, \pi; M, I)$ seja um sistema semidinâmico impulsivo. Então, para qualquer $x \in X \setminus M$, a função ϕ será semicontínua inferiormente em x .

Demonstração: Sejam $x \in X \setminus M$ e $\phi(x) = c \in (0, +\infty)$. A função ϕ será semicontínua inferiormente em x se, e somente se, para qualquer sequência $x_n \rightarrow x$, com $\phi(x_n) \rightarrow t$, tivermos $t \geq c$. Suponhamos o contrário, isto é, que existe uma sequência $\{p_n\} \subset X$, $p_n \rightarrow x$, com

$$\phi(p_n) \rightarrow t < c.$$

Então para n suficientemente grande, temos $p_n \notin M$. Entretanto $\pi(p_n, \phi(p_n)) \in M$ e, como M é fechado e π é contínua, segue que

$$\pi(p_n, \phi(p_n)) \rightarrow \pi(x, t) \in M.$$

Logo $\phi(x) \leq t < c$, o que contraria a hipótese. Portanto ϕ é semicontínua inferiormente em x . $\square$

No Teorema 2.2.8 a seguir, mostraremos que ϕ não será semicontínua inferiormente em x , se $x \in M$ e x não for ponto inicial.

Teorema 2.2.8 [[5], pág. 5]. Consideremos o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$. Assumamos que $x \in M$ e que x não seja ponto inicial. Então a função ϕ não será semicontínua inferiormente em x .

Demonstração: Suponhamos que ϕ seja semicontínua inferiormente em $x \in M$. Como x não é ponto inicial, existem $\varepsilon > 0$ e $y \in X$ tais que $\pi(y, \varepsilon) = x$ e $\pi(y, [0, \varepsilon)) \cap M = \emptyset$.

Seja $\{\varepsilon_n\}$ uma seqüência crescente tal que $\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon$. Então pela continuidade da π , temos

$$\pi(y, \varepsilon_n) \rightarrow x.$$

Notemos que $\phi(\pi(y, \varepsilon_n)) = \varepsilon - \varepsilon_n$, pois

$$\pi(\pi(y, \varepsilon_n), \varepsilon - \varepsilon_n) = \pi(y, \varepsilon) \in M$$

e, se $0 < \delta_n < \varepsilon - \varepsilon_n$, então $0 \leq \varepsilon_n < \delta_n + \varepsilon_n < \varepsilon$. Daí

$$\pi(\pi(y, \varepsilon_n), \delta_n) = \pi(y, \delta_n + \varepsilon_n) \notin M,$$

já que $\pi(y, [0, \varepsilon)) \cap M = \emptyset$.

Como

$$\pi(y, \varepsilon_n) \rightarrow x \quad \text{e} \quad \phi(\pi(y, \varepsilon_n)) = \varepsilon - \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

segue do fato de ϕ ser semicontínua inferiormente em x , que $\phi(x) \leq 0$, o que é um absurdo, pois $\phi(x) \in (0, +\infty]$. $\square$

O próximo resultado diz respeito à continuidade da função ϕ .

Teorema 2.2.9 [[5], pág. 6]. Considere o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$. Assumamos que nenhum ponto inicial pertença ao conjunto impulsivo M e que cada elemento de M satisfaça a condição (TC). Então ϕ será contínua em x se, e somente se, $x \in X \setminus M$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $x \in M$. Como x não é ponto inicial, segue, pelo Teorema 2.2.8, que ϕ não é semicontínua inferiormente. Mas isto é um absurdo. Portanto, $x \in X \setminus M$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in X \setminus M$. Pelo Teorema 2.2.7, ϕ é semicontínua inferiormente em x . E como cada ponto de M satisfaz a condição (TC), pelo Teorema 2.2.6, ϕ é semicontínua superiormente em x . Portanto, ϕ é contínua em x . $\square$

Devido os resultados apresentados nessa seção, vamos assumir, daqui em diante, que ϕ é

semicontínua superiormente em X e contínua em $X \setminus M$.

2.3 Sistemas Semidinâmicos Discretos Impulsivos

Dado um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$, vamos definir um sistema semidinâmico discreto com impulso associado, naturalmente, ao sistema $(X, \pi; M, I)$.

Definição 2.3.1 Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se a sequência $\{x_n^+\} \subset X$ for infinita e $T(x) = +\infty$ ($[0, T(x))$ é o intervalo de definição de $\tilde{\pi}_x$), diremos que $\tilde{\pi}_x$ é uma **trajetória impulsiva infinita** e definiremos

$$\hat{N} = \{x \in N : \tilde{\pi}_x \text{ é uma trajetória impulsiva infinita}\},$$

onde $N = I(M)$. Também vamos definir uma função $t_n : \hat{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$t_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(x_i^-), \quad n \geq 1 \quad \text{e} \quad t_0 = 0,$$

onde $\{x_n^+\}$ é a sequência de impulsos do ponto x . Note que a continuidade de t_n depende da continuidade de ϕ .

Definição 2.3.2 Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $\hat{N}$ como na Definição 2.3.1. Dados $x \in \hat{N}$ e $x_1 = \pi(x, \phi(x))$, definimos a função $g : \hat{N} \rightarrow \hat{N}$ por

$$g(x) = I(\pi(x, \phi(x))) = x_1^+.$$

Definimos, também, $g^0 = \text{identidade}$, $g^1 = g$ e definimos $g^n, n \in \{2, 3, 4, \dots\}$, indutivamente da seguinte forma: como $\pi(x_{n-1}^-, \phi(x_{n-1}^+)) = x_n \in M$, então tomamos

$$g^n(x) = x_n^+$$

onde $x_0^- = x$.

Com a notação da definição acima, temos um **sistema semidinâmico discreto impulsivo**

$(\widehat{N}, \mathbb{Z}_+, g)$, onde $\mathbb{Z}_+$ é o conjunto dos números inteiros não-negativos e $g(x, n) = g^n(x)$. Vamos denotar por $(\widehat{N}, \mathbb{Z}_+, g)$ ou simplesmente por $(\widehat{N}, g)$ o sistema semidinâmico discreto impulsivo associado ao sistema semidinâmico impulsivo dado, $(X, \pi; M, I)$. A órbita de um ponto $x \in \widehat{N}$ será denotada por

$$\widehat{C}^+(x) = \{g^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\},$$

e seu fecho em $\widehat{N}$ por $\widehat{K}^+(x)$.

2.4 Propriedades Recursivas

Nesta seção, vamos considerar $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $(\widehat{N}, g)$ o sistema semidinâmico discreto impulsivo associado a ele. Estudamos as propriedades recursivas para $(X, \pi; M, I)$ e relacionamos os sistemas impulsivos $(X, \pi; M, I)$ e $(\widehat{N}, g)$.

2.4.1 Minimalidade

Definição 2.4.1 Seja $C \subset \widehat{N}$. Diremos que C é **minimal** em $(\widehat{N}, g)$ se, para qualquer $x \in C$, tivermos $C = \widehat{K}^-(x)$.

Definição 2.4.2 Seja $C \subset X$. Diremos que C é **minimal** em $(X, \pi; M, I)$, se $C = \widetilde{K}^+(x)$, para cada $x \in C \setminus M$.

Em [9], dois resultados são apresentados considerando-se ϕ contínua. Aqui, nós apresentamos tais resultados considerando a condição mais fraca de ϕ ser semicontínua superiormente em X e ser contínua em $X \setminus M$. Tais resultados são os Teoremas 2.4.3 e 2.4.5 a seguir.

Teorema 2.4.3 [[9], pág. 637]. Sejam $p \in \widehat{N}$ e $\widehat{K}^+(p)$ compacto e minimal em $(\widehat{N}, g)$. Então $\widetilde{K}^+(p)$ será compacto e minimal em $(X, \pi; M, I)$.

Demonstração: Não é difícil mostrar a compacidade de $\widetilde{K}^+(p)$. Basta usarmos a Observação 2.1.7. Mostremos a minimalidade de $\widetilde{K}^+(p)$.

Seja $y \in \widetilde{K}^+(p) \setminus M$. Então $\widetilde{K}^+(y) \subset \widetilde{K}^+(p)$. Logo, basta mostrarmos que

$$\widetilde{K}^+(p) \subset \widetilde{K}^+(y), \quad y \in \widetilde{K}^+(p) \setminus M.$$

Como $y \in \tilde{K}^-(p) \setminus M$, existe uma sequência $\{h_n\}$ em $\mathbb{R}_+$ tal que

$$\tilde{\pi}(p, h_n) \rightarrow y, \quad \text{para } n \rightarrow +\infty.$$

Pela Observação 2.1.7, segue que, para cada n , existe um $k_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, com $k_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, tal que

$$h_n = \sum_{i=0}^{k_n-1} \phi(p_i^+) + \bar{h}_n, \quad p_0^+ = p,$$

e

$$\tilde{\pi}(p, h_n) = \pi(p_{k_n}^+, \bar{h}_n), \quad 0 \leq \bar{h}_n < \phi(p_{k_n}^+).$$

Daí,

$$\pi(p_{k_n}^+, \bar{h}_n) \rightarrow y \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Como $\hat{K}^-(p)$ é compacto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$p_{k_n}^- \rightarrow \hat{y} \in \hat{K}^+(p)$$

e que $\bar{h}_n \rightarrow t_0$, já que $\bar{h}_n$ é uma sequência limitada de números reais. Logo,

$$\pi(p_{k_n}^-, \bar{h}_n) \rightarrow \pi(\hat{y}, t_0) = y.$$

Segue da continuidade superior de ϕ que $0 \leq t_0 \leq \phi(\hat{y})$ pois, como $p_{k_n}^+ \rightarrow \hat{y}$, então $\phi(p_{k_n}^+) \rightarrow c \leq \phi(\hat{y})$. Mas como $y \notin M$, então $0 \leq t_0 < \phi(\hat{y})$. Logo $y_n^+ = \hat{y}_n^+$, para $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Como queremos provar que $\tilde{K}^+(p) \subset \tilde{K}^+(y)$, tomemos $z \in \tilde{K}^+(p)$ arbitrariamente. O resultado segue como fizemos acima pelas existências de um $\bar{z} \in \hat{K}^+(p)$ e de um s_0 , $0 \leq s_0 < \phi(\bar{z})$ tais que $z = \pi(\bar{z}, s_0)$. Como $\hat{K}^+(p)$ é minimal e $\hat{y} \in \hat{K}^+(p)$, segue que $\hat{K}^+(\hat{y}) = \hat{K}^+(p)$. E como $\bar{z} \in \hat{K}^+(p)$, existe uma sequência $\{m_k\}$ em $\mathbb{Z}_+$ tal que

$$\hat{y}_{m_k}^+ = g^{m_k}(\hat{y}) \rightarrow \bar{z}.$$

Portanto, $\lim_{m_k \rightarrow +\infty} \sup \phi(\widehat{y}_{m_k}^+) \leq \phi(\bar{z})$. Consequentemente, existe uma sequência $\{s_k\}$ em $\mathbb{R}_+$ tal que

$$0 \leq s_k \leq \phi(\widehat{y}_{m_k}^+) \quad \text{e} \quad s_k \rightarrow s_0.$$

Logo,

$$\tilde{\pi}(\widehat{y}, t_{m_k}(\widehat{y}) + s_k) = \pi(\widehat{y}_{m_k}^+, s_k) = \pi(y_{m_k}^+, s_k) \rightarrow \pi(\bar{z}, s_0) = z.$$

e, assim, $z \in \widetilde{K}^+(y)$.

Finalmente, dado qualquer $y \in \widetilde{K}^+(p) \setminus M$, temos $\widetilde{K}^+(y) = \widetilde{K}^+(p)$. □

A recíproca do teorema anterior não é válida em geral. Vejamos o exemplo seguinte.

Exemplo 2.4.4 Seja $X = E \times \mathbb{R}_+$, onde $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e definamos

$$\pi : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \quad \text{por} \quad \pi((z, t), s) = (z, t + s),$$

onde $z \in E$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$. Seja $M = E \times \{2, 3\}$ e, para $z = re^{i\theta}$, seja $\lambda(z) = re^{i(\theta + \alpha)}$, onde α define uma rotação irracional. Agora definamos $I(z, i) = (\lambda(z), i - 2)$, onde $i = 2$ ou $i = 3$. Então $(X, \pi; M, I)$ define um sistema semidinâmico impulsivo. Note que $\widehat{N} = N$.

Entretanto, tomando $p = (z_0, 1)$, $z_0 \in E$, temos

$$\widetilde{K}^-(p) = S \times [0, 2],$$

onde $S = \{z : |z| = |z_0|\}$. Note que $\widetilde{K}^-(p)$ é compacto e minimal, mas $\widehat{K}^-(p) = (S \times \{0\}) \cup \{p\}$ não é minimal, pois, para qualquer $q \in S \times \{0\}$, $\widehat{K}^+(q)$ não contém p .

A recíproca do Teorema 2.4.3 é válida nas condições apresentadas no teorema a seguir.

Teorema 2.4.5 [[9], pág. 638]. Sejam $p \in \widehat{N}$ e $\widetilde{K}^+(p)$ compacto. Se $\widetilde{K}^+(p)$ for minimal e p for ponto limite de $\widehat{C}^-(p)$, então $\widehat{K}^+(p)$ será minimal.

Demonstração: Seja $y \in \widehat{K}^-(p)$. Então $\widehat{K}^-(y) \subset \widehat{K}^-(p)$ e resta mostrarmos que $\widehat{K}^-(p) \subset \widehat{K}^-(y)$. Como $p \in \widehat{K}^-(p) \setminus \widehat{C}^-(p)$ (p é ponto limite), existe uma sequência $\{p_{m_k}^+\}$ de pontos distintos de

$\widehat{K}^+(p)$ tal que

$$p_{m_k}^+ \rightarrow p.$$

Como $y \in \widehat{N}$, segue que $0 < \phi(y) < +\infty$. Então seja $z = \pi(y, t)$ para algum t , $0 < t < \phi(y)$. Logo $z_n^+ = y_n^+$ para $n \geq 1$ e $z \in \widetilde{K}^+(p)$, já que $y \in \widehat{K}^+(p)$. Como $\widetilde{K}^+(p)$ é minimal e $z \in \widetilde{K}^+(p) \setminus M$, então $p \in \widetilde{K}^+(z) = \widetilde{K}^+(p)$. E, sendo $p \in \widehat{N}$, temos que $0 < \phi(p) < +\infty$, assim podemos tomar

$$x = \pi(p, s), \quad 0 < s < \phi(p).$$

Então $x_n^+ = p_n^+$, para $n \geq 1$.

Como $x \in \widetilde{K}^+(p)$, então existe uma sequência $\{l_n\}$ em $\mathbb{R}_+$ tal que

$$\widetilde{\pi}(z, l_n) \rightarrow x.$$

Pela Observação 2.1.7, para cada n , existe um inteiro positivo k_n tal que

$$\widetilde{\pi}(z, l_n) = \pi(z_{k_n}^+, l_n'), \quad 0 \leq l_n' < \phi(z_{k_n}^+),$$

com $l_n = \sum_{i=0}^{k_n-1} \phi(z_i^+) + l_n'$. Então como $z_{k_n}^+ = y_{k_n}^+$ para $k_n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, segue que

$$\pi(y_{k_n}^+, l_n') = \pi(z_{k_n}^+, l_n') \rightarrow x.$$

Sendo $\widehat{K}^+(p)$ compacto, podemos assumir que $y_{k_n}^+ \rightarrow \widehat{y}$ e $l_n' \rightarrow t_0$, com $0 \leq t_0 \leq \phi(\widehat{y})$. Assim,

$$x = \pi(\widehat{y}, t_0).$$

Como $x \notin M$, segue que $\widehat{y}_n^+ = x_n^+ = p_n^+$, $n \geq 1$. E sendo $p_{m_k}^+ \rightarrow p$, temos

$$\widehat{y}_{m_k}^+ = p_{m_k}^+ \rightarrow p.$$

Dáí, $p \in \widehat{K}^+(\widehat{y})$. Mas $y_{k_n}^+ \rightarrow \widehat{y}$, donde segue que $\widehat{y} \in \widehat{K}^-(y)$. Logo $\widehat{K}^+(\widehat{y}) \subset \widehat{K}^+(y)$ e, portanto,

$p \in \widehat{K}^-(y)$. Assim $\widehat{K}^+(p) \subset \widehat{K}^+(y)$ e a demonstração está terminada. $\square$

2.4.2 Recorrência

Consideremos o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ e seu sistema discreto impulsivo associado $(\widehat{N}, g)$.

