Órbitas Homoclínicas de Equações Diferenciais Funcionais

Magda Kimico Kaibara

Orientação
Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos -
USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

USP - São Carlos
Maio 1992

À minha “Família”.

Agradeço aos meus pais pela dedicação. Ao Gaspar pela paciência, atenção e incentivo. Aos amigos pelo coração sempre aberto. A Deus...

Este trabalho conta com apoio do CNPq e da Capes

Abstract

Suppose an autonomous functional differential equation has an orbit Γ which is homoclinic to a hyperbolic equilibrium point.

Our aim is to study a procedure for determining the behavior of solutions, close to Γ , of a functional differential equation which is a nonautonomous periodic perturbation of the original one.

This procedure uses exponential dichotomies and the Fredholm alternative.

Conteúdo

Introdução	ii
1 Preliminares	1
1.1 A Equação Diferencial Linear com Retardamento	1
1.2 A Adjunta Formal e a Adjunta Verdadeira	9
2 Dicotomias Exponenciais	20
3 Alternativa de Fredholm para Soluções Limitadas de Equações Diferenciais Funcionais	36
4 Bifurcação de Órbitas Homoclínicas	54
Bibliografia	62

Introdução

Suponhamos que uma equação diferencial funcional autônoma possui uma órbita Γ homoclínica a um ponto de equilíbrio hiperbólico. Nosso objetivo é estudar um procedimento para determinar o comportamento das soluções perto de Γ de uma equação que é uma perturbação não autônoma periódica da equação original.

Quando consideramos uma equação variacional linear perto de uma órbita homoclínica de uma equação autônoma num espaço de dimensão finita, Palmer [8] observou que o estudo do comportamento das soluções de sistemas periodicamente perturbados perto desta órbita pode ser estudado sob o ponto de vista das dicotomias exponenciais. Explorando este fato e utilizando as técnicas de Liapunov-Schmidt e a Alternativa de Fredholm realizou este trabalho. A diferença entre o trabalho de Palmer e o nosso que é baseado em Lin [7] é o universo em que trabalhamos. Nós consideramos o espaço de Banach das funções contínuas num intervalo fechado com imagem em $\mathbb{R}^n$ que denotamos por C .

Algumas definições e resultados básicos de equações diferenciais funcionais são apresentados no primeiro capítulo. Definimos o operador solução $T(t, s)$ do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= L(t)x_t, \quad t \geq \sigma \\ x_\sigma &= \phi\end{aligned}\tag{0.1}$$

onde $L(t)$ pertence ao conjunto dos operadores lineares contínuos em C tomando valores em $\mathbb{R}^n$ e $L(t)$ é contínuo com respeito a t num intervalo $J \subset \mathbb{R}$. Consideramos o sistema perturbado de (0.1)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= L(t)x_t + h(t), \quad t \geq \sigma \\ x_\sigma &= \phi\end{aligned}\tag{0.2}$$

cuja solução é dada pela Fórmula da Variação das Constantes. Estudamos uma relação entre os operadores adjunto verdadeiro $T^*(s, t)$ e adjunto formal $\tilde{T}(s, t)$ associados a equação (0.1) bem como uma relação entre as soluções do sistema

linear não homogêneo (0.2) e as soluções do sistema adjunto formal

$$y(s) + \int_s^\infty y(\alpha)\eta(\alpha, s - \alpha)d\alpha = \text{constante}$$

No capítulo dois é definida dicotomia exponencial para o operador solução $T(t, s)$ da equação (0.1) o que implicará na existência da dicotomia exponencial para o operador adjunto verdadeiro $T^*(s, t)$. Estudamos algumas propriedades das projeções associadas a essas dicotomias exponenciais. Alguns resultados básicos sobre perturbações de sistemas do tipo (0.1) são também apresentados. A parte central deste capítulo consiste no estudo da extensão do intervalo onde (0.1) possui dicotomia exponencial.

Apresentamos no terceiro capítulo teoremas que nos fornecem condições necessárias e suficientes para que uma função $x : \mathbf{R}_+(\mathbf{R}_-) \rightarrow \mathbf{R}^n$ seja solução limitada da equação (0.2). Construímos um isomorfismo entre as soluções do sistema adjunto verdadeiro e as soluções do sistema adjunto formal da equação linear (0.1) que juntamente com os resultados já obtidos garantem condições suficientes para que (0.1) possua dicotomia exponencial em $\mathbf{R}_+$ e $\mathbf{R}_-$. Encerramos este capítulo com o teorema da Alternativa de Fredholm para soluções limitadas da equação diferencial funcional (0.2). Além disso, são definidas fórmulas e significados para

$$(1) T(t, s)X_0;$$

$$(2) \int_a^b T(t, s)X_0 h(s)ds;$$

$$(3) \langle \psi, T(t, s)X_0 \rangle = \langle T^*(s, t)\psi, X_0 \rangle;$$

$$(4) \langle \psi, \int_a^b T(t, s)X_0 h(s)ds \rangle = \int_a^b \langle \psi, T(t, s)X_0 \rangle h(s)ds;$$

$$(5) P(s)X_0, Q(s)X_0;$$

$$(6) T(t, s)P(s)X_0 = P(t)T(t, s)X_0;$$

$$(7) \langle \psi, T(t, s)P(s)X_0 \rangle = \langle T^*(s, t)P^*(t)\psi, X_0 \rangle;$$

$$(8) \langle \psi, T(s, t)Q(t)X_0 \rangle = \langle T^*(t, s)Q^*(s)\psi, X_0 \rangle$$

onde

$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0 & -r \leq \theta < 0 \\ I & \theta = 0. \end{cases}$$

Isto é necessário pois X_0 não é contínua e possui papel importante nas soluções do sistema linear não homogêneo.

Finalizando, consideramos a equação escalar retardada:

$$\dot{x}(t) = \alpha(x(t))x(t) + \beta(x(t))x(t-1)$$

que supomos possuir uma trajetória homoclínica $p(t)$ a $x \equiv 0$. Estudamos então o comportamento das soluções perto de $p(t)$ do sistema periodicamente perturbado:

$$\dot{x}(t) = \alpha(x(t))x(t) + \beta(x(t))x(t-1) + h(t, x_t, \mu)$$

utilizando as técnicas de Liapunov-Schmidt e a Alternativa de Fredholm para soluções limitadas apresentada no capítulo três.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos resultados básicos que serão utilizados no desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Na seção (1.1) definimos e apresentamos propriedades do operador solução da equação $\dot{x}(t) = L(t)x_t$ e a Fórmula da Variação das Constantes para a equação $\dot{x}(t) = L(t)x_t + h(t)$. Na seção (1.2) definimos os operadores adjunto formal e adjunto verdadeiro e resultados relacionando estes operadores e as soluções do sistema linear não homogêneo com as soluções do sistema adjunto formal. A teoria apresentada neste capítulo pode ser encontrada em [6].

1.1 A Equação Diferencial Linear com Retardamento

Para cada $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times C$, consideremos o sistema linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= L(t)x_t + h(t), & t \geq \sigma \\ x_\sigma &= \phi\end{aligned}\tag{1.1}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}x(t) &= \phi(0) + \int_\sigma^t L(s)x_s ds + \int_\sigma^t h(s) ds, & t \geq \sigma \\ x_\sigma &= \phi\end{aligned}$$

onde:

- ϕ pertence ao conjunto das funções contínuas em $[-r, 0]$ com valores em $\mathbb{R}^n$, isto é, a $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ que denotaremos por C .
- $x_t(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} x(t + \theta)$, onde $-r \leq \theta \leq 0$ e $x(t)$ está definida em algum intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tomando valores em $\mathbb{R}^n$.
- $h \in L^1_{loc}([\sigma, +\infty), \mathbb{R}^n)$, o espaço das funções definidas em $[\sigma, +\infty)$ com valores em $\mathbb{R}^n$, Lebesgue integráveis em cada compacto de $[\sigma, +\infty)$.
- $L(t)$ pertence ao conjunto dos operadores lineares contínuos em C tomando valores em $\mathbb{R}^n$, isto é, $L(t) \in \mathcal{L}(C, \mathbb{R}^n)$. Logo, existe uma função matricial $n \times n$ obtida do teorema de Riesz, $\eta(t, \theta)$, que é mensurável em $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, normalizada tal que:

$$\eta(t, \theta) = \begin{cases} 0 & \theta \geq 0 \\ \eta(t, -r) & \theta \leq -r; \end{cases}$$

contínua à esquerda em $\theta \in (-r, 0)$; $\eta(t, \cdot)$ possui variação limitada em $[-r, 0]$ para cada t , e existe uma função $m \in L^1_{loc}((-\infty, +\infty), \mathbb{R})$ tal que:

$$L(t)\phi = \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \phi(\theta)$$

$$|L(t)\phi| \leq m(t)|\phi|$$

para todo $t \in (-\infty, +\infty)$ e $\phi \in C$. Claramente, $V_{\theta=-r}^0 \eta(t, \theta) \leq m(t)$, onde $V_{\theta=-r}^0 \eta(t, \theta)$ é a variação total de $\eta(t, \theta)$ em $[-r, 0]$.

Teorema 1.1 (Teorema de Arzelá - Áscoli) *Seja $\mathcal{K}$ um espaço métrico compacto e $\mathcal{E} \subset C(\mathcal{K}, \mathbb{R}^n)$, tal que:*

- Existe um número real $N > 0$ tal que $|f(x)| \leq N$ para todo $x \in \mathcal{K}$ e para todo $f \in \mathcal{E}$;*
- $\mathcal{E}$ é equicontínuo.*

Então $\mathcal{E}$ é relativamente compacto.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [10]

Teorema 1.2 (Teorema não simétrico de Fubini) *Seja $k(x)$ uma função de variação limitada sobre qualquer intervalo finito. Seja $p(x, u)$ Borel mensurável*

em (x, u) ; $p(x, u)$ de variação limitada em u em qualquer intervalo finito para quase todo x com respeito a $k(x)$. Denotemos por $V(x, u)$ a variação

$$V(x, u) = \int_{0+}^{u+} |d_v p(x, v)|.$$

Assumamos que $\int_{-\infty}^{+\infty} V(x, u) |dk(x)|$ existe (é finita) para todo u . Seja $s(u)$ Borel mensurável em $(-\infty, +\infty)$. Então a existência (finita) de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(u)| d_u \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, u) |dk(x)|$$

implica a existência da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |dk(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |s(u)| |d_u p(x, u)|$$

a igualdade e reciprocamente. Além disso, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(u) d_u \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u) dk(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk(x) \int_{-\infty}^{+\infty} s(u) d_u p(x, u)$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3].

Consideremos, agora, o sistema linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(t)x_t, & t \geq \sigma \\ x_\sigma &= \phi \end{aligned} \tag{1.2}$$

com a hipótese adicional: $L(t)$ é contínua com respeito a $t \in J$ na norma de operadores.

Definição 1.1 O operador solução de (1.2) é a aplicação $T(t, s) : C \rightarrow C$, definida por $T(t, s)\phi = x_t(s, \phi)$ que a cada $\phi \in C$, associa a solução $x_t(s, \phi)$ de (1.2) que no instante s possui a condição inicial ϕ .

Lema 1.1 O operador solução possui as seguintes propriedades:

- (i) $T(t, s)$ é um operador linear limitado;
- (ii) a família $\{T(t, s) : t \geq s\} \subset \mathcal{L}(C)$ é uma família de operadores de evolução, isto é:
 - (a) $T(s, s) = I$,
 - (b) $T(t, \tau)T(\tau, s) = T(t, s)$, $t \geq \tau \geq s$;
 - (c) a aplicação $(t, s) \rightarrow T(t, s)\phi$ é contínua para cada ϕ em C e $t \geq s$;
- (iii) $T(t, s)$ é um operador compacto para $t \geq s + r$.

Demonstração

(i) A linearidade de $T(t, s)$ segue da linearidade da $L(t)$ e da unicidade de soluções de (1.2).

Provemos a continuidade de $T(t, s)$.

A solução de (1.2) para cada t, s fixados pode ser escrita como:

$$T(t, s)\phi(\theta) = \begin{cases} \phi(\theta) & t + \theta \leq s \\ \phi(0) + \int_s^{t+\theta} L(u)(T(t, s)\phi) du & t + \theta > s. \end{cases}$$

Tomando-se a norma na equação acima e a seguir o sup em $\theta \in [-r, 0]$ obtemos:

$$|T(t, s)\phi| \leq |\phi| + \int_s^t |L(u)||T(u, s)\phi| du.$$

Da continuidade de $L(u)$ em relação a u pertencente ao compacto $[s, t]$ segue:

$$|L(u)| \leq l.$$

Então pela desigualdade de Gronwall:

$$|T(t, s)\phi| \leq e^{l(t-s)}|\phi|$$

para todo $t \geq s$.

(ii) O item (a) é imediato.

Provar que $T(t, \tau)T(\tau, s) = T(t, s)$, para todo $t \geq \tau \geq s$ é equivalente a provar que:

$$x_t(\tau, x_\tau(s, \phi)) = x_t(s, \phi).$$

Em particular para $\tau = s$, o primeiro e o segundo membros da igualdade acima são iguais a $x_t(s, \phi)$. Então pela unicidade de soluções de (1.2) segue a igualdade para todo $t \geq \tau \geq s$.

(c) Notemos que:

(a')

$$|T(t, s)\phi - \phi| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} |T(t, s)\phi(\theta) - \phi(\theta)| \longrightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow s.$$

(b') Para $t \geq r \geq s$:

$$|T(t, r)\phi - T(t, s)\phi| = |T(t, r)(I - T(r, s))\phi| \longrightarrow 0,$$

quando $r \rightarrow s$, segue de (a) e da continuidade do operador solução.

(c') Para $t \geq w \geq r$:

$$|T(t, r)\phi - T(w, r)\phi| = |(T(t, w) - I)T(w, r)\phi| \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow w$ (de (a')). Consideremos agora $|T(t, s)\phi - T(w, r)\phi|$. Então ou $t \geq w$ ou $w \geq t$. Cada uma destas possibilidades divide-se em outras três, do seguinte modo:

(1) $t \geq w \geq r \geq s$ ou $t \geq w \geq s \geq r$ ou $t \geq s \geq w \geq r$;

(2) $w \geq t \geq s \geq r$ ou $w \geq t \geq r \geq s$ ou $w \geq r \geq t \geq s$.

No caso (1) temos:

$$\begin{aligned} |T(t, s)\phi - T(w, r)\phi| &= |T(t, s)\phi - T(t, r)\phi + T(t, r)\phi - T(w, r)\phi| \\ &\leq |T(t, s)\phi - T(t, r)\phi| + |T(t, r)\phi - T(w, r)\phi| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $(t, s) \rightarrow (w, r)$ para cada uma das possibilidades de (1) usando (b') e (c').

No caso (2) temos:

$$|T(t, s)\phi - T(w, r)\phi| \leq |T(t, s)\phi - T(w, s)\phi| + |T(w, s)\phi - T(w, r)\phi| \rightarrow 0,$$

quando $(t, s) \rightarrow (w, r)$ para cada uma das possibilidades de (2), usando (b') e (c').

Portanto, quando $(t, s) \rightarrow (w, r)$; $|T(t, s)\phi - T(w, r)\phi| \rightarrow 0$.

(iii) Seja $S = \{\phi \in C : |\phi| \leq R\}$, onde $R > 0$.

Mostremos que para cada t, s fixados; $T(t, s)S$ é relativamente compacto em C .

A hipótese (a) do teorema de Arzelá - Áscoli segue da continuidade de $T(t, s)$. Verifiquemos (b).

Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon / (lRe^{l(t-s)})$. Se $|\theta_1 - \theta_2| < \delta$ então:

$$\begin{aligned} |T(t, s)\phi(\theta_2) - T(t, s)\phi(\theta_1)| &= |x_t(s, \phi)(\theta_2) - x_t(s, \phi)(\theta_1)| \\ &= |x(s, \phi)(t + \theta_2) - x(s, \phi)(t + \theta_1)|. \end{aligned}$$

Se $t - s \geq r$, o último membro é:

$$\leq |\dot{x}(s, \phi)(\tilde{t})||\theta_2 - \theta_1|,$$

onde $\tilde{t} \in (t + \theta_1, t + \theta_2)$. Mas como,

$$|\dot{x}(s, \phi)(\tilde{t})| \leq |L(\tilde{t})| |x_i(s, \phi)| \leq l |T(\tilde{t}, s) \phi| \leq l e^{l(t-s)} R$$

obtemos:

$$|T(t, s) \phi(\theta_2) - T(t, s) \phi(\theta_1)| \leq \epsilon.$$

Pelo Teorema de Áscoli, o fêcho de $T(t, s)S$ é compacto em C . Logo $T(t, s)$ é um operador compacto para $t - s \geq r$. $\square$

Teorema 1.3 *Suponhamos que L satisfaz as hipóteses dadas inicialmente neste capítulo. Dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ e $h \in L^1_{loc}([\sigma, +\infty), \mathbb{R}^n)$ existe uma única função $x(\sigma, \phi)$ definida e contínua em $[\sigma - r, +\infty)$ que satisfaz o sistema (1.1) em $[\sigma, +\infty)$.*

Definição 1.2 *Consideremos a função*

$$L : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$$

linear em ϕ e contínua em $(t, \phi) \in \mathbb{R} \times C$. Dizemos que $L(t)\phi$ é atômica em β em $\mathbb{R} \times C$ se $\det A(t, \beta) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ onde

$$A(t, \beta) = \eta(t, \beta^+) - \eta(t, \beta^-).$$

Exemplo: Consideremos $\dot{x}(t) = x(t - 1)$. Claramente, $L(t)\phi = \phi(-1)$ o que implica $\eta(t, \theta) = 0$ se $\theta > -1$ e $\eta(t, \theta) = -1$ caso contrário. Consequentemente, $A(t, -1) = \eta(t, -1^+) - \eta(t, -1^-) = 1$.

Lema 1.2 *Consideremos o operador solução $T(t, s) : C \rightarrow C$ da equação $\dot{x}(t) = L(t)x_t$ onde $L : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua. Se $L(t)\phi$ é atômica em $-r$ em $\mathbb{R} \times C$ então $T(t, s)$ é injetora.*

Teorema 1.4 (Fórmula da Variação das Constantes) *Suponhamos que L satisfaz as hipóteses anteriores, $h \in L^1_{loc}([\sigma, +\infty), \mathbb{R}^n)$ e $x(\sigma, \phi, h)$ é a solução do sistema (1.1), então:*

$$\begin{aligned} x(\sigma, \phi, h)(t) &= x(\sigma, \phi, 0)(t) + \int_{\sigma}^t U(t, s) h(s) ds, \quad t \geq \sigma \\ x_{\sigma} &= \phi \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde $U(t, s)$ é a solução da equação:

$$U(t, s) = \begin{cases} \int_s^t L(u, U_u(., s)) du + I & \text{para quase todo } s, \quad t \geq s \\ 0 & s - r \leq t < s \end{cases} \quad (1.4)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t, s)}{\partial t} &= L(t, U_t(., s)), \quad t \geq s \text{ para quase todo } s \text{ e } t \\ U(t, s) &= \begin{cases} 0 & s - r \leq t < s \\ I & t = s \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde $U_t(., s)(\theta) = U(t + \theta, s)$, $-r \leq \theta \leq 0$. A função $U(t, s)$ é chamada de matriz fundamental.

