IMERSÕES DE S^{n-1} EM R^n COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

Roberta Godoi Wik Atique

Orientador: Prof. Dr. Antonio Conde

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

S Ã O C A R L O S - SP

1990

Trabalho realizado com Auxílio do CNPq

Ao Evandro

Aos meus pais

Agradeço ao Prof. Antonio Conde pois através de suas idéias, sugestões e incentivo colaborou de forma decisiva para a realização desta dissertação.

Desejo também agradecer ao Prof. José Alberto Cuminato pelas úteis figuras obtidas no computador.

Finalmente agradeço à Ivani C. Tagliadelo Bragatto pelo trabalho de datilografia.

Ī N D I C E

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 1 4

CAPÍTULO 2 17

CAPÍTULO 3 63

CAPÍTULO 4 75

REFERÊNCIAS 79

INTRODUÇÃO

Dada uma imersão $f:S \to R^3$ de uma superfície S de classe c^∞ em R^3 e fixado um campo normal $V:S \to S^2$ c^∞ podemos definir a aplicação de Gauss que a cada ponto p de S associa o vetor do campo normal a S em p. Curvatura média é a metade do traço da derivada desta aplicação. Observe que a curvatura média depende apenas localmente de f, isto é, de como f está dispondo S (localmente) em R^3. Se pedirmos entretanto que a curvatura média seja constante em S então aspectos globais de S passam a ter influência decisiva para a existência ou não de f. Se S é dada como um gráfico de $z = g(x,y)$, S tem curvatura média constante quando g satisfaz a seguinte equação diferencial parcial

$$g_{xx}(1+g_y^2) - 2g_x g_y g_{xy} + g_{yy}(1+g_x^2) - \frac{1}{a}(1+g_x^2+g_y^2)^{3/2} = 0$$

As esferas (redondas) e os cilindros são exemplos de superfícies de curvatura média constante. Em 1841, C. Delaunay construiu outros exemplos. Ele percebeu que sendo $f(S)$ com simetria de revolução, a equação diferencial da curvatura média constante se transforma numa equação mais simples. Mas Delaunay não somente encontrou a solução geral como deu uma construção geométrica muito simples de sua curva geratriz, ou seja, que ela é descrita pelo foco de uma cônica que rola "sem deslizar" sobre uma reta.

Porém as superfícies de Delaunay não são compactas (a menos de um caso limite que dá esferas). Outros exemplos de superfícies compactas e sem bordo de curvatura média constante além da esfera são extremamente difíceis de se imaginar, na realidade pensava-se não existir. Em 1951, H. Hopf provou que se $f:S^2 \to R^3$ é uma *imersão* com curvatura média constante então $f(S^2)$

é uma esfera redonda (o domínio de f é uma esfera!). Em 1958, A.D. Alexandrov provou que se $f:M^n \to R^{n+1}$ é *mergulho* onde M^n é compacta sem bordo com curvatura média constante então $f(M^n)$ é uma esfera redonda (não há hipótese de que o domínio de f seja esfera e sim que f seja mergulho). Estes fatos levaram à crença de que fosse válida a seguinte afirmação conhecida por conjectura de Hopf: Uma imersão $f:M^2 \to R^3$ de uma superfície compacta e sem bordo, em R^3, com curvatura média constante é uma esfera redonda. Observe que o domínio de f não é de saída uma esfera! Em 1983, inspirados no trabalho de Delaunay que impõe simetrias na superfície, W.Y. Hsiang, Z.H. Teng e W.C. Yu, construiram imersões de S^{n-1} em R^n com curvatura média constante, que não são esferas redondas, estudando hipersuperfícies M^{n-1} imersas em R^n de curvatura média constante invariantes sob a ação de $O(p) \times O(q)$, $p + q = n$.

O procedimento é o seguinte: o grupo $O(p) \times O(q)$ atua naturalmente em $R^p \times R^q = R^{p+q} = R^n$. Dado um ponto qualquer z de R^n este se decompõe de modo único em $z = (u,v)$ com u em R^p e v em R^q. A órbita de z por $O(p) \times O(q)$ é um produto de esferas

$$S^{p-1}_{|u|}(0) \times S^{q-1}_{|v|}(0)$$

a primeira de centro zero e raio $|u|$ e a segunda de centro zero e raio $|v|$. Os raios $|u|$ e $|v|$ caracterizam tal órbita e isto faz com que o espaço das órbitas de R^n pela ação de $O(p) \times O(q)$ seja naturalmente identificado com o quadrante positivo de R^2.

$$Q = \{(x,y) \in R^2 / x \geqq 0 \text{ e } y \geqq 0\}$$

temos então $R^n/O(p) \times O(q) \simeq Q$.

Se $f:M^{n-1} \to R^n$ é uma imersão cuja imagem é invariante pela ação de tal grupo vamos obter $M^{n-1}/O(p) \times O(q)$ naturalmente identificado a uma curva γ no espaço das órbitas que é Q. A equação da curvatura média constante para M^{n-1} em R^n se reduz a uma equação em Q a qual γ deve satisfazer e vice-versa.

Descreveremos o caso $p = q = 2$ mais detalhadamente devido à visão geométrica e, uma vez entendido, fica fácil generalizá-lo.

Este trabalho mostra que a conjectura de Hopf generalizada para $n > 3$ é falsa. Em 1986, H. Wente deu um contra-exemplo para a referida conjectura.

CAPÍTULO I

Neste capítulo estudaremos as superfícies desenvolvidas por C. Delaunay, isto é, superfícies de revolução cuja curva geratriz é descrita pelo foco de uma cônica "rolando sem deslizar" sobre uma reta.

Seja S uma superfície de revolução cuja curvatura média é constante e igual a $1/2a$. Suponhamos S obtida pela rotação da curva $\alpha(s) = (x(s),y(s))$, s comprimento de arco, em torno do eixo x. Observemos que S é invariante sob a ação de $SO(1) \times SO(2) = \{1\} \times S^1 = S^1$.

Procuramos as equações de α.

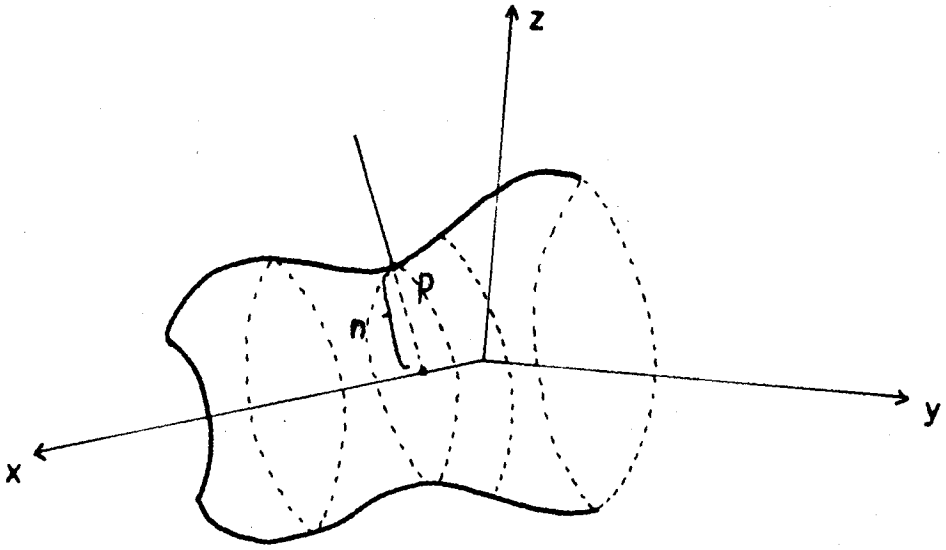
Seja $r(u,s) = (x(s), y(s)\cos u, y(s)\operatorname{sen} u)$ uma parametrização de S. Temos a seguinte

1.1 Proposição:

Os raios de curvaturas principais num ponto $p = r(u_o,s_o)$ de S são o raio de curvatura ρ da curva $\alpha_{u_o}(s) = r(u_o,s)$ em s_o e o comprimento n do segmento da reta normal à superfície S em p compreendido entre p e o eixo x. (Numa superfície de revolução uma reta normal e o eixo de revolução são concorrentes).

Demonstração:

1.2



Se E,F,G e e,f,g são respectivamente os coeficientes da primeira forma quadrática e da segunda forma quadrática de S em p temos:

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = y_o^2$$

$$F = \langle r_u, r_s \rangle = 0$$

$$G = \langle r_s, r_s \rangle = x_o'^2 + y_o'^2 = 1$$

$$e = \langle N, r_{uu} \rangle = - x_o' y_o$$

$$f = \langle N, r_{us} \rangle = 0$$

$$g = \langle N, r_{ss} \rangle = x_o' y_o'' - x_o'' y_o'$$

$$N = \frac{r_u \wedge r_s}{\| r_u \wedge r_s \|} = (- y_o', x_o' \cos u_o, x_o' \operatorname{sen} u_o)$$

onde N é um vetor normal a S em p e $x_o' = x'(s_o), y_o' = y'(s_o)$.

As curvaturas principais em p são dadas por:

$$k_1 = \frac{e}{E} = - \frac{x_o'}{y_o}$$

$$k_2 = \frac{g}{G} = x_o' y_o'' - x_o'' y_o'$$

logo $\rho = \dfrac{1}{k_2}$

Temos para equação da reta normal

$$P(\lambda) = (x_o, y_o \cos u_o, y_o \operatorname{sen} u_o) + \lambda(-y'_o, x'_o \cos u_o, x'_o \operatorname{sen} u_o)$$

A intersecção da reta normal com o eixo x é dada por $\lambda_o = -\dfrac{y_o}{x'_o}$

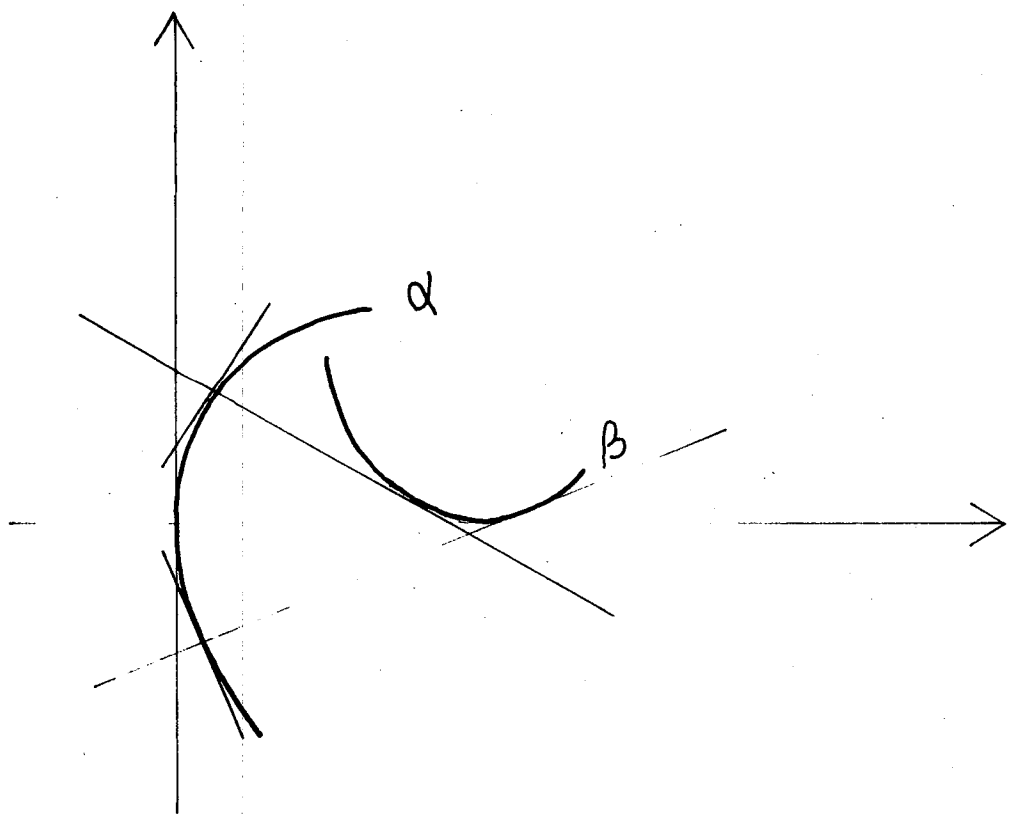
donde $$n = \left| -\frac{y_o}{x'_o} \right| = \left| \frac{1}{k_1} \right|$$

Tendo em vista que a curvatura média é a metade da soma das curvaturas principais temos

1.3 $$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{n} = \frac{1}{a}$$

Seja $\beta(s) = \alpha(s) + \dfrac{1}{k}\eta(s)$ onde k e η são a curvatura e a normal de α respectivamente; β é a evoluta de α, isto é, as tangentes a β são normais a α.

1.4



Temos ainda que

$$\beta'(s) = m.\eta(s)$$

onde $m = < \beta'(s), \eta(s) >$. Mas

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \frac{1}{k}\eta'(s) - \frac{k'}{k^2}\eta(s)$$

logo $m = -\dfrac{k'}{k^2}$ e portanto

$$\beta'(s) = -\frac{k'}{k^2}\eta(s)$$

Seja $\bar{s}$ o comprimento de arco de β.

$$\bar{s}(s) = \int_{s_o}^{s} |\beta'(s)|ds = -\frac{1}{k(s)} + \frac{1}{k(s_o)} = -\rho + b$$

onde $b = \dfrac{1}{k(s_o)}$ que é constante. Logo

1.5 $$\rho = b - \bar{s}$$

Seja $(\bar{x}(\bar{s}), \bar{y}(\bar{s}))$ uma parametrização por comprimento de arco de β. Temos a seguinte

1.6 Proposição:

O comprimento $\bar{n}$ do segmento da reta tangente à evoluta no ponto $(\bar{x},\bar{y})$ compreendido entre este ponto e o eixo x é dado por

$$\bar{n} = \bar{y}\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)^{-1}$$

Demonstração:

Consideremos a seguinte parametrização da reta tangente a β

$$P(\lambda) = (\bar{x},\bar{y}) + \lambda\left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}}, \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)$$

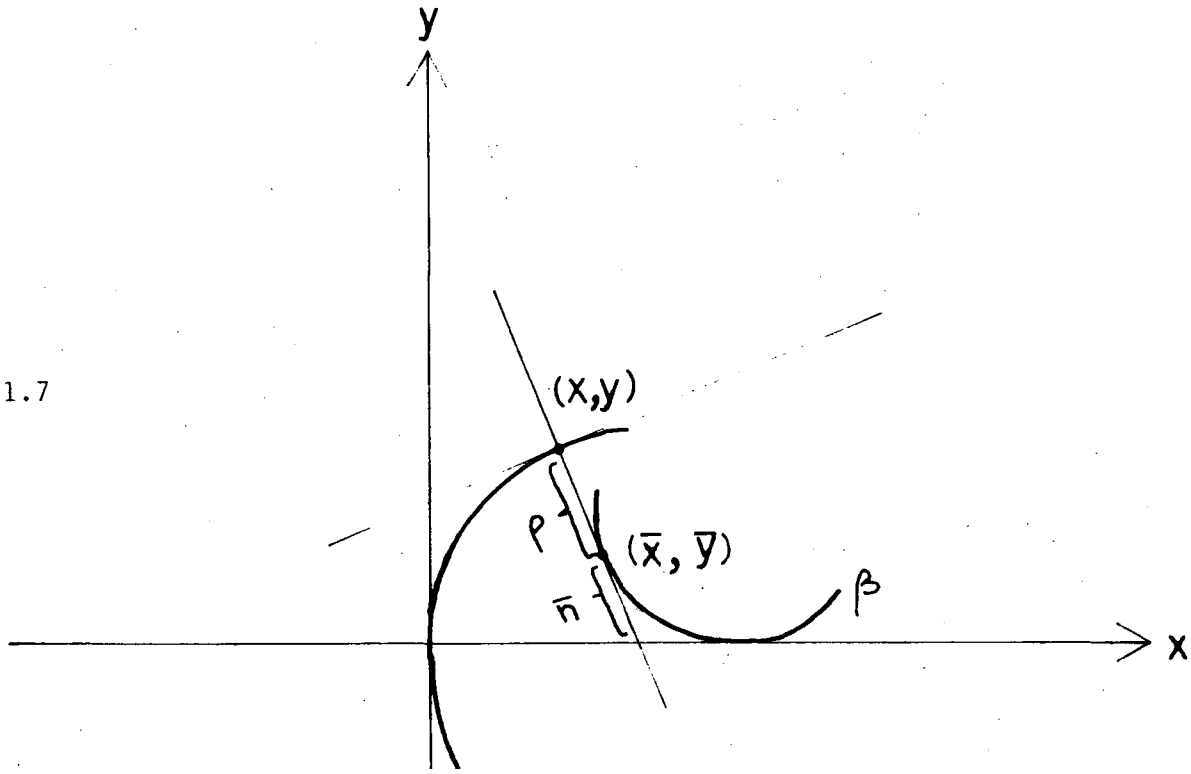
A intersecção com o eixo dos x é dada por:

$$\lambda = -\bar{y}\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)^{-1}$$

logo

$$\bar{n} = |\lambda| = \bar{y}\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)^{-1}$$

1.7



Temos, portanto, $n = \rho + \bar{n}$ ou

$$n = b - \bar{s} + \bar{y} \cdot \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)^{-1}$$

pois a normal a S coincide com a normal a $\alpha_u(s)$.

De 1.3 e 1.5 vem

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{n} = \frac{1}{b-\bar{s}} + \frac{1}{b-\bar{s}+\bar{y}(d\bar{y}/d\bar{s})^{-1}}$$

ou

$$\frac{1}{b-\bar{s}+\bar{y}(d\bar{y}/d\bar{s})^{-1}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b-\bar{s}} = \frac{b-\bar{s}-a}{a(b-\bar{s})}$$

donde $$b-\bar{s}+\bar{y} \cdot \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)^{-1} = \frac{a(b-\bar{s})}{b-\bar{s}-a}$$

logo $$\bar{y} \cdot \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)^{-1} = \frac{a(b-\bar{s})}{b-\bar{s}-a} - (b-\bar{s}) = \frac{(b-\bar{s})(2a-b+\bar{s})}{b-\bar{s}-a}$$

o que nos dá a seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \frac{b-\bar{s}-a}{(b-\bar{s})(2a-b+\bar{s})}$$

Separando as variáveis e integrando temos

$$\ell n\bar{y} = \frac{1}{2}\,\ell n(b - \bar{s})(2a - b + \bar{s}) + c_1$$

onde c_1 é uma constante. Logo

1.8 $$\bar{y}^2 = c(b - \bar{s})(2a - b + \bar{s}) \qquad (c = \text{constante})$$

e resolvendo esta equação para $\bar{s}$ obtemos

$$- c\bar{s}^2 + 2c(b - a)\bar{s} + 2abc - b^2c - \bar{y}^2 = 0$$

ou
$$\bar{s} = \frac{- 2c(b - a) \pm (4c^2(b - a)^2 + 4c(2abc - b^2c - \bar{y}^2))^{1/2}}{-2c}$$

donde
$$\bar{s} = (b - a) + \sqrt{a^2 - \bar{y}^2/c}$$

Derivando em relação a $\bar{s}$ temos

$$1 = - \frac{\bar{y}}{c\sqrt{a^2 - \bar{y}^2/c}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}$$

donde
$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = - \frac{c\sqrt{a^2 - \bar{y}^2/c}}{\bar{y}}$$

e como
$$\left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)^2 = 1 \quad \text{temos}$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \frac{\sqrt{\bar{y}^2(1 + c) - a^2c^2}}{\bar{y}}$$

Seja $\psi(s)$ o ângulo que a tangente à curva geratriz α faz com o eixo x. Seja $\bar{s}$ tal que a tangente a $\beta(\bar{s})$ é normal a $\alpha(s)$. Segue que

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos(\psi(\bar{s}) - \pi/2) = \operatorname{sen}\psi(\bar{s})$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \operatorname{sen}(\psi(\bar{s}) - \pi/2) = - \cos\psi(\bar{s})$$

daí,
$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = - \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} \cdot \operatorname{tg}\psi(\bar{s})$$

e
$$\frac{\sqrt{\bar{y}^2(1+c) - a^2c^2}}{\bar{y}} = \operatorname{sen}\psi$$

Portanto

$$\bar{x} = -\int tg\psi(\bar{s}) . \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} d\bar{s}$$

$$\bar{y} = \frac{ac}{\sqrt{1+c-sen^2\psi}} \qquad (1)$$

Aplicando o método de integração por partes resulta

$$\bar{x} = -\int tg\psi(\bar{s}) \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} d\bar{s} = -\bar{y}tg\psi + \int \frac{\bar{y}(\bar{s})}{\cos^2\psi(\bar{s})} . \frac{d\psi(\bar{s})}{d\bar{s}}$$

Substituindo $\bar{y}$ por seu valor temos

$$\bar{x} = d - \frac{actg\psi}{\sqrt{1+c-sen^2\psi}} + \int_o^\psi \frac{ac}{\cos^2\psi\sqrt{1+c-sen^2\psi}} d\psi \qquad (2)$$

onde d é uma constante.