Definição 2.4.6 Diremos que g será **recorrente** em $x \in \widehat{N}$ ou $x \in \widehat{N}$ é **recorrente** em $(\widehat{N}, g)$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir um número inteiro positivo N_1 tal que, para quaisquer $j, k \in \mathbb{Z}^+$, existe um $n \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq n \leq N_1$, para o qual $\rho(x_j^+, x_{k+n}^+) < \varepsilon$.

Definição 2.4.7 Diremos que $\tilde{\pi}$ será **recorrente** em $x \in X$, ou que $x \in X$ é **$\tilde{\pi}$ -recorrente** se, dado $\varepsilon > 0$, existir um $T \in \mathbb{R}_+$ tal que, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}_+$, o intervalo $[0, T]$ contém um número real τ tal que $\rho(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(x, s + \tau)) < \varepsilon$.

O teorema seguinte nos dá condições para que um ponto recorrente $p \in \widehat{N}$ seja $\tilde{\pi}$ -recorrente. Convém observarmos que foi preciso fazermos pequenas correções no resultado original apresentado em [9]. Além disso, novamente, não nos restringimos ao caso em que ϕ é contínua em X , mas consideramos ϕ semicontínua superiormente em X e contínua em $X \setminus M$.

Teorema 2.4.8 [[9], pág. 638]. Sejam $p \in \widehat{N}$, $\widehat{K}^+(p)$ compacto e $\widehat{K}^+(p) \cap M = \emptyset$. Se g for recorrente em p , então $\tilde{\pi}$ será recorrente em p .

Demonstração: Seja g recorrente em p e tomemos $\varepsilon > 0$. Como $\widehat{K}^+(p)$ é compacto e $\widehat{K}^-(p) \cap M = \emptyset$, temos

$$0 < a = \inf\{\phi(x) : x \in \widehat{K}^-(p)\} \leq \sup\{\phi(x) : x \in \widehat{K}^+(p)\} = T_1 < +\infty.$$

Pela continuidade uniforme de π sobre $\widehat{K}^+(p)$, existe $\delta_1 > 0$, $0 < \delta_1 < \frac{a}{3}$, tal que para quaisquer $x, y \in \widehat{K}^+(p)$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$, se $\rho(x, y) < \delta_1$ e $|t - s| < \delta_1$, então

$$\rho(\pi(x, t), \pi(y, s)) < \varepsilon.$$

Ainda, como ϕ é contínua sobre $\widehat{K}^-(p)$, existe δ , $0 < \delta < \delta_1$, de maneira que, para todo $x, y \in \widehat{K}^+(p)$ com $\rho(x, y) < \delta$, temos $|\phi(x) - \phi(y)| < \delta_1$.

Como g é recorrente em p , dado $\delta > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ tal que, para quaisquer $j, k \in \mathbb{Z}_-$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$, $0 < n < N_1$, satisfazendo

$$\rho(p_j^+, p_{k-n}^-) < \delta.$$

Seja $T = (N_1 + 1)T_1$. Afirmamos que T satisfaz os requisitos da Definição 2.4.7 com respeito a ε . Assim, dados quaisquer $s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$, desejamos encontrar um τ , $0 \leq \tau \leq T$, tal que

$$\rho(\tilde{\pi}(p, s_1), \tilde{\pi}(p, s_2 + \tau)) < \varepsilon.$$

Dados $s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$, existem $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$s_i = t_{m_i}(p) + s'_i, \quad 0 \leq s'_i < \phi(p_{m_i}^+), \quad i = 1, 2.$$

Podemos assumir que $s'_1 \geq s'_2$. Então dados $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_-$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq n \leq N_1$, tal que $\rho(p_{m_1}^+, p_{m_2+n}^+) < \delta$.

Temos dois casos a considerar.

Caso 1: Suponhamos que $s'_1 < \phi(p_{m_2+n}^+)$.

Seja $\tau = \sum_{j=m_2}^{m_2+n-1} \phi(p_j^+) + s'_1 - s'_2$. Primeiramente, notemos que $0 \leq \tau \leq T$ pois, como $s'_1 \geq s'_2$, segue que $\tau \geq 0$ e

$$\tau = \sum_{j=m_2}^{m_2+n-1} \phi(p_j^+) + s'_1 - s'_2 \leq nT_1 + T_1 \leq (N_1 + 1)T_1.$$

Dai,

$$\begin{aligned} s_2 + \tau &= \sum_{j=m_2}^{m_2+n-1} \phi(p_j^+) + s'_1 + s_2 - s'_2 = \sum_{j=m_2}^{m_2+n-1} \phi(p_j^+) + s'_1 + t_{m_2}(p) = \\ &= \sum_{j=m_2}^{m_2+n-1} \phi(p_j^+) + s'_1 + \sum_{j=0}^{m_2-1} \phi(p_j^+) = \sum_{j=0}^{m_2+n-1} \phi(p_j^+) + s'_1 = \end{aligned}$$

$$= t_{m_2+n}(p) + s'_1.$$

Logo,

$$\tilde{\pi}(p, s_2 + \tau) = \pi(p_{m_2+n}^+, s'_1).$$

Pela escolha de δ e δ_1 , segue que

$$\rho(\tilde{\pi}(p, s_1), \tilde{\pi}(p, s_2 + \tau)) = \rho(\pi(p_{m_1}^+, s'_1), \pi(p_{m_2+n}^+, s'_1)) < \varepsilon.$$

Caso 2: Suponhamos que $s'_1 \geq \phi(p_{m_2+n}^+)$.

Temos,

$$0 < a - \delta_1 \leq \phi(p_{m_2+n}^+) - \delta_1 \leq s'_1 - \delta_1 < \phi(p_{m_1}^+) - \delta_1 < \phi(p_{m_2+n}^+).$$

Seja $\tau = \sum_{j=m_2}^{m_2+n-1} \phi(p_j^+) + s'_1 - s'_2 - \delta_1$. Note que $0 \leq \tau \leq T$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 \leq s_2 + \tau &= \sum_{j=m_2}^{m_2+n-1} \phi(p_j^-) + s'_1 - s'_2 + s_2 - \delta_1 = \\ &= t_{m_2+n}(p) + s'_1 - \delta_1 < \phi(p_{m_2+n}^+) + t_{m_2+n}(p). \end{aligned}$$

Aqui,

$$\tilde{\pi}(p, s_2 + \tau) = \pi(p_{m_2+n}^+, s'_1 - \delta_1).$$

Assim, pela escolha de δ_1 , temos

$$\rho(\tilde{\pi}(p, s_1), \tilde{\pi}(p, s_2 + \tau)) = \rho(\pi(p_{m_1}^+, s'_1), \pi(p_{m_2+n}^+, s'_1 - \delta_1)) < \varepsilon.$$

Isto completa a prova. □

A recíproca do Teorema 2.4.8 é válida nas condições apresentadas no Teorema 2.4.9 a seguir. Este teorema pode ser encontrado em [9], pág. 639, mas com uma noção de tubo diferente daquela que apresentamos aqui.

Teorema 2.4.9 Sejam $p \in \hat{N}$, $\hat{K}^+(p)$ compacto e $\hat{K}^+(p) \cap M = \emptyset$. Suponhamos que, para cada ponto q de $\hat{K}^+(p)$, exista uma λ -seção contendo q . Se $\tilde{\pi}$ for recorrente em p e g for injetiva, então g será recorrente em p .

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para cada $q \in \hat{K}^+(p)$, existe uma λ -seção S_q contendo q . Logo existe um fechado L_q tal que $F(L_q, [0, 2\lambda])$ é uma vizinhança de q . Daí, existe um aberto $U_q \subset F(L_q, [0, 2\lambda]) \cap \left\{x \in X : \rho(x, q) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, com $U_q \cap M = \emptyset$.

Seja δ um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\{U_q : q \in \hat{K}^+(p)\}$ de $\hat{K}^+(p)$. Consideremos $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $[0, T]$ um intervalo que satisfaça a Definição 2.4.7 com respeito a p e δ . Seja

$$a = \inf\{\phi(q) : q \in \hat{K}^+(p)\}.$$

Então $a > 0$.

Seja N_1 um inteiro tal que $N_1 \geq \frac{T}{a}$. Mostraremos que N_1 satisfaz a Definição 2.4.6 com respeito a p e ε .

Sejam $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_1$ dados. Tomemos $s_1 = t_{m_1}(p)$ e $s_2 = t_{m_2}(p)$. Então pela escolha de T , existirá um τ , $0 \leq \tau \leq T$, de maneira que

$$\rho(\tilde{\pi}(p, s_1), \tilde{\pi}(p, s_2 + \tau)) < \delta,$$

isto é,

$$\rho(p_{m_1}^-, \pi(p_{m_2+n}^+, s_2')) < \delta,$$

onde $\tau + s_2 = t_{m_2+n}(p) + s_2'$ e $0 \leq s_2' < \phi(p_{m_2+n}^-)$, para algum n inteiro positivo.

Agora, seja $y = \pi(p_{m_2+n}^+, s_2')$, note que $y \in B(p_{m_1}^+, \delta)$. Pelo Lema de Recobrimento de Lebesgue, existe um $q \in \hat{K}^+(p)$ tal que

$$B(p_{m_1}^+, \delta) \subset U_q.$$

Como $U_q \subset F(L_q, [0, 2\lambda])$ e $U_q \cap M = \emptyset$, existe um $v_y \in [0, 2\lambda]$ tal que

$$\pi(y, [0, v_y]) \subset U_q.$$

Seja $x = \pi(y, v_y)$. Como $U_q \cap M = \emptyset$ e $y = \pi(p_{m_2+n}^+, s_2')$, segue que $0 \leq s_2' + v_y < \phi(p_{m_2+n}^+)$. Daí,

$$\begin{aligned} \pi(x, \phi(p_{m_2+n}^+) - s_2' - v_y) &= \pi(\pi(y, v_y), \phi(p_{m_2+n}^+) - s_2' - v_y) = \\ &= \pi(y, \phi(p_{m_2+n}^+) - s_2') = \pi(\pi(p_{m_2+n}^+, s_2'), \phi(p_{m_2+n}^+) - s_2') = \\ &= \pi(p_{m_2+n}^+, \phi(p_{m_2+n}^+)) = p_{m_2+n+1}. \end{aligned}$$

Desta forma, $g(x) = p_{m_2+n+1}^+ = g(p_{m_2+n}^+)$. E sendo g injetiva, temos que $x = p_{m_2+n}^+$.

Como $p_{m_1}^+, p_{m_2+n}^+ \in U_q$, então $\rho(p_{m_1}^+, p_{m_2+n}^+) < \varepsilon$. Segundo a Definição 2.4.6, nos resta mostrar que $0 \leq n \leq N_1$. Com efeito. Se $n \neq 0$, então

$$0 < na \leq \sum_{j=0}^{n-1} \phi(p_{j+m_2}^+) = t_{m_2+n}(p) - t_{m_2}(p) = \tau + s_2 - s_2' - t_{m_2}(p) = \tau - s_2' \leq \tau.$$

Conseqüentemente,

$$n \leq \frac{\tau}{a} \leq \frac{T}{a} \leq N_1$$

e a prova está completa. $\square$

2.4.3 Quase recorrência

Definição 2.4.10 Diremos que g será **quase recorrente** em $p \in \hat{N}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ tal que, para qualquer $j \in \mathbb{Z}_+$, existe um $n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq n \leq N_1$, tal que $\rho(p, p_{j+n}^+) < \varepsilon$.

Definição 2.4.11 Diremos que $\tilde{\pi}$ será **quase recorrente** em $x \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir um $T \in \mathbb{R}_+$ tal que, para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$, o intervalo $[0, T]$ contém um número real τ tal que $\rho(x, \tilde{\pi}(x, t + \tau)) < \varepsilon$.

Teorema 2.4.12 [[9], pág. 640]. Sejam $p \in \hat{N}$, $\hat{K}^+(p)$ compacto e $\hat{K}^+(p) \cap M = \emptyset$. Então g será quase recorrente em p se, e somente se, $\hat{K}^+(p)$ for minimal.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\hat{K}^+(p)$ não seja minimal. Logo existe $y \in \hat{K}^+(p)$ tal que $\hat{K}^+(y) \neq \hat{K}^+(p)$. Observemos que, se $y \in \hat{K}^+(p)$, então $\hat{K}^+(y) \subset \hat{K}^+(p)$. Daí, como $\hat{K}^+(y) \neq \hat{K}^+(p)$, segue que $p \notin \hat{K}^+(y)$.

Mostraremos que $y \in \widehat{C}^-(p)$ pois, se $y = g^n(p)$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$, então, como g é quase recorrente em p , dado qualquer $\eta > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $[0, N_1]$ contém um $m \in \mathbb{Z}_+$ para o qual $\rho(p, g^{n-m}(p)) < \eta$. Mas como η é arbitrário, temos que $p \in \widehat{K}^-(y)$, contradizendo o que observamos no parágrafo anterior.

Se $y \in \widehat{K}^+(p) \setminus \widehat{C}^+(p)$, então existirá uma sequência $\{m_k\}$ em $\mathbb{Z}_+$ tal que

$$g^{m_k}(p) = p_{m_k}^- \rightarrow y, \quad \text{quando } m_k \rightarrow +\infty.$$

Seja $0 < \varepsilon < \rho(p, \widehat{K}^-(y))$, e suponhamos que $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ satisfaça a Definição 2.4.10, para $p \in \widehat{N}$ e $\frac{\varepsilon}{3}$. Como, para cada $j = 1, 2, \dots, N_1$, temos

$$p_{m_k+j}^- = g^j(p_{m_k}^-) \rightarrow g^j(y) = y_j^+, \quad y_0^+ = y,$$

segue que existe $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que, para $k \geq k_0$, temos $\rho(p_{m_k+j}^-, y_j^-) < \frac{\varepsilon}{3}$, para cada $j = 1, 2, \dots, N_1$. Aqui, para $k \geq k_0$, temos

$$\rho(p, p_{m_k+j}^-) \geq \rho(p, y_j^+) - \rho(y_j^+, p_{m_k+j}^-) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3},$$

contradizendo a escolha de N_1 para $p \in \widehat{N}$ e ε . Portanto $y \in \widehat{C}^-(p)$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que g não seja quase recorrente em p . Então existe $\varepsilon > 0$ e, para qualquer $N_1 \in \mathbb{Z}_+$, existe $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$\rho(p, g^{n_1+j}(p)) \geq \varepsilon, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N_1.$$

Tomemos uma sequência $\{N_m\}$ em $\mathbb{Z}_+$, com $N_m \rightarrow +\infty$, e seja $n_m \in \mathbb{Z}_+$ correspondente a N_m como acima (assim como n_1 e N_1) tal que

$$\rho(p, p_{n_m+j}^-) \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, N_m.$$

Podemos ainda supor que

$$g^{n_m}(p) = p_{n_m}^- \rightarrow q \in \widehat{K}^-(p).$$

Como

$$g^{n_m+j}(p) = g^j(p_{n_m}^+) \rightarrow q_j^+, \quad q_0^+ = q,$$

segue que

$$\rho(p, q_j^+) \geq \rho(p, p_{n_m-j}^+) - \rho(p_{n_m+j}^+, q_j^+) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, N_m.$$

E fazendo $N_m \rightarrow +\infty$, vale a linha acima para cada $j \in \mathbb{Z}_+$. Aqui, $p \notin \widehat{K}^+(q)$. E como $q \in \widehat{K}^+(p)$, segue que $\widehat{K}^-(p)$ não é minimal, o que é um absurdo. Logo g é necessariamente quase recorrente em p e a demonstração está terminada. $\square$

O corolário seguinte é consequência imediata do Teorema 2.4.12.

Corolário 2.4.13 [[9], pág. 641]. Se G for um conjunto compacto e minimal em $(\widehat{N}, g)$, com $G \cap M = \emptyset$. Então g será quase recorrente em cada ponto de G .

Teorema 2.4.14 [[9], pág. 641]. Sejam $p \in \widehat{N}$, $\widehat{K}^+(p)$ compacto e $\widehat{K}^+(p) \cap M = \emptyset$. Se g for quase recorrente em $p \in \widehat{N}$, então $\tilde{\pi}$ será quase recorrente em p .

A prova do Teorema 2.4.14 segue os passos (da demonstração) do Teorema 2.4.8 com $s_1 = 0$.

