Operadores integrais gerados por núcleos em multiescalas

Thaís Jordão

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 20 de fevereiro de 2009

Assinatura: _____

Operadores integrais gerados por núcleos em multiescalas

Thaís Jordão

Orientador: Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2009

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram, de alguma forma, para minha formação profissional e pessoal, até este momento. Dentre elas, meus familiares e amizades que fiz durante o mestrado. Principalmente, meus pais, Luiz Roberto Jordão e Maria Cristina Franco Jordão, meu companheiro e amigo, Fernando Consolaro, meu orientador, Valdir Antonio Menegatto e seu orientando José Claudinei Ferreira, pelas dicas pertinentes. Obrigada!

Finalmente, ao CNPq agradeço pelo apoio financeiro cedido.

Resumo

Neste trabalho, inicialmente, apresentamos uma classe de núcleos positivos definidos, os núcleos de Mercer. As funções nesta classe se enquadram na representação de núcleos dada pelo conhecido Teorema de Mercer. Exploramos algumas de suas propriedades convenientes para o contexto do trabalho e construímos seu espaço nativo.

Em seguida, tratamos dos núcleos em multiescalas, um caso particular dos núcleos de Mercer. Após estabelecer algumas propriedades interessantes destes núcleos, analisamos o operador integral gerado por um núcleo em multiescalas, no contexto L^2 , considerando os seguintes aspectos: limitação, compacidade e positividade do operador, especificidades da imagem do operador e informações sobre seus autovalores e autofunções. Analisamos ainda algumas propriedades do operador integral envolvendo o espaço nativo do núcleo em multiescalas.

Abstract

We study Mercer like kernels, a very special class of positive definite kernels possessing the description given by many results labeled as Mercer's Theorem. We explore some of their properties which are needed in the development of this work and construct their native space.

In the second half of the work, we consider Mercer kernels defined by a multi-scale procedure. After establishing some of its properties, we analyze integral operators generated by multi-scale kernels, in the L^2 context, centering on the following aspects: boundedness, compactness, positiveness, eigenvalues and eigenfunctions. We also consider additional properties of the operator, mainly those involving the native space of the multi-scale kernel.

Sumário

Introdução	xiii
1 Preliminares	1
1.1 Núcleos de reprodução	1
2 Núcleos de Mercer	7
2.1 Núcleos de Mercer	7
2.2 O espaço nativo de um núcleo de Mercer	9
3 Núcleos em Multiescalas	15
3.1 Preliminares	15
3.2 Núcleos em multiescalas	17
3.3 Núcleos em finitas multiescalas	19
3.4 Interpolação no espaço nativo	22
4 O operador integral gerado por um núcleo em multiescalas	27
4.1 Resultado básico sobre operadores integrais	28
4.2 O operador integral gerado por ϕ_l	29
4.3 Uma base para o espaço nativo N_{ϕ_l}	36
4.4 Outras propriedades do operador integral T_l	39
Referências Bibliográficas	41
Índice Remissivo	43

Introdução

Núcleos positivos definidos têm sua origem na teoria das equações integrais. Lá, em sua forma mais importante, os operadores integrais positivos são gerados por núcleos deste tipo, quase sempre contínuos. A referência [2] descreve a teoria básica dos núcleos positivos definidos e suas propriedades mais importantes enquanto que [1], apesar de focar nos núcleos de reprodução, faz uma boa introdução histórica sobre os núcleos positivos definidos.

A teoria dos núcleos positivos definidos caminha lado a lado com aquela dos núcleos de reprodução e seus espaços nativos. Algumas ligações diretas entre os conceitos podem ser observadas em [14].

De forma geral, nosso trabalho trata dos espaços nativos associados a núcleos positivos definidos. Inicialmente, exploramos a relação do espaço nativo com a imagem do operador integral gerado pelo núcleo, no caso em que este se enquadra na descrição dada pelas várias versões do Teorema de Mercer ([4, 13, 15]). No entanto, o tema central do trabalho refere-se aos operadores integrais gerados por núcleos que, além de positivos definidos, ainda podem ser construídos a partir de uma única função dada, empregando-se multiescalas para alcançar a descrição dada pelo Teorema de Mercer.

No primeiro capítulo, fazemos uma breve descrição dos núcleos positivos definidos, exemplificando. Em seguida, introduzimos o espaço nativo associado a um núcleo positivo definido, extraíndo propriedades básicas de relevância para o desenvolvimento das demais seções do trabalho.

No capítulo seguinte, tratamos dos núcleos de Mercer e analisamos cuidadosamente o espaço nativo associado.

No Capítulo 3, introduzimos os núcleos em multiescalas como originalmente definidos em [10]. Tais núcleos têm a representação descrita por Mercer, porém as funções envolvidas são definidas a partir de uma única função pré-fixada, via translações e di-

latações de seu suporte. Após apresentar as peculiaridades dos núcleos em multiescalas, descrevemos o espaço nativo associado.

No último capítulo do trabalho exploramos, inicialmente, propriedades adicionais dos núcleos em multiescalas. Estas por sua vez, são utilizadas na dedução de várias propriedades do operador integral correspondente, principalmente aquelas envolvendo os seguintes aspectos: limitação, compacidade, autovalores e autofunções e positividade. Investigamos ainda algumas propriedades independentes que envolvem o espaço nativo do núcleo em multiescalas, principalmente as que têm alguma relevância na análise espectral fina de operadores integrais. A referência [4] trata deste mesmo assunto quando se tem um núcleo cujo domínio é compacto, enquanto que [5, 15] trabalham num contexto mais geral.

✓

Preliminares

Neste capítulo abordamos algumas propriedades dos núcleos positivos definidos. Em particular, exploramos o conceito de núcleo de reprodução e algumas de suas propriedades que são necessárias para o desenvolvimento do trabalho. As referências básicas para os resultados deste capítulo são [1] e [2].

1.1 Núcleos de reprodução

Em geral, a palavra **núcleo** refere-se a uma função $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, onde Ω é um subconjunto não vazio. Neste trabalho, estaremos interessados em núcleos sobre $\mathbb{R}^n$, ou seja, no caso em que Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Dizemos que um núcleo ψ é **positivo definido** quando para todo $n \in \mathbb{N}$, todo subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de Ω e todo subconjunto $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ de $\mathbb{C}$, vale a desigualdade

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \psi(x_i, x_j) \geq 0.$$

Um núcleo positivo definido ψ é **estritamente positivo definido** quando a desigualdade acima for estrita, sempre que os pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ são distintos e pelo menos um dos escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ é não nulo. Núcleos positivos definidos são automaticamente **hermitianos** [2, p. 68], ou seja,

$$\psi(x, y) = \overline{\psi(y, x)}, \quad x, y \in \Omega.$$

A seguir, apresentamos exemplos de núcleos que se encaixam nas categorias descritas acima. Em todos eles, Ω é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.1. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Considere $\varphi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ o núcleo dado por

$$\varphi(x, y) = f(x)\overline{f(y)}, \quad x, y \in \Omega.$$

Se $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um subconjunto de Ω e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são números complexos então

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \varphi(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} f(x_i) \overline{f(x_j)} = \left| \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \right|^2 \geq 0.$$

Em particular, φ é positivo definido.

Exemplo 1.1.2. Seja $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

Se $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um subconjunto de Ω e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são números complexos, então

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \psi(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^n c_i \overline{c_i} = \sum_{i=1}^n |c_i|^2.$$

Logo, ψ é positivo definido. Se além disso, pelo menos um dos c_j 's é não nulo, então a soma acima é positiva. Desta forma, o núcleo é estritamente positivo definido.

A teoria dos núcleos positivos definidos e afins caminha lado a lado com a teoria dos espaços de Hilbert. Estabelecemos esta conexão a seguir.

Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert formado por funções complexas com domínio Ω . Um núcleo $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é chamado **núcleo de reprodução** de $\mathcal{H}$ quando as condições abaixo estão satisfeitas:

- (i) $\psi(x, \cdot) \in \mathcal{H}$, $x \in \Omega$;
- (ii) $\langle f, \psi(x, \cdot) \rangle = f(x)$, $f \in \mathcal{H}$, $x \in \Omega$.

Se ψ é o núcleo de reprodução de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, diremos que $\mathcal{H}$ é um **espaço nativo** do núcleo ψ .

A existência e unicidade dos espaços nativos são discutidas no teorema a seguir. A existência é garantida através de um processo de completamento de um espaço vetorial construído a partir do próprio núcleo. Logo, o processo é construtivo, e a unicidade deste espaço segue da unicidade do completamento.

Teorema 1.1.3. *Se $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é um núcleo positivo definido, então valem as seguintes afirmações:*

- (i) Existe um único espaço nativo $\mathcal{H}$ de ψ ;
(ii) Se a função $x \in \Omega \rightarrow \psi(x, \cdot) \in \mathcal{H}$ é contínua, então $\mathcal{H}$ somente contém funções contínuas.

Demonstração: Seja $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ positivo definido e considere o espaço vetorial

$$\mathcal{H}_\psi = \text{span}\{\psi(x, \cdot) : x \in \Omega\}.$$

Se $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i, \cdot)$ e $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \psi(y_j, \cdot)$, definimos

$$\langle f, g \rangle_\psi := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \overline{\beta_j} \psi(x_i, y_j).$$

A aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi : \mathcal{H}_\psi \times \mathcal{H}_\psi \rightarrow \mathbb{C}$ acima está bem definida e é bilinear. Além disso, como ψ é hermitiano,

$$\langle g, f \rangle_\psi = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j \overline{\alpha_i} \psi(y_j, x_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j \overline{\alpha_i} \overline{\psi(x_i, y_j)} = \overline{\langle f, g \rangle_\psi}.$$

Ainda,

$$\langle f, f \rangle_\psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \psi(x_i, x_j) \geq 0.$$

Logo, a fórmula

$$\|f\|_\psi^2 = \langle f, f \rangle_\psi, \quad f \in \mathcal{H}_\psi$$

define uma seminorma em $\mathcal{H}_\psi$. Se $\langle f, f \rangle_\psi = 0$ então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i, x) \right| = |\langle f, \psi(x, \cdot) \rangle_\psi| \leq \|f\|_\psi \|\psi(x, \cdot)\|_\psi = 0, \quad x \in \Omega.$$

Logo, $f = 0$ e a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ define então um produto interno em $\mathcal{H}_\psi$. É claro que o núcleo ψ satisfaz as propriedades de núcleo de reprodução em $\mathcal{H}_\psi$. Como o espaço $\mathcal{H}_\psi$ não é necessariamente de Hilbert, temos que considerar o seu completamento $\mathcal{H}$ com relação à norma induzida pelo produto interno. Quanto à unicidade, vamos assumir que ψ seja o núcleo de reprodução de outro espaço de Hilbert $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pela primeira propriedade da definição de núcleo de reprodução, obtemos $\mathcal{H}_\psi \subset \mathcal{H}_1$ e $\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_\psi$, $f, g \in \mathcal{H}_\psi$. Logo, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1$. Se $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_1$, sendo $\mathcal{H}$ completo, podemos achar uma função g não nula no complemento ortogonal de $\mathcal{H}$. Pela propriedade de reprodução do núcleo concluímos que

$$g(x) = \langle g, \psi(x, \cdot) \rangle = 0, \quad x \in \Omega,$$

uma contradição. Portanto, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. A última afirmação do teorema segue da propriedade de reprodução e da desigualdade de Cauchy-Schwarz. ■

Resultados mais finos, mas ainda relacionados ao teorema anterior, podem ser encontrados em [14].

Para o próximo resultado deste capítulo faremos uso do conceito descrito a seguir. Seja W um subconjunto não vazio de um espaço vetorial normado $(V, \|\cdot\|)$. Um elemento w de W tem **norma minimal** quando $\|w\| < \|v\|$, $v \in W \setminus \{w\}$.