As equações (1) e (2) representam a evoluta. A partir daí é fácil deduzir equações para x e y em função de ψ. Com efeito

$$x = \bar{x} + \rho \frac{d\bar{x}}{d\bar{s}}$$

$$y = \bar{y} + \rho \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}$$

De 1.5 e 1.8 vem $y^2 = c.\rho(2a-\rho)$ donde $\rho = a-\sqrt{a^2-\bar{y}^2}/c$

Substituindo $d\bar{x}/d\bar{s}$ por $sen\psi$ e $d\bar{y}/d\bar{s}$ por $-cos\psi$ obtemos as equações da curva geratriz α:

$$x(s) = d+asen\psi-atg\psi\sqrt{1+c-sen^2\psi} + \int_o^\psi \frac{ac}{\cos^2\psi\sqrt{1+c-sen^2\psi}} d\psi$$

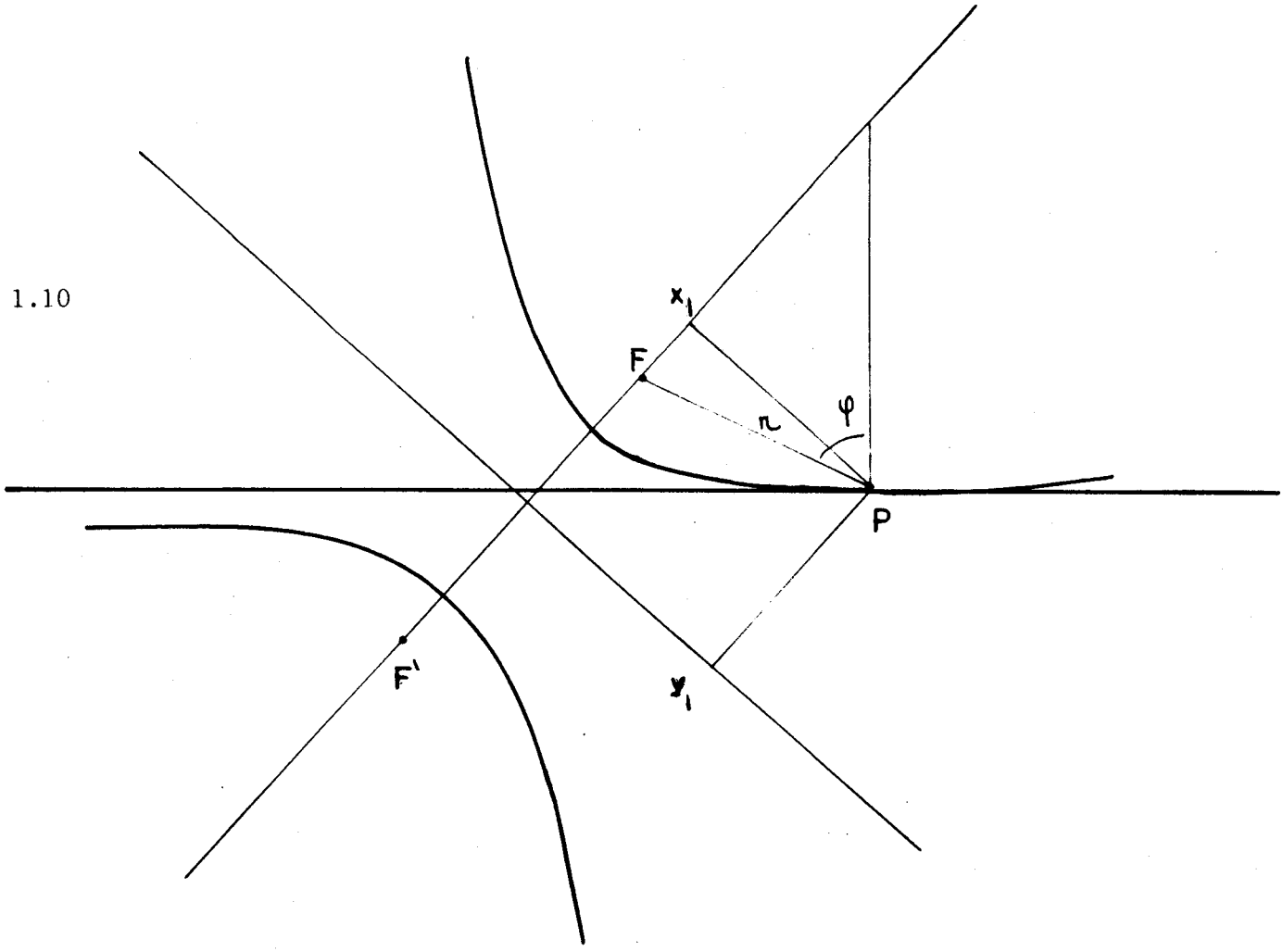
1.9

$$y(s) = -acos\psi + a\sqrt{1 + c - sen^2\psi}$$

A questão está completamente resolvida sob o ponto de vista analítico mas podemos ir mais longe interpretando geometricamente o resultado. Delaunay percebeu que a integral que aparece em x é da mesma forma que aquela que aparece no cálculo do comprimento de arco de uma elipse ou hipérbole. A partir disto ele verificou que, de fato, a curva representada pelas equações em 1.9 é descrita pelo foco de uma cônica "rolando sem deslizar" sobre o eixo dos x. Para demonstrar este fato, procuraremos as equações desta curva e verificaremos que elas coincidem com 1.9.

Suponhamos uma hipérbole "rolando sem deslizar" sobre o eixo x e consideremos esta curva numa posição qualquer, como abaixo 1.10. Seja P o ponto de contato da hipérbole com o eixo x, s o comprimento de arco compreendido entre o vértice e o ponto P, r a distância de P ao foco e ψ o ângulo que o vetor $\vec{PF}$ faz com a normal à hipérbole no ponto P.

1.10



As coordenadas do foco F são

1.11

$$x = \beta + s - r \operatorname{sen}\psi$$

$$y = r \cos\psi$$

onde β é uma constante.

Sejam x_1 e y_1 as coordenadas de P relativas aos eixos da hipérbole, a o semi-eixo transversal e e a excentricidade da hipérbole. Mas e é a razão da distância de P a F pela distância de P à reta $x = a/e$ (diretriz), isto é,

$$e = \frac{r}{x_1 - a/e} \tag{3}$$

donde $$r = e\,x_1 - a$$

Desde que a tangente à hipérbole no ponto P é a bissetriz do ângulo $F'PF$ então $\measuredangle F'PF = 2(\pi/2 - \psi) = \pi - 2\psi$.

Aplicando a lei dos cossenos ao triangulo $F'PF$ e lembrando que $2a = |d(P,F') - d(P,F)|$ temos

$$4a^2e^2 = r^2 + (2a + r)^2 - 2r(2a + r)\cos(\pi-2\psi)$$

daí, $$a^2(e^2 - 1) = (2ar + r^2)\cos^2\psi \tag{4}$$

De (3) e (4) temos

$$a^2(e^2 - 1) = (e^2x_1^2 - a^2)\cos^2\psi$$

ou $$x_1 = \frac{a\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi}}{e\cos\psi}$$

Seja $Q = (x_1,0)$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo FPQ temos

$$r^2 = y_1^2 + (x_1 - ae)^2$$

ou $$y_1^2 = (x_1^2 - a^2)(e^2 - 1) = \frac{a^2\operatorname{sen}^2\psi(e^2 - 1)^2}{e^2\cos^2\psi}$$

donde $$y_1 = \frac{a(e^2 - 1)}{e}\operatorname{tg}\psi$$

portanto $$x_1 = \frac{a}{e\cos\psi}\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi}$$

$$y_1 = \frac{a(e^2 - 1)}{e} \operatorname{tg}\psi$$

logo $$r\cos\psi = a\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi} - a\cos\psi$$

$$r\operatorname{sen}\psi = a\operatorname{tg}\psi\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi} - a\operatorname{sen}\psi$$

como $$ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2}$$

$$\frac{dx_1}{d\psi} = \frac{a\operatorname{sen}\psi(e^2 - 1)}{e\cos^2\psi\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi}}$$

$$\frac{dy_1}{d\psi} = \frac{a(e^2 - 1)\sec^2\psi}{e}$$

temos $$\frac{ds}{d\psi} = \frac{a(e^2 - 1)}{\cos^2\psi\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi}}$$

ou $$s = \int_{\psi_o}^{\psi} \frac{a(e^2 - 1)}{\cos^2\psi\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi}}\, d\psi$$

Substituindo o valor acima em 1.11 temos

$$x = \beta + s - r\operatorname{sen}\psi = \beta + a\operatorname{sen}\psi - a\operatorname{tg}\psi\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi} + \int_{\psi_o}^{\psi} \frac{a(e^2 - 1)}{\cos^2\psi\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi}}\, d\psi$$

$$y = r\cos\psi = -a\cos\psi + a\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi}$$

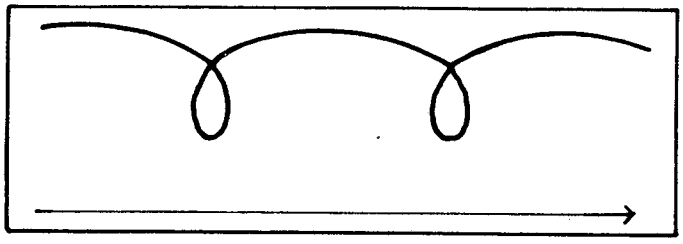
ou seja

$$x = \beta + a\operatorname{sen}\psi - a\operatorname{tg}\psi\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi} + \int_{\psi_o}^{\psi} \frac{a(e^2 - 1)}{\cos^2\psi\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi}}\, d\psi$$

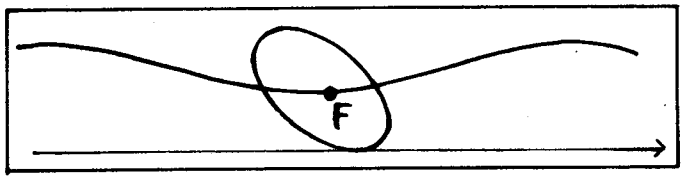
$$y = -a\cos\psi + a\sqrt{e^2 - \operatorname{sen}^2\psi}$$

Estas equações representam a curva descrita pelo foco da hipérbole rolando sobre o eixo x. Elas coincidirão com as equações da curva geratriz α se tomarmos $e = \sqrt{1 + c}$ o que poderá ser feito sempre que c for positivo.

Esta curva é chamada nodóide.



Se a cônica for uma elipse a curva descrita pelo foco é chamada ondulóide.



Se a cônica for uma parábola a curva é a catenária

CAPÍTULO II

Consideremos o grupo de Lie $O(2) \times O(2)$. Este grupo pode ser visto como um subgrupo de $O(4)$ identificando seus elementos com matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde A e B pertencem a $O(2)$.

O grupo $O(2) \times O(2)$ age no espaço euclidiano $R^4 \cong R^2 \times R^2$ da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.u \\ B.v \end{pmatrix}$$

onde $(u,v) \in R^2 \times R^2$; tendo como tipo de órbita principal o toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

Seja (x_1,x_2,x_3,x_4) em R^4 tal que $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ e $x_3^2 + x_4^2 = b^2$ onde a e b são números reais não negativos. Se A e B pertencem a $O(2)$ temos

$$||A(x_1,x_2)|| = a \quad e \quad ||B(x_3,x_4)|| = b$$

Logo, quando A varia em $O(2)$, $A(x_1,x_2)$ descreve um círculo de raio a, digamos S_a e quando B varia em $O(2)$, $B(x_3,x_4)$ descreve um círculo de raio b, S_b. Desta forma, provamos que a órbita de (x_1,x_2,x_3,x_4) está contida em $S_a \times S_b$. Reciprocamente para (y_1,y_2,y_3,y_4) em $S_a \times S_b$, isto é, $y_1^2 + y_2^2 = a^2$ e $y_3^2 + y_4^2 = b^2$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a seguinte matriz de $O(2) \times O(2)$

$$A = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

onde

$$C = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 & x_2y_1 - x_1y_2 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{b^2}\begin{pmatrix} x_3y_3 + x_4y_4 & x_4y_3 - x_3y_4 \\ x_3y_4 - x_4y_3 & x_3y_3 + x_4y_4 \end{pmatrix}$$

satisfaz $A.(x_1,x_2,x_3,x_4) = (y_1,y_2,y_3,y_4)$. Portanto a órbita de (x_1,x_2,x_3,x_4) é $S_a \times S_b$, que será um toro para a e b positivos.

Assim, fica estabelecida a seguinte relação: para cada órbita associamos um par de números reais não negativos. Esta associação é bijetora. Logo, o espaço das órbitas $R^4/O(2) \times O(2)$ pode ser parametrizado por

$$Q = \{(x,y) \in R^2;\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

Seja M^3 uma hipersuperfície em R^4 invariante sob a ação de $O(2) \times O(2)$. Como este grupo é linear ele leva espaço tangente em espaço tangente. Temos $M^3/O(2) \times O(2)$ representado por uma curva em Q, como ficará claro mais adiante. Identifiquemos R^2 com o plano coordenado

$$\pi = \{(x_1,0,x_3,0);\ x_1,x_3 \in R\} \subset R^4$$

Se $p \in M^3$ e $S_a \times S_b$ é a órbita de p temos

$$\pi \cap (S_a \times S_b) = \{(\pm a,0,\pm b,0)\}$$

2.1 Proposição:

O plano π é perpendicular a T_pM^3, para qualquer $p \in \pi \cap M^3$, $p \neq 0$, no sentido de

$$\pi^{\perp} = \{(0,x_2,0,x_4);\ x_2,x_4 \in R\} \subset R^4$$

estar contido em T_pM^3.

Demonstração:

Seja $p = (x_1,0,x_3,0) \in \pi \cap M^3$

i) Suponhamos $x_1 \neq 0$, $x_3 \neq 0$. Façamos o caso $x_1 > 0$ e $x_3 > 0$; os demais são análogos.

Consideremos a curva

$$\alpha(t) = (\sqrt{x_1^2 - t^2}, t, x_3, 0)$$

temos que

a) α está contida na órbita de p, donde $\alpha \subset M^3$

b) $\alpha(0) = p$

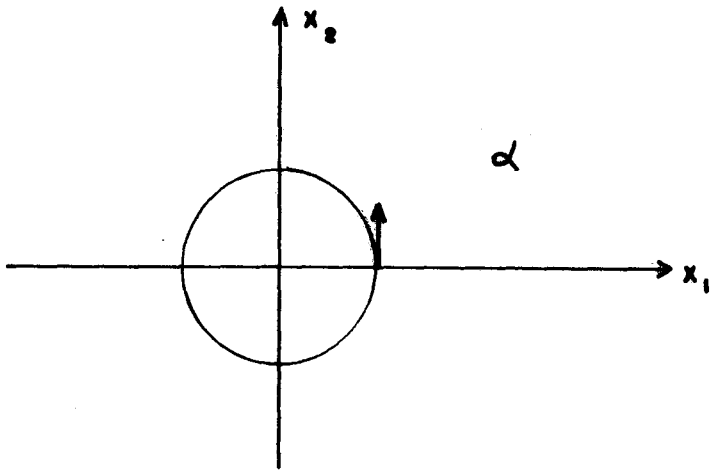
c) $\alpha'(0) = (0,1,0,0)$ para $x_1 \neq 0$

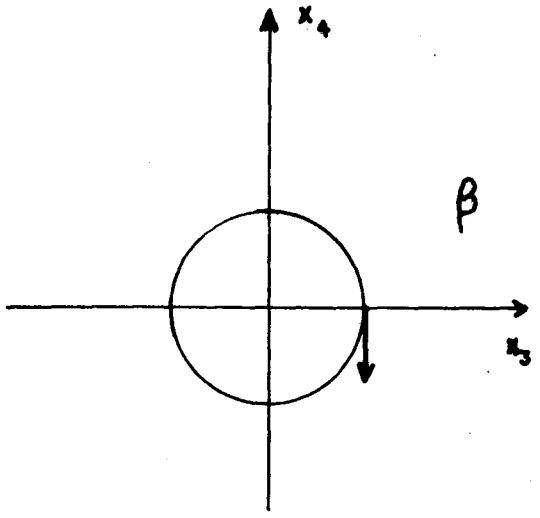
portanto $(0,1,0,0) \in T_pM^3$

Fazendo as mesmas considerações para

$$\beta(t) = (x_1, 0, \sqrt{x_3^2 - t^2}, t) \quad \text{com} \quad x_3 > 0$$

temos que $(0,0,0,1) \in T_pM^3$.





ii) Suponhamos que M corte o eixo x_1 e portanto teremos o caso $x_3 = 0$. O caso $x_1 = 0$ é análogo. Temos então $p = (x_1,0,0,0)$, $x_1 > 0$.

Considerando

$$\gamma(t) = (\sqrt{x_1^2 - t^2}, t, 0, 0)$$

provamos que $(0,1,0,0) \in T_pM^3$.

Seja $\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$ vetor de T_pM^3. Como $(0,1,0,0) \in T_pM^3$ podemos tomar ω com $\omega_2 = 0$ ainda em T_pM^3. Como a dimensão de T_pM^3 é 3 há uma reta deste no plano (ω_3,ω_4) e podemos tomar $\omega_3^2 + \omega_4^2 = 1$.

Suponhamos por absurdo $\omega_1 \neq 0$. Tomemos, sem perda de generalidade, $\omega_1 = 1$.

Seja

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

de $O(2) \times O(2)$. Temos que $\mathcal{B}.p = p$ logo $\mathcal{B}.\omega \in T_pM^3$. Como $\omega_3^2 + \omega_4^2 = 1$ existem B_1, B_2, B_3 em $O(2)$ tais que

a) $B_1(\omega_3,\omega_4) = (1,0)$

b) $B_2(\omega_3,\omega_4) = (-1,0)$

c) $B_3(\omega_3,\omega_4) = (0,1)$

Então $\mathcal{B}_1.\omega = (1,0,1,0)$ e $\mathcal{B}_2.\omega = (1,0,-1,0)$ donde $(1,0,0,0)$ pertence a T_pM^3 e portanto $\omega' = (0,0,\omega_3,\omega_4)$ também. Mas isto implica que $\mathcal{B}_1\omega' = (0,0,1,0)$ e $\mathcal{B}_3\omega' = (0,0,0,1)$ pertencem a T_pM^3 o que é um absurdo pois $\dim T_pM^3 = 3$.

Logo $\omega_1 = 0$ donde $\omega = (0,0,\omega_3,\omega_4)$ e portanto $\mathcal{B}_3\omega = (0,0,0,1) \in T_pM^3$.

2.2 Corolário:

O plano π intercepta as órbitas de M^3 perpendicularmente.

2.3 Corolário:

As superfícies M^3 e π se interseptam transversalmente em R^4. Logo $\pi \cap M^3$ é uma curva.

Demonstração:

Se $p \in \pi \cap M^3$ então $\pi^\perp \subset T_pM^3$ donde $T_pM^3 + \pi = R^4$. Decorre do teorema da transversalidade (ver capítulo 4) que $\pi \cap M^3$ é uma curva.