O próximo teorema encontra-se em [9], pág. 641, também com uma noção de tubo diferente da que usamos aqui, e sua prova, é análoga àquela do Teorema 2.4.9 fazendo $s_1 = 0$ e não a incluiremos aqui.

Teorema 2.4.15 Sejam $p \in \widehat{N}$, $\widehat{K}^+(p)$ compacto e $\widehat{K}^+(p) \cap M = \emptyset$. Suponhamos que, para cada $q \in \widehat{K}^+(p)$, exista uma λ -seção contendo q . Se $\tilde{\pi}$ for quase recorrente em p e g for injetiva, então g será quase recorrente em p .

Teorema 2.4.16 [[9], pág. 642]. Sob as condições do Teorema 2.4.15, suponhamos que $\widehat{K}^-(p)$ seja minimal. Então, se $\tilde{\pi}$ for quase recorrente em p , então $\tilde{\pi}$ será quase recorrente em cada ponto de $\widehat{K}^-(p) \setminus M$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.4.12 e pelo Corolário 2.4.13, segue que g é quase recorrente em cada ponto de $\widehat{K}^+(p)$. Consequentemente, pelo Teorema 2.4.14, $\tilde{\pi}$ é quase recorrente em cada ponto de $\widehat{K}^-(p)$.

Sejam $x \in \tilde{K}^+(p) \setminus M$ e $\varepsilon > 0$ dado. Daí, existe $q \in \hat{K}^+(p)$ tal que $x = \pi(q, v)$, onde $0 \leq v < \phi(q)$.

Seja $0 < \varepsilon' < \rho(z, M)$ para todo $z = \pi(q, r)$, com $0 \leq r \leq v$. Seja, também, $\delta > 0$ tal que, para $y \in X$ e $\rho(q, y) < \delta$, tenhamos

$$\rho(\pi(q, r), \pi(y, r)) < \min(\varepsilon', \varepsilon), \quad 0 \leq r \leq v.$$

Então, para tal y , $\pi(y, r) = \tilde{\pi}(y, r)$, onde $0 \leq r \leq v$.

Como $\tilde{\pi}$ é quase recorrente em q , dado $\delta > 0$, existe $T_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que, para qualquer $s \in \mathbb{R}_+$, existe τ , $0 \leq \tau \leq T_1$, tal que $\rho(\tilde{\pi}(q, s + \tau), q) < \delta$. Aqui,

$$\rho(\pi(\tilde{\pi}(q, s + \tau), v), \pi(q, v)) < \varepsilon$$

ou

$$\rho(\tilde{\pi}(q, s + \tau + v), x) < \varepsilon.$$

Daí, dado $\varepsilon > 0$, $T = T_1$ satisfaz a Definição 2.4.11, pois $[0, T_1]$ contém τ e, para qualquer $s \in \mathbb{R}_+$, temos

$$\rho(x, \tilde{\pi}(x, s + \tau)) = \rho(x, \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(q, v), s + \tau)) = \rho(x, \tilde{\pi}(q, s + \tau + v)) < \varepsilon$$

e o teorema segue. $\square$

Teorema 2.4.17 [[9], pág. 642]. Sejam $p \in \hat{N}$, $\hat{K}^+(p)$ compacto e $\hat{K}^+(p) \cap M = \emptyset$. Suponhamos que, para cada $q \in \hat{K}^+(p)$, exista uma λ -seção contendo q e que g seja injetiva. Então, se $\tilde{\pi}$ for quase recorrente em p , teremos $\tilde{K}^+(p)$ compacto e minimal em $(X, \pi; M, I)$.

Demonstração: Seja $\tilde{\pi}$ quase recorrente em p . Logo, pelo Teorema 2.4.15, g é quase recorrente em p e, pelo Teorema 2.4.12, $\hat{K}^+(p)$ é compacto e minimal em $(\hat{N}, g)$. Daí, pelo Teorema 2.4.3, $\tilde{K}^+(p)$ também é compacto e minimal em $(X, \pi; M, I)$. $\square$

2.4.4 Quase periodicidade fraca

Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Para cada $p \in X$ e $\varepsilon > 0$, definimos

$$L(p, \varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_n(p)| > \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_-\}.$$

Definição 2.4.18 Diremos que $\tilde{\pi}$ é **fracamente quase periódica** em $x \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir um $T > 0$ tal que, para qualquer $\alpha \geq 0$, o intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ contém um número real τ tal que

$$\rho(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{\pi}(x, t + \tau)) < \varepsilon, \text{ para todo } t \in L(x, \varepsilon).$$

Definição 2.4.19 Diremos que g é **fortemente quase periódica** em $x \in \hat{N}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir um número inteiro positivo N_1 tal que, para qualquer $n_1 \in \mathbb{Z}_+$, o intervalo $[n_1, n_1 + N_1]$ contém um $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que, para qualquer $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\rho(x_n^+, x_{n+n_0}^-) < \varepsilon$$

e

$$|t_m(x_n^+) - t_m(x_{n+n_0}^-)| < \varepsilon, \text{ para quaisquer } n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Teorema 2.4.20 [[9], pág. 643]. Sejam $p \in \hat{N}$, $\hat{K}^+(p)$ compacto e $\hat{K}^+(p) \cap M = \emptyset$. Se g for fortemente quase periódica em p , então $\tilde{\pi}$ será fracamente quase periódica em p .

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Temos que determinar T com respeito ao qual será possível encontrarmos um τ em $[\alpha, \alpha + T]$, para qualquer $\alpha \geq 0$ fixado, que satisfaça a Definição 2.4.18.

Seja $y \in \hat{K}^+(p)$ arbitrário, com $\phi(y) < +\infty$. Então pela compacidade de $\hat{K}^+(p)$, existirá $T_1 < +\infty$ tal que $\phi(y) \leq T_1$. Como π é uniformemente contínua sobre $\hat{K}^+(p) \times [0, T_1]$, existe $v \in (0, \varepsilon)$ tal que, se tivermos $y, z \in \hat{K}^+(p)$, $t, s \in [0, T_1]$, $\rho(y, z) < v$ e $|t - s| < v$, então $\rho(\pi(y, t), \pi(z, s)) < \varepsilon$.

Por hipótese, g é fortemente quase periódica em p . Portanto dado $v > 0$, existe N_1 satisfazendo a Definição 2.4.19.

Seja $T = (N_1 + 1)T_1$. Vamos mostrar que T satisfaz a Definição 2.4.18 para ε .

Seja $\alpha > 0$ e seja $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $t_k(p) \leq \alpha < t_{k+1}(p)$. Então existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ em $[k+1, k+N_1+1]$ tal que

$$\rho(p_n^+, p_{n+n_0}^+) < v, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.1)$$

e

$$|t_m(p_n^+) - t_m(p_{n+n_0}^+)| < v, \quad \text{para quaisquer } m, n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.2)$$

Seja $\tau = t_{n_0}(p) = \sum_{j=0}^{n_0-1} \phi(p_j^+)$. Então

$$\begin{aligned} \alpha < t_{k+1}(p) \leq t_{n_0}(p) = \tau \leq t_{k+N_1+1}(p) &= t_k(p) + \sum_{j=k}^{k+N_1} \phi(p_j^+) \leq \\ &\leq \alpha + (k+N_1 - k + 1)T_1 = \alpha + (N_1 + 1)T_1 = \alpha + T. \end{aligned}$$

Para completarmos a prova, precisamos mostrar que $\rho(\tilde{\pi}(p, s), \tilde{\pi}(p, s + \tau)) < \varepsilon$ para todo $s \in L(p, \varepsilon)$. Então consideremos $s \in L(p, \varepsilon)$ e m tais que $t_m(p) + \varepsilon < s < t_{m+1}(p) - \varepsilon$. Logo $s = t_m(p) + s_1$ e

$$\tilde{\pi}(p, s) = \pi(p_m^-, s_1), \quad \text{com } \varepsilon < s_1 < \phi(p_m^+) - \varepsilon. \quad (2.3)$$

Segue de (2.2) e pelo fato de $s_1 = s - t_m(p)$ que

$$s_2 := s - t_m(p_{n_0}^+) = s - t_m(p) + t_m(p) - t_m(p_{n_0}^+) \geq s_1 - v. \quad (2.4)$$

Mas como $s_1 > \varepsilon > v$, por (2.4), segue que $s_2 > 0$. Também, por (2.2) e $v - \varepsilon < 0$, temos

$$s < t_{m+1}(p) - \varepsilon = t_{m+1}(p) - t_{m-1}(p_{n_0}^+) + t_{m-1}(p_{n_0}^+) - \varepsilon < t_{m+1}(p_{n_0}^+) - \varepsilon + v < t_{m+1}(p_{n_0}^+).$$

Aqui, $t_m(p_{n_0}^+) < s < t_{m+1}(p_{n_0}^+)$ ou

$$0 < s_2 < \phi(p_{n_0+m}^+). \quad (2.5)$$

Também temos

$$t_{n_0+m}(p) = t_{n_0}(p) + \sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} \phi(p_j^+) = \tau + t_m(p_{n_0}^+).$$

Portanto

$$s = s_2 + t_m(p_{n_0}^-) = s_2 + t_{m+n_0}(p) - \tau,$$

ou seja,

$$s + \tau = s_2 + t_{m+n_0}(p).$$

Por (2.5) e pela última igualdade, temos

$$\tilde{\pi}(p, s + \tau) = \pi(p_{m+n_0}^+, s_2). \quad (2.6)$$

Como

$$|s_1 - s_2| = |t_m(p_0^-) - t_m(p_{n_0}^+)| < v, \quad (2.7)$$

por (2.1), (2.3), (2.6), (2.7) e pela escolha de v , obtemos

$$\rho(\tilde{\pi}(p, s), \tilde{\pi}(p, s + \tau)) < \varepsilon.$$

Isto completa a prova do teorema. □

2.5 Conjuntos Limites

No Capítulo 1, Seção 1.2, apresentamos os conjuntos limites para um sistema semidinâmico. Nesta seção, vamos considerar tais conjuntos no contexto mais geral de sistemas semidinâmicos impulsivos.

Definição 2.5.1 Dados um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ e $x \in X$, definimos em $(X, \pi; M, I)$:

a) o **conjunto limite** de x por

$$\tilde{L}^+(x) = \{y \in X : \text{existe uma sequência } \{t_n\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ tal que } \tilde{\pi}(x, t_n) \rightarrow y, \text{ para } t_n \rightarrow +\infty\}$$

b) o **prolongamento** do conjunto limite de x por

$$\tilde{J}^+(x) = \{y \in X : \text{existem seqüências } \{t_n\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ e } \{x_n\} \subset X \text{ tal que}$$

$$\tilde{\pi}(x_n, t_n) \rightarrow y, \text{ para } x_n \rightarrow x \text{ e } t_n \rightarrow +\infty\}$$

c) o **conjunto prolongado** de x por

$$\tilde{D}^-(x) = \{y \in X : \text{existem seqüências } \{t_n\} \subset \mathbb{R}_- \text{ e } \{x_n\} \subset X \text{ tal que}$$

$$\tilde{\pi}(x_n, t_n) \rightarrow y, \text{ para } x_n \rightarrow x\}.$$

No caso de um sistema semidinâmico discreto impulsivo $(\hat{N}, g)$ associado a $(X, \pi; M, I)$, definimos tais conjuntos respectivamente por

$$\hat{L}^+(x) = \{y \in \hat{N} : g^{n_k}(x) \rightarrow y \text{ para } n_k \rightarrow +\infty\},$$

$$\hat{J}^+(x) = \{y \in \hat{N} : g^{n_k}(x_k) \rightarrow y \text{ para } x_k \rightarrow x \text{ e } n_k \rightarrow +\infty\},$$

$$\hat{D}^-(x) = \{y \in \hat{N} : g^{n_k}(x_k) \rightarrow y \text{ para } x_k \rightarrow x \text{ e } n_k \in [0, +\infty)\},$$

onde $x \in \hat{N}$.

Definição 2.5.2 Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Um subconjunto $A \subset X$ será dito **positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante** se, para qualquer $x \in A$, tivermos $\tilde{C}^+(x) \subset A$. Um subconjunto $\hat{A}$ ($\hat{A} = A \cap \hat{N}$) de $\hat{N}$ será dito **positivamente g -invariante**, se $g(\hat{A}) \subset \hat{A}$, onde $(\hat{N}, g)$ é um sistema semidinâmico impulsivo discreto associado a $(X, \pi; M, I)$.

Definição 2.5.3 Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Definimos

$$C_0(x) = \{\pi(x, t) = \tilde{\pi}(x, t) : 0 \leq t < \phi(x)\},$$

onde ϕ é como na Definição 2.1.3.

No que segue, vamos considerar $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. É claro que $\tilde{\pi}$ não é uma função contínua, mas vale um resultado interessante que apresentamos a seguir e será

utilizado posteriormente junto com outros lemas.

Lema 2.5.4 [[11], pág. 512]. Consideremos $\{x_n\}$ uma sequência em $X \setminus M$ convergindo para um ponto $y \in X \setminus M$, com $\widehat{K}^+(y) \cap M = \emptyset$. Então, para qualquer $t \in [0, T(y))$, existirá uma sequência de números reais, $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, tal que $t + \varepsilon_n < T(x_n)$ e $\tilde{\pi}(x_n, t + \varepsilon_n) \rightarrow \tilde{\pi}(y, t)$.

Demonstração: Se $\phi(y) = +\infty$, então pela continuidade de ϕ sobre $X \setminus M$, segue que, para qualquer $t \in [0, +\infty)$, existirá um n_0 tal que, para $n \geq n_0$, temos $\phi(x_n) > t$. Conseqüentemente, para $n \geq n_0$, $\tilde{\pi}(x_n, t) = \pi(x_n, t)$ e o resultado segue da continuidade de π .

Agora, suponhamos que $\phi(y) < +\infty$. Então, já que ϕ é contínua em $X \setminus M$, podemos assumir que $\phi(x_n) < +\infty$.

Temos três casos a considerar.

Caso 1: Para $0 \leq t < \phi(y)$, seja $\varepsilon < \phi(y) - t$.

Pela continuidade de ϕ em $X \setminus M$, podemos concluir que $\phi(y) - \varepsilon < \phi(x_n)$, para todo n . Assim $t < \phi(x_n)$ e $\tilde{\pi}(x_n, t) = \pi(x_n, t)$ e, pela continuidade de π , o resultado segue para $\varepsilon_n = 0$.

Caso 2: Seja $t = \phi(y)$.

Temos $\tilde{\pi}(y, t) = y_1^+$. Note que

$$x_{n,1} = \pi(x_n, \phi(x_n)) \rightarrow \pi(y, \phi(y)) = y_1.$$

Mas como I é contínua, então

$$I(x_{n,1}) \rightarrow I(y_1),$$

isto é, $x_{n,1}^+ \rightarrow y_1^+$. Pela continuidade de ϕ em $X \setminus M$, segue que $|\phi(x_n) - \phi(y)| \rightarrow 0$. Logo $\phi(x_n) = t + \varepsilon_n$, onde $\{\varepsilon_n\}$ é uma sequência de números reais com $\varepsilon_n \rightarrow 0$, daí

$$\tilde{\pi}(x_n, \phi(x_n)) = \tilde{\pi}(x_n, t + \varepsilon_n) = x_{n,1}^- \rightarrow y_1^+ = \tilde{\pi}(y, t).$$

Caso 3: Agora, seja $t > \phi(y)$.

Neste caso, existe $m \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ tal que $t = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(y_i^+) + t'$ com $0 \leq t' < \phi(y_m^+)$. Definamos

$\{x_{n,i}\}$ indutivamente por

$$x_{n,1} = \pi(x_n, \phi(x_n)) \text{ e } x_{n,i+1} = \pi(x_{n,i}^+, \phi(x_{n,i}^-)), \quad i \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Seja $t_n = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_{n,i}^+)$. Então, como $\phi(x_n) \rightarrow \phi(y)$, temos

$$x_{n,1} = \pi(x_n, \phi(x_n)) \rightarrow \pi(y, \phi(y)) = y_1.$$

Segue da continuidade de I que $I(x_{n,1}) \rightarrow I(y_1)$, isto é, $x_{n,1}^- \rightarrow y_1^+$. Como $\phi(x_{n,1}^+) \rightarrow \phi(y_1^+)$, temos

$$x_{n,2} = \pi(x_{n,1}^+, \phi(x_{n,1}^+)) \rightarrow \pi(y_1^+, \phi(y_1^+)) = y_2.$$

Prosseguindo desta maneira, teremos

$$x_{n,i} \rightarrow y_i.$$

Pela continuidade de I , segue que

$$x_{n,i}^+ \rightarrow y_i^+.$$

Assim $\sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_{n,i}^+) \rightarrow \sum_{i=0}^{m-1} \phi(y_i^+)$, para $n \rightarrow +\infty$. Então existe uma seqüência de números reais $\{\varepsilon_n\}$, com $\varepsilon_n = (t_n + t' - t)$ e $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Segue da Observação 2.1.7 que

$$\tilde{\pi}(x_n, t + \varepsilon_n) = \pi(x_{n,m}^+, t') \rightarrow \pi(y_m^+, t') = \tilde{\pi}(y, t).$$

E o lema está provado. □

Lema 2.5.5 [[11], pág. 521; [8], pág. 122]. Para qualquer $x \in X$, temos

$$\tilde{L}^+(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} C^+(x_n^+, \phi(x_n^+)),$$

e, portanto, $\tilde{L}^+(x)$ é fechado. Além disso, se $\hat{K}^+(z) \cap M = \emptyset$ para $z \in \tilde{L}^+(x)$ e $\tilde{L}^+(x)$ não admitir ponto inicial, então $\tilde{L}^+(x)$ será $\tilde{\pi}$ -invariante.

