Atratores para sistemas dinâmicos
discretos: dimensão fractal e continuidade
da estrutura por perturbações

Matheus Cheque Bortolan

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Atratores para sistemas dinâmicos discretos: dimensão fractal e continuidade da estrutura por perturbações

Matheus Cheque Bortolan

Orientador: *Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP – São Carlos
Abril/2009

“Bom mesmo é ir à luta com determinação, abraçar a vida e viver com paixão, perder com classe e viver com ousadia. Pois o triunfo pertence a quem se atreve, e a vida é muito bela para ser insignificante.”

Charles Chaplin

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer à Deus e à minha família, que sempre me deram força, coragem e apoio incondicional para eu seguir em frente, mesmo nas horas mais difíceis. Amo demais todos vocês!

Agradeço também à minha mais que namorada, amiga, confidente, Juliana, por sempre estar comigo e ter me ajudado em todos os sentidos para que este trabalho fosse realizado, pela confiança, carinho nos momentos ruins e bons, pelas broncas nas horas certas, conselhos, por dividir sua história comigo, por todo seu amor! Amo-te muito! Obrigado por fazer parte da minha vida!

Agradeço à todos os professores, em especial ao meu orientador prof. Hildebrando e ao prof. Alexandre, por me ajudarem a trilhar este caminho difícil, mas que no final, é compensador. Nada disso teria acontecido sem vocês, muito obrigado!

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro à este trabalho.

Aos amigos que fiz nessa jornada e que nunca irei esquecer, Moreno P. Bonutti, pelas horas de “estudo” e risadas, pelos almoços e churrascos e por se revelar amigo para todas as horas. Rodrigo Pedra Brum, que muitas vezes deixava de estudar para me ajudar com problemas computacionais e me animava com longas conversas. À turma da sala 4-009, em especial para Fábio, Paulo e Marcos, por seus vários conhecimentos em matemática, e claro em jogos e internet.

Enfim, se for agradecer a cada um, não acabaria nunca, pois são tantas as pessoas especiais que passaram e marcaram esta jornada...

A todos vocês, muitíssimo obrigado!!!

Resumo

Neste trabalho, estudamos uma generalização dos semigrupos discretos gradientes, os *semigrupos gradient-like*, algumas de suas propriedades e a sua invariância por pequenas perturbações; isto é, perturbações pequenas de sistemas gradient-like continuam sendo gradient-like. Como consequência da caracterização dos atratores para este tipo de sistema, estudamos a atração exponencial de atratores. Por fim, estudamos os conceitos de dimensão de Hausdorff e dimensão fractal de atratores e apresentamos alguns resultados sobre esse assunto, e estudamos a construção de uma nova classe de atratores, os atratores exponenciais fractais.

Abstract

In this work, we study a generalization of gradient discrete semigroups, the *gradient-like semigroups*, some of its properties and its invariance under small perturbations; that is, small perturbations of gradient-like semigroups are still gradient-like semigroups. As a consequence of the characterization of the attractors for this sort of semigroups, we study the exponential attraction of attractors. Finally, we study some concepts of Hausdorff dimension and fractal dimension and present some results about this subject, and we studied the construction of a new class of attractors, the exponential fractal attractors.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Resultados básicos de Análise	5
1.2 Noções básicas e fatos	6
2 Atratores para semigrupos discretos	17
2.1 Existência de atratores para semigrupos discretos	17
2.2 Semicontinuidades superior e inferior de atratores	18
2.3 Semigrupos discretos gradientes	22
2.4 Semigrupos discretos gradient-like	25
2.5 Atratores exponenciais	40
2.6 Taxa de convergência de atratores exponenciais	44
3 Dimensão fractal e dimensão de Hausdorff de atratores	47
3.1 Dimensão, dimensão de Hausdorff e dimensão fractal	48
3.2 Projeções de conjuntos compactos com dimensão fractal finita	53
3.3 Dimensão de conjuntos compactos negativamente invariantes	57
4 Construção de atratores exponenciais fractais	71

Introdução

Em meio aos semigrupos existe a classe dos semigrupos gradientes, que são semigrupos aos quais temos associada uma função de Liapunov. Para estes semigrupos existem resultados que caracterizam os atratores de forma geral; mais especificamente, os atratores para este tipo de sistema são uniões de conjuntos instáveis de pontos de equilíbrio, no caso em que o conjunto dos pontos de equilíbrio é finito. Recordemos que o conjunto instável $W^u(e^*)$ de um ponto de equilíbrio e^* é o conjunto de pontos do espaço de fase pelos quais existe uma órbita para trás que converge para o ponto de equilíbrio e^* (quando o tempo tende para $-\infty$). Estes resultados estão fortemente firmados sobre a existência da função de Liapunov. O problema que surge quando introduzimos uma certa perturbação a um semigrupo gradiente é que podemos perder a função de Liapunov no problema perturbado.

Assim, este trabalho tem como objetivo introduzir uma noção que estenda o conceito de semigrupos discretos gradientes, os *semigrupos discretos gradient-like*, de maneira que esta noção preserve a propriedade da caracterização dos atratores; isto é, os atratores para este tipo de problema continuem com a estrutura gradiente, mas de tal forma que este novo conceito seja estável por pequenas perturbações.

Esta construção deixa para trás a função de Liapunov propriamente dita e estuda quais são as estruturas dinâmicas que ela introduz nos atratores, que são:

- as órbitas, tanto para frente quanto para trás, convergem para pontos de equilíbrio;
- não existem contornos fechados formados por órbitas no atrator.

Ao olharmos somente estas propriedades, podemos definir o conceito de semigrupo gradient-like à partir delas e verificar que elas são estáveis por meio de perturbações. Os

atratores dos semigrupos nesta classe possuem, como consequência de sua estrutura, outras propriedades dinâmicas bastante interessantes. Entre essas propriedades destacamos a atração exponencial, que explicamos a seguir.

Atratores exponenciais *Com a caracterização do atrator através das variedades instáveis $W^u(e_i^*)$, de pontos de equilíbrio e_i^* , $1 \leq i \leq n$, podemos estudar como estas variedades instáveis atraem as órbitas em sua vizinhança. Suponhamos que tenhamos uma atração com taxa exponencial; isto é, para alguma vizinhança pequena V de e_i^**

$$\text{dist}(T^n(u_0), W^u(e_i^*) \cap V) \leq ce^{-k_in},$$

durante o tempo no qual a órbita $T^n(u_0)$ permanece em V . Podemos então concluir que conjuntos limitados são atraídos exponencialmente pelo atrator $\mathcal{A}$; isto é, se B é um conjunto limitado, então

$$\text{dist}(T^n(B), \mathcal{A}) \leq Ce^{-\omega n},$$

onde ω é uma constante positiva e C é uma constante positiva que depende de B . Mais ainda, se tivermos uma família de atratores a um parâmetro η e a atração exponencial discutida acima for uniforme com relação a este parâmetro temos então a atração destes atratores; ou seja,

$$\text{dist}(A_\eta, A_0) \leq L\epsilon(\eta)^r,$$

onde L e r são constantes positivas e $\epsilon(\eta)$ mede a proximidade entre os semigrupos $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Não é difícil ver que para um atrator num semigrupo discreto gradient-like, a dimensão de Hausdorff do atrator $\mathcal{A}$ é o máximo das dimensões dos conjuntos instáveis $W^u(e_i^*)$, onde $\mathcal{E} = \{e_1^*, \dots, e_k^*\}$ é o conjunto dos pontos de equilíbrio do semigrupo. Sabemos ainda que se um espaço métrico compacto tem dimensão topológica finita m então ele pode ser imerso em $\mathbb{R}^{2m+1}$ (vide Munkres [18]). Assim gostaríamos de saber, em vista deste resultado, se o mesmo é válido para conjuntos compactos com dimensão de Hausdorff finita. Infelizmente, este não é o caso. Para isto precisamos introduzir o conceito de dimensão fractal, e devido a um resultado de Mañé [17] podemos projetar conjuntos compactos com dimensão fractal finita n , de maneira injetiva, em um espaço vetorial de dimensão finita maior que $2n+1$. Por fim, construímos os chamados *atratores exponenciais fractais*, que são uma extensão do conceito de atratores exponenciais para semigrupos gerais (não

necessariamente gradient-like). Sabemos que nem todo atrator para um semigrupo tem a característica de atrair exponencialmente as órbitas, mas podemos pedir um pouco menos na definição da atrator (no nosso caso, excluir a invariância e pedir somente a invariância positiva) a fim de tornar viável a atração exponencial. Mas para que este atrator continue com boas propriedades, por exemplo poder ser projetado de forma injetiva num espaço de dimensão finita, pedimos também para que este objeto tenha dimensão fractal finita. Os resultados que apresentaremos neste trabalho são uma versão corrigida e simplificada dos resultados contidos no primeiro capítulo de Eden-Foias-Nicolaenko-Temam [9].

Este trabalho tem como principal objetivo estudar e generalizar o conteúdo do Capítulo 2 de Hale [12]. Em particular, os resultados sobre dimensão fractal apresentados nesta referência são corrigidos e melhorados seguindo Carvalho-Langa-Robinson [6]. Os resultados relacionados a sistemas discretos gradientes não se encontram nesta referência, bem como os resultados relacionados a continuidade de atratores usando a atração uniforme. Para este último, os análogos no caso contínuo podem ser encontrados em Babin-Vishik [1]. Os resultados sobre gradient-like têm sua versão análoga para o caso contínuo no artigo de Carvalho-Langa [4].

Preliminares

1.1 Resultados básicos de Análise

Nesta seção pretendemos abordar alguns resultados básicos de espaços métricos e análise funcional relacionados aos espaços de Banach, que serão bastante usados. Vamos admitir que o leitor tenha um conhecimento básico nesta área, como a definição e algumas propriedades básicas de espaços de Banach e operadores lineares limitados. Os resultados serão somente enunciados, sendo omitidas as suas demonstrações, podendo estas ser encontradas em Brezis [3] e Rudin [20].

Teorema 1.1.1 (Princípio da Contração de Banach). *Seja X um espaço métrico completo, $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ sua métrica e $T : X \rightarrow X$ uma função tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq C d(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

para algum $0 \leq C < 1$. Então T possui um único ponto fixo x^ em X ; isto é, existe um único x^* em X tal que $Tx^* = x^*$.*

Teorema 1.1.2. *Seja X um espaço métrico completo. Um subconjunto $A \subset X$ é relativamente compacto se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existe um subconjunto relativamente compacto $A_\epsilon \subset X$ tal que $A \subset \mathcal{O}_\epsilon(A_\epsilon)$, onde $\mathcal{O}_\epsilon(A_\epsilon)$ é a vizinhança de raio ϵ de A_ϵ .*

Teorema 1.1.3 (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Então T é limitada se, e somente se $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \times Y$ é fechado em $X \times Y$ com a topologia produto.*

1.2 Noções básicas e fatos

Nesta seção introduzimos a noção de atratores para semigrupos discretos dissipativos não-lineares. Nosso objetivo é apresentar uma coleção auto-suficiente de resultados sobre o assunto, que são necessários para o estudo de atratores para semigrupos discretos e suas propriedades. Todas as definições e resultados serão feitos visando o resultado principal desta seção, que caracteriza os semigrupos discretos que têm atratores globais.

Seja X um espaço métrico e $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ sua métrica. Denote por $\mathcal{C}(X)$ o conjunto dos operadores contínuos de X em X , por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais, por $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ o conjunto dos números naturais sem o zero, por $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ o conjunto dos números inteiros, por $\mathbb{Z}^- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ o conjunto dos números inteiros não-positivos e por $\mathbb{Z}_n^- = n + \mathbb{Z}^-$ ($\mathbb{Z}_n^+ = n + \mathbb{N}$) o conjuntos dos números inteiros que são menores (maiores) ou iguais à n , $n \in \mathbb{Z}$. Se $T \in \mathcal{C}(X)$, a família de operadores $\{T^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(X)$ será chamada um *semigrupo discreto*.

Para um dado semigrupo $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, um ponto $x \in X$ e um subconjunto $B \subset X$, definimos:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, a *imagem* de B sobre T^n ,

$$T^n(B) := \{T^n(x) : x \in B\};$$

- A *órbita positiva* de B ,

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n(B);$$

- A *órbita parcial* entre dois números naturais n e n' ,

$$\gamma_{[n, n']}^+(B) := \bigcup_{n \leq k \leq n'} T^k(B);$$

- A órbita de $T^n(B)$,

$$\gamma_n^+(B) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T^{k+n}(B).$$

- A função $\mathbb{N} \ni n \mapsto T^n(x) \in X$ é a *solução* através de x do problema discreto de valor inicial

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= T(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \\ x_0 &= x. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Definição 1.2.1. Um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é dito limitado se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B é um subconjunto limitado de X .

Observação 1.2.2. Os operadores $T \in \mathcal{C}(X)$ não precisam ser limitados em subconjuntos limitados de X , uma vez que subconjuntos limitados de X não são necessariamente relativamente compactos. Se assumirmos que T é limitado em subconjuntos limitados de X , então $\gamma_{[n,n']}^+(B)$ é limitado para cada subconjunto limitado B de X e $n, n' \in \mathbb{N}$. Ainda assim, o semigrupo $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ não é necessariamente limitado.

Agora definimos *solução para trás* através de um ponto $x \in X$ e *órbita para trás* de um subconjunto B de X .

Definição 1.2.3. Uma solução para trás através de $x \in X$ é uma função $\phi : \mathbb{Z}^- \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $k \in \mathbb{Z}^-$, $T^n(\phi(k)) = \phi(n+k)$ para $0 \leq n \leq -k$. Uma solução global através de $x \in X$ é uma função $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $T^n(\phi(k)) = \phi(n+k)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como T não é necessariamente injetiva, se uma solução para trás existe ela não precisa ser única. Se existe uma solução para trás através de x , podemos definir a órbita negativa de $x \in X$ como

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H(n, x),$$

onde

$$H(n, x) = \{y \in X : \text{existe uma solução para trás } \phi : \mathbb{Z}^- \rightarrow X \text{ através de } x \text{ com } \phi(-n) = y\}.$$

A órbita global através de x (se ela existe) é definida como $\gamma(x) := \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.

Se $B \subset X$ é tal que existe uma solução para trás através de cada ponto $x \in B$, a órbita negativa de B é definida por $\gamma^-(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x)$ e a órbita global de B é definida por $\gamma(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma(x)$.

Podemos definir os conjuntos ω -limite e α -limite como segue

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\gamma_n^+(x)}, & \omega(B) &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\gamma_n^+(B)}, \\ \alpha(x) &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\gamma_n^-(x)}, & \alpha(B) &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\gamma_n^-(B)},\end{aligned}$$

onde se $D \subset X$, $\overline{D}$ denota o fecho do conjunto D em X .

A seguinte caracterização do conjunto ω -limite será frequentemente usada

Proposição 1.2.4. *Para cada subconjunto B de X , temos*

$$\begin{aligned}\omega(B) = \{y \in X : \text{ existem sequências } \{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{N} \\ \text{e } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } B, \text{ tal que } k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e } y = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^{k_n}(x_n)\}.\end{aligned}$$

Demonstração: Primeiramente, seja $y \in \omega(B)$. Então $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\gamma_n^+(B)}$, e assim $y \in \overline{\gamma_n^+(B)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$; isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $\{y_k^n\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, e logo existem $\{x_k^n\}_{n,k \in \mathbb{N}} \subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tais que

$$y_k^n = T^{n+q_k^n}(x_k^n).$$

Sabemos que dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $k_{(n,\epsilon)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y_k^n - y\| < \epsilon, \text{ se } k \geq k_{(n,\epsilon)},$$

isto é, $\|T^{n+q_k^n}(x_k^n) - y\| < \epsilon$ se $k \geq k_{(n,\epsilon)}$. Defina então $k_n := n + q_{k_{(n,\frac{1}{n})}}^n$ e $x_n := x_{k_{(n,\frac{1}{n})}}^n$, assim

$$\|T^{k_n}x_n - y\| < \frac{1}{n} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Portanto $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{k_n}x_n$. Para a recíproca, seja $y \in X$ tal que existam sequências $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tais que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{k_n}x_n$. Assim, fixado $p \in \mathbb{N}$ temos

$\{T^{k_n}(x_n)\}_{k_n \geq p} \subset \gamma_p^+(B)$, assim $y \in \overline{\gamma_p^+(B)}$, para todo $p \in \mathbb{N}$, portanto $y \in \omega(B)$. ■

A seguir definimos as noções de atração, absorção e invariância sobre o semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$. Para este fim, relembremos as definições da *semi-distância de Hausdorff* $\text{dist}_H(A, B)$ entre dois subconjuntos A e B de X

$$\text{dist}_H(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Denotaremos por $\text{dist}(A, B)$ a distância usual entre conjuntos; isto é,

$$\text{dist}(A, B) := \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Relembremos também a definição da *medida de não-compactidade de Kuratowski* para conjuntos limitados segundo Deimling [8]

$$\beta(B) = \inf\{d > 0 : B \text{ admite cobertura finita por conjuntos} \\ \text{de diâmetro menor ou igual a } d\};$$

que tem como principais propriedades:

- (a) $\beta(B) = 0$ se e somente se $\overline{B}$ é compacto,
- (b) β é uma seminorma; isto é, $\beta(\lambda B) = |\lambda|\beta(B)$ e $\beta(B_1 + B_2) \leq \beta(B_1) + \beta(B_2)$,
- (c) se $B_1 \subset B_2$ então $\beta(B_1) \leq \beta(B_2)$ e $\beta(B_1 \cup B_2) = \max\{\beta(B_1), \beta(B_2)\}$

Definição 1.2.5. *Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico X . Dizemos que A atrai B sobre o semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}_H(T^n(B), A) = 0.$$

Se existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(B) \subset A$ para todo $n \geq n_0$, dizemos que A absorve B . Em particular, se A absorve B , então A atrai B (a recíproca não é verdadeira). Dizemos que um subconjunto A de X é invariante (ou positivamente invariante ou negativamente invariante) com respeito ao semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ se $T(A) = A$ (ou $T(A) \subset A$ ou $T(A) \supset A$). Um ponto fixo x^ para T ; isto é, um ponto $x^* \in X$ tal que $T(x^*) = x^*$ é*

invariante sobre $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$. Um ponto fixo para a aplicação T será também chamado um ponto de equilíbrio ou um equilíbrio para o semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathbb{Z} \ni n \mapsto x^* \in X$ é uma solução estacionária ou uma solução de equilíbrio para o semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Proposição 1.2.6. *Seja K um subconjunto compacto de X e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência em X tal que*

$$\text{dist}(x_n, K) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente. Se K atrai um conjunto compacto K_1 , então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\emptyset \neq \omega(K_1) \subset K$.

Demonstração Para a primeira parte, notemos que dado $m \in \mathbb{N}$, existem $n_m \in \mathbb{N}$ e $y_{n_m} \in K$ tais que $\text{dist}(x_{n_m}, K) < \frac{1}{2m}$ e $d(x_{n_m}, y_{n_m}) < \text{dist}(x_{n_m}, K) + \frac{1}{2m} < \frac{1}{m}$. Como $\{y_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em K , que é compacto, $y_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y_0 \in K$, a menos de subsequências. Assim, obtemos

$$d(x_{n_m}, y_0) \leq d(x_{n_m}, y_{n_m}) + d(y_{n_m}, y_0) \longrightarrow 0, \text{ quando } m \rightarrow \infty;$$

isto é, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Agora, para a segunda parte, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(K_1) \subset \mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde $\mathcal{O}_\epsilon(K)$ denota a ϵ -vizinhança do conjunto K . Assim, $\cup_{n \geq n_0} T^n(K_1)$ tem medida de não-compacidade menor ou igual à ϵ . Segue facilmente do fato que $\cup_{n=1}^{n_0-1} T^n(K_1)$ é compacto, que a medida de não-compacidade de $\gamma^+(K_1)$ é nula, o que nos dá $\gamma^+(K_1)$ relativamente compacto.

Finalmente, temos $\overline{\gamma_n^+(K_1)}$ compacto e não-vazio, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\overline{\gamma_n^+(K_1)} \subset \overline{\gamma_m^+(K_1)}$ para $m \leq n$, ou seja, a família $\{\overline{\gamma_n^+(K_1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui a propriedade da interseção finita e assim

$$\omega(K_1) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\gamma_n^+(K_1)} \neq \emptyset.$$

Dados $y \in \omega(K_1)$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$y \in \overline{\gamma_{n_0}^+(K_1)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(K),$$

assim $\text{dist}(y, K) \leq \epsilon$ e como ϵ é arbitrário, segue o resultado. ■

Lema 1.2.7. *Se $B \subset X$, então $T(\omega(B)) \subset \omega(B)$. Se B é tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B , então $\omega(B)$ é invariante. Ainda mais, se $\omega(B)$ atrai um conjunto conexo C que contém $\omega(B)$, então $\omega(B)$ é conexo. Similarmente, $T(\alpha(B)) \subset \alpha(B)$ e se $\alpha(B)$ é compacto $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}_H(H(n, B), \alpha(B)) \rightarrow 0$, então $\alpha(B)$ é invariante.*

Demonstração: Se $\omega(B) = \emptyset$, não há nada a mostrar. Se $\omega(B) \neq \emptyset$, obtemos da continuidade de T que se $y \in \omega(B)$ então existem sequências $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tais que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{k_n} x_n$ e assim $Ty = T(\lim_{n \rightarrow \infty} T^{k_n} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^{k_n} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{k_n+1} x_n \in \omega(B)$ e portanto $T(\omega(B)) \subset \omega(B)$.