O lema abaixo registra uma importante propriedade das matrizes *positivas definidas*, matrizes cujas formas quadráticas associadas são sempre positivas quando não-nulas. Uma prova do lema pode ser encontrada em [7, p. 398].

Lema 1.1.4. *Sejam $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ um núcleo e $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um subconjunto de Ω . Se a matriz $(\psi(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ é positiva definida, então seu determinante é positivo.*

Voltando ao contexto dos espaços nativos, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.5. *Seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert de funções complexas com domínio Ω . Considere um subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de Ω e um subconjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ de $\mathbb{C}$. Se ψ é um núcleo de reprodução de $\mathcal{H}$ que é estritamente positivo definido, então o conjunto*

$$S = \{f \in \mathcal{H} : f(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

contém um único elemento de norma minimal.

Demonstração: Assuma que ψ é um núcleo de reprodução de $\mathcal{H}$ bem como estritamente positivo definido. Seja $F = \text{span}\{\psi(x_i, \cdot) : i = 1, 2, \dots, n\}$. Como a matriz dos coeficientes do sistema linear

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i, x_j) = y_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

tem determinante positivo, então $F \cap S$ possui um único elemento, o qual pode ser escrito na forma

$$s = \sum_{i=1}^n \beta_i \psi(x_i, \cdot).$$

Mostremos agora que este elemento de S tem norma minimal. Seja $F^\perp$ o complemento ortogonal de F em $\mathcal{H}$. Como o subespaço F é fechado pois tem dimensão finita, podemos escrever

$$f = p_F(f) + p_{F^\perp}(f), \quad f \in \mathcal{H},$$

onde p_F e $p_{F^\perp}$ são as projeções de f sobre os espaços F e $F^\perp$, respectivamente. Sendo ψ um núcleo de reprodução de $\mathcal{H}$, temos

$$\langle f, \psi(x_i, \cdot) \rangle = \langle p_F(f), \psi(x_i, \cdot) \rangle + \langle p_{F^\perp}(f), \psi(x_i, \cdot) \rangle = p_F(f)(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, se $f \in S$, então a igualdade acima toma a forma

$$y_i = f(x_i) = p_F(f)(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

implicando que $p_F(f) \in S$. Desta forma, se $f \in S$, podemos concluir que $p_F(f) = s$. Portanto, se $f \in S \setminus \{s\}$, então $p_{F^\perp}(f) \neq 0$ e

$$\|f\|^2 = \|p_F(f)\|^2 + \|p_{F^\perp}(f)\|^2 > \|p_F(f)\|^2 = \|s\|^2.$$

A minimalidade segue. ■

Núcleos de Mercer

2.1 Núcleos de Mercer

Nesta seção analisaremos núcleos que se encaixam na descrição fornecida pelo Teorema de Mercer em suas formas mais conhecidas. A formalização mais elementar deste resultado pode ser ratificada em [13], enquanto que uma versão bem mais geral, já direcionada para a análise espectral de operadores integrais, pode ser encontrada em [5].

Estabeleceremos algumas propriedades importantes dentro de um contexto que se situa entre os dois descritos no parágrafo anterior. Para tanto, a partir de agora, I representará um conjunto enumerável de índices e Ω um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$.

Fixadas uma sequência $\{\lambda_k\}_{k \in I}$ de números reais positivos e uma sequência $\{\varphi_k\}_{k \in I}$ de funções complexas com domínio Ω , diremos que ambas satisfazem a **condição de somabilidade** quando

$$\sum_{k \in I} \lambda_k |\varphi_k(x)|^2 < \infty, \quad x \in \Omega.$$

Esta condição será essencial para a obtenção de vários resultados neste trabalho. Uma justificativa para a conveniência desta condição é apresentada abaixo.

Lema 2.1.1. *Se $\{\lambda_k\}_{k \in I}$ e $\{\varphi_k\}_{k \in I}$ satisfazem a condição de somabilidade então a função $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\psi(x, y) = \sum_{k \in I} \lambda_k \overline{\varphi_k(x)} \varphi_k(y), \quad x, y \in \Omega, \quad (2.1)$$

está bem definida.

Demonstração: Vamos mostrar que $\sum_{k \in I} \lambda_k \overline{\varphi_k(x)} \varphi_k(y) < \infty$, $x, y \in \Omega$. Para tanto usaremos a estrutura do espaço $\ell_2(I)$ usual ([16]). A condição de somabilidade implica que as sequências $\{\lambda_k^{1/2} \overline{\varphi_k(x)}\}_{k \in I}$ e $\{\lambda_k^{1/2} \varphi_k(y)\}_{k \in I}$ são elementos de $\ell_2(I)$. Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz no contexto de $\ell_2(I)$, obtemos

$$\sum_{k \in I} \lambda_k \overline{\varphi_k(x)} \varphi_k(y) \leq \left(\sum_{k \in I} \lambda_k |\varphi_k(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in I} \lambda_k |\varphi_k(y)|^2 \right)^{1/2}.$$

Agora, a condição de somabilidade nos leva à conclusão almejada. ■

Qualquer núcleo que se encaixe na descrição do lema anterior é dito ser um **núcleo de Mercer** definido por $\{\lambda_k\}_{k \in I}$ e $\{\varphi_k\}_{k \in I}$. Quando o contexto permitir, diremos simplesmente núcleo de Mercer, sem fazer menção às sequências envolvidas na definição do núcleo.

A fim de registrarmos algumas propriedades dos núcleos de Mercer, relembremos o conceito de separabilidade para uma família de funções. O conceito é comum no contexto de resultados relativos ao Teorema da Aproximação de Weierstrass.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções complexas com domínio contendo o conjunto Ω . Dizemos que $\mathcal{F}$ **separa pontos** de Ω se dado um subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de Ω , existem funções $f_1, f_2, \dots, f_n$ em $\mathcal{F}$ satisfazendo $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Desta forma, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1.2. *Seja ψ um núcleo de Mercer definido pelas sequências $\{\lambda_k\}_{k \in I}$ e $\{\varphi_k\}_{k \in I}$. Valem as afirmações:*

- (i) ψ é positivo definido;
- (ii) Se o espaço $\text{span}\{\varphi_k : k \in I\}$ separa pontos, então ψ é estritamente positivo definido.

Demonstração: Se n é um inteiro positivo, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um subconjunto de Ω e $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \psi(x_i, x_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \sum_{k \in I} \lambda_k \overline{\varphi_k(x_i)} \varphi_k(x_j) \\ &= \sum_{k \in I} \lambda_k \left(\sum_{i=1}^n c_i \overline{\varphi_k(x_i)} \right) \left(\sum_{j=1}^n \overline{c_j} \varphi_k(x_j) \right) \end{aligned}$$

Como $\lambda_k > 0$, $k \in I$, temos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \psi(x_i, x_j) = \sum_{k \in I} \lambda_k \left| \sum_{i=1}^n c_i \overline{\varphi_k(x_i)} \right|^2 \geq 0,$$

fato que justifica (i). Para provar (ii), assumimos que $\text{span}\{\varphi_k : k \in I\}$ separa pontos. Se ψ não é estritamente positivo definido então existem um inteiro positivo n , um subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de Ω e um subconjunto $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ de $\mathbb{C}$ com $\sum_{i=1}^n |c_i| > 0$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \psi(x_i, x_j) = 0.$$

Combinando-se com a informação contida em (i), concluímos que

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \psi(x_i, x_j) = \sum_{k \in I} \lambda_k \left| \sum_{i=1}^n c_i \overline{\varphi_k(x_i)} \right|^2,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \bar{c}_i \varphi_k(x_i) = 0, \quad k \in I.$$

Segue que

$$\sum_{i=1}^n \bar{c}_i f(x_i) = 0, \quad f \in \text{span}\{\varphi_k : k \in I\}. \quad (2.2)$$

Se o conjunto $\text{span}\{\varphi_k : k \in I\}$ separa pontos, podemos escolher funções $f_1, f_2, \dots, f_n$ do mesmo tais que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Aplicando (2.2) deduzimos que

$$\bar{c}_j = \sum_{i=1}^n \bar{c}_i f_j(x_i) = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Assim, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, o que é uma contradição. ■

2.2 O espaço nativo de um núcleo de Mercer

Nesta seção descreveremos um método para construir o espaço nativo de um núcleo de Mercer. Logo, em toda a seção, $\{\lambda_k\}_{k \in I}$ e $\{\varphi_k\}_{k \in I}$ serão sequências que satisfazem a condição de somabilidade, descrita anteriormente.

Sendo os núcleos de Mercer positivos definidos, resultados do capítulo anterior implicam que tais núcleos têm um único espaço nativo.

Na descrição que pretendemos apresentar utilizaremos espaços complexos do tipo ℓ_2 com pesos $\{\lambda_k\}_{k \in I}$. O espaço

$$\ell_2^p(I) = \left\{ \{c_k\}_{k \in I} : \sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} |c_k|^2 < \infty \right\}$$

torna-se um espaço de Hilbert quando utilizamos o produto interno

$$\langle c, d \rangle_{\ell_2^p} := \sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} c_k \bar{d}_k$$

entre dois elementos $c := \{c_k\}_{k \in I}$ e $d := \{d_k\}_{k \in I}$. A norma correspondente será denotada por $\|\cdot\|_{\ell_2^p}$. Observamos que o uso do índice p na notação anterior refere-se à palavra peso, nada mais.

O primeiro resultado da seção refere-se à aplicação natural entre o espaço $\ell_2^p(I)$ e o espaço das funções complexas com domínio Ω .

Lema 2.2.1. *A fórmula*

$$L(c) = \sum_{k \in I} c_k \varphi_k, \quad c = \{c_k\}_{k \in I} \in \ell_2^p(I),$$

define uma transformação linear entre $\ell_2^p(I)$ e o espaço das funções complexas com domínio Ω . O núcleo desta transformação é um subespaço vetorial fechado de $\ell_2^p(I)$.

Demonstração: Fixados $c = \{c_k\}_{k \in I}$ em ℓ_2^p e x em Ω , considere $a = \{\lambda_k \varphi_k(x)\}_{k \in I}$ e $b = \{\bar{c}_k\}_{k \in I}$. Como a e b são elementos de ℓ_2^p ,

$$L(c)(x) = \sum_{k \in I} c_k \varphi_k(x) = \langle a, b \rangle_{\ell_2^p}.$$

Isto mostra que L está bem definida. Como a linearidade de L é facilmente verificada, vamos justificar apenas a afirmação referente ao fechamento do núcleo $\ker L$ da transformação. Seja $\{c^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\ker L$ convergindo para um elemento c de $\ell_2^p(I)$. Então

$$|L(c)(x)| = |L(c)(x) - L(c^n)(x)| = |L(c - c^n)(x)|, \quad x \in \Omega.$$

Escrevendo $c = \{c_k\}_{k \in I}$, $c^n = \{c_k^n\}_{k \in I}$ e usando a definição de L , obtemos

$$\begin{aligned} |L(c)(x)| &= \left| \sum_{k \in I} (c_k - c_k^n) \varphi_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k \in I} |c_k - c_k^n| |\varphi_k(x)| \\ &= \sum_{k \in I} \left(\lambda_k^{1/2} \right)^{-1} |c_k - c_k^n| \lambda_k^{1/2} |\varphi_k(x)|. \end{aligned}$$

Empregando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz deduzimos que

$$\begin{aligned} |L(c)(x)| &\leq \left(\sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} |c_k - c_k^n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in I} \lambda_k |\varphi_k(x)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|c - c^n\|_{\ell_2^p} \left(\sum_{k \in I} \lambda_k |\varphi_k(x)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

A soma entre parênteses é finita pela condição de somabilidade. Logo, por passagem ao limite quanto $n \rightarrow \infty$, concluímos que $L(c)(x) = 0$, $x \in \Omega$. Assim, $c \in \ker L$. ■

Observação 2.2.2. Em um espaço de Hilbert, se S é um subespaço e $\overline{S}$ é o seu fecho no espaço, então vale a fórmula $(S^\perp)^\perp = \overline{S}$ ([17, p. 31]). Voltando ao contexto do resultado anterior, temos

$$\overline{(\ker L)^\perp} = (((\ker L)^\perp)^\perp)^\perp = \overline{\ker L}^\perp = (\ker L)^\perp,$$

fato que também pode ser deduzido usando um resultado geral de Análise Funcional ([16, p. 39]).