Demonstração: Primeiramente, mostremos a igualdade.

($\subset$) Seja $z \in \tilde{L}^+(x)$. Então $\tilde{\pi}(x, t_n) \rightarrow z$, para alguma seqüência $\{t_n\}$, com $t_n \rightarrow +\infty$. Pela Observação 2.1.7, para cada n , existe $k_n > 0$ tal que $t_n = \sum_{i=0}^{k_n-1} \phi(x_i^+) + t'_n$, onde $x = x_0^+$ e

$$\tilde{\pi}(x, t_n) = \pi(x_{k_n}^+, t'_n), \quad 0 \leq t'_n < \phi(x_{k_n}^+).$$

Logo $\tilde{\pi}(x, t_n) \in C^+[x_{k_n}^+, \phi(x_{k_n}^+)]$. Portanto

$$z \in \limsup_{n \rightarrow +\infty} C^+(x_n^+, \phi(x_n^+)).$$

($\supset$) Tomemos $z \in \limsup_{n \rightarrow +\infty} C^+(x_n^+, \phi(x_n^+))$. Então existe uma seqüência $z_{n_k} = \pi(x_{n_k}^+, r)$, $0 \leq r < \phi(x_{n_k}^+)$, tal que $z_{n_k} \rightarrow z$. Mas $\tilde{\pi}_x(t) = \pi(x_{n_k}^+, r)$, $0 \leq r < \phi(x_{n_k}^+)$. Portanto $z \in \tilde{L}^+(x)$. Assim, $\tilde{L}^+(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} C^+(x_n^+, \phi(x_n^+))$.

Agora provemos que $\tilde{L}^+(x)$ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante. Seja $y \in \tilde{L}^+(x)$. Então existe uma seqüência $\{t_n\}$ em $\mathbb{R}_+$, $t_n \rightarrow +\infty$, tal que

$$\tilde{\pi}(x, t_n) = x_n \rightarrow y.$$

Como $y \notin M$ (pois y não é ponto inicial) e $\hat{K}^+(y) \cap M = \emptyset$, dado $t \in \mathbb{R}_+$, existe uma seqüência $\{\varepsilon_n\}$ como no Lema 2.5.4 tal que

$$\tilde{\pi}(x_n, t + \varepsilon_n) \rightarrow \tilde{\pi}(y, t).$$

Conseqüentemente, $\tilde{\pi}(x, t_n + t + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t_n), t + \varepsilon_n) \rightarrow \tilde{\pi}(y, t)$.

E como $(t_n + t + \varepsilon_n) \rightarrow +\infty$, temos $\tilde{\pi}(y, t) \in \tilde{L}^+(x)$, o que completa a prova. $\square$

Lema 2.5.6 [[11], pág. 513]. Para quaisquer $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}_+$, se $z = \tilde{\pi}(x, t)$, então $\tilde{L}^+(x) \subseteq \tilde{L}^+(z)$.

Demonstração: Seja $y \in \tilde{L}^+(z)$. Então, existe uma seqüência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$, tal que

$$\tilde{\pi}(z, t_n) \rightarrow y, \quad \text{para } t_n \rightarrow +\infty.$$

Existe $n_0 > 0$ tal que $t_n \geq t$, para todo $n \geq n_0$. Assim temos

$$\tilde{\pi}(x, t_n) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t), t_n - t) \rightarrow y$$

e a prova está terminada, já que $(t_n - t) \rightarrow +\infty$. $\square$

Lema 2.5.7 [[11], pág. 513]. Dado $x \in X$, $\tilde{J}^+(x)$ será fechado e positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante se, $\hat{K}^-(z) \cap M = \emptyset$ para todo $z \in \tilde{J}^-(x)$ e $\tilde{J}^+(x)$ não admitir ponto inicial.

Demonstração: Seja $y \in \overline{\tilde{J}^+(x)}$. Então existe uma sequência $\{y_n\}$ em $\tilde{J}^+(x)$ tal que

$$y_n \rightarrow y.$$

Como $\{y_n\} \subset \tilde{J}^+(x)$, segue que

$$\tilde{\pi}(x_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow y_n, \quad \text{para } x_{n_k} \rightarrow x \text{ e } t_{n_k} \rightarrow +\infty.$$

Pelo Lema 2.5.4, existe uma sequência $\{\varepsilon_{n_k}\}$ de números reais, $\varepsilon_{n_k} > 0$, tal que

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_{n_k}, t_{n_k}), t + \varepsilon_{n_k}) \rightarrow \tilde{\pi}(y_n, t).$$

para todo $t \in [0, T(y_n))$. Daí, para $t = 0$,

$$\tilde{\pi}(x_{n_k}, t_{n_k} + \varepsilon_{n_k}) \rightarrow \tilde{\pi}(y_n, 0) = y_n.$$

Tomando as seqüências $\{x_{n_n}\}$, $\{t_{n_n}\}$ e $\{\varepsilon_{n_n}\}$, temos

$$\rho(\tilde{\pi}(x_{n_n}, t_{n_n} + \varepsilon_{n_n}), y) \leq \rho(\tilde{\pi}(x_{n_n}, t_{n_n} + \varepsilon_{n_n}), y_n) + \rho(y_n, y) < \varepsilon.$$

Note que $t_{n_n} + \varepsilon_{n_n} \rightarrow +\infty$. Portanto $y \in \tilde{J}^+(x)$ e, assim, $\tilde{J}^+(x)$ é fechado.

Mostremos, agora, que $\tilde{J}^+(x)$ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante. Seja $y \in \tilde{J}^+(x)$. Então

$$\tilde{\pi}(x_n, t_n) \rightarrow y, \quad \text{para } x_n \rightarrow x \text{ e } t_n \rightarrow +\infty.$$

Dado $t \in \mathbb{R}_+$, pelo Lema 2.5.4, temos

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x_n, t_n), t + \varepsilon_n) \rightarrow \tilde{\pi}(y, t).$$

Assim,

$$\tilde{\pi}(x_n, t_n + t + \varepsilon_n) \rightarrow \tilde{\pi}(y, t) \in \tilde{J}^+(x)$$

e o resultado segue. $\square$

Lema 2.5.8 [[11], pág. 513]. Para quaisquer $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}_+$, se $\tilde{\pi}(x, t) = z$, então $\tilde{J}^-(x) \subset \tilde{J}(z)$.

A prova do Lema 2.5.8 é análoga àquela do Lema 2.5.6.

O resultado seguinte é imediato.

Lema 2.5.9 [[11], pág. 513]. Para qualquer $x \in X$, $\tilde{K}^+(x) = \tilde{C}^-(x) \cup \tilde{L}^+(x)$. E se $\tilde{L}^+(x)$ satisfizer as condições do Lema 2.5.5, então $\tilde{K}^+(x)$ será $\tilde{\pi}$ -invariante.

Lema 2.5.10 [[11], pág. 513]. Para qualquer $x \in X$, temos que $\tilde{D}^+(x) = \tilde{K}^+(x) \cup \tilde{J}^-(x)$. E se $\tilde{L}^+(x)$ satisfizer as condições do Lema 2.5.5 e $\tilde{J}^-(x)$ satisfizer as condições do Lema 2.5.7, então, $\tilde{D}^+(x)$ será fechado e positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante.

Demonstração: O fato de que $\tilde{D}^+(x) = \tilde{K}^+(x) \cup \tilde{J}^-(x)$ segue diretamente das definições desses conjuntos (Def. 2.5.1). Notemos que $\tilde{K}^+(x)$ e $\tilde{J}^-(x)$ são ambos fechados e positivamente $\tilde{\pi}$ -invariantes. Logo $\tilde{D}^+(x)$ é fechado e positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante. $\square$

Lema 2.5.11 [[11], pág. 513]. Seja $\hat{A} \subset \hat{N}$ compacto e positivamente g -invariante e suponhamos que $\hat{N} \cap M = \emptyset$. Suponhamos ainda que $\tilde{K}^+(\hat{A}) \cap M = \emptyset$. Então o fecho de $\tilde{K}^+(\hat{A})$ em X é compacto. Além disso, $\tilde{K}^+(\hat{A}) = \tilde{C}^+(\hat{A})$ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante.

Demonstração: Seja $p \in \hat{A}$. Então como $\hat{A}$ é positivamente invariante, $g(\hat{A}) \subset \hat{A}$. Assim $p_n^! \in \hat{A}$ para todo n . Notemos que $\tilde{C}^+(p) = \cup\{C_0(p_n^+) : n = 0, 1, 2, \dots\}$, $p_0^! = p$ e, como $\hat{A}$ é compacto, então $Q = \overline{\{p_n^! : n = 0, 1, 2, \dots\}}$ também é compacto.

Afirmamos que $\tilde{K}^+(p) = \cup\{C_0(q) : q \in Q\}$. Com efeito. Mostremos as inclusões.

($\subset$) Seja $y \in \tilde{K}^-(p)$. Então

$$\pi(p_{n_k}^+, t_k) \rightarrow y, \text{ para } 0 \leq t_k < \phi(p_{n_k}^+).$$

Como Q é compacto, podemos assumir que $p_{n_k}^+ \rightarrow p \in Q$ e, também, que $t_k \rightarrow t$ com $0 \leq t < \phi(p)$. Assim

$$y = \pi(p, t) \in \cup\{C_0(q) : q \in Q\}.$$

($\supset$) Seja $y \in \cup\{C_0(q) : q \in Q\}$. Logo,

$$y = \tilde{\pi}(q, t), \text{ com } 0 \leq t < \phi(q) \text{ para algum } q \in Q.$$

Como $q \in Q$, existe uma seqüência, $\{p_{n_k}^+\}$, com $p_{n_k}^+ \rightarrow q$. Pelo Lema 2.5.4, segue que

$$\tilde{\pi}(p_{n_k}^+, t + \varepsilon_{n_k}) \rightarrow \tilde{\pi}(q, t) = y,$$

onde $\{\varepsilon_{n_k}\}$ é uma seqüência de números reais, $\varepsilon_{n_k} \rightarrow 0$. Portanto $y \in \tilde{K}^-(p)$.

Desta forma segue que $\tilde{K}^+(\hat{A}) = \cup\{C_0(p) : p \in \hat{A}\}$.

Agora, vamos provar que o fecho de $\tilde{K}^+(\hat{A})$ é compacto. Seja H este fecho e seja $\{y_n\}$ uma seqüência em H . Então existe uma seqüência $\{y'_n\}$ em $\tilde{K}^-(\hat{A})$ tal que $\rho(y_n, y'_n) < \frac{1}{n}$. Consequentemente, existe uma seqüência $x_n \in \hat{A}$ tal que $y'_n \in C_0(x_n)$. Desta maneira, $y'_n = \pi(x_n, t_n)$, $0 \leq t_n < \phi(x_n)$. Assumindo que $x_n \rightarrow x \in \hat{A}$ (pois $\hat{A}$ é compacto), segue que

$$\pi(x_n, t_n) \rightarrow \pi(x, t) = y,$$

onde $0 \leq t < \phi(x)$. Portanto, $y_n \rightarrow y$ e $y \in H$. Assim H é compacto.

O fato de $\tilde{C}^+(\hat{A})$ ser positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante segue do fato de $\hat{A}$ ser positivamente g -invariante em $\hat{N}$. $\square$

Lema 2.5.12 [[11], pág. 513]. Sejam $x \in X$ e $\tilde{\pi}(x, \phi(x)) = p \in \hat{N}$. Se $\hat{N} \cap M = \emptyset$, $\hat{C}^+(p)$ tiver fecho compacto em $\hat{N}$ e $\tilde{L}^+(p) \cap M = \emptyset$, então $\tilde{L}^+(x) = C_0(\hat{L}^+(p))$.

Demonstração:

($\subset$) Seja $y \in \tilde{L}^+(x)$. Então

$$\tilde{\pi}(x, t_k) \rightarrow y, \quad \text{com } t_k \rightarrow +\infty.$$

Assumamos que $t_k > \phi(x)$, para todo k . Então pela Observação 2.1.7,

$$\tilde{\pi}(p, t_k - \phi(x)) = \pi(p_{n_k}^+, t'_k), \quad 0 \leq t'_k < \phi(p_{n_k}^+).$$

Como $\hat{C}^+(p)$ tem fecho compacto em $\hat{N}$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $p_{n_k}^+ \rightarrow q \in \hat{N}$. Como $t_k \rightarrow +\infty$, claramente $n_k \rightarrow +\infty$ e $q \in \hat{L}^+(p)$. E podemos assumir que $t'_k \rightarrow t_0$, $0 \leq t_0 < \phi(q)$. Daí $y = \pi(q, t_0)$, $0 \leq t_0 < \phi(q)$. Aqui, $y \in C_0(q) \subset C_0(\hat{L}^+(p))$.

($\supset$) Suponhamos que $y \in C_0(\hat{L}^+(p))$. Então $y = \pi(q, t)$, $0 \leq t < \phi(q)$, para algum $q \in \hat{L}^+(p)$. Agora, seja $p_{n_k}^+ \rightarrow q$ com $n_k \rightarrow +\infty$, onde $p_{n_k}^+ = g^{n_k}(p)$. Então pelo Lema 2.5.4,

$$\tilde{\pi}(p_{n_k}^+, t + \varepsilon_n) \rightarrow \tilde{\pi}(q, t) = \pi(q, t) = y.$$

Seja $t_k = \sum_{i=0}^{n_k-1} \phi(p_i^+) + \phi(x)$. Como $p = \tilde{\pi}(x, \phi(x)) = x_1^+$, segue que $x_j^+ = p_{j-1}^+$, para $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $p_0^+ = p$. Desta forma

$$t_k = \sum_{i=0}^{n_k-1} \phi(p_i^+) + \phi(x) = \sum_{i=0}^{n_k} \phi(x_i^+)$$

e, assim,

$$\tilde{\pi}(x, t_k) = x_{n_k+1}^+ = p_{n_k}^+.$$

Logo

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t_k), t + \varepsilon_n) = \tilde{\pi}(p_{n_k}^+, t + \varepsilon_n)$$

e, portanto,

$$\tilde{\pi}(x, t_k + t + \varepsilon_n) \rightarrow y.$$

Assim, $y \in \tilde{L}^+(x)$ e a prova está completa. $\square$

Lema 2.5.13 [[11], pág. 514]. Sejam $A \subset X$, $\tilde{D}^-(A) = A$ em $(X, \pi; M, I)$. Então A é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante.

Demonstração: Para qualquer $x \in A$, temos $\tilde{C}^-(x) \subset \tilde{K}^+(x)$ e, pelo Lema 2.5.10,

$$\tilde{K}^+(x) \subset \tilde{D}^-(x) \subset A.$$

Portanto o resultado segue. $\square$

Definição 2.5.14 Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico com impulsos. Diremos que $x \in X$ será de $Ch0^+$, isto é, de **característica 0** em $(X, \pi; M, I)$, se $\tilde{D}^+(x) = \tilde{K}^+(x)$. Da mesma forma, $p \in \hat{N}$ será dita de $Ch0^+$ em $(\hat{N}, g)$, se $\hat{D}^+(p) = \hat{K}^+(p)$. Seja $Y \subset X$. Diremos que $x \in X$ será de $Ch0^+$ em $(X, \pi; M, I)$ com respeito a Y , se $\tilde{D}^+(x, Y) = \tilde{K}^+(x)$, onde

$$\tilde{D}^+(x, Y) = \{y \in X : \tilde{\pi}(x_k, t_k) \rightarrow y \text{ com } \{x_k\} \subset Y, x_k \rightarrow x, \text{ e } \{t_k\} \subset \mathbb{R}_+\}.$$

Similarmente, $p \in \hat{N}$ será de $Ch0^+$ em $(\hat{N}, g)$ com respeito a $P \subset \hat{N}$, se $\hat{D}^+(p, P) = \hat{K}^+(p)$.