Nos resta mostrar que, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B , então $\omega(B) \subset T(\omega(B))$. Para $x \in \omega(B)$, existem sequências $k_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in B$ tais que $T^{k_n}(x_n) \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Uma vez que $k_n \rightarrow \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_n > 1$ para todo $n \geq n_0$. Portanto $T(T^{k_n-1}(x_n)) = T^{k_n}(x_n) \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B temos $\text{dist}(T^{k_n-1}(x_n), \omega(B)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Segue da Proposição 1.2.6 que $\{T^{k_n-1}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente (que denotaremos novamente por $\{T^{k_n-1}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$). Se $T^{k_n-1}(x_n) \rightarrow y \in \omega(B)$, então $Ty = x$. Portanto, $\omega(B) = T(\omega(B))$.

Agora provemos a afirmação sobre a conexidade de $\omega(B)$. Suponha que $\omega(B)$ é desconexa, então $\omega(B)$ é a união disjunta de dois conjuntos compactos (portanto separados por uma distância positiva), mas $\omega(B)$ atrai C , logo $\text{dist}_H(T^n(C), \omega(B)) \rightarrow 0$, mas isto implica que $T^n(C)$ deve estar contido em ambas as componentes de $\omega(B)$ para n suficientemente grande, e isto é uma contradição com o fato de que $T^n(C)$ é conexo.

A demonstração para o caso $\alpha(B)$ é completamente análoga. ■

Observação 1.2.8. *Segue imediatamente da primeira parte do Lema 1.2.7 que, se $x \in X$ e $\omega(x) = \{x^*\}$, então x^* é um equilíbrio (ponto fixo de T). Um resultado similar se verifica para $\alpha(x)$ (também para $\alpha_\phi(x)$ definido a seguir no Lema 1.2.10).*

Lema 1.2.9. *Se B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\overline{\gamma_{n_0}^+(B)}$ é compacto, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B .*

Demonstração: Como $\overline{\gamma_n^+(B)}$ é não-vazio e compacto, $n \geq n_0$, temos que $\omega(B)$ é não-vazio e compacto, uma vez que uma família de conjuntos compactos com a propriedade da interseção finita tem interseção compacta e não-vazia.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B . Suponha que não, então existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ em B , $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{N}$ com $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tais que $d(T^{k_n}(x_n), \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{\gamma_{n_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T^{k_n}(x_n), n \geq n_1\} \subset \overline{\gamma_{n_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subsequências $k_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ e $x_{n_j} \in B$ tais que $T^{k_{n_j}}(x_{n_j})$ converge para $y \in \omega(B)$. Isto nos leva a uma contradição e mostra que $\omega(B)$ atrai B .

Segue agora do Lema 1.2.7 que $\omega(B)$ é invariante e a prova está completa. ■

Lema 1.2.10. *Suponha que $x \in X$ é tal que existe uma solução para trás $\phi : \mathbb{Z}^- \rightarrow X$ através de x e tal que $\overline{\phi(\mathbb{Z}^-)}$ é compacto. Defina*

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X : \exists k_n \rightarrow \infty \text{ tal que } \phi(-k_n) \rightarrow v\}.$$

Então, $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio, compacto e invariante.

Demonstração: Claramente podemos ver que $\alpha_\phi(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\phi(\mathbb{Z}_{-n}^-)}$ e disto segue imediatamente que $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio e compacto.

Falta ainda provar que $\alpha_\phi(x)$ é invariante. De fato, se $y \in \alpha_\phi(x)$, então existe uma sequência $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ tal que $\phi(-k_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Da continuidade de $T : X \rightarrow X$ obtemos que $T(\phi(-k_n)) = \phi(-k_n + 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(y)$ e portanto $T(y) \in \alpha_\phi(x)$. Por outro lado, se $w \in \alpha_\phi(x)$, existe uma sequência $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ (assuma que $k_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$) tal que $\phi(-k_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$. Como $\{\phi(-k_n - k) : k \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, tomando subsequências se necessário, existe $z \in X$ tal que $\phi(-k_n - k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ e $z \in \alpha_\phi(x)$. Segue da unicidade do limite que $T^k(z) = w$. ■

Outro conceito importante é

Definição 1.2.11. *Um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é dito assintoticamente compacto se, para qualquer subconjunto fechado, limitado e não-vazio $B \subset X$, para o qual $T(B) \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B .*

Proposição 1.2.12. *Um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é assintoticamente compacto se $\{T^{k_n}x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto sempre que $\{T^{k_n}x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em X e $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.*

Demonstração: Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não-vazio tal que $T(B) \subset B$. Então, segue do Lema 1.2.9 que $\omega(B) \subset B$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B , pois as hipóteses nos garantem que $\overline{\gamma_{n_0}^+(B)}$ é compacto, para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$. ■

Lema 1.2.13. *Se $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto assintoticamente compacto e B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\gamma_{n_0}^+(B)$ é limitado, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B .*

Demonstração: Como $T(\gamma_{n_0}^+(B)) \subset \gamma_{n_0}^+(B)$, segue da continuidade de $T^k : X \rightarrow X$ que $\omega(B) \subset T^k(\overline{\gamma_{n_0}^+(B)}) \subset \overline{\gamma_{n_0}^+(B)}$. Como $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é assintoticamente compacto temos que existe um compacto $J \subset \overline{\gamma_{n_0}^+(B)}$ que atrai $\gamma_{n_0}^+(B)$. Logo, existem sequências $\epsilon_n \rightarrow 0$ e $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tais que $T^k(\overline{\gamma_{n_0}^+(B)}) \subset \mathcal{O}_{\epsilon_n}(J)$ para todo $k \geq k_n$. Assim, $\omega(B) \subset J$. Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, temos que $\omega(B)$ é compacto.

Nos resta mostrar que $\omega(B)$ atrai B . Se não, existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $x_n \in B$ e $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tais que $d(T^{k_n}(x_n), \omega(B)) > \epsilon_0$. Da compacidade de J e da Proposição 1.2.6, existem sequências $x_{n_j} \in B$, $k_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ e $z \in J$ tais que $T^{k_{n_j}}(x_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} z \in \omega(B)$. Isto nos leva à uma contradição $\omega(B)$ atrai B . Portanto, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto e atrai B e do Lema 1.2.7, segue a invariância. ■

Definição 1.2.14. *Um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é dito condicionalmente eventualmente compacto, se para cada conjunto limitado $B \subset X$ tal que $T^n(B)$ é limitado para algum $n \in \mathbb{N}$, nós temos que $\overline{T^n(B)}$ é compacto. Um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é dito eventualmente compacto se é condicionalmente eventualmente compacto e para cada conjunto limitado B em X , existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(B)$ é um subconjunto limitado de X .*

Teorema 1.2.15. *Um semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente compacto.*

Demonstração: Seja $B \subset X$ um conjunto não-vazio, fechado e limitado tal que $T(B) \subset B$. Então, como $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é condicionalmente eventualmente compacto temos que $\overline{\gamma_n^+(B)}$ é compacto para um n suficientemente grande. Assim, do Lema 1.2.9, $\omega(B) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\gamma_n^+(B)} \subset B$ é não-vazio, compacto e atrai B . Isto nos mostra que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é assintoticamente compacto. ■

Definição 1.2.16. *Um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é dito ponto dissipativo (limitado dissipativo /compacto dissipativo) se existe um subconjunto limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos).*

Observação 1.2.17. Na definição acima podemos trocar a palavra *atrai* pela palavra *absorve* sem mudar os significados dos conceitos. De fato, se um subconjunto limitado $B \subset X$ atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos), então a vizinhança $\mathcal{O}_\epsilon(B)$, com $\epsilon > 0$, absorve pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos). Claramente, se B absorve pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos), então B atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos).

Definição 1.2.18. Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto em um espaço métrico X . Um conjunto $\mathcal{A}$ é chamado um atrator global para $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X .

Neste ponto vale notar a unicidade do atrator global para um semigrupo $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ dois atratores globais para este semigrupo. Assim

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) = \text{dist}_H(T^n(\mathcal{A}), \mathcal{A}^*) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

e assim $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Analogamente $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$, e temos o resultado.

Observação 1.2.19. Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto em um espaço métrico X . Assuma que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tenha um atrator $\mathcal{A}$. Afirmamos que através de cada ponto $x \in \mathcal{A}$ existe uma solução global limitada $\phi_x : \mathbb{Z} \rightarrow X$. De fato, a órbita para frente está sempre bem definida e é limitada; agora, seja $x \in \mathcal{A} = T(\mathcal{A})$, assim existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $Tx_{-1} = x$ e procedendo indutivamente, conseguimos uma sequência $\{x_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_0 = x$ e $Tx_{-n-1} = x_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto contruímos uma órbita para trás (lembrando que esta órbita não é unicamente determinada). Defina então

$$\phi_x(j) = \begin{cases} T^j x, & j \geq 0 \\ x_j, & j < 0 \end{cases},$$

que é uma órbita limitada em $\mathcal{A}$ passando por x .

Reciprocamente, cada solução global limitada $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ para $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é tal que $\phi(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{A}$. Tendo dito isto, concluimos que

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \text{existe uma solução global limitada através de } x\}$$

Lema 1.2.20. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Assuma que para cada subconjunto compacto B de X existe um $n_B \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_{n_B}^+(B)$ é limitado. Então $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é compacto dissipativo.*

Demonstração: Como $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio, fechado e limitado B que absorve pontos de X . Seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Como B absorve pontos, temos que U é não-vazio. Claramente $\gamma^+(U) \subset U$ e portanto $U = \gamma^+(U)$ é limitado e absorve pontos. Sabemos também que $T(\overline{\gamma^+(U)}) \subset \overline{\gamma^+(U)}$ e que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é assintoticamente compacto. Portanto, existe um conjunto compacto K , com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \bar{U}$, tal que K atrai U e portanto K atrai pontos de X .

O conjunto K atrai a si mesmo (pois atrai $\bar{U}$ e $K \subset U$) e assim (veja a Proposição 1.2.6) $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K) \subset K$. O Lema 1.2.9 implica que $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai K . Portanto $\omega(K)$ atrai K que atrai pontos de X e consequentemente $\omega(K)$ atrai pontos de X .

Mostremos agora que existe uma vizinhança V de $\omega(K)$ tal que $\gamma_n^+(V)$ é limitado para algum $n \in \mathbb{N}$. Se esse não é o caso, existem sequências $x_n \in X$, $x_n \rightarrow y \in \omega(K)$ e $k_n \rightarrow \infty$ tais que $\{T^{k_n}(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitada. Considere $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo $\bar{A}$ é compacto e $\gamma_n^+(\bar{A})$ é não-limitada para cada $n \in \mathbb{N}$. Isto contradiz a hipótese de que existe $n_{\bar{A}}$ tal que $\gamma_{n_{\bar{A}}}^+(\bar{A})$ é limitado.

Seja V uma vizinhança de $\omega(K)$ e $n_V \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_{n_V}^+(V)$ é limitado. Como $\omega(K)$ atrai pontos de X e T^n é contínua, para todo $x \in X$ existem $n_x > 0$ e uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x tais que $T^{n_x}(\mathcal{O}_x) \subset \gamma_{n_V}^+(V)$. Logo, $T^{k+n_x}(\mathcal{O}_x) \subset T^k(\gamma_{n_V}^+(V)) \subset \gamma_{n_V}^+(V)$ para todo $k \in \mathbb{N}$; isto é, $T^n(\mathcal{O}_x) \subset \gamma_{n_V}^+(V)$ para todo $n \geq n_x$, e portanto $\gamma_{n_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$. Se $K \subset X$ é um conjunto compacto, para cada $x \in K$ existe $\mathcal{O}_x$ como acima. Segue que existem $\{x_i\}_{i=1}^p \in K$ tais que $K \subset \cup_{i=1}^p \mathcal{O}_{x_i}$ e portanto $T^n(K) \subset \gamma_{n_V}^+(V)$, para $n \geq \max \{n_{x_i} : 1 \leq i \leq p\}$, onde $n_{x_i} > 0$ é dado como acima, para cada $i = 1, \dots, p$. Concluimos assim que $\gamma_{n_V}^+(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é compacto dissipativo. ■

Proposição 1.2.21. *Seja X um espaço métrico e $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto em X . Se K é compacto atrai a si mesmo sobre $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, então $\omega(K) = \cap_{n \in \mathbb{N}} T^n(K)$.*

Demonstração: Claramente $\cap_{n \in \mathbb{N}} T^n(K) \subset \omega(K)$. Agora, para a inclusão contrária, usamos a Proposição 1.2.6 com $K_1 = K$ para garantir que $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto. Do Lema 1.2.9 temos que $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e

atrai K . Assim

$$\omega(K) = T^n(\omega(K)) \subset T^n(K), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que prova o nosso resultado. ■

Definição 1.2.22. *Um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é dito eventualmente limitado se para cada subconjunto limitado B de X existe $n_B \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_{n_B}^+(B)$ é um subconjunto limitado de X .*

Finalizamos esta seção com o resultado principal que estávamos buscando, que dá uma caracterização dos semigrupos que possuem atratores globais.

Teorema 1.2.23. *Um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Do fato de que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado segue do Lema 1.2.20 que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é compacto dissipativo. Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X . Considere $B = \{x \in C : \gamma^+(x) \subset C\}$. Então, $T(\overline{B}) \subset \overline{B}$ e, como $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B e consequentemente K atrai subconjuntos compactos de X .

O conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai subconjuntos compactos de X . Para mostrar que $\mathcal{A}$ é independente da escolha de K suponha que K_1 é compacto e atrai subconjuntos compactos de X , então $\omega(K_1) \subset \omega(K) \subset \omega(K_1)$, pela Proposição 1.2.6.

Seja B um subconjunto limitado de X , como $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 1.2.13 que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B . Como $\omega(B)$ é compacto e invariante temos que $\omega(B) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $\mathcal{A}$ atrai B .

Claramente, se $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global, ele é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto, esta última seguindo diretamente da Proposição 1.2.12. ■

Atratores para semigrupos discretos

2.1 Condições suficientes para a existência de atratores para semigrupos discretos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que são comumente usados para garantir que um semigrupo discreto é assintoticamente compacto e limitado.

Teorema 2.1.1. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto ponto dissipativo e eventualmente compacto para $n \geq n_1$. Então $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Segue dos Teoremas 1.2.15 e 1.2.23 que precisamos somente mostrar que as órbitas de conjuntos limitados são eventualmente limitadas; isto é, precisamos mostrar que o semigrupo é eventualmente limitado. Dado um conjunto limitado B , segue do fato de que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é eventualmente compacto que existe $n_B \in \mathbb{N}$, com $n_1 \leq n_B$, tal que $T^{n_B}(B)$ é relativamente compacto. Logo, é necessário somente mostrar que a órbita de subconjuntos compactos de X são limitadas, pois $T(T^{n_B}(B)) \subset T(\overline{T^{n_B}(B)})$.

Seja K um subconjunto compacto de X e B_0 um subconjunto aberto e limitado de X que absorve pontos. Assim, para cada $x \in K$ existe $n_x^1 > 0$ tal que $T^{n_x^1}(x) \in B_0$ e pela continuidade de T^n existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x tal que $T^{n_x^1}(\mathcal{O}_x) \subset B_0$ e logo, definindo $n_x = n_x^1 + n_{B_0}$, temos $T^{n_x}(\mathcal{O}_x) \subset T^{n_{B_0}}(B_0)$. Como K é compacto, existem $\{\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_p}\}$ que cobrem K e assim $T^n(K) \subset T^{n_{B_0}}(B_0)$ para $n \geq \max\{n_{x_i} : 1 \leq i \leq p\}$.

Defina $N(K) = \max\{n_{x_i} : 1 \leq i \leq p\}$, $K_0 = \overline{T^{n_{B_0}}(B_0)}$ e $\tilde{K}_0 = \bigcup_{n=0}^{N(K_0)} T^n(K_0)$. Claramente K_0 e $\tilde{K}_0$ são subconjuntos compactos de X . Segue que $T^n(B_0) \subset \tilde{K}_0$ para

todo $n \geq N(K_0)$ e para cada subconjunto compacto K de X temos que $T^n(K) \subset \tilde{K}_0$ para $n \geq N(K)$. Logo

$$\gamma^+(K) \subset \left(\bigcup_{n=1}^{N(K)} T^n(K) \right) \bigcup \tilde{K}_0,$$

o que prova que a órbita de um subconjunto compacto de X é limitada e completa a demonstração do nosso resultado. ■

Teorema 2.1.2. *Seja X um espaço de Banach e $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto em X . Assuma que $T^n = S_n + K_n$ com S_n e K_n satisfazendo*

i) Para cada conjunto limitado B em X , existe um $n_B \in \mathbb{N}$ tal que $K_n(B)$ é relativamente compacto para todo $n \geq n_B$.

ii) Para cada subconjunto limitado B de X , existe $n_B \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x \in B} \|S_n(x)\|_X := s_B(n) < \infty$ para todo $n \geq n_B$ e $s_B(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Então $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é assintoticamente compacto. Além disso, se $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ponto dissipativo e eventualmente limitado, então ele possui um atrator global.

Demonstração: Dado um conjunto não-vazio, fechado e limitado B tal que $T(B) \subset B$ e $\epsilon > 0$, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_B$ e $s_B(n) < \epsilon$. Segue que

$$\omega(B) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{T^n(B)} \subset T^n(B) \subset S_n(B) + K_n(B) \subset B_\epsilon(0) + K_n(B) \subset \mathcal{O}_\epsilon(K_n(B)),$$

e como $K_n(B)$ é relativamente compacto, segue do Teorema 1.1.2 que $\omega(B)$ é relativamente compacto. Podemos ver facilmente que $\omega(B)$ é não-vazio, pois para cada sequência $\{x_j\}$ em B e $n_j \in \mathbb{N}$ com $n_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ a sequência $\{T^{n_j}(x_j)\} = \{K_{n_j}(x_j) + S_{n_j}(x_j)\}$ é totalmente limitada, pois $T^{n_j}(x_j) \in T^{n_j}(B) \subset T^{n_k}(B)$ para todo $j \geq k$, possuindo portanto uma subsequência convergente.

Agora, procedendo como na demonstração do Lema 1.2.9 concluímos que $\omega(B)$ atrai B e isto prova que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é assintoticamente compacto. Em adição, se $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ponto dissipativo e eventualmente limitado, $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global. ■

2.2 Semicontinuidades superior e inferior de atratores

Seja X um espaço de Banach, Λ um espaço topológico e $\mathcal{A}_\lambda \subset X$, $\lambda \in \Lambda$. Denote por $\text{dist}(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ a métrica induzida pela norma de X .

Definição 2.2.1. *Por semicontinuidade superior e inferior de uma família de conjuntos $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ em $\lambda = \lambda_0$ entenderemos o seguinte*

1. *Dizemos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ é semicontínua superiormente em λ_0 se*

$$\sup_{x_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda} \text{dist}(x_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0.$$

2. *Dizemos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 se*

$$\sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}} \text{dist}(x, \mathcal{A}_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0.$$

Para provarmos as semicontinuidades superior e inferior empregaremos o seguinte resultado

Lema 2.2.2. *Seja $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos em um espaço de Banach X , onde Λ é um espaço topológico.*

1. *Se qualquer sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, tem uma subsequência convergente com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 .*
2. *Se $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto e para qualquer $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ existe uma sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, que converge para x , então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 .*

Demonstração: i) Suponha que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ não é semicontínua superiormente em λ_0 , então existem $\epsilon > 0$ e sequência $\{\lambda_n\}$ com $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ tal que $\sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_n}} \text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, temos que $\text{dist}(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\{x_{\lambda_n}\}$ não possui nenhuma subsequência que converge para um elemento de $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, o que contradiz a nossa hipótese.

ii) Se $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto e $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ não é semicontínua inferiormente em λ_0 então, existem $\epsilon > 0$ e sequências $\{\lambda_n\}$ com $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ tais que $\sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}} \text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq 3\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$, temos que $\text{dist}(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto podemos assumir que $\{x_{\lambda_n}\}$ converge para algum $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e que $\text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Agora, se $\{y_{\lambda_n}\}$ é uma sequência qualquer com $y_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ temos

$$\epsilon \leq \text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \leq \text{dist}(x, y_{\lambda_n}),$$

e assim $\{y_{\lambda_n}\}$ não converge para x , o que contraria nossa hipótese. $\blacksquare$

Teorema 2.2.3 (Semicontinuidade Superior). *Seja $[0, 1] \ni \eta \mapsto T_\eta \in \mathcal{C}(X)$ contínua, uniformemente em subconjuntos compactos de X , em $\eta = 0$. Se $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\overline{\bigcup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto, então a família $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.*

Demonstração: Considere as subsequências $\eta_k \rightarrow 0$, $\{u_{\eta_k}\}_{k=1}^\infty$, $u_{\eta_k} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$. Como $\overline{\bigcup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto em X , existe $u_0 \in X$ tal que $u_{\eta_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_0$, a menos de subsequências.