No que segue, por razões de simplificação da notação, vamos denotar $\ker L$ pela letra $\mathcal{N}$. Lembrando que cada elemento c de $\ell_2^p(I)$ pode ser decomposto na forma $c = p_{\mathcal{N}}(c) + p_{\mathcal{N}^\perp}(c)$, o efeito da aplicação L sobre c reduzir-se-á à ação de L sobre $p_{\mathcal{N}^\perp}(c)$. Em outras palavras, $L(c) = L(p_{\mathcal{N}^\perp}(c))$. Desta forma, podemos observar que os elementos da imagem de L , podem não ter representação única. Por exemplo, se c é um elemento de $\ell_2^p(I)$ tal que $p_{\mathcal{N}}(c) \neq 0$, então $c \neq p_{\mathcal{N}^\perp}(c)$. Mas, $L(c) = L(p_{\mathcal{N}^\perp}(c))$, ou seja, o elemento $L(c)$ pode ser representado por ambas as somas

$$\sum_{k \in I} c_k \varphi_k \quad \text{e} \quad \sum_{k \in I} (p_{\mathcal{N}^\perp}(c))_k \varphi_k.$$

Apesar disto, podemos introduzir um produto interno no subespaço

$$Im(L) := \left\{ \sum_{k \in I} c_k \varphi_k : \sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} |c_k|^2 < \infty \right\},$$

através da fórmula

$$\langle L(c), L(d) \rangle_L := \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(c), p_{\mathcal{N}^\perp}(d) \rangle_{\ell_2^p} \quad c, d \in \ell_2^p(I). \quad (2.3)$$

Se $L(c) = L(d)$, então $L(p_{\mathcal{N}^\perp}(c)) = L(p_{\mathcal{N}^\perp}(d))$ e, conseqüentemente, a diferença $p_{\mathcal{N}^\perp}(c) - p_{\mathcal{N}^\perp}(d)$ é um elemento de $\mathcal{N}$. Desta forma, $p_{\mathcal{N}^\perp}(c) - p_{\mathcal{N}^\perp}(d) \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}^\perp = \{0\}$. Isto mostra que o produto interno está, de fato, bem definido.

Lema 2.2.3. *O espaço $(Im(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Seja $\{L(c^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $Im(L)$. Como

$$\|p_{\mathcal{N}^\perp}(c^n) - p_{\mathcal{N}^\perp}(c^m)\|_{\ell_2^p} = \|L(c^n) - L(c^m)\|_L, \quad m, n \geq 1,$$

podemos observar que a sequência $\{p_{\mathcal{N}^\perp}(c^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{N}^\perp$. Sendo $\mathcal{N}^\perp$ um subespaço fechado de $\ell_2^p(I)$, ele é completo. Logo, $\{p_{\mathcal{N}^\perp}(c^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{N}^\perp$, digamos, para um elemento $c \in \mathcal{N}^\perp$. Pelo fato de que $p_{\mathcal{N}^\perp}(c) = c$, obtemos

$$\|L(c^n) - L(c)\|_L = \|p_{\mathcal{N}^\perp}(c^n) - c\|_{\ell_2^p}, \quad n \geq 1.$$

Logo, a sequência $\{L(c^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente e seu limite é $L(c)$. Isto mostra que o espaço $(Im(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ é completo. ■

Finalmente, estamos em condições de apresentar uma descrição para o espaço nativo de um núcleo de Mercer.

Teorema 2.2.4. *Se ψ é um núcleo de Mercer definido por $\{\lambda_k\}_{k \in I}$ e $\{\varphi_k\}_{k \in I}$ então $(Im(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ é seu espaço nativo.*

Demonstração: Para verificar a primeira condição da definição de núcleo de reprodução, fixemos $x \in \Omega$. A condição de somabilidade implica que

$$\sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} |\lambda_k \varphi_k(x)|^2 = \sum_{k \in I} \lambda_k |\varphi_k(x)|^2 < \infty.$$

Logo, $b := \{\overline{\lambda_k \varphi_k(x)}\}_{k \in I}$ é um elemento de $l_2^p(I)$ e $\psi(x, \cdot) = L(b) \in Im(L)$. Para a verificação da segunda condição da definição de núcleo de reprodução, fixemos $x \in \Omega$ e $f \in Im(L)$. Sejam b como definido acima e $c := \{c_k\}_{k \in I} \in \ell_2^p(I)$ de modo que $f = L(c)$. Note inicialmente que, se $a := \{a_k\}_{k \in I} \in \mathcal{N}$ então

$$\langle b, a \rangle_{\ell_2^p} = \sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} \overline{\lambda_k \varphi_k(x)} \overline{a_k} = \overline{L(a)(x)} = 0.$$

Segue que $b \in \mathcal{N}^\perp$ e, conseqüentemente, $p_{\mathcal{N}^\perp}(b) = b$. Logo, pela fórmula (2.3) podemos escrever

$$\langle f, \psi(x, \cdot) \rangle_L = \langle L(c), L(b) \rangle_L = \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(c), p_{\mathcal{N}^\perp}(b) \rangle_{\ell_2^p} = \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(c), b \rangle_{\ell_2^p}.$$

Para completarmos a demonstração, é suficiente comprovarmos que $f(x) = \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(c), b \rangle_{\ell_2^p}$. Para tanto, escrevendo, $p_{\mathcal{N}^\perp}(c) := \{(p_{\mathcal{N}^\perp}(c))_k\}_{k \in I}$, temos

$$\langle p_{\mathcal{N}^\perp}(c), b \rangle_{\ell_2^p} = \sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} (p_{\mathcal{N}^\perp}(c))_k \lambda_k \varphi_k(x) = \sum_{k \in I} (p_{\mathcal{N}^\perp}(c))_k \varphi_k(x).$$

Por outro lado,

$$\sum_{k \in I} (p_{\mathcal{N}^\perp}(c))_k \varphi_k(x) = L(p_{\mathcal{N}^\perp}(c))(x) = L(c)(x) = f(x).$$

Isto demonstra o teorema. ■

Teorema 2.2.5. *Nas condições do teorema anterior, a norma de um elemento f do espaço nativo $(Im(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ pode ser calculada pela fórmula*

$$\|f\|_L^2 = \min \left\{ \sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} |c_k|^2 : \{c_k\}_{k \in I} \in l_2^p, f = \sum_{k \in I} c_k \varphi_k \right\}. \quad (2.4)$$

Demonstração: Se $f = L(c)$ onde $c = \{c_k\}_{k \in I}$, usando o fato de $p_{\mathcal{N}^\perp}$ ser uma projeção, temos

$$\|f\|_L^2 = \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(c), p_{\mathcal{N}^\perp}(c) \rangle_{\ell_2^p} = \|p_{\mathcal{N}^\perp}(c)\|_{\ell_2^p}^2 \leq \|c\|_{\ell_2^p}^2 = \sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} |c_k|^2.$$

No entanto, se $d = p_{\mathcal{N}^\perp}(c)$ então $L(d) = L(c) = f$. Consequentemente,

$$\|f\|_L^2 = \|p_{\mathcal{N}^\perp}(c)\|_{\ell_2^p}^2 = \|d\|_{\ell_2^p}^2 = \sum_{k \in I} \lambda_k^{-1} \|d_k\|^2.$$

A fórmula segue. ■

Levando-se em conta as notações e resultados desta seção temos a seguinte adaptação do Teorema 1.1.5.

Teorema 2.2.6. *Seja ψ um núcleo de Mercer definido por $\{\lambda_k\}_{k \in I}$ e $\{\varphi_k\}_{k \in I}$. Se ψ é estritamente positivo definido então dados $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \Omega$ e $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \mathbb{C}$, existe c em $\ell_2^p(I)$ de modo que $L(c)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $L(c)(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- (ii) se $d \in \ell_2^p(I)$, $L(d)(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $L(d) \neq L(c)$, então $\|L(c)\|_L < \|L(d)\|_L$.

Núcleos em Multiescalas

Neste capítulo, consideraremos núcleos de Mercer construídos através de uma única função utilizando multiescalas, finitas ou infinitas. O termo multiescala refere-se ao processo de modificação de uma função através de uma dilatação da variável (multiplicação por uma constante conveniente) seguida de uma translação (soma de uma constante conveniente). Em nosso contexto, uma dilatação corresponderá a função da forma $x \mapsto 2^j x$, $x \in \mathbb{R}^d$, para algum inteiro j , enquanto que a translação será uma aplicação da forma $x \mapsto x - k$, $x \in \mathbb{R}^d$, para algum multi-índice k com d componentes. As referências [10, 11, 12] trazem mais informações sobre o assunto.

Nos capítulos seguintes, analisaremos algumas propriedades do núcleo a ser considerado. Também trataremos de seu espaço nativo, como feito anteriormente para um núcleo de Mercer arbitrário.

3.1 Preliminares

Nesta seção, desenvolveremos um método de construção de núcleos de Mercer onde todas as funções da família são definidas a partir de uma única função geradora, possuindo características adicionais para garantir a validade de algumas propriedades importantes. A construção em si é similar àquela utilizada na teoria dos wavelets [8, 18]. Como tal teoria já está bem estruturada, a terminologia que adotaremos não difere em quase nada da clássica, mesmo que nosso trabalho não tenha qualquer relação direta com os wavelets.

Se $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função qualquer, j é um inteiro e k é um multi-índice de $\mathbb{Z}^d$, escreveremos $\varphi_{j,k}$ para denotar a função $\varphi_{j,k} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Fixado $l \in \mathbb{Z}$, o lema abaixo descreve uma propriedade básica que a família de funções

$$\{\varphi_{j,k} : j \geq l, k \in \mathbb{Z}^d\},$$

possui, quando φ tem suporte compacto. Faremos uso do conjunto de índices definido por $I_l := \{j \in \mathbb{Z} : j \geq l\} \times \mathbb{Z}^d$. Além disso, em $\mathbb{R}^d$, utilizaremos a norma do máximo

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Lema 3.1.1. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de suporte compacto satisfazendo a seguinte condição adicional: se $x \in \mathbb{R}^d$, existe $k_x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\varphi(x - k_x) \neq 0$. Se Ω é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^d$ então o espaço*

$$\mathcal{F} = \text{span}\{\varphi_{j,k} : (j,k) \in I_l\}$$

separa pontos de Ω .