Observação 1.1 Podemos escrever a Fórmula da Variação das Constantes como:

$$x_t(\sigma, \phi, h) = T(t, \sigma)\phi + \int_{\sigma}^t T(t, s)X_0 h(s)ds, \quad t \geq \sigma$$

onde:

$$\begin{aligned} T(t, s)X_0 &= U_t(., s) \\ X_0(\theta) &= \begin{cases} 0 & -r \leq \theta < 0 \\ I & \theta = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

De fato, de (1.3) obtemos:

$$\begin{aligned} x(\sigma, \phi, h)(t + \theta) &= x(\sigma, \phi, 0)(t + \theta) + \int_{\sigma}^{t+\theta} U(t + \theta, s)h(s)ds, \quad t + \theta \geq \sigma \\ x(\sigma, \phi, h)(t + \theta) &= \phi(t - \sigma + \theta) \quad \sigma - r \leq t + \theta \leq \sigma, \quad \theta \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{cases} U(t + \theta, s) = 0 & s > t + \theta \\ x(\sigma, \phi, 0)(t + \theta) = \phi(t - \sigma + \theta) & \sigma - r \leq t + \theta \leq \sigma \end{cases}$$

temos que:

$$x(\sigma, \phi, h)(t + \theta) = x(\sigma, \phi, 0)(t + \theta) + \int_{\sigma}^t U(t + \theta, s)h(s)ds, \quad t \geq \sigma, \theta \in [-r, 0]$$

ou:

$$x_t(\sigma, \phi, h)(\theta) = x_t(\sigma, \phi, 0)(\theta) + \int_{\sigma}^t U_t(., s)(\theta)h(s)ds, \quad t \geq \sigma, \theta \in [-r, 0]$$

ou:

$$x_t(\sigma, \phi, h) = x_t(\sigma, \phi, 0) + \int_{\sigma}^t U_t(., s)h(s)ds, \quad t \geq \sigma$$

onde a integral na expressão acima é uma integral no espaço euclidiano onde todas as operações usuais para integrais são válidas. Isto é, cada função é primeiro calculada em θ e então a integral é obtida como uma integral usual de $\mathbb{R}^n$.

Como $U(t, s)$ é contínua em t para $t \geq s$, segue da equação (1.4) que $U(t, s)$ possui a primeira derivada contínua em t para $t > s + r$. Então, a equação (1.5) é satisfeita em t para todo $t \geq s + r$ e para quase todo s . Portanto, podemos escrever:

$$U_t(., s) = T(t, s)X_0$$

$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0 & -r \leq \theta < 0 \\ I & \theta = 0. \end{cases}$$

Deste modo a Fórmula da Variação das Constantes torna-se:

$$x_t(\sigma, \phi, h) = T(t, \sigma)\phi + \int_{\sigma}^t T(t, s)X_0h(s)ds, \quad t \geq \sigma.$$

Observação 1.2 Se para cada $t \geq \sigma$, $x_t \in C$ é dada por

$$x_t = T(t, \sigma)\phi + \int_{\sigma}^t T(t, s)X_0h(s)ds$$

então a função $w : [\sigma - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $w(t + \theta) = x_t(\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$, $t \geq \sigma$, satisfaz (1.1).

De fato,

$$T(t, \sigma)\phi(\theta) = T(t + \theta, \sigma)\phi(0) \quad \text{para } \theta \in [-r, 0] \text{ e } t \geq \sigma$$

e

$$\int_{\sigma}^t T(t, s)X_0(\theta)h(s)ds = \begin{cases} \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t + \theta, s)X_0(0)h(s)ds & t + \theta \geq \sigma \\ 0 & t + \theta \leq \sigma. \end{cases}$$

Portanto, se definirmos:

$$\begin{aligned} w(t) &= x_t(0) & t \geq \sigma \\ w(\sigma + \theta) &= \phi(\theta) & \theta \in [-r, 0] \end{aligned}$$

claramente obtemos: $x_t(\theta) = w(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$, $t \geq \sigma$.

Portanto, $x(\sigma, \phi, h)$ é solução se, e somente se, satisfaz

$$x_t = T(t, \sigma)\phi + \int_{\sigma}^t T(t, s)X_0h(s)ds.$$

1.2 A Adjunta Formal e a Adjunta Verdadeira

Definição 1.3 A equação:

$$y(s) + \int_s^\infty y(\alpha) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha = cte \quad (1.6)$$

onde $y \in \mathbb{R}^{n*}$, espaço dos vetores linha de dimensão n , é chamada equação adjunta formal de (1.2).

Exemplo: Se $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-1)$ então $y(s) + \int_s^{s+1} [-(y\alpha)]A(\alpha)d\alpha + \int_{s+1}^t [-y(\alpha)][A(\alpha) + B(\alpha)]d\alpha = cte$ é a sua equação adjunta formal.

No estudo que se segue, frequentemente será conveniente usar uma função p que definimos como $p(t, s) = \eta(t, s - t)$. Então:

$$p(t, s) = \begin{cases} 0 & s \geq t \\ p(t, t - r) & s \leq t - r \end{cases}$$

com isto a equação adjunta formal torna-se

$$\dot{y}(s) + \int_s^\infty \dot{y}(\alpha) p(\alpha, s) d\alpha = cte \quad (1.7)$$

Seja $B_0 = B_0[-r, 0]$, o espaço de Banach das funções $\psi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ de variação limitada em $[-r, 0]$; contínuas à esquerda em $(-r, 0)$, $\psi(0) = 0$ e cuja norma é dada por $|\psi| = V_{\theta=-r}^0 \psi$.

Teorema 1.5 Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\psi \in B_0$, existe uma única $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ que se anula em $[t, +\infty)$, satisfaz a equação (1.6) em $(-\infty, t - r]$, e tal que $y_t = \psi$. Para cada $s \leq t$, seja y_s definido por:

$$\begin{aligned} y_s(\theta) &= y(s + \theta), & -r \leq \theta < 0 \\ y_s(0) &= 0. \end{aligned}$$

Então esta solução pode ser escrita para cada $s \leq t$ como:

$$y_s = \tilde{T}(s, t) y_t = \tilde{T}(s, t) \psi$$

onde $\tilde{T}(s, t) : B_0 \rightarrow B_0$ é linear e limitado.

Lema 1.3 $\{\tilde{T}(s, t) : s \leq t\}$ satisfaz:

$$(i) \tilde{T}(t, t) = I$$

$$(ii) \tilde{T}(s, \tau) \tilde{T}(\tau, t) = \tilde{T}(s, t), \quad s \leq \tau \leq t.$$

Demonstração Análoga ao item (ii) do lema 1.1.

Teorema 1.6 Se x satisfaz a equação (1.1) em $[\sigma, +\infty)$, então para todo $t \geq \sigma$,

$$x(t) = Y(\sigma, t)x(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma-} d\beta \left\{ \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t)p(\alpha, \beta)d\alpha \right\} x(\beta) + \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t)h(\alpha)d\alpha \quad (1.8)$$

onde a função matricial $n \times n$, Y , é definida por:

$$Y(\sigma, t) = \begin{cases} 0 & \sigma > t \\ I - \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma)d\alpha & \sigma \leq t. \end{cases}$$

Além disso, $Y(\sigma, t)$ é absolutamente contínua em t em cada conjunto compacto de $t \leq \sigma$, localmente de variação limitada em σ , e $Y(\sigma, t) = U(t, \sigma)$ para quase todo σ , onde $U(t, \sigma)$ é definida pela equação (1.4).

Consideremos, agora, C^* , o dual de C . Se $\psi \in C^*$, o funcional linear $\phi \mapsto \psi(T(t, s)\phi)$ é a composição de duas aplicações lineares contínuas, ψ e $T(t, s)$, e portanto é um elemento de C^* . Denotamos este funcional por $T^*(s, t)\psi$ para indicar sua dependência de ψ e $T(t, s)$. A correspondência $\psi \mapsto T^*(s, t)\psi$ é linear e define o operador $T^*(s, t)$ de C^* em C^* . Temos então a definição:

Definição 1.4 O operador $T^*(s, t)$ é chamado o adjunto (verdadeiro) de $T(t, s)$ e é definido por:

$$\langle T^*(s, t)\psi, \phi \rangle = \langle \psi, T(t, s)\phi \rangle.$$

Identificaremos B_0 com o espaço dual de C , C^* , usando a relação:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{-\tau}^0 d\psi(\theta)\phi(\theta)$$

para todo $\psi \in B_0$ e $\phi \in C$, ainda quando a função ϕ possua uma quantidade enumerável de pontos de descontinuidade.

Lema 1.4 O operador adjunto possui as seguintes propriedades:

(i) A família $\{T^*(s, t) : s \leq t \text{ em } J\}$ satisfaz:

(a) $T^*(t, t) = I$,

(b) $T^*(s, \tau)T^*(\tau, t) = T^*(s, t)$, $t \geq \tau \geq s$;

(ii) $s \rightarrow \langle T^*(s, t)\psi, \phi \rangle$ é contínua com respeito a $s \leq t$ em J , $\psi \in C^*$, $\phi \in C$.

Demonstração

(i) (a) Como $\langle T^*(t, t)\psi, \phi \rangle = \langle \psi, T(t, t)\phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$, para todo $\psi \in C^*$, para todo $\phi \in C$, segue que $T^*(t, t) = I$.

(b) Seja $s \leq \tau \leq t$. Então:

$$\begin{aligned} \langle T^*(s, \tau)T^*(\tau, t)\psi, \phi \rangle &= \langle T^*(\tau, t)\psi, T(\tau, s)\phi \rangle \\ &= \langle \psi, T(t, \tau)T(\tau, s)\phi \rangle \\ &= \langle \psi, T(t, s)\phi \rangle \\ &= \langle T^*(s, t)\psi, \phi \rangle \end{aligned}$$

para todo $\psi \in C^*$ e para todo $\phi \in C$. Assim,

$$T^*(s, \tau)T^*(\tau, t) = T^*(s, t)$$

para todo $s \leq \tau \leq t$ em J .

(ii) Seja $\tau, s \leq t$, $\psi \in C^*$ e $\phi \in C$. Quando $\tau \rightarrow s$,

$$\langle T^*(\tau, t)\psi, \phi \rangle \rightarrow \langle \psi, T(t, \tau)\phi \rangle \rightarrow \langle \psi, T(t, s)\phi \rangle$$

pela continuidade forte de $T(t, s)$ em (t, s) . Mas,

$$\langle \psi, T(t, s)\phi \rangle = \langle T^*(s, t)\psi, \phi \rangle$$

logo,

$$\langle T^*(\tau, t)\psi, \phi \rangle \rightarrow \langle T^*(s, t)\psi, \phi \rangle. \square$$

Definição 1.5 Um operador Ω em B_0 é dito quase-nilpotente se o zero é o único elemento no espectro de Ω .

Se Ω é o operador de Volterra,

$$\Omega\psi(\theta) = \int_{\theta}^0 \psi(\alpha)\mu(\alpha, \theta)d\alpha, \quad -r \leq \theta \leq 0$$

onde $\mu(\alpha, \theta)$ é uma função matricial $n \times n$, que satisfaz as mesmas condições que η , então Ω é quase-nilpotente.

Observação 1.3 Todo operador nilpotente é quase-nilpotente. A recíproca não é verdadeira (ver [10]).

Teorema 1.7 Para cada $t \geq \sigma$,

$$T^*(\sigma, t) = (I + \Omega(\sigma))\tilde{T}(\sigma, t)(I + \Omega(t))^{-1}$$

onde $\tilde{T}(\sigma, t)$ é dado no teorema 1.5 e $\Omega(\sigma)$ é o operador quase-nilpotente em B_0 definido por

$$(\Omega(\sigma)\psi)(\theta) = \int_{\theta}^0 \psi(\alpha)\eta(\sigma + \alpha, \theta - \alpha)d\alpha, \quad -r \leq \theta \leq 0 \quad (1.9)$$

para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ e $\psi \in B_0$.

Demonstração Para cada $\phi \in \mathbb{C}$ e $\psi \in B_0$ seja $x = x(\sigma, \phi, 0)$ tal que $x_\sigma = \phi$, $x_t = T(t, \sigma)\phi$ para $t \geq \sigma$. Estendemos ψ definindo:

$$\psi(\xi) = \begin{cases} \psi(-r) & \xi \leq -r \\ 0 & \xi \geq 0 \end{cases}$$

e estendemos x de modo que seja contínua em $(-\infty, +\infty)$. Assim:

$$\begin{aligned} \langle T^*(\sigma, t)\psi, \phi \rangle &= \langle \psi, x_t \rangle \\ &= \int_{-\infty}^0 [d\psi(\theta)]x(t + \theta) \\ &= \int_{-\infty}^{\sigma-t-r} [d\psi(\theta)]x(t + \theta) + \int_{\sigma-t-r}^{(\sigma-t)^-} [d\psi(\theta)]x(t + \theta) \\ &\quad + \int_{(\sigma-t)^-}^{\sigma-t} [d\psi(\theta)]x(t + \theta) + \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)]x(t + \theta). \end{aligned}$$

Como para $\theta \in (-\infty, \sigma - t - r]$, $\psi(\theta) = \psi(-r)$ a primeira integral é igual a zero, bem como a terceira, desde que ψ é contínua à esquerda em $(-r, 0)$. E do teorema 1.6 obtemos que:

$$\begin{aligned} \langle T^*(\sigma, t)\psi, \phi \rangle &= \int_{-r}^{0^-} [d_\xi \psi(\xi + \sigma - t)]\phi(\xi) \\ &\quad + \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)]Y(\sigma, t + \theta)\phi(0) \\ &\quad + \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] \int_{\sigma-r}^{\sigma^-} d_\beta \left\{ \int_{\sigma}^{t+\theta} Y(\alpha, t + \theta)p(\alpha, \beta)d\alpha \right\} x(\beta) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Fazendo uma mudança de variáveis na última integral, ($\beta = \sigma + \xi$), temos que:

$$\int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] \int_{-r}^{0^-} d_\xi \left\{ \int_{\sigma}^{t+\theta} Y(\alpha, t + \theta)p(\alpha, \sigma + \xi)d\alpha \right\} \phi(\xi).$$

Como $Y(\alpha, t + \theta) = 0$ para $\alpha > t + \theta$, a expressão acima torna-se:

$$\int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] \int_{-r}^{0-} d\xi \left\{ \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t + \theta) p(\alpha, \sigma + \xi) d\alpha \right\} \phi(\xi).$$

Pelo teorema de Fubini não simétrico trocamos a ordem de integração

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^{0-} d\xi \left\{ \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t + \theta) p(\alpha, \sigma + \xi) d\alpha \right\} \phi(\xi) \\ &= \int_{-r}^{0-} d\xi \left\{ \int_{\sigma}^t \left[\int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] Y(\alpha, t + \theta) \right] p(\alpha, \sigma + \xi) d\alpha \right\} \phi(\xi) \\ &= \int_{-r}^{0-} d\xi \left\{ \int_{\sigma}^t \left[\int_{\alpha-t}^0 d\psi(\theta) \right] Y(\alpha, t + \theta) \right\} p(\alpha, \sigma + \xi) d\alpha \phi(\xi). \end{aligned}$$

A última igualdade verifica-se, já que, $Y(\alpha, t + \theta) = 0$ para $\alpha > t + \theta$.

Definimos:

$$y(\alpha, t) = \begin{cases} 0 & \alpha > t \\ \int_{\alpha-t}^0 [d\psi(\theta)] Y(\alpha, t + \theta) & \alpha \leq t. \end{cases}$$

Então usando os cálculos acima e a equação (1.10), temos:

$$\begin{aligned} \langle T^*(\sigma, t)\psi, \phi \rangle &= \int_{-r}^{0-} d\xi [\psi(\xi + \sigma - t) + \int_{\sigma}^t y(\alpha, t) p(\alpha, \sigma + \xi) d\alpha] \phi(\xi) \\ &\quad + y(\sigma, t) \phi(0). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Como a igualdade acima deve valer para todo $\phi \in C$, desta expressão e da definição do produto obtemos que $[T^*(\sigma, t)\psi](\xi)$ possui uma descontinuidade em $\theta = 0$ e, em particular que

$$[T^*(\sigma, t)\psi](0^-) = -y(\sigma, t). \quad (1.12)$$

Provemos, agora, que $y(\sigma, t)$ é solução da equação adjunta formal.

Temos que:

$$\begin{aligned} y(\sigma, t) &= \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] Y(\sigma, t + \theta) \\ &= \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] - \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] \int_{\sigma}^{t+\theta} Y(\alpha, t + \theta) p(\alpha, \sigma) d\alpha \end{aligned}$$

pois

$$Y(\sigma, t) = \begin{cases} 0 & \sigma > t \\ I - \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) p(\alpha, \sigma) d\alpha & \sigma \leq t. \end{cases}$$

Como $Y(\sigma, t) = 0$ para $\sigma > t$

$$\int_{\sigma}^{t+\theta} Y(\alpha, t+\theta)p(\alpha, \sigma)d\alpha = \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t+\theta)p(\alpha, \sigma)d\alpha.$$

Logo,

$$y(\sigma, t) = -\psi(\sigma - t) - \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] \left(\int_{\sigma}^t Y(\alpha, t+\theta)p(\alpha, \sigma)d\alpha \right)$$

Usando o teorema de Fubini não simétrico no último termo obtemos,

$$y(\sigma, t) = -\psi(\sigma - t) - \int_{\sigma}^t \left\{ \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] Y(\alpha, t+\theta) \right\} p(\alpha, \sigma)d\alpha.$$

Como $Y(\sigma, t) = 0$ para $\sigma > t$

$$\begin{aligned} y(\sigma, t) &= -\psi(\sigma - t) - \int_{\sigma}^t \left\{ \int_{\sigma-t}^0 [d\psi(\theta)] Y(\alpha, t+\theta) \right\} p(\alpha, \sigma)d\alpha \\ &= -\psi(\sigma - t) - \int_{\sigma}^t y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma)d\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y(\sigma, t) + \int_{\sigma}^t y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma)d\alpha = -\psi(\sigma - t), \quad \sigma \leq t. \quad (1.13)$$

Como $\psi(\sigma - t) = \psi(-r)$ para $\sigma \leq t - r$, segue que

$$y(\sigma, t) + \int_{\sigma}^t y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma)d\alpha = -\psi(-r), \quad \sigma \leq t - r$$

e $y(\sigma, t)$ como uma função de σ é uma solução da equação adjunta formal (1.6). Do teorema 1.5, podemos portanto escrever

$$y_{\sigma}(\cdot, t) = \tilde{T}(\sigma, t)y_t(\cdot, t).$$

A condição inicial $y_t(\cdot, t)$ é dada pela equação (1.13) por:

$$y(t+\theta, t) + \int_{t+\theta}^t y(\alpha, t)p(\alpha, t+\theta)d\alpha = -\psi(\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0$$

ou

$$y(t+\theta, t) + \int_{\theta}^0 y(t+\alpha, t)\eta(t+\alpha, \theta-\alpha)d\alpha = -\psi(\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Comparando com a equação (1.9), temos $[I + \Omega(t)]y_t(\cdot, t) = -\psi$ e

$$y_{\sigma}(\cdot, t) = -\tilde{T}(\sigma, t)(I + \Omega(t))^{-1}\psi, \quad \sigma \leq t. \quad (1.14)$$

Voltando em (1.11), usando a equação (1.13) e a condição (1.12), para $-r \leq \xi < 0$,

$$\begin{aligned}
[T^*(\sigma, t)\psi](\xi) &= \psi(\xi + \sigma - t) + \int_{\sigma}^t y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma + \xi)d\alpha \\
&= -y(\sigma + \xi, t) - \int_{\sigma+\xi}^t y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma + \xi)d\alpha \\
&\quad + \int_{\sigma}^t y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma + \xi)d\alpha \\
&= -y(\sigma + \xi, t) - \int_{\sigma+\xi}^{\sigma} y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma + \xi)d\alpha \\
&\quad - \int_{\sigma}^t y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma + \xi)d\alpha + \int_{\sigma}^t y(\alpha, t)p(\alpha, \sigma + \xi)d\alpha \\
&= -y(\sigma + \xi, t) - \int_{\xi}^0 y(\sigma + \beta, t)\eta(\sigma + \beta, \xi - \beta)d\beta \\
&= -[(I + \Omega(\sigma))y_{\sigma}(\cdot, t)](\xi).
\end{aligned}$$

Usando a expressão (1.14) na equação acima, obtemos:

$$T^*(\sigma, t) = (I + \Omega(\sigma))\tilde{T}(\sigma, t)(I + \Omega(t))^{-1}, \quad \sigma \leq t. \square$$

Lema 1.5 *Seja $-\infty < a < b < +\infty$ com $|a - b| > M$, para todo $M > 0$.*

Se x é uma solução de (1.1) em $t \in [a, +\infty)$ com $x(t) = \phi(t)$ para $a-r \leq t \leq a$ onde $\phi \in C$ e se y é uma solução da equação adjunta formal para $s \in (-\infty, b]$ e $y(\alpha) = \psi(\alpha)$ para $\alpha \in [b, b+r]$ onde $\psi \in B_0$ então para todo σ, t tal que $a \leq \sigma < t \leq b$ temos

$$\begin{aligned}
y(t)x(t) &+ \int_{t-r}^t d_s \left[\int_t^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\
&= y(\sigma)x(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s \left[\int_{\sigma}^{\sigma+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\
&\quad + \int_{\sigma}^t y(\alpha)h(\alpha)d\alpha, \quad \sigma \leq t.
\end{aligned}$$

Demonstração O sistema (1.1) pode ser escrito como

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 d_{\theta} \eta(t, \theta)x(t + \theta) + h(t)$$

ou

$$\dot{x}(t) = \int_{t-r}^t d_s p(t, s)x(s) + h(t). \quad (1.15)$$

Seja $a < \sigma < t < b$. Assumimos que $\sigma + r < t$. Posteriormente esta condição será eliminada.