Para concluir a demonstração da semicontinuidade superior falta mostrar que $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Para este fim, é suficiente provar que existe uma solução global limitada através de u_0 . Da invariância dos atratores $\mathcal{A}_{\eta_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução global limitada

$$\begin{aligned} \psi^{(\eta_k)} : \mathbb{Z} &\rightarrow X \\ n &\mapsto \psi_n^{(\eta_k)} \end{aligned}$$

através de u_{η_k} . Para $n \geq 0$, segue da continuidade de $[0, 1] \ni \eta \mapsto T_\eta \in \mathcal{C}(X)$ uniformemente em subconjuntos compactos de X que

$$\psi_n^{(\eta_k)} = T_{\eta_k}^n u_{\eta_k} \rightarrow T_0^n u_0.$$

Agora, construímos uma solução para trás através de u_0 da seguinte maneira. Se $\eta_k^0 := \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$, dado $j \in \mathbb{N}^*$ existe uma subsequência $\{\eta_k^j\}$ de $\{\eta_k^{j-1}\}$ e u_{-j} tal que $\psi_{-j}^{(\eta_k^j)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_{-j}$ (lembramos que $\{\psi_{-j}^{(\eta_k)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ está em $\bigcup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{A}_\eta$).

Da convergência de T_η para T_0 uniformemente em subconjuntos compactos de X segue que

$$\psi_{-j}^{(\eta_k^j)} = T_{\eta_k^j}^i \psi_{-j-i}^{(\eta_k^j)} \rightarrow u_{-j} = T_0^i u_{-j-i}.$$

Definindo

$$\psi_j^{(0)} := \begin{cases} T_0^j u_0, & \text{se } j \geq 0 \\ u_j, & \text{se } j < 0 \end{cases}$$

temos que $\psi^{(0)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ é uma solução de $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ e

$$\psi^{(\eta_k^k)}(j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi^{(0)}(j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Como $\psi^{(0)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ é limitada, sua imagem deve estar contida em $\mathcal{A}_0$ e em particular $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Agora o resultado segue do Lema 2.2.2. ■

Teorema 2.2.4 (Semicontinuidade Inferior). *Seja $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos discretos em um espaço métrico X que satisfaz*

- a) *para cada $\eta \in [0, 1]$, $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$;*
- b) *$\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$, onde $\mathfrak{p}$ é independente de η , e $\sup_{1 \leq i \leq \mathfrak{p}} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$;*
- c) *existe um $\delta > 0$ tal que, se $W_{\text{loc}}^u(y_j^{*,\eta}) := W^u(y_j^{*,\eta}) \cap B_\delta(y_j^{*,0})$, então*

$$\{W_{\text{loc}}^u(y_j^{*,\eta}) : \eta \in [0, 1]\}$$

é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$;

- d) *$d(T_\eta^n u, T_0^n u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ uniformemente para u em subconjuntos compactos de X , para cada $n \in \mathbb{N}$;*

- e) $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_j^{*,0})$.

Então, $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração: Note que primeiramente, de e), $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_j^{*,0})$. Portanto, se $u_0 \in \mathcal{A}_0$, existem um inteiro $\ell \in \{1, \dots, \mathfrak{p}\}$, uma solução global $\psi_\ell^{(0)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ através de u_0 , e um $m \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_\ell^{(0)}(-m) \in W_{\text{loc}}^u(y_\ell^{*,0})$. De (c), existe uma solução global $\psi_\ell^{(\eta)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ com $\psi_\ell^{(\eta)}(-m) \in W_{\text{loc}}^u(y_\ell^{*,\eta})$ tal que $\psi_\ell^{(\eta)}(-m) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \psi_\ell^{(0)}(-m)$. Segue de a) e d) que

$$T_\eta^m \psi_\ell^{(\eta)}(-m) \rightarrow u_0.$$

O resultado segue agora do Lema 2.2.2. ■

2.3 Semigrupos discretos gradientes

Nesta seção vamos considerar os semigrupos discretos gradientes, que são semigrupos aos quais temos associada uma função de Liapunov; isto é, uma função que não cresce ao longo de órbitas. Estes semigrupos discretos gozam da propriedade de que seus atratores podem ser caracterizados como a variedade instável de seu conjunto de equilíbrio. Se em adição, o conjunto de equilíbrio é constituído somente de um número finito de pontos, então o atrator é a união das variedades instáveis de cada um deles.

Lembremos que $x^* \in X$ é um ponto de equilíbrio para o semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ se é um ponto fixo para a aplicação T ; isto é, $Tx^* = x^*$. Denotaremos por $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio para o semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definição 2.3.1. *Um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é dito um semigrupo gradiente se tem uma função de Liapunov ; isto é, se existe uma função contínua $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

- (i) $\mathbb{N} \ni n \mapsto V(T^n x)$ é não-crescente para cada $x \in X$;
- (ii) Se x é tal que $V(Tx) = V(x)$, então $x \in \mathcal{E}$.

Para semigrupos discretos gradientes temos o seguinte resultado de caracterização:

Lema 2.3.2. *Se $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradiente, então $\omega(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$ para cada $x \in X$. Se existe uma solução para trás $\phi : \mathbb{Z}^- \rightarrow X$ através de x então $\alpha_\phi(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$. Se além disso $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ e todas as soluções estacionárias são isoladas, existe somente um número finito delas e para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é um conjunto unitário. Se $x \in \mathcal{A}$ e $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ é uma solução global através de x , $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário.*

Demonstração: Se $\omega(x) = \emptyset$, o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \emptyset$ e $y \in \omega(x)$ temos que $V(T^n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, pois é uma sequência não-crescente com uma subsequência convergente, além disso $V(y) = c$. Como $T(\omega(x)) \subset \omega(x)$ temos que cada ponto $y \in \omega(x)$ é tal que $V(T(y)) = V(y) = c$ e da propriedade (ii) na Definição 2.3.1 temos que $y \in \mathcal{E}$.

Suponha que exista uma solução para trás $\phi : \mathbb{Z}^- \rightarrow X$ através de x . Se $\alpha_\phi(x) = \emptyset$ o resultado é trivial. Se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(-n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$, pois é uma

sequência não-decrescente com uma subsequência convergente. Como $T(\alpha_\phi(x)) \subset \alpha_\phi(x)$ temos que para cada $y \in \alpha_\phi(x)$, $V(T(y)) = V(y) = c$ e $y \in \mathcal{E}$.

Agora assumamos que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é compacto e $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, segue que se todos os pontos de $\mathcal{E}$ são isolados, então $\mathcal{E}$ é finito.

Falta ainda mostrar que se o conjunto das soluções estacionárias é finito então $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários. Se assumirmos que $\omega(x) = \{y_1^*, \dots, y_\ell^*\} \subset \mathcal{E}$ com $\ell \geq 2$, então existe uma cobertura disjunta $\{\mathbb{N}_i : 1 \leq i \leq \ell\}$ de $\mathbb{N}$ com a propriedade de que cada $\mathbb{N}_i$ é infinito e $\lim_{\substack{n \in \mathbb{N}_i \\ n \rightarrow \infty}} T^n(x) = y_i^*$, $1 \leq i \leq \ell$. Escolha uma sequência $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $k_{2n-1} \in \mathbb{N}_1$ e $k_{2n} = k_{2n-1} + 1 \notin \mathbb{N}_1$. Então, a menos de subsequências, $y_1^* = T(y_1^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k_{2n}}(x) = y_j^*$, para algum $2 \leq j \leq \ell$, o que é uma contradição. Isto mostra que se o conjunto das soluções estacionárias for finito, então $\omega(x)$ é um conjunto unitário. A prova de que $\alpha_\phi(x)$ é também um conjunto unitário é inteiramente análoga a de $\omega(x)$, e assim concluímos a demonstração. ■

Teorema 2.3.3. *Assuma que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradiente que é eventualmente limitado, assintoticamente compacto e tem um conjunto de equilíbrio $\mathcal{E}$ limitado. Então $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$, onde*

$$W^u(\mathcal{E}) := \{y \in X : \text{existe uma solução para trás}$$

$$\phi(\cdot, y) : \mathbb{Z}^- \rightarrow X \text{ através de } y \text{ tal que } \phi(n, y) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \mathcal{E}\}$$

é chamado de conjunto instável de $\mathcal{E}$. Se $\mathcal{E} = \{e_1^, \dots, e_n^*\}$ é finito então $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$ onde*

$$W^u(e_i^*) := \{y \in X : \text{existe uma solução para trás}$$

$$\phi(\cdot, y) : \mathbb{Z}^- \rightarrow X \text{ através de } y \text{ tal que } \phi(n, y) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} e_i^*\}$$

é o conjunto instável de e_i^ . Finalmente, se existe um conjunto conexo e limitado B que contém $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é conexo.*

Demonstração: Como $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto temos do Lema 1.2.13 que, para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x . Do fato de que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é gradiente temos que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e como $\mathcal{E}$ é limitado temos que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ponto dissipativo. Logo, do Teorema 1.2.23, segue que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global.

Se $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ através de x . Como $\phi(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{A}$ é relativamente compacto, $\alpha_\phi(x) \neq \emptyset$. Do Lema 2.3.2, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$. Se $x \in W^u(\mathcal{E})$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ através de x e $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Do fato de que $\phi(\mathbb{Z})$ é invariante concluímos que $\phi(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $x \in \mathcal{A}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \supset W^u(\mathcal{E})$ e completa a prova de que $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$.

Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, a igualdade $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$ segue imediatamente do Lema 2.3.2 e se $\mathcal{A}$ está contido em um subconjunto conexo e limitado de X o Lema 1.2.7 implica que $\mathcal{A}$ é conexo. ■

Lema 2.3.4. *Assuma que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradiente que tem um atrator global $\mathcal{A}$ e tal que T tem um número finito de pontos fixos $\mathcal{E} = \{y_i^* : 1 \leq i \leq n\}$. Seja $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Liapunov associada à $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ e $V(\mathcal{E}) = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_p\}$ com $\mathbf{n}_i < \mathbf{n}_{i+1}$, $1 \leq i \leq p-1$.*

Se $1 \leq j \leq p-1$ e $\mathbf{n}_j \leq r < \mathbf{n}_{j+1}$, então $X_r = \{z \in X : V(z) \leq r\}$ é positivamente invariante sobre $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{T_r^n : n \in \mathbb{N}\}$, a restrição de $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ a X_r , tem atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$ dado por

$$\mathcal{A}^{(j)} = \cup \{W^u(y_\ell^*) : V(y_\ell^*) \leq \mathbf{n}_j\}.$$

Em particular, $V(z) \leq \mathbf{n}_j$ para $z \in \mathcal{A}^{(j)}$, $\mathbf{n}_1 = \min\{V(x) : x \in X\}$ e $\mathcal{A}^{(1)} = \{x^ \in \mathcal{E} : V(x^*) = \mathbf{n}_1\}$ consiste de todos os pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis; isto é para cada $x^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}_{x^*}$ de x^* tal que $T^n x \rightarrow x^*$ para cada $x \in \mathcal{O}_{x^*}$.*

Demonstração: É claro da definição da função de Liapunov que X_r é positivamente invariante sobre $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$. Para provar a existência de um atrator para $\{T_r^n : n \in \mathbb{N}\}$ notemos que as propriedades requeridas para obtermos um atrator global são herdadas de $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$; a saber, órbitas de subconjuntos limitados de X_r são limitadas, $\{T_r^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ponto dissipativo e $\{T_r^n : n \in \mathbb{N}\}$ é assintoticamente compacto. Logo, $\{T_r^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$. A restrição V_r de V a X_r é uma função de Liapunov para $\{T_r^n : n \in \mathbb{N}\}$ e a caracterização de $\mathcal{A}^{(j)}$ segue.

Agora provemos a última afirmação. Seja $\delta_0 = \frac{1}{2} \min\{d(x^*, y^*), x^*, y^* \in \mathcal{A}^{(1)}, x^* \neq y^*\}$. Se existem um $\delta_0 > \delta > 0$ e sequências $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ em X e $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{N}$ tais que $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ e $d(T^{n_k} x_k, \mathcal{A}^{(1)}) \geq \delta$ concluímos que $\{T^{n_k} x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma

subsequência convergente.

De fato, se $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado, segue da continuidade de T e de suas iteradas que $\{T^{n_k}x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente. Agora, se $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ não é limitada, como $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é limitada, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma^+(\{x_k : k \in \mathbb{N}\})$ é limitada. Da compacidade assintótica do semigrupo, existe um compacto $K \subset \overline{\gamma^+(\{x_k : k \in \mathbb{N}\})}$ que atrai $\overline{\gamma^+(\{x_k : k \in \mathbb{N}\})}$, e consequentemente atrai $\{T^{n_k}x_k : k \in \mathbb{N}\}$, portanto $\{T^{n_k}x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente. Denote esta subsequência convergente por $\{T^{n_k}x_k : k \in \mathbb{N}\}$ e seja y seu limite.

É imediato do fato de que $V(x_k) \rightarrow \mathbf{n}_1$ que $V(y) = V(Ty) = \mathbf{n}_1$, pois $\mathbf{n}_1 \leq V(Ty) \leq V(y) \leq \mathbf{n}_1$. Portanto $y \in \mathcal{A}^{(1)}$ e $\text{dist}(y, \mathcal{A}_1) \geq \delta$, o que é um absurdo. Isto prova que, para cada $x^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe um $\delta' > 0$ tal que, para todo $x \in B_{\delta'}(x^*)$, $\gamma^+(x) \subset B_\delta(x^*)$ e prova que $\mathcal{A}^{(1)}$ consiste somente dos equilíbrios estáveis. Para concluir precisamos somente notar que, para cada $x \in X$, $T^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$ para algum $x^* \in \mathcal{E}$. ■

2.4 Semigrupos discretos gradient-like

Em geral não esperamos que uma perturbação de um semigrupo discreto gradiente nos dê um novo semigrupo gradiente, e a maior dificuldade é provar que o problema perturbado tem uma função de Liapunov. Assim, definimos o conceito de *semigrupo gradient-like*, onde nos preocupamos somente com as propriedades dinâmicas que a função de Liapunov introduz num semigrupo discreto gradiente. Com esta nova definição mostramos que nesta nova classe os atratores podem ser caracterizados como nos semigrupos gradientes e também mostramos que este conceito é estável sob pequenas perturbações, logo conseguimos mostrar a continuidade da estrutura dos atratores para este tipo de semigrupos com relação à pequenas perturbações.

Antes de continuarmos, vamos enfatizar a distinção entre semigrupos discretos gradientes e semigrupos que têm atratores do tipo gradiente. Como na Definição 2.3.1, um semigrupo discreto gradiente é um semigrupo que possui uma função de Liapunov.

Definição 2.4.1. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto com um atrator global $\mathcal{A}$. Assuma que o conjunto das soluções estacionárias $\mathcal{E}$ de $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito; isto é, para algum $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_{\mathbf{p}}^*\}$. Se $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^{\mathbf{p}} W^u(y_i^*)$, dizemos que $\mathcal{A}$ é um atrator do tipo gradiente e que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto com atrator do tipo gradiente.*

Como provado no Teorema 2.3.3, um semigrupo discreto gradiente com um atrator global e um número finito de equilíbrios é um semigrupo discreto com um atrator do tipo gradiente.

Não é difícil ver (veja exemplo em Hale [12] páginas 2 e 3) que um atrator do tipo gradiente pode vir de um semigrupo discreto que não é gradiente e também que uma perturbação de um semigrupo discreto com um atrator do tipo gradiente pode não ter atrator do tipo gradiente.

Figura 01

A Figura 1 acima apresenta um atrator do tipo gradiente que não é proveniente de um semigrupo gradient-like. Mas uma pequena perturbação deste semigrupo nos dá

Figura 02

e temos assim uma órbita periódica, o que mostra que o atrator deste semigrupo não é a união dos conjuntos instáveis de seus pontos de equilíbrio. Notemos também que a perturbação não alterou o comportamento dos atratores do ponto de vista de semicontinuidade superior e inferior, mas alterou sua estrutura.

Em Carvalho-Langa-Robinson-Suárez [5] os autores provam que uma perturbação de um semigrupo gradiente tem atrator do tipo gradiente. As provas são imediatamente adaptadas para semigrupos discretos. Infelizmente, semigrupos que têm atratores do tipo gradiente não precisam ser gradientes.

Isto nos leva à questão de quais propriedades dinâmicas dos semigrupos discretos garantem que eles tenham atratores do tipo gradiente e que são estáveis sobre perturbações. Logicamente, tais propriedades devem ser satisfeitas por semigrupos discretos gradientes e sua perturbações.

Com isto em mente (veja Carvalho-Langa [4]) o seguinte conceito de *semigrupos discretos gradient-like* generaliza o conceito de semigrupos discretos gradientes enquanto mantém suas propriedades dinâmicas essenciais. Provaremos agora, adaptando os resultados de Carvalho-Langa [4] para o caso discreto, que as propriedades que definem os semigrupos discretos gradient-like são estáveis por perturbações.

Definição 2.4.2. *Considere um semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$. Seja*

$$2\delta_0 = \min_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} d(y_i^*, y_j^*) > 0$$

Seja $\epsilon_0 < \delta_0$, $y^* \in \mathcal{E}$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Uma ϵ -cadeia de y^* a y^* é uma sequência $\{y_{\ell_1}^*, \dots, y_{\ell_k}^*\}$ em $\mathcal{E}$, juntamente com um conjunto $\{y_1, \dots, y_k\}$ de pontos de X e inteiros $\{n_1, \kappa_1, \dots, n_k, \kappa_k\}$, $0 < \kappa_i < n_i$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq p$, tais que $d(y_i, y_{\ell_i}^*) < \epsilon$, $1 \leq i \leq k+1$, $y^* = y_{\ell_1}^* = y_{\ell_{k+1}}^*$, $\text{dist}(T^{\kappa_i} y_i, \mathcal{E}) > \epsilon_0$ e $d(T^{n_i} y_i, y_{\ell_{i+1}}^*) < \epsilon$, $1 \leq i \leq k$. Dizemos que $y^* \in \mathcal{E}$ é recorrente por cadeias se existe um $\epsilon_0 > 0$ fixo e uma ϵ -cadeia de y^* a y^* , para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.

Exemplos de ϵ -cadeias

Definição 2.4.3. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e assumamos que ele tem um atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradient-like se as seguintes condições são satisfeitas:*

(G1) *Dada uma solução global $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$, existem $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tais que*

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} d(\xi_n, y_i^*) = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n, y_j^*) = 0.$$

(G2) $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ *não contém nenhum ponto recorrente por cadeia.*

As hipóteses (G1) e (G2) carregam importantes propriedades dinâmicas de um semigrupo discreto com uma função de Liapunov (veja também os Lemas 2.4.5 e 2.4.6 abaixo). De (G1), temos que $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^p W^u(y_i^*)$, pois se $x \in \mathcal{A}$ então existe uma solução global $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$ e assim $x \in W^u(y_i^*)$, para algum $1 \leq i \leq p$ e reciprocamente, se $x \in W^u(y_i^*)$ para algum $1 \leq i \leq p$ então, como $\mathcal{A}$ atrai pontos, existe uma órbita global limitada através de x , assim $x \in \mathcal{A}$. Também, a hipótese (G2) diz que nenhum número finito de órbitas pode produzir um contorno fechado.

Os seguintes lemas são de fundamental importância para o futuro desenvolvimento da teoria de atratores para semigrupos discretos gradient-like.

O seguinte resultado segue imediatamente da continuidade das iteradas de uma aplicação $T \in \mathcal{C}(X)$. Ele garante que, dado um ponto fixo x^* de T e y perto de x^* , a órbita finita $\gamma_{[0,n]}(y) = \{y, Ty, \dots, T^n y\}$ permanece perto de x^* para grandes valores de n .

Lema 2.4.4. *Seja $T \in \mathcal{C}(X)$ e x^* um ponto fixo de T . Dado $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\{T^j y : 0 \leq j \leq n, y \in B_\delta(x^*)\} \subset B_\epsilon(x^*)$.*

Demonstração: Basta notar que a família de aplicações $\{I, T, T^2, \dots, T^n\}$ é equicontínua em x^* . ■

Nosso próximo resultado garante que, para um semigrupo discreto gradient-like $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, dado um subconjunto limitado B de X e uma vizinhança $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ do conjunto de equilíbrio $\mathcal{E}$, existe um inteiro positivo $n_0 = n_0(B, \mathcal{N}(\mathcal{E}))$ tal que todas as soluções começando em pontos de B , visitam $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ antes do instante n_0 .

Lema 2.4.5. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e assuma que ele tem um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz (G1), dado $\delta < \delta_0$ e $B \subset X$ limitado, existe um $n_0 = n_0(\delta, B) > 0$ tal que $\{T^n u_0 : 0 \leq n \leq n_0\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) \neq \emptyset$ para todo $u_0 \in B$.*

Demonstração: Provaremos o resultado por contradição. Assuma que existe uma sequência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B e uma sequência de números naturais $\{n_k\}$ (com $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$) tais que $\{T^j u_k : 0 \leq j \leq 2n_k\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) = \emptyset$. Extraindo subsequências, temos que existe uma solução global $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ tal que $T^{j+n_k} u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi_j$ para $j \in \mathbb{Z}$. Claramente $\xi_j \in \mathcal{A}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$ e como para $-n_k \leq j \leq n_k$, $T^{j+n_k} u_k \notin \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*)$, $\xi_j \notin \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, o que contradiz (G1). ■

A seguir provaremos uma resultado afirmando que, para um semigrupo discreto gradient-like $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, dada uma vizinhança $\mathcal{N}_2(x^*)$ de um ponto de equilíbrio x^* , existe outra vizinhança $\mathcal{N}_1(x^*)$ de x^* tal que se uma solução começa em $\mathcal{N}_1(x^*)$ e deixa $\mathcal{N}_2(x^*)$, então ela nunca volta para $\mathcal{N}_1(x^*)$.