Lema 2.5.15 [[10], pág. 343]. Sejam $p \in P$ e $P \subset \hat{N}$ compacto e invariante em $(\hat{N}, g)$. Se g for de $Ch0^+$ em p com respeito a P , então $\tilde{\pi}$ será de $Ch0^+$ em p com respeito a P .

Demonstração: Notemos que

$$\tilde{K}^+(p) \subset \tilde{D}^+(p, P).$$

Tomemos $y \in \tilde{D}^+(p, P)$. Então

$$\tilde{\pi}(p_n, t_n) \rightarrow y,$$

para alguma seqüência $\{p_n\} \subset P$ convergindo para p e alguma seqüência $\{t_n\}$ em $\mathbb{R}_+$. Segue da Observação 2.1.7 que, para cada n ,

$$t_n = t_{m_n}(p_n) + s_n, \quad 0 \leq s_n < \phi(g^{m_n}(p_n)),$$

para alguma seqüência $\{m_n\} \subset \mathbb{Z}_+$.

Como P é invariante e compacto, podemos assumir que

$$g^{m_n}(p_n) = y_n \rightarrow \tilde{y} \in P.$$

E como $\tilde{\pi}(p_n, t_n) = \pi(y_n, s_n)$, $y_n \in P$ e ϕ é semicontínua superiormente, temos

$$y = \pi(\tilde{y}, s),$$

onde $0 \leq s < \phi(\tilde{y})$ e $s_n \rightarrow s$.

Como g é de $Ch0^+$ em p e $\tilde{y} \in \widehat{D}^+(p, P)$, segue que $\tilde{y} \in \widehat{K}^+(p)$, assim existe uma sequência $\{\ell_n\}$ em $\mathbb{Z}_+$ tal que

$$r_n = g^{\ell_n}(p) \rightarrow \tilde{y}.$$

Conseqüentemente, $\phi(r_n) \rightarrow c \leq \phi(\tilde{y})$. Tomando uma sequência $\{\varrho_n\}$, $0 \leq \varrho_n < \phi(r_n)$ tal que $\varrho_n \rightarrow s$, temos

$$\tilde{\pi}(p, \varrho_n') = \pi(r_n, \varrho_n) \rightarrow \pi(\tilde{y}, s) = y,$$

onde $\varrho_n' = t_{\ell_n}(p) + \varrho_n$. Portanto $y \in \tilde{K}^+(p)$. □

Teorema 2.5.16 [[10], pág. 343]. Seja $p \in \widehat{N}$. Suponhamos que $y \in \widehat{L}^-(p)$ e $\widehat{N}^+ \cap M = \emptyset$, então $\tilde{K}^+(y) \subset \tilde{L}^+(p)$. Além disso, se $\tilde{\pi}$ for de $Ch0^+$ em cada $y \in \widehat{L}^+(p)$ com respeito a $\widehat{K}^+(p)$ e $\widehat{K}^-(p)$ for compacto, então

$$\tilde{L}^+(p) = \bigcup \{\tilde{K}^-(y) : y \in \widehat{L}^-(p)\}.$$

Demonstração: Tomemos $z \in \tilde{C}^+(y)$, para algum $y \in \widehat{L}^-(p)$. Então

$$z = \tilde{\pi}(y, t) = \pi(y_m^+, t'),$$

onde $t = t_m(y) + t'$ e $0 \leq t' < \phi(y_m^+)$.

Seja $\{n_k\}$ uma sequência em $\mathbb{Z}_+$ tal que

$$p_{n_k}^+ \rightarrow y, \text{ quando } n_k \rightarrow +\infty.$$

Observemos que $p_{n_k+m}^+ \rightarrow y_m^+$.

Consideremos, agora, a seqüência $\{t'_k\}$, $0 \leq t'_k < \phi(p_{n_k+m})$, tal que $t'_k \rightarrow t'$. Notemos que $(t_{n_k+m}(p) + t'_k) \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$. Deste modo,

$$\tilde{\pi}(p, t_{n_k+m}(p) + t'_k) = \pi(p_{n_k+m}, t'_k) \rightarrow \pi(y_m^+, t') = z$$

Daí, $z \in \tilde{L}^+(p)$. E como $\tilde{L}^+(p)$ é fechado, segue que

$$\tilde{K}^-(y) \subset \tilde{L}^-(p).$$

Agora, provemos que $\tilde{L}^-(p) \subset \cup \{\tilde{K}^-(y) : y \in \hat{L}^-(p)\}$. Tomemos $z \in \tilde{L}^-(p)$. Então existem uma seqüência $\{n_k\} \subset \mathbb{Z}_-$, $n_k \rightarrow -\infty$, e $t_k = t_{n_k}(p) + t'_k$ em $\mathbb{R}_+$ tais que

$$\tilde{\pi}(p, t_k) = \pi(p_{n_k}^+, t'_k) \rightarrow z,$$

onde $0 < t'_k < \phi(p_{n_k}^+)$. Como $\hat{K}^-(p)$ é compacto, podemos assumir que

$$p_{n_k}^+ \rightarrow y \in \hat{K}^-(p).$$

Notemos que $y \in \hat{L}^-(p)$. E sendo $\hat{\pi}$ de $Ch0^-$ em y , segue que

$$z \in \tilde{D}^-(y, \hat{K}^-(p)) = \tilde{K}^-(y)$$

e o resultado segue. □

Estabilidade em Sistemas Semidinâmicos Impulsivos

Neste capítulo, estabelecemos o conceito de estabilidade para um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$, onde (X, ρ) é um espaço métrico. Este conceito não é diferente comparado ao conceito usual dos sistemas semidinâmicos sem impulsos. Assim, para garantir estabilidade para um subconjunto A de X , vamos impor condições para este conjunto e para a função impulsiva I .

Diremos que uma componente conexa ou simplesmente componente E do conjunto A será **isolada** em A , se existirem subconjuntos abertos disjuntos U e V de X tais que $E \subset U$ e $A \setminus E \subset V$.

3.1 Introdução

No que segue, estaremos considerando $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo.

Definição 3.1.1 Um ponto $x \in X$ será dito **estacionário** em $(X, \pi; M, I)$, se $\tilde{\pi}(x, t) = x$, para todo $t \geq 0$.

Definição 3.1.2 Um ponto $x \in X$ será dito **periódico** em $(X, \pi; M, I)$, se $\tilde{\pi}(x, t) = x$, para algum $t > 0$ e x não for estacionário.

Agora, vamos dar algumas noções de estabilidade.

Definição 3.1.3 Seja $A \subset X$. Diremos que A é:

- a) **$\tilde{\pi}$ –estável** se, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in A$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(x, \delta), [0, +\infty)) \subset B(A, \varepsilon).$$

- b) **orbitalmente $\tilde{\pi}$ –estável** se, para toda vizinhança U de A , existir uma vizinhança V de A , $V \subset U$, que é positivamente $\tilde{\pi}$ –invariante, ou seja, $\tilde{\pi}^+(V) \subset V$.

- c) **$\tilde{\pi}$ –estável segundo Bhatia e Hajek** se, para todo $x \in A$ e todo $y \notin A$, existirem uma vizinhança V de x e uma vizinhança W de y tais que $W \cap \tilde{\pi}(V, [0, +\infty)) = \emptyset$.

Definição 3.1.4 Diremos que $A \subset X$ é **I–invariante**, se $I(x) \in A$, para cada $x \in M \cap A$, e A é **I–estável** se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$I(M \cap B(A, \delta)) \subset B(A, \varepsilon).$$

3.2 Invariância

Proposição 3.2.1 [[6], pág. 3]. Qualquer subconjunto A de X que for π –invariante e I–invariante, também será positivamente $\tilde{\pi}$ –invariante.

Demonstração: Seja $x \in A$. Como A é π –invariante, segue que

$$\tilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) = \pi(x, [0, \phi(x))) \subset A \quad \text{e} \quad x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in A.$$

Notemos que $x_1^+ = I(x_1) \in A$, pois A é I–invariante. Do mesmo modo, temos

$$\tilde{\pi}(x_1^+, [0, \phi(x_1^+))) = \pi(x_1^+, [0, \phi(x_1^+))) \subset A \quad \text{e} \quad x_2 = \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) \in A.$$

Segue, por indução, que $\tilde{\pi}^+(x) \subset A$. Portanto A é positivamente $\tilde{\pi}$ –invariante. $\square$

Proposição 3.2.2 [[6], pág. 3]. Qualquer subconjunto fechado A de X que for $\tilde{\pi}$ –invariante também será π –invariante.

Demonstração: Seja $x \in A$. Suponhamos que $\pi(x, \tau) \notin A$, para algum $\tau > 0$. Definamos

$$\xi = \inf\{s : \pi(x, s) \notin A\}.$$

Notemos que $\xi > 0$, pois $\tilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) = \pi(x, [0, \phi(x))) \subset A$. Além disso,

$$\pi(x, [0, \xi)) \subset A \quad \text{e} \quad \pi(x, \xi) \in A = \bar{A}.$$

No entanto,

$$\pi(\pi(x, \xi), [0, \phi(\pi(x, \xi)))) = \tilde{\pi}(\pi(x, \xi), [0, \phi(\pi(x, \xi)))) \subset A.$$

Desta forma, existe $\delta > 0$ tal que

$$\pi(x, [0, \xi + \delta)) \subset A,$$

contradizendo a definição de ξ . E o resultado segue. $\square$

Teorema 3.2.3 [[6], pág. 3]. Qualquer subconjunto compacto A de X que for $\tilde{\pi}$ -estável será $\tilde{\pi}$ -invariante e π -invariante. Se, além disso, não existir ponto inicial em $M \cap A$, então A também será I -invariante.

Demonstração: Consideremos $\varepsilon > 0$. Segue da estabilidade de A que, dado qualquer $x \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $\tilde{\pi}^+(B(x, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$, donde $\tilde{\pi}^+(x) \subset \cap\{B(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} = \bar{A} = A$.

O fato de que A é π -invariante segue da Proposição 3.2.2.

Seja $x \in M \cap A$. Então existem $y \in X$, $t > 0$ e $\mu > t$ tais que

$$\pi(y, t) = x \quad \text{e} \quad \pi(y, [0, \mu]) \cap M = \{x\}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\tilde{\pi}^+(B(x, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$. Além disso, existe $\tau \in [0, t)$ de maneira que $\pi(y, \tau) \in B(x, \delta)$. Assim,

$$I(x) = I(\pi(y, t)) = I(\pi(\pi(y, \tau), t - \tau)) = \tilde{\pi}(\pi(y, \tau), t - \tau) \in B(A, \varepsilon).$$

Por isso $I(x) \in \cap\{B(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} = \bar{A} = A$. $\square$

Teorema 3.2.4 [[6], pág. 4]. Assumamos que uma componente E de um subconjunto compacto positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante A de X seja I -invariante. Então E será positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante.

Demonstração: Seja $x \in E$. Segue do Teorema 3.2.2 que A é π -invariante. Daí,

$$\pi(x, [0, \phi(x))) \subset A.$$

Sendo $\pi_x : \mathbb{R}_- \rightarrow X$ contínua e $[0, \phi(x))$ conexo, segue que

$$\pi(x, [0, \phi(x))) \subset E.$$

Se $\phi(x) = +\infty$, o teorema seguirá. Mas se $\phi(x) < +\infty$, então $x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in \bar{E} = E$ e $I(x_1) \in E$. E o processo seguirá desta maneira de modo que $\tilde{\pi}^-(x) \subset E$. $\square$

3.3 Estabilidade em Sistemas Básicos e Impulsivos

Consideremos o espaço $X = \{(r, \theta) : r \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ em coordenadas polares. Consideremos, também, o sistema diferencial ordinário dado pelas equações

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{r-1}{100}, \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

com

$$M = [1, +\infty) \times \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{e} \quad I\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{r+99}{100}, \frac{3\pi}{2} \right).$$

Desta forma, obtemos um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$, onde o círculo unitário $A = \{(r, \theta) : r = 1\}$ não é π -estável, pois as trajetórias do sistema básico vão espiralando do círculo unitário para o infinito. Entretanto A é $\tilde{\pi}$ -estável pois, no sistema impulsivo, o movimento de um ponto que se inicia numa vizinhança de A permanece na vizinhança de A , de acordo com a definição do operador de impulso I .

Assim, dado um sistema básico não estável, podemos obter a estabilidade de tal sistema associando a ele uma condição de impulso.

A seguir, apresentamos alguns resultados sobre estabilidade que associam os sistemas básicos e os sistemas com controles de impulsos.

Teorema 3.3.1 [[6], pág. 6]. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Assumamos que X seja localmente compacto e que A seja um subconjunto compacto π -estável de X . Assumamos, também, que exista um $\mu > 0$ tal que, para todo $x \in B(A, \mu)$, as seguintes condições sejam válidas:

- i) se $x \in M$, então $\rho_A(I(x)) \leq \rho_A(x)$;
- ii) se $x \in I(M)$ e $\phi(x) < +\infty$, então $\rho_A(\pi(x, \phi(x))) \leq \rho_A(x)$.

Então A será $\tilde{\pi}$ -estável.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Podemos assumir que $\varepsilon < \mu$. Para provarmos a $\tilde{\pi}$ -estabilidade de A , é suficiente mostrarmos que existe um $\delta > 0$ tal que $\tilde{\pi}^+(x) \subset B(A, \varepsilon)$, para qualquer $x \in B(A, \delta)$.

Segue da π -estabilidade de A e do fato de A ser compacto, que existe $\eta > 0$ tal que $\pi(B(A, \eta)) \subset B(A, \varepsilon)$. Similarmente, existe um $\delta > 0$ tal que $\pi(B(A, \delta)) \subset B\left(A, \frac{\eta}{2}\right)$. Agora, tomemos $x \in B(A, \delta)$. Se $\phi(x) = +\infty$, então $\tilde{\pi}^+(x) = \pi^+(x) \subset B(A, \varepsilon)$. Assumamos, então, que $\phi(x) < +\infty$. Então

$$\tilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) = \pi(x, [0, \phi(x))) \subset B\left(A, \frac{\eta}{2}\right) \subset B(A, \varepsilon) \subset B(A, \mu)$$

e, da continuidade de π , temos $x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in \overline{B\left(A, \frac{\eta}{2}\right)}$. Assim, $\rho_A(x_1) \leq \frac{\eta}{2} < \eta < \mu$.

Como $x_1 \in M$, segue da condição i) que $\rho_A(x_1^+) \leq \rho_A(x_1) \leq \frac{\eta}{2}$ e $x_1^+ \in B(A, \eta)$. Também temos

$$\tilde{\pi}(x, [\phi(x), \phi(x) + \phi(x_1^-))) = \pi(x_1^+, [0, \phi(x_1^-))) \subset B(A, \varepsilon)$$

e

$$\rho_A(\pi(x_1^+, \phi(x_1^-))) \leq \rho_A(x_1^+) \leq \frac{\eta}{2},$$

tendo em vista a condição ii). Por isso $\rho_A(x_2^-) \leq \rho_A(x_2) \leq \frac{\eta}{2}$. Continuando com este processo,

obtemos

$$\rho_A(x_n) \leq \frac{\eta}{2}, \quad \rho_A(x_n^+) \leq \frac{\eta}{2} \quad \text{e} \quad \pi(x_n^+, [0, \phi(x_n^+))) \subset B(A, \varepsilon)$$

e, portanto, $\tilde{\pi}^+(x) \in B(A, \varepsilon)$. □

Proposição 3.3.2 [[6], pág. 6]. Sejam A um subconjunto compacto π –estável de X e $A \cap M = \emptyset$. Então A será $\tilde{\pi}$ –estável.

Demonstração: Como A é compacto e M é fechado, existe $\beta > 0$ tal que $B(A, \beta) \cap M = \emptyset$. Tomemos ε tal que $0 < \varepsilon < \beta$. Para qualquer $x \in A$, existe um $\alpha > 0$ com

$$\pi^+(B(x, \alpha)) \subset B(A, \varepsilon).$$

Fazendo $\delta = \min\{\alpha, \varepsilon\}$, temos $\tilde{\pi}^+(B(x, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$. □

O estudo da estabilidade de trajetórias estacionárias e periódicas é particularmente interessante. Os resultados seguintes são imediatos.