Como $x(t)$ é uma solução de (1.15) em $[a, b]$ que satisfaz $x(t) = \phi(t)$ em $[a-r, a]$ onde $\phi \in C$; $x(t)$ é uma função absolutamente contínua em $[a, b]$, satisfazendo (1.15) em algum intervalo $[a, t]$ e com condição inicial $\phi \in C$ em $[a-r, a]$, logo, $x(t)$ é de variação limitada em $[a, b]$. Então usando a fórmula de integração por partes obtemos:

$$\int_{\sigma}^t dy(\alpha)x(\alpha) + \int_{\sigma}^t y(\alpha)\dot{x}(\alpha)d\alpha = y(\alpha)x(\alpha) \Big|_{\sigma}^t$$

ou

$$\begin{aligned} y(t)x(t) - y(\sigma)x(\sigma) &= \int_{\sigma}^t dy(\alpha)x(\alpha) + \int_{\sigma}^t y(\alpha)\left\{\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_s p(\alpha, s)x(s) + h(\alpha)\right\}d\alpha \\ &= \int_{\sigma}^t dy(\alpha)x(\alpha) + \int_{\sigma}^t y(\alpha)h(\alpha)d\alpha \\ &\quad + \int_{\sigma}^t y(\alpha)\left\{\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_s p(\alpha, s)x(s)\right\}d\alpha. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Consideremos o último termo do segundo membro da equação acima. Este termo pode ser escrito como:

$$\int_{\sigma}^t y(\alpha)\left\{\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_s p(\alpha, s)x(s)\right\}d\alpha$$

pois $p(\alpha, s) = cte = 0$ para $s \geq \alpha$ e $p(\alpha, s) = cte = p(\alpha, \alpha - r)$ para $s \leq \alpha - r$. Usando o teorema de Fubini não simétrico obtemos:

$$\int_{\sigma}^t y(\alpha)\left\{\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_s p(\alpha, s)x(s)\right\}d\alpha = \int_{\sigma-r}^t d_s \left\{\int_{\sigma}^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha\right\}x(s).$$

Usando que $\sigma + r < t$ e $p(\alpha, s) = 0$ para $s \geq \alpha$, o último termo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma-r}^{\sigma-} d_s \left[\int_{\sigma}^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ &+ \int_{\sigma-}^{\sigma} d_s \left[\int_{\sigma}^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ &+ \int_{\sigma}^{t-r} d_s \left[\int_{\sigma}^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ &+ \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_{\sigma}^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ &+ \int_{t-}^t d_s \left[\int_{\sigma}^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s). \end{aligned}$$

Como para $s \in [\sigma - r, \sigma]$ o termo

$$\int_{\sigma+r}^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha$$

é uma função constante de s , e como y ; $p(\alpha, s)$ são contínuas a esquerda obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma-r}^{\sigma-} d_s \left[\int_{\sigma}^{\sigma+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ & + \int_{\sigma}^{t-r} d_s \left[\int_s^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ & + \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_s^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo:

$$\int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_t^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s)$$

na expressão acima obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma-r}^{\sigma-} d_s \left[\int_{\sigma}^{\sigma+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ & + \int_{\sigma}^{t-r} d_s \left[\int_s^t y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ & - \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_t^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ & + \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_s^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \end{aligned}$$

que pode ser escrito

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma-r}^{\sigma-} d_s \left[\int_{\sigma}^{\sigma+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ & + \int_{\sigma}^{t-r} d_s \left[\int_s^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ & - \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_t^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ & + \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_s^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \end{aligned}$$

pois para $s \in [\sigma, t - r]$ o termo

$$\int_t^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha$$

é constante em s .

Combinando dois termos da expressão acima obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma-r}^{\sigma-} d_s \left[\int_{\sigma}^{\sigma+r} y(\alpha) p(\alpha, s) d\alpha \right] x(s) \\ & + \int_{\sigma}^{t-} d_s \left[\int_s^{t+r} y(\alpha) p(\alpha, s) d\alpha \right] x(s) \\ & - \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_t^{t+r} y(\alpha) p(\alpha, s) d\alpha \right] x(s). \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão no último termo da equação (1.16) obtemos:

$$\begin{aligned} y(t)x(t) - y(\sigma)x(\sigma) &= \int_{\sigma}^t dy(\alpha)x(\alpha) + \int_{\sigma}^t y(\alpha)h(\alpha)d\alpha \\ &+ \int_{\sigma}^t d_s \left[\int_s^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ &+ \int_{\sigma-r}^{\sigma-} d_s \left[\int_{\sigma}^{\sigma+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ &- \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_t^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Agora para $s \in [\sigma, t]$ temos que

$$\int_{t+r}^{\infty} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha$$

é constante em s . Assim o terceiro termo do segundo membro da equação (1.17) pode ser escrito como

$$\int_{\sigma}^t d_s \left[\int_s^{\infty} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s).$$

Então a equação (1.17) tornar-se-á

$$\begin{aligned} y(t)x(t) &+ \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_t^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ &= y(\sigma)x(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma-} d_s \left[\int_{\sigma}^{\sigma+r} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ &+ \int_{\sigma}^t d_s \left[y(s) + \int_s^{\infty} y(\alpha)p(\alpha, s)d\alpha \right] x(s) \\ &+ \int_{\sigma}^t y(\alpha)h(\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

Como y é solução da equação adjunta formal, obtemos:

$$\begin{aligned} y(t)x(t) &+ \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_t^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s) d\alpha \right] x(s) \\ &= y(\sigma)x(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma-} d_s \left[\int_{\sigma}^{\sigma+r} y(\alpha)p(\alpha, s) d\alpha \right] x(s) \\ &\quad + \int_{\sigma}^t y(\alpha)h(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Se definirmos $B_t(y, x)$ como

$$B_t(y, x) = y(t)x(t) + \int_{t-r}^{t-} d_s \left[\int_t^{t+r} y(\alpha)p(\alpha, s) d\alpha \right] x(s) \quad (1.19)$$

então (1.18) tornar-se-á

$$B_{\sigma}(y, x) + \int_{\sigma}^t y(\alpha)h(\alpha) d\alpha = B_t(y, x)$$

quando $\sigma < t$ e $\sigma + r < t$.

É fácil ver que se $F(\sigma) = F(t)$ para σ e t arbitrários com $\sigma < t$ e $\sigma + r < t$, então $F(\sigma) = F(t)$ para σ e t arbitrários, $\sigma < t$. Isto implica que F é uma função constante. Assim, ao longo das soluções x e y a função $B_t(x, y)$ definida em (1.19) é uma constante em t , $a < t < b$. Deste modo a igualdade (1.18) é válida para todo $\sigma < t$ arbitrários em $[a, b]$. $\square$

Capítulo 2

Dicotomias Exponenciais

Neste capítulo apresentamos a definição de dicotomia exponencial e alguns lemas, dentre os quais ressaltamos aqueles referentes à extensão do intervalo onde a equação $\dot{x}(t) = L(t)x_t$ possui uma dicotomia exponencial (lemas 2.6, 2.7 e 2.8). Notamos que uma condição necessária para que a dicotomia exponencial em $J = (-\infty, -\tau]$ seja estendida a $J_1 = (-\infty, t_0]$, $t_0 \geq -\tau$, é que a dimensão do subespaço instável $\mathcal{R}Q(t)$ para $t \in J$ seja igual a dimensão do subespaço instável para $t \in J_1$. Provaremos que esta também é uma condição suficiente.

Necessitamos das seguintes definições:

Definição 2.1 Definimos os anuladores E^0 e 0F como:

$$E^0 = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = 0, \forall x \in E\}$$

$${}^0F = \{x \in X : \langle x^*, x \rangle = 0, \forall x^* \in F\}$$

onde X é um espaço de Banach, X^* seu espaço dual, $E \subset X$ e $F \subset X^*$.

Definição 2.2 O operador solução $T(t, s)$ possui uma dicotomia exponencial em um intervalo J com constantes K e α positivas se existem projeções contínuas $P(s)$, $Q(s) = I - P(s)$ fortemente contínuas em s tal que:

(i) $T(t, s)P(s) = P(t)T(t, s)$, $t \geq s$ em J ;

(ii) $T(t, s)|_{\mathcal{R}Q(s)}$, $t \geq s$ é um isomorfismo de $\mathcal{R}Q(s)$ sobre $\mathcal{R}Q(t)$ e a inversa de $T(t, s)|_{\mathcal{R}Q(s)}$ é definida como $T(s, t) : \mathcal{R}Q(t) \rightarrow \mathcal{R}Q(s)$;

(iii) $|T(t, s)P(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$, $t \geq s$ em J ;

$$(iv) |T(s, t)Q(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, t \geq s \text{ em } J.$$

$\mathcal{RP}(s)$ e $\mathcal{RQ}(s)$, $s \in J$, são denominados de subespaços estável e instável respectivamente.

Observação 2.1 Segue diretamente de (i) que $\mathcal{RP}(t)$ e $\mathcal{RQ}(t)$ são “invariantes” sob $T(t, s)$.

Observação 2.2 Como $T(t, s)$ é compacto para $t - s \geq r$ e $\mathcal{RQ}(t)$ é completo (pois é fechado em C), $\mathcal{RQ}(t)$ possui dimensão finita (ver [10, pág. 298]).

Lema 2.1 Suponhamos que $T(t, s)$ possui dicotomia exponencial em J e que $T(t, s)\phi_s = \phi_t$ onde $\phi_t \in \mathcal{RP}(t)$. Então $\phi_s \in \mathcal{RP}(s)$.

Demonstração Suponhamos $\phi_s = \phi_s^P + \phi_s^Q$ onde $\phi_s^P \in \mathcal{RP}(s)$ e $\phi_s^Q \in \mathcal{RQ}(s)$. Logo,

$$\phi_t = T(t, s)\phi_s = T(t, s)\phi_s^P + T(t, s)\phi_s^Q$$

com $T(t, s)\phi_s^P \in \mathcal{RP}(t)$ e $T(t, s)\phi_s^Q \in \mathcal{RQ}(t)$ visto que $\mathcal{RP}(s)$ e $\mathcal{RQ}(s)$ são invariantes. Portanto,

$$T(t, s)\phi_s^P - \phi_t = T(t, s)\phi_s^Q \in \mathcal{RQ}(t) \cap \mathcal{RP}(t)$$

daí, $T(t, s)\phi_s^Q = 0$ o que implica $\phi_s^Q = 0$, já que, $T(t, s)|_{\mathcal{RQ}(s)}$ é um isomorfismo. Deste modo, temos que $\phi_s \in \mathcal{RP}(s)$. $\square$

Teorema 2.1 Suponhamos que a equação (1.2) tem dicotomia exponencial com projeções $P(t)$ e $Q(t)$ em $\mathbb{R}$. Então:

$$\mathcal{RP}(s) = \{\phi \in C : T(t, s)\phi \text{ é limitada para } t \geq s\}$$

e

$$\mathcal{RQ}(t) = \{\phi \in C : T(s, t)\phi \text{ está definida para todo } s \leq t \text{ e é limitada para } s \leq t\}.$$

Demonstração Mostremos que

$$\mathcal{RP}(s) = \{\phi \in C : T(t, s)\phi \text{ é limitada para } t \geq s\}.$$

Suponhamos que $\phi \in \mathcal{RP}(s)$. Então

$$|T(t, s)\phi| = |T(t, s)P(s)\phi| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|\phi|$$

e $T(t, s)\phi$ é limitada para $t \geq s$.

Suponhamos agora que $\phi \notin \mathcal{RP}(s)$, então

$$T(t, s)\phi = T(t, s)P(s)\phi + T(t, s)Q(s)\phi$$

e $T(t, s)P(s)\phi$ é limitada para $t \geq s$. Ainda:

$$|Q(s)\phi| = |T(s, t)Q(t)T(t, s)Q(s)\phi| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|T(t, s)Q(s)\phi|.$$

Daí,

$$|T(t, s)Q(s)\phi| \geq \frac{1}{K}e^{\alpha(t-s)}|Q(s)\phi| \longrightarrow +\infty$$

quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$\mathcal{RP}(s) = \{\phi \in C : T(t, s)\phi \text{ é limitada para } t \geq s\}.$$

Provemos que:

$$\mathcal{RQ}(t) = \{\phi \in C : T(s, t)\phi \text{ está definida para todo } s \leq t \text{ e é limitada para } s \leq t\}.$$

É imediato que se $\phi \in \mathcal{RQ}(t)$ então $T(s, t)\phi$ está definida e é limitada para $s \leq t$.

Suponhamos que $\phi \notin \mathcal{RQ}(t)$, então tomando

$$\phi^P = P(t)\phi$$

$$\phi^Q = Q(t)\phi$$

temos que se $T(s, t)\phi$ está definida para $s \leq t$ então, como $T(s, t)\phi^Q$ está definida para $s \leq t$ devemos ter $T(s, t)\phi^P$ definida para $s \leq t$. Como $T(s, t)\phi^Q$ é limitada para $s \leq t$, devemos mostrar que $T(s, t)\phi^P$ não é limitada para $s \leq t$. De fato:

$$|P(t)\phi| = |T(t, s)P(s)T(s, t)P(t)\phi| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|T(s, t)P(t)\phi|$$

e

$$|T(s, t)P(t)\phi| \geq \frac{1}{K}e^{\alpha(t-s)}|P(t)\phi| \longrightarrow +\infty$$

quando $s \rightarrow -\infty$.

Deste modo, $T(s, t)\phi$ não é limitado para $s \leq t$ e portanto segue que:

$$\mathcal{RQ}(t) = \{\phi \in C : T(s, t)\phi \text{ está definida para todo } s \leq t \text{ e é limitada para } s \leq t\}. \square$$

Lema 2.2 Se $P^*(s)$ é o adjunto de $P(s)$ então $(P^*(s))^2 = P^*(s)$ e $P^*(s)$ é weak*-contínua em $s \in J$.

Demonstração Usando que $P^2(s) = P(s)$ obtemos:

$$\langle (P^*(s))^2 \psi, \phi \rangle = \langle \psi, P(s) \phi \rangle = \langle P^*(s) \psi, \phi \rangle$$

para todo $\psi \in C^*$ e para todo $\phi \in C$. Logo, $(P^*(s))^2 = P^*(s)$.

Seja, agora, $t \in J$, tal que $t \rightarrow s$, assim,

$$\langle P^*(t) \psi, \phi \rangle = \langle \psi, P(t) \phi \rangle \longrightarrow \langle \psi, P(s) \phi \rangle = \langle P^*(s) \psi, \phi \rangle$$

segue da continuidade forte de P em s . Portanto,

$$\langle P^*(t) \psi, \phi \rangle \longrightarrow \langle P^*(s) \psi, \phi \rangle. \square$$

Lema 2.3 $\mathcal{R}Q^*(s)$ é isomorfo a $(\mathcal{R}Q(s))^*$.

Demonstração Sabendo que $(\mathcal{R}P(s))^u = \mathcal{R}Q^*(s)$ definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{R}Q^*(s) &\rightarrow (\mathcal{R}Q(s))^* \\ \psi &\mapsto f(\psi) : \mathcal{R}Q(s) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(\psi)(\phi) &= \langle \psi, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Claramente, f está bem definida e é linear.

Suponhamos que $0 \neq \psi \in \mathcal{R}Q^*(s)$, $f(\psi)\phi = \langle \psi, \phi \rangle = 0$. Sabemos que para todo $\phi \in C$, $\phi = \phi_1 + \phi_2$ onde $\phi_1 \in \mathcal{R}P(s)$ e $\phi_2 \in \mathcal{R}Q(s)$, logo,

$$0 = \langle \psi, \phi \rangle = \langle \psi, \phi_1 \rangle + \langle \psi, \phi_2 \rangle = \langle \psi, \phi_2 \rangle,$$

o que implica, $\psi = 0$. Contradição! Portanto, $f(\psi) \neq 0$ e f é injetora.

Além disso, dado $\xi \in (\mathcal{R}Q(s))^*$, existe $\psi \in \mathcal{R}Q^*(s)$, $\psi = \xi$, tal que $f(\psi) = \xi$. Mostremos que $\psi \in \mathcal{R}Q^*(s)$. De fato, como $\xi \in (\mathcal{R}Q(s))^*$:

$$\langle \xi, \phi \rangle = \langle \xi, Q(s) \phi \rangle = \langle Q^*(s) \xi, \phi \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{R}Q(s)$, daí, $Q^*(s) \xi = \xi$, o que implica $\xi \in \mathcal{R}Q^*(s)$. $\square$

Portanto, $\dim(\mathcal{R}Q^*(s)) = \dim(\mathcal{R}Q(s))^*$.

Lema 2.4 O operador adjunto $T^*(s,t)$ tem uma dicotomia exponencial em J com projeções $P^*(s)$ e $Q^*(s)$, exceto que a continuidade forte é substituída pela continuidade weak*, ou seja;

$$(i)' T^*(s,t)P^*(t) = P^*(s)T^*(s,t), s \leq t, \text{ em } J;$$

(ii)' $T^*(s,t)|_{\mathcal{R}Q^*(t)}$, $s \leq t$, é um isomorfismo de $\mathcal{R}Q^*(t)$ sobre $\mathcal{R}Q^*(s)$ e $T^*(t,s) : \mathcal{R}Q^*(s) \rightarrow \mathcal{R}Q^*(t)$ é definido como a inversa de $T^*(s,t)|_{\mathcal{R}Q^*(t)}$ (ou a adjunta de $T(s,t) : \mathcal{R}Q(t) \rightarrow \mathcal{R}Q(s)$);

$$(iii)' |T^*(s,t)P^*(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, s \leq t, \text{ em } J;$$

$$(iv)' |T^*(t,s)Q^*(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, s \leq t, \text{ em } J.$$

Demonstração

(i)' Segue da definição de $T^*(s,t)$, $P^*(s)$ e do item (i) da definição de dicotomia exponencial.