Lema 2.4.6. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto gradient-like. Denote por $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ suas soluções estacionárias e por $\mathcal{A}$ seu atrator global. Então, dado $0 < \delta < \delta_0$, existe um $\delta' > 0$ tal que, se para algum $1 \leq i \leq p$, $d(u_0, y_i^*) < \delta'$ e, para algum $n_1 > 0$, $d(T^{n_1} u_0, y_i^*) \geq \delta$, então $d(T^n u_0, y_i^*) > \delta'$ para todo $n \geq n_1$.*

Demonstração: Assuma que, para algum $1 \leq i \leq p$, existe uma sequência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X com $d(u_k, z_i^*) < \frac{1}{k}$ e sequências $n_k < m_k$ de números positivos tais que $d(T^{n_k} u_k, z_i^*) \geq \delta$ e $d(T^{m_k} u_k, z_i^*) < \frac{1}{k}$. Isto contradiz (G2). ■

Agora provaremos que, para um semigrupo discreto gradient-like, o ω -limite de um ponto consiste exatamente dos pontos de equilíbrio. Notemos que a condição (G1) é imposta apenas para soluções no atrator.

Lema 2.4.7. *Assuma que $\{T^n : n \geq 0\}$ é um semigrupo discreto gradient-like com um conjunto de equilíbrio $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Dado $u \in X$ existe um $y_j^* \in \mathcal{E}$ tal que*

$$T^n u \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_j^*.$$

Demonstração: Segue do Lema 2.4.6 que, dado $r \in \mathbb{N}^*$ existe $r' \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(v, y_i^*) < \frac{1}{r'}$ e se para algum $n_r > 0$, $d(T^{n_r} v, y_i^*) \geq \frac{1}{r}$, então $d(T^n v, y_i^*) > \frac{1}{r'}$ para todo $n \geq n_r$. Por

outro lado, segue do Lema 2.4.5 que, dado $r' \in \mathbb{N}^*$ existe um $k_{r'} = k_{r'}(\gamma^+(u)) \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $v \in \gamma^+(u)$,

$$\{v, Tv, \dots, T^{k_{r'}}v\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_{\frac{1}{r'}}(y_i^*) \neq \emptyset,$$

pois $\gamma^+(u)$ é limitado. Segue do fato de que $\mathcal{E}$ é finito que existe um $y_j^* \in \mathcal{E}$ e, para cada $r \in \mathbb{N}^*$, um $\ell_r \in \mathbb{N}$ tal que $T^\ell u \in B_{\frac{1}{r}}(y_j^*)$ para todo $\ell \geq \ell_r$. Isto completa a prova do resultado. ■

Observação 2.4.8. *Claramente, não é necessário considerar a solução para trás análoga à do lema acima pois neste caso teríamos uma solução global limitada, consequentemente uma solução global no atrator, e o resultado seguiria diretamente da propriedade (G1).*

Antes de prosseguirmos com a análise dos atratores dos semigrupos discretos gradient-like sobre perturbações vamos estabelecer a equivalência entre a condição (G2) e a ausência de estruturas homoclínicas. Primeiro vamos mostrar o seguinte importante resultado

Proposição 2.4.9. *Assuma que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto assintoticamente compacto. Sejam $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ seqüências em $\mathbb{N}$ com $s_k, n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ e seja $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em X . Para $\mathbb{J}_k = \{j \in \mathbb{Z} : -s_k \leq j \leq n_k\}$, defina $\xi^k : \mathbb{J}_k \rightarrow X$ por $\xi^k(j) = T^{j+s_k}u_k$, $j \in \mathbb{J}_k$. Se $\{T^j u_k : k \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq s_k + n_k\}$ é limitada, existe uma solução global $y : \mathbb{Z} \rightarrow X$ de $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ e uma subsequência de $\{\xi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (que novamente denotamos por $\{\xi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$) tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(j) \rightarrow y(j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

A demonstração da Proposição 2.4.9 é imediata do Lema 2.4.15 (que será demonstrado ainda nesta seção) no caso particular quando a família de semigrupos discretos é independente do parâmetro.

Definição 2.4.10. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e assumamos que ele tenha um atrator global $\mathcal{A}$. Uma estrutura homoclínica em $\mathcal{A}$ é um conjunto $\{y_{\ell_1}^*, \dots, y_{\ell_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e um conjunto de soluções*

globais $\{\xi^{(i)} : \mathbb{Z} \rightarrow X, 1 \leq i \leq k\}$ em $\mathcal{A}$ tal que, fazendo $y_{\ell_{k+1}}^* := y_{\ell_1}^*$,

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \xi_n^{(i)} = y_{\ell_i}^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n^{(i)} = y_{\ell_{i+1}}^*, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Agora podemos provar o seguinte resultado relacionando (G1) e (G2) à não-existência de estruturas homoclínicas.

Lema 2.4.11. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ uma semigrupo discreto que possui um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz (G1), então (G2) é satisfeita se e somente se $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas.*

Demonstração: Assumindo que $\mathcal{A}$ tem uma estrutura homoclínica é fácil ver que as soluções estacionárias são recorrentes por cadeias.

Por outro lado, se $y^* \in \mathcal{E}$ é recorrente por cadeia, existe um $\delta < \delta_0$, $\{y_{\ell_1}^*, \dots, y_{\ell_{r+1}}^*\} \subset \mathcal{E}$, para cada $\mathbb{N} \ni k > \frac{1}{\delta}$, pontos $y_1^k, \dots, y_{r+1}^k$ e números naturais $n_1^k > m_1^k, \dots, n_r^k > m_r^k$ tais que

$$d(y_i^k, y_{\ell_i}^*) < \frac{1}{k}, \quad d(T^{m_i^k} y_i^k, \mathcal{E}) > \delta, \quad d(T^{n_i^k} y_i^k, y_{\ell_{i+1}}^*) < \frac{1}{k}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Escolha $\ell_i^k > 0$ tal que $d(T^{\ell_i^k} y_i^k, y_{\ell_i}^*) \geq \delta$ e $d(T^n y_i^k, y_{\ell_i}^*) < \delta$, para todo $0 \leq n < \ell_i^k$. Do Lema 2.4.4 segue que $\ell_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$. Note que devemos ter também que $n_i^k - \ell_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$ (se não, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $n_k - \ell_k = \nu$ para infinitos índices k , consequentemente $\{T^{\ell_k} y_i^k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente e portanto $\{T^\nu T^{\ell_k} y_i^k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente para $y_{\ell_i}^*$, o que nos leva a uma contradição). Para $n \in [-\ell_i^k, n_i^k - \ell_i^k]$ seja $\xi_n^{i,k} = T^{\ell_i^k + n} y_i^k$.

Da Proposição 2.4.9, existem soluções globais $\xi_i : \mathbb{Z} \rightarrow X$ por $\xi_n^{(i)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_n^{i,k}$. Como cada $\xi_n^{(i)}$ deve convergir para uma solução de equilíbrio quando $n \rightarrow +\infty$ e quando $n \rightarrow -\infty$ e como $\xi_n^{(i)} \in B_\delta(y_{\ell_i}^*)$ para todo $n \leq 0$ temos que $\xi_n^{(i)} \rightarrow y_{\ell_i}^*$ quando $n \rightarrow -\infty$.

Além disso, existe um instante $j_i^k > 0$ tal que $d(\xi_{j_i^k}^{i,k}, y_{\ell_{i+1}}^*) \geq \delta$ e $\xi_n^{i,k} \in B_\delta(y_{\ell_{i+1}}^*)$ para todo $n \in [j_i^k, n_i^k - \ell_i^k]$. É fácil ver que $\{j_i^k\}$ é limitado (Lema 2.4.5) e que $n_i^k - \ell_i^k - j_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$. Consequentemente $\xi_n^{(i)} \rightarrow y_{\ell_{i+1}}^*$ quando $n \rightarrow +\infty$.

O conjunto $\{y_{\ell_1}^*, \dots, y_{\ell_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e o conjunto de soluções globais $\{\xi_i : \mathbb{Z} \rightarrow X, 1 \leq i \leq k\}$ são tais que,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_n^{(i)} = y_{\ell_i}^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_n^{(i)} = y_{\ell_{i+1}}^*, \quad 1 \leq i \leq k,$$

com $y_{\ell_{k+1}}^* := y_{\ell_1}^*$. Portanto $\mathcal{A}$ tem uma estrutura homoclínica. ■

Corolário 2.4.12. *Se $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradient-like e $\mathcal{A}$ seu atrator, existem pontos de equilíbrio y_α^* e y_ω^* tais que y_α^* tem conjunto estável trivial em $\mathcal{A}$; isto é, $W_{\mathcal{A}}^s(y_\alpha^*) = \{y_\alpha^*\}$ onde*

$$W_{\mathcal{A}}^s(y_\alpha^*) := \{y \in \mathcal{A} : \text{tal que } T^n y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_\alpha^*\}$$

e y_ω^ tem conjunto instável trivial; isto é, $W^u(y_\omega^*) = \{y_\omega^*\}$.*

Demonstração: Vamos provar a existência de um ponto de equilíbrio y_ω^* com um conjunto instável trivial. A existência de y_α^* é similar. Se $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ é o conjunto de equilíbrio para $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ e para cada y_i^* existe uma solução global $\xi^{(i)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ tal que $\xi^{(i)}(k) \xrightarrow{k \rightarrow -\infty} y_i^*$, é fácil ver que existe um $1 \leq \ell \leq p$ tal que $\{y_1^*, \dots, y_\ell^*\}$ e $\{\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\ell)}\}$ constituem uma estrutura homoclínica e que contradiz (G2) e prova a existência de y_ω^* . ■

A seguir consideremos uma família dependente de um parâmetro $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$, $\eta \in [0, 1]$, de semigrupos discretos. Começamos com um resultado que estende o Lema 2.4.4 para uma família $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$, $\eta \in [0, 1]$, de semigrupos discretos.

Lema 2.4.13. *Assuma que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é tal que $T_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} T_0$ uniformemente em subconjuntos compactos de X . Seja $x^{*,\eta}$ um ponto fixo de T_η , $\eta \in [0, 1]$ e assumamos que $x^{*,\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x^{*,0}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que $\{T_\eta^j y : 0 \leq j \leq n, y \in B_\delta(x^{*,\eta})\} \subset B_\epsilon(x^{*,\eta})$ para todo $\eta \leq \eta_0$.*

Demonstração: Se este não é o caso existe uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\epsilon_0 > 0$, $y_k \in B_{\frac{1}{k}}(x^{*,\eta_k})$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(T_{\eta_k}^{n_0} y_k, x^{*,\eta_k}) \geq \epsilon_0$. Portanto $d(T_0^{n_0} x^{*,0}, x^{*,0}) \geq \epsilon_0$, o que é uma contradição. ■

Definição 2.4.14. *Dizemos que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é coletivamente assintoticamente compacto se, dadas uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, uma sequência limitada $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X e uma sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números naturais com $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, então $\{T_{\eta_k}^{n_k} u_k\}$ é relativamente compacto.*

Lema 2.4.15. *Assuma que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é coletivamente assintoticamente compacto. Seja η_k uma sequência de números positivos tal que $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Assuma que exista uma sequência $\{j_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ com $j_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ e seja $\mathbb{J}_k := \{j \in \mathbb{Z} : |j| \leq j_k\}$. Se para cada*

$k \in \mathbb{N}$, existe uma solução $\xi_{\eta_k}(\cdot) : \mathbb{J}_k \rightarrow X$ de $\{T_{\eta_k}^n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\cup_{k \in \mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(\mathbb{J}_k)$ é limitado então, existe uma subsequência, que novamente denotaremos por ξ_{η_k} , e uma solução global $y : \mathbb{Z} \rightarrow X$ de $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k}(j) \rightarrow y(j)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Como $\{T_{\eta}^n : n \in \mathbb{N}\}$ é coletivamente assintoticamente compacto, existe uma subsequência que novamente denotamos por η_k e $y_0 \in X$ tal que $\xi_{\eta_k}(0) \rightarrow y_0$. Seja $y(\cdot) : \mathbb{N} \rightarrow X$ a solução de $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ definida por $y(n) := T_0^n y_0$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente, esta solução é limitada. Também

$$\xi_{\eta_k}(j) = T_{\eta_k}^j \xi_{\eta_k}(0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_0^j y_0 = y(j), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Procedendo similarmente, $\{\xi_{\eta_k}(-1)\}$ tem uma subsequência convergente $\xi_{\eta_k^1}(-1)$ com limite y_{-1} . Definindo $y(j) := T_0^{j+1} y_{-1}$, $j \in \mathbb{Z}_{-1}^+$, temos que $y(0) = T_0 y_{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\eta_k^1} \xi_{\eta_k^1}(-1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k^1}(0) = y_0$ e $y(j) = T_0^{j+1} y_{-1}$ para todo $j \geq -1$. Disto segue que $y(\cdot) : \mathbb{Z}_{-1}^+ \rightarrow X$ é uma solução de $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ com $y(-1) = y_{-1}$, $y(0) = y_0$ e

$$\xi_{\eta_k^1}(j) = T_{\eta_k^1}^{j+1} \xi_{\eta_k^1}(-1) \rightarrow T_0^{j+1} y_{-1} = y(j), \quad j \in \mathbb{Z}_{-1}^+.$$

Suponha que:

- Tenhamos obtido subsequências $\{\xi_{\eta_k^i}\}_{k \in \mathbb{N}}$ para $1 \leq i \leq m-1$ com a propriedade de que $\{\eta_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{\eta_k^{i-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e tal que $\xi_{\eta_k^i}(-i) \rightarrow y_{-i}$, $1 \leq i \leq m-1$.
- Tenhamos definido $y(j)$ por $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k^i}(j) = y(j)$, $-m+1 \leq j < 0$ e, consequentemente, $y : \mathbb{Z}_{-m+1}^+ \rightarrow X$ é uma solução de $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ com $y(-j) = y_{-j}$, $0 \leq j \leq -m+1$ e $\xi_{\eta_k^i}(j)$ converge para $y(j)$ para todo $j \in \mathbb{Z}_{m-1}^+$.

Agora construímos $\{\eta_k^m\}_{n=1}^\infty$ uma subsequência de $\{\eta_k^{m-1}\}_{n=1}^\infty$ tal que $\xi_{\eta_k^m}(-m)$ é convergente e y_{-m} seu limite. Se nós definirmos $y(-m) = y_{-m}$, $y : \mathbb{Z}_{-m}^+ \rightarrow X$ é uma solução de $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ com $y(-i) = y_{-i}$, $0 \leq i \leq m$ e $\xi_{\eta_k^m}(j)$ converge para $y(j)$ para todo $j \in \mathbb{Z}_{-m}^+$.

Com isto construímos uma sequência $\{\xi_{\eta_k^m}\}_{k=1}^\infty$ e uma solução $y(\cdot) : \mathbb{Z} \rightarrow X$ de $\{T_0^n :$

$n \in \mathbb{N}$ com $y(-i) = y_{-i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e tal que $\xi_{\eta_k^*}(j) \rightarrow y(j)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Isto conclui a demonstração. ■

Corolário 2.4.16. *Assuma que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é coletivamente assintoticamente compacto. Seja $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $(0, 1]$ tal que $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $\xi_{\eta_k}(\cdot) : \mathbb{Z} \rightarrow X$ uma solução global de $\{T_{\eta_k}^n : n \in \mathbb{N}\}$. Se $\cup_{k \in \mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(\mathbb{Z})$ é limitado, para qualquer sequência $s = \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{Z}$, $\{\xi_{\eta_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência que denotaremos por $\{\xi_{\eta_k^*}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e uma solução global $y^s : \mathbb{Z} \rightarrow X$ de $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k^*}(j + s_k) \rightarrow y^s(j)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Lema 2.4.17. *Seja $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos discretos coletivamente assintoticamente compactos. Assuma que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ e $\mathbf{p}$ soluções estacionárias com $\mathbf{p}$ independente de η . Denote por $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_{\mathbf{p}}^{*,\eta}\}$ o conjunto de soluções estacionárias de $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ e defina $\mathcal{E}_0 = \{y_1^*, \dots, y_{\mathbf{p}}^*\}$. Se $d(T_\eta u, T_0 u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ uniformemente para u em subconjuntos compactos de X e $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é gradient-like, $\delta < \delta_0$ e $B \subset X$ é limitado, existe um $n_0 = n_0(\delta, B) > 0$, independente de $\eta \in [0, 1]$, tal que $\{T_\eta^n u_0 : 0 \leq n \leq n_0\} \cap \cup_{i=1}^{\mathbf{p}} B_\delta(y_i^*) \neq \emptyset$ para todo $u_0 \in B$.*

Demonstração: Vamos fazer uma argumentação por contradição. Assuma que existe uma sequência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B , uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0, 1]$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e uma sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ com $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ tais que $\{T_{\eta_k}^j u_k : 0 \leq j \leq 2n_k\} \cap \cup_{i=1}^{\mathbf{p}} B_\delta(y_i^*) = \emptyset$. Tomando subsequência temos que existe $v_0 \in X$ tal que $T_{\eta_k}^{n_k} u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v_0$. Do fato de que T_η converge para T_0 uniformemente em subconjuntos compactos de X temos que $T_{\eta_k}^{r+n_k} u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_0^r v_0$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Do Lema 2.4.7 existe um r_0 e $y_j^* \in \mathcal{E}$ tal que $d(T_0^r v_0, y_j^*) < \delta$ para todo $r \geq r_0$ a assim chegamos a uma contradição. ■

Lema 2.4.18. *Seja $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos discretos coletivamente assintoticamente compactos. Assuma que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ e $\mathbf{p}$ soluções estacionárias com $\mathbf{p}$ independente de η . Denote por $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_{\mathbf{p}}^{*,\eta}\}$ o conjunto das soluções estacionárias de $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ e defina $\mathcal{E}_0 = \{y_1^*, \dots, y_{\mathbf{p}}^*\}$. Dado $0 < \delta < \delta_0$, existe um $\eta_0 > 0$ e $\delta' > 0$ tal que, se para algum $1 \leq i \leq \mathbf{p}$, $d(u_0, y_i^*) < \delta'$ e,*

para algum $n_1 > 0$, $d(T_\eta^{n_1} u_0, y_i^*) \geq \delta$, então $d(T_\eta^n u_0, y_i^*) > \delta'$ para todo $n \geq n_1$ e para todo $\eta \in [0, \eta_0]$.

Demonstração: Assuma que, para algum $1 \leq i \leq \mathfrak{p}$, existe uma sequência u_k em X , $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, com $d(u_k, y_i^*) < \frac{1}{k}$ e sequências $n_k < m_k$ de números naturais tais que $d(T_{\eta_k}^{n_k} u_k, y_i^*) \geq \delta$ e $d(T_{\eta_k}^{m_k} u_k, y_i^*) < \frac{1}{k}$. Mostremos que isto contradiz (G2).

Note primeiramente que n_k podem ser escolhidos de forma que $T_{\eta_k}^{n_k} u_k \in B_\delta(y_i^*)$ para todo $j < n_k$ e, do Lema 2.4.13, $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. Tomando subsequências construímos uma solução global $\xi_0 : \mathbb{Z} \rightarrow X$ in $\mathcal{A}$ tal que $\xi_0(\ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow -\infty} y_i^*$. Do fato de que $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é gradient-like temos que existe um $y_j^* \in \mathcal{E}$, $y_j^* \neq y_i^*$, tal que $\xi_0(\ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} y_j^*$.

Da definição de ξ_0 e do fato de que $\xi_0(\ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} y_j^*$ temos que para cada $k' \in \mathbb{N}$ existe um $u_{k'} \in \phi_0(\mathbb{Z})$, com $d(u_{k'}, y_j^*) < \frac{1}{k'}$ e $n_{k'} \in \mathbb{N}$ tal que $d(T_{\eta_{k'}}^{n_{k'}} u_{k'}, y_j^*) \geq \delta$. Procedendo exatamente como no passo anterior obtemos uma solução $\xi_1 : \mathbb{Z} \rightarrow X$ in $\mathcal{A}$ tal que $\xi_1(k) \xrightarrow{k \rightarrow -\infty} y_j^*$. Do fato de que $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é gradient-like temos que existem $y_r^* \in \mathcal{E}$, $y_r^* \notin \{y_i^*, y_j^*\}$, tais que $\xi_1(\ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} y_r^*$. Continuando com este procedimento chegamos em uma contradição em um número finito de passos. ■

A maior vantagem dos semigrupos gradient-like sobre os semigrupos gradientes (aqueles com uma função de Liapunov) é a sua estabilidade por perturbações, que exploraremos a seguir. Este fato possibilitará a caracterização de atratores de semigrupos discretos que são pequenas perturbações de semigrupos discretos gradient-like, perturbar tais semigrupos novamente e ainda seremos capazes de dar uma caracterização dos atratores deste novo semigrupo discreto perturbado.

Agora estamos prontos para provar que (G1) e (G2) são estáveis por perturbações; isto é, o conceito de semigrupo discreto gradient-like é robusto sob perturbações.

Teorema 2.4.19. *Seja $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos discretos coletivamente assintoticamente compacto em um espaço métrico X que satisfaz*

- a) *para cada $\eta \in [0, 1]$ $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$.*
- b) *$\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$, e $d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, $1 \leq i \leq \mathfrak{p}$. Em adição, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que a única solução global contida em $B_\delta(y_i^{*,\eta})$ é $y_i^{*,\eta}$, $1 \leq i \leq \mathfrak{p}$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$.*

c) existe $\delta > 0$ tal que, se uma solução $\xi^{(\eta)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}_\eta$ é tal que $d(\xi_n^{(\eta)}, y_i^{*,\eta}) \leq \delta$, para todo $n \geq n_0$ (ou para todo $n \leq n_0$), $n_0 \in \mathbb{Z}$, então $\xi_n^{(\eta)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_i^{*,\eta}$ (ou $\xi_n^{(\eta)} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} y_i^{*,\eta}$).

d) $d(T_\eta u, T_0 u) \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$ uniformemente para u em subconjuntos compactos de X .

e) $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradient-like.