Demonstração: Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^d$ e $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto de pontos de Ω . Como φ tem suporte compacto, $\text{supp } \varphi$ está contido em alguma bola fechada centrada na origem de $\mathbb{R}^d$ e de raio minimal. Seja r o raio desta bola. Se $\|2^j x - k\|_\infty > r$, então $\varphi_{j,k}(x) = 0$, $(j,k) \in I_l$, $x \in \Omega$. Desta forma, fixados o inteiro j e $x \in \Omega$, a cardinalidade do conjunto $\{k \in \mathbb{Z}^d : \varphi_{j,k}(x) \neq 0\}$ é no máximo $(2[r] + 1)^d$. Podemos escolher um inteiro positivo $m \geq l$ tal que

$$2^{1-m}r < \min\{\|x_i - x_j\|_\infty : i \neq j\}.$$

Por outro lado, devido à condição que φ satisfaz, existem multi-índices $k_1, k_2, \dots, k_n$ de $\mathbb{Z}^d$ tais que

$$\varphi_{m,k_i}(x_i) = \varphi(2^m x_i - k_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Em particular,

$$\|2^m x_i - k_i\| \leq r, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Utilizando esta informação, deduzimos que

$$\|2^m x_i - k_j\|_\infty \geq 2^m \|x_i - x_j\|_\infty - \|2^m x_j - k_j\|_\infty > 2^m (2^{1-m}r) - r = r, \quad i \neq j,$$

e, por conseguinte,

$$\varphi_{m,k_j}(x_i) = \varphi(2^m x_i - k_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Agora, é fácil ver que as funções

$$f_i = (\varphi_{m,k_i}(x_i))^{-1} \varphi_{m,k_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

estão bem definidas, são elementos de $\mathcal{F}$ e satisfazem $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. ■

3.2 Núcleos em multiescalas

Nesta seção, introduzimos os núcleos construídos em multiescalas. Utilizaremos uma única função φ de suporte compacto e limitada.

Fixado um inteiro l e uma sequência $\{\lambda_j : j \geq l\}$ de números reais positivos que é somável, ou seja, $\sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j < \infty$, a função $\phi_l : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\phi_l(x, y) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \varphi_{j,k}(y) \quad (3.1)$$

é chamada **núcleo em multiescalas** associado a φ .

O teorema abaixo justifica a positividade estrita definida da restrição do núcleo ϕ_l a qualquer subconjunto não vazio $\Omega \times \Omega$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Teorema 3.2.1. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de suporte compacto e limitada. Se Ω é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^d$, então a restrição de ϕ_l a $\Omega \times \Omega$ é um núcleo de Mercer. Além disso, se φ satisfaz a condição adicional do Lema 3.1.1, então o núcleo é estritamente positivo definido.*

Demonstração: Basta verificarmos que $\phi_l : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, dado por (3.1), é um núcleo de Mercer. De fato, isso feito, o Lema 3.1.1 implica que a família $\text{span}\{\varphi_{j,k} : (j, k) \in I_l\}$ separa pontos de Ω , enquanto que o Teorema 2.1.2 mostra que o núcleo ϕ_l é estritamente positivo definido. Como visto na prova do lema anterior, existe $r > 0$ tal que $\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k) = 0$ quando $\|2^j x - k\|_{\infty} > r$ e, fixado $x \in \Omega$, a cardinalidade do conjunto $\{k \in \mathbb{Z}^d : \varphi_{j,k}(x) \neq 0\}$ é no máximo $(2[r] + 1)^d$. Consequentemente, dado $x \in \Omega$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{(j,k) \in I_l} \lambda_j |\varphi_{j,k}(x)|^2 &\leq \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j (\sup\{|\varphi(y)| : y \in \Omega\})^2 \left(\sum_{\{k: \varphi_{j,k}(x) \neq 0\}} 1 \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \right) (\sup\{|\varphi(y)| : y \in \Omega\})^2 (2[r] + 1)^d < \infty, \end{aligned}$$

já que φ é limitada. Isto mostra que a sequência de números reais $\{\lambda_j\}_{j=l}^{\infty}$ e a sequência de funções $\{\varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ satisfazem a condição de somabilidade. Isto completa a demonstração. ■

A construção do espaço nativo desenvolvida no Capítulo 2 pode ser recuperada no presente contexto. Assumindo que Ω está fixado e o conjunto de índices é I_l , o espaço domínio da aplicação linear L é

$$\ell_2^p(I_l) := \left\{ \{c_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l} : \sum_{(j,k) \in I_l} \lambda_j^{-1} |c_{j,k}|^2 < \infty \right\}$$

cujo produto interno entre dois elementos $c := \{c_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ e $d := \{d_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ de $\ell_2^p(I_l)$ é dado por

$$\langle c, d \rangle_{\ell_2^p} = \sum_{(j,k) \in I_l} \lambda_j^{-1} c_{j,k} \overline{d_{j,k}},$$

A função L é dada pela fórmula

$$L(c) = \sum_{(j,k) \in I_l} c_{j,k} \varphi_{j,k}, \quad c = \{c_{j,k}\} \in \ell_2^p(I_l),$$

e tem como contradomínio o espaço das funções complexas definidas em Ω . Como antes, o núcleo $\mathcal{N}$ de L , bem como seu ortogonal $\mathcal{N}^\perp$, são subespaços fechados de $\ell_2^p(I_l)$. A imagem de L pode ser descrita por

$$Im(L) = \left\{ \sum_{(j,k) \in I_l} c_{j,k} \varphi_{j,k} : \sum_{(j,k) \in I_l} \lambda_j^{-1} |c_{j,k}|^2 < \infty \right\}.$$

Seus elementos podem não ter representação única mas dependem somente da projeção sobre o subespaço $\mathcal{N}^\perp$. Definindo

$$\langle L(a), L(b) \rangle_L = \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(a), p_{\mathcal{N}^\perp}(b) \rangle_{\ell_2^p}, \quad a, b \in \ell_2^p(I_l),$$

o espaço $(Im(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ é de Hilbert e é o espaço nativo da restrição do núcleo em multiescalas ϕ_l a $\Omega \times \Omega$. Finalmente, a norma deste espaço é dada por

$$\|f\|_L^2 = \min \left\{ \sum_{(j,k) \in I_l} \lambda_j^{-1} |c_{j,k}|^2 : \{c_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l} \in \ell_2^p(I_l), f = \sum_{(j,k) \in I_l} c_{j,k} \varphi_{j,k} \right\}.$$

Desta forma, temos o seguinte resultado que fornece uma descrição para o espaço nativo de um núcleo em multiescalas bem como para sua norma.

Teorema 3.2.2. *O espaço nativo do núcleo em multiescalas ϕ_l é o espaço vetorial normado $(N_{\phi_l}, \|\cdot\|_{\phi_l})$ onde*

$$N_{\phi_l} := \left\{ \sum_{j=l}^{\infty} f_j : f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^j \varphi_{j,k}, \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^j|^2 < \infty \right\}$$

e

$$\|f\|_{\phi_l}^2 := \min \left\{ \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^j|^2 : f = \sum_{j=l}^{\infty} f_j, f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^j \varphi_{j,k} \right\}.$$

Demonstração: A demonstração deste resultado segue diretamente da discussão que precede o teorema.

3.3 Núcleos em finitas multiescalas

Nesta seção, re-analisaremos os resultados anteriores em um contexto um pouco mais especial. Para tanto, primeiramente introduziremos alguns conceitos adicionais.

Uma função $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ é dita **refinável** quando existe uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ de números reais tal que

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_k \varphi_{1,k}. \quad (3.2)$$

A sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ é usualmente chamada de *máscara de refinamento* de φ , enquanto que (3.2) é dita ser a *equação de refinamento* de φ . Quando a sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ possui apenas um número finito de elementos não nulos, diremos que φ tem *máscara de refinamento finita*.

O lema abaixo revela que exigir que uma função φ satisfaça todos os conceitos introduzidos no capítulo anterior e, ainda, ser refinável e com máscara de refinamento finita, não é exigir demais.

Lema 3.3.1. *Existem funções $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de suporte compacto, limitadas, refináveis, com máscara de refinamento finita e satisfazendo a condição adicional do Lema 3.1.1.*

Demonstração: Considere $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \notin (0, 1]. \end{cases}$$

Um cálculo simples revela que

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1) = \varphi_{1,0}(x) + \varphi_{1,1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k \varphi_{1,k}$, onde $\eta_k = 0$, $k \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$ e $\eta_0 = \eta_1 = 1$. Segue que φ é uma função refinável e com máscara de refinamento finita. Para verificarmos que φ satisfaz a condição adicional procedemos da seguinte forma: se $x \in \mathbb{Z}$, tomando $k_x = x - 1$ temos que $\varphi(x - k_x) = \varphi(x - (x - 1)) = \varphi(1) = 1 \neq 0$. Se $x \notin \mathbb{Z}$ e $x \in (0, 1)$, então $k_x = 0$ satisfaz o desejado. No caso restante, basta tomarmos $k_x = [x] - 1$, onde $[x]$ é o menor inteiro maior ou igual a x . De fato, temos que $x - k_x = x - ([x] - 1) \in (0, 1)$ e $\varphi(x - k_x) = 1 \neq 0$. ■

A partir de agora, utilizaremos uma função $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ de suporte compacto, limitada, refinável e satisfazendo a condição adicional do Lema 3.1.1. Fixados números inteiros l e m , com $l \leq m$, e números reais positivos $\lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_m$, o núcleo $\psi_m : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\psi_m(x, y) = \sum_{j=l}^m \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \varphi_{j,k}(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (3.3)$$

é chamado **núcleo em finitas multiescalas** associado a φ .

Teorema 3.3.2. *Todo núcleo em finitas multiescalas é um núcleo de Mercer.*

Demonstração: Isto segue do Teorema 3.2.1. ■

O teorema abaixo faz uso do número r , definido anteriormente, tal que o suporte da função φ está contido na bola aberta de $\mathbb{R}^d$, centrada na origem e raio r .

Teorema 3.3.3. *Seja ψ_m um núcleo em finitas multiescalas associado a φ . Se um subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $\mathbb{R}^d$ satisfaz*

$$\min\{\|x_i - x_j\|_\infty : i \neq j\} > 2^{1-m}r$$

então a matriz $(\psi_m(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ é positiva definida.

Demonstração: Considere um subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $\mathbb{R}^d$ como no enunciado do teorema. Uma análise minuciosa da demonstração do Lema 3.1.1 mostra que os argumentos lá utilizados podem ser ajustados de modo a provar que o conjunto

$$\text{span}\{\varphi_{j,k} : j = l, l+1, \dots, m; k \in \mathbb{Z}^d\}$$

separa pontos de $\mathbb{R}^d$. Agora, através dos argumentos da segunda metade da prova do Teorema 2.1.2, concluímos que a matriz $(\psi_m(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ é positiva definida. ■

Todos os resultados enunciados até este ponto para os núcleos em multiescalas, valem para os núcleos em finitas multiescalas. Em particular, os elementos da imagem da aplicação linear L , dada nos capítulos anteriores, podem não ter uma única representação e dependem somente da projeção sobre o subespaço $\mathcal{N}^\perp$, onde $\mathcal{N}$ é o núcleo da aplicação linear L . Reescrevendo,

$$\text{Im}(L) = \left\{ \sum_{(j,k) \in J_l} c_{j,k} \varphi_{j,k} : \sum_{(j,k) \in J_l} \lambda_j^{-1} |c_{j,k}|^2 < \infty \right\},$$

onde $J_l := \{j \in \mathbb{Z} : l \leq j \leq m\} \times \mathbb{Z}^d$. Neste espaço definimos o produto interno

$$\langle L(a), L(b) \rangle_L = \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(a), p_{\mathcal{N}^\perp}(b) \rangle_{\ell_2^p}$$

onde a e b são elementos de $\ell_2^p(J_l)$. Desta forma, como já comentado, o espaço nativo do núcleo ψ_m é o espaço de Hilbert $(\text{Im}(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$.