Corolário 3.3.3 [[6], pág. 6]. Se $x \notin M$ for um ponto estacionário e $\{x\}$ for um conjunto π –estável, então $\{x\}$ será um conjunto $\tilde{\pi}$ –estável.

Lembrando que $\pi^+(x) = C^+(x)$ (Def. 1.2.3), também é válido o próximo resultado.

Corolário 3.3.4 [[6], pág. 6]. Se x for um ponto periódico com respeito a $\tilde{\pi}$, $\pi^+(x) \cap M = \emptyset$ e $\pi^+(x)$ for um conjunto π –estável, então $\pi^+(x) = \tilde{\pi}^+(x)$ será um conjunto $\tilde{\pi}$ –estável.

Temos, também, o resultado seguinte.

Teorema 3.3.5 [[6], pág. 6]. Assumamos que o conjunto compacto $A \subset X$ seja π –estável e que exista um $\mu > 0$ tal que $I(M \cap B(A, \mu)) \subset A$. Então A será $\tilde{\pi}$ –estável.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Podemos assumir que $\varepsilon < \mu$. Segue da estabilidade e da compacidade de A que existe um $\delta > 0$ de maneira que $\pi^+(B(A, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$. Mostraremos que $\tilde{\pi}^+(B(A, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$.

Seja $x \in B(A, \delta)$. Se $\phi(x) = +\infty$, segue que $\tilde{\pi}^+(x) = \pi^+(x) \subset B(A, \varepsilon)$. Assumamos, então, que $\phi(x) < +\infty$. Desta forma,

$$\tilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) = \pi(x, [0, \phi(x))) \subset B(A, \varepsilon),$$

$$x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in B(A, \mu)$$

e

$$x_1^- \in A \subset B(A, \delta).$$

De modo análogo,

$$\tilde{\pi}(x_1^+, [0, \phi(x_1^+))) \subset B(A, \varepsilon) \quad \text{e} \quad x_2^- \in A \subset B(A, \delta).$$

Segue, por indução, que $\tilde{\pi}^r(x) \subset B(A, \varepsilon)$.

□

3.4 Estabilidade em Conjuntos Compactos

Para sistemas semidinâmicos, existem alguns critérios para estabilidade em conjuntos compactos. Sistemas impulsivos podem apresentar mais complicações nas estruturas de seus movimentos, se comparados aos sistemas sem impulsos. Surpreendentemente, mostraremos para o caso impulsivo alguns resultados análogos aos dos sistemas sem impulsos. Em particular, apresentamos o caso impulsivo do famoso Teorema de URA, que corresponde à equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (iv), no Teorema 3.4.1 a seguir.

Teorema 3.4.1 [[6], pág. 7]. Assumamos que X seja localmente compacto e que A seja um subconjunto compacto de X . Nestas condições, são equivalentes:

- (i) A é $\tilde{\pi}$ –estável;
- (ii) A é orbitalmente $\tilde{\pi}$ –estável;
- (iii) A é $\tilde{\pi}$ –estável segundo Bhatia e Hajek;
- (iv) $\tilde{D}^+(A) = A$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Tomemos uma vizinhança U de A . Então existe uma vizinhança V de A com $V \subset \tilde{\pi}^-(V) \subset U$, já que A é um compacto $\tilde{\pi}$ -estável. Assim $\tilde{\pi}^+(V)$ é a vizinhança positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante de A desejada.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sejam $x \in A$ e $y \notin A$. Podemos encontrar conjuntos abertos W e V tais que $A \subset W$, $y \in V$ e $W \cap V = \emptyset$. Pela hipótese (ii), podemos encontrar uma vizinhança positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante U de A tal que $U \subset W$. Assim, os conjuntos U e V satisfazem as condições da definição de estabilidade segundo Bhatia e Hajek (Def. 3.1.3).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) É claro que $A \subset \tilde{D}^+(A)$. Logo basta mostrarmos que $\tilde{D}^-(A) \subset A$. Seja $y \notin A$. Agora, seja $x \in A$. Então existem vizinhanças U de x e V de y com $\tilde{\pi}^+(U) \cap V = \emptyset$. Segue que, para quaisquer seqüências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $t_n \geq 0$, temos $x_n \in U$, $\tilde{\pi}^+(x_n, t_n) \notin V$ para $n \geq n_0$, e $\tilde{\pi}^-(x_n, t_n)$ não converge para y . Isto mostra que, para qualquer $x \in A$, temos $y \notin \tilde{D}^-(x)$ e, finalmente, $y \notin \tilde{D}^-(A)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos o contrário, isto é, que existam um $\varepsilon > 0$ e seqüências $\{x_n\}$, $\{t_n\}$ tais que $x_n \rightarrow x$, $t_n \geq 0$ e $\tilde{\pi}^+(x_n, t_n) \notin \overline{B(A, \varepsilon)}$. Podemos assumir que $\overline{B(A, \varepsilon)}$ é compacto, já que X é localmente compacto. Vamos considerar dois casos.

Assumamos, primeiramente, que $t_n < \phi(x_n)$ para uma infinidade de n 's. Tomando uma subseqüência, podemos assumir que $t_n < \phi(x_n)$, para todo n . Então

$$\tilde{\pi}(x_n, t_n) = \pi(x_n, t_n)$$

e, para cada n , existe um $s_n \in [0, t_n]$, com $\tilde{\pi}(x_n, s_n) = \pi(x_n, s_n) \in \partial B(A, \varepsilon)$. Mas como $\partial B(A, \varepsilon)$ é compacto, temos que $\tilde{\pi}(x_{n_k}, s_{n_k}) \rightarrow y \in \partial B(A, \varepsilon)$ para alguma subseqüência $\{n_k\}$. Assim $y \in \tilde{D}^-(A) \setminus A$, o que é um absurdo.

Agora, vamos considerar o caso em que $t_n < \phi(x_n)$ para um número finito de n 's. Podemos supor que $t_n \geq \phi(x_n)$, para cada n .

Seja $\Delta_n = \{s \geq 0 : \tilde{\pi}(x_n, s) \in B(A, \varepsilon)\}$. Note que $0 \in \Delta_n$. Assim, podemos definir

$$s_n = \inf[0, T(x_n)) \setminus \Delta_n,$$

onde $[0, T(x_n))$ é o intervalo máximo de existência da função $\tilde{\pi}(x_n, \cdot)$.

Notemos, também, que $\tilde{\pi}(x_n, s_n) \notin B(A, \varepsilon)$, já que a função $\tilde{\pi}(x_n, \cdot)$ é contínua à direita.

Tomemos $\delta \in (0, \varepsilon)$. Vamos mostrar que existe um n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, podemos encontrar seqüências $p_n \in \tilde{\pi}(x_n, \Delta_n)$ e $q_n \in A$ tais que $\rho(p_n, q_n) < \delta$. Suponhamos, entretanto, que isto não aconteça. Então, para uma infinidade de n 's, podemos encontrar $u_n \in \Delta_n$ com $\tilde{\pi}(x_n, u_n) \in \overline{\mathcal{A}(A, \delta, \varepsilon)}$. Este último conjunto é compacto. Assim, para alguma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$, temos $\tilde{\pi}(x_{n_k}, u_{n_k}) \rightarrow y \notin A$, o que é impossível já que $\tilde{D}^+(A) = A$. Logo, fixado $n \geq n_0$, temos

$$\tilde{\pi}(x_n, [0, s_n)) \subset B(A, \delta) \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_n, s_n) \notin B(A, \varepsilon).$$

Desta forma, $\tilde{\pi}(x_n, s_n) = I(y_n)$ para algum $y_n \in M$. Além disso, $y_n \in \overline{B(A, \delta)}$. Notemos que y_n não é ponto inicial, pois $s_n > 0$.

Finalmente, usando a compacidade de $\overline{B(A, \delta)}$, podemos assumir que $y_n \rightarrow y \in \overline{B(A, \delta)}$. Segue da continuidade de I que

$$I(y_n) \rightarrow I(y).$$

Assim $I(y) \notin A$, pois $I(y_n) \notin B(A, \varepsilon)$ para todo n . Por outro lado, $I(y_n) = \tilde{\pi}(x_n, s_n)$. Logo $I(y) \in \tilde{D}^+(x) \subset \tilde{D}^+(A)$, o que contradiz a hipótese de que $\tilde{D}^+(A) = A$. Portanto, o teorema está provado. $\square$

3.5 Estabilidade em Componentes

Para sistemas semidinâmicos, um conjunto compacto A é dito π -estável se, e somente se, cada componente de A for π -estável. Esta definição não pode ser estendida imediatamente para sistemas impulsivos. Vejamos o exemplo seguinte.

Exemplo 3.5.1 Consideremos o sistema semidinâmico dado pelo sistema de equações ordinárias

$\dot{x} = -y, \dot{y} = x$. As soluções deste sistema são

$$x(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t, \quad y(t) = k_1 \sin t - k_2 \cos t,$$

onde k_1, k_2 são constantes. Estas soluções são periódicas, com exceção do ponto $(0, 0)$ que é estacionário. Sejam $A_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, $A_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ e $A = A_1 \cup A_2$. Tomemos $M = \{(0, -2), (0, -1)\}$, $I(0, -2) = (0, 1)$ e $I(0, -1) = (0, 2)$. Claramente A é $\tilde{\pi}$ -estável. Entretanto qualquer componente de A (isto é A_1 ou A_2) não é $\tilde{\pi}$ -estável. Com efeito. Dado qualquer vizinhança U de A_1 , tomemos uma solução com condição inicial $(1, 0)$. Como A_1 é π -invariante, a solução encontrará $(0, -1)$ que é levado pelo operador I em $(0, 2) \notin U$. Assim A_1 não é $\tilde{\pi}$ -estável e o mesmo pode ser mostrado para A_2 .

No que segue, consideramos $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e apresentamos alguns resultados sobre a estabilidade das componentes de um subconjunto A de X .

Proposição 3.5.2 [[6], pág. 8]. Assumamos que $A \subset X$ seja compacto e que qualquer componente de A seja $\tilde{\pi}$ -estável. Então A será $\tilde{\pi}$ -estável.

Demonstração: Seja U uma vizinhança de A . Tomemos $x \in A$ arbitrário e seja A_x uma componente de A tal que $x \in A_x$. É claro que U é uma vizinhança da componente A_x . Segue da $\tilde{\pi}$ -estabilidade de A_x que existe uma vizinhança V_x de x tal que $\tilde{\pi}^+(V_x) \subset U$. E a proposição segue. $\square$

Teorema 3.5.3 [[6], pág. 8]. Seja X localmente compacto. Assumamos que uma componente isolada E de um conjunto compacto $\tilde{\pi}$ -estável A , seja I -invariante. Então E será $\tilde{\pi}$ -estável.

Demonstração: Existem conjuntos abertos U e V disjuntos tais que $E \subset U$ e $A \setminus E \subset V$. Podemos assumir que U é compacto, já que E é compacto e X é localmente compacto. Suponhamos que E não seja $\tilde{\pi}$ -estável. Logo existem uma vizinhança W de E , $x \in E$ e uma seqüência $\{x_n\}$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $\tilde{\pi}^+(x_n)$ não está contido em W . Podemos assumir que W seja compacto, com $W \subset U$. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(E, \varepsilon)} \subset W$, já que E é compacto. Segue que $\overline{B(E, \varepsilon)}$ é compacto.

Agora, notemos que $M^+(x_n) \neq \emptyset$, para cada n . Caso contrário, para qualquer n , existiria um $u_n \geq 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(x_n, u_n) = \pi(x_n, u_n) \in \partial B(E, \varepsilon).$$

Mas tomando uma subsequência

$$\tilde{\pi}(x_{n_k}, u_{n_k}) \rightarrow y \in \partial B(E, \varepsilon),$$

temos $y \in \tilde{D}^+(x) \subset \tilde{D}^+(A)$ e $y \notin A$, o que é um absurdo (Teorema 3.4.1).

Existe uma vizinhança G_x de x tal que

$$\tilde{\pi}^+(G_x) \subset B(E, \varepsilon) \cup V,$$

já que $B(E, \varepsilon) \cup V$ é uma vizinhança do conjunto $\tilde{\pi}$ -estável A . Para n suficientemente grande, temos $x_n \in G_x$. Usando a propriedade mostrada acima, sabemos que, para cada n ,

$$\{t : \tilde{\pi}(x_n, t) \in V\} \neq \emptyset.$$

Definamos $t_n = \inf\{t : \tilde{\pi}(x_n, t) \in V\}$. Então $\tilde{\pi}(x_n, [0, t_n)) \subset B(E, \varepsilon)$. De acordo com a construção das trajetórias impulsivas e da propriedade de que os pontos de M são isolados em toda trajetória do sistema (X, π) , temos

$$\tilde{\pi}(x_n, t_n) \in V \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_n, t_n) = x_{k_n}^+,$$

para algum k_n . Assim $\tilde{\pi}(x_n, t_n) = I(q_n)$ para algum $q_n \in \overline{B(E, \varepsilon)}$. Além disso, para cada n , existe um $v_n < t_n$ tal que

$$\tilde{\pi}(x_n, (v_n, t_n)) = \pi(x_n, (v_n, t_n)).$$

Para cada n , tomemos $s_n \in (v_n, t_n)$ tal que $(t_n - s_n) \rightarrow 0$. Definamos

$$p_n = \tilde{\pi}(x_n, s_n) \in \overline{B(E, \varepsilon)}.$$

Podemos assumir (tomando uma subsequência, se necessário) que $p_n \rightarrow p \in \overline{B(E, \varepsilon)}$. Por outro lado,

$$q_n = \pi(p_n, t_n - s_n) \rightarrow \pi(p, 0) = p.$$

E como M é fechado, segue que $p \in M$. Entretanto $x_n \rightarrow x$ e $\tilde{\pi}(x_n, s_n) \rightarrow p$. Portanto,

$$p \in \tilde{D}^+(x) \subset \tilde{D}^+(A).$$

Daí, pelo Teorema 3.4.1, $p \in A$. Mas como $p \in \overline{B(E, \varepsilon)}$, então $p \in E$. Por outro lado, sendo I contínua, temos $I(q_n) \rightarrow I(p)$ e, daí, $I(q_n) \in V$. Logo $I(p) \in \overline{V}$ e $I(p) \notin E$, o que é uma contradição já que E é I -invariante. Portanto, temos o resultado. $\square$

Corolário 3.5.4 [[6], pág. 10]. Seja X localmente compacto e seja $A \subset X$ compacto, $\tilde{\pi}$ -estável e com um número finito de componentes. Então qualquer componente I -invariante E de A será $\tilde{\pi}$ -estável.

Conjugação Topológica e Estabilidade Assintótica

4.1 Conjugação Topológica

O estudo qualitativo de uma EDI consiste da descrição geométrica de seu espaço de fase também chamado espaço de órbitas. É, então, natural perguntarmos quando é que dois espaços de órbitas têm a mesma descrição. Isso corresponde a estabelecer uma relação de equivalência entre EDIs. Uma relação de equivalência que exprime a estrutura geométrica das órbitas entre equações diferenciais é uma conjugação topológica.

Nesta seção, vamos mostrar algumas propriedades que são preservadas dada a existência de uma conjugação topológica entre dois sistemas semidinâmicos impulsivos.

Consideremos os espaços métricos X e Y com as métricas ρ_X e ρ_Y respectivamente.

Vamos definir o que vem a ser conjugação topológica entre dois sistemas semidinâmicos impulsivos.

Definição 4.1.1 Sejam $(X, \pi; M_X, I_X)$ e $(Y, \psi; M_Y, I_Y)$ sistemas semidinâmicos impulsivos. Diremos que X e Y serão **topologicamente conjugados**, se existir um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ que leve órbitas de X sobre órbitas de Y preservando a orientação, isto é, $h(\tilde{C}_X^\dagger(p)) = \tilde{C}_Y^\dagger(h(p))$,

com $h(\tilde{\pi}(p, t)) = \tilde{\psi}(h(p), t)$ para todo $t \in T_X(p) = T_Y(h(p))$.

A Proposição 4.1.2 a seguir nos diz que o homeomorfismo h leva ponto impulsivo em ponto impulsivo.