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \in [0, \eta_0]$, o semigrupo discreto $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é gradient-like.

Demonstração: Usaremos a contradição para provar que para η suficientemente pequeno, $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz que, dada uma solução global $\xi^{(\eta)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}_\eta$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n^{(\eta)}, y_i^{*,\eta}) = 0, \text{ para algum } 1 \leq i \leq p.$$

Note que $y_i^{*,\eta} \rightarrow y_i^{*,0} =: y_i^*$ e que existe um $\delta > 0$ tal que, para η suficientemente pequeno, se uma solução $\xi^{(\eta)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ satisfaz $d(\xi_n^{(\eta)}, y_i^*) \leq \delta$ para todo $n \geq n_0$ e para algum $n_0 \in \mathbb{Z}$, então $\xi_n^{(\eta)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_i^{*,\eta}$. Assuma que existe uma sequência $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e soluções globais correspondentes $\xi^{(k)}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$ tais que

$$\sup_{n \geq j} \text{dist}(\xi_n^{(k)}, \mathcal{E}) > \delta, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (2.4.1)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Pelo Corolário 2.4.16, tomando subsequências, $\xi_n^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi_n^{(0)}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ onde $\xi^{(0)}$ é uma solução global em $\mathcal{A}_0$. Como $\xi_n^{(0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_i^*$, para algum $1 \leq i \leq p$, temos que, dado $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existem $n_r > 0$ e $k_r \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi_{n_r}^{(k_r)}, y_i^*) < \frac{1}{r}$, para cada $k \geq k_r$. De (2.4.1), existe $n'_r > n_r$ tal que $d(\xi_n^{(k_r)}, y_i^*) < \delta$ para todo $n \in [n_r, n'_r]$ e $d(\xi_{n'_r}^{(k_r)}, y_i^*) \geq \delta$.

Tomando subsequências se necessário, seja $\xi_n^{(1)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \xi_{n+n'_r}^{(k_r)}$. Então, como $n'_r - n_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$ e $n_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} +\infty$, $d(\xi_n^{(1)}, y_i^*) \leq \delta$ para todo $n < 0$ e consequentemente $\xi_n^{(1)} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} y_i^*$. Além disso $\xi_n^{(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_j^*$ com $i \neq j$ por (G1) e (G2) para $\eta = 0$. Do fato de que $\xi_n^{(k_r)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \xi_n^{(1)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe um instante $n_m > 0$ e índices $k_m \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi_{n_m}^{(k_r)}, y_j^*) < \frac{1}{m}$ para todo $r \geq k_m$. Novamente, de (2.4.1), existem $n'_m > n_m$ tais que $d(\xi_n^{(k_m)}, y_j^*) < \delta$ para todo $n \in [n_m, n'_m]$ e $d(\xi_{n'_m}^{(k_m)}, y_j^*) \geq \delta$. Procedendo exatamente como antes obtemos uma solução global $\xi^{(2)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ tal que $\xi_n^{(2)} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} y_j^*$ e $\xi_n^{(2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_\ell^*$

com $\ell \notin \{i, j\}$. Em um número finito de passos, atingimos uma contradição. Isto prova que existe um $\eta_0 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em $\mathcal{A}_\eta$ com $\eta \leq \eta_0$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n^{(\eta)}, y_i^{*,\eta}) = 0.$$

Para provar que existe um $\eta_1 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em $\mathcal{A}_\eta$ com $\eta \leq \eta_1$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} d(\xi_n^{(\eta)}, y_j^{*,\eta}) = 0,$$

procedemos exatamente da mesma maneira. Isto completa a prova de que, para η suficientemente pequeno, $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz (G1).

Vamos provar que, para η suficientemente pequeno, $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz (G2). Novamente argumentaremos por contradição. Assuma que existe uma sequência $y_1^*, \dots, y_{q+1}^*$ em $\mathcal{E}$, um $0 < \delta < \delta_0$, uma sequência $\eta_k \rightarrow 0$, soluções globais $\xi^{k,i}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$, e tempos $n_1^k > m_1^k, \dots, n_q^k > m_q^k$ tais que

$$d(\xi_0^{k,i}, y_i^*) < \frac{1}{k}, \quad d(\xi_{m_i^k}^{k,i}, \mathcal{E}) \geq \delta, \quad d(\xi_{n_{i+1}^k}^{k,i}, y_{i+1}^*) < \frac{1}{k}, \quad 1 \leq i \leq q, \quad y_1^* = y_{q+1}^*.$$

Procedendo como na prova de (G1) construímos uma estrutura homoclínica para $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ e chegamos a uma contradição. ■

Como consequência imediata deste teorema nós obtemos o seguinte resultado de caracterização.

Corolário 2.4.20. *Sob as hipóteses do Teorema 2.4.19, existe um $\eta_0 > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_\eta = \cup_{i=1}^{\mathbf{p}} W^u(y_i^{*,\eta}), \quad \forall \eta \in [0, \eta_0].$$

Agora vamos substituir o conjunto de equilíbrio finito por uma coleção finita de conjuntos invariantes isolados. A definição de semigrupos discretos gradient-like será alterada de acordo e os resultados análogos possuem provas similares.

Definição 2.4.21. *Dizemos $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_{\mathbf{p}}^*\}$ é uma família de conjuntos invariantes isolados se existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i^*) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j^*) = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq \mathbf{p}$, e Ξ_i^* é o subconjunto invariante maximal de $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i^*) := \{z \in X : \text{dist}(z, \Xi_i^*) < \delta\}$.*

Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto com um atrator global $\mathcal{A}$ que contém uma família finita de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_{\mathbf{p}}^*\}$. Definimos

Definição 2.4.22. *Seja δ como na Definição 2.4.21 e fixe $\epsilon_0 \in (0, \delta)$. Para $\Xi^* \in \mathcal{S}$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, uma ϵ -cadeia de Ξ^* é uma sequência $\{\Xi_{\ell_i}^*, \dots, \Xi_{\ell_k}^*\} \subset \mathcal{S}$, uma sequência de números reais $n_1, \kappa_1, \dots, n_k, \kappa_k$, com $n_i > \kappa_i$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq \mathfrak{p}$, e uma sequência de vetores u_i , $1 \leq i \leq k$, tais que $u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_{\ell_i}^*)$, $T^{\kappa_i} u_i \notin \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\cup_{i=1}^k (\Xi_{\ell_i}^*))$ e $T^{n_i} u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_{\ell_{i+1}}^*)$, $1 \leq i \leq k$, com $\Xi^* = \Xi_{\ell_{k+1}}^* = \Xi_{\ell_1}^*$. Dizemos que $\Xi^* \in \mathcal{S}$ é recorrente por cadeias se existe um $\epsilon_0 \in (0, \delta)$ e ϵ -cadeias de Ξ^* a Ξ^* para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.*

Definição 2.4.23. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto em um espaço métrico X . Seja $\mathcal{A}$ o atrator global para $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$. Dizemos que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo gradient-like generalizado se existe uma família finita $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ de conjuntos invariantes isolados em $\mathcal{A}$ tal que,*

(GG1) *Para cada solução global $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$ existem $1 \leq i, j \leq \mathfrak{p}$ tais que*

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi_n, \Xi_i^*) = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi_n, \Xi_j^*) = 0.$$

(GG2) *Nenhum elemento de $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ é recorrente por cadeias.*

Como anteriormente introduzimos as definições de conjuntos instáveis e estáveis.

Definição 2.4.24. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto. O conjunto instável de um conjunto invariante isolado Ξ^* é dada por*

$$W^u(\Xi^*) = \{ \zeta \in X : \text{existe uma solução global } \xi : \mathbb{Z} \rightarrow X \\ \text{tal que } \xi_0 = \zeta \text{ e } \lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi_n, \Xi^*) = 0 \}.$$

O conjunto estável de um conjunto invariante isolado Ξ^* para $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é dada por

$$W^s(\Xi^*) = \{ \zeta \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(T^n \zeta, \Xi^*) = 0 \}.$$

A interseção de conjuntos instáveis (estáveis) com uma vizinhança de Ξ^* em X é chamado de conjunto instável (estável) local e é denotado por $W_{\eta, \text{loc}}^u$ ($W_{\eta, \text{loc}}^s$).

A demonstração do seguinte resultado é completamente análoga à do Teorema 2.4.19.

Teorema 2.4.25. *Seja $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos discretos coletivamente assintoticamente compactos em um espaço métrico X . Assuma que*

- a) $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem atrator global $\mathcal{A}_\eta$, $\eta \in [0, 1]$.
- b) $\mathcal{A}_\eta$ tem um número finito de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{S}_\eta = \{\Xi_{1,\eta}^*, \dots, \Xi_{\mathfrak{p},\eta}^*\}$, $\eta \in [0, 1]$, que se comportam semicontinuaamente superiormente e inferiormente $\eta \rightarrow 0$ ($\sup_{1 \leq i \leq \mathfrak{p}} [\text{dist}_H(\Xi_{i,\eta}^*, \Xi_{i,0}^*) + \text{dist}_H(\Xi_{i,0}^*, \Xi_{i,\eta}^*)] \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$). Em adição, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que as únicas soluções globais contidas em $B_\delta(\Xi_{i,\eta}^*)$ estão em $\Xi_{i,\eta}^*$, $1 \leq i \leq \mathfrak{p}$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$.
- c) $d(T_\eta^n u, T_0^n u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e uniformemente para u em subconjuntos compacto de X .
- d) existem $\delta > 0$ e $\eta_0 \in (0, 1]$ tais que, se $\eta < \eta_0$, $\xi^{(\eta)} : \mathbb{Z} \rightarrow X$ é uma solução global em $\mathcal{A}_\eta$, e $\text{dist}(\xi_n^{(\eta)}, \Xi_{i,\eta}^*) < \delta$ para todo $n \leq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), então $\text{dist}(\xi_n^{(\eta)}, \Xi_i^*) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$ ($\text{dist}(\xi_n^{(\eta)}, \Xi_i^*) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$)
- e) $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradient-like generalizado.

Então existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \leq \eta_0$, $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradient-like generalizado. Consequentemente, existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{A}_\eta = \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(\Xi_{i,\eta}^*), \quad \forall \eta \in [0, \eta_0].$$

Isto abre possibilidades para considerarmos perturbações não-autônomas de semigrupos não-lineares gradient-like generalizados com soluções periódicas. De fato, para cada $1 \leq m \in \mathbb{N}$, a aplicação no tempo um para o problema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \begin{cases} \pi^{-1}(1 - \frac{1}{2m+1} - r)^3 \text{sen} \frac{\pi}{1-r}, & r < 1 - \frac{1}{2m+1} \\ -(1 - \frac{1}{2m+1} - r)^2, & r \geq 1 - \frac{1}{2m+1} \end{cases} \\ \dot{\theta} &= \pi \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

tem atrator $\mathcal{A}_m = \{|r| \leq 1 - \frac{1}{2m+1}\}$, que é a união das variedades instáveis de Ξ_j^* , $1 \leq j \leq 2m+1$, onde Ξ_j^* é a solução 2-periódica correspondente à $r = 1 - \frac{1}{j}$, $1 \leq j \leq 2m+2$. Estas soluções periódicas são normalmente soluções hiperbólicas (se k é par, a órbita é

instável, e se k é ímpar, a órbita é estável). Neste caso, é fácil ver que o atrator $\mathcal{A}_m$ é a união das variedades instáveis das soluções periódicas $\{\Xi_j^* : 1 \leq j \leq 2m+1\}$. O Teorema 2.4.25 implica que qualquer perturbação pequena da semigrupo discreto dado pela aplicação no tempo um associado à (2.4.2) nos levará a um processo de evolução gradient-like generalizado e o atrator perturbado é caracterizado.

2.5 Atratores exponenciais

Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto não-linear que tem um atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é um *atrator exponencial* se existem $\varrho > 0$ e para cada conjunto limitado B uma constante positiva $C(B)$ tal que

$$\text{dist}_H(T^n B, \mathcal{A}) \leq C(B)e^{-\varrho n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mostraremos agora, seguindo Babin-Vishik [1], que o atrator global de um semigrupo discreto gradient-like que tem somente um número finito de soluções estacionárias, cada uma delas atraindo exponencialmente conjuntos instáveis locais é também um atrator exponencial.

Suponha que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz que, para cada conjunto limitado B , existem $c = c(B)$ e $L > 0$ tais que

$$d(T^n u, T^n v) \leq ce^{nL}d(u, v), \quad \text{para todo } u, v \in B, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5.1)$$

Teorema 2.5.1. *Assuma que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradient-like. Seja $\mathcal{A}$ seu atrator global e $\{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ suas soluções estacionárias. Sabemos que*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^p W^u(y_j^*) \quad (2.5.2)$$

Assuma que existam constantes positivas C, ϱ e δ_0 tais que, para $W_{\text{loc}}^u(y_j^) := W^u(y_j^*) \cap B_{\delta_0}(y_j^*)$,*

$$\text{dist}_H(T^n u_0, W_{\text{loc}}^u(y_j^*)) \leq Ce^{-n\varrho} \quad (2.5.3)$$

para cada $u_0 \in B_{\delta_0}(y_j^*)$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_{[0,n]}(u_0) \subset B_{\delta_0}(y_j^*)$, $1 \leq j \leq \mathfrak{p}$. Então, para todo $B \subset X$ limitado existe um $c(B) > 0$ tal que

$$\text{dist}_H(T^n u_0, \mathcal{A}) \leq c(B)e^{-n\varrho}, \text{ para todo } u_0 \in B. \quad (2.5.4)$$

Demonstração: A demonstração é fortemente baseada nas propriedades fundamentais de semigrupos gradient-like dados nos Lemas 2.4.5 e 2.4.6.

Do Lema 2.4.6, para δ suficientemente pequeno, existe $\delta' = \delta'(\delta) < \delta$ tal que, se $u_0 \in B_{\delta'}(y_i^*)$ e para algum $n_1 > 0$

$$T^{n_1} u_0 \notin B_{\delta}(y_i^*),$$

então

$$T^n u_0 \notin B_{\delta'}(y_i^*), \text{ para todo } n \geq n_1.$$

Agora, seja B um subconjunto limitado de X e $B_0 = \gamma^+(B)$. Por (2.5.1) e pelo fato do semigrupo possuir um atrator, B_0 é limitado. Assim, segue do Lema 2.4.5 que existe $N = N(\delta', B_0)$ tal que, para todo $u_0 \in B_0$

$$T^n u_0 \in \mathcal{O}_{\delta'} = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_{\delta'}(y_i^*) \text{ para algum } n \leq N.$$

Logo, dado $u_0 \in B_0$, existem sequências $\{n_-^i\}_{i=1}^M$ e $\{n_+^i\}_{i=1}^M$, $M \leq \mathfrak{p}$ e $\{y_i^*\}_{i=1}^M$ tais que

$$n_-^1 \leq N, \quad n_-^i - n_+^{i-1} \leq N, \quad 2 \leq i \leq M \quad n_+^M = +\infty$$

para os quais $T^n u_0 \in \mathcal{O}_{\delta}(y_i^*)$, para todo $n \in [n_-^i, n_+^i]$ e $i \in \{1, \dots, M\}$. Então, por (2.5.3)

$$\text{dist}_H(T^n u_0, \mathcal{A}) \leq \text{dist}_H(T^n u_0, W_{\text{loc}}^u(y_i^*)) \leq c_0(B_0)e^{-n\varrho}, \text{ para todo } n \in [n_-^i, n_+^i],$$

uma vez que $W_{\text{loc}}^u(y_j^*) \subset \mathcal{A}$, para todo $j \in 1, \dots, \mathfrak{p}$. Por outro lado, para $n \in [n_+^{i-1}, n_-^i]$,

$n = k + n_+^{i-1}$, para algum $k \leq N$, e usando (2.5.1) temos que

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(T^n u_0, \mathcal{A}) &= \text{dist}_H(T^{k+n_+^{i-1}} u_0, \mathcal{A}) \\ &= \text{dist}_H(T^k T^{n_+^{i-1}} u_0, T^k \mathcal{A}) \\ &\leq c_1(B_0) e^{kL} \text{dist}_H(T^{n_+^{i-1}} u_0, \mathcal{A}) \\ &\leq c_1(B_0) e^{kL} c_0(B_0) e^{-n_+^{i-1} \varrho} = c(B_0) e^{-n\varrho}. \end{aligned}$$

■

O seguinte resultado sobre atratores exponenciais uniformes para uma família de semigrupos discretos coletivamente assintoticamente compactos vale. Sua demonstração é idêntica à do Teorema 2.5.1 usando os Lemas 2.4.17 e 2.4.18 ao invés dos Lemas 2.4.5 e 2.4.6.

Teorema 2.5.2. *Seja X um espaço de Banach e $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos discretos coletivamente assintoticamente compactos em X que satisfazem*

- a) *para cada $\eta \in [0, 1]$ $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ e $\overline{\cup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto.*
- b) *$\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$, e $\sup_{1 \leq i \leq \mathfrak{p}} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$.*
- c) *existem constantes positivas M e ϱ e, para cada $1 \leq i \leq \mathfrak{p}$, uma vizinhança $B_{\delta_0}(y_i^*)$ de $y_i^{*,0}$ tal que, para cada $u_0 \in B_{\delta_0}(y_i^*)$, enquanto $\gamma_{[0,n]}(u_0) \subset B_{\delta_0}(y_i^*)$*

$$\text{dist}_H(T^n u_0, W_\eta^u(y_i^{*,\eta}) \cap B_{\delta_0}(y_i^*)) \leq M e^{-n\varrho},$$

- d) *$d(T_\eta^n u, T_0^n u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ uniformemente para u em subconjuntos compactos de X , para cada $n \in \mathbb{N}$.*

- e) *$\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradient-like.*

Então, existe um $\eta_0 > 0$ tal que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é gradient-like, e para cada conjunto limitado $B \subset X$, existe uma constante $c(B) > 0$ tal que

$$\text{dist}_H(T_\eta^n u_0, \mathcal{A}) \leq c(B) e^{-n\varrho}, \text{ para todo } u_0 \in B. \quad (2.5.5)$$

Encerramos esta seção com um resultado sobre atratores exponenciais para semigrupos discretos gradient-like. A principal diferença aqui é que a atração exponencial de conjuntos instáveis locais não é conhecida para uma situação geral e deve ser assumida.

Teorema 2.5.3. *Assuma que $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradient-like generalizado (veja Definição 2.4.23). Então*

$$\mathcal{A} = \cup_{i=1}^p W^u(\Xi_i^*).$$

Se além disso assumirmos (2.5.1) e que existe $\varrho > 0$ e, para cada $1 \leq i \leq p$, uma vizinhança V_i de Ξ_i^ tal que, para qualquer $u_0 \in V_i$, enquanto $T^n u_0 \in V_i$*

$$\text{dist}_H(T^n u_0, W^u(\Xi^*)) \leq M e^{-n\varrho},$$

para conjuntos limitados $B \subset X$, existe uma constante $c(B) > 0$ tal que

$$\text{dist}_H(T^n u_0, \mathcal{A}) \leq c(B) e^{-n\varrho}, \text{ para todo } u_0 \in B. \quad (2.5.6)$$

A demonstração deste resultado é idêntica à prova do Teorema 2.5.1 usando as seguintes generalizações dos Lemas 2.4.5 e 2.4.6 com demonstrações idênticas.

Lema 2.5.4. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto gradient-like generalizado com um número finito de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{E} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Dado $\delta < \delta_0$ e $B \subset X$ limitado, existe um $N = N(\delta, B) > 0$ tal que $\{T^n u_0 : 0 \leq n \leq N\} \cap \cup_{i=1}^p \mathcal{O}_\delta(\Xi_i^*) \neq \emptyset$ para todo $u_0 \in B$.*

Lema 2.5.5. *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$ e um número finito de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{E} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ em $\mathcal{A}$. Dado $0 < \delta < \delta_0$, existe um $\delta' > 0$ tal que, se para algum $1 \leq i \leq p$, $\text{dist}(u_0, \Xi_i^*) < \delta'$ e, para algum $n_1 > 0$, $\text{dist}(T^{n_1} u_0, \Xi_i^*) \geq \delta$, então $\text{dist}(T^n u_0, \Xi_i^*) > \delta'$ para todo $n \geq n_1$.*

2.6 Taxa de convergência de atratores exponenciais

Nosso próximo resultado diz que a atração exponencial local uniforme garante que a taxa de convergência de semigrupos não-lineares determinam a taxa de convergência dos atratores. A garantia da taxa de convergência exponencial para atratores é muito importante quando tratamos de problemas de aplicação, uma vez que é de grande valia sabermos como os atratores de um semigrupo se comportam à medida que o tempo transcorre.