(ii)' Primeiramente mostraremos que $T^*(s,t)|_{\mathcal{R}Q^*(t)}$ é injetora.

Seja $\xi \in \mathcal{R}Q^*(t)$ tal que $T^*(s,t)\xi = 0$. Se $x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in \mathcal{R}Q(t)$ e $x_2 \in \mathcal{R}P(t)$ temos:

$$\langle \xi, x \rangle = \langle Q^*(t)\xi, x_1 + x_2 \rangle = \langle \xi, Q(t)(x_1 + x_2) \rangle = \langle \xi, Q(t)x_1 \rangle = \langle \xi, x_1 \rangle.$$

Da hipótese de dicotomia exponencial (ii) existe $y_1 \in \mathcal{R}Q(s)$ tal que $T(t,s)y_1 = x_1$, assim

$$\langle \xi, x_1 \rangle = \langle \xi, T(t,s)y_1 \rangle = \langle T^*(s,t)\xi, y_1 \rangle = 0.$$

Obtemos: $\langle \xi, x \rangle = \langle \xi, x_1 \rangle = 0$ para todo x .

Assim, $\xi = 0$ e $T^*(s,t)|_{\mathcal{R}Q^*(t)}$ é 1-1.

Se $\eta \in \mathcal{R}Q^*(s)$, seja ξ definido por:

$$\langle \xi, x \rangle = \langle \eta, y_1 \rangle$$

onde $y_1 \in \mathcal{R}Q(s)$ é tal que $T(t,s)y_1 = x_1$ com $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{R}Q(t)$ e $x_2 \in \mathcal{R}P(t)$.

Da definição (ii) de dicotomia exponencial segue que ξ está bem definida. Também, $\xi \in \mathcal{R}Q^*(t)$ desde que para $x \in X$,

$$\langle P^*(t)\xi, x \rangle = \langle \xi, P(t)x \rangle = 0.$$

Para provar que $T^*(s, t)\xi = \eta$ seja $y = y_1 + y_2 \in C$ com $y_1 \in \mathcal{R}Q(s)$ e $y_2 \in \mathcal{R}P(s)$, então:

$$\langle T^*(s, t)\xi, y \rangle = \langle \eta, y_1 \rangle + \langle \eta, y_2 \rangle = \langle \eta, y \rangle.$$

portanto, $T^*(s, t)\xi = \eta$.

(iii)' Temos:

$$\begin{aligned} \langle (T(t, s)P(s))^*\psi, \phi \rangle &= \langle \psi, T(t, s)P(s)\phi \rangle \\ &= \langle T^*(s, t)\psi, P(s)\phi \rangle \\ &= \langle P^*(s)T^*(s, t)\psi, \phi \rangle \end{aligned}$$

logo,

$$(T(t, s)P(s))^* = P^*(s)T^*(s, t).$$

De (i)' temos que

$$|T^*(s, t)P^*(t)| = |P^*(s)T^*(s, t)|$$

e como

$$|P^*(s)T^*(s, t)| = |(T(t, s)P(s))^*| = |T(t, s)P(s)|$$

segue da hipótese de dicotomia exponencial (iii) que

$$|T^*(s, t)P^*(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}.$$

(iv)' Temos:

$$T^*(s, t)Q^*(t) = Q^*(s)T^*(s, t).$$

Como $T^*(s, t)|_{\mathcal{R}Q^*(t)}$ admite inversa $T^*(t, s)$, aplicando-a primeiro à esquerda e depois à direita na igualdade anterior obtemos:

$$Q^*(t)T^*(t, s) = T^*(t, s)Q^*(s),$$

além disso:

$$\begin{aligned} \langle (T(s, t)Q(t))^*\psi, \phi \rangle &= \langle \psi, T(s, t)Q(t)\phi \rangle \\ &= \langle T^*(t, s)\psi, Q(t)\phi \rangle \\ &= \langle Q^*(t)T^*(t, s)\psi, \phi \rangle \end{aligned}$$

para todo ϕ . Logo, $(T(s, t)Q(t))^* = Q^*(t)T^*(t, s)$.

Portanto,

$$|T^*(t, s)Q^*(s)| = |Q^*(t)T^*(t, s)| = |(T(s, t)Q(t))^*| = |T(s, t)Q(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}. \square$$

Teorema 2.2 *Suponhamos que o operador adjunto de $T(t, s)$, isto é, $T^*(s, t)$ tem dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$ com projeções $P^*(t)$ e $Q^*(t)$. Então:*

$$\mathcal{R}P^*(t) = \{\psi \in C^* : T^*(s, t)\psi \text{ é limitada para } s \leq t\}$$

e

$$\mathcal{R}Q^*(s) = \{\psi \in C^* : T^*(t, s)\psi \text{ está definida para } s \leq t \text{ e é limitada para } s \leq t\}$$

Demonstração Análoga ao teorema 2.1. $\square$

Utilizaremos o seguinte resultado:

Lema 2.5 *Seja $J = \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_-$ ou $\mathbb{R}$). Se (1.2) tem uma dicotomia exponencial em J com projeção $P(t)$, $B(t)$ é um operador linear contínuo para $t \in J$, contínua com respeito a t na norma de operadores e $|B(t)| \leq \delta$ para todo $t \in J$, então:*

$$\dot{x}(t) = (L(t) + B(t))x_t$$

tem uma dicotomia exponencial em $\bar{J}$ com projeção $\tilde{P}(t)$, $\tilde{P}(t) \rightarrow P(t)$, quando $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$ ou $\pm\infty$) na norma de operadores se δ é suficientemente pequeno.

Para maiores informações veja [4] e [5].

Lema 2.6 *Seja $J = (-\infty, -\tau]$ e suponhamos (1.2) possui uma dicotomia exponencial em J . Seja $t_0 > -\tau$ e $T(t_0, -\tau)\phi \neq 0$ para todo $0 \neq \phi \in \mathcal{R}Q(-\tau)$. Então (1.2) possui uma dicotomia exponencial em $(-\infty, t_0]$ com as projeções $\tilde{P}(t), \tilde{Q}(t) \rightarrow P(t), Q(t)$ exponencialmente quando $t \rightarrow -\infty$ na norma de operadores.*

Demonstração Seja

$$X_1(t) = \begin{cases} \mathcal{R}Q(t) & \text{para } t \leq -\tau \\ \{T(t, -\tau)\phi : \phi \in \mathcal{R}Q(-\tau)\} & \text{para } -\tau \leq t \leq t_0 \end{cases}$$

Suponhamos $\dim \mathcal{R}Q(t) = m$ para $t \leq -\tau$. Em particular, $\dim \mathcal{R}Q(-\tau) = m$.

Seja $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$ base de $\mathcal{R}Q(-\tau)$.

Tomemos $B_\phi = \{T(t, -\tau)\phi_1, T(t, -\tau)\phi_2, \dots, T(t, -\tau)\phi_m\}$.

Claramente $X_1(t) = [B_\phi]$ para $t \in [-\tau, t_0]$.

Seja,

$$\beta_1 T(t, -\tau)\phi_1 + \beta_2 T(t, -\tau)\phi_2 + \dots + \beta_m T(t, -\tau)\phi_m = 0$$

logo,

$$T(t, -\tau)(\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2 + \dots + \beta_m\phi_m) = 0$$

então,

$$T(t_0, t)T(t, -\tau)(\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2 + \dots + \beta_m\phi_m) = 0$$

ou seja,

$$T(t_0, -\tau)(\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2 + \dots + \beta_m\phi_m) = 0$$

mas, $\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2 + \dots + \beta_m\phi_m \in \mathcal{RQ}(-\tau)$, logo, devemos ter :

$$\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2 + \dots + \beta_m\phi_m = 0$$

Como B é base, $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$, portanto, B_ϕ é linearmente independente e $\dim X_1(t) = m$ para todo $t \leq t_0$, o que implica $X_1(t)$ é fechado em C

Como $X_1(-\tau)$ é invariante sob $T(t, -\tau)$ (pela definição de $X_1(t)$ para $t \in [-\tau, t_0]$) e como acabamos de provar $T(t, -\tau)\phi = 0$, para todo $\phi \in \mathcal{RQ}(-\tau)$ implica $\phi = 0$ temos que $T(t, -\tau)|_{X(-\tau)}$ é um isomorfismo de $X_1(-\tau)$ sobre $X_1(t)$. Em particular quando $t \in [t_0, -\tau]$ e $s \in (-\infty, -\tau]$, $T(t, s) = T(t, -\tau)T(-\tau, s)$ e quando $t, s \in [t_0, -\tau]$ com $t \geq s$, $T(t, s) = T(t, -\tau)T(-\tau, s)$ onde neste caso $T(-\tau, s)$ é a inversa de $T(s, -\tau)$. Logo, para todo t, s em $(-\infty, t_0]$; $T(t, s)|_{X_1(s)}$ é um isomorfismo de $X_1(s)$ sobre $X_1(t)$.

Seja $X_2(t_0)$ subespaço fechado de C complementar de $X_1(t_0)$, isto é

$$C = X_1(t_0) \oplus X_2(t_0).$$

Seja,

$$X_2(t) = \{\phi : T(t_0, t)\phi \in X_2(t_0)\}, \quad t \leq t_0.$$

Segue diretamente do fato que $X_2(t_0)$ é um subespaço fechado de C e da continuidade de $T(t_0, t)$ que $X_2(t)$ é um subespaço fechado de C . Além disso:

$$C = X_1(t) \oplus X_2(t), \quad t \leq t_0$$

De fato,

(i) Seja $\phi \in X_1(t) \cap X_2(t)$. Como $\phi \in X_1(t)$, do isomorfismo $T(t_0, t)|_{X_1(t)}$, $T(t_0, t)\phi \in X_1(t_0)$. Mas $\phi \in X_2(t)$ o que implica da definição de $X_2(t)$ que $T(t_0, t)\phi \in X_2(t_0)$. Portanto, $T(t_0, t)\phi \in X_1(t_0) \cap X_2(t_0)$. Logo, $T(t_0, t)\phi = 0$ e então $\phi = 0$.

(ii) Seja $\phi \in C$. Temos então que:

$$T(t_0, t)\phi = \phi_1 + \phi_2$$

onde $\phi_1 \in X_1(t_0)$ e $\phi_2 \in X_2(t_0)$. Já que, $\phi_1 \in X_1(t_0)$ existe $\tilde{\phi}_1 \in X_1(t)$ tal que $T(t_0, t)\tilde{\phi}_1 = \phi_1$. Logo,

$$T(t_0, t)(\phi - \tilde{\phi}_1) = \phi_2 \in X_2(t_0)$$

o que implica, da definição de $X_2(t)$, que $\phi - \tilde{\phi}_1 \in X_2(t)$. Portanto,

$$\phi = \tilde{\phi}_1 + (\phi - \tilde{\phi}_1) \in X_1(t) + X_2(t)$$

Definimos então $\tilde{P}(t)$, $\tilde{Q}(t)$ projeções em C tal que

$$\mathcal{R}\tilde{Q}(t) = X_1(t)$$

$$\mathcal{R}\tilde{P}(t) = X_2(t)$$

para $t \leq t_0$. Devido ao isomorfismo $T(t, s)|_{X_1(s)} : X_1(s) \rightarrow X_1(t)$, $\mathcal{R}\tilde{Q}(s)$ é invariante sob $T(t, s)$ para $t_0 \geq t \geq s$. Além disso:

$$T(t_0, t)[T(t, s)X_2(s)] = T(t_0, s)X_2(s)$$

para $t_0 \geq t \geq s$. Da definição de $X_2(s)$, $T(t_0, s)X_2(s) \subset X_2(t_0)$, isto é,

$$T(t_0, t)[T(t, s)X_2(s)] \subset X_2(t_0)$$

o que implica,

$$T(t, s)X_2(s) \subset X_2(t)$$

donde obtemos, $\mathcal{R}\tilde{P}(s)$ é invariante sob $T(t, s)$. Logo, para todo $\phi = \phi_1 + \phi_2$ onde $\phi_1 \in \mathcal{R}\tilde{Q}(s)$ e $\phi_2 \in \mathcal{R}\tilde{P}(s)$ obtemos que

$$T(t, s)\tilde{P}(s)\phi = \tilde{P}(t)T(t, s)\phi,$$

$$T(t, s)\tilde{Q}(s)\phi = \tilde{Q}(t)T(t, s)\phi,$$

$t \geq s$ em $(-\infty, t_0]$.

Da última igualdade obtemos:

$$\tilde{Q}(t) = T(t, t_0)T(t_0, t)\tilde{Q}(t) = T(t, t_0)\tilde{Q}(t_0)T(t_0, t), \quad t \leq t_0$$

E como $(t, s) \mapsto T(t, s)\phi$ é contínua para todo $\phi \in C$, $t \mapsto \tilde{Q}(t)\phi$ é contínua, do Princípio da Limitação Uniforme obtemos que $\tilde{Q}(t)$ é limitado em norma para t num subconjunto compacto de $(-\infty, t_0]$. Como $\tilde{P}(t) = I - \tilde{Q}(t)$ temos também que $t \mapsto \tilde{P}(t)\phi$ é contínua e $\tilde{P}(t)$ é limitado em norma para t num subconjunto compacto de $(-\infty, t_0]$.

Visto que $\mathcal{R}\tilde{Q}(s) = \mathcal{R}Q(s)$ implica $Q(s)\tilde{Q}(s) = \tilde{Q}(s)$ e $\tilde{Q}(s)Q(s) = Q(s)$ para $s \leq -\tau$ temos:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(s) &= \tilde{Q}(s)(Q(s) + P(s)) \\ &= Q(s) + \tilde{Q}(s)P(s) \\ &= Q(s) + T(s, -\tau)\tilde{Q}(-\tau)T(-\tau, s)P(s) \\ &= Q(s) + T(s, -\tau)Q(-\tau)\tilde{Q}(-\tau)T(-\tau, s)P(s) \end{aligned}$$

logo,

$$\tilde{Q}(s) - Q(s) = T(s, -\tau)Q(-\tau)\tilde{Q}(-\tau)T(-\tau, s)P(s)$$

e das hipóteses (iii) e (iv) de dicotomia obtemos:

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}(s) - Q(s)| &\leq ke^{\alpha(\tau+s)}Mke^{\alpha(\tau+s)} \\ &\leq k^2Me^{2\alpha(\tau+s)} \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}(s)| &\leq |\tilde{Q}(s) - Q(s)| + |Q(s)| \\ &\leq k^2Me^{2\alpha(\tau+s)} + |Q(s)| \end{aligned}$$

e, portanto, $|\tilde{Q}(s)| \rightarrow |Q(s)|$ exponencialmente em norma quando $s \rightarrow -\infty$. Fazendo $t = s$ em $|T(s, t)Q(t)| \leq ke^{-\alpha(t-s)}$ obtemos $|Q(s)| \leq k$. Como $P(s) = I - Q(s)$, $|\tilde{P}(s)| \rightarrow |P(s)|$ exponencialmente em norma quando $s \rightarrow -\infty$ e $|P(s)| \leq k$. Além disso, no compacto $[-\tau, t_0]$, $\tilde{Q}(s)$ e $\tilde{P}(s)$ são limitadas. Daí, $\tilde{Q}(s)$ e $\tilde{P}(s)$ são uniformemente limitadas em norma para $s \in (-\infty, t_0]$. Digamos: $|\tilde{P}(s)|, |\tilde{Q}(s)| \leq k_1$ para $s \leq t_0$.

Para provarmos as estimativas dicotômicas devemos analisar três casos:

Caso 1: $-\tau \geq t \geq s$

Temos:

$$\begin{aligned} |T(s, t)\tilde{Q}(t)| &= |T(s, t)Q(t)\tilde{Q}(t)| \\ &= |T(s, t)Q(t)| |\tilde{Q}(t)| \\ &\leq kk_1 e^{-\alpha(t-s)} \end{aligned}$$

Como $\tilde{Q}(t)Q(t) = Q(t)$ segue que:

$$\tilde{P}(t) = \tilde{P}(t)(P(t) + Q(t)) = \tilde{P}(t)P(t) + \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)Q(t) = \tilde{P}(t)P(t)$$

portanto,

$$\begin{aligned} |T(t, s)\tilde{P}(s)| &= |\tilde{P}(t)T(t, s)| = |\tilde{P}(t)P(t)T(t, s)| \\ &\leq |\tilde{P}(t)| |T(t, s)P(s)| \\ &\leq kk_1 e^{-\alpha(t-s)} \end{aligned}$$

Mostramos até agora que (1.2) tem dicotomia exponencial relativamente as projeções $\tilde{P}(t)$ e $\tilde{Q}(t)$ em $(-\infty, -\tau]$.

Caso 2: $-\tau \leq s \leq t$

Temos que $i \mapsto T(s, i)\tilde{Q}(i)\phi$ e $i \mapsto T(i, s)\tilde{P}(s)\phi$ são contínuos para cada $\phi \in C$, logo $T(s, t)\tilde{Q}(t)$ e $T(t, s)\tilde{P}(s)$ são limitados em norma para todo $t \geq s$ em $[-\tau, t_0]$. Portanto, existe uma constante N tal que:

$$\begin{aligned} |T(s, t)\tilde{Q}(t)| &\leq N e^{-\alpha(t-s)}; \\ |T(t, s)\tilde{P}(s)| &\leq N e^{-\alpha(t-s)}. \end{aligned}$$

Caso 3: $t_0 \geq t \geq -\tau \geq s$

Temos:

$$T(t, s)\tilde{P}(s) = T(t, -\tau)T(-\tau, s)\tilde{P}(s)\tilde{P}(s) = T(t, -\tau)\tilde{P}(-\tau)T(-\tau, s)\tilde{P}(s)$$

logo,

$$|T(t, s)\tilde{P}(s)| \leq Nkk_1 e^{-\alpha(t-s)}$$

De modo análogo obtemos:

$$|T(s, t)\tilde{Q}(t)| \leq Nkk_1 e^{-\alpha(t-s)}$$

Portanto, tomando $K = \max \{kk_1, N, Nkk_1\}$ obtemos:

$$\begin{aligned} |T(t, s)\tilde{P}(s)| &\leq K e^{-\alpha(t-s)} \\ |T(s, t)\tilde{Q}(t)| &\leq K e^{-\alpha(t-s)} \end{aligned}$$

para todo $t \geq s$ em $(-\infty, t_0]$. $\square$

Observação 2.3 Se tivermos atomicidade teremos a injetividade de $T(t, s)$, portanto a condição $T(t_0, -\tau)\phi \neq 0$, para todo $0 \neq \phi \in C$.

Lema 2.7 Seja $J = [\tau, +\infty)$ e suponhamos que (1.2) possui uma dicotomia exponencial em J . Se $t_0 < \tau$,

$$X_1(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi : T(\tau, t_0)\phi \in \mathcal{RP}(\tau)\}.$$

e $X_1(t_0)$ possui a mesma codimensão de $\mathcal{RP}(\tau)$ então (1.2) possui uma dicotomia exponencial em $[t_0, +\infty)$ com as projeções $\tilde{P}(t), \tilde{Q}(t) \rightarrow P(t), Q(t)$, exponencialmente quando $t \rightarrow +\infty$ na norma de operadores.