Proposição 4.1.2 Sejam $(X, \pi; M_X, I_X)$ e $(Y, \psi; M_Y, I_Y)$ sistemas semidinâmicos impulsivos. Sejam X e Y topologicamente conjugados pelo homeomorfismo h . Então, para qualquer $p \in X$, temos $\phi_X(p) = \phi_Y(h(p))$.

Demonstração: Dado $p \in X$, temos

$$\tilde{\pi}(p, t) = \begin{cases} \pi(p, t), & 0 \leq t < \phi_X(p), \\ p_1^+, & t = \phi_X(p). \end{cases}$$

Então,

$$h(\tilde{\pi}(p, t)) = \begin{cases} h(\pi(p, t)), & 0 \leq t < \phi_X(p), \\ h(p_1^+), & t = \phi_X(p). \end{cases}$$

Portanto,

$$\tilde{\psi}(h(p), t) = \begin{cases} \psi(h(p), t), & 0 \leq t < \phi_X(p), \\ h(p_1^+), & t = \phi_X(p). \end{cases}$$

Se $\rho_X(\pi(p, t), p_1^+) > 0$, como h é um homeomorfismo, segue que

$$\rho_Y(\psi(h(p), t), h(p_1^+)) > 0.$$

Portanto, $\phi_Y(h(p)) = \phi_X(p)$. □

Para as proposições seguintes, consideramos $(X, \pi; M_X, I_X)$ e $(Y, \psi; M_Y, I_Y)$ sistemas semidinâmicos impulsivos topologicamente conjugados pelo homeomorfismo h .

Proposição 4.1.3 As seguintes propriedades são válidas:

- a) $h(\tilde{L}_X(p)) = \tilde{L}_Y(h(p))$, $p \in X$;
- b) $h(\tilde{J}_X^+(p)) = \tilde{J}_Y^+(h(p))$, $p \in X$;

$$c) \ h(\tilde{D}_X^-(p)) = \tilde{D}_Y^+(h(p)), \ p \in X.$$

Demonstração:

a) ($\subset$) Seja $x \in h(\tilde{L}_X^+(p))$. Então existe $y \in \tilde{L}_X^+(p)$ tal que $h(y) = x$. Logo existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\pi}(p, t_n) \rightarrow y, \text{ quando } t_n \rightarrow +\infty.$$

Como h é contínua, temos

$$h(\tilde{\pi}(p, t_n)) \rightarrow h(y), \text{ quando } t_n \rightarrow +\infty.$$

Mas $h(\tilde{\pi}(p, t_n)) = \tilde{\psi}(h(p), t_n)$, $t_n \in \mathbb{R}_+$. Deste modo,

$$\tilde{\psi}(h(p), t_n) \rightarrow x, \text{ quando } t_n \rightarrow +\infty.$$

Portanto $x \in \tilde{L}_Y^-(h(p))$.

($\supset$) Agora, tomemos $x \in \tilde{L}_Y^+(h(p))$. Então existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$\tilde{\psi}(h(p), t_n) \rightarrow x, \text{ quando } t_n \rightarrow +\infty.$$

Como $h(\tilde{\pi}(p, t_n)) = \tilde{\psi}(h(p), t_n)$, $t_n \in \mathbb{R}_+$, então

$$h(\tilde{\pi}(p, t_n)) \rightarrow x, \text{ quando } t_n \rightarrow +\infty.$$

Como h é um homeomorfismo, então existe h^{-1} , que é contínua, e segue que

$$\tilde{\pi}(p, t_n) \rightarrow h^{-1}(x), \text{ quando } t_n \rightarrow +\infty.$$

Assim $h^{-1}(x) \in \tilde{L}_X^+(p)$. Logo $x \in h(\tilde{L}_X^+(p))$ e o resultado segue.

As provas dos itens b) e c) são análogas à de a). □

As Proposições 4.1.4 e 4.1.5, mostram que a invariância é preservada pelo homeomorfismo h .

Proposição 4.1.4 Se $A \subset X$ for $\tilde{\pi}$ -invariante, então $h(A)$ será $\tilde{\psi}$ -invariante.

Demonstração: Para cada $x \in A$, temos $\tilde{\pi}(x, t) \in A$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Consideremos $p \in h(A)$. Logo existe $y \in A$ tal que $h(y) = p$. Assim,

$$\tilde{\pi}(y, t) \in A, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+$$

e, então,

$$h(\tilde{\pi}(y, t)) \in h(A), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+.$$

Mas $h(\tilde{\pi}(y, t)) = \tilde{\psi}(h(y), t)$. Assim,

$$\tilde{\psi}(h(y), t) \in h(A)$$

e o resultado segue. $\square$

Proposição 4.1.5 Seja $A \subset X$ tal que $A \cap M_X$ seja I_X -invariante. Então $h(A) \cap M_Y$ será I_Y -invariante.

Demonstração: Seja $y \in h(A) \cap M_Y$. Logo existe $x \in A \cap M_X$ tal que $h(x) = y$. Por hipótese, $I_X(x) \in A \cap M_X$. Mas $I_X(x) = x_1^+ = \tilde{\pi}(x_1^+, 0)$. Assim,

$$I_Y(y) = I_Y(h(x)) = \tilde{\psi}(h(x_1^+), 0) = h(\tilde{\pi}(x_1^+, 0)) = h(I_X(x)) \in h(A) \cap M_Y$$

e o resultado segue. $\square$

A proposição a seguir mostra que a estabilidade também é preservada pelo homeomorfismo h .

Proposição 4.1.6 Seja $A \subset X$. Temos:

- a) se A for $\tilde{\pi}$ -estável, então $h(A)$ será $\tilde{\psi}$ -estável;
- b) se A for orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável, então $h(A)$ será orbitalmente $\tilde{\psi}$ -estável;
- c) se A for $\tilde{\pi}$ -estável segundo Bhatia-Hajek, então $h(A)$ será $\tilde{\psi}$ -estável segundo Bhatia-Hajek.

Demonstração:

- a) Suponhamos que exista $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, $\tilde{\psi}(B(h(x), \delta))$ não esteja contido em $B(h(A), \varepsilon)$. Desta forma, existe $h(\bar{x}) \in B(h(x), \delta)$ tal que

$$\tilde{\psi}(h(\bar{x}), T) \notin B(h(A), \varepsilon), \text{ para algum } T > 0,$$

isto é,

$$h(\tilde{\pi}(\bar{x}, T)) \notin B(h(A), \varepsilon).$$

Assim,

$$\tilde{\pi}(\bar{x}, T) \notin h^{-1}(B(h(A), \varepsilon)).$$

Além disso, $h^{-1}(B(h(A), \varepsilon))$ é uma vizinhança de A . Logo existe $\eta > 0$ tal que

$$A \subset B(A, \eta) \subset h^{-1}(B(h(A), \varepsilon)).$$

Pela $\tilde{\pi}$ -estabilidade de A , existe $\beta > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(\bar{x}, \beta)) \subset B(A, \eta),$$

o que é um absurdo já que $\tilde{\pi}(\bar{x}, T) \notin h^{-1}(B(h(A), \varepsilon))$. Portanto, o resultado segue.

- b) Para toda vizinhança U de A , existe uma vizinhança $\tilde{\pi}$ -invariante V de A tal que $V \subset U$. Daí, temos

$$h(A) \subset h(V) \subset h(U).$$

Como h é um homeomorfismo, então $h(U)$ e $h(V)$ são vizinhanças de $h(A)$. Daí, pela Proposição 4.1.4, $h(V)$ é $\tilde{\psi}$ -invariante.

- c) Para quaisquer $x \in A$ e $y \notin A$, existem vizinhanças V de x e W de y tais que

$$W \cap \tilde{\pi}(V, [0, +\infty)) = \emptyset.$$

Assim, como h é injetora, temos

$$h(W) \cap h(\tilde{\pi}(V, [0, +\infty))) = \emptyset,$$

ou seja,

$$h(W) \cap \tilde{\psi}(h(V), [0, +\infty)) = \emptyset,$$

onde $h(x) \in h(A)$, $h(y) \notin h(A)$, e $h(V)$ e $h(W)$ são vizinhanças, respectivamente, de $h(x)$ e $h(y)$.

É o resultado segue. □

Proposição 4.1.7 Se $\tilde{C}_X^+(p)$ for minimal, então $\tilde{C}_Y^+(h(p))$ também será minimal.

Demonstração: Devemos mostrar que $\tilde{C}_Y^+(h(p)) = \tilde{K}_Y^+(y)$, para cada $y \in \tilde{C}_Y^+(h(p)) \setminus M_Y$.

($\subset$) Seja $w \in \tilde{C}_Y^+(h(p))$. Então

$$w = \tilde{\psi}(h(p), T), \text{ para algum } T \geq 0.$$

Assim,

$$w = h(\tilde{\pi}(p, T)).$$

Como $\tilde{C}_X^+(p)$ é minimal, $h^{-1}(w) \in \tilde{K}_X^+(z)$, para todo $z \in \tilde{C}_X^+(p) \setminus M_X$. Daí, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$\tilde{\pi}(z, t_n) \rightarrow \tilde{\pi}(p, T), \text{ para todo } z \in \tilde{C}_X^+(p) \setminus M_X.$$

Como h é contínua,

$$h(\tilde{\pi}(z, t_n)) \rightarrow h(\tilde{\pi}(p, T)), \text{ para todo } z \in \tilde{C}_X^+(p) \setminus M_X,$$

isto é,

$$\tilde{\psi}(h(z), t_n) \rightarrow \tilde{\psi}(h(p), T), \text{ para todo } h(z) \in \tilde{C}_Y^+(h(p)) \setminus M_Y.$$

Portanto $w \in \tilde{K}_Y^+(y)$, para cada $y \in \tilde{C}_Y^+(h(p)) \setminus M_Y$.

($\supset$) Agora, tomemos $y \in \tilde{K}_Y^+(z)$, para cada $z \in \tilde{C}_Y^+(h(p)) \setminus M_Y$. Como h é um homeomorfismo, temos

$$\tilde{K}_Y^+(z) = h(\tilde{K}_X^+(h^{-1}(z))).$$

Logo $h^{-1}(y) \in \tilde{K}_X^+(h^{-1}(z))$. Mas $\tilde{K}_X^+(h^{-1}(z)) = \tilde{C}_X^+(p)$. Assim,

$$y \in h(\tilde{C}_X^+(p)),$$

ou seja,

$$y \in \tilde{C}_Y^+(h(p))$$

e o resultado segue. $\square$

4.2 Estabilidade Assintótica

Em [13], a estabilidade assintótica para sistemas semidinâmicos sem impulsos é apresentada e desenvolvida. Com base nesta teoria, definimos conceitos análogos para o caso impulsivo e verificamos que vários resultados ainda continuam válidos. No geral, as demonstrações não se alteraram muito.

No que segue, $(X, \pi; M, I)$ denota um sistema semidinâmico impulsivo.

Definição 4.2.1 Seja $H \subset X$. Definimos os conjuntos

$$\tilde{P}_W^+(H) = \{x \in X : \text{para cada vizinhança } U \text{ de } H \text{ existe uma sequência}$$

$$\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+, t_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } \tilde{\pi}(x, t_n) \in U\}$$

e

$$\tilde{P}^+(H) = \{x \in X : \text{para cada vizinhança } U \text{ de } H \text{ existe } \tau \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{tal que } \tilde{\pi}(x, [\tau, +\infty)) \subset U\}$$

O conjunto $\tilde{P}_W^+(H)$ será chamado de **região de atração fraca** de H segundo $\tilde{\pi}$ e o conjunto $\tilde{P}^+(H)$ será chamado de **região de atração** de H segundo $\tilde{\pi}$. Se $x \in \tilde{P}_W^+(H)$ ou $x \in \tilde{P}^+(H)$, diremos

que x será $\tilde{\pi}$ -fracamente atraído ou $\tilde{\pi}$ -atraído por H respectivamente.

Lema 4.2.2 Dado qualquer subconjunto $H \subset X$, temos:

- a) $\tilde{P}^+(H) \subset \tilde{P}_W^+(H)$;
- b) $\tilde{P}^+(H), \tilde{P}_W^+(H)$ são $\tilde{\pi}$ -invariantes.

Demonstração:

- a) Imediato.
- b) Provemos que $\tilde{P}^+(H)$ é $\tilde{\pi}$ -invariante. Tomemos $y \in \tilde{P}^+(H)$ e seja U uma vizinhança arbitrária para H . Logo existe $\tau \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\tilde{\pi}(y, [\tau, +\infty)) \subset U.$$

Agora, consideremos $z = \tilde{\pi}(y, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Segue que, para qualquer $t \in [\tau, +\infty)$,

$$\tilde{\pi}(z, t) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(y, \lambda), t) = \tilde{\pi}(y, t + \lambda) \in U.$$

Portanto, $\tilde{C}^+(y) \subset \tilde{P}^+(H)$.

De forma análoga, prova-se que $\tilde{P}_W^+(H)$ é $\tilde{\pi}$ -invariante. □

Lema 4.2.3 Para quaisquer $H \subset X$ e $x \in X$, são equivalentes as afirmações:

- a) $x \in \tilde{P}_W^+(H)$;
- b) existe uma seqüência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \rightarrow +\infty$, de maneira que ou $\tilde{\pi}(x, t_n) \in H$ ou $H \cap \tilde{L}^+(x) \neq \emptyset$.

Demonstração:

a) $\Rightarrow$ b). Seja $x \in \tilde{P}_W^+(H)$. Suponhamos que não exista qualquer seqüência $\{t_n\}$ em $\mathbb{R}_+$, $t_n \rightarrow +\infty$, com $\tilde{\pi}(x, t_n) \in H$. Desta forma, existe $\tau \in \mathbb{R}_+$ com $\tilde{C}^+(\tilde{\pi}(x, \tau)) \subset X \setminus H$. Se $H \cap \tilde{L}^+(x) = \emptyset$, teremos

$$\tilde{K}^+(\tilde{\pi}(x, \tau)) = \tilde{C}^+(\tilde{\pi}(x, \tau)) \cup \tilde{L}^+(\tilde{\pi}(x, \tau)) = \tilde{C}^+(\tilde{\pi}(x, \tau)) \cup \tilde{L}^+(x) \subset X \setminus H.$$

E como $\tilde{K}^+(\tilde{\pi}(x, \tau))$ é fechado, então $X \setminus \tilde{K}^+(\tilde{\pi}(x, \tau))$ é uma vizinhança de H . Conseqüentemente, não teremos $\tilde{\pi}(x, \tau) \in \tilde{P}_W^+(H)$, o que implica que $x \notin \tilde{P}_W^+(H)$, uma contradição.

b) $\Rightarrow$ a). Suponhamos que $x \notin \tilde{P}_W^+(H)$. Assim existem uma vizinhança aberta U de H e $\tau \in \mathbb{R}_+$ tais que $\tilde{\pi}(x, [\tau, +\infty)) \subset X \setminus U$. Como $X \setminus U$ é fechado, então

$$\tilde{K}^-(\tilde{\pi}(x, \tau)) \subset X \setminus U.$$

Isto implica que $H \cap \tilde{L}^+(x) = \emptyset$ e, para cada $t_n \rightarrow +\infty$, temos $\tilde{\pi}(x, t_n) \notin H$, o que contradiz a hipótese. Assim a prova está terminada. $\square$

Definição 4.2.4 Um subconjunto $H \subset X$ será chamado de $\tilde{\pi}$ -**atrator fraco**, se $\tilde{P}_W^+(H)$ for uma vizinhança de H , e será chamado de $\tilde{\pi}$ -**atrator**, se $\tilde{P}^+(H)$ for uma vizinhança de H .

Proposição 4.2.5 Se $H \subset X$ for um $\tilde{\pi}$ -atrator, então $\tilde{P}^+(H) = \tilde{P}_W^+(H)$.

Demonstração: Pelo Lema 4.2.2, basta mostrarmos que $\tilde{P}_W^+(H) \subset \tilde{P}^+(H)$. Tomemos $x \in \tilde{P}_W^+(H)$. Como $\tilde{P}^+(H)$ é uma vizinhança de H , existe $\tau \in \mathbb{R}_+$ tal que $\tilde{\pi}(x, \tau) \in \tilde{P}^+(H)$. Mas como $\tilde{P}^+(H)$ é $\tilde{\pi}$ -invariante, temos $x \in \tilde{P}^+(H)$. $\square$

Definição 4.2.6 Um subconjunto $H \subset X$ será chamado **assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável**, se ele for um $\tilde{\pi}$ -atrator fraco e orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável.