Teorema 2.6.1. *Assuma que $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família de semigrupos discretos tendo atratores globais $\mathcal{A}_\eta$, $\eta \in [0, 1]$. Assuma que existam $\eta_0 > 0$, $\varrho > 0$, um conjunto limitado $B_0 \supset \cup_{\eta \in [0, \eta_0]} \mathcal{A}_\eta$ e uma constante $c = c(B_0) > 0$ tais que*

$$\text{dist}_H(T_\eta^n B_0, \mathcal{A}_\eta) \leq c e^{-n\varrho}, \quad \eta \in [0, \eta_0]. \quad (2.6.1)$$

Assuma também que existam c e $L > 0$ tais que

$$d(T_\eta^n u, T_0^n v) \leq c e^{nL} (d(u, v) + \eta), \quad \text{para todo } u, v \in B_0, \quad \forall \eta \in [0, \eta_0]. \quad (2.6.2)$$

Então,

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \text{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leq \bar{c} \eta^{\frac{\varrho}{\varrho+L}}.$$

Demonstração: Primeiro notemos que dado $\epsilon > 0$, se $\frac{1}{\varrho} \log \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\varrho} \log c \in [n, n+1)$ temos que

$$\text{dist}_H(T_\eta^n B_0, \mathcal{A}_\eta) < e^\varrho \epsilon, \quad \forall \eta \in [0, \eta_0],$$

pois temos $\left(\frac{\epsilon}{c}\right)^{\frac{1}{\varrho}} < e^{n+1}$, e assim $c e^{-n\varrho} < e^\varrho \epsilon$. Por (2.6.2)

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(T_\eta^n B_0, T_0^n B_0) &= \sup_{x \in B_0} \inf_{y \in B_0} d(T_\eta^n x, T_0^n y) \leq \sup_{x \in B_0} d(T_\eta^n x, T_0^n x) \leq c \eta e^{nL} \\ \text{dist}_H(T_0^n B_0, T_\eta^n B_0) &= \sup_{x \in B_0} \inf_{y \in B_0} d(T_0^n x, T_\eta^n y) \leq \sup_{x \in B_0} d(T_0^n x, T_\eta^n x) \leq c \eta e^{nL}. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Note que, como $\mathcal{A}_\eta \subset B_0$ e $\mathcal{A}_0 \subset B_0$ temos que $\mathcal{A}_\eta = T_\eta^n \mathcal{A}_\eta \subset T_\eta^n B_0$ e $\mathcal{A}_0 = T_0^n \mathcal{A}_0 \subset T_0^n B_0$.

Se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{1}{\varrho} \log \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\varrho} \log c \in [n, n+1)$, segue de (2.6.2) e (2.6.3) que

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) &\leq \text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, T_\eta^n B_0) + \text{dist}_H(T_\eta^n B_0, T_0^n B_0) + \text{dist}_H(T_0^n B_0, \mathcal{A}_0) \\ &\leq \text{dist}_H(T_\eta^n B_0, T_0^n B_0) + e^\varrho \epsilon \leq c e^{nL} \eta + e^\varrho \epsilon \leq c^{1+\frac{L}{\varrho}} \epsilon^{-\frac{L}{\varrho}} \eta + e^\varrho \epsilon \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) &\leq \text{dist}_H(\mathcal{A}_0, T_0^n B_0) + \text{dist}_H(T_0^n B_0, T_\eta^n B_0) + \text{dist}_H(T_\eta^n B_0, \mathcal{A}_\eta) \\ &\leq \text{dist}_H(T_0^n B_0, T_\eta^n B_0) + e^\varrho \epsilon \leq c e^{nL} \eta + e^\varrho \epsilon \leq c^{1+\frac{L}{\varrho}} \epsilon^{-\frac{L}{\varrho}} \eta + e^\varrho \epsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente, se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{1}{\varrho} \log \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\varrho} \log c \in [n, n+1)$,

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \text{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leq 2c^{1+\frac{L}{\varrho}} \epsilon^{-\frac{L}{\varrho}} \eta + 2e^\varrho \epsilon.$$

Minimizando o lado direito da expressão acima para $\epsilon \in (0, \infty)$ encontramos que $\epsilon = c \left(\frac{L}{\varrho e^\varrho} \right)^{\frac{\varrho}{\varrho+L}} \eta^{\frac{\varrho}{\varrho+L}}$ é ponto de mínimo. Como o lado esquerdo da expressão acima é independente de ϵ , temos que

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \text{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leq 2c \left(\left(\frac{L}{\varrho e^\varrho} \right)^{\frac{-L}{\varrho+L}} + \left(\frac{L e^L}{\rho} \right)^{\frac{\varrho}{\varrho+L}} \right) \eta^{\frac{\varrho}{\varrho+L}}$$

e a prova está completa. ■

Dimensão fractal e dimensão de Hausdorff de atratores

Muito do apresentado aqui está contido no trabalho de Mañé [17]. Somente algumas observações sobre semigrupos gradient-like não estão neste trabalho. Este capítulo tenta fazer com que estes resultados se tornem acessíveis para iniciantes, detalhando muitos passos pulados em Mañé [17].

Os atratores para semigrupos discretos em espaços de Banach de dimensão infinita têm dimensão de Hausdorff finita. Nesta seção apresentamos estes resultados. Antes de continuarmos, vamos brevemente relembrar as noções de dimensão de Hausdorff e dimensão fractal.

Uma das motivações para o estudo da dimensão fractal de atratores é o seguinte: mostraremos que conjuntos com dimensão fractal finita podem ser projetados num espaço de dimensão finita de maneira injetiva, e mostraremos também que os atratores para semigrupos discretos têm dimensão fractal finita. Logo, dado um problema discreto num espaço de Banach X de dimensão infinita

$$x_{n+1} = Tx_n,$$

cujo semigrupo associado $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem atrator global $\mathcal{A}$, podemos levá-lo a um espaço de dimensão finita Y , por meio de uma projeção $P : X \rightarrow Y$ injetiva em $\mathcal{A}$ e

considerar o problema

$$Px_{n+1} = PTx_n.$$

Se denotarmos $y_n = Px_n$, podemos reescrever o problema na forma

$$y_{n+1} = PTP^{-1}y_n,$$

desde que a inversa de P possa ser definida em todo o conjunto Y de maneira contínua, estendendo a inversa desta mesma projeção sobre a imagem do atrator $P(\mathcal{A})$. Uma vez feito este processo, conseguimos um homeomorfismo entre o atrator do problema de dimensão infinita e o atrator do problema de dimensão finita, sendo assim suficiente realizar o estudo dos atratores para sistemas em espaços de dimensão finita.

O grande problema aqui, que ainda continua sem solução, é encontrar uma extensão contínua da inversa da projeção $P : \mathcal{A} \rightarrow P(\mathcal{A})$ em todo Y . Uma vez construída esta inversa, toda a teoria de atratores pode ser reduzida ao caso finito dimensional.

3.1 Dimensão, dimensão de Hausdorff e dimensão fractal

Nesta seção apresentamos os conceitos básicos de dimensão que serão usados no que segue, seguindo os livros de Falconer [10] e Folland [11].

Seja K um espaço topológico. Dizemos que K tem dimensão finita se existe um inteiro n tal que, para toda a cobertura aberta $\mathcal{U}$ de K , existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}'$ de K refinando $\mathcal{U}$ com a propriedade de que cada ponto de K pertence a no máximo $n + 1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$. Neste caso, a *dimensão topológica* $\dim(K)$ de K é o mínimo n com esta propriedade. Este conceito tem a propriedade de que a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n e, se K é um espaço compacto de dimensão finita, então é homeomorfo a algum subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com $n = 2\dim(K) + 1$.

A seguir apresentamos uma revisão sobre medida de Hausdorff e dimensão de Hausdorff de um espaço métrico (X, ρ) , para uma abordagem mais detalhada vide Falconer[10] e Folland [11]. Uma *medida exterior* $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ é uma função que satisfaz

- i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, sempre que $A \subset B$;
- iii) $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ para qualquer sequência $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ em 2^X .

Um conjunto $A \subset X$ é dito μ^* -*mensurável* se para cada $E \subset X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

A seguir apresentamos a definição e algumas propriedades básicas da dimensão de Hausdorff. Para um espaço métrico (X, ρ) , $\alpha \geq 0$, e $\epsilon > 0$. Se $A \subset X$, seja

$$\mu_\epsilon^{(\alpha)}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(B_i))^\alpha : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \text{diam}(B_i) < \epsilon \right\},$$

com a convenção $\inf \emptyset = \infty$. Como $\mu_\epsilon^{(\alpha)}(A)$ cresce quando ϵ decresce definimos

$$\mu^{(\alpha)}(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_\epsilon^{(\alpha)}(A).$$

Proposição 3.1.1. *Seja (X, ρ) um espaço métrico. Para cada $\alpha > 0$ e $\delta > 0$, $\mu_\delta^{(\alpha)} : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ é uma medida exterior.*

Demonstração: Fixe $\delta > 0$. Claramente $\mu_\delta^{(\alpha)}(\emptyset) = 0$ e $\mu_\delta^{(\alpha)}(A) \leq \mu_\delta^{(\alpha)}(B)$ sempre que $A \subset B$. Se $\epsilon > 0$, $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em 2^X e para cada $j \in \mathbb{N}^*$ existe uma sequência $\{B_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ com $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^j$, $\text{diam}(B_i^j) < \delta$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$, e $\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(B_i^j))^\alpha \leq \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j) + \epsilon 2^{-j}$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j,i=1}^{\infty} B_i^j$ e

$$\mu_\delta^{(\alpha)}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(B_i^j))^\alpha \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j) + \epsilon.$$

Segue que $\mu_\delta^{(\alpha)}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j)$. O resultado segue agora imediatamente. ■

Com isto temos que

Teorema 3.1.2. *Seja (X, ρ) um espaço métrico. Para cada $\alpha > 0$, $\mu^{(\alpha)} : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ é uma medida exterior.*

Demonstração: Segue imediatamente da Proposição 3.1.1 que $\mu^{(\alpha)}$ é uma medida exterior. ■

Proposição 3.1.3. $\mu^{(\alpha)} : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ é invariante sob isometrias de X . Se Y é um

conjunto qualquer e $f, g : Y \rightarrow X$ são tais que

$$\rho(f(y), f(z)) \leq C \rho(g(y), g(z)), \quad \forall y, z \in Y,$$

então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leq C^\alpha \mu^{(\alpha)}(g(A))$ para todo $A \subset Y$.

Demonstração: A primeira afirmação é óbvia da definição de $\mu^{(\alpha)}$. Se $\mu^{(\alpha)}(g(A)) < \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que, para todo $0 < \delta < \delta_\epsilon$, existe uma cobertura de $g(A)$ por conjuntos B_j tal que $\text{diam}(B_j) \leq C^{-1}\delta$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^\alpha \leq \mu^{(\alpha)}(g(A)) + \epsilon.$$

Os conjuntos $B_{j'} = f(g^{-1}(B_j))$ cobrem $f(A)$, e se $g^{-1}(B_j) = F_j$, então $g(F_j) \subset B_j$ e $f(F_j) = B_{j'}$ e $\text{diam}(B_{j'}) \leq C \text{diam}(B_j) \leq \delta$, e

$$\mu_\delta^{(\alpha)}(f(A)) \leq C^\alpha \mu^{(\alpha)}(g(A)) + C^\alpha \epsilon.$$

O resultado agora segue fazendo $\delta \rightarrow 0$ e fazendo $\epsilon \rightarrow 0$. ■

Corolário 3.1.4. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma função Lipschitz contínua com constante de Lipschitz $C \geq 0$ e $A \subset X$. Então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leq C^\alpha \mu^{(\alpha)}(A)$.*

Proposição 3.1.5. *Seja $\alpha' > \alpha > 0$. Se $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$, então $\mu^{(\alpha')}(A) = 0$ e, se $\mu^{(\alpha')}(A) > 0$, então $\mu^{(\alpha)}(A) = \infty$.*

Demonstração: É suficiente provar a primeira afirmação, uma vez que a segunda é sua contrapositiva. Se $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$, para qualquer $\delta > 0$ existe $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, $\text{diam}(B_j) \leq \delta$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^\alpha \leq \mu^{(\alpha)}(A) + 1.$$

Mas para $\alpha' > \alpha$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^{\alpha'} \leq \delta^{\alpha' - \alpha} \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^\alpha \leq \delta^{\alpha' - \alpha} [\mu^{(\alpha)}(A) + 1],$$

logo $\mu_\delta^{(\alpha')} \leq \delta^{\alpha' - \alpha} [\mu^{(\alpha)}(A) + 1] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ e $\mu^{(\alpha')}(A) = 0$. ■

Definição 3.1.6. Para qualquer $A \subset X$, a dimensão de Hausdorff de A é definida pelo número real não-negativo dado por

$$\inf\{\alpha \geq 0 : \mu^{(\alpha)}(A) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : \mu^{(\alpha)}(A) = \infty\}.$$

Observação 3.1.7. Sabemos que (vide Kahane [14]) $\dim(K) \leq \dim_H(K)$.

Proposição 3.1.8. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função Lipschitz contínua e $A \subset X$. Então $\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A)$.

Demonstração: Pelo Corolário 3.1.4, temos que se $\mu^\alpha(A) = 0$ então $\mu^\alpha(f(A)) = 0$. Assim $\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A)$. ■

Corolário 3.1.9. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função Lipschitz contínua, $A \subset X$ e $G(f, A) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ o gráfico de f restrito à A . Então $\dim_H(G(f, A)) = \dim_H(A)$.

Demonstração: Sabemos que as aplicações $A \ni x \mapsto (x, f(x)) \in G(f, A)$ e $G(f, A) \ni (x, f(x)) \mapsto x \in A$ são Lipschitz contínuas, e da proposição acima segue que

$$\dim_H(G(f, A)) \leq \dim_H(A) \leq \dim_H(G(f, A)).$$

■

Proposição 3.1.10. Seja $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos em X e seja $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Então

$$\dim_H\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \dim_H(A_j).$$

Demonstração: Seja $\alpha > \sup_{j \in \mathbb{N}} \dim_H(A_j)$, assim

$$\mu^{\alpha} (A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^{\alpha} (A_j) = 0.$$

Portanto $\dim_H(A) \leq \alpha$. Como $\alpha > \sup_{j \in \mathbb{N}} \dim_H(A_j)$ é arbitrário, temos o resultado. ■

Vamos agora nos voltar para os atratores de tipo gradiente em espaços de Banach. Seja $\mathcal{E} = \{e_1^*, \dots, e_p^*\}$ o conjunto de equilíbrio do semigrupo $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, e suponha que

$T \in \mathcal{C}(X)$ é uma aplicação Lipschitz contínua. Sabemos que o atrator global $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^p W^u(e_j^*).$$

Suponha que o conjunto instável $W_{\text{loc}}^u(e_i^*)$ de cada ponto de equilíbrio é o gráfico de uma função Lipschitz contínua com domínio QX , onde Q é uma projeção de posto finito. Do Corolário 3.1.9 e da Proposição 3.1.8, sabemos que

$$\begin{aligned} \dim_H(W_{\text{loc}}^u(e_i^*)) &= \dim_H(QX) < \infty, \text{ para cada } i = 1, \dots, p, \\ \dim_H(T^n W_{\text{loc}}^u(e_i^*)) &\leq \dim_H(W_{\text{loc}}^u(e_i^*)). \end{aligned}$$

Facilmente, vemos que $W^u(e_i^*) = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n W_{\text{loc}}^u(e_i^*)$ e, utilizando a Proposição 3.1.10, temos

$$\begin{aligned} \dim_H(QX) &= \dim_H(W_{\text{loc}}^u(e_i^*)) \leq \dim_H(W^u(e_i^*)) = \\ &= \dim_H\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n W_{\text{loc}}^u(e_i^*)\right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H(T^n W_{\text{loc}}^u(e_i^*)) \leq \\ &\leq \dim_H(W_{\text{loc}}^u(e_i^*)) = \dim_H(QX), \end{aligned}$$

e portanto $\dim_H(W^u(e_i^*)) = \dim_H(QX)$, para todo $i = 1, \dots, p$.

Assim, como $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^p W^u(e_i^*)$, temos que

$$\dim_H(\mathcal{A}) = \dim_H(QX).$$

Portanto, atratores do tipo gradiente em espaços de Banach têm dimensão de Hausdorff finita. Infelizmente, isso não nos dá muita informação sobre o atrator, no sentido de tratá-lo de fato como um objeto de dimensão (algébrica) finita. Para isto, vamos introduzir o conceito de dimensão fractal, que nos permitirá inserir o atrator de maneira injetiva em um espaço vetorial de dimensão finita.

Seja K um espaço métrico compacto. Defina $N(r, K)$ como o número mínimo de bolas de raio r necessário para cobrir K . A *dimensão fractal* $c(K)$ de K é definida por:

$$c(K) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r, K)}{\log(1/r)}.$$

Alternativamente, $c(K)$ é o menor número real tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal

que

$$N(r, K) \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\epsilon}, \quad 0 < r < \delta.$$

Como podemos ver, multiplicando a expressão acima por r^α obtemos

$$\mu_r^{(\alpha)}(K) \leq N(r, K)r^\alpha \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\epsilon-\alpha}, \quad 0 < r < \delta.$$

Assim, $\mu_r^{(c(K)+\eta)}(K) \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{\epsilon-\eta}$ para $0 < r < \delta$ e para todo $\eta > 0$. Fazendo $r \rightarrow 0$ temos $\mu^{(c(K)+\eta)}(K) = 0$, para todo $0 < \eta < \epsilon$. Da definição de dimensão de Hausdorff, segue facilmente que

$$\dim_H(K) \leq c(K).$$

Mais ainda, $c(K)$ e $\dim_H(K)$ podem ser diferentes (vide Mañé [17]).

Lema 3.1.11. *Seja X um espaço vetorial normado e K_1, K_2 subconjuntos compactos de X . Se $c(K_i) < \infty$, $i = 1, 2$ então $c(K_1 + K_2) \leq c(K_1) + c(K_2)$.*

Demonstração: Note que, se $N_i = N(r, K_i)$ existem $x_1^i, \dots, x_{N_i}^i$ em K_i tais que $K_i \subset \bigcup_{j=1}^{N_i} B_r(x_j^i)$ e consequentemente $K_1 + K_2 \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} (B_r(x_j^1) + B_r(x_i^2))$. Como $\text{diam}(B_r(x_j^1) + B_r(x_i^2)) \leq 2r$ temos que $N(2r, K_1 + K_2) \leq N(r, K_1)N(r, K_2)$ e consequentemente

$$\begin{aligned} c(K_1 + K_2) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(2r, K_1 + K_2)}{\log(1/2r)} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r, K_1)N(r, K_2)}{\log(1/2r)} \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r, K_1)}{\log(1/r)} + \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r, K_2)}{\log(1/r)} = c(K_1) + c(K_2). \end{aligned}$$

■

Como consequência imediata do Lema 3.1.11 temos que

Corolário 3.1.12. *Seja X um espaço vetorial normado e K um subconjunto compacto de X . Se $c(K) < \infty$, então $c(K - K) \leq 2c(K)$.*

3.2 Projeções de conjuntos compactos com dimensão fractal finita

Como já mencionamos anteriormente, gostaríamos de enxergar os atratores de semigrupos como objetos de dimensão finita, mesmo quando o semigrupo está num espaço de

Banach de dimensão infinita. Para isso vamos mostrar que conjuntos compactos que têm dimensão fractal finita podem ser colocados, de maneira injetiva, num espaço vetorial de dimensão finita.

Antes de mostrarmos alguns resultados sobre dimensionalidade finita de conjuntos compactos invariantes para certas aplicações não-lineares vamos provar alguns resultados básicos de análise funcional.

Seja X um espaço de Banach e Y um subespaço de dimensão finita de X . Denote por $\mathcal{P}(X, Y)$ o subconjunto de $\mathcal{L}(X)$ consistindo das projeções com imagem Y .

Seja X um espaço de Banach, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos compactos de X e $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Lema 3.2.1. *Dado $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$, se*

$$A_{n,r} = \{v - w \in X : v, w \in K_n \text{ e } \|v - w\|_X \geq r\},$$

então $A_{n,r}$ é um subconjunto compacto de X .

Demonstração: Primeiramente mostremos que $A_{n,r}$ é fechado. De fato, $y_k = v_k - w_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$, com $v_k, w_k \in K_n$, $\|v_k - w_k\|_X$. Usando a compacidade de K_n , podemos assumir que, passando a subsequências, que $v_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v \in K_n$ e $w_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} w \in K_n$. Portanto $y = v - w$ e $\|v - w\|_X \geq r$ e $y \in A_{n,r}$. O que prova que $A_{n,r}$ é fechado.

Agora notemos que, $A_{n,r} \subset K_n - K_n$. Como $X \times X \ni (x, y) \mapsto x - y \in X$ é contínua, segue que $K_n - K_n$ é compacto e consequentemente $A_{n,r}$ é um compacto em X . ■

Lema 3.2.2. *Defina*

$$\mathcal{P}_{n,r} = \{P \in \mathcal{P}(X, Y) : \text{diam}(P^{-1}(y) \cap K_n) < r, \forall y \in Y\} \quad (3.2.1)$$

Se $P \in \mathcal{P}(X, Y)$, então $P \in \mathcal{P}_{n,r}$ se e somente se $P^{-1}(0) \cap A_{n,r} = \emptyset$

Demonstração: Assuma que existe um $y \in P^{-1}(0) \cap A_{n,r}$, então $Py = 0$ e existem $v, w \in K_n$ tais que $y = v - w$, $\|v - w\|_X \geq r$. Se $z = Pv = Pw$ então $\text{diam}(P^{-1}(z) \cap K_n) \geq r$ e $P \notin \mathcal{P}_{n,r}$.