Demonstração Seja

$$X_1(t) = \begin{cases} \mathcal{RP}(t) & t \geq \tau \\ \{\phi : T(\tau, t)\phi \in \mathcal{RP}(\tau)\} & t_0 \leq t \leq \tau \end{cases}$$

e $m = \text{codimensão } X_1(\tau) = \text{codimensão } X_1(t_0)$. Observemos que $X_1(t)$, para $t_0 \leq t \leq \tau$, é um subespaço fechado devido a continuidade de $T(\tau, t)$ e ao fato que $\mathcal{RP}(\tau)$ é um subespaço fechado de C . Tomemos um subespaço m -dimensional $X_2(t_0)$ tal que

$$C = X_1(t_0) \oplus X_2(t_0).$$

e

$$X_2(t) = T(t, t_0)X_2(t_0), \quad t \geq t_0$$

Considere $\phi_{t_0} \in X_2(t_0)$. Se $\phi_{t_0} \neq 0$, $t \geq t_0$ então $T(t, t_0)\phi_{t_0} \neq 0$, pois caso contrário, isto é, $T(t, t_0)\phi_{t_0} = 0 \in X_1(t)$ implicaria $\phi_{t_0} \in X_1(t_0)$. Logo $\phi_{t_0} = 0$. Contradição! Portanto, $T(t, t_0)\phi_{t_0} \neq 0$ e $T(t, t_0)$ é um isomorfismo para todo $t \geq t_0$.

Temos também que:

$$X_2(t) = T(t, t_0)X_2(t_0) = T(t, s)[T(s, t_0)X_2(t_0)] = T(t, s)X_2(s).$$

Logo, se $\phi_s \in X_2(s)$ satisfaz $T(t, s)\phi_s = 0$, existe $\phi_{t_0} \in X_2(t_0)$ tal que $T(s, t_0)\phi_{t_0} = \phi_s$. Mas $T(t, t_0)\phi_{t_0} = 0$, o que implica $\phi_{t_0} = 0$. Portanto, $\phi_s = 0$ e $T(t, s) : X_2(s) \rightarrow X_2(t)$ é um isomorfismo.

Mostremos agora que:

$$C = X_1(t) \oplus X_2(t), \quad t \geq t_0$$

(i) Seja $\phi_t \in X_1(t) \cap X_2(t)$. Como $\phi_t \in X_2(t)$ existe $\phi_{t_0} \in X_2(t_0)$ tal que $T(t, t_0)\phi_{t_0} = \phi_t$. Também $\phi_t \in X_1(t)$. Mas assim temos dois casos a considerar: quando $t_0 \leq t \leq \tau$ e quando $t > \tau$.

- Se $t_0 \leq t \leq \tau$, pela definição de $X_1(t)$ segue que $T(\tau, t)\phi_t \in \mathcal{RP}(\tau)$. Como $T(\tau, t)[T(t, t_0)\phi_{t_0}] \in X_1(\tau)$ obtemos $T(\tau, t_0)\phi_{t_0} \in X_1(\tau)$ logo $\phi_{t_0} \in X_1(t_0)$. Portanto, $\phi_{t_0} = 0$ e $\phi_t = 0$.
- Se $t > \tau$, $T(t, \tau)[T(\tau, t_0)\phi_{t_0}] = T(t, t_0)\phi_{t_0} = \phi_t \in X_1(t) = \mathcal{RP}(t)$. Então, $T(\tau, t_0)\phi_{t_0} \in \mathcal{RP}(\tau)$, o que implica que $\phi_{t_0} \in X_1(t_0)$ (lema 2.1). Portanto, $\phi_{t_0} = \phi_t = 0$.

(ii) $C = X_1(t) + X_2(t)$, $t \geq t_0$

- Para $t \geq \tau$ sabemos codimensão $X_1(t) = \mathcal{RP}(t)$ é m , então;

$$C = X_1(t) \oplus X_2(t).$$

- Para $t_0 \leq t \leq \tau$, seja $\phi \in C$ tal que $T(\tau, t)\phi = \phi_1 + \phi_2$, com $\phi_1 \in X_1(\tau)$ e $\phi_2 \in X_2(\tau)$. Logo existe $\tilde{\phi}_2 \in X_2(t)$ tal que $T(\tau, t)\tilde{\phi}_2 = \phi_2$ e $T(\tau, t)(\phi - \tilde{\phi}_2) = \phi_1 \in X_1(\tau)$ assim $\phi - \tilde{\phi}_2 \in X_1(t)$ e $C = X_1(t) + X_2(t)$.

A decomposição $C = X_1(t) \oplus X_2(t)$ de C define os operadores projeção $\tilde{P}(t)$ e $\tilde{Q}(t) = I - \tilde{P}(t)$ de modo que:

$$\mathcal{R}\tilde{P}(t) = X_1(t)$$

$$\mathcal{R}\tilde{Q}(t) = X_2(t)$$

para $t \geq t_0$. Obviamente $X_2(s)$ é invariante sob $T(t, s)$ e $X_1(s)$ é invariante sob $T(t, s)$ pois:

- Se $t_0 \leq s \leq t \leq \tau$, $T(\tau, t)[T(t, s)X_1(s)] = T(\tau, s)X_1(s) \subset \mathcal{RP}(\tau)$ o que implica $T(t, s)X_1(s) \subset X_1(t)$;
- Se $t \geq s \geq \tau$ da hipótese de dicotomia segue a invariância de $X_1(s)$ sob $T(t, s)$;

- E se $t_0 \leq s \leq \tau \leq t$, $T(t, s)X_1(s) = T(t, \tau)[T(\tau, s)X_1(s)] \subset T(t, \tau)\mathcal{R}P(\tau) \subset \mathcal{R}P(t) = X_1(t)$.

Segue então da invariância de $X_1(t)$ e $X_2(t)$ sob $T(t, s)$ que:

$$T(t, s)\tilde{P}(s) = \tilde{P}(t)T(t, s)$$

$$T(t, s)\tilde{Q}(s) = \tilde{Q}(t)T(t, s)$$

para todo $t \geq s$ em $[t_0, +\infty)$.

Neste ponto dividiremos o nosso estudo em três casos.

Caso 1: $t \geq \tau$

Como $\mathcal{R}P(t) = \mathcal{R}\tilde{P}(t)$, $P(t)\tilde{P}(t) = \tilde{P}(t)$ e $\tilde{P}(t)P(t) = P(t)$,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t) &= \tilde{P}(t)(P(t) + Q(t)) \\ &= P(t) + \tilde{P}(t)Q(t) \\ &= P(t) + \tilde{P}(t)T(t, \tau)T(\tau, t)Q(t) \\ &= P(t) + T(t, \tau)\tilde{P}(\tau)T(\tau, t)Q(t) \\ &= P(t) + T(t, \tau)P(\tau)\tilde{P}(\tau)T(\tau, t)Q(t). \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{P}(t)$ é fortemente contínuo para $t \geq \tau$ donde pelo Princípio da Limitação Uniforme obtemos $\tilde{P}(t)$ é limitado em norma para t num subconjunto compacto de $[\tau, +\infty)$.

Das hipóteses (iii) e (iv) da definição de dicotomia obtemos:

$$\begin{aligned} |\tilde{P}(t) - P(t)| &\leq ke^{-\alpha(t-\tau)}Mke^{-\alpha(t-\tau)} \\ &\leq k^2Me^{-2\alpha(t-\tau)} \end{aligned}$$

logo,

$$|\tilde{P}(t)| \leq |\tilde{P}(t) - P(t)| + |P(t)| \leq k^2Me^{-2\alpha(t-\tau)} + |P(t)|$$

e, portanto, $|\tilde{P}(t)| \rightarrow |P(t)|$ exponencialmente em norma quando $t \rightarrow +\infty$.

Fazendo $s = t$ em $|T(t, s)P(s)| \leq ke^{-\alpha(t-s)}$ obtemos $|P(t)| \leq k$. Assim, $\tilde{Q}(t)$ também é fortemente contínuo e $|\tilde{Q}(t)| \rightarrow |Q(t)|$ exponencialmente em norma quando $t \rightarrow +\infty$. Além disso, $|Q(t)| \leq k$. Daí, $\tilde{Q}(t)$ e $\tilde{P}(t)$ são uniformemente limitadas em norma para $t \in [\tau, +\infty)$. Digamos: $|\tilde{P}(t)|, |\tilde{Q}(t)| \leq k_1$ para $t \geq \tau$. Então para $t \geq s \geq \tau$:

$$|T(t, s)\tilde{P}(s)| = |T(t, s)P(s)\tilde{P}(s)| \leq kk_1e^{-\alpha(t-s)}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} T(t,s)[\tilde{Q}(s)T(s,t)Q(t)\tilde{Q}(t)\phi] &= \tilde{Q}(t)T(t,s)T(s,t)Q(t)\tilde{Q}(t)\phi \\ &= \tilde{Q}(t)Q(t)\tilde{Q}(t)\phi = \tilde{Q}(t)\phi \\ &= T(t,s)[T(s,t)\tilde{Q}(t)\phi] \end{aligned}$$

pois, $\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}(t)Q(t) + \tilde{Q}(t)P(t) = \tilde{Q}(t)Q(t)$. Como $T(t,s)$ é um isomorfismo de $\mathcal{R}\tilde{Q}(s)$ sobre $\mathcal{R}\tilde{Q}(t)$ logo admite inversa que aplicada na igualdade acima nos dá:

$$T(s,t)\tilde{Q}(t)\phi = \tilde{Q}(s)T(s,t)Q(t)\tilde{Q}(t)\phi$$

portanto,

$$|T(s,t)\tilde{Q}(t)| \leq k_1^2 k e^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s \geq \tau$$

Caso 2: $t_0 \leq t \leq \tau$

Como

$$T(t,\tau)\tilde{Q}(\tau)T(\tau,t) = \tilde{Q}(t)T(t,\tau)T(\tau,t) = \tilde{Q}(t)$$

obtemos a continuidade de $t \rightarrow \tilde{Q}(t)\phi$, para todo $\phi \in C$. Do Princípio da Limitação Uniforme segue que $\tilde{Q}(t)$ é uniformemente limitado em norma para $t \in [t_0, \tau]$. Logo, $T(s,t)\tilde{Q}(t)$ é limitado em norma para todo $t \geq s$ em $[t_0, \tau]$, portanto existe uma constante N tal que:

$$|T(s,t)\tilde{Q}(t)| \leq N e^{-\alpha(t-s)}.$$

Visto que $\tilde{P}(t) = I - \tilde{Q}(t)$ concluímos também que

$$|T(t,s)\tilde{P}(s)| \leq N e^{-\alpha(t-s)}$$

Caso 3: $t \geq \tau \geq s \geq t_0$

Temos:

$$T(t,s)\tilde{P}(s) = T(t,\tau)T(\tau,s)\tilde{P}(s)\tilde{P}(s) = T(t,\tau)\tilde{P}(\tau)T(\tau,s)\tilde{P}(s)$$

assim,

$$|T(t,s)\tilde{P}(s)| \leq k k_1 e^{-\alpha(t-\tau)} N e^{-\alpha(\tau-s)} = N k k_1 e^{-\alpha(t-s)}.$$

De modo análogo obtemos:

$$|T(s,t)\tilde{Q}(t)| \leq N k k_1^2 e^{-\alpha(t-s)}.$$

Portanto, tomando $K = \max\{kk_1^2, kk_1, N, Nkk_1, Nkk_1^2\}$ segue

$$|T(t, s)\tilde{P}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$$

$$|T(s, t)\tilde{Q}(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$$

para todo $t \geq s$ em $[t_0, +\infty)$. $\square$

As hipóteses no lema 2.7 são necessárias. Entretanto, um cálculo direto de $X_1(t_0)$ naquele lema é dificilmente exequível. Uma alternativa é considerar o sistema adjunto.

Lema 2.8 *Suponhamos que a equação (1.2) possui uma dicotomia exponencial em $J = [\tau, +\infty)$. Seja $t_0 < \tau$. Suponhamos que $T^*(t_0, \tau)\psi \neq 0$ para cada $0 \neq \psi \in \mathcal{RQ}^*(\tau)$. Então $T^*(s, t)$ possui uma dicotomia exponencial em $[t_0, +\infty)$ e as hipóteses do lema 2.7 estão satisfeitas.*

Demonstração Pelo lema 2.4 $T^*(s, t)$ possui uma dicotomia exponencial em J e pelo lema 2.3 temos que $\dim \mathcal{RQ}^*(t) = \dim(\mathcal{RQ}(t))^*$ que por sua vez é igual a $\dim \mathcal{RQ}(t) = m$. Analogamente a demonstração do lema 2.6, mostra-se que $T^*(s, t)$ possui uma dicotomia exponencial sobre $[t_0, +\infty)$, com projeções $\tilde{P}(t)$ e $\tilde{Q}(t)$ relativamente a $[t_0, +\infty)$. Temos também que $\mathcal{R}\tilde{Q}^*(t) = \mathcal{RQ}^*(t)$, $t \geq \tau$ e $\dim \mathcal{R}\tilde{Q}^*(t) = m$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$.

É imediato que $\mathcal{R}\tilde{Q}^*(\tau) = [\mathcal{R}P(\tau)]^0$.

Seja $X_1(t_0)$ como no lema 2.7.

Provemos que ${}^0[\mathcal{R}\tilde{Q}^*(t_0)] = X_1(t_0)$. Para cada $\phi \in X_1(t_0)$, seja $\psi \in \mathcal{R}\tilde{Q}^*(\tau) = [\mathcal{R}P(\tau)]^0$. Então, $\langle \psi, T(\tau, t_0)\phi \rangle = 0$ pois $T(\tau, t_0)\phi \in \mathcal{R}P(\tau)$. Assim, $\langle T^*(\tau, t_0)\psi, \phi \rangle = 0$, para todo $\psi \in \mathcal{R}\tilde{Q}^*(\tau)$. Também $T^*(t_0, \tau) : \mathcal{R}\tilde{Q}^*(\tau) \rightarrow \mathcal{R}\tilde{Q}^*(t_0)$ é sobrejetora. Daí, $T^*(t_0, \tau)\psi \in \mathcal{R}\tilde{Q}^*(t_0)$ e $\phi \in {}^0[\mathcal{R}\tilde{Q}^*(t_0)]$.

Reciprocamente, se $\phi \in {}^0[\mathcal{R}\tilde{Q}^*(t_0)]$ basta inverter o procedimento acima para mostrar que $T(\tau, t_0)\phi \in {}^0[\mathcal{R}\tilde{Q}^*(\tau)] = \mathcal{R}P(\tau)$. Portanto, $\phi \in X_1(t_0)$.

Finalmente, obtemos que:

$$\begin{aligned} \text{codim} X_1(t_0) &= \text{codim} {}^0[\mathcal{R}\tilde{Q}^*(t_0)] = \text{codim} \mathcal{R}\tilde{P}(t_0) \\ &= \dim \mathcal{R}\tilde{Q}(t_0) = m = \text{codim} \mathcal{R}P(\tau). \square \end{aligned}$$

Observação 2.4 : *As hipóteses no lema 2.8 podem ser verificadas considerando o sistema adjunto formal para (1.2), como veremos adiante.*

Capítulo 3

Alternativa de Fredholm para Soluções Limitadas de Equações Diferenciais Funcionais

Neste capítulo apresentamos condições necessárias e suficientes para que uma função $x : \mathbb{R}_+(\mathbb{R}_-) \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja solução de (1.1). Definimos um isomorfismo entre as soluções (limitadas) do sistema adjunto verdadeiro e as soluções (limitadas) do sistema adjunto formal de (1.2) que utilizamos nas demonstrações do teorema 3.3 o qual fornece condições suficientes para a existência da dicotomia exponencial em $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$; e do teorema 3.4 que afirma que o operador

$$\begin{aligned} F : C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) &\rightarrow C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto F(x)(t) = h(t) \end{aligned}$$

definido por:

$$h(t) = \frac{d}{dt}x(t) - L(t)x_t$$

é um operador de Fredholm cujo índice $I(F) = \dim \mathcal{R}Q^-(0) - \dim \mathcal{R}Q^+(0)$. Além disso, dá uma caracterização para o núcleo e para a imagem deste operador.

Para realizarmos a divisão induzida pela dicotomia exponencial na Fórmula da Variação das Constantes, consideramos a função matricial salto:

$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0 & -r \leq \theta < 0 \\ I & \theta = 0. \end{cases}$$

A função X_0 desempenha um papel importante visto que a solução do sistema não homogêneo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = L(t)x_t + h(t) \\ x_\sigma = \phi \end{cases}$$

onde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, pode ser escrita como:

$$x_t = T(t, \sigma)\phi + \int_\sigma^t T(t, s)X_0 h(s)ds, \quad t \geq \sigma.$$

Como X_0 não é contínua, devemos estender nosso espaço para incluir as funções salto ou então dar significado as seguintes expressões envolvendo X_0 :

- (1) $T(t, s)X_0$;
- (2) $\int_a^b T(t, s)X_0 h(s)ds$;
- (3) $\langle \psi, T(t, s)X_0 \rangle = \langle T^*(s, t)\psi, X_0 \rangle$;
- (4) $\langle \psi, \int_a^b T(t, s)X_0 h(s)ds \rangle = \int_a^b \langle \psi, T(t, s)X_0 \rangle h(s)ds$;
- (5) $P(s)X_0, Q(s)X_0$;
- (6) $T(t, s)P(s)X_0 = P(t)T(t, s)X_0$;
- (7) $\langle \psi, T(t, s)P(s)X_0 \rangle = \langle T^*(s, t)P^*(t)\psi, X_0 \rangle$;
- (8) $\langle \psi, T(s, t)Q(t)X_0 \rangle = \langle T^*(t, s)Q^*(s)\psi, X_0 \rangle$

onde $\psi \in C^*$ e $t \geq s$ em J . Isto também será tratado neste capítulo.

Vamos supor que $\dot{x}(t) = L(t)x_t$ tem dicotomia exponencial com operadores projeção $P(t)$ e $Q(t)$ em J .

Os itens de (1) a (3) foram discutidos nos capítulos 1 e (4) é uma aplicação do teorema de Fubini, isto é:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \int_a^b T(t, s)X_0 h(s)ds \rangle &= \int_{-r}^0 [d\psi(\theta)] \int_a^b T(t, s)X_0(\theta)h(s)ds \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{-r}^0 [d\psi(\theta)] T(t, s)X_0(\theta) \right\} h(s)ds \\ &= \int_a^b \langle \psi, T(t, s)X_0 \rangle h(s)ds. \end{aligned}$$

Definição 3.1 Uma base invariante $\{q_i(t)\}$ ($\{q_i^*(t)\}$) em $\mathcal{RQ}(t)$ ($\mathcal{RQ}^*(t)$); $i = 1, 2, \dots, m$; é uma base de $\mathcal{RQ}(t)$ ($\mathcal{RQ}^*(t)$) para cada $t \in J$, tal que

$$q_i(t) = T(t, s)q_i(s) \quad (q_i^*(s) = T^*(s, t)q_i^*(t))$$

para todo $s \leq t$ em J .

Lema 3.1 Se $\Phi(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t))$ e $\Psi(t) = (q_1^*(t), q_2^*(t), \dots, q_m^*(t))^t$ são bases invariantes de $\mathcal{RQ}(t)$ e $\mathcal{RQ}^*(t)$, respectivamente, então:

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t), \Phi(t) \rangle &= I_{m \times m} \\ Q(t)\phi &= \Phi(t) \langle \Psi(t), \phi \rangle \\ P(t)\phi &= \phi - Q(t)\phi \\ Q^*(t)\psi &= \langle \psi, \Phi(t) \rangle \Psi(t) \\ P^*(t)\psi &= \psi - Q^*(t)\psi \end{aligned}$$

para todo $t \in J$, $\phi \in C$ e $\psi \in C^*$.