Agora, para cada $j \in \mathbb{Z}$, consideramos o espaço vetorial

$$V_j := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k} : c_k \in \mathbb{C}, \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 < \infty \right\}.$$

Sendo φ refinável e com máscara de refinamento finita, existem $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ em $\mathbb{Z}^d$ tais que $\varphi = \sum_{i=1}^n \eta_i \varphi_{1, l_i}$. Logo,

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i \varphi(2^{j+1}x - 2k - l_i) = \sum_{i=1}^n \eta_i \varphi_{j+1, 2k+l_i}(x), \quad (j, k) \in J_l, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Se $f \in V_j$ então existe $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ com $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 < \infty$ tal que $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k}$ e, consequentemente,

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \varphi_{j+1, 2k+l_i} \right) = \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j+1, 2k+l_i} \right) = \sum_{i=1}^n \eta_i f_i,$$

onde $f_i := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j+1, 2k+l_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Como $f_i \in V_{j+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, devemos ter que $f \in V_{j+1}$. Assim, V_j é um subespaço de V_{j+1} .

Ainda, a expressão

$$\|f_j\|_{V_j}^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2, \quad f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k} \in V_j, \quad (3.4)$$

define a norma $\|\cdot\|_{V_j}$ em V_j .

Com as considerações acima, estamos prontos para demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.3.4. *O espaço nativo do núcleo ψ_m definido em (3.3) é V_m e a expressão*

$$\|f\|_{V_m}^2 = \min \left\{ \sum_{j=l}^m \lambda_j^{-1} \|f_j\|_{V_j}^2 : f_j \in V_j, f = \sum_{j=l}^m f_j \right\}$$

define uma norma neste espaço.

Demonstração: Já sabemos que $Im(L)$ é o espaço nativo do núcleo ψ_m . Desta forma, mostraremos que $Im(L) = V_m$. Para isto, considere um elemento $f = \sum_{(j,k) \in J_l} c_{j,k} \varphi_{j,k}$ de $Im(L)$. Podemos escrever

$$f = \sum_{(j,k) \in J_l} c_{j,k} \varphi_{j,k} = \sum_{j=l}^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \varphi_{j,k} = \sum_{j=l}^m f_j,$$

onde

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \varphi_{j,k}, \quad j = l, l+1, \dots, m.$$

O cálculo

$$\begin{aligned} \lambda_j^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_j^{-1} |c_{j,k}|^2 \leq \sum_{j=l}^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_j^{-1} |c_{j,k}|^2 \\ &= \sum_{(j,k) \in J_l} \lambda_j^{-1} |c_{j,k}|^2 < \infty, \quad j = l, l+1, \dots, m, \end{aligned}$$

revela que $f_j \in V_j$, $j = l, l+1, \dots, m$. Desta forma,

$$f = \sum_{j=l}^m f_j \in V_l + V_{l+1} + \dots + V_m.$$

Como $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, concluímos que $f \in V_m$. Portanto, $Im(L) \subset V_m$. Reciprocamente, seja $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{m,k} \in V_m$. Defina $e := \{e_{j,k}\}_{(j,k) \in J_l}$, onde $e_{j,k} = 0$, $j = l, l+1, \dots, m-1$, $k \in \mathbb{Z}^d$ e $e_{m,k} = c_k$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Então

$$g = \sum_{j=l}^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e_{j,k} \varphi_{m,k} = \sum_{(j,k) \in J_l} e_{j,k} \varphi_{j,k}.$$

Além disso,

$$\sum_{(j,k) \in J_l} \lambda_j^{-1} |e_{j,k}|^2 = \sum_{j=l}^m \lambda_j^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |e_{j,k}|^2 = \lambda_m^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |e_{m,k}|^2 = \lambda_m^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 < \infty,$$

mostrando que $e \in \ell_2^p$. Portanto, $g = L(e) \in Im(L)$, nos permitindo concluir que $V_m \subset Im(L)$. Finalmente, como os conjuntos

$$\left\{ \sum_{(j,k) \in J_l} \lambda_j^{-1} |c_{j,k}|^2 ; \{c_{j,k}\}_{(j,k) \in J_l} \in \ell_2^p, f = \sum_{(j,k) \in J_l} c_{j,k} \varphi_{j,k} \right\}$$

e

$$\left\{ \sum_{j=l}^m \lambda_j^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \|f_j\|_{V_j}^2 ; f_j \in V_j, f = \sum_{j=l}^m f_j \right\}$$

são iguais, a formulação alternativa para a norma do espaço nativo descrita no enunciado do teorema, segue. ■

3.4 Interpolação no espaço nativo

Nesta seção, pretendemos explorar propriedades interpolatórias do espaço nativo de um núcleo em finitas multiescalas. Consideraremos o núcleo como definido em (3.3) e subconjuntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $\mathbb{R}^d$ satisfazendo

$$\min\{\|x_i - x_j\|_\infty : i \neq j\} > 2^{1-m}r,$$

onde m e r são como nas seções anteriores. Neste caso, como já visto anteriormente, a matriz $(\psi_m(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ tem determinante positivo, por ser uma matriz positiva definida.

Dado um conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ de escalares, existe uma única função da forma

$$s = \sum_{i=1}^n \beta_i \psi_m(x_i, \cdot), \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{C},$$

que satisfaz as condições de interpolação, $s(x_j) = y_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. De fato, os coeficientes são obtidos através da resolução do sistema linear de n equações e n incógnitas

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_m(x_i, x_j) = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Note que

$$\begin{aligned} s = \sum_{i=1}^n \beta_i \psi_m(x_i, \cdot) &= \sum_{i=1}^n \beta_i \sum_{j=l}^m \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x_i)} \varphi_{j,k} \\ &= \sum_{j=l}^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_j \sum_{i=1}^n \beta_i \overline{\varphi_{j,k}(x_i)} \varphi_{j,k} \\ &= \sum_{j=l}^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^j \varphi_{j,k}, \end{aligned}$$

onde

$$c_k^j = \lambda_j \sum_{i=1}^n \beta_i \overline{\varphi_{j,k}(x_i)}, \quad (j, k) \in J_l. \quad (3.5)$$

Definindo

$$s_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^j \varphi_{j,k}, \quad j = l, l+1, \dots, m$$

podemos ainda escrever

$$s = \sum_{j=l}^m s_j.$$

Voltando à definição do espaço V_j , torna-se razoável pensar que s_j é um elemento de V_j , $j = l, l+1, \dots, m$. Para ratificarmos isto, basta verificarmos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^j|^2 < \infty.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^j|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^j \overline{c_k^j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_j^2 \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \overline{\varphi_{j,k}(x_i)} \right) \left(\sum_{i=1}^n \overline{\beta_i} \varphi_{j,k}(x_i) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_j^2 \sum_{i,p=1}^n \beta_i \overline{\beta_p} \overline{\varphi_{j,k}(x_i)} \varphi_{j,k}(x_p) \\ &= \lambda_j \sum_{i,p=1}^n \beta_i \overline{\beta_p} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x_i)} \varphi_{j,k}(x_p), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^j|^2 \leq \lambda_j \sum_{i,p=1}^n \beta_i \overline{\beta_p} \phi_m(x_i, x_p) < \infty.$$

Na prova do teorema abaixo faremos uso da igualdade $V_m = V_l + V_{l+1} + \dots + V_m$.

Teorema 3.4.1. *Nas condições delineadas acima, o interpolante s é um elemento de norma minimal do conjunto*

$$S_l = \left\{ \sum_{j=l}^m f_j \in V_m : f_j \in V_j, \left(\sum_{j=l}^m f_j \right) (x_i) = y_i, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Além disso, se $\sum_{j=l}^m f_j$ é um elemento de $S_l \setminus \{s\}$, então

$$\sum_{j=l}^m \lambda_j^{-1} \|s_j\|_{V_j}^2 < \sum_{j=l}^m \lambda_j^{-1} \|f_j\|_{V_j}^2.$$

Demonstração: A primeira afirmação do teorema segue diretamente do Teorema 1.1.5 e de sua prova. De fato, a construção de s descrita acima coincide com aquela do elemento minimal S descrito na prova do Teorema 1.1.5. Quanto à segunda afirmação, se $f = \sum_{j=l}^m f_j \in S_l \setminus \{s\}$, então já sabemos que $\|s\|_{V_m} < \|f\|_{V_m}$. Logo,

$$\sum_{j=l}^m \lambda_j^{-1} \|s_j\|_{V_j}^2 = \|s\|_{V_m}^2 < \|f\|_{V_m}^2 \leq \sum_{j=l}^m \lambda_j^{-1} \|f_j\|_{V_j}^2,$$

o que completa a prova do teorema. ■

As funções $s_l, s_{l+1}, \dots, s_m$ que compõem a descrição final de s foram escritas como combinações lineares de $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^d$. O próximo resultado descreve uma relação entre os coeficientes destas combinações lineares, para diferentes valores de j , via os coeficientes da equação de refinamento

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_k \varphi_{1,k}.$$

Teorema 3.4.2. *Vale a fórmula*

$$c_p^j = \lambda_j \lambda_{j+1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_{k-2p} c_k^{j+1}, \quad j = l, l+1, \dots, m-1, \quad p \in \mathbb{Z}^d.$$

Demonstração: Fixados j e p como no enunciado e $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a fórmula (3.5) nos dá

$$c_p^j = \lambda_j \sum_{i=1}^n \beta_i \overline{\varphi_{j,p}(x_i)}.$$

Por outro lado, usando a equação de refinamento, obtemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j,p}(x_i) = \varphi(2^j x_i - p) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_k \varphi_{1,k}(2^j x_i - p) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_k \varphi(2^{j+1} x_i - 2p - k) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_k \varphi_{j+1, 2p+k}(x_i) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_{k-2p} \varphi_{j+1,k}(x_i).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$c_p^j = \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_{k-2p} \sum_{i=1}^n \overline{\beta_i \varphi_{j+1,k}(x_i)}.$$

Mas, lembrando (3.5) novamente, concluímos que

$$c_p^j = \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_{k-2p} \lambda_{j+1}^{-1} c_k^{j+1} = \lambda_j \lambda_{j+1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_{k-2p} c_k^{j+1},$$

como desejado. ■

Por ser uma soma contável e não necessariamente finita, o interpolante s pode nos trazer algumas dificuldades no caso de tentarmos aplicar os resultados acima. Logo, para finalizar este capítulo faremos uma breve discussão deduzindo que, de fato, s pode ser escrito como uma soma finita. O símbolo $\#$ representará a cardinalidade do conjunto que aparecer seguido do mesmo.

Para cada j em $\{l, l+1, \dots, m\}$, o conjunto

$$M(j) := \{k \in \mathbb{Z}^d : c_k^j \neq 0\}$$

tem no máximo Cn elementos, onde n é o número de pontos da interpolação e C é a constante dada por

$$C := \max \{ \# \{k \in \mathbb{Z}^d : \varphi(x - k) \neq 0\} : x \in \mathbb{R}^d \}.$$

De fato, se $M^j(i) := \{k \in \mathbb{Z}^d : \varphi_{j,k}(x_i) \neq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, e $k \in M(j)$ então $c_k^j \neq 0$. Logo, existe pelo menos um índice i tal que $\varphi_{j,k}(x_i) \neq 0$. Consequentemente, $k \in M^j(i)$. Segue que $M(j) \subset \cup_{i=1}^n M^j(i)$. Como $\#M^j(i) \leq C$ devemos ter $\#M(j) \leq Cn$. Isto tudo revela que o número de coeficientes necessários na representação de

$$s = \sum_{j=l}^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^j \varphi_{j,k}$$

é no máximo $C(m-l+1)n$, ou seja, o interpolante s é uma soma finita.