2.4 Proposição:

A curva $\pi \cap M^3$ é simétrica em relação aos eixos coordenados e sua parte no primeiro quadrante é $M^3/O(2) \times O(2)$.

Demonstração:

Seja $p \in M^3 \cap \pi$ e $S_a \times S_b$ a órbita de p em M^3. Temos

$$\pi \cap (S_a \times S_b) = \{(\pm a, 0, \pm b, 0)\}$$

que está contido em $\pi \cap M^3$. Logo o resultado segue.

Seja M^n uma hipersuperfície na qual foi fixado um campo N de vetores normais. Consideremos $N: M \to S^n$ a aplicação normal de Gauss, isto é, $N(p) \in S^n$ é a extremidade de um vetor paralelo ao vetor normal a M em $p \in M$ e com origem no centro da esfera S^n. Fixemos agora $p \in M$ e seja $dN_p: T_pM \to T_pM$ a diferencial da aplicação normal de Gauss. O quociente do traço de dN_p pela dimensão de M é chamado de curvatura média h de M em p.

Se aplicarmos uma homotetia λ em M então h/λ será a curvatura média de λp em λM.

2.5 Teorema:

Seja M^3 uma hipersuperfície invariante sob a ação de $O(2) \times O(2)$ de curvatura média constante h. Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma parametriza-

ção por comprimento de arco de $M^3/O(2) \times O(2)$. Então

$$H = k - \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\ell n f(x,y)$$

onde H é o traço de dN, k e η a curvatura e o vetor normal de γ respectivamente, $f(x,y)$ é o quadrado do volume da órbita principal em (x,y), ou seja, $f(x,y) = cx^2y^2$ onde c é uma constante e ℓn o logaritmo neperiano.

2.6 Corolário:

Seja $M^3 \subset R^4$ uma hipersuperfície invariante por $O(2) \times O(2)$ e $\gamma(s) = (x(s),y(s))$ uma parametrização por comprimento de arco de $M^3/O(2)\times O(2)$. Então M tem curvatura média constante h se e somente se γ satisfaz

$$\text{(I)} \qquad \dot{\sigma}(s) = \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s) = 3h + \frac{\dot{x}(s)}{y(s)} - \frac{\dot{y}(s)}{x(s)}$$

onde $\sigma(s)$ é o ângulo entre o vetor tangente a $\gamma(s)$ e o eixo x.

Demonstração:

Temos que $f(x,y) = cx^2y^2$ e

$$\dot{x}(s) = \cos\sigma(s)$$

$$\dot{y}(s) = \operatorname{sen}\sigma(s)$$

Seja k a curvatura de γ. Então

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \cos^2\sigma.\dot{\sigma} + \operatorname{sen}^2\sigma.\dot{\sigma} = \dot{\sigma}$$

Do teorema anterior temos

$$3h = \dot{\sigma} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\ell n(cx^2y^2)$$

onde $\eta(s) = (-\dot{y}(s),\dot{x}(s))$. Logo

$$3h = \dot{\sigma} - \frac{1}{2}\left(-\dot{y}\frac{d}{dx}\ell n(cx^2y^2) + \dot{x}\frac{d}{dy}\ell n(cx^2y^2)\right)$$

ou

$$3h = \dot{\sigma} + \frac{\dot{y}}{x} - \frac{\dot{x}}{y}$$

Devido à homotetia podemos supor sem perda de generalidade, $h > 0$

Observemos que

$$\gamma(s) = (\frac{1}{h}\cosh s, \frac{1}{h}\operatorname{sen} hs)$$

para $s \in (0,\pi/2h)$ é solução da equação (I). Se $p: R^4 \to R^4/O(2)\times O(2)$ é a projeção então $p^{-1}(\gamma(0,\pi/2h))$ é uma esfera de raio $1/h$ em R^4 que tem curvatura média constante h.

Segue de 2.4 que qualquer curva solução de (I) que "começa" ou "termina" no eixo x (resp. eixo y) é necessariamente perpendicular a este eixo. Além disso, a imagem inversa de uma curva solução de (I) que "começa" no eixo x e "termina" no eixo y é uma imersão de S^3 em R^4.

Procuramos então uma solução do seguinte sistema de equações diferenciais

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \cos\sigma \\ \dot{y} &= \operatorname{sen}\sigma \\ \dot{\sigma} &= 3h + \frac{\cos\sigma}{y} - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{x} \end{aligned}$$

cuja projeção no plano xy possua auto-intersecções, "começa" no eixo x e "termina" no eixo y. Faremos referência a uma curva solução de (II) como curva solução, denotaremos por $\tilde{\gamma}(s) = (x(s),y(s),\sigma(s))$ e sua projeção no plano xy por $\gamma(s) = (x(s),y(s))$.

Observemos que os pontos onde $x = 0$ ou $y = 0$ são singularidades de (II). Entretanto, a seguinte proposição nos dá o comportamento da curva solução nestes casos.

2.7 Proposição:

Para cada ponto $(x_o,0)$ do eixo x (resp. $(0,y_o)$ do eixo y) existe uma única curva solução de (I) analítica com $\lim_{s\to 0}\gamma(s) = (x_o,0)$ (resp. $\lim_{s\to 0}\gamma(s) = (0,y_o)$) e que pode ser localmente expressa por $x = q(y)$ (resp. $y = p(x)$) com $q_y(0) = 0$ (resp. $p_x(0) = 0$).

Demonstração:

Daremos uma idéia da prova.

Observemos primeiramente que $q_y(0) = 0$ decorre do fato que qualquer curva solução que "começa" no eixo x é necessariamente perpendicular a este.

Temos que a equação

$$(1) \qquad \dot{\sigma} = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = 3h + \frac{\dot{x}}{y} - \frac{\dot{y}}{x}$$

é equivalente a

$$(2) \qquad -\frac{d^2x}{dy^2} = 3h\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{3/2} + \left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{1}{y}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\left(\text{resp.} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 3h\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2} + \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

De fato,

$$\frac{dx}{ds}(s) = \frac{dx}{dy}(y(s)) \cdot \frac{dy}{ds}(s)$$

logo $$\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$

e $$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{\dot{y}}\frac{d^2x}{dsdy} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}}{\dot{y}^3} = -\frac{\dot{\sigma}}{\dot{y}^3}$$

Ainda,

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{\dot{x}^2}{\dot{y}^2} = \frac{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}{\dot{y}^2} = \frac{1}{\dot{y}^2}$$

Dividindo a equação (1) por $\dot{y}^3$ e substituindo os valores achados obtemos (2).

Na prova da existência e unicidade usaremos o método de substituição em série de potências. Tomemos

$$x = q(y) = \Sigma b_i y^i$$

como $q_y(0) = 0$ temos $b_1 = 0$. Além disso, $b_o = x_o$ logo

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 4b_2^2y^2 + 12b_2b_3y^3 + (16b_2b_4 + 9b_3^2)y^4 + (20b_2b_5 +$$

$$+ 24b_3b_4)y^5 + \ldots$$

e portanto

$$\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{3/2} = 1 + 6b_2^2y^2 + 18b_2b_3y^3 +$$

$$+ (24b_2b_4 + \frac{27}{3}b_3^2 + 6b_2^4)y^4 + (30b_2b_5 + 36b_3b_4 + 36b_2^3b_3)y^5 + \ldots$$

Temos

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{b_o} - \frac{b_2}{b_o^2}y^2 - \frac{b_3}{b_o^2}y^3 - \left(\frac{b_4}{b_o^2} - \frac{b_2^2}{b_o^3}\right)y^4 + \ldots$$

donde

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\frac{dx}{dy} = \frac{1}{b_o} - 2b_2 - 3b_3y - \left(\frac{b_2}{b_o^2} + 4b_4\right)y^2 +$$

$$- \left(\frac{b_3}{b_o^2} + 5b_5\right)y^3 - \left(\frac{b_4}{b_o^2} - \frac{b_2^2}{b_o^3} + 6b_6\right)y^4 + \ldots$$

e

$$\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\frac{dx}{dy}\right) = \frac{1}{b_o} - 2b_2 - 3b_3y +$$

$$- \left(\frac{b_2}{b_o^2} + 4b_4 + 8b_2^3 - \frac{4b_2^2}{b_o}\right)y^2 + \left(\frac{12b_2b_3}{b_o} - 36b_2^2b_3 - \frac{b_3}{b_o^2} - 5b_5\right)y^3 + \ldots$$

finalmente

$$- 3h\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{3/2} + \left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\frac{dx}{dy}\right) =$$

$$= - 3h + \frac{1}{b_o} - 2b_2 - 3b_3y - \left(4b_4 + 18hb_2^2 + \frac{b_2}{b_o^2} + 8b_3^2 - \frac{4b_2^2}{b_o}\right)y^2 + \ldots$$

$$= \frac{d^2x}{dy^2} = 2b_2 + 6b_3y + 12b_4y^2 + \ldots$$

Logo

$$b_o = x_o$$

$$b_1 = 0$$

$$2b_2 = \frac{1}{x_o} - 3h - 2b_2, \quad \text{isto é,} \quad b_2 = \frac{1}{4x_o} - \frac{3}{4}h$$

$$-3b_3 = 6b_3 \qquad \text{donde} \quad b_3 = 0$$

e assim por diante. Portanto

$$x = x_o + \left(\frac{1}{4x_o} - \frac{3h}{4}\right) y^2 + \ldots$$

Desde que as funções envolvidas no sistema (II) são analíticas reais segue de [8], pag. 121 corolário 2, que $\tilde{\gamma}$ é analítica real e portanto γ tambem o é.

Como vimos na demonstração acima

$$\dot{\sigma}(s) = -(\dot{y}(s))^3 . \frac{d^2x}{dy^2}(y(s)) = -(\dot{y}(s))^3 . (2b_2 + 12b_4 y^2 + \ldots)$$

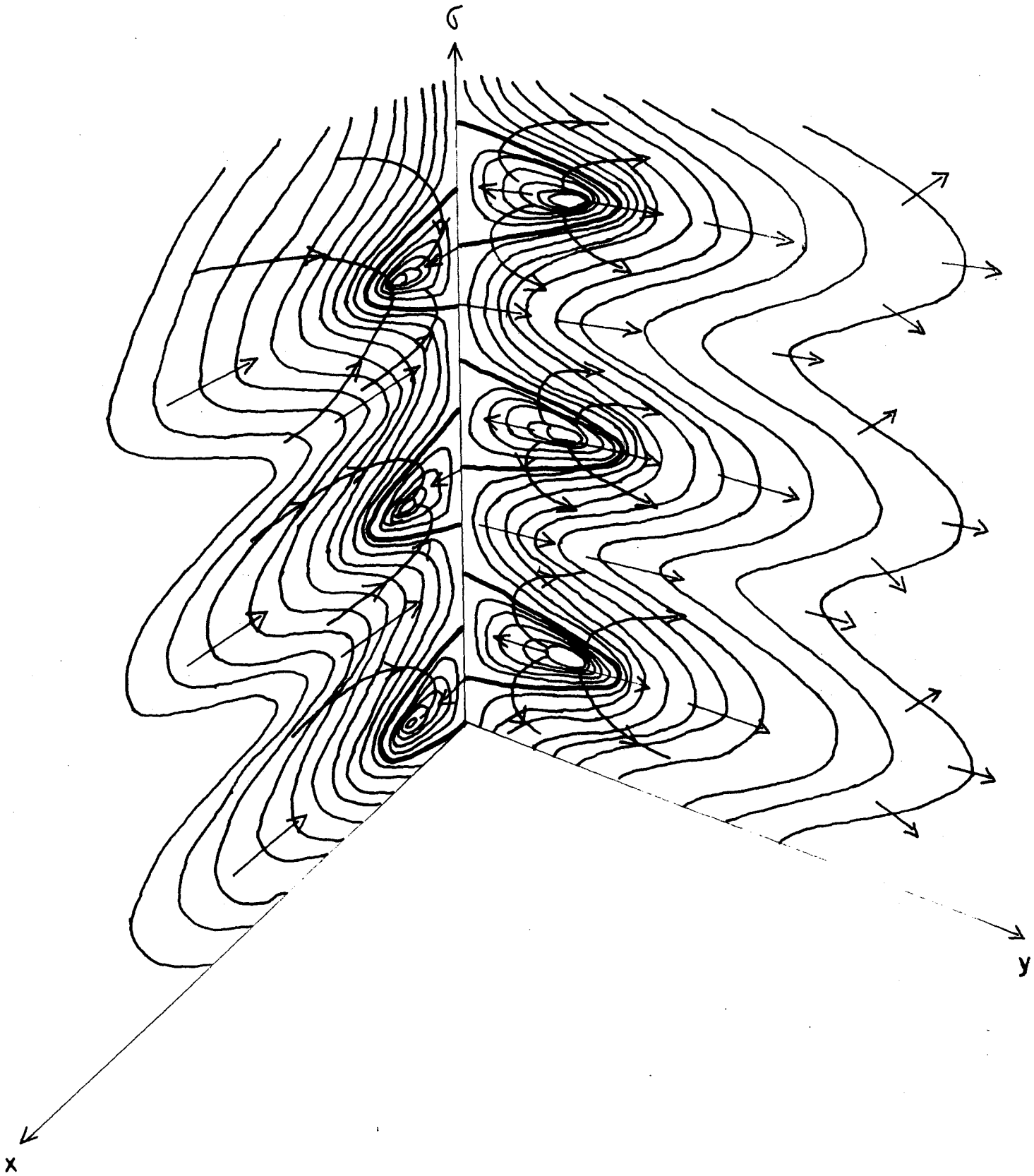
assim, se $\tilde{\gamma}(s) = (x(s), y(s), \sigma(s))$ é uma curva solução tal que quando s tende a zero, $\tilde{\gamma}(s)$ tende a $(x_o, 0, \pi/2 + 2k\pi)$ então $\dot{\tilde{\gamma}}(s)$ tende a $(0, 1, 3h/2 - 1/2x_o)$.

Devido ao fato do sistema (II) ser de difícil resolução, faremos uma análise qualitativa que nos garanta a existência de soluções do tipo que procuramos. Para isto consideremos primeiramente

$$I(x,\sigma) = x\,\mathrm{sen}\sigma - \frac{3}{2} hx^2$$

$$J(y,\sigma) = y\cos\sigma + \frac{3}{2} hy^2$$

Na figura abaixo temos as curvas de nível de I(=y) e as curvas de nível de J(=x).



2.8 Proposição:

As funções I e J são crescentes ao longo de uma curva solução.

Demonstração:

Denotaremos I(s) e J(s) por

$$I(s) = x(s)\operatorname{sen}\sigma(s) - \frac{3}{2}h(x(s))^2$$

$$J(s) = y(s)\cos\sigma(s) + \frac{3}{2}h(y(s))^2$$

onde $\tilde{\gamma}(s) = (x(s),y(s),\sigma(s))$ é uma curva solução.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{dI}{ds} &= \dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - 3hx\dot{x}\\ &= \dot{x}\dot{y} + x\left(3h\dot{x} + \frac{\dot{x}^2}{y} - \frac{\dot{x}\dot{y}}{x}\right) - 3hx\dot{x}\\ &= \frac{x\dot{x}^2}{y} \geqq 0\end{aligned}$$

pois $\dot{y} = \operatorname{sen}\sigma$ e $\ddot{y} = \dot{x}\dot{\sigma}$. Como $\dot{x} = \cos\sigma$ e $\ddot{x} = -\dot{y}\dot{\sigma}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{ds} &= \dot{y}\dot{x} + y\ddot{x} + 3hy\dot{y}\\ &= \dot{x}\dot{y} + y\left(-3h\dot{y} - \frac{\dot{x}\dot{y}}{y} + \frac{\dot{y}^2}{x}\right) + 3hy\dot{y}\\ &= \frac{y\dot{y}^2}{x} \geqq 0\end{aligned}$$

Temos as seguintes soluções de (II)

2.9 Proposição:

Se a curvatura de uma curva solução $\tilde{\gamma}$ é zero num intervalo, portanto $\dot{\sigma} \equiv 0$, então $\tilde{\gamma}$ é uma reta dada por:

$$\tilde{\gamma}(s) = (-s, 1/3h, (2k + 1)\pi), \quad s < 0$$

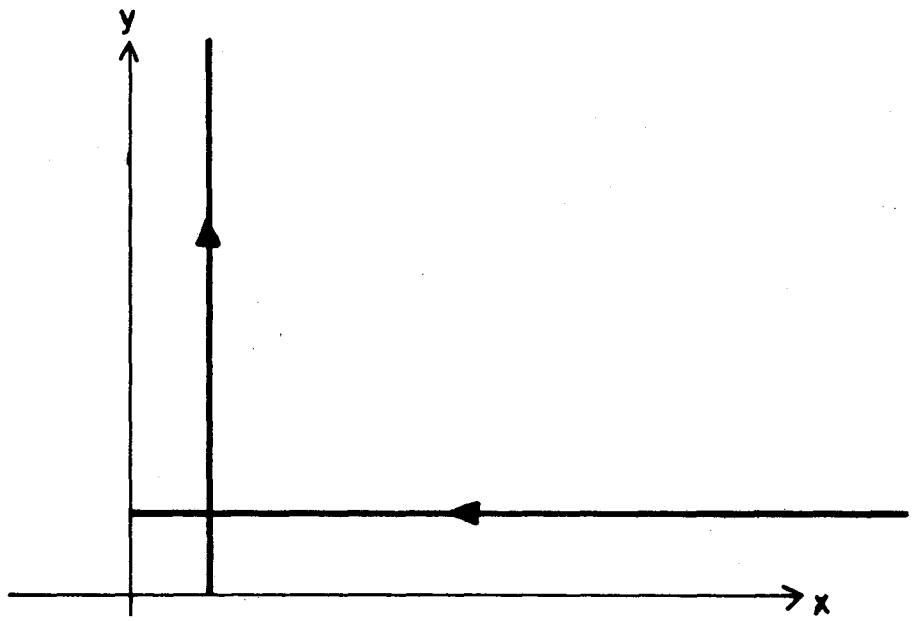
ou

$$\tilde{\gamma}(s) = (1/3h, s, \pi/2 + 2k\pi), s > 0$$

Demonstração:

É fácil ver que as curvas dadas acima são soluções de (II).

Na figura abaixo temos as projeções



No entanto, estas são as únicas soluções que contêm segmentos de reta. Suponhamos que $\tilde{\gamma}$ possua um segmento. Portanto $\dot{\sigma} \equiv 0$ num intervalo, digamos (a,b). Então

$$0 = 3h + \frac{\cos\sigma}{y} - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$$

é satisfeita para σ constante.

Suponhamos $y = \lambda x$ em (a,b). Logo

$$0 = 3h + \frac{\cos\sigma}{\lambda x} - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$$

donde
$$3hx + \frac{\cos\sigma}{\lambda} - \operatorname{sen}\sigma = 0$$

e então x é constante. Portanto y é constante e não temos um segmento. Assim, $y = \lambda x$ não pode ocorrer.

Portanto o segmento é ortogonal ao eixo x, isto é, $\sigma = \pi/2 + 2k\pi$ e neste caso $x = 1/3h$ ou é ortogonal ao eixo y, isto é, $\sigma = (2k + 1)\pi$ e $y = 1/3h$. O resultado segue pela unicidade das equações diferenciais ordinárias.

2.10 Proposição:

As funções I e J são estritamente crescentes ao longo de uma curva solução com $\dot{\sigma}(s) \neq 0$ para algum s.

Demonstração:

Mostremos o fato para J. O caso I é análogo.

De 2.8 resta mostrar que se $s_1 \neq s_2$ então $J(s_1) \neq J(s_2)$. Suponhamos $J(s_1) = J(s_2) = c$. Como J é crescente segue que $J(s) = c$ para qualquer $s \in [s_1,s_2]$. Logo

$$\frac{dJ}{ds}(s) = \frac{y(s)(\dot{y}(s))^2}{x(s)} = \frac{y(s).\operatorname{sen}^2\sigma(s)}{x(s)} = 0, \quad s \in [s_1,s_2]$$

donde $\operatorname{sen}\sigma(s) = 0$ para todo $s \in [s_1, s_2]$, isto é, $\sigma(s)$ é constante e portanto $\dot{\sigma} \equiv 0$ absurdo!