Teorema 4.2.7 Se $H \subset X$ for assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável, então H será um $\tilde{\pi}$ -atrator.

Demonstração: Pelo Lema 4.2.2, é suficiente mostrarmos que $\tilde{P}_W^+(H) \subset \tilde{P}^+(H)$. Seja $x \in \tilde{P}_W^+(H)$ e seja U uma vizinhança arbitrária de H . Pela $\tilde{\pi}$ -estabilidade de H , podemos encontrar uma vizinhança positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante V de H tal que $V \subset U$ e $V \subset \tilde{P}_W^+(H)$. Tomemos $\tau \in \mathbb{R}_+$ tal que $\tilde{\pi}(x, \tau) \in V$. Como V é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante, temos

$$\tilde{\pi}(x, [\tau, +\infty)) \subset V \subset U.$$

Desta forma, $x \in \tilde{P}^+(H)$ e, portanto, $\tilde{P}^+(H) = \tilde{P}_W^+(H)$ é uma vizinhança de H . $\square$

O corolário abaixo segue do Lema 4.2.2 e do Teorema 4.2.7.

Corolário 4.2.8 Um subconjunto $H \subset X$ será assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável se, e somente se, ele for orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável e um $\tilde{\pi}$ -atrator.

Teorema 4.2.9 Suponhamos que X seja localmente conexo. Seja H um subconjunto não-vazio compacto de X e suponhamos que cada componente de H seja I -invariante e que $\tilde{P}^+(H)$ seja aberto. Então H será assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável se, e somente se, H admitir um número finito de componentes, cada qual assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável.

Para demonstramos o Teorema 4.2.9, vamos precisar dos lemas dados a seguir.

Lema 4.2.10 Suponhamos que X seja um espaço localmente conexo, que $H \subset X$ seja um $\tilde{\pi}$ -atrator e que $\tilde{P}^+(H)$ seja aberto. Se A_1 for uma componente I -invariante de $\tilde{P}^+(H)$, então $H_1 := A_1 \cap H$ será não-vazio e um $\tilde{\pi}$ -atrator, com $A_1 = \tilde{P}^+(H_1)$.

Demonstração: Como X é localmente conexo, cada componente de $\tilde{P}^+(H)$ é aberta. Além disso, os conjuntos A_1 e $A_2 = \tilde{P}^+(H) \setminus A_1$ são conjuntos abertos separados, isto é, $\bar{A}_1 \cap A_2 = A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$, (Kelley [1], pag. 61).

Seja $H_2 = A_2 \cap H$. Notemos que $H = H_1 \cup H_2$. Mostremos que $H_1 \neq \emptyset$. Se H_1 for vazio, então A_2 será uma vizinhança aberta de H . Seja $x \in A_1$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $\phi(x) < +\infty$. Como $[0, \phi(x)]$ é conexo, segue que

$$\pi(x, [0, \phi(x)]) \subset A_1.$$

Logo $\tilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) = \pi(x, [0, \phi(x))) \subset A_1$ e $x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in A_1$. Sendo A_1 um conjunto I -invariante, temos $x_1^+ = I(x_1) \in A_1$. Prosseguindo desta maneira, teremos $\tilde{K}^+(x) \subset \bar{A}_1$, ou seja, $\tilde{K}^+(x) \cap A_2 = \emptyset$, o que é uma contradição, pois A_2 é uma vizinhança de H e $x \in \tilde{P}^+(H)$. Assim $H_1 \neq \emptyset$. E por um argumento análogo, $H_2 \neq \emptyset$.

Notemos pelo que foi feito acima que A_1 é $\tilde{\pi}$ -invariante. Além disso, cada ponto de A_1 é atraído por H_1 . Entretanto, se algum ponto $x \in A_1$ fosse atraído por H_2 , então existiria um $\tau \in \mathbb{R}_+$ tal que $\tilde{\pi}(\pi(x, \tau), \mathbb{R}_+) \subset A_2$. Mas isto contradiz o fato de A_1 ser positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante. Assim, concluímos que $A_1 \subset \tilde{P}^+(H_1)$. Como A_1 é aberto, $\tilde{\pi}$ -invariante, contém H_1 e vale $\tilde{P}^+(H_1) \subset \tilde{P}^+(H) = A_1 \cup A_2$, então $A_1 \supset \tilde{P}^+(H_1)$. Deste modo, $A_1 = \tilde{P}^+(H_1)$ e H_1 é um $\tilde{\pi}$ -atrator e a prova está completa. $\square$

Lema 4.2.11 Sejam H_1 e H_2 separados por vizinhanças. Se $H_1 \cup H_2$ for assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável, então H_1 e H_2 também o serão. Além disso, $\tilde{P}^+(H_1)$ e $\tilde{P}^+(H_2)$ são disjuntos.

Demonstração: Para $k = 1, 2$, seja U_k uma vizinhança aberta de H_k com as U_k 's disjuntas. Então $U_1 \cup U_2$ será uma vizinhança aberta de $H := H_1 \cup H_2$. Pela $\tilde{\pi}$ -estabilidade de H , existe uma vizinhança positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante V de H . Daí, $V_k := V \cap U_k$ será uma vizinhança positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante de H_k , com $V_k \subset U_k$, $k = 1, 2$, e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Assim cada H_k é orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável. Como cada V_k pode ser escolhida como sendo um subconjunto de $\tilde{P}^+(H)$, podemos ver que $V_k \subset \tilde{P}^+(H_k)$. Portanto cada H_k será um $\tilde{\pi}$ -atrator e, conseqüentemente, será assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável (Corolário 4.2.8). Finalmente, $\tilde{P}^+(H_1) \cap \tilde{P}^+(H_2) = \emptyset$. Caso contrário, existiriam $x \in X$ e $\tau \in \mathbb{R}_+$ tais que $\tilde{\pi}(x, \tau) \in U_1$ e $\tilde{\pi}(x, \tau) \in U_2$. Mas isto é impossível, já que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Portanto, $\tilde{P}^+(H_1)$ e $\tilde{P}^+(H_2)$ são disjuntos. $\square$

Agora, estamos em condições de provar o Teorema 4.2.9.

Demonstração: Mostraremos, apenas, que H admite um número finito de componentes assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estáveis, pois a recíproca é imediata.

Suponhamos que H seja um subconjunto não-vazio, compacto e assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável de X . Como X é localmente conexo, as componentes de $\tilde{P}^+(H)$ formam uma cobertura aberta para H . Pelo Lema 4.2.10, cada componente de $\tilde{P}^+(H)$ intercepta H em subconjuntos não-vazios. Pela compacidade de H , existe somente um número finito de componentes de $\tilde{P}^+(H)$, digamos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$. Definamos $H_k = A_k \cap H$, para $k = 1, 2, \dots, m$. Então cada H_k é não-vazio e um $\tilde{\pi}$ -atrator, com $A_k = \tilde{P}^+(H_k)$ (Lema 4.2.10). Por conseguinte, $H_1, H_2, H_3, \dots, H_m$ são componentes de H . Além disso, cada H_k é compacto e pelo Lema 4.2.11, estes H_k são assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável, já que H também o é. $\square$

A próxima definição diz que o conjunto limite de uma órbita em um sistema semidinâmico impulsivo é um atrator.

Definição 4.2.12 Diremos que a órbita $\tilde{C}^+(x)$, $x \in X$, **aproxima-se uniformemente** de seu conjunto limite $\tilde{L}^+(x)$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir $T = T(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\tilde{L}^+(x) \subset B(\tilde{\pi}(x, [t, t+T]), \varepsilon),$$

para cada $t \in \mathbb{R}_+$.

O teorema a seguir mostra que, se a órbita de um ponto em X possuir fecho compacto e conjunto limite minimal, então poderemos aproximar uniformemente esta órbita de seu conjunto limite. E também vale a recíproca. O caso sem impulso pode ser encontrado em [2].

Teorema 4.2.13 Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Suponhamos que $\tilde{K}^+(p)$ seja compacto, que $p \in X \setminus M$ e que $\tilde{L}^+(p) \cap M = \emptyset$. Então $\tilde{L}^+(p)$ será minimal se, e somente se, $\tilde{C}^+(p)$ aproximar-se uniformemente de seu conjunto limite $\tilde{L}^+(p)$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\tilde{C}^+(p)$ não se aproxime uniformemente de seu conjunto limite $\tilde{L}^+(p)$. Então existem $\varepsilon > 0$, uma seqüência de intervalos $\{(t_n, \tau_n)\}$ e uma seqüência $\{y_n\}$ em $\tilde{L}^+(p)$ tais que $t_n \rightarrow +\infty$, $(\tau_n - t_n) \rightarrow +\infty$, $y_n \rightarrow y \in \tilde{L}^+(p)$ e $y_n \notin B(\tilde{\pi}(p, [t_n, \tau_n]), \varepsilon)$.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\rho(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo n . Então, para n arbitrário, temos

$$\rho(y, \tilde{\pi}(p, [t_n, \tau_n])) \geq \rho(y_n, \tilde{\pi}(p, [t_n, \tau_n])) - \rho(y_n, y) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Agora, consideremos a seqüência de pontos $\{\omega_n\}$, onde

$$\omega_n = \tilde{\pi}(p, t'_n), \quad \text{com } t'_n = \frac{t_n + \tau_n}{2}.$$

Claramente $t'_n \rightarrow +\infty$. Também podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\tilde{\pi}(p, t'_n) \rightarrow z \in \tilde{L}^+(p),$$

já que $\tilde{K}^+(p)$ é compacto.

Como $\tilde{L}^+(p)$ é minimal e $z \notin M$, segue que

$$\tilde{L}^+(p) = \tilde{K}^+(z).$$

E sendo

$$\{y_n\} \subset \tilde{L}^+(p) = \tilde{K}^+(z),$$

segue que, para cada n , existe uma sequência $\{\lambda_k^n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda_k^n \rightarrow +\infty$, quando $k \rightarrow +\infty$, e

$$\tilde{\pi}(z, \lambda_k^n) \rightarrow y_n, \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

Daí, $\rho(\tilde{\pi}(z, \lambda_k^n), y_n) < \varepsilon$, para k suficientemente grande. E como $y_n \rightarrow y$, existe um índice N tal que

$$\rho(\tilde{\pi}(z, \lambda_k^n), y) < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para } k > N.$$

Seja, então, $M > N$ tal que

$$\rho(\tilde{\pi}(z, \lambda_M^M), y) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \phi(z_i^+) < \lambda_M^M < \phi(z_{i+1}^+)$$

para algum i . Segue das continuidades de I e de π que existe $\sigma > 0$ tal que, se $\rho(z, w) < \sigma$, então

$$\rho(\tilde{\pi}(z, \lambda_M^M), \tilde{\pi}(w, \lambda_M^M)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Escolhendo $\bar{N}$ suficientemente grande tal que $\rho(z, \omega_{\bar{N}}) < \sigma$ e $\lambda_M^M < \frac{\tau_{\bar{N}} - t_{\bar{N}}}{2}$, temos

$$\rho(\tilde{\pi}(z, \lambda_M^M), \tilde{\pi}(\omega_{\bar{N}}, \lambda_M^M)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

e, daí,

$$\rho(y, \tilde{\pi}(\omega_{\bar{N}}, \lambda_M^M)) \leq \rho(y, \tilde{\pi}(z, \lambda_M^M)) + \rho(\tilde{\pi}(z, \lambda_M^M), \tilde{\pi}(\omega_{\bar{N}}, \lambda_M^M)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3},$$

Mas $\tilde{\pi}(\omega_{\bar{N}}, \lambda_M^M) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(p, t_{\bar{N}}'), \lambda_M^M) = \tilde{\pi}(p, t_{\bar{N}}' + \lambda_M^M)$, com

$$t_{\bar{N}} < \frac{t_{\bar{N}} + \tau_{\bar{N}}}{2} < t_{\bar{N}}' + \lambda_M^M < \frac{t_{\bar{N}} + \tau_{\bar{N}}}{2} + \frac{\tau_{\bar{N}} - t_{\bar{N}}}{2} = \tau_{\bar{N}},$$

Assim $\tilde{\pi}(\omega_N, \lambda_M^M) \in \tilde{\pi}(p, [t_n, \tau_n])$, o que é um absurdo, já que

$$\rho(y, \tilde{\pi}(p, [t_n, \tau_n])) > \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Portanto $\tilde{C}^+(p)$ aproxima-se uniformemente de seu conjunto limite $\tilde{L}^-(p)$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\tilde{L}^+(p)$ não seja minimal. Então

$$\tilde{L}^+(p) \neq \tilde{K}^+(y), \text{ para algum } y \in \tilde{L}^+(p) \setminus M.$$

Logo, existe $z \in \tilde{L}^+(p)$ tal que $z \notin \tilde{K}^+(y)$.

Seja $\varepsilon = \rho(z, \tilde{K}^+(y)) > 0$. Pela hipótese, segue da aproximação uniforme que existe $T > 0$ tal que

$$\tilde{L}^+(p) \subset B(\tilde{\pi}(p, [t, t+T]), \varepsilon/2), \text{ para } t \geq 0. \quad (4.1)$$

Além disso, existe $\delta > 0$ tal que, se $\rho(y, w) < \delta$, então

$$\rho(\tilde{\pi}(y, t), \tilde{\pi}(w, t)) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } t < T \text{ e } \phi(y_i^+) < t < \phi(y_{i+1}^+), \quad (4.2)$$

para algum $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Como $y \in \tilde{L}^+(p)$, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$\tilde{\pi}(p, t_n) \rightarrow y.$$

Assim, existe um índice $N > 0$ suficientemente grande tal que

$$\rho(\tilde{\pi}(p, t_N), y) < \delta. \quad (4.3)$$

Como (4.1) vale, em particular, temos

$$\tilde{L}^-(p) \subset B(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(p, t_N), [0, T]), \varepsilon/2).$$

E sendo $z \in \tilde{L}^+(p)$, segue que

$$\rho(z, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } x = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(p, t_N), \tau),$$

para qualquer $\tau \in [0, T]$.

Tomemos $\tau \in [0, T]$ tal que

$$\tau \neq \phi(y_i^+), \quad \text{para todo } i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}. \quad (4.4)$$

De (4.3) e (4.4), tendo em vista (4.2), obtemos

$$\rho(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(p, t_N), \tau), \tilde{\pi}(y, \tau)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Desde modo,

$$\rho(z, \tilde{\pi}(y, \tau)) \leq \rho(z, x) + \rho(x, \tilde{\pi}(y, \tau)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

o que contradiz o fato de que $\rho(z, \tilde{K}^+(y)) = \varepsilon$. Portanto $\tilde{L}^+(p)$ é minimal. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] N. P. Bhatia, O. Hajek, *Local semi-dynamical systems*, Lecture Notes in Mathematics 90, Springer-Verlag, 1970.
- [2] N. P. Bhatia, G. P. Szegö, *Dynamical systems: Stability theory and applications*, Lecture Notes in Mathematics 35, Springer-Verlag, 1967.
- [3] E. M. Bonotto, M. Federson, *Topologic Conjugation and Asymptotic Stability in Impulsive Semidynamical Systems*, Notas do ICMC 211, 2004.
- [4] K. Ciesielski, *Sections in semidynamical systems*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 40, (1992), 297-307.
- [5] K. Ciesielski, *On semicontinuity in impulsive systems*, to appear.
- [6] K. Ciesielski, *On stability in impulsive dynamical systems*, Proceedings of the Conference Topological Methods in Differential Equations (Plovdiv, 1993), 31-38, VSP, Utrecht, 1994.
- [7] L. Fichmann, E. M. Sallum, Jr. M. Barone, *Sistemas Dinâmicos: Noções Básicas*, IME-USP, 2001.
- [8] S. K. Kaul, *On impulsive semidynamical systems*, J. Math. Anal. Appl., 150, (1990), 120-128.
- [9] S. K. Kaul, *On impulsive semidynamical systems II, Recursive properties*, Nonlinear Anal., 16, (1991), 635-645.
- [10] S. K. Kaul, *On impulsive semidynamical systems III, Lyapunov stability*, Recent Trends in Differential Equations, 335-345, World Sci. Ser. Appl. Anal., 1. Publishing, River Edge, NJ, 1992.

- [11] S. K. Kaul, *Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems*. J. Appl. Math. Stochastic Anal., 7(4), (1994), 509-523.
- [12] V. Lakshmikanthan, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, Modern Applied Math., 6, World Scientific, 1989.
- [13] S. H. Saperstone, *Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 37, (1981), 56-61.