Por outro lado, se $P^{-1}(0) \cap A_{n,r} = \emptyset$, para todo $y \in Y$ e $v, w \in P^{-1}(y) \cap K_n$, temos que $v - w \in P^{-1}(0)$ ($P(v - w) = y - y = 0$) e portanto devemos ter $\|v - w\|_X < r$. Como $P^{-1}(y) \cap K_n$ é compacto, segue que $\text{diam}(P^{-1}(y) \cap K_n) < r$. Isto completa a demonstração. ■

Lema 3.2.3. *Se $P_{n,r}$ definida por (3.2.1), então $P_{n,r}$ é aberto em $\mathcal{P}(X, Y)$ com a topologia uniforme de operadores.*

Demonstração: A demonstração deste resultado está baseada na caracterização de $P_{n,r}$ dado no Lema 3.2.2. Dada uma projeção $P \in P_{n,r}$, notemos que $\epsilon = \text{dist}(P^{-1}(0), A_{n,r}) > 0$. Escolha $s > 0$ tal que $B_s(0) \supset A_{n,r}$ e seja $\bar{P} \in \mathcal{P}(X, Y)$ tal que $\|P - \bar{P}\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\epsilon}{s}$. Então

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \bar{P}^{-1}(0)} \text{dist}(x, A_{n,r}) &=: \text{dist}(\bar{P}^{-1}(0), A_{n,r}) = \text{dist}((I - \bar{P})B_s(0), A_{n,r}) \\ &\geq \text{dist}((I - P)B_s(0), A_{n,r}) - \sup_{x \in B_s(0)} \|\bar{P}x - Px\|_X \\ &= \text{dist}(P^{-1}(0), A_{n,r}) - s\|\bar{P} - P\|_{\mathcal{L}(X)} > 0. \end{aligned}$$

Segue que $\bar{P}^{-1}(0) \cap A_{n,r} = \emptyset$ e $\bar{P} \in P_{n,r}$, provando que $P_{n,r}$ é aberto. ■

No que segue, se X é um espaço vetorial, denotaremos por X^* o seu dual; isto é, o conjunto dos funcionais lineares contínuos de X em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Lema 3.2.4. *Seja X um espaço de Banach e $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos compactos de X . Se $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, existe uma sequência $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ em X^* tal que, se $a \in A$ e $\phi_i(a) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $a = 0$.*

Demonstração: Agora consideremos o fecho W do subespaço de X gerado por A . Como A é uma união enumerável de conjuntos compactos, é separável e consequentemente W é um espaço de Banach separável. Do fato de que $B_1^{W^*}(0)$ é compacto e metrizável na topologia fraca* $\sigma(W^*, W)$, segue que existe uma sequência densa $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $(B_1^{W^*}(0), \sigma(W^*, W))$. Agora se $x \in W$ e $\phi_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\phi(x) = 0$ para todo $\phi \in B_1^{W^*}(0)$ e temos que $x = 0$. A sequência desejada é obtida estendendo ϕ_i a X através do Teorema de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.2.5 (Mañé [17], Lema 1.1). *Se $c(K) < \infty$ e Y é um subespaço de dimensão finita de X com $2c(K) + 1 < \dim Y < \infty$, então o conjunto $\{P \in \mathcal{P}(X, Y) : P|_K \text{ é injetora}\}$ é residual em $\mathcal{P}(X, Y)$.*

Demonstração: Usando a definição de $P_{n,r}$ dado no Lema 3.2.2, não é difícil ver que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} P_{n, \frac{1}{m}}$ é o conjunto das projeções em $\mathcal{P}(X, Y)$ que são injetivas em K . Para concluir a prova do teorema precisamos somente mostrar que $P_{n,r}$ é denso em $\mathcal{P}(X, Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $r > 0$, e o resultado seguirá do Teorema de Baire.

Seja Q a aplicação quociente de X sobre $Z = X/Y$. Então,

$$Q(A_{n,r}) \setminus \{0\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ Q(v) : v \in A_{n,r}, \|Q(v)\|_Z \geq \frac{1}{m} \right\}$$

onde, cada $\{Q(v) : v \in A_{n,r}, \|Q(v)\|_Z \geq \frac{1}{m}\}$ é compacto. Segue do Lema 3.2.4 que existe uma sequência $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ em Z^* , $\phi_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, se $\phi_i(z) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $z = 0$.

Seja

$$A_{n,r,i,j} = \{v \in A_{n,r} : |\phi_i(Q(v))| \geq 1/j\}.$$

Então

$$P^{-1}(0) \cap A_{n,r} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (P^{-1}(0) \cap A_{n,r,i,j}),$$

$$P_{n,r,i,j} = \{P \in \mathcal{P}(X, Y) : P^{-1}(0) \cap A_{n,r,i,j} = \emptyset\}$$

e

$$P_{n,r} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} P_{n,r,i,j}.$$

Como $A_{n,r}$ é compacto (vide Lema 3.2.1) segue facilmente que $A_{n,r,i,j}$ é compacto. Procedendo exatamente como na demonstração do Lema 3.2.3 obtemos que $P_{n,r,i,j}$ é aberto. Portanto, a prova fica reduzida a mostrar que para cada $n, i, j \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, $P_{n,r,i,j}$ é denso em $\mathcal{P}(X, Y)$.

Seja $P_0 \in \mathcal{P}(X, Y)$ e defina $\phi : Y \setminus \{0\} \rightarrow S = \{y \in Y : \|y\|_X = 1\}$ por $\phi(y) = y/\|y\|_X$. Então

$$\phi(P_0(A_{n,r}) \setminus \{0\}) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \phi(P_0(A_{n,r}) \cap [Y \setminus B_{1/\ell}^Y(0)])$$

e, da Proposição 3.1.10,

$$\dim_H(\phi(P_0(A_{n,r}))) \leq \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \dim_H(\phi(P_0(A_{n,r}) \cap [Y \setminus B_{1/\ell}^Y(0)]).$$

Note que, ϕ restrito à $P_0(A_{n,r}) \cap [Y \setminus B_{1/\ell}^Y(0)]$ é Lipschitz contínua. Consequentemente

$$\dim_H(\phi(P_0(A_{n,r}) \cap [Y \setminus B_{1/\ell}^Y(0)])) \leq \dim_H(P_0(A_{n,r})).$$

Portanto, usando o Corolário 3.1.12 temos que

$$\dim_H(\phi(P_0(A_{n,r}))) \leq \dim_H(P_0(A_{n,r})) \leq \dim_H(A_{n,r}) \leq 2c(K_n) \leq 2c(K).$$

Disto obtemos que existe $u \in S \setminus \phi(P_0(A_{n,r}))$. De fato, se este não é o caso, então $S \subset \phi(P_0(A_{n,r}))$ e $\dim(Y) - 1 = \dim_H(S) \leq \dim_H(\phi(P_0(A_{n,r}))) \leq 2c(K)$ o que contradiz a nossa hipótese.

Dado $\epsilon > 0$, $i, j \in \mathbb{N}$ definimos

$$P_\epsilon(x) = P_0(x) + \epsilon\phi_i(Q(x))u.$$

Como $P_\epsilon \in \mathcal{L}(X)$ com imagem em Y e lembrando que se $y \in Y$, então $Qy = 0$ é fácil ver que $P_\epsilon \in \mathcal{P}(X, Y)$.

Se $P_\epsilon(x) = 0$ temos que

$$P_0(x) = -\epsilon\phi_i(Q(x))u.$$

Se em adição $x \in A_{n,r,i,j}$ temos que $\phi_i(Q(x)) \neq 0$. Portanto

$$u = -(\epsilon\phi_i(Q(x)))^{-1}P_0(x).$$

Como $u \in S$, $u = \phi(u)$ e assim $\phi(P_0(x)) = P_0(x)$, o que nos dá $|\epsilon\phi_i(Q(x))| = 1$ e portanto $\pm u = \phi(P_0(x)) \in \phi(P_0(A_{n,r,i,j}))$. Consequentemente $u \in \phi(P_0(A_{n,r}))$ contradizendo a escolha de u e mostrando que $P_\epsilon \in P_{n,r,i,j}$.

Como $\|P_\epsilon - P_0\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$ temos que $P_{n,r,i,j}$ é denso em $\mathcal{P}(X, Y)$. ■

3.3 Dimensão de conjuntos compactos negativamente invariantes

Exploramos na seção anterior a projeção de conjuntos compactos com dimensão fractal finita em espaços vetoriais de dimensão finita de maneira injetiva. Para concluir o nosso estudo sobre atratores, resta-nos mostrar que estes têm de fato dimensão fractal finita, o que nos mostrará que eles são de fato objetos de dimensão finita.

Nesta seção, nos dedicamos a apresentar, corrigir e melhorar os resultados apresentados em Mañé [17] e em Hale [12] sobre dimensão de conjuntos compactos negativamente

invariantes.

Seja X_1, X_2 um espaço de Banach e defina

$$\mathcal{L}_\lambda(X_1, X_2) = \{T \in \mathcal{L}(X_1, X_2) : T = L + C \text{ com } C \text{ compacto e } \|L\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)} < \lambda\}.$$

Para prosseguirmos, introduziremos a noção de *distância de Banach-Mazur* entre dois espaços normados isomorfos e enunciaremos um resultado que melhora a estimativa obtida por Mañé, seguindo Carvalho-Langa-Robinson [6].

Definição 3.3.1. *Sejam X e Y dois espaços normados isomorfos. Definimos a distância de Banach-Mazur entre X e Y por*

$$d_{BM}(X, Y) = \log(\inf\{\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} : T \in \mathcal{L}(X, Y), T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)\}).$$

Podemos ver facilmente que $d_{BM}(X, Y) = 0$ se, e somente se, X e Y são isometricamente isomorfos.

Denotemos também $\mathbb{K}_\infty^m$ o espaço $\mathbb{K}^m$ munido da norma ℓ_∞ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$); isto é, para $\mathbf{z} \in \mathbb{K}^m$ com $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$, onde $z_i \in \mathbb{K}$ temos

$$\|\mathbf{z}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \|z_i\|_\mathbb{K}.$$

Nosso objetivo é realizar a estimativa $d_{BM}(X, \mathbb{K}_\infty^m) \leq \log m$, onde X é um espaço de Banach m -dimensional. Para isto faremos uso de uma base de Auerbach para X . Vamos então estabelecer a existência de tais bases para espaços reais, e depois para espaços complexos.

Lema 3.3.2. *Seja X um espaço normado real n -dimensional. Então, existe uma base $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ para X e uma base $B^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ para X^* com $\|x_i\|_X = \|x_i^*\|_{X^*} = 1$, e $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.*

Demonstração: Se $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, tome vetores $\{x_1, \dots, x_n\}$ com $\|x_i\|_X = 1$, $1 \leq i \leq n$ e tal que a envoltória convexa fechada $\overline{\text{co}}\{0, x_1, \dots, x_n\}$ tenha volume máximo. Defina x_i^* tal que $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq i \leq n$. Resta somente provar que $\|x_i^*\|_{X^*} = 1$, $1 \leq i \leq n$. Claramente $\|x_i^*\|_{X^*} \geq 1$.

Se $\|x_i^*\|_{X^*} > 1$, seja $y_i \in X$ com $\|y_i\|_X = 1$ tal que $x_i^*(y_i) > 1$. Note que $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i^*(x) = 1\}$ define um hiperplano paralelo ao hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i^*(x) = 0\} =$

$\text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n\}$. Portanto $\overline{co}\{0, x_1, \dots, x_n\}$ tem volume estritamente menor que $\overline{co}\{0, x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ e temos uma contradição. ■

Lema 3.3.3. *Seja X um espaço vetorial complexo normado n -dimensional. Então, existe uma base $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ para X e uma base $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ para X^* com $\|x_i\|_X = \|f_i\|_{X^*} = 1$ ($i = 1, \dots, n$) tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.*

Demonstração: Dada uma base $B_0 = \{y_1, \dots, y_n\}$ de X consideramos o espaço real X_2 dado pela combinações lineares sobre $\mathbb{R}$ de

$$B_2 = \{y_1, \dots, y_n, iy_1, \dots, iy_n\},$$

equipado com a norma $\|z\|_{X_2} = \|z\|_X$. Aplicamos agora a versão real deste resultado para X_2 , para produzir uma base $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$ para X_2 e $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}\}$ para X_2^* tal que $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$ e $\|\varphi_j\| = \|x_j\| = 1$.

Como $x_j \in X$ e $\{x_j\}$ deve gerar X sobre $\mathbb{C}$, podemos reordenar e renomear os $\{x_j\}$ (e as correspondentes $\{\varphi_j\}$) de forma que $\{x_1, \dots, x_n\}$ gerem X sobre $\mathbb{C}$. Segue que

$$\{x_1, \dots, x_n, ix_1, \dots, ix_n\}$$

gera X sobre $\mathbb{R}$. Mais ainda, cada ix_j deve ser uma combinação linear de $\{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$, como segue do fato de que $\{x_1, \dots, x_n\}$ forma uma base para X sobre $\mathbb{C}$ que $\{ix_1, x_2, x_n\}$ são linearmente independentes (sobre $\mathbb{C}$, logo certamente sobre $\mathbb{R}$).

Para $k = 1, \dots, n$ definimos um elemento $f_k \in X^*$ por

$$f_k(z) = \varphi_k(z) - i\varphi_k(iz) \quad z \in X,$$

onde para interpretar $\varphi_k(z)$ consideramos z como um elemento de X_2 (basta expandir em termos da base $\{x_1, \dots, x_n\}$ e separar as partes reais e imaginárias dos coeficientes). Mostremos agora que $\{f_k\}$ tem as propriedades desejadas.

Primeiramente, notemos que para $1 \leq k, j \leq n$,

$$f_k(x_j) = \varphi_k(x_j) - i\varphi_k(ix_j) = \delta_{kj},$$

como ix_j é uma combinação linear de $\{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$, e portanto $\varphi_k(ix_j) = 0$. Tudo que nos resta provar é que $\|x_k^*\| = 1$. Para isto seguimos um argumento padrão (por exemplo,

Yosida, 1980), escrevendo $f_k(z) = re^{-i\theta}$. Então

$$|f_k(z)| = e^{i\theta} f_k(z) = f_k(e^{i\theta} z),$$

logo $f_k(e^{i\theta} z)$ é real e positivo. Segue que

$$|f_k(z)| = f_k(e^{i\theta} z) = \varphi_k(e^{i\theta} z) \leq \|e^{i\theta} z\|_{X_2} \leq \|e^{i\theta} z\|_X = \|z\|_X,$$

e o lema está provado. ■

Agora, com a existência da base de Auerbach para espaços de dimensão finita, podemos prosseguir com um importante resultado sobre a distância de Banach-Mazur, que é uma melhora na estimativa feita por Mañé, que afirma que, se Y é um espaço de Banach m -dimensional sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, então

$$d_{BM}(Y, \mathbb{K}_\infty^m) \leq \log(m2^m).$$

Proposição 3.3.4. *Seja Y um espaço de Banach m -dimensional sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Então $d_{BM}(Y, \mathbb{K}_\infty^m) \leq \log m$.*

Demonstração: Seja $\{x_1, \dots, x_m\}$ uma base de Auerbach para Y , e $\{f_1, \dots, f_m\}$ a base correspondente de Y^* . Defina a aplicação $T : \mathbb{K}_\infty^m \rightarrow Y$ da seguinte maneira

$$T(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^m z_j x_j.$$

Então

$$\|T(\mathbf{z})\|_X = \left\| \sum_{j=1}^m z_j x_j \right\|_Y \leq \sum_{j=1}^m |z_j| \leq m \|\mathbf{z}\|_\infty,$$

e portanto

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_\infty^m, Y)} \leq m.$$

Por outro lado, se $x = \sum_{j=1}^m z_j x_j \in Y$ com $\|x\|_Y \leq 1$ então como $z_j = f_j(x)$,

$$\|T^{-1}(x)\|_\infty = \|\mathbf{z}\|_\infty = \max_{j=1, \dots, m} |z_j| = \max_{j=1, \dots, m} |f_j(x)| \leq \|x\|_Y,$$

o que implica que

$$\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, \mathbb{K}_\infty^m)} \leq 1,$$

e demonstra nosso resultado. ■

Lema 3.3.5. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. Se Y é um subespaço de X e $\dim(Y) = m$, temos*

$$N(\rho, B_r^Y(0)) \leq (m+1)^{\alpha m} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha m}, \quad 0 < \rho \leq r,$$

onde $\alpha = 1$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\alpha = 2$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. As bolas na cobertura podem ser tomadas com centro em Y .

Demonstração: Assuma primeiramente que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Como Y e $\mathbb{R}_\infty^m$ são m -dimensionais, $d_{BM}(Y, \mathbb{R}_\infty^m) \leq \log m$; em particular, existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}_\infty^m \rightarrow Y$ tal que $\|T\| \|T\|^{-1} \leq m$. Como

$$B_r^Y(0) = TT^{-1}(B_r^Y(0)) \subseteq T(B_{\|T^{-1}\|_r}^{\mathbb{R}_\infty^m}(0)),$$

e $B_{\|T^{-1}\|_r}^{\mathbb{R}_\infty^m}(0)$ pode ser coberta por

$$\left(1 + \frac{\|T^{-1}\|_r}{\rho/\|T\|}\right)^m = \left(1 + \|T\| \|T^{-1}\| \frac{r}{\rho}\right)^m \leq \left(1 + m \frac{r}{\rho}\right)^m \leq (m+1)^m \left(\frac{r}{\rho}\right)^m$$

bolas em $\mathbb{R}_\infty^m$ de raio $\rho/\|T\|$, segue que $B_r^Y(0)$ pode ser coberta pelo mesmo número de Y -bolas de raio ρ . Se X é complexo são necessárias $(1 + (a/b))^{2m}$ bolas de raio b em $\mathbb{C}_\infty^m$ para cobrir uma bola de raio a . ■

Antes de continuarmos precisamos do seguinte Lema:

Lema 3.3.6. *Seja X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}_{\lambda/2}(X)$. Então existe um subespaço Z de X de dimensão finita tal que*

$$\text{dist}(T[B_1^X(0)], T[B_1^Z(0)]) < \lambda. \quad (3.3.1)$$

Denotamos por $\nu_\lambda(T)$ o mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que (3.3.1) vale para algum subespaço n -dimensional de X .

Demonstração: Escreva $T = L + C$, onde $C \in \mathcal{K}(X)$ and $L \in \mathcal{L}(X)$ com $\|L\|_{\mathcal{L}(X)} < \lambda/2$. Mostremos primeiramente que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um subespaço de dimensão finita Z tal que

$$\text{dist}(C[B_1^X(0)], C[B_1^Z(0)]) < \epsilon. \quad (3.3.2)$$

Suponha que este não é o caso. Escolha algum $x_1 \in X$ com $\|x_1\|_X = 1$, e seja $Z_1 = \text{span}\{x_1\}$. Então

$$\text{dist}(C[B_1^X(0)], C[B_1^{Z_1}(0)]) \geq \epsilon,$$

e logo existe um $x_2 \in X$ com $\|x_2\|_X = 1$ tal que

$$\|Cx_2 - Cx_1\|_X \geq \epsilon.$$

Com $Z_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$, podemos encontrar x_3 com $\|x_3\|_X = 1$ tal que

$$\|Cx_3 - Cx_1\|_X \geq \epsilon \quad \text{e} \quad \|Cx_3 - Cx_2\|_X \geq \epsilon.$$

Continuando indutivamente podemos construir desta maneira uma sequência $\{x_j\}$ com $\|x_j\| = 1$ tal que

$$\|Cx_i - Cx_j\|_X \geq \epsilon \quad i \neq j,$$

contradizendo a compacidade de C .

Agora seja $\tilde{\lambda} < \lambda$ tal que $2\|L\|_{\mathcal{L}(X)} < \tilde{\lambda} < \lambda$, e escolha Z usando o argumento acima de forma que

$$\text{dist}(C[B_1^X(0)], C[B_1^Z(0)]) < \lambda - \tilde{\lambda}.$$

Se $x \in B_1^X(0)$ e $z \in B_1^Z(0)$, então

$$\|Tx - Tz\|_X \leq \|L(x - z)\|_X + \|Cx - Cz\|_X \leq \tilde{\lambda} + \|Cx - Cz\|_X$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{dist}(T[B_1^X(0)], T[B_1^Z(0)]) &\leq \tilde{\lambda} + \text{dist}(C[B_1^X(0)], C[B_1^Z(0)]) \\ &< \lambda. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. ■

Lema 3.3.7. *Se $T \in \mathcal{L}(X)$ e $Y \subset X$ é um subespaço com $\dim(Y) = m$, então*

$$N((1 + \gamma)\lambda r, T(B_r^X(0))) \leq (m + 1)^{\alpha m} \left(\frac{\|T\|_{\mathcal{L}(X)} + \lambda}{\gamma\lambda} \right)^{\alpha m}$$

para todo $r > 0$, $\lambda > \text{dist}(T[B_1^X(0)], T[B_1^Y(0)])$, $\gamma > 0$, onde $\alpha = 1$ (ou 2) se X é real (ou complexo).