2.11 Lema:

Ao longo de qualquer curva solução $\tilde{\gamma}$ temos o seguinte limitante superior (resp. limitante inferior) para I (resp. J):

$$I(s) \leqq 1/6h \qquad (\text{resp. } J(s) \geqq -1/6h)$$

Além disso, se

$$I(s_o) = 1/6h \qquad (\text{resp. } J(s_o) = -1/6h)$$

para algum s_o, então

$$x(s) = 1/3h \qquad (\text{resp. } y(s) = 1/3h)$$

Demonstração:

Temos que

$$I(s) = x \operatorname{sen}\sigma - \frac{3}{2} h x^2 \leqq x - \frac{3}{2} h x^2$$

Consideremos $f(x) = x - \frac{3}{2} h x^2$. Como

$$f'(1/3h) = 1 - 3h.\frac{1}{3h} = 0 \quad \text{e}$$

$$f''(1/3h) = -3h < 0$$

segue que $x = 1/3h$ é máximo de f, logo

$$f(x) \leqq f(1/3h) = 1/6h \quad \text{para todo } x$$

donde $I(s) \leqq f(x(s)) \leqq 1/6h$

Se $I(s_o) = 1/6h$ segue de 2.8 que $I(s) = 1/6h$ para $s \geqq s_o$. Finalmente segue da demonstração de 2.10 que $x(s) = 1/3h$.

A prova para J é análoga

2.12 Lema:

Seja γ uma curva solução com $I(s_o) = a > 0$. Então

$$\lim_{s\to\infty} y(s) = \infty$$

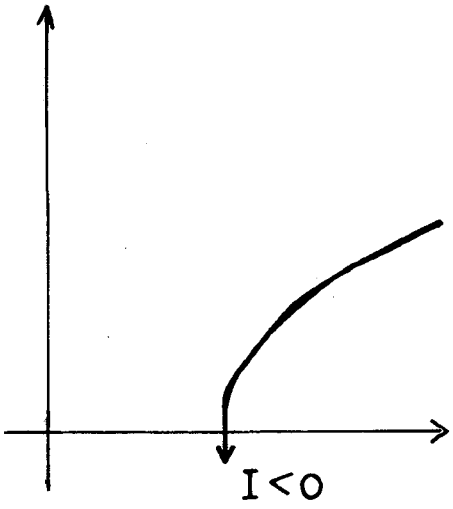
e $x(s)$ é limitado para $s \geq s_o$

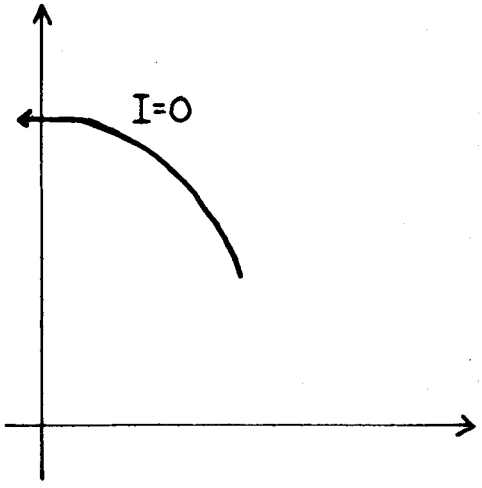
Demonstração:

Temos para $s \geq s_o$

$$I(s) \geq I(s_o) = a > 0$$

Observemos que nesta condição $(I > 0)$ não podemos ter $x \to 0$ ou $y \to 0$, logo γ está definida para todo $s \in \mathbb{R}$, $s \geq s_o$.

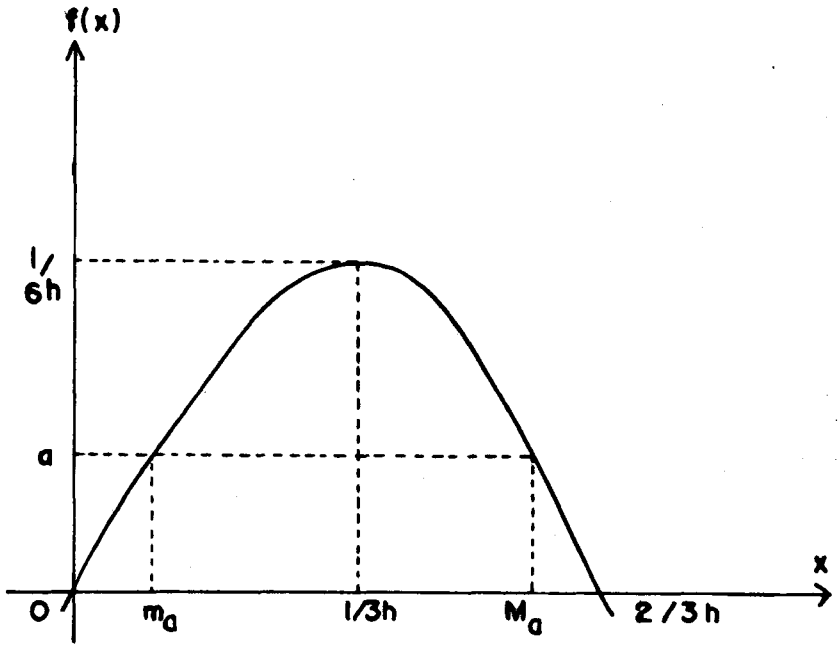




Portanto temos

$$a = I(s_o) \leqq I(s) = x \operatorname{sen}\sigma - \frac{3}{2} h x^2 \leqq x - \frac{3}{2} h x^2$$

Seja $f(x) = x - \frac{3}{2} h x^2 \geqq a$. Como $x_1 = 1/3h$ é máximo de f existem duas constantes dependendo de a, $0 < m_a < M_a$, com $f(m_a) = f(M_a) = a$ e $m_a < x_1 < M_a$. Logo $f(x) > a$ para todo $m_a < x < M_a$. Se $x \geqq M_a$ ou $x \leqq m_a$, $I \leqq f(x) \leqq a$. Portanto $I(s) \geqq a$ para $s \geqq s_o$ implica em $m_a \leqq x(s) \leqq M_a$ para $s \geqq s_o$.



Observemos ainda que $m_a < \frac{1}{3h} < M_a < \frac{2}{3h}$

Como $I(s) = x(\text{sen}\sigma - \frac{3}{2} hx) > 0$ para $s \geqq s_o$ temos

$$\dot{y} = \text{sen}\sigma > \frac{3}{2} hx > \frac{3}{2} h\, m_a > 0$$

e desde que σ é o ângulo que $\dot{\gamma}$ faz com o eixo x temos $y \to \infty$ quando $s \to \infty$.

A seguinte proposição nos dá o comportamento de uma curva solução γ quando s tende para o infinito.

2.13 Proposição:

Seja γ uma curva solução com $I(s) = a > 0$ para algum s. Então

$$\lim_{s\to\infty} I(s) = \frac{1}{6h}$$

Demonstração:

Como I é crescente e $1/6h$ é limitante superior temos que $\lim_{s\to\infty} I(s)$ existe e é menor ou igual a $1/6h$. Suponhamos por contradição

$$\lim_{s\to\infty} I(s) = c < 1/6h$$

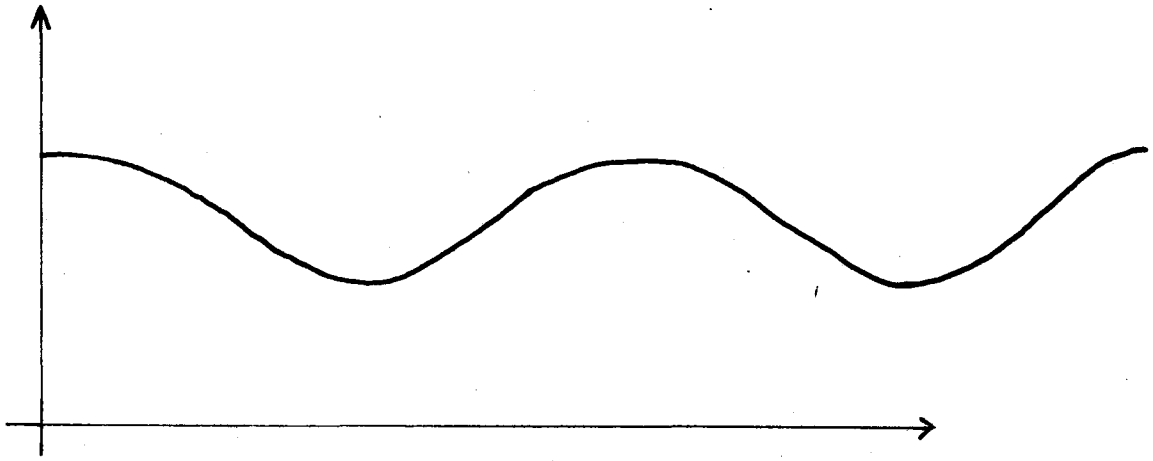
Quando $s \to \infty$ $y(s) \to \infty$, logo para $s \geqq s_o$, s_o suficientemente grande, $\gamma(s)$ se aproxima de uma curva $\beta(s)$ solução da equação

$$\dot{\sigma} = 3h - \frac{\text{sen}\sigma}{x}$$

que é caracterizada por

$$I = \text{constante}$$

De acordo com [9] β é gráfico de uma função periódica $(x = x(y))$ e se assemelha ao ondulóide



Além disso, existe uma constante k tal que β contém dois intervalos dentro de cada período satisfazendo:

$$|\dot{x}| = |\cos \sigma| \geq k$$

onde σ é o ângulo que $\dot{\beta}$ faz com o eixo x.

Seja T o período de β e ℓ o comprimento de arco de um período.

Seja $[s_1, s_2]$ um intervalo tal que $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ satisfaz:

i) $|\dot{x}(s)| \geqq k_1$ para todo $s_1 \leqq s \leqq s_2$

ii) $|x(s_1) - x(s_2)| \geqq k_2$

onde k_1 e k_2 são duas constantes positivas.

Seja $Y = \text{máx}\{y(s);\ s_1 \leqq s \leqq s_2\}$.

Temos que

$$\Delta I = I(s_2) - I(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dI}{ds}\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{x\dot{x}^2}{y}\, ds =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \left| \frac{x\dot{x}^2}{y} \right| ds = \int_{s_1}^{s_2} \left| \frac{\dot{x}}{2y} \cdot 2x\dot{x} \right| ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{|\dot{x}|}{2y} \cdot \left| \frac{dx^2}{ds} \right| ds \geqq$$

$$\geqq \int_{s_1}^{s_2} \frac{k_1}{2Y} \left| \frac{dx^2}{ds} \right| ds = \frac{k_1}{2Y} \int_{s_1}^{s_2} \left| \frac{dx^2}{ds} \right| ds \geqq \frac{k_1}{2Y} \left| \int_{s_1}^{s_2} \frac{dx^2}{ds}\, ds \right| =$$

$$= \frac{k_1}{2Y} \left|(x(s_2))^2 - (x(s_1))^2\right| \geqq \frac{k_1}{2Y} (x(s_2) - x(s_1))^2 \geqq$$

$$\geqq \frac{k_1}{2Y} \cdot k_2^2 = \frac{k_1 k_2^2}{2Y}$$

Consideremos o intervalo $[s_o, s_o + \ell)$; sejam $s_o < s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_o + \ell$ tais que $|\dot{x}(s)| \geqq k_1$ para $s_1 \leqq s \leqq s_2$ ou $s_3 \leqq s \leqq s_4$.

Temos

$$I(s_o + \ell) - I(s_o) = I(s_o + \ell) - I(s_4) + I(s_4) - I(s_3)$$

$$+ I(s_3) - I(s_2) + I(s_2) - I(s_1) + I(s_1) - I(s_o) \geqq$$

$$> \frac{k_1 k_2^2}{2Y}$$

Mas $\lim\limits_{s \to \infty} I(s) - I(s_o) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} I(s_j) - I(s_{j-1})$ onde

$s_j - s_{j-1} = \ell$. Logo

$$\lim_{s\to\infty} I(s) - I(s_o) = \sum_{j=0}^{\infty} I(s_{j+1}) - I(s_j) > \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_1 k_2^2}{2(Y_o + jT)}$$

onde $Y_o = \text{máx}\{y(s);\ s_o \leq s < s_o + \ell\}$. Então

$$\lim_{s\to\infty} I(s) - I(s_o) \geq c' \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{Y_o + jT}$$

onde c' é uma constante, mas isto é um absurdo pois

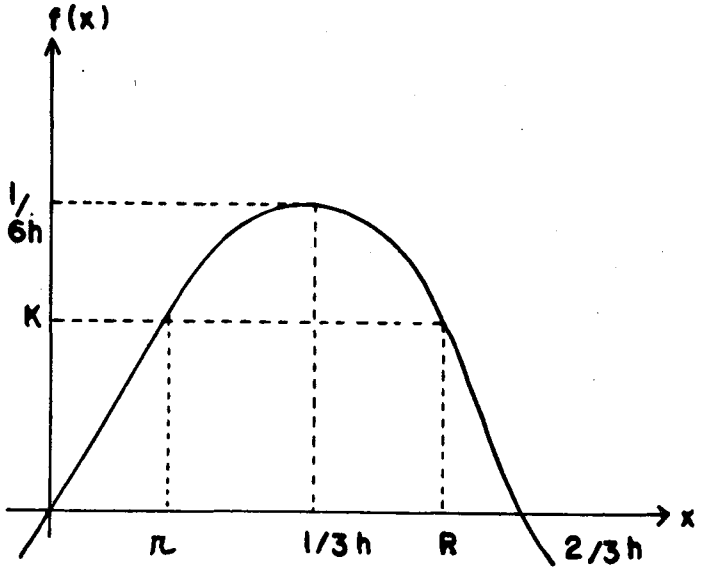
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{Y_o + jT} \qquad \text{é divergente}$$

2.14 Corolário:

Seja γ uma curva solução com $I(s_o) = a > 0$. Então a reta $x = 1/3h$ é uma assíntota de γ quando s tende para o infinito.

Demonstração:

Consideremos $f(x) = x - \frac{3}{2} h x^2$. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $r \in (1/3h(3h\varepsilon + 1),\ 1/3h)$ e seja $k = f(r)$. Logo existe $R > 0$ satisfazendo $r < \frac{1}{3h} < R < \frac{2}{3h}$ e $f(R) = k$. Portanto para todo x, $r < x < R$, $f(x) > k$.



Seja

$$0 < \delta < \min \{\frac{1}{6h} - k, \frac{3hr}{2}\left(\varepsilon + \frac{1}{3h}\right) - \frac{1}{6h}, \frac{3hR}{2}\left(\varepsilon - \frac{1}{3h}\right) + \frac{1}{6h}$$

segue de 2.13 que existe s_1 tal que para $s > s_1$

$$\frac{1}{6h} - \delta < x\operatorname{sen}\sigma - \frac{3hx^2}{2} < \frac{1}{6h} + \delta$$

Observemos que para $s > s_1$, $r < x(s) < R$ pois se $x \geqq R$ ou $x \leqq r$, $f(x) \leqq k < \frac{1}{6h} - \delta$ donde $x\operatorname{sen}\sigma - \frac{3hx^2}{2} \leqq f(x) < \frac{1}{6h} - \delta$ absurdo!

Portanto, para $s > s_1$ temos

$$x - \frac{1}{3h} = \frac{2}{3hx}\left(\frac{3hx^2}{2} - x\right) + \frac{1}{3h} < \frac{2}{3hR}\left(\delta - \frac{1}{6h}\right) + \frac{1}{3h} < \varepsilon$$

$$x - \frac{1}{3h} = \frac{2}{3hx}\left(\frac{3hx^2}{2} - x\right) + \frac{1}{3h} > \frac{2}{3hr}\left(-\delta - \frac{1}{6h}\right) + \frac{1}{3h} > -\varepsilon$$

Resta mostrar que δ é realmente positivo. Para provar que

$$\frac{3hR}{2}\left(\varepsilon - \frac{1}{3h}\right) + \frac{1}{6h} > 0$$

quando $\varepsilon < 1/3h$ observemos que devido à simetria de $f(x)$ temos

$$\frac{1}{3h} < R < -\frac{1}{3h} + \left(\frac{1}{3h} - \frac{1}{3h(3h\varepsilon+1)}\right) \quad \text{logo}$$

$$\frac{3hR}{2}\left(\varepsilon - \frac{1}{3h}\right) + \frac{1}{6h} > \frac{3h}{2}\left(\frac{2}{3h} - \frac{1}{3h(3h\varepsilon+1)}\right)\left(\varepsilon - \frac{1}{3h}\right) + \frac{1}{6h} =$$

$$= \frac{1}{6h}\left(\frac{18h^2\varepsilon^2 - 3h\varepsilon - 1}{3h\varepsilon+1}\right) + \frac{1}{6h} = \frac{18h^2\varepsilon^2}{(3h\varepsilon+1)} \cdot \frac{1}{6h} > 0$$

2.15 Proposição:

Seja γ uma curva solução com $J(s_o) = a < 0$. Então

$$\lim_{s \to -\infty} J(s) = -\frac{1}{6h}$$

Além disso, a reta $y = 1/3h$ é uma assíntota de γ quando $s \to -\infty$.

A demonstração é análoga à proposição 2.13.

Seja $\gamma:(a,b) \to Q$ uma curva solução, $\gamma(s) = (x(s), y(s))$. Consideremos o campo vetorial unitário

$$\dot{\gamma}:(a,b) \longrightarrow S^1$$

$$s \longrightarrow (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$$

Seja $s_o \in (a,b)$ e σ_o um ângulo que $\dot{\gamma}(s_o)$ faz com o eixo x.

Consideremos o seguinte problema de levantamento

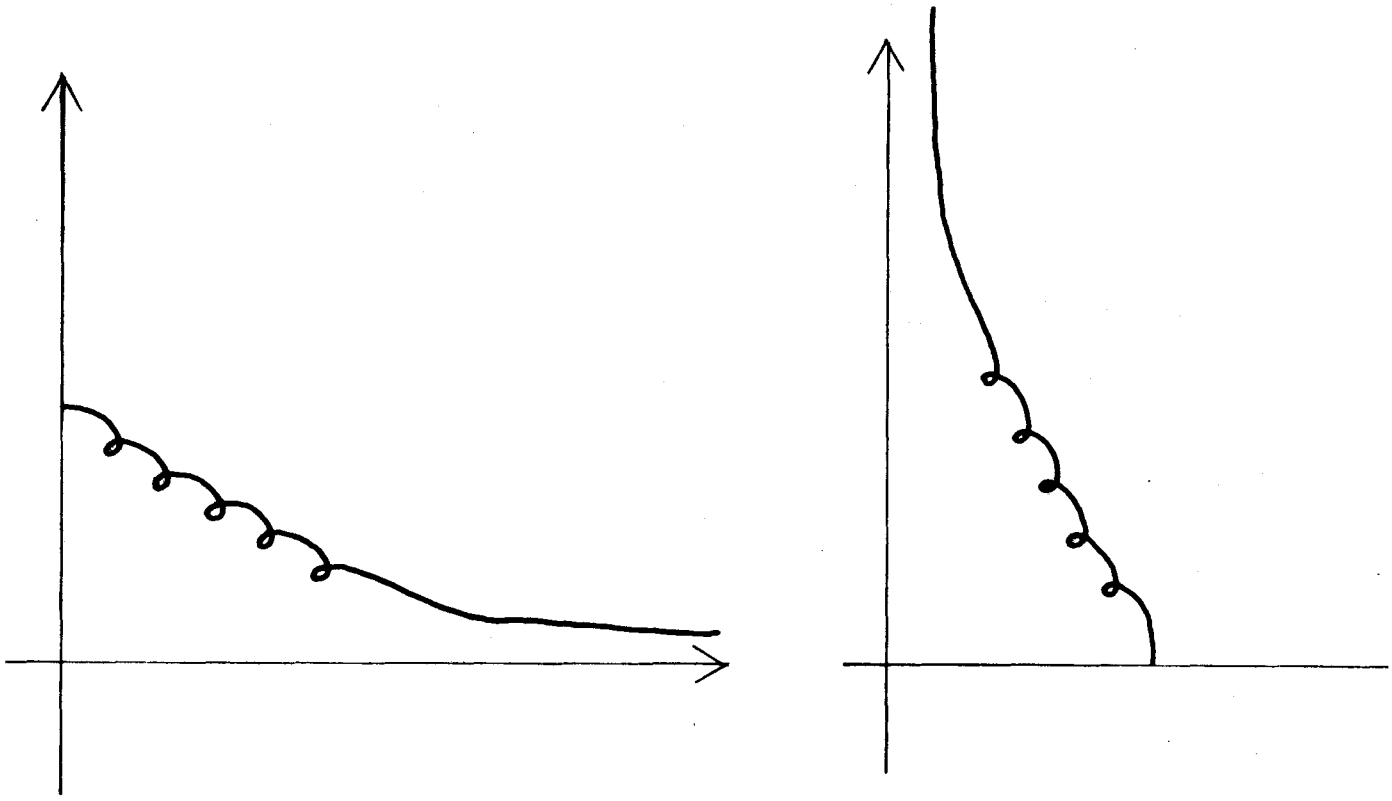
$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R},\sigma_o) \arrow[d, "\exp"] \\ ((a,b),s_o) \arrow[ur, dashed, "\sigma_\gamma"] \arrow[r] & (S^1,\dot{\gamma}(s_o)) \end{tikzcd}$$

onde $\exp:(\mathbb{R},\sigma_o) \longrightarrow (S^1,\dot{\gamma}(s_o))$ é dada por $\exp(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Então existe $\sigma_\gamma((a,b),s_o) \to (\mathbb{R},\sigma_o)$ contínua e que comuta o diagrama (ver [10]).