Demonstração Seja $\{q_j(t_0)\}$ base de $\mathcal{RQ}(t_0)$, $t_0 \in J$, e consideremos $\{q_i^*(t_0)\}$ a base dual de $\mathcal{RQ}(t_0)$ em $\mathcal{RQ}^*(t_0)$, isto é,

$$\langle q_i^*(t_0), q_j(t_0) \rangle = \delta_{ij}.$$

Então

$$\begin{aligned} \langle q_i^*(t), q_j(t) \rangle &= \langle q_i^*(t), T(t, t_0)q_j(t_0) \rangle \\ &= \langle T^*(t_0, t)q_i^*(t), q_j(t_0) \rangle \\ &= \langle q_i^*(t_0), q_j(t_0) \rangle \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$ em J . Logo $\langle \Psi(t), \Phi(t) \rangle = I_{m \times m}$, para todo $t \in J$.

Como $Q(t)\phi \in \mathcal{RQ}(t)$, $Q(t)\phi = \Phi(t)\alpha$ para todo $\phi \in C$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^t \in \mathbb{R}^m$:

$$\phi = Q(t)\phi + P(t)\phi = \Phi(t)\alpha + P(t)\phi$$

e

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t), \phi \rangle &= \langle \Psi(t), \Phi(t)\alpha + P(t)\phi \rangle \\ &= \langle \Psi(t), \Phi(t) \rangle \alpha + \langle \Psi(t), P(t)\phi \rangle \\ &= \alpha + \langle P^*(t)\Psi(t), \phi \rangle \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Q(t)\phi &= \Phi(t) \langle \Psi(t), \phi \rangle \\ P(t)\phi &= \phi - Q(t)\phi \end{aligned}$$

para todo $\phi \in C$.

De modo análogo prova-se que:

$$\begin{aligned} Q^*(t)\psi &= \langle \psi, \Phi(t) \rangle \Psi(t) \\ P^*(t)\psi &= \psi + Q^*(t)\psi. \square \end{aligned}$$

Temos então a definição:

Definição 3.2 Para todo $t \in J$, definimos:

$$\begin{aligned} Q(t)X_0 &= \Phi(t) \langle \Psi(t), X_0 \rangle \\ P(t)X_0 &= X_0 - Q(t)X_0 \\ Q(t)T(t,s)X_0 &= \Phi(t) \langle \Psi(t), T(t,s)X_0 \rangle \\ P(t)T(t,s)X_0 &= T(t,s)X_0 - Q(t)T(t,s)X_0 \end{aligned}$$

Observe que $P(t)X_0$ não é contínua.

Lema 3.2 Para todo $t \geq s$ em J , temos:

- (i) $T(t,s)P(s)X_0 = P(t)T(t,s)X_0$;
- (ii) $\langle \psi, T(t,s)P(s)X_0 \rangle = \langle T^*(s,t)P^*(t)\psi, X_0 \rangle$;
- (iii) $\langle \psi, T(s,t)Q(t)X_0 \rangle = \langle T^*(t,s)Q^*(s)\psi, X_0 \rangle$.

Demonstração

(i) Como $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ são bases invariantes de $\mathcal{R}Q(t)$ e $\mathcal{R}Q^*(t)$, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} T(t,s)Q(s)X_0 &= T(t,s)\Phi(s) \langle \Psi(s), X_0 \rangle \\ &= \Phi(t) \langle T^*(s,t)\Psi(t), X_0 \rangle \\ &= \Phi(t) \langle \Psi(t), T(t,s)X_0 \rangle \\ &= Q(t)T(t,s)X_0. \end{aligned}$$

(ii) Para todo $\psi \in C^*$ e $t \geq s$ em J segue

$$\begin{aligned} \langle \psi, Q(t)X_0 \rangle &= \langle \psi, \Phi(t) \langle \Psi(t), X_0 \rangle \rangle \\ &= \langle \psi, \Phi(t) \rangle \langle \Psi(t), X_0 \rangle \\ &= \langle \langle \psi, \Phi(t) \rangle \Psi(t), X_0 \rangle \\ &= \langle Q^*(t)\psi, X_0 \rangle. \end{aligned}$$

De $Q(s)X_0 \in C$ e pela igualdade acima

$$\begin{aligned} \langle \psi, T(t, s)Q(s)X_0 \rangle &= \langle T^*(s, t)\psi, Q(s)X_0 \rangle \\ &= \langle Q^*(s)T^*(s, t)\psi, X_0 \rangle \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \langle \psi, T(t, s)P(s)X_0 \rangle &= \langle \psi, T(t, s)X_0 - T(t, s)Q(s)X_0 \rangle \\ &= \langle \psi, T(t, s)X_0 \rangle - \langle \psi, T(t, s)Q(s)X_0 \rangle \\ &= \langle T^*(s, t)\psi, X_0 \rangle - \langle Q^*(s)T^*(s, t)\psi, X_0 \rangle \\ &= \langle T^*(s, t)\psi - Q^*(s)T^*(s, t)\psi, X_0 \rangle \\ &= \langle P^*(s)T^*(s, t)\psi, X_0 \rangle \end{aligned}$$

e como $T^*(s, t)$ tem dicotomia exponencial sobre J

$$\langle \psi, T(t, s)P(s)X_0 \rangle = \langle T^*(s, t)P^*(s)\psi, X_0 \rangle.$$

(iii) Usando que $T(t, s)|_{\mathcal{R}Q(s)}$ e $T^*(s, t)|_{\mathcal{R}Q^*(t)}$ são isomorfismos obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \psi, T(t, s)Q(s)X_0 \rangle &= \langle \psi, Q(s)T(s, t)Q(t)X_0 \rangle \\ &= \langle Q^*(t)T^*(t, s)Q^*(s)\psi, X_0 \rangle \\ &= \langle T^*(t, s)Q^*(s)\psi, X_0 \rangle. \square \end{aligned}$$

Lema 3.3 Para todo $t \geq s$ em J , existem constantes K e α tais que

$$\begin{aligned} |T(s, t)Q(t)X_0| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \\ \sup_{\theta \in [-r, 0]} |(T(t, s)P(s)X_0)(\theta)| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \end{aligned}$$

Demonstração Seja $\psi \in C^* = B_0[-r, 0]$ e $\|\psi\|_{B_0} = 1$. Como $T^*(s, t)$ tem dicotomia sobre J ,

$$\begin{aligned} |\langle \psi, T(t, s)P(s)X_0 \rangle| &= |\langle T^*(s, t)P^*(s)\psi, X_0 \rangle| \\ &\leq |T^*(s, t)P^*(s)\psi|_{B_0} \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
| \langle \psi, T(s, t)Q(t)X_0 \rangle | &= | \langle T^*(t, s)Q^*(s)\psi, X_0 \rangle | \\
&\leq |T^*(t, s)Q^*(s)\psi|_{B_0} \\
&\leq Ke^{-\alpha(t-s)}.
\end{aligned}$$

Logo do teorema de Hahn-Banach segue que

$$\begin{aligned}
|T(s, t)Q(t)X_0| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \\
\sup_{\theta \in [-r, 0]} |(T(t, s)P(s)X_0)(\theta)| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}
\end{aligned}$$

$t \geq s$ em J . $\square$

Observação 3.1 Apesar de $T(t, s)P(s)X_0$ não ser um elemento de C para $s \leq t \leq s + r$, escreveremos a segunda igualdade do lema 3.3 como

$$|T(t, s)P(s)X_0| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}.$$

Teorema 3.1 Suponhamos $t \rightarrow L(t)$ contínua, (1.2) tem dicotomia exponencial em $\mathbb{R}_+$. Então para qualquer função $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e limitada sobre $\mathbb{R}_+$, $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução limitada de (1.1) se, e somente se

$$x_t = T(t, 0)P(0)\phi + \int_0^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds - \int_t^\infty T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Demonstração Se $x(t)$ é solução de (1.1), limitada em $\mathbb{R}_+$, pela Fórmula da Variação das Constantes

$$x_t = T(t, \tau)x_\tau + \int_\tau^t T(t, s)X_0h(s)ds, \quad t \geq \tau \geq 0$$

logo,

$$Q(t)x_t = T(t, \tau)Q(\tau)x_\tau + \int_\tau^t T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds, \quad t \geq \tau \geq 0$$

$$T(\tau, t)Q(t)x_t = Q(\tau)x_\tau + \int_\tau^t T(\tau, s)Q(s)X_0h(s)ds, \quad t \geq \tau \geq 0.$$

Fazendo $t \rightarrow +\infty$ na expressão acima obtemos:

$$|T(\tau, t)Q(t)x_t| \leq Ke^{-\alpha(t-\tau)}|x_t|.$$

Como $|x_t|$ é limitado temos

$$Q(\tau)x_\tau = - \int_\tau^\infty T(\tau, s)Q(s)X_0h(s)ds \quad (3.1)$$

Ainda,

$$P(t)x_t = T(t, 0)P(0)\phi + \int_0^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds. \quad (3.2)$$

Tomando em (3.1) $\tau = t$ e somando a (3.2) obtemos:

$$x_t = T(t, 0)P(0)\phi + \int_0^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds - \int_t^\infty T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Resta mostrar que se

$$x_t = T(t, 0)P(0)\phi + \int_0^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds - \int_t^\infty T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds, \quad t \geq 0$$

então x_t é solução de (1.1), limitada em $\mathbb{R}_+$. De fato, a limitação segue de:

$$\begin{aligned} |x_t| &\leq |T(t, 0)P(0)\phi| + \int_0^t |T(t, s)P(s)X_0h(s)|ds \\ &\quad + \int_t^\infty |T(t, s)Q(s)X_0h(s)|ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t}|\phi| + \frac{MK}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{KM}{\alpha} \end{aligned}$$

logo,

$$|x_t| \leq K|\phi| + \frac{2MK}{\alpha}, \quad t \geq 0$$

onde $M > 0$ e $|h(s)| \leq M$.

Para ver que

$$x_t = T(t, 0)P(0)\phi + \int_0^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds - \int_t^\infty T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds, \quad t \geq 0$$

é solução de (1.1) notemos que, para $t \geq \tau \geq 0$

$$\begin{aligned} T(t, \tau)x_\tau &= T(t, \tau)T(\tau, 0)P(0)\phi + T(t, \tau) \int_0^\tau T(\tau, s)P(s)X_0h(s)ds \\ &\quad - T(t, \tau) \int_\tau^\infty T(\tau, s)Q(s)X_0h(s)ds \\ &= T(t, 0)P(0)\phi + \int_0^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds - \int_t^\infty T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\tau}^t T(t,s)P(s)X_0h(s)ds - \int_{\tau}^t T(t,s)Q(s)X_0h(s)ds \\
& = T(t,0)P(0)\phi + \int_0^t T(t,s)P(s)X_0h(s)ds \\
& \quad - \int_t^{\infty} T(t,s)Q(s)X_0h(s)ds - \int_{\tau}^t T(t,s)X_0h(s)ds \\
& = x_t - \int_{\tau}^t T(t,s)X_0h(s)ds
\end{aligned}$$

ou seja,

$$x_t = T(t,\tau)x_{\tau} + \int_{\tau}^t T(t,s)X_0h(s)ds, \quad t \geq \tau. \square$$

Teorema 3.2 *Suponhamos que $t \rightarrow L(t)$ contínua, (1.2) tem dicotomia exponencial em $\mathbb{R}_-$. Então para qualquer função $h : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e limitada em $\mathbb{R}_-$, $x : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução limitada de (1.1) se, e somente se*

$$x_t = T(t,0)Q(0)\phi + \int_0^t T(t,s)Q(s)X_0h(s)ds + \int_{-\infty}^t T(t,s)P(s)X_0h(s)ds \quad t \leq 0.$$

Demonstração Se $x : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de (1.1) então pela Fórmula da Variação das Constantes

$$x_t = T(t,\tau)x_{\tau} + \int_{\tau}^t T(t,s)X_0h(s)ds \quad 0 \geq t \geq \tau$$

logo

$$P(t)x_t = T(t,\tau)P(\tau)x_{\tau} + \int_{\tau}^t T(t,s)P(s)X_0h(s)ds$$

fazendo $\tau \rightarrow -\infty$ obtemos

$$P(t)x_t = \int_{-\infty}^t T(t,s)P(s)X_0h(s)ds. \quad (3.3)$$

Ainda

$$Q(0)\phi = T(0,t)Q(t)x_t + \int_t^0 T(0,s)Q(s)X_0h(s)ds$$

então

$$T(t,0)Q(0)\phi = Q(t)x_t + \int_t^0 T(t,s)Q(s)X_0h(s)ds$$

$$Q(t)x_t = T(t,0)Q(0)\phi - \int_t^0 T(t,s)Q(s)X_0h(s)ds. \quad (3.4)$$

Somando (3.3) com (3.4) obtemos:

$$x_t = T(t, 0)Q(0)\phi + \int_0^t T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds + \int_{-\infty}^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds, \quad t \leq 0.$$

Resta mostrar que

$$x_t = T(t, 0)Q(0)\phi + \int_0^t T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds + \int_{-\infty}^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds, \quad t \leq 0$$

é solução limitada de (1.1) em $\mathbf{R}_-$. Notemos que para $0 \geq t \geq \tau$

$$\begin{aligned} T(t, \tau)x_\tau &= T(t, \tau)T(\tau, 0)Q(0)\phi + T(t, \tau) \int_0^\tau T(\tau, s)Q(s)X_0h(s)ds \\ &\quad + T(t, \tau) \int_{-\infty}^\tau T(\tau, s)P(s)X_0h(s)ds \\ &= T(t, 0)Q(0)\phi - \int_\tau^0 T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds + \int_{-\infty}^\tau T(t, s)P(s)X_0h(s)ds \\ &= T(t, 0)Q(0)\phi - \int_t^0 T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds + \int_{-\infty}^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds \\ &\quad - \int_\tau^t T(t, s)Q(s)X_0h(s)ds - \int_\tau^t T(t, s)P(s)X_0h(s)ds \\ &= x_t - \int_\tau^t T(t, s)X_0h(s)ds \end{aligned}$$

ou seja,

$$x_t = T(t, \tau)x_\tau + \int_\tau^t T(t, s)X_0h(s)ds, \quad 0 \geq t \geq \tau.$$

Para ver que x_t é limitada em $\mathbf{R}_-$, notemos que:

$$\begin{aligned} |x_t| &\leq Ke^{\alpha t}|\phi| + \int_t^0 KMe^{-\alpha(s-t)}ds + \int_{-\infty}^t Ke^{-\alpha(t-s)}Mds \quad t \leq 0 \\ &\leq Ke^{\alpha t}|\phi| + \frac{KM}{\alpha}(1 - e^{\alpha t}) + \frac{KM}{\alpha} \\ &\leq K|\phi| + \frac{2KM}{\alpha} \end{aligned}$$

onde $M > 0$ e $|h(s)| < M$, ou seja,

$$|x_t| \leq K|\phi| + \frac{2KM}{\alpha}, \quad t \leq 0. \square$$

Definição 3.3 Consideremos o operador

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} : BV([\sigma, t+r], \mathbf{R}^{n^*}) &\rightarrow C([\sigma, t], B_0[-r, 0]) \\ y &\mapsto \tilde{\Psi}(y) \end{aligned}$$

onde:

- $BV([\sigma, t+r], \mathbb{R}^{n*})$ é o espaço vetorial das funções de variação limitada em $[\sigma, t+r]$ com valores em $\mathbb{R}^{n*}$ e contínuas em $[\sigma, t+r]$.
- $C([\sigma, t], B_0[-r, 0])$ é o conjunto das funções contínuas definidas em $[\sigma, t]$ com valores em $B_0[-r, 0]$.

$\tilde{\Psi}$ é definida como:

$$\tilde{\Psi}(y)(u) = \psi(u, .)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi(u, 0) &= 0 \\ \psi(u, s-u) &= \int_u^{u+r} y(\alpha) p(\alpha, s) d\alpha - \int_u^{u+r} y(\alpha) p(\alpha, u) d\alpha - y(u) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observação 3.2 Quando $h = 0$, a fórmula dada pelo lema 1.5 pode ser escrita como:

$$\langle \psi(t, .), x_t \rangle = \langle \psi(s, .), x_s \rangle$$

se considerarmos x solução de (1.1) e y solução de (1.6).

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \psi(t, .), x_t \rangle &= \int_{-r}^0 d_\theta \psi(t, \theta) x(t+\theta) \\ &= \int_{t-r}^t d_s \psi(t, s-t) x(s) \\ &= \int_{t-r}^{t-} d_s \psi(t, s-t) x(s) + \int_{t-}^t d_s \psi(t, s-t) x(s) \\ &= \int_{t-r}^{t-} d_s \left\{ \int_t^{t+r} y(\alpha) p(\alpha, s) d\alpha - \int_t^{t+r} y(\alpha) p(\alpha, t) d\alpha - y(t) \right\} x(s) \\ &\quad + [\psi(t, 0) - \psi(t, 0^-)] x(t) \\ &= \int_{t-r}^{t-} d_s \left\{ \int_t^{t+r} y(\alpha) p(\alpha, s) d\alpha \right\} x(s) + y(t) x(t) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\psi(s, .) = T^*(s, t) \psi(t, .)$$

isto é, $\psi(s, .)$ é solução do sistema adjunto verdadeiro.

Lema 3.4 *Seja $J = [t_0, +\infty)$ ou $(-\infty, +\infty)$.*

Sejam:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{y : y(t) \text{ satisfaz o sistema adjunto formal (1.6) em } J, \text{ isto é,} \\ &\quad y_s = \tilde{T}(s, t)y_t, \ s \leq t \text{ em } J\} \\ \Psi_1 &= \{\psi(., \theta), \ -r \leq \theta \leq 0 : \psi(s, .) \text{ satisfaz o sistema adjunto verdadeiro} \\ &\quad \text{em } J, \text{ isto é, } \psi(s, .) = T^*(s, t)\psi(t, .), \ s \leq t \text{ em } J\} \end{aligned}$$

Então $\tilde{\Psi}|_{Y_1} : Y_1 \rightarrow \Psi_1, u \in J$, definida em (3.5) é um isomorfismo linear cuja inversa $(\tilde{\Psi}|_{Y_1})^{-1} : \Psi_1 \rightarrow Y_1, u \in J$, é dada por:

$$\psi(\alpha, 0^-) = -y(\alpha), \quad \alpha \in [u, u+r]$$

onde:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, .) &= T^*(\alpha, u+r)\psi(u+r, .) \text{ e} \\ \psi(\alpha, 0^-) &= \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \psi(\alpha, \theta) \end{aligned}$$

Além disso, seja $Y_{1b} \subset Y_1$ o subespaço das soluções limitadas de (1.6) em J com a norma

$$\|y\|_{Y_{1b}} = \sup_{s \in J} |y(s)|_{\mathbb{R}^{n*}},$$

e seja $\Psi_{1b} \subset \Psi$ o subespaço das soluções limitadas do sistema adjunto verdadeiro em J com a norma

$$\|\psi(., .)\|_{\Psi_{1b}} = \sup_{s \in J} |\psi(s, .)|_{B_0},$$

então $\tilde{\Psi}|_{Y_{1b}}$ é um isomorfismo topológico de Y_{1b} sobre Ψ_{1b} se $\int_u^{u+r} |L(\alpha)| d\alpha \leq M, u \in J$, para alguma constante $M > 0$.