O operador integral gerado por um núcleo em multiescalas

Neste capítulo analisaremos algumas propriedades dos operadores integrais gerados por núcleos em multiescalas da forma

$$\phi_l(x, y) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \varphi_{j,k}(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Hipóteses básicas que assumiremos aqui são as seguintes: $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua de suporte compacto, a família $\{\varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ forma um conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ e o conjunto de números reais positivos $\{\lambda_j : j \geq l\}$ satisfaz $\sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j < \infty$. Lembramos que $I_l = \{j \in \mathbb{Z} : j \geq l\} \times \mathbb{Z}^d$.

O lema abaixo mostra que as hipóteses listadas acima não são conflitantes.

Lema 4.0.3. *Existem funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, de suporte compacto e tais que a família $\{\phi_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ forma uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Considere a função

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in (1, 2] \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

A função $\phi(x) = \psi(2x) - 2^{-1}\psi(2x-1) - 2^1\psi(2x+1)$ satisfaz as exigências do enunciado do lema ([8, p. 7]). ■

4.1 Resultado básico sobre operadores integrais

Esta seção tem por finalidade apresentar um resultado básico da Análise Funcional relativo a operadores integrais gerados por núcleos. Tal resultado será utilizado no estabelecimento do contexto no qual pretendemos analisar os resultados subseqüentes.

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\psi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável. Para cada $f \in L^2(X, \mu)$ associamos a função $T(f) : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$T(f)(y) = \int_X \psi(x, y) f(x) d\mu(x), \quad y \in X.$$

Claramente, a aplicação $f \mapsto T(f)$ define uma transformação linear de $L^2(X, \mu)$ no espaço das funções complexas com domínio X . Pretendemos considerar neste capítulo a transformação T acima no caso em que $X = \mathbb{R}^d$, μ é a medida de Lebesgue usual e ψ é o núcleo em multiescalas ϕ_l . Neste caso específico, o ponto principal de nossa análise consistirá em demonstrar que T é na verdade um operador linear sobre $L^2(\mathbb{R}^d)$, ou seja,

$$T(f) \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Sempre que T for um operador linear, ressaltaremos o núcleo gerador ψ do operador, dizendo que T é o **operador integral** gerado por ψ .

Uma condição suficiente para que T seja de fato um operador integral é que o núcleo seja um elemento de $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, uma condição não muito simples de ser ratificada.

Assim sendo, o resultado desta seção descreve condições suficientes para que um núcleo gere um operador integral sobre $L^2(X, \mu)$.

Teorema 4.1.1. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\psi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável. Se existir $M > 0$ tal que*

$$\int_X |\psi(x, y)| d\mu(y) \leq M, \quad x \in X$$

e

$$\int_X |\psi(x, y)| d\mu(x) \leq M, \quad y \in X,$$

então a transformação T define um operador integral sobre $L^2(X, \mu)$. O número M é um limitante superior para a norma do operador.

Demonstração: Assuma a existência de M satisfazendo as desigualdades do enunciado. Temos que ratificar que a imagem de T é um subconjunto de $L^2(X, \mu)$. Seja $f \in L^2(X, \mu)$. Claramente temos que

$$|T(f)(y)| = \left| \int_X \psi(x, y) f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_X |\psi(x, y)| |f(x)| d\mu(x), \quad y \in X.$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|T(f)(y)| \leq \left(\int_X |\psi(x, y)| d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |\psi(x, y)| |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y \in X,$$

enquanto que nossa hipótese implica

$$|T(f)(y)| \leq M^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |\psi(x, y)| |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y \in X.$$

Segue que

$$\int_X |T(f)(y)|^2 d\mu(y) \leq M \int_X \left(\int_X |\psi(x, y)| |f(x)|^2 d\mu(x) \right) d\mu(y).$$

Agora, aplicando o Teorema de Fubini,

$$\int_X \left(\int_X |\psi(x, y)| |f(x)|^2 d\mu(x) \right) d\mu(y) = \int_X |f(x)|^2 \left(\int_X |\psi(x, y)| d\mu(y) \right) d\mu(x)$$

e, consequentemente,

$$\int_X \left(\int_X |\psi(x, y)| |f(x)|^2 d\mu(x) \right) d\mu(y) \leq \int_X |f(x)|^2 M d\mu(x) = M \int_X |f(x)|^2 d\mu(x).$$

Portanto,

$$\int_X |T(f)(y)|^2 d\mu(y) \leq M^2 \int_X |f(x)|^2 d\mu(x).$$

Assim, $T(f) \in L^2(X, \mu)$ e $\|T(f)\|_{L^2(X, \mu)} \leq M \|f\|_{L^2(X, \mu)}$. Isto finaliza a prova do teorema. ■

4.2 O operador integral gerado por ϕ_l

No que segue, utilizaremos as notações $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ para o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^d)$ e $\|\cdot\|_2$ para a norma no mesmo espaço.

Inicialmente, analisaremos a continuidade do núcleo em multiescalas. Isto, por sua vez, já garante automaticamente a sua mensurabilidade.

Faremos uso do conceito topológico descrito a seguir. Dizemos que uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ é **localmente finita** se, para todo ponto x de $\mathbb{R}^d$ existir uma vizinhança aberta U_x de x interceptando apenas um número finito de elementos da família. Denotaremos o suporte de uma função f por $\text{supp } f$.

Lema 4.2.1. *Se $j \in \{l, l+1, \dots\}$, então a família $\{\text{supp } \varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ é localmente finita.*

Demonstração: Observe que se $\text{supp } \varphi \subset [-r, r]^d$ para algum $r > 0$ e $k = (k_1, k_2, \dots, k_d)$, então $\text{supp } \varphi_{j,k}$ é um subconjunto do paralelepípedo d -dimensional

$$\prod_{i=1}^d [2^{-j}(k_i - r), 2^{-j}(k_i + r)].$$

Fixe $j \geq l$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Para $i = 1, 2, \dots, n$, existe $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-j}(r - k_i) < x_i < 2^{-j}(r + k_i)$. Além disso, existe uma vizinhança aberta V_x^i de x_i , inteiramente contida em $(2^{-j}(r - k_i), 2^{-j}(r + k_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$. É claro que $V_x = V_x^1 \times V_x^2 \times \dots \times V_x^d$ é uma vizinhança aberta de x . Para cada coordenada x_i do ponto x , a vizinhança V_x^i intercepta apenas um número finito de intervalos fechados da forma $[2^{-j}(r - k), 2^{-j}(r + k)]$, $k \in \mathbb{Z}$. Em particular, V_x só intercepta um número finito de elementos da família $\{\text{supp } \varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$. ■

Teorema 4.2.2. *O núcleo em multiescalas ϕ_l é contínuo.*

Demonstração: Fixemos $j \geq l$ e escrevamos

$$f_j(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \varphi_{j,k}(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, o lema anterior garante a existência de vizinhanças abertas U_{x_0} e U_{y_0} de x_0 e y_0 , respectivamente, que interceptam apenas um número finito de elementos da família $\{\text{supp } \varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$. Desta forma, $U_{x_0} \times U_{y_0}$ intercepta um número finito de elementos da família $\{\text{supp } (\overline{\varphi_{j,k}} \otimes \varphi_{j,k})\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, $j \geq l$, onde

$$(\overline{\varphi_{j,k}} \otimes \varphi_{j,k})(x, y) = \overline{\varphi_{j,k}(x)} \varphi_{j,k}(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Se $\text{supp } (\overline{\varphi_{j,k_i}} \otimes \varphi_{j,k_i})$, $i = 1, 2, \dots, n$, são estes elementos, então

$$f_j(x, y) = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi_{j,k_i}(x)} \varphi_{j,k_i}(y), \quad (x, y) \in U_{x_0} \times U_{y_0}.$$

Como φ é contínua, f_j é contínua em (x_0, y_0) . Para concluir a prova, devemos observar que um procedimento similar àquele utilizado na prova do Lema 3.1.1 revela que, dado $x \in \mathbb{R}^d$ e $j \geq l$, o conjunto $\{k \in \mathbb{Z}^d : \varphi_{j,k}(x) \neq 0\}$ tem no máximo $(2[r] + 1)^d$ elementos, para algum r suficientemente grande. Logo, se C é um limitante para a função φ , então obtemos a desigualdade

$$|\lambda_j f_j(x, y)| \leq \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_{j,k}(x)| |\varphi_{j,k}(y)| \leq \lambda_j C^2 (2[r] + 1)^d, \quad j \geq l, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Como $C^2 (2[r] + 1)^d \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j < \infty$, o M-Teste de Weierstrass ([3, p. 29]) implica que a série $\sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j f_j$ converge uniformemente. A continuidade de ϕ_l segue. ■

A seguir, comprovaremos que um núcleo em multiescalas não pode ser um elemento de $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Utilizaremos os lemas técnicos a seguir.

Lema 4.2.3. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ -finitos tais que $L^2(X, \mu)$ e $L^2(Y, \nu)$ são espaços separáveis. Se $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ e $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são bases ortonormais de $L^2(X, \mu)$ e $L^2(Y, \nu)$, respectivamente, então $\{\bar{\psi}_m \otimes \phi_n\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$.*

Demonstração: [17, p. 41]. ■

Lema 4.2.4. *Sejam $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal em um espaço de Hilbert H e $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de números complexos. Então, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ converge em H se, e somente se, $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.*

Demonstração: [16, p. 34].

Teorema 4.2.5. *O núcleo em multiescalas ϕ_l não é um elemento de $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.*

Demonstração: Como $\{\varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ é uma sequência ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$, o Lema 4.2.3 mostra que a família de funções $\{\overline{\varphi_{j,k}} \otimes \varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ é uma sequência ortonormal em $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Como a série

$$\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_j^2$$

é claramente divergente, o resultado segue do lema anterior. ■

Para o próximo resultado, observamos que a convergência de $\sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j$ justifica a convergência de $\sum_{j=l}^{\infty} 2^{-jd} \lambda_j$.

Lema 4.2.6. *Existe um número real positivo M tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi_l(x, y)| d\mu(y) \leq M, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi_l(x, y)| d\mu(x) \leq M, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Demonstração: Justificaremos a primeira desigualdade apenas, já que a justificativa da segunda é análoga. Fixado $x \in \mathbb{R}^d$, temos

$$|\phi_l(x, y)| = \left| \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \varphi_{j,k}(y) \right| \leq \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_{j,k}(x)| |\varphi_{j,k}(y)|, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Sendo a sequência das somas parciais da série majorante acima uma sequência crescente de funções não negativas, o Teorema da Convergência Monótona ([6, p. 50]) é aplicável. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi_l(x, y)| d\mu(y) \leq \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_{j,k}(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{j,k}(y)| d\mu(y).$$

Como observado na prova do Lema 4.2.1, temos

$$\text{supp } \varphi_{j,k} \subset \prod_{i=1}^d [2^{-j}(k_i - r), 2^{-j}(k_i + r)],$$

para algum $r > 0$, onde $k = (k_1, k_2, \dots, k_d)$. Segue que

$$\mu(\text{supp } \varphi_{j,k}) \leq (2^{-j+1}r)^d,$$

e, consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{j,k}(y)| d\mu(y) \leq C(2^{-j+1}r)^d,$$

onde C é um limitante da função φ . Desta forma, temos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi_l(x, y)| d\mu(y) \leq \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_{j,k}(x)| C(2^{-j+1}r)^d.$$

Como a cardinalidade do conjunto $\{k \in \mathbb{Z}^d, \varphi_{j,k}(x) \neq 0\}$ não ultrapassa $(2[r] + 1)^d$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\phi_l(x, y)| d\mu(y) &\leq \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j C^2 (2[r] + 1)^d (2^{-j+1}r)^d \\ &= C^2 (2r)^d (2[r] + 1)^d \sum_{j=l}^{\infty} 2^{-jd} \lambda_j := M. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova. ■

Teorema 4.2.7. *A fórmula*

$$T_l(f) := \int_{\mathbb{R}^d} \phi_l(x, \cdot) f(x) d\mu(x)$$

define um operador linear limitado sobre $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demonstração: A mensurabilidade de ϕ_l segue do Teorema 4.2.2. O resto segue do lema anterior e do Teorema 4.1.1. ■

Os resultados que completam a seção nos darão informações a respeito da imagem do operador integral T_l gerado por ϕ_l . Abaixo temos um resultado clássico sobre troca entre os símbolos de integração e soma infinitas ([6, p. 55]).