2.16 Definição:

O índice de γ é o número de inteiros (mod 2π) que $\sigma_\gamma(a,b)$ possui, ou geometricamente, é o número de voltas no sentido anti-horário menos o número de voltas no sentido horário que dá o vetor $\dot{\gamma}(s)$.

A equação $\dot{\sigma} = 3h + \frac{\cos\sigma}{y} - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$ admite simetria em relação à reta $y = x$, isto é, se $\gamma(s) = (x(s),y(s))$ é solução então $(y(s),x(s))$ também é solução.



Para vermos isto consideremos $\tilde{\gamma}(s) = (x(s),y(s),\sigma(s))$ solução de

$$\dot{x} = \cos\sigma$$

$$\dot{y} = \operatorname{sen}\sigma$$

$$\dot{\sigma} = 3h + \frac{\cos\sigma}{y} - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$$

Seja $\tilde{\alpha}(s) = (X(s),Y(s),\Sigma(s))$ onde $X(s) = y(s)$, $Y(s) = x(s)$ e $\Sigma(s) = 3\pi/2 + 2n\pi - \sigma(s)$ onde n é o índice de $\tilde{\gamma}$. Temos que $\tilde{\alpha}$ é solução de

$$\dot{X} = -\cos\Sigma$$

$$\dot{Y} = -\operatorname{sen}\Sigma$$

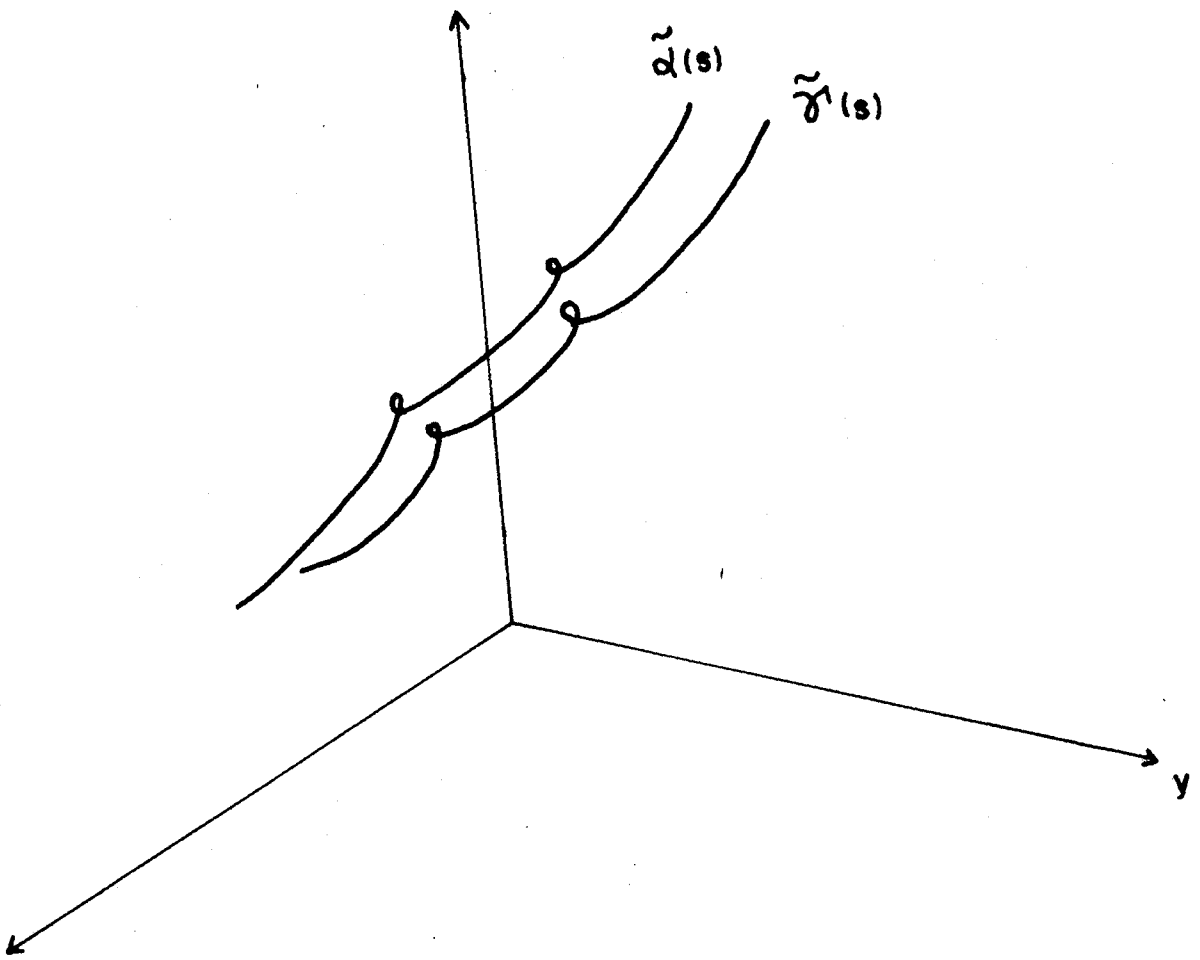
$$\dot{\Sigma} = -3h - \frac{\cos\Sigma}{Y} + \frac{\operatorname{sen}\Sigma}{X}$$

De fato,

$$\cos\Sigma(s) = \cos(3\pi/2 + 2n\pi - \sigma(s)) = -\operatorname{sen}\sigma(s) = -\dot{y}(s) = -\dot{X}(s)$$

$$\operatorname{sen}\Sigma(s) = \operatorname{sen}(3\pi/2 + 2n\pi - \sigma(s)) = -\cos\sigma(s) = -\dot{x}(s) = -\dot{Y}(s)$$

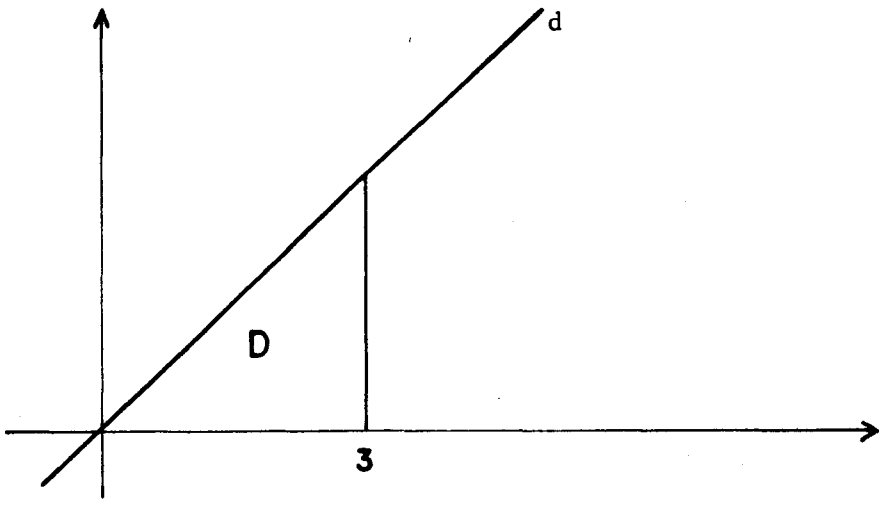
$$-3h - \frac{\cos\Sigma}{Y} + \frac{\operatorname{sen}\Sigma}{X} = -3h + \frac{\operatorname{sen}\sigma(s)}{x(s)} - \frac{\cos\sigma(s)}{y(s)} = -\dot{\sigma}(s) = \dot{\Sigma}(s)$$



Até aqui temos estabelecido propriedades gerais das curvas soluções. De agora em diante nos preocuparemos com o objetivo desta dissertação, isto é, provar que para cada inteiro n, existe uma curva solução $\gamma:(a,b) \to Q$ com $\lim_{s\to a} x(s) = \lim_{s\to b} y(s) = 0$ cujo índice é n. Para isto consideremos a família de curvas soluções $\{\gamma_h ; h > 0\}$ onde para cada $h > 0$, $\gamma_h:(0,a) \to Q$ é a única curva solução analítica com $\lim_{s\to 0} \gamma_h(s) = (3,0)$ (ver 2.7). Desta família extrairemos uma curva que satisfaz as nossas exigências.

Seja d a reta $y = x$ e

$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq x\}$$



Para γ_h temos $\lim_{s\to 0}\sigma(s) = \pi/2$ logo

$$I(0) = \lim_{s\to 0} I(s) = 3 - \frac{27h}{2}$$

$$J(0) = \lim_{s\to 0} J(s) = 0$$

portanto $J(s) > 0$ para $s > 0$ e

$$I(0) = \begin{cases} > 0 & \text{se} \quad 0 < h < 2/9 \\ = 0 & \text{se} \quad h = 2/9 \\ < 0 & \text{se} \quad h > 2/9 \end{cases}$$

Se $h \leqq 2/9$ então $I(0) \geqq 0$ logo $x = 1/3h$ é assíntota de γ_h quando s tende para o infinito e portanto γ_h não nos interessa. Logo consideraremos $h > 2/9$.

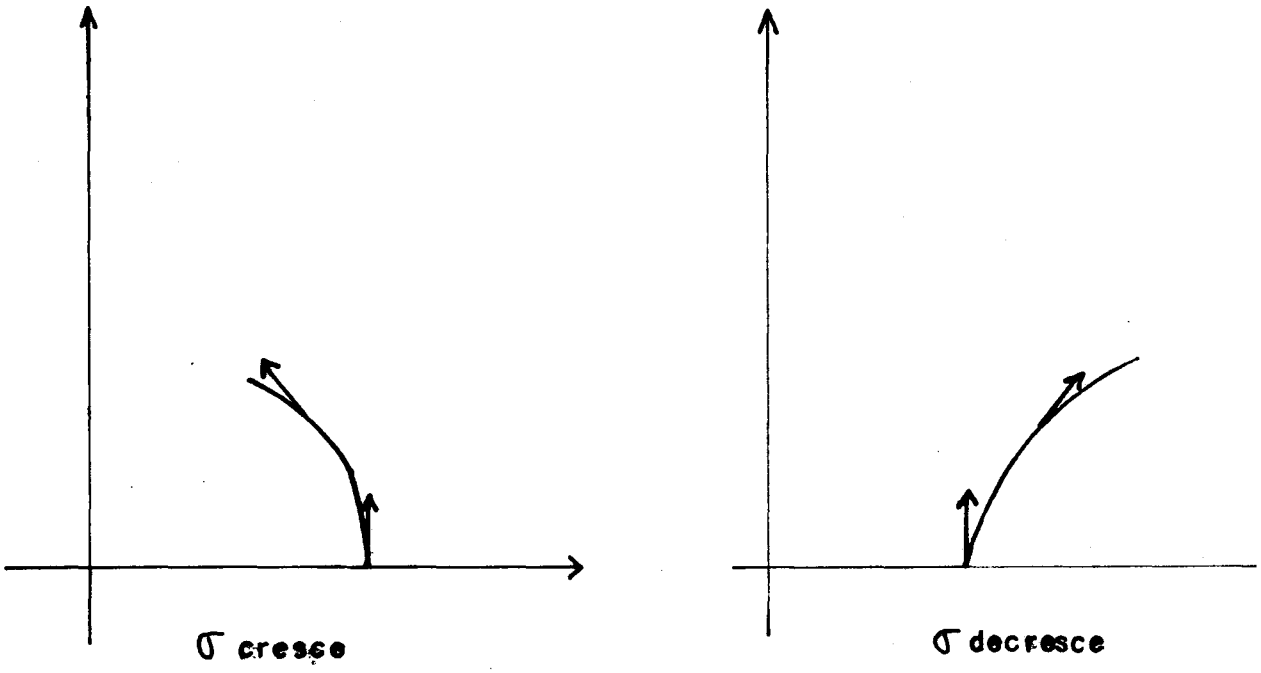
2.17 Lema:

Se $h > 1/9$ então $\gamma_h(s)$ satisfaz: $x(s) < 3$ para todo $s > 0$

Demonstração:

Observemos primeiramente que se $h = 1/9$ então γ_h é a reta $x = 3$.

Se $h > 1/9$ temos de 2.7 que $\lim_{s\to 0} \dot{\sigma}(s) = \frac{3h}{2} - \frac{1}{6} > 0$, logo existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\dot{\sigma}(s) > 0$ para $0 < s \leqq \delta$ donde σ cresce em $0 < s \leqq \delta$.



Portanto $x(s) < 3$ para todo $0 < s \leqq \delta$.

Suponhamos que exista $s > \delta$ com $x(s) \geqq 3$. Seja $s_o > \delta$ tal que $x(s_o) = 3$ e $x(s) < 3$ para $\delta < s < s_o$. Então $I(0) < I(s_o)$ mas

$$I(s_o) = 3\operatorname{sen}\sigma_o - \frac{27h}{2} \leqq 3 - \frac{27h}{2} = I(0)$$

o que é uma contradição! Daí, $x(s) < 3$ para todo $s > 0$.

2.18 Lema:

Seja $[s_1,s_2]$ um intervalo de γ com $\dot{\sigma}(s) > 0$ para todo $s_1 \leq s \leq s_2$, $\sigma(s_1) = 3\pi/4 \pmod{2\pi}$, $\sigma(s_2) = \sigma(s_1) + \pi/2$ e $J(s_2) > 0$. Então $I(s_1) < I(s_2) < 0$ e

$$\Delta I = I(s_2) - I(s_1) > \frac{1}{3h(3h\sqrt{2}\,\bar{y} - 1)}$$

onde $\bar{y} = \text{máx}\,\{y(s);\ s_1 \leq s \leq s_2\}$

Demonstração:

Temos que

$$I(s_2) = x(s_2)\text{sen}\sigma(s_2) - \frac{3h}{2}(x(s_2))^2 = -\frac{x(s_2)}{\sqrt{2}} - \frac{3h}{2}(x(s_2))^2 < 0$$

Logo $\quad I(s_1) < I(s_2) < 0.$

Como $\dot{\sigma} > 0$ segue que σ é crescente donde $-1 \leq \cos\sigma(s) \leq -1/\sqrt{2}$ para todo $s \in [s_1,s_2]$; ainda

$$\frac{x\dot{x}^2}{y} = \frac{-\dot{x}}{2y} \cdot (-2x\dot{x}) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}}\,(-2x\dot{x}) > 0$$

portanto:

$$\Delta I = I(s_2) - I(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dI}{ds}\,ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{x\dot{x}^2}{y}\,ds \geq$$

$$\geq \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}} \cdot (-2x\dot{x})ds = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}} \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds}(-x^2)ds = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}}\,(x_1^2 - x_2^2)$$

onde $x_1 = x(s_1)$ e $x_2 = x(s_2)$; por outro lado

$$\Delta I = I(s_2) - I(s_1) = -\frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{3hx_2^2}{2} - \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{3hx_1^2}{2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) + \frac{3h}{2}(x_1^2 - x_2^2) \geqq \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}}\,(x_1^2 - x_2^2)$$

logo $$\left(\frac{3h}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}}\right)(x_1^2 - x_2^2) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

Como $J(s_2) = y(s_2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3hy(s_2)}{2}\right) > 0$ segue que $\frac{3h}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}} > 0$

e $$(x_1^2 - x_2^2) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3h}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}}\right)^{-1}(x_1 + x_2) >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3h}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}}\right)^{-1}.x_1$$

Como $I(s_1) < 0$ segue que $x_1 > 2/3h\sqrt{2}$. Portanto

$$\Delta I \geqq \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}}(x_1^2 - x_2^2) > \frac{1}{4\bar{y}}\left(\frac{3h}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}}\right)^{-1}\frac{2}{3h\sqrt{2}} = \frac{1}{3h(3h\sqrt{2}\,\bar{y}-1)}$$

2.19 Lema:

Seja $\gamma(s)$ uma curva solução satisfazendo $I(s) \leqq 0$, $J(s) \geqq 0$ então $\dot{\sigma}(s) \geqq 0$

Demonstração:

O lema decorre de

$$\dot{\sigma} = -\frac{I}{x^2} + \frac{J}{y^2}$$

2.20 Lema:

Seja $[s_3, s_4]$ um intervalo de γ com $I(s_4) < 0$, $J(s_3) > 0$, $\sigma(s_3) = 7\pi/4$ (mod. 2π) e $\sigma(s_4) = \sigma(s_3) + \pi/2$. Então

$$\Delta I = I(s_4) - I(s_3) > \frac{\bar{\bar{y}}}{3h\sqrt{2}\,\bar{y}(3h\bar{\bar{y}} + 1)}$$

$$\bar{y} = \text{máx}\{y(s); s_3 \leqq s \leqq s_4\} \quad \text{e}$$

onde

$$\bar{\bar{y}} = \min\{y(s); s_3 \leqq s \leqq s_4\}$$

Demonstração:

Como $I(s_3) < I(s_4) < 0$ e $J(s_4) > J(s_3) > 0$ segue de 2.19 que $\dot{\sigma}(s) > 0$. Logo σ é crescente em $[s_3, s_4]$ donde $1/\sqrt{2} \leqq \cos\sigma \leqq 1$. Temos

$$\Delta I = I(s_4) - I(s_3) = \int_{s_3}^{s_4} \frac{dI}{ds}\, ds = \int_{s_3}^{s_4} \frac{x\dot{x}^2}{y}\, ds =$$

$$= \int_{s_3}^{s_4} \frac{\dot{x}}{2y} \frac{dx^2}{ds}\, ds \geqq \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{y}} (x_4^2 - x_3^2)$$

onde $x_4 = x(s_4)$ e $x_3 = x(s_3)$. Por outro lado

$$\Delta I = \frac{x_4}{\sqrt{2}} - \frac{3hx_4^2}{2} + \frac{x_3}{\sqrt{2}} + \frac{3hx_3^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_3 + x_4) + \frac{3h}{2}(x_3^2 - x_4^2) = \int_{s_3}^{s_4} \frac{\dot{x}}{2y} \frac{dx^2}{ds}\, ds \leqq \frac{1}{2\bar{\bar{y}}} (x_4^2 - x_3^2)$$

Resolvendo a desigualdade acima temos

$$(x_4^2 - x_3^2)\left(\frac{1}{2\bar{\bar{y}}} + \frac{3h}{2}\right) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 + x_4)$$

ou

$$(x_4^2 - x_3^2) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3h}{2} + \frac{1}{2\bar{\bar{y}}}\right)^{-1}(x_3 + x_4) > \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3h}{2} + \frac{1}{2\bar{\bar{y}}}\right)^{-1} . x_4$$

Como $I(s_4) = \dfrac{x_4}{\sqrt{2}} - \dfrac{3hx_4^2}{2} < 0$ segue que $x_4 > 2/3h\sqrt{2}$. Portanto

$$\Delta I \geqq \frac{1}{2\sqrt{2}\bar{y}}(x_4^2 - x_3^2) > \frac{1}{4\bar{y}}\left(\frac{3h}{2} + \frac{1}{2\bar{\bar{y}}}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3h\sqrt{2}} = \frac{\bar{\bar{y}}}{3h\sqrt{2}\bar{y}(3h\bar{\bar{y}}+1)}$$

Seja

$$\Gamma = \{\gamma_h(s);\ I(s) \leqq 0 \ \text{ e } \ \gamma_h(s') \in D \ \text{ para todo } \ s' \leqq s\}$$

Temos que Γ é uma curva parametrizada por $\gamma_h(s)$, isto é, Γ é uma parte de $\gamma_h(s)$ com $I(s) \leqq 0$ e contida em D. Pelo lema 2.19, $\dot{\sigma} > 0$ em Γ. Logo para cada acréscimo de 2π em σ existe um intervalo de Γ onde podemos aplicar o lema 2.18 (respectivamente o lema 2.20). Portanto o valor de I é acrescido por uma quantidade maior que a soma das estimativas dos referidos lemas. Daí, Γ tem comprimento finito e portanto índice finito. Além disso,

$$\tau = \{\gamma_h(s);\ \gamma_h(s') \in D \ \text{ para todo } \ s' \leqq s\}$$

que pode ser parametrizada por $\gamma_h(s)$, também tem comprimento finito e o mesmo índice que Γ pois se $I(\tau(s)) \leqq 0$ então $\tau \equiv \Gamma$; agora se existir s_o tal que $I(\tau(s_o)) > 0$ segue do lema 2.12 que $y(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$ e $\dot{y}(s) > 0$ para todo $s > s_o$ o que significa que $\dot{\tau}(s)$ não pode mais dar voltas.