Demonstração Notemos que pela observação (3.2) que $\psi(u, .)$ como definido em (3.5) satisfaz o sistema adjunto verdadeiro.

Provemos primeiramente que $\tilde{\Psi}|_{Y_1}$ é injetora. Suponhamos $\tilde{\Psi}|_{Y_1}(y)(u) = 0$, para todo $u \in J$, ou seja, $\psi(u, .) = 0$ para todo $u \in J$. Tomando o limite em s quando $s \rightarrow u^-$ obtemos:

$$0 = \lim_{s \rightarrow u^-} \psi(u, s-u) = -y(u)$$

isto é, $y(u) = 0$ para todo $u \in J$.

Tomemos $\psi(\alpha, \cdot) \in B_0$, $\alpha \in [u, u+r]$, $u \in J$. Pela demonstração do teorema 1.7 temos que:

$$\begin{aligned} \langle \psi(\alpha, \cdot), \phi \rangle &= \langle T^*(\alpha, u+r)\psi(u+r, \cdot); \phi \rangle \\ &= \int_{-r}^{0^-} d_\xi [\psi(u+r, \xi + \alpha - (u+r))] \phi(\xi) \\ &\quad + \int_{-r}^{0^-} d_\xi \left[\int_{\alpha}^{u+r} y(\beta, u+r) p(\beta, \alpha + \xi) d\beta \right] \phi(\xi) + y(\alpha, u+r) \phi(0) \end{aligned}$$

onde

$$y(\alpha, u+r) = \begin{cases} 0 & \alpha > u+r \\ \int_{\alpha-u-r}^0 [d_\theta \psi(u+r, \theta)] Y(\alpha, u+r+\theta) & \alpha \leq u+r \end{cases}$$

satisfaz

$$y(\alpha, u+r) + \int_{\alpha}^{u+r} y(\beta, u+r) p(\beta, \alpha) d\beta = -\psi(u+r, \alpha - (u+r)), \quad \alpha \leq u+r$$

e é a solução da equação adjunta formal

$$y(\alpha, u+r) + \int_{\alpha}^{u+r} y(\beta, u+r) p(\beta, \alpha) d\beta = -\psi(u+r, -r) \quad \alpha \leq u$$

Disso obtemos:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, 0^-) &= -y(\alpha, u+r) \stackrel{\text{def}}{=} -y(\alpha) \\ \psi(\alpha, \theta) &= T^*(\alpha, u+r)\psi(u+r, \theta) \\ &= \int_{\alpha}^{u+r} y(\beta, u+r) p(\beta, \alpha + \theta) d\beta \\ &\quad + \psi(u+r, \theta + \alpha - (u+r)) \end{aligned}$$

para $-r \leq \theta < 0$ e $\alpha \in [u, u+r]$.

Então, dado $\psi(\alpha, \cdot) \in B_0$, existe $y \in Y_1$, $y(\alpha) = -\psi(\alpha, 0^-)$, $\alpha \in [u, u+r]$ tal que

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(y)(u) &= \int_u^{u+r} [-\psi(\alpha, 0^-)] p(\alpha, s) d\alpha - \int_u^{u+r} [-\psi(\alpha, 0^-)] p(\alpha, u) d\alpha \\ &\quad - [-\psi(u, 0^-)] \\ &= \int_u^{u+r} [-\psi(\alpha, 0^-)] p(\alpha, s) d\alpha + \psi(u+r, -r) \\ &= \psi(u, s-u) \end{aligned}$$

E, portanto, $\tilde{\Psi}|_{Y_1}$ é sobrejetora.

Provemos que $\tilde{\Psi}|_{Y_{1b}}$ é um isomorfismo topológico se $\int_u^{u+r} |L(\alpha)| d\alpha \leq M$.

É imediato que :

$$\psi(.,.) \mapsto (\tilde{\Psi}|_{Y_1})^{-1}(\psi(.,.)) = -\psi(., 0^-)$$

é contínua.

Reciprocamente,

$$\begin{aligned} |\psi(u,.)|_{B_0} &= |y(u)| + V_{-r}^0 \left(\int_u^{u+r} y(\alpha) p(\alpha, u + \theta) d\alpha \right) \\ &\leq |y(u)| + \int_u^{u+r} |y(\alpha)| |p(\alpha, u + \theta)|_{B_0} d\alpha \\ &\leq |y|_{Y_{1b}} + |y|_{Y_{1b}} \int_u^{u+r} |L(\alpha)| d\alpha \\ &\leq (M + 1) |y|_{Y_{1b}}. \square \end{aligned}$$

Observação 3.3 Lembremos que a solução nula é um ponto de equilíbrio hiperbólico de (1.2) se sua equação característica não possui raízes sobre o eixo imaginário o que implica que a equação acima tem dicotomia exponencial em $\mathbb{R}$.

Teorema 3.3 Seja $L(t)$ como em (1.2) e $L(t) \rightarrow L^\pm$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. Suponhamos $\dot{x}(t) = L^\pm x_t$ possui zero como um ponto de equilíbrio hiperbólico com $P^\pm$ projeções sobre o subespaço estável. Suponhamos $T(t, s)\phi \neq 0$ para $s \leq t$ em $\mathbb{R}_-$, $0 \neq \phi \in C$, e $\tilde{T}(s, t)\psi \neq 0$ para $s \leq t$ em $[-r, \infty)$, $0 \neq \psi \in B_0$. Então (1.2) possui uma dicotomia exponencial em $\mathbb{R}_-$ e $\mathbb{R}_+$ com as projeções $P^\pm(t) \rightarrow P^\pm$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Demonstração Como $\dot{x}(t) = L^\pm x_t$ possui zero como ponto de equilíbrio hiperbólico e $L(t) \rightarrow L^\pm$ quando $t \rightarrow \pm\infty$, pelo lema 2.5, (1.2) tem dicotomia exponencial em $[\tau, +\infty)$, $(-\infty, -\tau]$ para alguma constante $\tau > 0$ com projeções $P^+(t)$ e $P^-(t)$, respectivamente, com $P^+(t), P^-(t) \rightarrow P^+, P^-$. Logo (1.2) tem dicotomia exponencial em $(-\infty, 0]$ com projeções $P(t) \rightarrow P^-(t)$ quando $t \rightarrow -\infty$ pois para $0 \neq \phi \in \mathcal{RQ}(-\tau)$, $T(0, -\tau)\phi \neq 0$ logo pelo lema 2.6 (1.2) tem dicotomia exponencial em $(-\infty, 0]$.

Além disso, para todo $0 \neq \eta_\tau \in \mathcal{RQ}^*(\tau)$

$$T^*(0, \tau)\eta_\tau = \tilde{\Psi}_0(y) \neq 0$$

desde que $\tilde{T}(s, t)\psi \neq 0$ para $s \leq t$ em $[-r, \infty)$, $\psi \neq 0$ em B_0 . Pelo lema 2.8 $T^*(s, t)$ tem dicotomia exponencial em $[0, +\infty)$ e daí as hipóteses do lema 2.7 estão satisfeitas de modo que quando consideramos o conjunto

$$X_1(0) = \{\phi : T(\tau, 0)\phi \in \mathcal{RP}(\tau)\}$$

com $\tau > 0$ concluímos que (1.2) tem dicotomia exponencial em $[0, +\infty)$ com projeções $P(t) \rightarrow P^+(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$. $\square$

Seja $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas e limitadas com a norma do *sup* e seja $C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções em $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ com derivadas em $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ cuja norma é dada por $|x|_{C_b^1} = |x|_{C_b^0} + |\dot{x}|_{C_b^0}$, $x \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Definições semelhantes são dadas substituindo $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{R}^{n*}$.

Definição 3.4 *Consideremos o operador:*

$$\begin{aligned} F : C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) &\rightarrow C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto F(x)(t) = h(t) \end{aligned}$$

definido por:

$$h(t) = \frac{d}{dt}x(t) - L(t)x_t$$

Teorema 3.4 *Seja $L(t)$ contínua na norma do operador com respeito a $t \in \mathbb{R}$ e $|L(u)| < M$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Suponhamos que (1.2) possui dicotomia exponencial em $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$ com projeções $P^+(t)$ e $P^-(t)$, respectivamente. Então o operador acima é um operador de Fredholm de índice $I(F) = \dim \mathcal{RQ}^-(0) - \dim \mathcal{RQ}^+(0)$. Além disso,*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(F) &= \{(T(t, 0)\phi)(0) : \phi \in \mathcal{RP}^+(0) \cap \mathcal{RQ}^-(0), t \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{R}(F) &= \{h : h \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)h(t)dt = 0 \text{ para todo} \\ &\quad y \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ satisfazendo o sistema adjunto formal (1.6)}\} \end{aligned}$$

Demonstração Do teorema 2.1 temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{RP}^+(0) &= \{\phi \in C : T(t, 0)\phi \text{ é limitada para } t \geq 0\} \\ \mathcal{RQ}^-(0) &= \{\phi \in C : T(t, 0)\phi \text{ está definida e é limitada para } t \leq 0\} \end{aligned}$$

logo, se $T(t, 0)\phi$ é limitada para todo $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathcal{R}P^+(0) \cap \mathcal{R}Q^-(0)$.

$x \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ é um elemento de $\mathcal{N}(F)$ se, e só se, x é solução de (1.2), isto é, $\mathcal{N}(F)$ é o conjunto de todas as soluções limitadas de (1.2) que são escritas como $(T(t, 0)\phi)(0) = x_t(0, \phi)(0) = x(t)$ donde $\phi \in \mathcal{R}P^+(0) \cap \mathcal{R}Q^-(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto:

$$\mathcal{N}(F) = \{(T(t, 0)\phi)(0) : \phi \in \mathcal{R}P^+(0) \cap \mathcal{R}Q^-(0), t \in \mathbb{R}\}.$$

Caracterizemos $\mathcal{R}(F)$.

Seja $y \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ solução do sistema adjunto formal em $\mathbb{R}$. Como $\int_u^{u+r} |L(\alpha)| d\alpha < Mr$ para todo $u \in \mathbb{R}$, o lema 3.4 implica que $\tilde{\Psi}_t y \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Psi}(y)(t)$ é uma trajetória limitada de $T^*(s, t)$ em $\mathbb{R}$ logo existe $\eta_0 \in B_0$ tal que $T^*(t, 0)\eta_0 = \tilde{\Psi}_t(y)$. Como $T(t, s)$ tem dicotomia exponencial em $[0, +\infty)$ e $(-\infty, 0]$, $T^*(s, t)$ também tem com projeções $P^{+*}(t)$, $Q^{+*}(t)$ e $P^{-*}(t)$, $Q^{-*}(t)$, respectivamente. Tomando $t \rightarrow -\infty$ obtemos que $\eta_0 \in \mathcal{R}P^{-*}(0)$,

$$|\Psi_t(y)| = |T^*(t, 0)P^{-*}(0)\eta_0| \leq Ke^{\alpha t}|\eta_0|$$

e $\eta_0 \in \mathcal{R}Q^{+*}(0)$

$$|\tilde{\Psi}_t(y)| = |T^*(t, 0)Q^{+*}(0)\eta_0| \leq Ke^{-\alpha t}|\eta_0|.$$

se $t \rightarrow +\infty$.

Concluimos então que

$$\tilde{\Psi}_t(y) \rightarrow 0$$

exponencialmente se $t \rightarrow \pm\infty$, o que implica,

$$\psi(t, \cdot) \rightarrow 0$$

exponencialmente para $t \rightarrow \pm\infty$. Ainda,

$$y(t) = -\psi(t, 0^-) \rightarrow 0$$

exponencialmente tomando $t \rightarrow \pm\infty$. Portanto, se $h \in \mathcal{R}(F)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)h(t)dt$ é convergente. Logo, se $\sigma \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow +\infty$ na fórmula do lema 1.5 obtemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)h(t)dt = 0.$$

Daí,

$$h \in \{h : h \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)h(t)dt = 0 \text{ para todo } y \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ satisfazendo o sistema adjunto formal (1.6)}\}.$$

Consideremos agora $h \in \{h : h \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)h(t)dt = 0 \text{ para todo } y \in C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ satisfazendo o sistema adjunto formal (1.6)}\}$.

Para que $h \in \mathcal{R}(F)$ devemos mostrar que existe $\phi \in C$ que satisfaz as seguintes equações obtidas nos teoremas 3.1 e 3.2:

$$\begin{aligned} x_t = & T(t,0)P^+(0)\phi + \int_0^t T(t,s)P^+(s)X_0h(s)ds \\ & - \int_t^\infty T(t,s)Q^+(s)X_0h(s)ds, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} x_t = & T(t,0)Q^-(0)\phi + \int_0^t T(t,s)Q^-(s)X_0h(s)ds \\ & + \int_{-\infty}^t T(t,s)P^-(s)X_0h(s)ds, \quad t \leq 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Quando $t = 0$, obtemos de (3.6) e (3.7):

$$\begin{aligned} x_0 = & P^+(0)\phi - \int_0^\infty T(0,s)Q^+(s)X_0h(s)ds \\ x_0 = & Q^-(0)\phi + \int_{-\infty}^0 T(0,s)P^-(s)X_0h(s)ds \end{aligned}$$

Logo, (3.6) e (3.7) têm solução $\phi \in C$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} (P^+(0) - Q^-(0))\phi = & \int_{-\infty}^0 T(0,s)P^-(s)X_0h(s)ds \\ & + \int_0^{+\infty} T(0,s)Q^+(s)X_0h(s)ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como $P^+(0)$ é Fredholm ($\dim \mathcal{R}Q^+(0)$ é finita) e $Q^-(0)$ é de imagem finita em C e portanto é compacto segue que $P^+(0) - Q^-(0)$ é Fredholm. Portanto, $R[P^+(0) - Q^-(0)]$ é fechado, o que implica $R[P^+(0) - Q^-(0)] = {}^0 [N(P^+(0) - Q^-(0))^*]$ e então (3.8) possui uma solução $\phi \in C$ se, e só se,

$$\langle \psi, \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \rangle = 0$$

para todo $\psi \in N(P^+(0) - Q^-(0))^* = N(P^{+*}(0) - Q^{-*}(0))$.

Se $\psi \in N(P^{+*}(0) - Q^{-*}(0))$ temos que $(P^{+*}(0) - Q^{-*}(0))\psi = 0$ ou $(I - Q^{+*}(0) - I + P^{-*}(0))\psi = 0$ ou

$$P^{-*}(0)\psi = Q^{+*}(0)\psi \stackrel{\text{def}}{=} \psi_0 \text{ e } \psi_0 \in \mathcal{R}P^{-*}(0) \cap \mathcal{R}Q^{+*}(0).$$

A função $\bar{\psi}(t, \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} T^*(t, 0)\psi_0$, $t \in \mathbb{R}$ é uma trajetória do sistema adjunto em B_0 e $\bar{\psi}(t, \cdot) \rightarrow 0$ exponencialmente quando $t \rightarrow \pm\infty$. Ainda,

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \rangle &= \int_{-\infty}^0 \langle \psi, T(0, s)P^-(s)X_0 \rangle h(s)ds \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \langle \psi, T(0, s)Q^+(s)X_0 \rangle h(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^0 \langle T^*(s, 0)P^{-*}(0)\psi, X_0 \rangle h(s)ds \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \langle T^*(s, 0)Q^{+*}(0)\psi, X_0 \rangle h(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^0 \langle T^*(s, 0)\psi_0, X_0 \rangle h(s)ds \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \langle T^*(s, 0)\psi_0, X_0 \rangle h(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T^*(s, 0)\psi_0, X_0 \rangle h(s)ds \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(s, 0^-)h(s)ds.
\end{aligned}$$

Pelo lema 3.4, $\bar{\psi}(s, 0^-)$, $s \in \mathbb{R}$ é uma trajetória limitada do sistema adjunto formal em $\mathbb{R}$. Portanto,

$$\langle \psi, \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \rangle = 0$$

se $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)h(t)dt = 0$ para todas as trajetórias limitadas do sistema adjunto formal, $y(\cdot)$. A caracterização de $\mathcal{R}(F)$ está justificada.

Obtemos ainda que

$$\dim \mathcal{N}(F) = \dim(\mathcal{R}P^+(0) \cap \mathcal{R}Q^-(0))$$

$$\dim(C_b^0/\mathcal{R}(F)) = \text{codim} \mathcal{R}(F) = \dim(\mathcal{R}P^{-*}(0) \cap \mathcal{R}Q^{+*}(0)),$$

e ambas são finitas. Portanto, F é Fredholm e

$$I(F) = \dim[\mathcal{R}P^+(0) \cap \mathcal{R}Q^-(0)] - \dim[\mathcal{R}P^{-*}(0) \cap \mathcal{R}Q^{+*}(0)].$$

Além disso, $\mathcal{R}(F)$ é fechado em $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{N}(F)$ é fechado em $C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Mostremos que $I(F) = \dim \mathcal{R}Q^-(0) - \dim \mathcal{R}Q^+(0)$.

Seja $\{q_1^-, q_2^-, \dots, q_k^-\}$ uma base de $\mathcal{R}Q^-(0) \cap \mathcal{R}P^+(0)$. Podemos acrescentar $\{q_{k+1}^-, \dots, q_{m_1}^-\}$, onde $m_1 = \dim \mathcal{R}Q^-(0)$ para formar a base $\{q_1^-, \dots, q_{m_1}^-\}$ em

$\mathcal{R}Q^-(0)$. Também escolhemos uma base $\{q_1^{+*}, \dots, q_h^{+*}\}$ em $\mathcal{R}Q^{+*}(0) \cap \mathcal{R}P^{-*}(0)$ e adicionamos $\{q_{h+1}^{+*}, \dots, q_{m_2}^{+*}\}$ para formar uma base $\{q_1^{+*}, \dots, q_{m_2}^{+*}\}$ em $\mathcal{R}Q^{+*}(0)$, onde $m_2 = \dim \mathcal{R}Q^{+*}(0)$.

Seja $[e_1, \dots, e_\mu]$ o espaço gerado pelos vetores $\{e_1, \dots, e_\mu\}$. Se $q^* \neq 0$, $q^* \in [q_{h+1}^{+*}, \dots, q_{m_2}^{+*}]$, afirmamos que existe $q \in [q_{k+1}^-, \dots, q_{m_1}^-]$ tal que $\langle q^*, q \rangle \neq 0$. Caso contrário, $q^* \in [q_{k+1}^-, \dots, q_{m_1}^-]^0$ e já sabemos que $q^* \in [q_1^-, \dots, q_k^-]^0$; pois para q_i^- ; $i = 1, 2, \dots, k$

$$\langle q^*, q_i^- \rangle = \langle q^*, P^+(0)q_i^- \rangle = \langle P^{+*}(0)q^*, q_i^- \rangle = 0.$$

Então, $q^* \in [\mathcal{R}Q^-(0)]^0 = \mathcal{R}P^{-*}(0)$ e $q^* \in \mathcal{R}P^{-*}(0) \cap \mathcal{R}Q^{+*}(0) = [q_1^{+*}, \dots, q_h^{+*}]$, contradizendo o fato que $[q_1^{+*}, \dots, q_h^{+*}] \cap [q_{h+1}^{+*}, \dots, q_{m_2}^{+*}] = \{0\}$.

Usando o mesmo tipo de argumento mostra-se que, para $q \neq 0$, $q \in [q_{k+1}^-, \dots, q_{m_1}^-]$, existe um $q^* \in [q_{h+1}^{+*}, \dots, q_{m_2}^{+*}]$ tal que $\langle q^*, q \rangle \neq 0$.