Lema 4.2.8. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de $L^1(X, \mu)$ satisfazendo $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| d\mu < \infty$, então $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge quase sempre para uma função em $L^1(X, \mu)$. Além disso, vale a igualdade*

$$\int_X \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu.$$

O resultado a seguir fornece uma descrição alternativa para a atuação do operador integral sobre um elemento de $L^2(\mathbb{R})$.

Lema 4.2.9. *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ então,*

$$T_l(f)(y) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} f(x) d\mu(x) \right) \varphi_{j,k}(y), \quad y \in \mathbb{R}^d$$

Demonstração: Segundo o lema anterior, basta verificarmos que

$$S_y := \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_{j,k}(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{j,k}(x)| |f(x)| d\mu(x) < \infty, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos imediatamente que

$$\begin{aligned} S_y &\leq \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_{j,k}(y)| \|\varphi_{j,k}\|_2 \|f\|_2 \\ &= \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_{j,k}(y)| \|f\|_2, \quad y \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

pois, $\|\varphi_{j,k}\|_2 = 1$, $(j, k) \in I_l$. Se C é um limitante para φ , então

$$\begin{aligned} S_y &\leq \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_{j,k}(y)| \|f\|_2 \\ &\leq \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j C(2[r] + 1)^d \|f\|_2 \\ &= C(2[r] + 1)^d \|f\|_2 \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \end{aligned}$$

Como a última soma é finita, o resultado segue. ■

De acordo com o Teorema 3.2.2, o espaço nativo do núcleo ϕ_l é o espaço normado $(N_{\phi_l}, \|\cdot\|_{\phi_l})$ onde

$$N_{\phi_l} = \left\{ \sum_{j=l}^{\infty} f_j : f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^j \varphi_{j,k}, \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^j|^2 < \infty \right\},$$

e

$$\|f\|_{\phi_l}^2 := \min \left\{ \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^j|^2 : f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^j \varphi_{j,k}, f = \sum_{j=l}^{\infty} f_j \right\}.$$

Além disso, a norma descrita acima é induzida pelo produto interno, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\phi_l}$, o qual é calculado via a fórmula dada em (2.3), como pode ser verificado no Capítulo 2. Também, devemos lembrar da ação da aplicação linear L sobre um elemento de $\ell_2^p(I_l)$,

$$L(a) = \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{j,k} \varphi_{j,k}, \quad a = \{a_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l} \in \ell_2^p(I_l),$$

e que $\mathcal{N}$ representa o núcleo da mesma. Desta forma, temos o seguinte resultado.

Lema 4.2.10. *A função $h : \mathbb{R}^d \rightarrow N_{\phi_l}$, dada por*

$$h(x) = \phi_l(x, \cdot), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

é contínua.

Demonstração: Primeiramente, observamos que se $a_x = \{\lambda_j \overline{\varphi_{j,k}(x)}\}_{(j,k) \in I_l}$, $x \in \mathbb{R}^d$, então $L(a_x) = \phi_l(x, \cdot)$. Agora, dado $b = \{b_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l} \in \mathcal{N}$, temos

$$\langle b, a_x \rangle_{\ell_2^p} = \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{j,k} \varphi_{j,k}(x) = L(b)(x) = 0,$$

implicando que $a_x \in \mathcal{N}^\perp$, $x \in \mathbb{R}^d$. Consequentemente

$$\langle \phi_l(x, \cdot), \phi_l(y, \cdot) \rangle_{\phi_l} = \langle L(a_x), L(a_y) \rangle_{\phi_l} = \langle a_x, a_y \rangle_{\ell_2^p}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Com estes cálculos podemos deduzir que, se $x, x_0 \in \mathbb{R}^d$ então,

$$\begin{aligned} \|\phi_l(x, \cdot) - \phi_l(x_0, \cdot)\|_{\phi_l}^2 &= \|L(a_x) - L(a_{x_0})\|_{\phi_l}^2 \\ &= \langle L(a_x - a_{x_0}), L(a_x - a_{x_0}) \rangle_{\phi_l} \\ &= \langle a_x - a_{x_0}, a_x - a_{x_0} \rangle_{\ell_2^p} \\ &= \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_j |\varphi_{j,k}(x) - \varphi_{j,k}(x_0)|^2. \end{aligned}$$

A partir de agora, nos empenharemos em mostrar que esta última soma tende a zero quando $x \rightarrow x_0$. Para cada $j \geq l$, seja $g_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por

$$g_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_{j,k}(x) - \varphi_{j,k}(x_0)|^2, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Pelo fato da família $\{\text{supp} \varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ ser localmente finita, existe uma vizinhança V_{x_0} de x_0 tal que, se $x \in V_{x_0}$ então, $|\varphi_{j,k}(x) - \varphi_{j,k}(x_0)| \neq 0$, para no máximo um número finito de índices $k \in \mathbb{Z}^d$. Logo, nesta vizinhança, a função g_j é uma soma finita de funções

contínuas. Isto implica na continuidade de g_j . Com os mesmos argumentos utilizados no final na demonstração do Teorema 4.2.2, concluímos que a função $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(x) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j g_j(x)$ é contínua. Além disso,

$$\|h(x) - h(x_0)\|_{\phi_l}^2 = \|\phi_l(x, \cdot) - \phi_l(x_0, \cdot)\|_{\phi_l}^2 = g(x).$$

Desta forma, se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}^d$ convergindo para x_0 , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h(x_n) - h(x_0)\|_{\phi_l}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 0,$$

devido à continuidade de g e ao fato de que $g(x_0) = 0$. A continuidade de h segue. ■

Teorema 4.2.11. *A imagem do operador T_l é um subconjunto de N_{ϕ_l} . Em particular, $\text{Im } T_l$ só contém funções contínuas.*

Demonstração: Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pelo Lema 4.2.9, podemos escrever

$$T_l(f) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} f(x) d\mu(x) \right) \varphi_{j,k} = \sum_{j=l}^{\infty} f_j,$$

onde

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^j \varphi_{j,k}; \quad \text{e} \quad c_k^j = \lambda_j \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2, \quad j \geq l, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Logo, para concluir a prova, resta verificarmos que $\sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^j|^2 < \infty$. Como $\{\varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ forma um conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ e $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, devemos ter necessariamente que

$$\sum_{(j,k) \in I_l} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2|^2 < \infty.$$

Como

$$\lambda_j |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2|^2 \leq \left(\sum_{i=l}^{\infty} \lambda_i \right) |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2|^2, \quad (j,k) \in I_l,$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^j|^2 &= \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_j |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2|^2 \\ &\leq \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{i=l}^{\infty} \lambda_i \right) |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2|^2 \\ &= \left(\sum_{i=l}^{\infty} \lambda_i \right) \left(\sum_{(j,k) \in I_l} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2|^2 \right) < \infty. \end{aligned}$$

Assim, $T_l(f) \in N_{\phi_l}$. A segunda afirmação do teorema segue diretamente do lema anterior combinado ao Teorema 1.1.3. $\blacksquare$

A observação abaixo revela a possibilidade de demonstrar, sem fazer menção ao espaço nativo, que a imagem do operador integral T_l só contém funções contínuas.

Observação 4.2.12. Seguindo o procedimento utilizado no Lema 4.2.10, pode-se mostrar que a aplicação $y \mapsto \phi_l(\cdot, y) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ é contínua. Os mesmos argumentos lá utilizados servem neste caso, porém devemos ficar atentos à norma utilizada. Em seguida, observando que

$$T_l(f)(y) = \langle f, \overline{\phi_l(\cdot, y)} \rangle_2, \quad y \in \mathbb{R}^d \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

podemos concluir que $T_l(f)$ é uma composição de funções contínuas, portanto contínua.

4.3 Uma base para o espaço nativo N_{ϕ_l}

Esta seção tem por finalidade exibir uma base ortonormal para o espaço nativo do núcleo em multiescalas. Tal discussão figura neste ponto por fazer uso das ferramentas apresentadas até aqui e de resultados da seção anterior.

Inicialmente, devemos observar que é possível completar o conjunto ortonormal $\{\varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ de forma a obter uma base ortonormal $\{\varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Assim, todo elemento f de $L^2(\mathbb{R}^d)$ pode ser escrito como

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2 \varphi_{j,k}.$$

Lema 4.3.1. *Se $g \in N_{\phi_l} \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, então*

$$\langle T_l(f), g \rangle_{\phi_l} = \langle f, g \rangle_2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Além disso, a norma dos elementos de $\text{Im } T_l$ no espaço nativo pode ser calculada pela fórmula

$$\|T_l(f)\|_{\phi_l}^2 = \overline{\langle T_l(f), f \rangle_2}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Demonstração: Para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, já temos a representação

$$T_l(f) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2 \varphi_{j,k}.$$

Relembrando notações anteriores, se $a = \{\lambda_j \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2\}_{(j,k) \in I_l}$, então $L(a) = T_l(f)$. Se $g \in N_{\phi_l}$, então podemos escrever

$$g = \sum_{(j,k) \in I_l} c_{j,k} \varphi_{j,k}.$$

Assim sendo, para f e g como acima

$$\begin{aligned} f(x) \overline{g(x)} &= \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2 \varphi_{j,k}(x) \right) \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{c_{j,k}} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{i,m} \rangle_2 \overline{c_{j,k}} \varphi_{i,m}(x) \overline{\varphi_{j,k}(x)}. \end{aligned}$$

Sendo $\{\varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ um conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$, obtemos

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x) = \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2 \overline{c_{j,k}}.$$

Relembrando o produto interno em $\ell_2^p(I_l)$ temos

$$\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{i,m} \rangle_2 \overline{c_{j,k}} = \langle a, c \rangle_{\ell_2^p},$$

onde $c = \{c_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$. Também, se $\mathcal{N}$ representa o núcleo da aplicação linear $L : \ell_2^p(I_l) \rightarrow N_{\phi_l}$, então

$$\begin{aligned} \langle a, c \rangle_{\ell_2^p} &= \langle p_{\mathcal{N}}(a) + p_{\mathcal{N}^\perp}(a), p_{\mathcal{N}}(c) + p_{\mathcal{N}^\perp}(c) \rangle_{\ell_2^p} \\ &= \langle p_{\mathcal{N}}(a), p_{\mathcal{N}}(c) \rangle_{\ell_2^p} + \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(a), p_{\mathcal{N}^\perp}(c) \rangle_{\ell_2^p}. \end{aligned}$$

Agora mostremos que $a \in \mathcal{N}^\perp$. De fato, se $b = \{b_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l} \in \mathcal{N}$, então

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle_{\ell_2^p} &= \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_2 \overline{b_{j,k}} \\ &= \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\varphi_{j,k}(x)} d\mu(x) \right) \overline{b_{j,k}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{b_{j,k}} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{L(b)(x)} d\mu(x) = 0, \end{aligned}$$

pois $L(b) = 0$. Desta forma, $p_{\mathcal{N}}(a) = 0$ e $\langle p_{\mathcal{N}}(a), p_{\mathcal{N}}(c) \rangle_{\ell_2^p} = 0$ implicando

$$\langle f, g \rangle_2 = \langle a, c \rangle_{\ell_2^p} = \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(a), p_{\mathcal{N}^\perp}(c) \rangle_{\ell_2^p}.$$

Relembrando o produto interno em N_{ϕ_l} e observando que $T_l(f) = L(a)$ e $g = L(c)$, concluímos que

$$\langle f, g \rangle_2 = \langle p_{\mathcal{N}^\perp}(a), p_{\mathcal{N}^\perp}(c) \rangle_{\ell_2^p} = \langle L(a), L(c) \rangle_{\phi_l} = \langle T_l(f), g \rangle_{\phi_l}.$$

A última afirmação do lema, segue do fato que $T_l(f) \in N_{\phi_l}$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Escrevendo

$$\|T_l(f)\|_{\phi_l}^2 = \langle T_l(f), T_l(f) \rangle_{\phi_l},$$

e aplicando resultado já demonstrado, obtemos

$$\|T_l(f)\|_{\phi_l}^2 = \langle f, T_l(f) \rangle_2 = \overline{\langle T_l(f), f \rangle_2}.$$

Isto finaliza a prova. ■

O resultado abaixo descreve autovalores e autofunções de T_l .