Para o intervalo $0 \leqq s \leqq 3/2$ temos

$$x(0) - x(s) \leqq s - 0 \leqq 3/2 \quad \text{e} \quad y(s) - y(0) \leqq s - 0 < 3/2$$

donde $\quad x(s) \geqq 3/2,\ y(s) \leqq 3/2$ e $\gamma_h(s) \in D$. Portanto

$$\Delta\sigma(\tau) \geqq \sigma(3/2) - \sigma(0) = \int_o^{3/2} \dot{\sigma}(s)ds =$$

$$\int_o^{3/2}\left(\frac{J}{y^2} - \frac{\dot{y}}{x} + \frac{3h}{2}\right) ds \geqq \int_o^{3/2}\left(-\frac{\dot{y}}{x} + \frac{3h}{2}\right) ds \geqq$$

$$\geq \int_0^{3/2} \left(-\frac{2}{3} + \frac{3h}{2}\right) ds = \left(-\frac{2}{3} + \frac{3h}{2}\right) \frac{3}{2} = \frac{9h}{4} - 1$$

Assim, quando h tende para o infinito a variação angular $\Delta\sigma$ também tende para o infinito.

A variação de σ é importante porque nos dá o índice de γ. Assim, se γ é uma curva solução com $\lim_{s\to 0} y(s) = \lim_{s\to s_o} x(s) = 0$,

$$\Delta\sigma(\gamma) = \lim_{s\to s_o} \sigma(s) - \lim_{s\to 0}\sigma(s) = (2n+1)\pi - \pi/2 = 2n\pi + \pi/2$$

onde n é o índice de γ. Deste modo, o índice de τ cresce quando h cresce.

O seguinte lema nos dá o comportamento geométrico de Γ.

2.21 Lema:

Seja $\ell(x,y) = x - my$ onde m é um número real positivo. Se $\ell(s) = \ell(\Gamma(s))$ tem um máximo local em s_o então $\ell(s) < \ell(s_o)$ para todo $s > s_o$.

Demonstração:

Seja $0 < \theta < \pi/2$, $\theta = \text{arc cotg } m$, ou seja, $m = \text{cotg}\theta$. Temos que $\dot{\ell}(s_o) = 0$ e $\ddot{\ell}(s_o) \leq 0$. Como

$$\dot{\ell}(s_o) = \dot{x}(s_o) - m\dot{y}(s_o) = 0$$

se $\dot{y}(s_o) = \text{sen } \sigma(s_o) = 0$ então $\dot{x}(s_o) = \cos \sigma(s_o) = 0$ absurdo! Portanto

$\dot{y}(s_o) \neq 0$ e $m = \dfrac{\dot{x}(s_o)}{\dot{y}(s_o)}$ o que implica em $\cot g\theta = \cot g\sigma(s_o)$, ou seja, $\sigma_o = \sigma(s_o) = \theta$ ou $\sigma_o = \theta + \pi(\mathrm{mod}2\pi)$ e além disso $\dot{x}(s_o)$ e $\dot{y}(s_o)$ têm mesmo sinal. Agora

$$\ddot{\ell}(s_o) = \ddot{x}(s_o) - m\ddot{y}(s_o)$$

$$= - \operatorname{sen} \sigma_o.\dot{\sigma}(s_o) - m \cos\sigma_o.\dot{\sigma}(s_o)$$

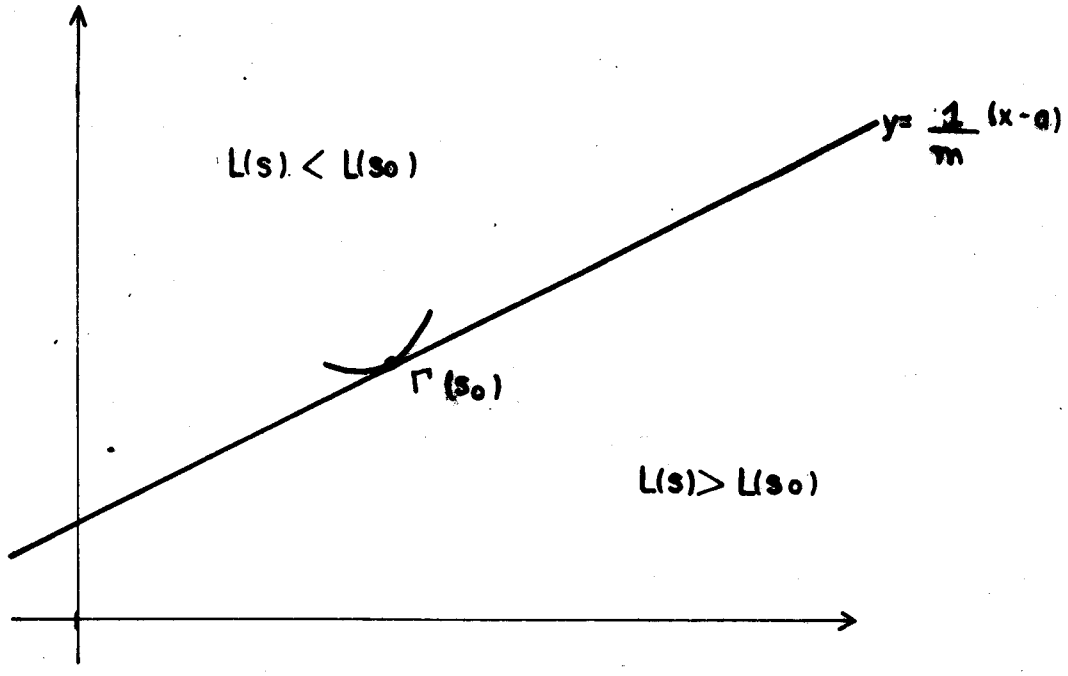
$$= - \operatorname{sen} \sigma_o.\dot{\sigma}(s_o) - \frac{\cos\sigma_o}{\operatorname{sen}\sigma_o} . \cos\sigma_o.\dot{\sigma}(s_o)$$

$$= - \frac{\dot{\sigma}(s_o)}{\dot{y}(s_o)} \leqq 0.$$

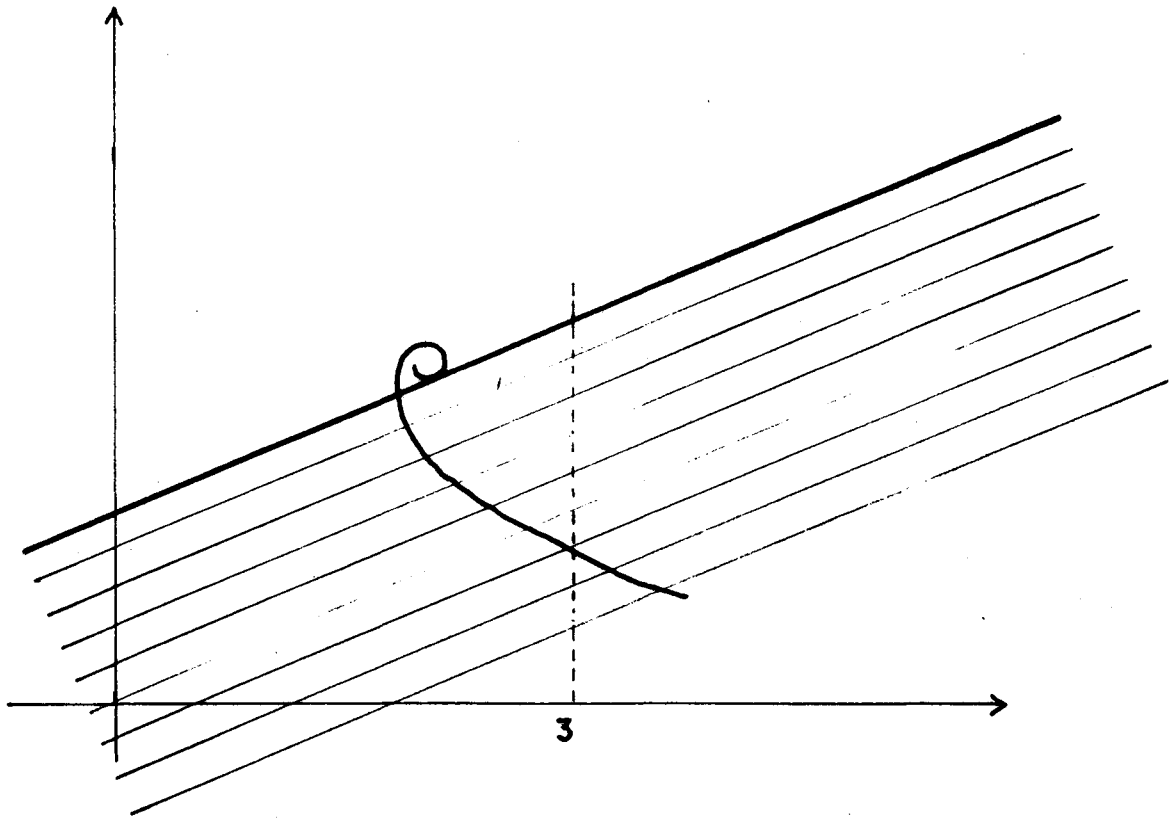
logo $\dot{\sigma}(s_o)$ e $\dot{y}(s_o)$ têm mesmo sinal.

Se $\sigma_o = \theta + \pi$ então $\dot{y} = \operatorname{sen}\sigma_o = - \operatorname{sen}\theta < 0$ logo $\dot{\sigma} < 0$ o que contradiz o lema 2.19. Portanto $\sigma_o = \theta$, ou seja, $0 < \sigma_o < \pi/2$.

Seja $a = \ell(s_o)$. Assim $y \geqq (x-a)/m$ implica $\ell(s) \leqq \ell(s_o)$ e $y \leqq (x-a)/m$ implica $\ell(s) \geqq \ell(s_o)$.



Suponhamos que exista $s > s_o$ com $\ell(s) \geqq \ell(s_o)$. Desde que $x(s) \leqq 3$ para todo s, existe s_1, $s_1 > s_o$, tal que s_1 é máximo local de $\ell(s)$ e $\ell(s_1) \geqq \ell(s_o)$, pois caso contrário $\Gamma(s)$ tomaria a forma de uma espiral e em determinado instante teríamos $x > 3$. Na figura abaixo para s_1 ser máximo local de $\ell(s)$, $\Gamma(s_1)$ teria que tangenciar uma das retas paralelas a $y = (x-a)/m$



Entretanto

$$I(s_1) - I(s_o) = (x(s_1) - x(s_o))(\text{sen}\sigma(s_o) - \frac{3}{2}hx(s_o) - \frac{3}{2}hx(s_1)) > 0$$

desde que $\text{sen}\sigma_o - \frac{3}{2}hx(s_o) = I(s_o)/x(s_o) < 0$ temos

$$x(s_1) - x(s_o) < 0$$

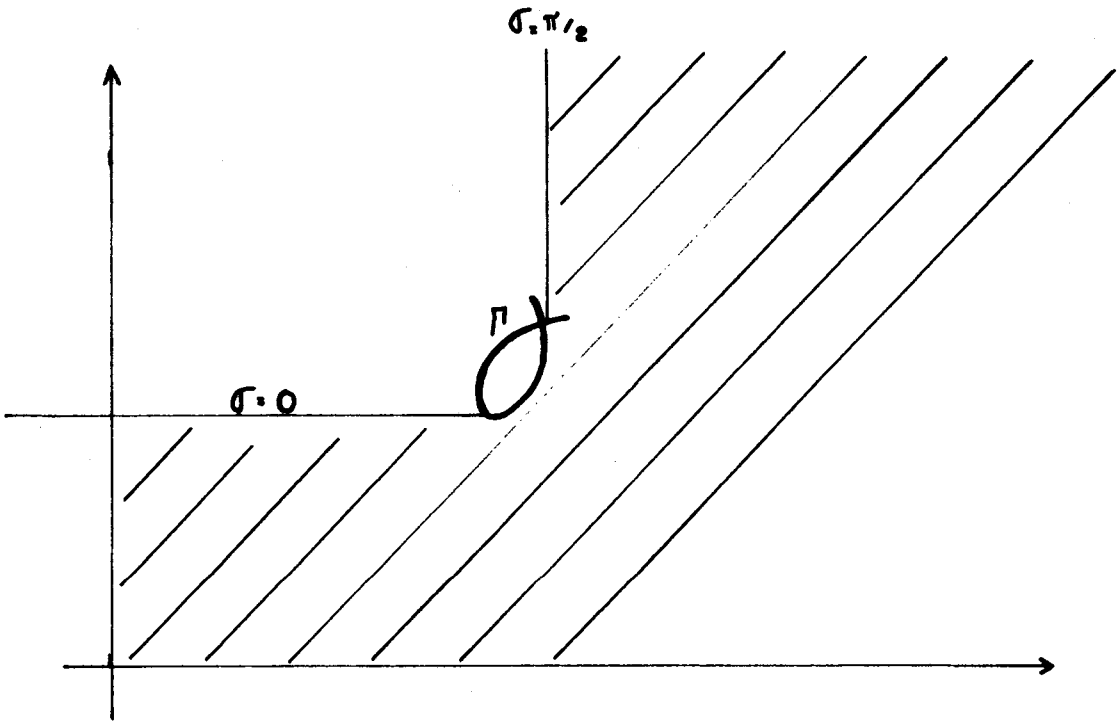
e $J(s_1) - J(s_o) = (y(s_1) - y(s_o))(\cos\sigma(s_o) + \frac{3}{2}h(y(s_1) + y(s_o))) > 0$

temos $\qquad y(s_1) - y(s_o) > 0 \quad$ logo

$$\ell(s_1) - \ell(s_o) = x(s_1) - x(s_o) + m(y(s_o) - y(s_1)) < 0$$

contradição! Portanto $\ell(s) < \ell(s_o)$ para todo $s > s_o$.

Deixando $m = \text{cotg}\sigma$ variar o lema 2.21 nos diz que Γ não pode espiralar pois ela não pode retornar à região destacada na figura abaixo



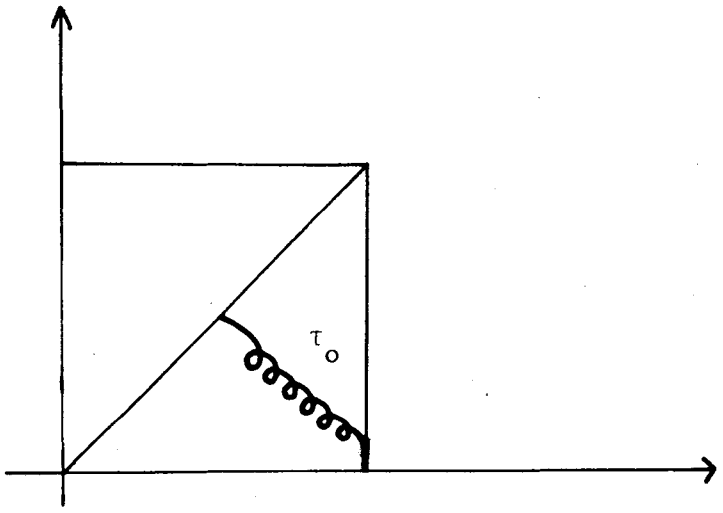
Assim, para cada acréscimo de 2π em σ, Γ passa por um laço.

As soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias dependendo de um parâmetro e satisfazendo a condição de Lipschitz (ver capítulo 4) variam continuamente com respeito a este parâmetro; logo a família $\{\gamma_h ; h > 0\}$ depende continuamente de h quando restrita à região:

$$\{(x,y) \in R^2;\ x > c,\ y > c\}$$

para $c > 0$ suficientemente pequeno.

Seja $\tau_o(s)$ a parte de $\gamma_{h_o}(s)$ tal que $\gamma_{h_o}(s') \in D$ para todo $s' \leqq s$ e com índice m, o que significa que τ_o tem m laços.



Devido à dependência contínua de h existem h_1 e h_2 tais que

1. Para todo h satisfazendo: $h_1 \leq h \leq h_2$, γ_h tem ao menos m laços (não necessariamente em D).

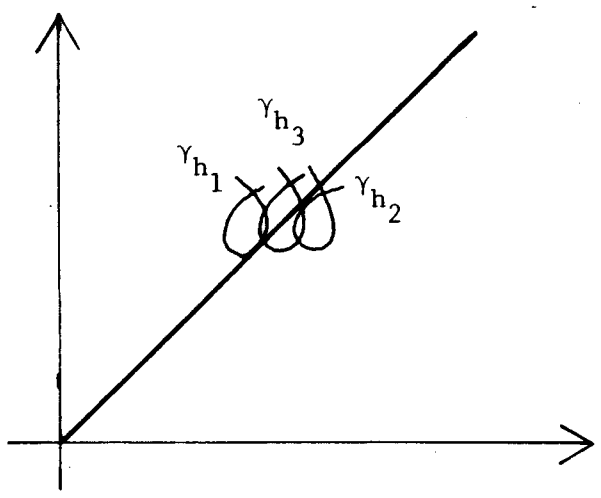
2. O m-ésimo laço de γ_{h_1} tangencia d, isto é, a reta $x = y$, superiormente; o m-ésimo laço de γ_{h_2} tangencia d inferiormente e se $h_1 < h < h_2$, o m-ésimo laço de γ_h intercepta d transversalmente.

Como σ depende continuamente de h temos que

$$\sigma[h_1,h_2] \subset [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi].$$

Logo existe h_3, $h_1 < h_3 < h_2$, com $\sigma_{h_3} = (2k + 1)\pi$, ou seja, o m-ésimo laço de γ_{h_3} intercepta d perpendicularmente.

Já vimos que refletindo Γ_{h_3} em torno de d obtemos uma curva solução de (I). Logo a união de Γ_{h_3} com a curva refletida será uma curva solução de índice $2m-1$ e $\lim_{s\to 0} y(s) = \lim_{s\to a} x(s) = 0$



Analogamente, no caso $m \geq 2$, seja h_1 tal que o $(m-1)$-ésimo laço de γ_{h_1} tangencia d superiormente. Então construiremos uma curva solução com índice $2m-2$.