Portanto $\dim[q_{k+1}^-, \dots, q_{m_1}^-] = \dim[q_{h+1}^{+*}, \dots, q_{m_2}^{+*}]$, isto é, $m_1 - k = m_2 - h$. Finalmente,

$$I(F) = \dim \mathcal{R}Q^-(0) - \dim \mathcal{R}Q^+(0). \square$$

Capítulo 4

Bifurcação de Órbitas Homoclínicas

Neste capítulo estudamos condições necessárias e suficientes para que uma equação que é uma perturbação não autônoma periódica de uma equação diferencial funcional autônoma possua uma órbita homoclínica.

Consideramos a equação escalar retardada:

$$\dot{x}(t) = \alpha(x(t))x(t) + \beta(x(t))x(t-1) \quad (4.1)$$

onde:

- $\alpha(x)$, $\beta(x)$ são funções escalares C^∞ definidas em $\mathbf{R}$.
- $x \equiv 0$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de

$$\dot{x}(t) = \alpha(0)x(t) + \beta(0)x(t-1)$$

com $\dim W^u(0) = 1$ e $\text{codim} W^s(0) = 1$. $W^u(0)$ e $W^s(0)$ são respectivamente, os subespaços instável e estável associados a $x = 0$.

- $x \stackrel{\text{def}}{=} p(t)$, $t \in \mathbf{R}$, é uma órbita (limitada) em $\mathbf{R}$ de (4.1) tal que $p(t) \rightarrow 0$ assintoticamente quando $t \rightarrow \pm\infty$, isto é, uma trajetória homoclínica assintótica a $x \equiv 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.
- existe $\eta > 0$ tal que $-\beta(x) \geq \eta$ para $x \in [-k, k]$ onde $k = \max\{p(t) : t \in \mathbf{R}\}$.

Estudaremos o comportamento das soluções homoclínicas perto de $x = p(t)$ para o sistema perturbado de (4.1):

$$\dot{x}(t) = \alpha(x(t))x(t) + \beta(x(t))x(t-1) + h(t, x_t, \mu) \quad (4.2)$$

onde:

- $\mu \in X$, X espaço de Banach.
- $h : \mathbf{R} \times C \times X \rightarrow \mathbf{R}$ é C^1 com derivada limitada; $h(t+w, \phi, \mu) = h(t, \phi, \mu)$, $w > 0$, uma constante; $h(t, \phi, \mu) = O(|\mu|)$ para μ próximo de zero uniformemente com respeito a t, ϕ . Observe que as condições acima implicam que $h(t, \phi, 0) = 0$ e reciprocamente.

Utilizaremos as técnicas de Liapunov-Schmidt e a Alternativa de Fredholm.

Definição 4.1 Se $p(t)$ é uma solução, não constante, da equação

$$\dot{x}(t) = f(x_t)$$

a equação variacional linear relativa a p é definida como:

$$\dot{y}(t) = L(t)y_t$$

onde $L(t)\phi = f'(p_t)\phi$, $f'(\psi)$ é a derivada de Fréchet de f em ψ .

Observação 4.1 Se $\dot{p}(t) = f(p_t)$ para $-\infty < t < +\infty$ segue que $\ddot{p}(t) = f'(p_t)\dot{p}_t$, o que implica, $\dot{p}(t)$ é uma solução de $\dot{y}(t) = L(t)y_t$.

Como:

$$f(\phi) = \alpha(\phi(0))\phi(0) + \beta(\phi(0))\phi(-1)$$

Derivando em relação a ϕ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(p_t)}{\partial \phi} \phi &= \frac{d}{d\lambda} [f(p_t + \lambda\phi)]|_{\lambda=0} \\ &= [\dot{\alpha}(p(t))p(t) + \alpha(p(t)) + \dot{\beta}(p(t))p(t-1)]\phi(0) \\ &\quad + \beta(p(t))\phi(-1) \end{aligned}$$

Portanto a equação variacional linear de (4.1) com respeito a $x = p(t)$ será

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}(t)x(t) + \mathcal{B}(t)x(t-1), \\ \mathcal{A}(t) &= \alpha(p(t)) + \dot{\alpha}(p(t))p(t) + \dot{\beta}(p(t))p(t-1), \\ \mathcal{B}(t) &= \beta(p(t)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

e sua adjunta formal

$$\dot{y}(t) = -\mathcal{A}(t)y(t) - \mathcal{B}(t+1)y(t+1). \quad (4.4)$$

Seja

$$\begin{aligned} L(t) : C &\rightarrow \mathbb{R} \\ L(t)\phi &= \mathcal{A}(t)\phi(0) + \mathcal{B}(t)\phi(-1) \end{aligned}$$

Lema 4.1 *O operador $L(t)$ é contínuo com respeito a $t \in \mathbb{R}$ e é uniformemente limitado.*

Demonstração Basta observar que $t \mapsto \mathcal{A}(t)$, $t \mapsto \mathcal{B}(t)$ são funções contínuas e que $\mathcal{A}(t) \rightarrow \alpha(0)$, $\mathcal{B}(t) \rightarrow \beta(0)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. $\square$

Lema 4.2 *Consideremos o operador solução $T(t, s)$ de (4.3). Então:*

- (i) *Para cada $0 \neq \phi \in C$, $T(t, s)\phi \neq 0$, $t \geq s$, isto é, $T(t, s)$ é injetor.*
- (ii) *Para cada $0 \neq \psi \in B_0$, $T(s, t)\psi \neq 0$, $s \leq t$.*

Demonstração Como $-\beta(x) \geq \eta > 0$ para $x \in [-k, k]$ obtemos que $-\mathcal{B}(t) \geq \eta > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sabemos que

$$L(t)\phi = \mathcal{A}(t)\phi(0) + \mathcal{B}(t)\phi(-1).$$

Por outro lado:

$$L(t)\phi = \int_{-1}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \phi(\theta)$$

logo,

$$\eta(t, \theta) = \begin{cases} -\mathcal{A}(t) - \mathcal{B}(t) & \theta \leq -1 \\ -\mathcal{A}(t) & \theta \in (-1, 0) \\ 0 & \theta \geq 0 \end{cases}$$

E, portanto,

$$\mathcal{A}(t, -1) = \eta(t, -1^+) - \eta(t, -1^-) = \mathcal{B}(t) < 0$$

o que implica, $L(t)\phi$ atômica em -1 .

(i) Segue do lema 1.2.

(ii) Com argumentos similares aos utilizados em (i) concluímos que para todo $\psi \in B_0$, $\psi \neq 0$, $T(s, t)\psi \neq 0$ para $s \leq t$. $\square$

Lema 4.3 A equação (4.3) possui uma dicotomia exponencial em $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$ com $\dim \mathcal{R}Q^-(0) = 1 = \dim \mathcal{R}Q^+(0)$. $F = \frac{d}{dt} - L(t)$ é um operador de Fredholm de $C_b^1(\mathbb{R})$ em $C_b^0(\mathbb{R})$ com $I(F) = 0$.

Demonstração Pelo lema anterior e dos fatos que $\mathcal{A}(t) \rightarrow \alpha(0)$, $\mathcal{B}(t) \rightarrow \beta(0)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$ e $\dot{x}(t) = \alpha(0)x(t) + \beta(0)x(t-1)$ possui o zero como um ponto de equilíbrio hiperbólico concluímos do teorema 3.3 que (4.3) possui dicotomia exponencial em $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$ com $\dim \mathcal{R}Q^\pm(t) = 1$. Do teorema 3.4 obtemos então que $F = \frac{d}{dt} - L(t)$ é um operador de Fredholm de $C_b^1(\mathbb{R})$ em $C_b^0(\mathbb{R})$ e $I(F) = 0$. $\square$

Da demonstração do teorema 3.4 sabemos que:

$$\dim \mathcal{N}(F) = \dim[\mathcal{R}P^+(0) \cap \mathcal{R}Q^-(0)] \leq 1.$$

Mas $\dot{p}(t) \in \mathcal{N}(F)$ o que implica $\dim \mathcal{N}(F) = 1$ e $\mathcal{N}(F) = [\dot{p}(t)]$. Como $I(F) = 0$; $\text{codim} \mathcal{R}(F) = 1$. Logo, (4.4) possui uma única solução limitada $y = y_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$, a menos da multiplicação por um escalar e que $y_0(t) \rightarrow 0$ exponencialmente quando $t \rightarrow \pm\infty$. E

$$\mathcal{R}(F) = \{h \in C_b^0(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t)h(t)dt = 0\}.$$

Assumimos que $\int_{-\infty}^{+\infty} y_0^2(t)dt = 1$ e escolhemos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{p}(t_0) \neq 0$. Definimos: $x_0(t) = \dot{p}(t)/\dot{p}(t_0)$. Assim, $x_0(t)$ gera $\mathcal{N}(F)$ e $x_0(t_0) = 1$. Temos então a definição:

Definição 4.2 Consideremos as projeções E_1 e E_2 definidas por:

$$\begin{aligned} E_1 : C_b^1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{N}(F) \\ x &\mapsto E_1(x)(t) = x(t_0)x_0(t) \\ E_2 : C_b^0(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{R}(F) \\ f &\mapsto E_2(f)(t) = f(t) - y_0(t) \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(s)f(s)ds \end{aligned}$$

Lema 4.4 Nas condições acima temos:

- (i) $x \in \mathcal{N}(E_1)$ se, e somente se, $x \in C_b^1(\mathbb{R})$ e $x(t_0) = 0$.
- (ii) $f \in \mathcal{N}(E_2)$ se, e somente se $f = ky_0$ para alguma constante k .

Demonstração Imediata. $\square$

Lema 4.5 *A aplicação*

$$\begin{aligned} F|_{\mathcal{N}(E_1)} : \mathcal{N}(E_1) &\rightarrow \mathcal{R}(E_2) \\ x &\mapsto (F|_{\mathcal{N}(E_1)})(x)(t) = \dot{x}(t) - \mathcal{A}(t)x(t) - B(t)x(t-1) \end{aligned}$$

é um isomorfismo cuja inversa é a função

$$\mathcal{K} : \mathcal{R}(E_2) \rightarrow \mathcal{N}(E_1)$$

tal que

$$|\mathcal{K}f|_{C_b^1} \leq M|f|_{C_b^0}$$

onde M é uma constante positiva e $f \in \mathcal{R}(E_2) = \mathcal{R}(F)$.

Demonstração Da definição de E_1 e E_2 segue que $F|_{\mathcal{N}(E_1)}$ é um isomorfismo. Decorre do teorema da Aplicação Aberta que existe $M > 0$ tal que

$$|\mathcal{K}f|_{C_b^1} \leq M|f|_{C_b^0}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Seja $x = x(t)$ uma trajetória qualquer de (4.2) cuja órbita está na ϵ -vizinhança da órbita de $x = p(t)$, ambas em $C[-1, 0]$. Escrevemos então

$$x(\tau) = p(\tau + \zeta) + z(\tau + \zeta).$$

Como $\dot{p}(t_0) \neq 0$, podemos escolher ζ tal que $z(t_0) = 0$, se ϵ é suficientemente pequeno. Obtemos então que

$$z \in \mathcal{R}(I - E_1). \quad (4.5)$$

Como

$$F(z)(t) = \dot{z}(t) - \mathcal{A}(t)z(t) - B(t)z(t-1)$$

encontrar uma solução x de (4.2) é equivalente a encontrar uma solução z de

$$F(z)(t) = f(z, \zeta, \mu)(t) \quad (4.6)$$

onde $f : C_b^0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times X \rightarrow C_b^0(\mathbb{R})$ é definida por

$$\begin{aligned} f(z, \zeta, \mu) &= \alpha(p(t) + z(t))(p(t) + z(t)) \\ &\quad + \beta(p(t) + z(t))(p(t-1) + z(t-1)) \\ &\quad - [\alpha(p(t))p(t) + \beta(p(t))p(t-1)] \\ &\quad - [\mathcal{A}(t)z(t) + B(t)z(t-1)] \\ &\quad + h(t - \zeta, p_t + z_t, \mu) \end{aligned}$$

Como $h(t, \phi, \mu) = O(|\mu|)$ para μ perto do zero uniformemente em t, ϕ , temos que:

$$(1) f(0, \zeta, 0)(t) = h(t - \zeta, p_t, 0) = 0,$$

$$(2) f_z(0, \zeta, 0)(z)(t) = \left[\frac{d}{d\lambda} f(\lambda z, \zeta, 0)(t) \right]_{\lambda=0} = 0$$

(3) Como $f(0, \zeta, 0) = 0$, $f_z(0, \zeta, 0) = 0$ e $f_\mu(0, \zeta, 0) = h_\mu(t - \zeta, p_t, 0) = O(|\mu|)$, $f(z, \zeta, \mu) = O(|\mu|) + o(\sqrt{|z|^2 + |\mu|^2})$. Para (z, μ) arbitrariamente próximos de $(0, 0)$, obtemos então que:

$$f(z, \zeta, \mu) = O(|z|^2 + |\mu|).$$

Pelo método de Liapunov - Schmidt (4.6) é equivalente a

$$\begin{aligned} F(z) &= E_2 f(z, \zeta, \mu) \\ 0 &= (I - E_2) f(z, \zeta, \mu) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por (4.5), a primeira igualdade de (4.7) é equivalente a

$$z = \mathcal{K} E_2 f(z, \zeta, \mu)$$

Visto que $f : C_b^0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times X \rightarrow C_b^0(\mathbb{R})$ é de classe C^1 numa vizinhança de $(0, \zeta, 0)$ com $f(0, \zeta, 0) = 0$ e $f_z(0, \zeta, 0) = 0$, então a função

$$\begin{aligned} g : C_b^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times X &\rightarrow C_b^1(\mathbb{R}) \\ g(z, \zeta, \mu) &= z - \mathcal{K} E_2 f(z, \zeta, \mu) \end{aligned}$$

tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} g(0, \zeta, 0) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z}(0, \zeta, 0) &= I \end{aligned}$$

Pelo teorema da Função Implícita segue que existem bolas abertas $B_{C_b^1}(\epsilon_1) \subset C_b^1$, $B_X(\epsilon_2) \subset X$ com raio ϵ_1, ϵ_2 ambas com centros em zero onde a equação $g(z, \zeta, \mu) = 0$ possui uma única solução C^1 , $z = z^*(\zeta, \mu)$

$$z^*(\zeta, \mu) : \mathbb{R} \times B_X(\epsilon_2) \rightarrow B_{C_b^1}(\epsilon_1).$$

Como $z^*(\zeta, 0) = 0$, $f_z(0, \zeta, 0) = 0$ e $f_\mu(0, \zeta, 0)\mu = O(|\mu|)$ segue que $z^*(\zeta, \mu) = O(|\mu|)$ para μ próximo do zero, uniformemente com respeito a $\zeta \in \mathbb{R}$.

A equação de bifurcação é obtida pela substituição de $z^*(\zeta, \mu)$ na segunda equação de (4.7)

$$G(\zeta, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) f(z^*(\zeta, \mu), \zeta, \mu)(t) dt = 0$$

e, portanto

$$G(\zeta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) h(t - \zeta, p_t, \mu) dt + o(|\mu|).$$

pois $f_z(0, \zeta, 0) = 0$ e $f_\mu(0, \zeta, 0)(t)\mu = h_\mu(t - \zeta, p_t, 0)\mu = h(t - \zeta, p_t, \mu) - o(|\mu|)$.

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) [g(t)] dt : C_b^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

é um funcional linear contínuo,

$$G(\zeta, \mu) : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

é C^1 .

Demonstramos então o seguinte teorema:

Teorema 4.1 *Consideremos a função $h : \mathbb{R} \times C \times X \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 com derivada limitada; $h(t + w, \phi, \mu) = h(t, \phi, \mu)$, $w > 0$, uma constante e $h(t, \phi, 0) = 0$.*

Então $x = x(t)$ é uma trajetória homoclínica de (4.2), cuja órbita está na vizinhança da órbita de $x = p(t)$ se, e somente se, $x(t) = p(t + \zeta) + z^(\zeta, \mu)(t + \zeta)$ com $z^*(\zeta, \mu)(t_0) = 0$ e $G(\zeta, \mu) = 0$.*

Corolário 4.1 *Seja $\mu \in X = \mathbb{R}$. Consideremos que $h : \mathbb{R} \times C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 com todas as derivadas até as de ordem dois limitadas. Seja*

$$\Delta(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) h_1(t - \zeta, p_t, 0) dt,$$

com

$$\begin{aligned} h_1(t, \phi, \mu) &= \frac{1}{\mu} h(t, \phi, \mu), \quad \mu \neq 0 \\ h_1(t, \phi, 0) &= \frac{\partial h}{\partial \mu}(t, \phi, 0) \end{aligned}$$

Se $\Delta(\zeta_0) = 0$ e $\dot{\Delta}(\zeta_0) \neq 0$ para algum $\zeta_0 \in \mathbb{R}$, então existe uma única trajetória homoclínica de (4.2) perto de $x = p(t)$ para cada μ , $|\mu| \leq \mu_0$. Além disso, ζ é uma função C^1 de μ , $\zeta = \zeta^*(\mu)$, $|\mu| \leq \mu_0$ e $\zeta_0 = \zeta^*(0)$, e a trajetória homoclínica é dada por:

$$x(t) = p(t + \zeta^*(\mu)) + z^*(\mu, \zeta^*(\mu))(t + \zeta^*(\mu)).$$

Demonstração Use o teorema da Função Implícita para a função $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} H(\zeta, \mu) &= \frac{1}{\mu} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) h(t - \zeta, p_t, \mu) dt + o(|\mu|) \right], \quad \mu \neq 0 \\ H(\zeta, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) \frac{\partial h}{\partial \mu}(t - \zeta, p_t, 0) dt. \square \end{aligned}$$

Um caso especial em que as condições do corolário 4.1 são facilmente verificadas é apresentada no corolário abaixo.

Corolário 4.2 Seja $h(t, \phi, \mu) = \mu \cos t$, $\mu \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Delta(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) \cos(t - \zeta) dt$$

Se $\Delta(\zeta) \neq 0$, então as condições do corolário 4.1 são satisfeitas para algum ζ_0 .

Exemplo: Considere a equação escalar retardada

$$\dot{x}(t) = (\cosh 1)(\sinh 1)^{-1} x(t) - (\sinh 1)^{-1} (1 + x^2(t)) x(t - 1) + \mu \cos t$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$. Se $\mu = 0$, $x(t) = (\sinh 1)(\cosh t)^{-1}$ é solução homoclínica da equação autônoma.

Bibliografia

- [1] BANKS H. T. The representation of solutions of linear functional differential equations, *J. Differential Equations* v.5, p. 399-410, 1969.
- [2] BACHMAN G.; NARICI L. *Functional Analysis*. New York, Academic Press, 1966.
- [3] CAMERON R. H.; MARTIN W. T. An unsymmetric Fubini theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 47, p. 121-5, 1941
- [4] CARVALHO A. N. *Dicotomia Discreta e Aplicações*. São Carlos, ICMSC - USP, 1987. (Dissertação de Mestrado)
- [5] HALE J. K. *Introduction on Dynamical Bifurcation*. LCDS Report n.83-16, 1983.
- [6] HALE J. K. *Theory of Functional Differential Equations*. New York, Springer, 1977.
- [7] LIN X. B. Exponential dichotomies and homoclinic orbits in functional differential equations. *J. Differential Equations*, v.63, p. 227-54, 1986.
- [8] PALMER K. J. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. *J. Differential Equations*, v.55, p. 225-56, 1984.
- [9] RUAS V. *Introdução aos Problemas Variacionais*. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1979.
- [10] TAYLOR A. E.; LAY D. C. *Introduction to Functional Analysis*, 2 ed., New York, John Wiley, 1980.