Teorema 4.3.2. *Cada função $\varphi_{j,k}$, $(j,k) \in I_l$, é uma autofunção do operador T_l . Fixado $j \geq l$, λ_j é autovalor associado a $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^d$.*

Demonstração: Se $(i,m) \in I_l$, o Lema 4.2.9 implica que

$$T_l(\varphi_{i,m})(y) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{j,k}(y) \langle \varphi_{i,m}, \varphi_{j,k} \rangle_2, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

A ortonormalidade da sequência $\{\varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ em $L^2(\mathbb{R}^d)$ nos dá

$$T_l(\varphi_{i,m})(y) = \lambda_i \varphi_{i,m}(y), \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

o que finaliza a prova. ■

Teorema 4.3.3. *O conjunto $\{\lambda_j^{1/2} \varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ forma uma base ortonormal para o espaço nativo N_{ϕ_l} .*

Demonstração: Primeiramente, verificaremos que o conjunto $\{\lambda_j^{1/2} \varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ forma um sistema ortonormal em N_{ϕ_l} . Já sabemos que

$$T_l(\varphi_{j,k}) = \lambda_j \varphi_{j,k}, \quad (j,k) \in I_l,$$

e, conseqüentemente, podemos escrever

$$\varphi_{j,k} = \lambda_j^{-1} T_l(\varphi_{j,k}), \quad (j,k) \in I_l.$$

Se $(j,k), (i,m) \in I_l$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{\lambda_j} \varphi_{j,k}, \sqrt{\lambda_i} \varphi_{i,m} \rangle_{\phi_l} &= \sqrt{\lambda_j} \sqrt{\lambda_i} \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{i,m} \rangle_{\phi_l} \\ &= \sqrt{\lambda_j} \sqrt{\lambda_i} \langle T_l(\lambda_j^{-1} \varphi_{j,k}), \varphi_{i,m} \rangle_{\phi_l} \end{aligned}$$

Como, $\varphi_{j,k} \in N_{\phi_l}$, $(j, k) \in I_l$, podemos aplicar o Lema 4.3.1, obtendo a igualdade

$$\langle T_l(\lambda_j^{-1}\varphi_{j,k}), \varphi_{i,m} \rangle_{\phi_l} = \langle \lambda_j^{-1}\varphi_{j,k}, \varphi_{i,m} \rangle_2$$

e, consequentemente,

$$\langle \sqrt{\lambda_j}\varphi_{j,k}, \sqrt{\lambda_i}\varphi_{i,m} \rangle_{\phi_l} = \sqrt{\lambda_j}\sqrt{\lambda_i}\langle \lambda_j^{-1}\varphi_{j,k}, \varphi_{i,m} \rangle_2.$$

Desta forma, se $(j, k) \neq (i, m)$, então $\langle \lambda_j^{-1}\varphi_{j,k}, \varphi_{i,m} \rangle_2 = 0$, implicando

$$\langle \sqrt{\lambda_j}\varphi_{j,k}, \sqrt{\lambda_i}\varphi_{i,m} \rangle_{\phi_l} = 0.$$

Agora, se $(j, k) = (i, m)$, então $\langle \lambda_i^{-1}\varphi_{i,m}, \varphi_{i,m} \rangle_2 = \lambda_i^{-1}$ e

$$\langle \sqrt{\lambda_i}\varphi_{i,m}, \sqrt{\lambda_i}\varphi_{i,m} \rangle_{\phi_l} = 1.$$

Resta provarmos que $\{\lambda_j^{1/2}\varphi_{j,k}\}_{(j,k) \in I_l}$ é um sistema completo. Para isto, seja $g \in N_{\phi_l}$ tal que

$$\langle g, \varphi_{j,k} \rangle_{\phi_l} = 0, \quad (j, k) \in I_l.$$

Pela propriedade de reprodução do núcleo ϕ_l , obtemos,

$$g(x) = \langle g, \phi_l(x, \cdot) \rangle_{\phi_l} = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \langle g, \varphi_{j,k} \rangle_{\phi_l} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

A prova está completa. ■

4.4 Outras propriedades do operador integral T_l

O primeiro resultado da seção ratifica que o operador T_l não é compacto. Lembramos que se $\mathcal{V}$ é um espaço de Banach, um operador linear $S : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ é **compacto** se a imagem de cada sequência limitada de $\mathcal{V}$ possui uma subsequência convergente. Este inconveniente não permite, por exemplo, o uso da rica teoria espectral para operadores compactos e autoadjuntos no caso presente, apesar do operador ter outras propriedades similares àquelas que os operadores compactos e autoadjuntos possuem.

Proposição 4.4.1. *O operador T_l não é compacto.*

Demonstração: Fixemos $j \geq l$ e consideremos a sequência $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$. Tal sequência é limitada em $L^2(\mathbb{R}^d)$ uma vez que

$$\|\varphi_{j,k}\|_2 = 1, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Por outro lado, se k, k' são elementos de $\mathbb{Z}^d$ e $k \neq k'$, então a ortogonalidade da família $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ implica que

$$\|T_l(\varphi_{j,k}) - T_l(\varphi_{j,k'})\|_2^2 = \lambda_j (\|\varphi_{j,k}\|_2^2 + \|\varphi_{j,k'}\|_2^2) = 2\lambda_j.$$

Segue que $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ não possui subsequência de Cauchy, portanto não possui subsequência convergente. ■

O teorema abaixo garante a positividade definida no sentido L^2 do núcleo ϕ_l .

Teorema 4.4.2. *O operador T_l é um operador positivo.*

Demonstração: Primeiramente observe que se $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ então

$$\begin{aligned} \langle T_l(f), f \rangle_2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi_l(x, y) f(y) d\mu(x) \right) \overline{f(y)} d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \varphi_{j,k}(y) f(x) d\mu(x) \right) \overline{f(y)} d\mu(y) \\ &= \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)} \varphi_{j,k}(y) f(x) d\mu(x) \right) \overline{f(y)} d\mu(y). \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini para iterar as integrais concluímos que

$$\langle T_l(f), f \rangle_2 = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{j,k}(y) \overline{f(y)} d\mu(y) \right|^2 \geq 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

como almejado. ■

Corolário 4.4.3. *O operador T_l é autoadjunto.*

Demonstração: Isto é garantido por um resultado clássico de Análise Funcional [16, p. 142]. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Aronszajn, N., Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.* 68 (1950), 337-404.
- [2] Berg, C., Christensen, J. P. R.; Ressel, P., Harmonic analysis on semigroups: theory of positive definite and related functions. Springer-Verlag, 1984.
- [3] Conway, J. B., Functions of one complex variable. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [4] Cucker, F.; Smale, S., On the mathematical foundations of learning. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 39 (2002), no. 1, 1-49.
- [5] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A., Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels. Integral equations and operator theory, aceito para publicação (2008).
- [6] Folland, G. B., Real analysis. Modern techniques and their applications. Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [7] Horn, R. A.; Johnson C. R., Matrix analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [8] Koornwinder, T. H., Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications. World Scientific, 1995.
- [9] Munkres, J. R., Topology: a first course. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [10] Opfer, R., Multiscale kernels. *Adv. Comput. Math.* 25 (2006), no. 4, 357-380.

-
- [11] Opfer, R., Multiscale kernels. Shaker Verlag, 2004.
 - [12] Opfer, R., Tight frame expansions of multiscale reproducing kernels in Sobolev spaces. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 20 (2006), no. 3, 357–374.
 - [13] Porter, D.; Stirling, D. S. G., Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
 - [14] Schaback, R., Native Hilbert spaces for radial basis functions. I. New developments in approximation theory (Dortmund, 1998), 255-282, Internat. Ser. Numer. Math., 132, Birkhäuser, Basel, 1999.
 - [15] Sun, H., Mercer theorem for RKHS on noncompact sets. *J. Complexity* 21 (2005), no. 3, 337-349.
 - [16] Young, N., An introduction to Hilbert space. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
 - [17] Weidmann, J., Linear operators in Hilbert spaces. Translated from the German by Joseph Szücs. Graduate Texts in Mathematics, 68. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
 - [18] Wojtaszczyk, P., A mathematical introduction to wavelets. London Mathematical Society Student Texts, 37. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Índice Remissivo

- I_l , 16
- $Im(L)$, 11, 18, 20
- J_l , 20
- N_{ϕ_l} , 18, 35
- T_l , 32, 33, 39
- V_j , 20
- $\#$, cardinalidade, 25
- ℓ_2 com pesos, 9
- $\ell_2(I)$, 8
- $\ell_2^p(I)$, 10
- $\ell_2^p(I_l)$, 18
- $\ker L$, 10
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, 11, 20
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell_2^p}$, 9, 18
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\phi_l}$, 34, 38
- $\mathcal{N}$, 11, 20
- $\text{Im } T_l$, 35
- $\text{supp } f$, 29
- $\| \cdot \|_L$, 12
- $\| \cdot \|_{V_m}$, 21
- $\| \cdot \|_\infty$, 16
- $\| \cdot \|_{\phi_l}$, 18, 33
- ϕ_l , 17, 27
- $\varphi_{j,k}$, 16, 38
- p_F , projeção sobre o subespaço F , 4
- $p_{\mathcal{N}}$, projeção sobre o subespaço $\mathcal{N}$, 11
- condição de somabilidade, 7, 12
- Desigualdade
 - de Cauchy-Schwarz, 8, 10
 - de Hölder, 29
- determinante, 4
- equação de refinamento, 19
- espaço
 - de Hilbert, 11, 20, 31
 - vetorial, 20
- espaço nativo, 2, 9
 - do núcleo de Mercer, 12
 - do núcleo em multiescalas, 18, 33
 - núcleo em finitas multiescalas, 21
- família de funções
 - ortonormal, 27
 - separa pontos, 8, 16
- família localmente finita, 29
- função
 - de suporte compacto, 16
 - refinável, 19, 21
- máscara de refinamento, 19
- multiescalas, 15
- núcleo, 1
 - de Mercer, 8, 9, 17, 20
 - de reprodução, 2
 - de transformação linear, 10

- em finitas multiescalas, 19
- em multiescalas, 17, 30
- estritamente positivo definido, 1, 8
- hermitiano, 1
- positivo definido, 1, 8
- norma, 12
 - do máximo, 16
 - minimal, 4
- operador
 - compacto, 39
 - positivo, 40
- operador integral
 - gerado por um núcleo, 28
 - limitado, 32
- produto interno
 - em ℓ_2^p , 9
 - em $\ell_2^p(I_l)$, 18
 - em $Im(L)$, 11, 20
- subespaço
 - vetorial fechado, 10
- Teorema
 - de Fubini, 29
 - de Mercer, 7
- transformação linear, 10