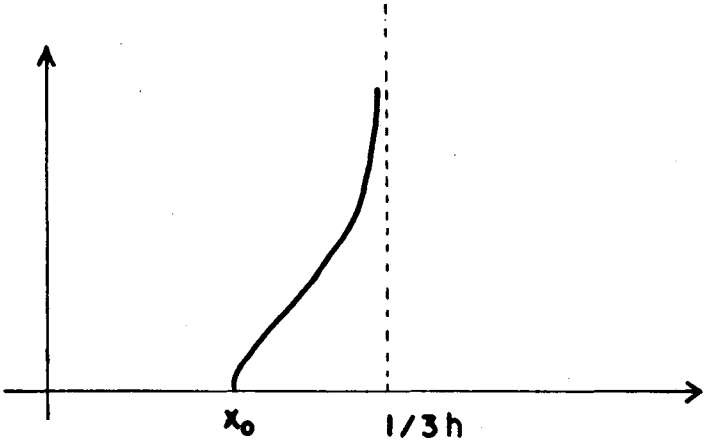
Resumindo, se γ_h é uma curva solução com $\lim_{s\to 0} \gamma_h(s) = (x_o,0)$, temos os seguintes casos:

1. Se $0 < h < 1/3x_o$ segue que

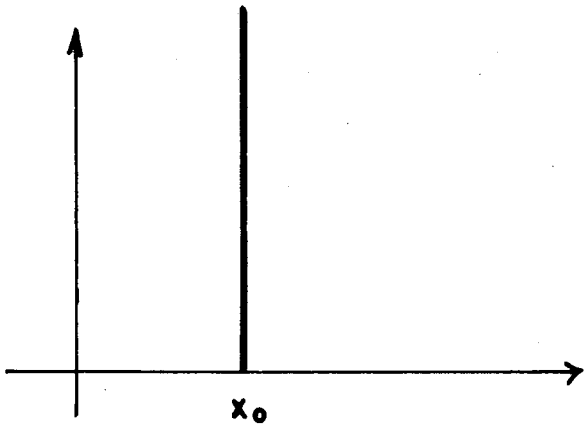
$$\lim_{s\to 0} \dot{\varphi}(s) = \frac{3}{2} h - \frac{1}{2x_o} < 0$$

$$\lim_{s\to 0} I(s) = x_o - \frac{3}{2} h x_o^2 > \frac{1}{2} x_o > 0$$

Logo γ_h terá o seguinte comportamento



2. Se $h = 1/3x_o$ então a reta $x = x_o = 1/3h$ é solução com $\dot{\sigma} \equiv 0$

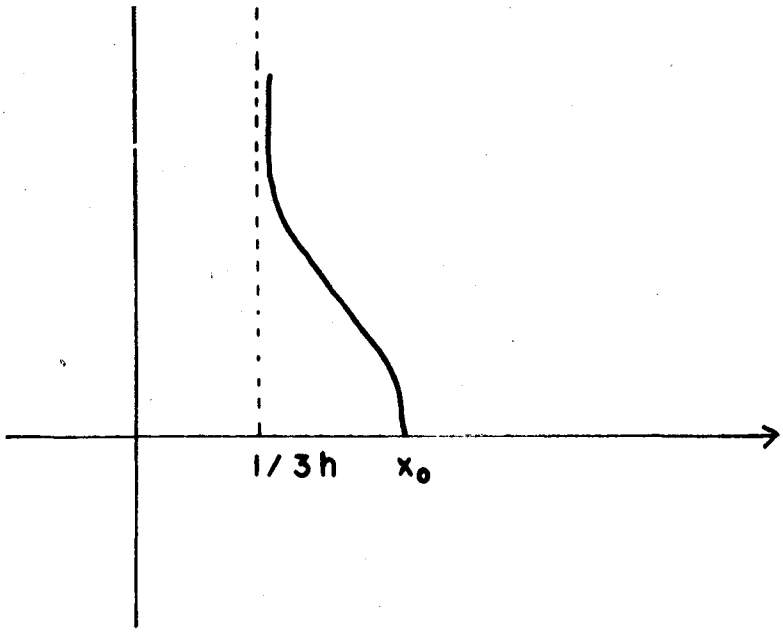


3. Se $\frac{1}{3x_o} < h \leqq \frac{2}{3x_o}$ temos

$$\lim_{s\to 0} \dot{\sigma}(s) = \frac{3}{2} h - \frac{1}{2x_o} > 0$$

$$\lim_{s\to 0} I(s) = x_o - \frac{3}{2} h x_o^2 \geqq 0$$

Logo a curva será do tipo mostrado na figura abaixo

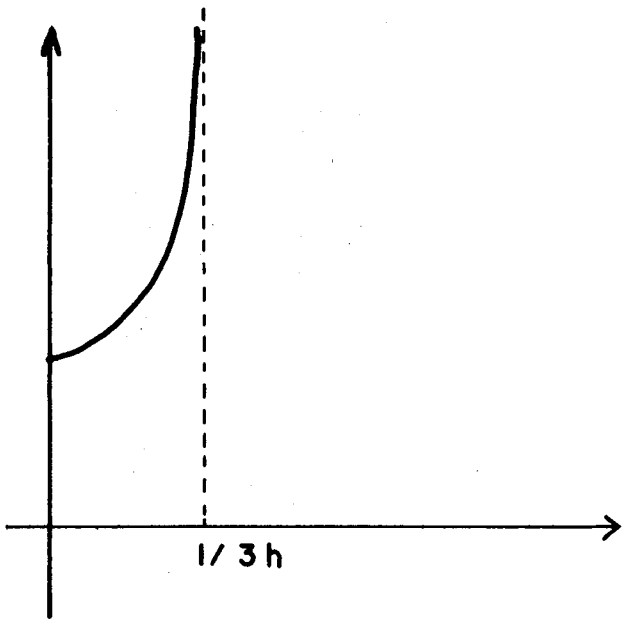


Nos casos 1,2 e 3 o índice de γ_h é zero

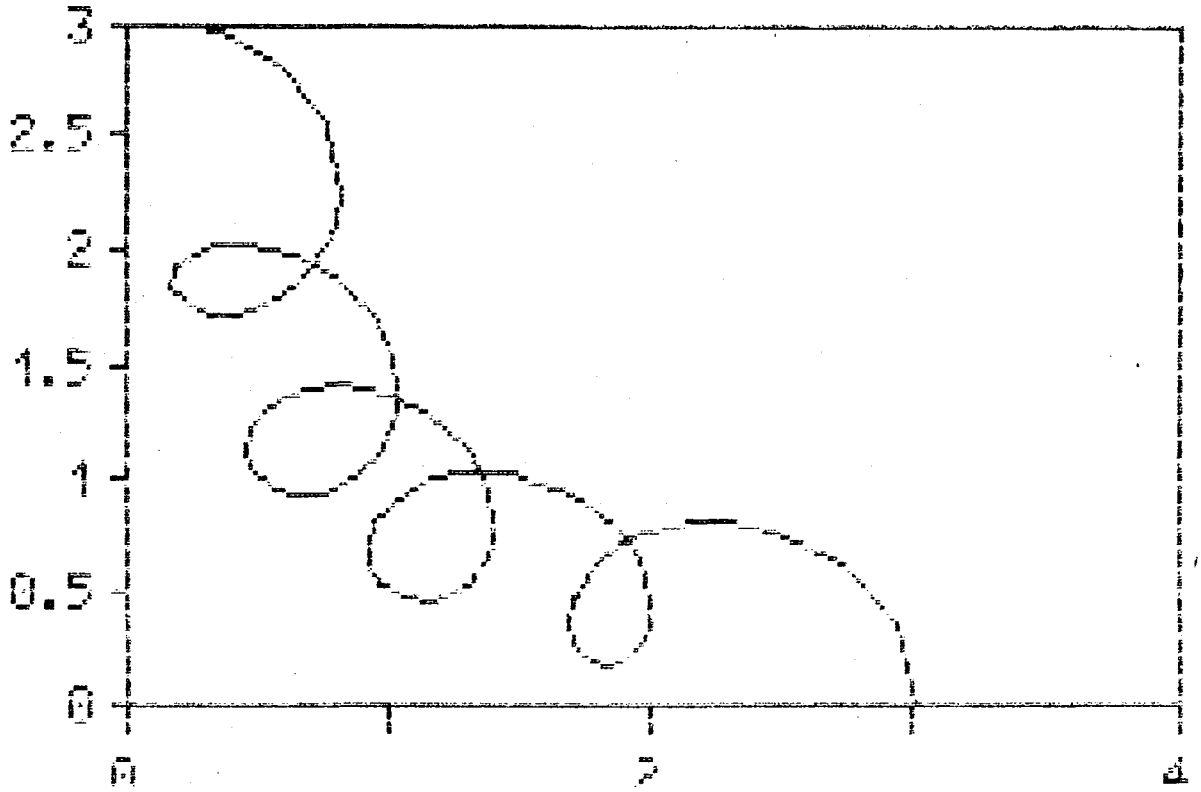
Além disso, qualquer curva solução com ponto inicial $(0,y_o)$ satisfaz

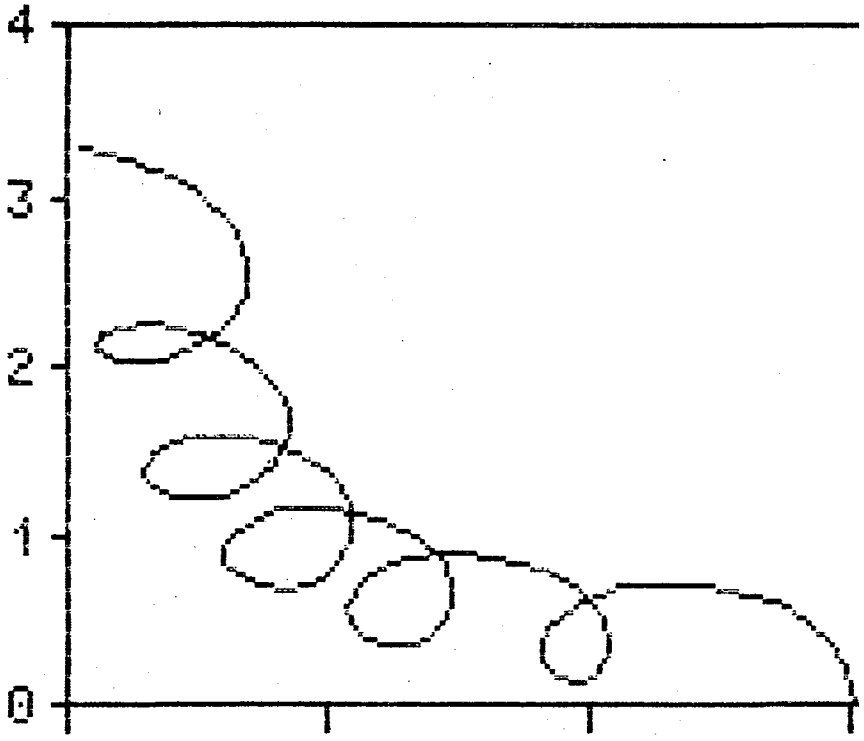
$$\lim_{s\to C} \dot{\sigma}(s) = \frac{3}{2} h + \frac{1}{2y_o} > 0$$

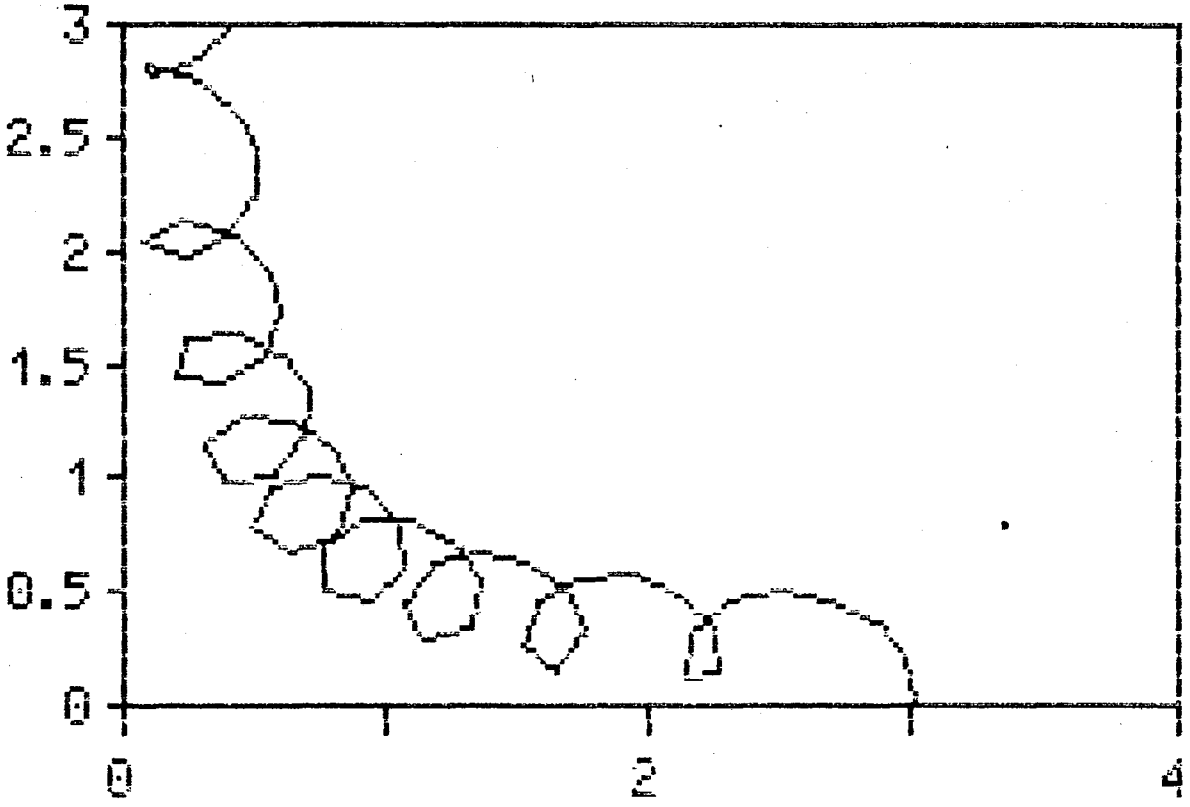
$$\lim_{s\to 0} I(s) = 0$$



As seguintes figuras foram obtidas no computador para $h = 0,9$; $h = 1,0$ e $h = 1,4$ respectivamente.


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4


4
3
2
1
0


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4

CAPÍTULO III

Vamos indicar agora generalizações naturais para R^n com $n = 2k$ sob a ação de $O(k) \times O(k)$ e para $n = p + q$ sob a ação de $O(p) \times O(q)$

Do mesmo modo que fizemos no capítulo 2, identificaremos os elementos de $O(k) \times O(k)$, $k > 2$, com matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde A e B pertencem a $O(k)$. A ação deste grupo sobre $R^{2k} \cong R^k \times R^k$ se dá na forma:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au \\ Bv \end{pmatrix}$$

onde $(u,v) \in R^k \times R^k$

Analogamente, dado $(u,v) \in R^k \times R^k$ com $||u|| = a$ e $||v|| = b$, a órbita de (u,v) é $S_a \times S_b$ onde S_a é a esfera de raio a em R^k e S_b é a esfera de raio b em R^k.

Assim, para cada (u,v) em $R^k \times R^k$ fica associado o par de números reais não negativos (a,b) donde $R^{2k}/O(k) \times O(k)$ está em bijeção com

$$Q = \{(a,b) \in R^2 / a \geq 0,\ b \geq 0\}$$

que é de fato um homeomorfismo

Seja M^{2k-1} uma hipersuperfície em R^{2k}, invariante sob a ação de

$O(k) \times O(k)$. Então $M/O(k) \times O(k)$ é uma curva em Q.

3.1 Proposição:

Seja M^{2k-1} uma hipersuperfície invariante por $O(k) \times O(k)$ de curvatura média constante h e $\gamma(s) = (x(s),y(s))$ uma parametrização por comprimento de arco de $M/O(k) \times O(k)$. Então

$$\text{(III)} \qquad \dot{\sigma} = \dot{x}\dddot{y} - \dddot{x}\dot{y} = (2k-1)h + (k-1)\frac{\cos\sigma}{y} - (k-1)\frac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$$

onde σ é o ângulo entre o vetor tangente a γ e o eixo x.

Demonstração:

Temos que

$$f(x,y) = cx^{2k-2}y^{2k-2}$$

$$\dot{x} = \cos\sigma$$

$$\dot{y} = \operatorname{sen}\sigma$$

$$\eta = (-\dot{y},\dot{x})$$

Segue do teorema 2.5 que

$$(2k-1)h = k - \frac{1}{2}\left(-\dot{y}\frac{d}{dx}\ell nf(x,y) + \dot{x}\frac{d}{dy}\ell nf(x,y)\right)$$

onde $k = \dot{x}\dddot{y} - \dddot{x}\dot{y} = \dot{\sigma}$. Logo

$$\dot{\sigma} = (2k-1)h + (k-1)\frac{\cos\sigma}{y} - (k-1)\frac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$$

A curva $\gamma(s) = \left(\frac{1}{h}\cosh s, \frac{1}{h}\operatorname{sen} hs\right)$

para $0 \leq s \leq \pi/2h$ é solução de (III).

O sistema correspondente no espaço (x,y,σ) é:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \cos\sigma \\ \dot{y} &= \operatorname{sen}\sigma \\ \dot{\sigma} &= (2k-1)h + (k-1)\frac{\cos\sigma}{y} - (k-1)\frac{\operatorname{sen}\sigma}{x} \end{aligned}$$

Para pontos sobre o eixo x ou eixo y temos a seguinte proposição análoga a 2.7

3.2 Proposição:

Para cada ponto $(x_o,0)$ do eixo x (respectivamente $(0,y_o)$ do eixo y) existe uma única curva solução γ de (III) que é analítica, $\lim_{s\to 0} \gamma(s) = (x_o,0)$ (respectivamente $\lim_{s\to 0} \gamma(s) = (0,y_o)$ e pode ser localmente expressa por $x = q(y)$ (respectivamente $y = p(x)$) com $q_y(0) = 0$ (respectivamente $p_x(0) = 0$).

Demonstração:

A prova é semelhante a 2.7, ou seja, através de substituição em série de potências. Para isto é conveniente transformar (III) em

$$\frac{d^2x}{dy^2} = (k-1)\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\frac{dx}{dy}\right) - (2k-1)h\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{3/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (k-1)\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right) + (2k-1)h\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}$$

Seja $x = a_o + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + \ldots + a_n y^n + \ldots$

Sabemos de 2.7 que

$$\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{3/2} = 1 + 6a_2^2\, y^2 + 18a_2 a_3 y^3 + \ldots$$

$$\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\,\frac{dx}{dy}\right) = \frac{1}{a_o} - 2a_2 - 3a_3 y -$$

$$- \left(\frac{a_2}{a_o^2} + 4a_4 + 8a_2^3 - \frac{4a_2^2}{a_o}\right) y^2 + \ldots$$

Logo

$$(k-1)\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\,\frac{dx}{dy}\right) - (2k-1)h\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{3/2} =$$

$$= (k-1)\left(\frac{1}{a_o} - 2a_2\right) - (2k-1)h - 3a_3(k-1)y + \ldots$$

$$= \frac{d^2x}{dy^2}$$

$$= 2a_2 + 6a_3 y + 12a_4 y^2 + \ldots$$

e portanto

$$x = x_o + \left(\frac{k-1}{2kx_o} - \frac{(2k-1)h}{2\,k}\right) y^2 + \ldots$$

donde $\dot{\sigma}$ tende a $\dfrac{(2k-1)h}{k} - \dfrac{(k-1)}{kx_o}$ quando s tende a zero.

As funções I e J são dadas por

$$I = x^{k-1}\,\mathrm{sen}\sigma - \frac{(2k-1)}{k}\, h\, x^k$$

$$J = y^{k-1}\cos\sigma + \frac{(2k-1)}{k}\, h\, y^{k}$$

3.3 Proposição:

As funções I e J são crescentes ao longo de uma curva solução γ de (III) .

Demonstração:

Temos que

$$\frac{dI}{ds} = (k-1)\,\frac{x^{k-1}\dot{x}^{2}}{y} \geqq 0$$

$$\frac{dJ}{ds} = (k-1)\,\frac{y^{k-1}\dot{y}^{2}}{x} \geqq 0$$

logo o resultado segue.

3.4 Proposição:

Se a curvatura de uma curva solução γ de (III) é zero num intervalo, isto é, $\dot{\sigma} = 0$, então γ é uma reta dada por

$$\gamma(s) = \left(-s, \frac{k-1}{(2k-1)h}\right) \quad ; \quad s < 0$$

ou

$$\gamma(s) = \left(\frac{k-1}{(2k-1)h}, s\right) \quad ; \quad s > 0$$

3.5 Proposição:

Ao longo de qualquer curva solução γ de (III) temos o seguinte limitante superior (resp. limitante inferior) para I (resp. J):

$$I(s) \leqq M \qquad (\text{resp. } J(s) \geqq M)$$

onde

$$M = \frac{1}{k} \left(\frac{k-1}{(2k-1)h} \right)^{k-1}$$

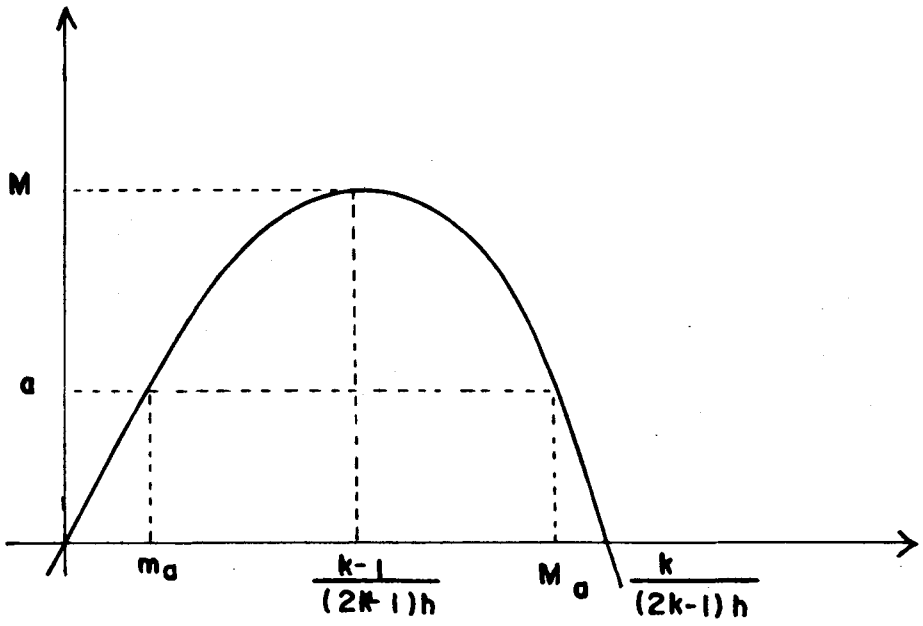
Além disso, se

$$I(s_o) = M \qquad (\text{resp. } J(s_o) = M)$$

para algum s_o, então

$$x(s) = \frac{k-1}{(2k-1)h} \qquad (\text{resp. } y(s) = \frac{k-1}{(2k-1)h})$$

Consideremos $f(x) = x^{k-1} - \frac{(2k-1)}{k} h\, x^k$. Temos $f(0) = 0$ e $f(k-1/(2k-1)h) = M$. Ainda f é crescente para $0 \leqq x \leqq k-1/(2k-1)h$ e decrescente para $x > k-1/(2k-1)h$



Assim, para cada $a > 0$ existem duas constantes m_a e M_a, $0 < m_a < \frac{k-1}{(2k-1)h} < M_a < \frac{k}{(2k-1)h}$, satisfazendo $f(m_a) = f(M_a) = a$. Além disso como $I = x^{k-1} \operatorname{sen}\sigma - \frac{(2k-1)}{k} h\, x^k \leq f(x)$ segue que $I(s) \geq a > 0$ implica $m_a < x(s) < M_a$ e $\dot{y} = \operatorname{sen}\sigma > \frac{(2k-1)}{k} h\, x > \frac{(2k-1)}{k} h\, m_a > 0$. Isto prova o seguinte lema

3.6 Lema

Seja γ uma curva solução de (III) com $I(s_o) = a > 0$. Então

$$\lim_{s\to\infty} y(s) = \infty$$

e $x(s)$ é limitado para $s \geq s_o$.

3.7 Proposição:

Seja γ uma curva solução com $I(s) = a > 0$ para algum s. Então

$$\lim_{s\to\infty} I(s) = M$$

e $x = \frac{k-1}{(2k-1)h}$ é assíntota de γ quando s tende para o infinito.

Demonstração:

Basta observar que quando s tende para o infinito γ se aproxima de uma curva solução de

$$\dot{\sigma} = (2k-1)h - (k-1)\frac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$$

O restante segue análogo a 2.13.

Seja $\tilde{\gamma}(s) = (x(s), y(s), \sigma(s))$ uma curva solução de (IV). O índice de $\tilde{\gamma}$ é o número de inteiros (mod 2π) que contém a imagem de σ. O índice de $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ é definido como sendo o índice de $\tilde{\gamma}$.

A equação

$$\dot{\sigma} = (2k-1)h + (k-1)\frac{\cos\sigma}{y} - (k-1)\frac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$$

também admite simetria em relação à reta $x = y$.

Seja $\gamma_h(s) = (x(s), y(s))$ uma curva solução de (III) com $\lim_{s\to 0} \gamma_h(s) = (2k-1,0)$ e consideremos a família $\{\gamma_h; h > 0\}$. Sabemos que esta família depende continuamente de h.

Seja d a reta $x = y$ e

$$D = \{(x,y);\ 0 \leqq x \leqq 2k-1,\ \ 0 \leqq y \leqq x\}$$

Para γ_h temos

$$I(0) = \begin{cases} > 0 & \text{se} \quad 0 < h < k/(2k-1)^2 \\ = 0 & \text{se} \quad h = k/(2k-1)^2 \\ < 0 & \text{se} \quad h > k/(2k-1)^2 \end{cases}$$

$$J(0) = 0$$

Desde que

$$\lim_{s\to 0} \dot{\sigma}(s) = \frac{(2k-1)}{k}h - \frac{k-1}{k.(2k-1)} > 0$$

quando $h > k-1/(2k-1)^2$ e devido à monotonicidade de I temos

3.8 Lema:

Se $h > k-1/(2k-1)^2$ então $x(s) < 2k-1$ para todo $s > 0$.

3.9 Lema:

Seja $[s_1,s_2]$ um intervalo de γ_h com $\dot{\sigma}(s) > 0$ para todo $s_1 \leqq s \leqq s_2$, $\sigma(s_1) = 3\pi/4 \pmod{2\pi}$, $\sigma(s_2) = \sigma(s_1) + \pi/2$ e $J(s_2) > 0$. Então $I(s_1) < I(s_2) < 0$ e

$$\Delta I = I(s_2) - I(s_1) > \frac{k-1}{2k\bar{y}} \left(\frac{(2k-1)h}{k} - \frac{(k-1)}{k\sqrt{2}\,\bar{y}} \right)^{-1} \left(\frac{k}{\sqrt{2}(2k-1)h} \right)^{k-1}$$

onde $\bar{y} = \text{máx}\{y(s);\ s_1 \leqq s \leqq s_2\}$

Demonstração:

Desde que $\dot{\sigma} > 0$ temos

$$-1 \leqq \cos\sigma(s) \leqq -1/\sqrt{2}$$

para todo $s \in [s_1,s_2]$. Assim

$$\Delta I = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dI}{ds}\, ds = \int_{s_1}^{s_2} (k-1)\, \frac{x^{k-1}\dot{x}^2}{y}\, ds =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} -\frac{(k-1)\dot{x}}{ky}\, (-k\, x^{k-1}\dot{x})\, ds$$

$$\geqq \frac{(k-1)}{k\sqrt{2}\,\bar{y}} \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds}\, (-x^k)\, ds$$

$$= \frac{k-1}{k\sqrt{2}\,\bar{y}}\, (x_1^k - x_2^k)$$

onde $x_1 = x(s_1)$ e $x_2 = x(s_2)$. Por outro lado

$$\Delta I = I(s_2) - I(s_1) = -\frac{x_2^{k-1}}{\sqrt{2}} - \frac{(2k-1)}{k}\, h\, x_2^k - \frac{x_1^{k-1}}{\sqrt{2}} + \frac{(2k-1)}{k} h\, x_1^k$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) + \frac{(2k-1)}{k}h\,(x_1^k - x_2^k)$$

$$\geqq \frac{k-1}{k\sqrt{2}\,\bar{y}}(x_1^k - x_2^k)$$

donde

$$(x_1^k - x_2^k) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2k-1)}{k}h - \frac{(k-1)}{k\sqrt{2}\,\bar{y}}\right)^{-1}(x_1^{k-1} + x_2^{k-1})$$

$$> \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2k-1)}{k}h - \frac{(k-1)}{k\sqrt{2}\,\bar{y}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{k}{\sqrt{2}(2k-1)h}\right)^{k-1}$$

Portanto

$$\Delta I > \frac{k-1}{2k\bar{y}}\left(\frac{(2k-1)}{k}h - \frac{(k-1)}{k\sqrt{2}\,\bar{y}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{k}{\sqrt{2}(2k-1)h}\right)^{k-1}$$

Temos que $\dot{\sigma} = (k-1)\frac{J}{y^k} - (k-1)\frac{I}{x^k} - (k-2)(\frac{2k-1}{k})h$

assim para $k = 2$, $J \geqq 0$ e $I \leqq 0$ implicam em $\dot{\sigma} \geqq 0$. Para $k > 2$ temos o seguinte lema.

3.10 Lema:

Seja $\gamma(s)$ uma curva solução de (III) satisfazendo $I(s) \leqq 0$, $J(s) \geqq 0$ e $\dot{\sigma}(s) \leqq 0$ então $\dot{x}(s) < 0$ e $\dot{y}(s) > 0$

Demonstração:

O lema decorre de

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} (k-1)\dfrac{J}{y^k} - (k-1)\dfrac{\dot{y}}{x} + \dfrac{(2k-1)}{k}h \\[2ex] -(k-1)\dfrac{I}{x^k} + (k-1)\dfrac{\dot{x}}{y} + \dfrac{(2k-1)}{k}h \end{cases}$$

3.11 Lema:

Seja $[s_3,s_4]$ um intervalo de γ_h com $I(s_4) < 0$, $J(s_3) > 0$, $\sigma(s_3) = 7\pi/4 \pmod{2\pi}$ e $\sigma(s_4) = \sigma(s_3) + \pi/2$. Então

$$\Delta I = I(s_4) - I(s_3) > \frac{k-1}{2k\bar{\bar{y}}}\left(\frac{(2k-1)}{k}h + \frac{k-1}{k\bar{y}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{2}(2k-1)h}\right)^{k-1}$$

onde

$$\bar{y} = \min\{y(s);\ s_3 < s < s_4\}$$

$$\bar{\bar{y}} = \max\{y(s);\ s_3 < s < s_4\}$$

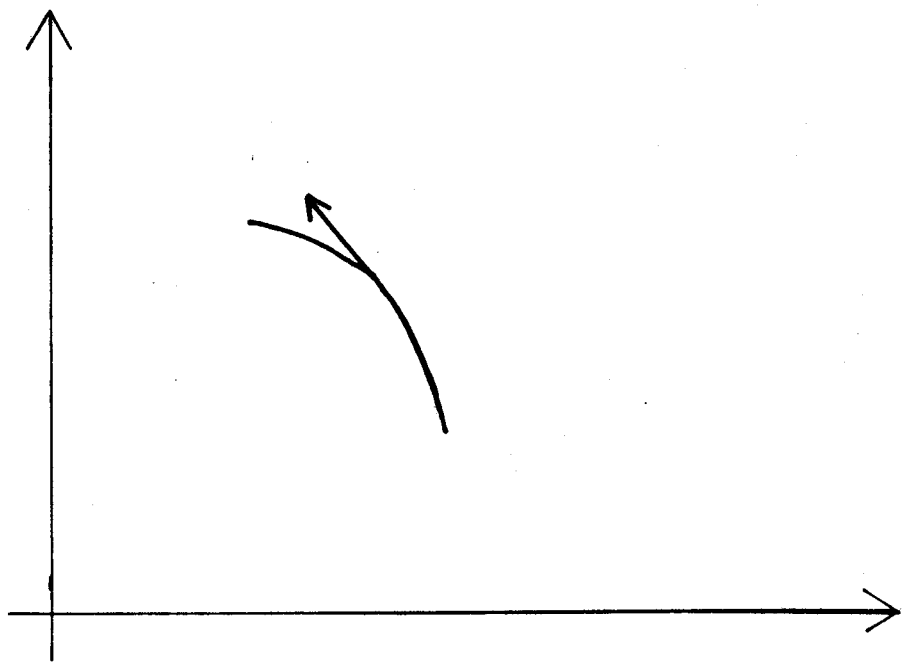
Demonstração

Sabemos de 3.10 que $\dot{\sigma}(s) > 0$ para $s \in [s_3,s_4]$. A prova segue análoga a 2.20.

Consideremos a curva

$$\Gamma(s) = \{\gamma_h(s);\ I(s) \leqq 0 \text{ e } \gamma_h(s') \in D \text{ para todo } s' \leqq s\}.$$

Pelo lema 3.10, $\dot{\sigma} > 0$ exceto possivelmente em alguns intervalos com $\dot{\sigma} < 0$ e $\dot{x} < 0$, $\dot{y} > 0$. Nestes intervalos a curva tem o seguinte comportamento



A prova da existência de uma curva solução de (III) que "começa" no eixo x e "termina" no eixo y com índice n segue análoga ao caso $k = 2$.

O caso $O(p) \times O(q)$ difere de $O(k) \times O(k)$ porque a equação correspondente

$$\dot{\sigma} = (p+q-1)h + (p-1)\frac{\cos\sigma}{y} - (q-1)\frac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$$

perde a simetria em relação à reta $x = y$ que é essencial na prova da existência de curvas soluções do tipo procurado. Assim a prova para o caso $n = p + q$ que é dada em [4] é completamente diferente de $n = 2k$ por isto não faremos aqui.

CAPÍTULO IV

A - Equações Diferenciais Ordinárias

Seja $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

4.1 Definição:

Uma função contínua $f(X,t)$ definida numa região R de $\mathbb{R}^{n+1}$ com valores em $\mathbb{R}$ é dita lipschitziana em X se

$$|f(X_1,t) - f(X_2,t)| \leq k|X_1 - X_2|$$

onde (X_1,t), (X_2,t) pertencem a R.

4.2 Lema:

Seja R uma região de $\mathbb{R}^{n+1}$ convexa nas componentes $x_1, \ldots, x_n$ de X, isto é, fixado t_o, a região n-dimensional dada por (X,t_o) em R é convexa para cada t_o. Então, se cada derivada parcial $\frac{\partial f(X,t)}{\partial x_i}$, $i = 1,\ldots,n$, existe e é limitada por N em R, $f(X,t)$ é lipschitziana com constante $k = n.N$.

4.3 Definição:

Uma função contínua $F(X,t)$ definida numa região R de $\mathbb{R}^{n+1}$ com valores em $\mathbb{R}^n$ é lipschitziana em X com constante k se

$$|F(X_1,t) - F(X_2,t)| \leq k|X_1 - X_2|$$

onde (X_1,t) e (X_2,t) pertencem a R.

4.4 Lema:

A função $F(X,t)$ é lipschitziana se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas o é.

Seja $X = (x,y,\sigma)$ e

$$F(X,s) = (\cos\sigma(s), \operatorname{sen}\sigma(s),\ (2k-1)h + (k-1)\frac{\cos\sigma(s)}{y(s)} - (k-1)\frac{\operatorname{sen}\sigma(s)}{x(s)}$$

A equação (III) pode ser escrita na forma

$$\dot{X} = F(X,s)$$

4.5 Teorema:

Na região $\Omega = \{(x,y) \in R^2 / x \geqq c, y \geqq c\}$, $c > 0$ suficientemente pequeno, a função $F(X,s)$ dada acima é lipschitziana.

Demonstração:

Segue de 4.2 e 4.3 que $F(X,s)$ é lipschitziana se cada derivada parcial $\frac{\partial f_i(X,s)}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i(X,s)}{\partial y}$, $\frac{\partial f_i(X,s)}{\partial \sigma}$ for limitada

i) $f_1(X,s) = \cos\sigma(s)$

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right| = 0\ ,\ \left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right| = 0,\ \left|\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right| = |-\operatorname{sen}\sigma(s)| \leqq 1$$

ii) $f_2(X,s) = \operatorname{sen}\sigma(s)$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right| = 0,\ \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right| = 0\ ,\ \left|\frac{\partial f_2}{\partial \sigma}\right| = |\cos\sigma(s)| \leqq 1$$

iii) $f_3(X,s) = (2k-1)h + (k-1)\dfrac{\cos\sigma}{y} - (k-1)\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{x}$

$$\left|\frac{f_3}{\partial x}\right| = \left|(k-1)\frac{\operatorname{sen}\sigma}{x^2}\right| \leq \frac{k-1}{c^2}$$

$$\left|\frac{\partial f_3}{\partial y}\right| = \left|-(k-1)\frac{\cos\sigma}{y^2}\right| \leq \frac{k-1}{c^2}$$

$$\left|\frac{\partial f_3}{\partial \sigma}\right| = \left|-(k-1)\frac{\operatorname{sen}\sigma}{y} - (k-1)\frac{\cos\sigma}{x}\right| \leq \frac{2(k-1)}{c}$$

4.6 Teorema:

Seja $F(X,t,h)$ uma função definida em $R \times G$, onde R é uma região de $\mathbb{R}^{n+1}$ e G um fechado de $\mathbb{R}^k$, com valores em $\mathbb{R}^n$, contínua em $(X,t) \in R$ e $h \in G$ e localmente lipschitziana em X independente de h em G. Então para cada (X_o,t_o,h) em $R \times G$, existe uma única solução $X(t,X_o,t_o,h)$ de $\dot{X} = F(t,X,h)$ com $X(t_o,X_o,t_o,h) = X_o$ e contínua em (t,X_o,t_o,h).

B - Teorema da transversalidade

Seja M uma variedade .

4.7 Definição:

Se duas subvariedades N, S de M são tais que $T_pN + T_pS = T_pM$ em todo ponto p de $N \cap S$, dizemos que N e S se interceptam transversalmente.

4.8 Teorema:

Sejam N^n, S^s subvariedades de M^m de classe c^k. Se N e S se interceptam transversalmente então $N \cap S$ é uma subvariedade de M cuja dimensão é $n + s - m$.

R E F E R Ê N C I A S

[1] C. Delaunay, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures et Appliquées, (1)6(1841), 309-320.

[2] W. Y. Hsiang, Z. H. Teng e W. C. Yu, *New examples of constant mean curvature immersions of 3-sphere into euclidean 4-space*, Preprint

[3] W. Y. Hsiang, Z. H. Teng e W. C. Yu, *New examples of constant mean curvature immersions of (2k-1)-spheres into euclidean 2k-space*, Ann. of Math., 117(1983), 609-625.

[4] W. Y. Hsiang, *Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces. I*, J. Diff. Geom., 17(1982), 337-356.

[5] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, New York, Wiley - Interscience, 1969.

[6] W. Hurewicz, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1958.

[7] E. L. Lima, *Variedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro, IMPA, 1973.

[8] G. Birkhoff e G. C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, Ginn and Company, 1962.

[9] J. M. Gomes, *Sobre hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico*, Rio de Janeiro, Tese de Doutorado, IMPA, 1985

[10] M. J. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, W. A. Benjamin, Inc., 1967.

[11] H. C. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 121 nº 1 (1986), 193 - 243.