Demonstração: Pela linearidade de T é suficiente mostrar o teorema para $r = 1$. Seja $\bar{r} = \|T\|_{\mathcal{L}(X)} + \lambda$. Cubra a bola $B_{\bar{r}}(0) \cap T(Y)$ por bolas $B_{\gamma\lambda}(x_i)$, $1 \leq i \leq k$, com $x_i \in B_{\bar{r}}(0)$ para todo i . Pelo Lema 3.3.5 podemos tomar

$$k \leq (m + 1)^{\alpha m} \left(\frac{\bar{r}}{\gamma\lambda} \right)^{\alpha m}.$$

A demonstração estará completa se mostrarmos que

$$\bigcup_{i=1}^k B_{(1+\gamma)\lambda}(x_i) \supset T(B_1(0)).$$

Se $\|v\|_X \leq 1$, como $\text{dist}(T[B_1^X(0)], T[B_1^Y(0)]) < \lambda$, existe $y \in B_1^Y(0)$ tal que

$$\|Tv - Ty\|_X < \lambda.$$

Chamando $v_2 = Ty$ temos

$$\|v_2\|_X \leq \|Tv\|_X + \|Tv - v_2\|_X \leq \|L\|_{T(X)}\|v\|_X + \lambda = \bar{r}.$$

Escolhendo $1 \leq i \leq k$ tal que $\|v_2 - x_i\|_X \leq \gamma\lambda$ temos que

$$\|Tv - x_i\|_X \leq \|Tv - v_2\|_X + \|v_2 - x_i\|_X \leq \lambda(1 + \gamma).$$

Isto completa a demonstração. ■

Lema 3.3.8. *Sejam K um subconjunto compacto de um espaço de Banach X e $f : X \rightarrow X$ uma função continuamente diferenciável em uma vizinhança de K . Suponha que K seja negativamente invariante para f ; isto é, $f(K) \supset K$, e suponha também que existam*

$0 < \alpha < 1$ e $M \geq 1$ tal que para cada $x \in K$,

$$N(\alpha, D_x f[B_1^X(0)]) \leq M. \quad (3.3.3)$$

Então

$$c(K) \leq \frac{\log M}{-\log \alpha}. \quad (3.3.4)$$

Demonstração: Primeiramente, garantimos que (3.3.3) é suficiente para fornecer limitações para o número de bolas necessárias para cobrir $f(B_r^X(x))$ quando r é suficientemente pequeno. Como f é continuamente diferenciável e K é compacto, para cada $\eta > 0$ existe $r_0 = r_0(\eta)$ tal que para qualquer $0 < r < r_0$ e qualquer $x \in K$,

$$f(B_r^X(x)) \subseteq f(x) + D_x f[B_r^X(0)] + B_{\eta r}^X(0).$$

Segue que

$$N((\alpha + \eta)r, f[B_r^X(x)]) \leq M \quad (3.3.5)$$

para todo $r \leq r_0(\eta)$.

Agora fixe η com $0 < \eta < 1 - \alpha$, e seja $r_0 = r_0(\eta)$. Cubra K com $N(r_0, K)$ bolas de raio r_0 . Aplique f para todo elemento desta cobertura. Como $f(K) \supseteq K$, isto nos fornece uma cobertura de K formada por conjuntos da forma $f(B_X(x, r_0))$, para algum $x \in K$. Segue de (3.3.5) que cada uma destas imagens pode ser coberta por M bolas de raio $(\alpha + \eta)r_0$, garantindo que $N((\alpha + \eta)r_0, K) \leq MN(r_0, K)$. Aplicando este argumento k vezes, temos

$$N((\alpha + \eta)^k r_0, K) \leq M^k N(r_0, K).$$

Segue da definição de $c(K)$ que

$$c(K) \leq \frac{\log M}{-\log(\alpha + \eta)},$$

e como $\eta > 0$ é arbitrário obtemos (3.3.4). ■

Teorema 3.3.9. *Seja X um espaço de Banach, $U \subset X$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow X$ uma aplicação continuamente diferenciável. Suponha que $K \subset U$ é um subconjunto compacto e que $D_x f \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$, para algum $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, para todo $x \in K$. Então $n =$*

$\sup_{x \in K} \nu_\lambda(D_x f)$ e $D = \sup_{x \in K} \|D_x f\|$ são finitos e

$$N(2\lambda, D_x f[B_1^X(0)]) \leq \left[(n+1) \frac{D}{\lambda} \right]^{\alpha n} \quad \text{para todo } x \in K, \quad (3.3.6)$$

onde $\alpha = 1$ se X é real e $\alpha = 2$ se X é complexo. Se ainda $f(K) \supset K$ então

$$c(K) \leq \alpha n \left\{ \frac{\log((n+1)D/\lambda)}{-\log(2\lambda)} \right\}. \quad (3.3.7)$$

Demonstração: Primeiramente mostremos que $n = \sup_{x \in K} \nu_\lambda(D_x f)$ é finito. Para cada $x \in K$, existe um subespaço linear de dimensão finita Z_x tal que

$$\text{dist}(D_x f[B_1^X(0)], D_x f[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda.$$

Como $D_{(\cdot)} f$ é contínua, segue que existe um $\delta_x > 0$ tal que

$$\text{dist}(D_y f[B_1^X(0)], D_y f[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda$$

para todo $y \in B_X(x, \delta_x)$, isto é, $\nu_\lambda(y) \leq \nu_\lambda(x)$ para estes tais y . A cobertura aberta de K formada pela união de $B_{\delta_x}^X(x)$ sobre x tem uma subcobertura finita, donde segue que $n < \infty$.

Agora, como $n = \sup_{x \in K} \nu_\lambda(D_x f) < \infty$, para cada $x \in K$ existe um subespaço Z_x de X com $\dim(Z_x) \leq n$ tal que

$$\text{dist}(D_x f[B_1^X(0)], D_x f[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda.$$

Para facilitar a notação vamos omitir o subscrito x em Z_x , e escreveremos $T = D_x f$.

Notando que $T(Z)$ é também um subespaço n -dimensional de X , podemos usar o Lemma 3.3.5 para cobrir a bola $B_{\|T\|}^{T(Z)}(0)$ com bolas $B_\lambda^X(y_i)$, $1 \leq i \leq k$, tal que $y_i \in B_{\|T\|}^X(0)$ para cada i e

$$k \leq \left[(n+1) \frac{\|T\|}{\lambda} \right]^{\alpha n}.$$

Logo

$$T[B_1^Z(0)] \subseteq B_{\|T\|}^{T(Z)}(0) = B_{\|T\|}^X(0) \cap T(Z) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_\lambda^X(y_i). \quad (3.3.8)$$

Completaremos a prova mostrando que

$$\bigcup_{i=1}^k B_{2\lambda}^X(y_i) \supseteq T[B_1^X(0)].$$

De fato, se $x \in B_X(0, 1)$ então segue de (3.3.1) que existe um $y \in T[B_1^Z(0)]$ tal que $\|Tx - y\|_X < \lambda$. Como $y \in T[B_1^Z(0)]$, segue de (3.3.8) que $\|y - y_i\|_X \leq \lambda$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$, e logo

$$\|Tx - y_i\|_X \leq \|Tx - y\|_X + \|y - y_i\|_X < 2\lambda,$$

isto é, $x \in B_{2\lambda}^X(y_i)$.

O resultado segue como enunciado, uma vez que n é uniforme sobre $x \in K$. A conclusão final segue do Lema 3.3.8. $\blacksquare$

Teorema 3.3.10. *Seja X um espaço de Banach, $U \subset X$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow X$ uma aplicação continuamente diferenciável. Se $K \subset U$ é um conjunto compacto tal que $f(K) \supset K$ e que existe $\epsilon > 0$ tal que $D_x f \in \mathcal{L}_{1-\epsilon}(X)$ para todo $x \in K$, então*

$$c(K) < \infty.$$

Se em adição $D_x f \in \mathcal{L}_{\frac{1}{4}}(X)$ para todo $x \in K$ temos que

$$c(K) \leq \frac{\log [(\nu + 1)^{\alpha\nu} \left(\frac{D+\lambda}{\epsilon\lambda}\right)^{\alpha\nu}]}{\log(1/2(1+\epsilon)\lambda)}$$

onde $D = \sup_{x \in K} \|D_x f\|$, $\nu = \sup_{x \in K} \nu_\lambda(D_x f)$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ e ϵ é tal que $(1+\epsilon)\lambda < 1/2$.

Demonstração: Primeiramente notemos que, se definirmos $\tilde{N}(r, K)$ como o número mínimo de bolas $B_r(x)$, $x \in X$ (e não $x \in K$ como na definição de $N(r, K)$) necessário para cobrir K , então

$$N(2r, K) \leq \tilde{N}(r, K) \leq N(r, K).$$

Portanto

$$\begin{aligned} c(K) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(2r, K)}{\log(1/2r)} = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(2r, K)}{\log(1/r)} \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tilde{N}(r, K)}{\log(1/r)} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r, K)}{\log(1/r)} = c(K). \end{aligned}$$

e

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tilde{N}(r, K)}{\log(1/r)} = c(K).$$

Como, para cada $y \in K$ temos que $D_y f \in \mathcal{L}_1(X)$; isto é $D_y f = L_y + C_y$ e como

$$D_x f^n = D_{f^{n-1}(x)} f \circ D_{f^{n-2}(x)} f \circ \cdots \circ D_x f = L + C$$

onde $D_{f^{n-j}(x)} f = L_j + C_j$, $L = L_1 \circ \cdots \circ L_n$ com $L_j \in \mathcal{L}_{1-\epsilon}(X)$, $C_j \in \mathcal{K}(X)$, $1 \leq j \leq n$, e $C \in \mathcal{K}(X)$.

Segue que, para n suficientemente grande, $g = f^n$ é tal que $D_x g \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$ para todo $x \in K$ e algum $0 < \lambda < 1/2$. Do Lema 3.3.6, para cada $x \in K$ existe um subespaço Z_x de X com $\dim(Z_x) \leq \nu$ tal que $\text{dist}(D_x g[B_1^X(0)], D_x g[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda$. Agora, do Lema 3.3.7 temos que para cada $r > 0$ e $\frac{1}{2\lambda} - 1 > \epsilon > 0$,

$$\bar{N}_\epsilon := N((1+\epsilon)\lambda r, D_x g(B_r(0))) \leq (\nu+1)^{\alpha\nu} \left(\frac{\|D_x g\|_{\mathcal{L}(X)} + \lambda}{\epsilon\lambda} \right)^{\alpha\nu},$$

onde $\nu = \sup_{x \in K} \nu_\lambda(D_x f) < \infty$.

Notemos que, da compacidade de K e da diferenciabilidade contínua de g temos que, dado $\frac{1}{2\lambda} - 1 - \epsilon > \eta > 0$, existe $r_0 > 0$ tal que

$$g(B_r(x)) \subset g(x) + D_x g(B_r(0)) + B_{\eta\lambda r}(0), \quad 0 < r < r_0.$$

Consequentemente, existem $y_i \in D_x g(B_r(0))$, $1 \leq i \leq \bar{N}_\epsilon$, tais que

$$g(B_r(x)) \subset g(x) + \bigcup_{i=1}^{\bar{N}_\epsilon} B_{(1+\epsilon)\lambda r}(y_i) + B_{\eta\lambda r}(0) = g(x) + \bigcup_{i=1}^{\bar{N}_\epsilon} B_{(1+\epsilon+\eta)\lambda r}(y_i), \quad 0 < r < r_0.$$

Como uma consequência imediata, temos que

$$\tilde{N}((1 + \epsilon + \eta)\lambda r, g(B_r(x))) \leq \lambda_1 := (\nu + 1)^{\alpha\nu} \left(\frac{D + \lambda}{\epsilon\lambda} \right)^{\alpha\nu}$$

Então, se K pode ser coberto por bolas $B_r(x_1), \dots, B_r(x_n)$, com $x_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, segue que $K \subset g(K) \subset \cup_{i=1}^n g(B_r(x_i))$. Pela desigualdade acima $g_r(B_r(x_i))$ pode ser coberto por menos do que λ_1 bolas de raio $(1 + \epsilon + \eta)\lambda r$. Portanto K pode ser coberto por $\lambda_1 n$ bolas de raio $(1 + \epsilon + \eta)\lambda r$. Em outras palavras,

$$\tilde{N}((1 + \epsilon + \eta)\lambda r, K) \leq \lambda_1 N(r, K) \leq \lambda_1 \tilde{N}\left(\frac{r}{2}, K\right)$$

para todo $0 < r < r_0$. Então,

$$\tilde{N}(2(1 + \epsilon + \eta)\lambda r, K) \leq \lambda_1 \tilde{N}(r, K)$$

para todo $0 < r < \frac{r_0}{2}$.

Ainda mais, se $0 < r < (1 + \epsilon + \eta)\lambda r_0$ podemos escrever $r = (2(1 + \epsilon + \eta)\lambda)^k \bar{r}$ com $(1 + \epsilon + \eta)\lambda r_0 \leq \bar{r} < \frac{r_0}{2}$, $k \geq 1$, e aplicando a última desigualdade

$$\tilde{N}(r, K) = \tilde{N}((2(1 + \epsilon + \eta)\lambda)^k \bar{r}, K) \leq \lambda_1^k \tilde{N}(\bar{r}, K) \leq \lambda_1^k \tilde{N}((1 + \epsilon + \eta)\lambda r_0, K)$$

e então,

$$\begin{aligned} \frac{\log \tilde{N}(r, K)}{\log(1/r)} &\leq \frac{k \log \lambda_1 + \log \tilde{N}((1 + \epsilon + \eta)\lambda r_0, K)}{k \log \left(\frac{1}{2(1 + \epsilon + \eta)\lambda} \right) + \log \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)} \\ &= \frac{\log \lambda_1}{\log \left(\frac{1}{2(1 + \epsilon + \eta)\lambda} \right) + \frac{1}{k} \log \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)} + \frac{\frac{1}{k} \log(\tilde{N}((1 + \epsilon + \eta)\lambda r_0, K))}{\log \left(\frac{1}{2(1 + \epsilon + \eta)\lambda} \right) + \frac{1}{k} \log \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)}. \end{aligned}$$

Notando que $\frac{1}{k} \leq \frac{\log \left(\frac{1}{2(1 + \epsilon + \eta)\lambda} \right)}{\log \left(\frac{1}{\bar{r}} \right)}$ e tomando que $\limsup$ quando $r \rightarrow 0$ obtemos

$$c(K) \leq \frac{\log \lambda_1}{\log(1/2(1 + \epsilon + \eta)\lambda)}.$$

Como esta desigualdade vale para todo $\frac{1}{2\lambda} - 1 - \epsilon > \eta > 0$ e $\lim_{\eta \rightarrow 0} (1 + \epsilon + \eta)\lambda = (1 + \epsilon)\lambda$

obtemos

$$c(K) \leq \frac{\log \lambda_1}{\log \left(\frac{1}{2(1+\epsilon)\lambda} \right)} = \frac{\log [(\nu+1)^{\alpha\nu} \left(\frac{D+\lambda}{\epsilon\lambda} \right)^{\alpha\nu}]}{\log \left(\frac{1}{2(1+\epsilon)\lambda} \right)}$$

e isto é precisamente o que pretendíamos mostrar. ■

A seguir mostraremos uma aplicação interessante dos resultados acima que mostram a compatibilidade da limitação obtida no teorema anterior. Ela diz que podemos tomar λ tão pequeno quanto quisermos sem alterarmos ν , ν é um limitante superior da dimensão fractal de K .

Corolário 3.3.11. *Seja X um espaço de Banach e assuma que $T \in \mathcal{C}^1(X)$ é tal que $\{T^n : n \geq 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ e $D_x T$ tem posto finito $\nu(x)$ com $\sup_{x \in \mathcal{A}} \nu(x) := \nu < \infty$. Então,*

$$c(\mathcal{A}) \leq \alpha\nu,$$

onde $\alpha = 1$ (ou 2) se X for real (ou complexo).

Demonstração: Claramente, para cada $\lambda > 0$ e $x \in \mathcal{A}$, $D_x T \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$ para todo $\lambda > 0$. Consequentemente, para cada $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

$$c(\mathcal{A}) \leq \alpha\nu \frac{\log((\nu+1)\frac{D}{\lambda})}{\log(\frac{1}{2\lambda})}.$$

Tomando o limite quando $\lambda \rightarrow 0$ temos que $c(\mathcal{A}) \leq \alpha\nu$. ■

Corolário 3.3.12. *Seja $L, K \in \mathcal{C}^1(X)$. Se $T = L + K$, assuma que o semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Assuma que K tem posto finito em $\mathcal{A}$; isto é, $R(D_x K) \subset Y(x)$ onde $Y(x)$ é subespaço de X com $\sup_{x \in \mathcal{A}} \dim(Y(x)) := \nu < \infty$, e que L satisfaz*

$$\sup_{x \in \mathcal{A}} \|D_{T^{n-1}(x)} L \circ \cdots \circ D_x L\| \leq c(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

onde $c(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Então, se $\sup_{x \in \mathcal{A}} \dim(D_x K) = \nu < \infty$, então

$$c(\mathcal{A}) \leq \alpha\nu,$$

onde $\alpha = 1$ (ou 2) se X é real (ou complexo).

Demonstração: Da demonstração anterior podemos fazer λ tão pequeno quanto desejarmos. De fato, somente precisamos garantir que mudando λ não alteramos ν . Isto segue do fato de que

$$\begin{aligned} D_x T^n &= D_{T^{n-1}(x)} T \circ \cdots \circ D_x T = (D_{T^{n-1}(x)} L + D_{T^{n-1}(x)} K) \circ \cdots \circ (D_x L + D_x K) \\ &= D_{T^{n-1}(x)} L \circ \cdots \circ D_x L + K_n := L_n + K_n \end{aligned}$$

onde K_n é um operador compacto com posto menor ou igual a ν . Claramente, existe Z_n subespaço de X tal que $\dim(Z_n) \leq \nu$ e

$$\text{dist}(D_x T^n[B_1^x(0), D_x T^n[B_1^{Z_n}(0)])] \leq \|D_{T^{n-1}(x)} L \circ \cdots \circ D_x L\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c(n).$$

Portanto, dado $\lambda > 0$ mantendo ν e tomando n grande podemos garantir que $D_x T^n \in \mathcal{L}_\lambda$ com $\nu_\lambda(D_x T^n) \leq \nu$.

Como $T^n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ temos que

$$c(\mathcal{A}) \leq \alpha \nu \frac{\log((\nu + 1) \frac{D}{\lambda})}{\log(\frac{1}{2\lambda})},$$

para cada $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Fazendo $\lambda \rightarrow 0$ obtemos que

$$c(\mathcal{A}) \leq \alpha \nu$$

e isto completa a prova. ■

Construção de atratores exponenciais fractais

A atração exponencial é uma propriedade muito importante e traz consigo muitas outras propriedades desejadas para aplicações. Claramente, a atração exponencial nos garante que o transiente (tempo decorrido até que as soluções sejam indistinguíveis daquelas no atrator) é “pequeno”. Isto pode ter importância fundamental para tornar viável a análise numérica de tais sistemas.

Já vimos que alguns semigrupos gradient-like possuem esta propriedade e que dela decorrem propriedades importantes como a continuidade de atratores sob perturbação.

Infelizmente, a atração exponencial falha em diversas classes de semigrupos discretos (veremos exemplos a seguir). Neste capítulo, seguindo Eden-Foias-Nicolaenko-Temam [9], nos dedicamos a corrigir e melhorar os resultados apresentados e construiremos os chamados *atratores exponenciais fractais* para aplicações $S : X \rightarrow X$ Lipschitz contínuas em um subconjunto X compacto em um espaço de Hilbert. Esta nova classe de atratores engloba a classe dos atratores exponenciais, e é construída simplesmente retirando a hipótese da invariância e pedindo simplesmente a invariância positiva do conjunto, mas ainda sim, pedindo que este novo atrator tenha dimensão fractal finita e, logicamente, tenha atração exponencial. No que segue vamos construir de fato atratores exponenciais fractais.

Consideremos X um subconjunto compacto e conexo de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e S uma aplicação Lipschitz contínua de X em X e denotemos a constante de Lipschitz de S

em X por

$$\text{Lip}_X(S) = L.$$

Se S está restrito à X , então o semigrupo $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ dado por

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^n X.$$

Já sabemos que $\mathcal{A}$ atrai todas as órbitas de X , isto é, a semi-distância de Hausdorff $\text{dist}_H(S^n X, \mathcal{A})$ tende a zero, quando n tende a infinito. Entretanto, a taxa de convergência deste atrator não é controlada exponencialmente, como mostram os seguintes exemplos:

Exemplo 1: Seja $H = \mathbb{R}$, e defina $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$Sx = \frac{x}{1+x}, \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Então $\mathcal{A} = \{0\}$, mas a taxa de convergência para $\mathcal{A}$ é polinomial. De fato, $S^n x = \frac{x}{1+nx}$ e portanto

$$|S^n x| = \left| \frac{x}{1+nx} \right| \leq \left| \frac{1}{1+nx} \right|,$$

que claramente tem taxa de convergência polinomial.

Exemplo 2: Considere a equação diferencial $\dot{u} = -(u-1)^2$ no intervalo $[1, \infty)$. O atrator para este problema é $\mathcal{A} = \{1\}$, pois $\dot{u} < 0$. Resolvendo esta equação chegamos em $u(t) = 1 + \frac{u(0)-1}{1+(u(0)-1)t}$, para todo $t \in [1, \infty)$ e $u(0) \geq 1$. Mas então $|u(t) - 1| \leq \frac{u(0)-1}{1+(u(0)-1)t}$, ou seja, a atração para este problema não é exponencial. O semigrupo discreto definido por $Su(0) = u(1)$ tem propriedades de atração análogas àsquelas do Exemplo 1.

Para resolver esta deficiência nestes atratores, vamos introduzir o conceito de *atrator exponencial fractal*.

Definição 4.0.13. Um conjunto compacto $\mathcal{M}$ é chamado um atrator exponencial fractal para (S, X) se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \subseteq X$ e

$$i) \quad S\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M},$$

$$ii) \quad c(\mathcal{M}) < \infty; \text{ isto é, } \mathcal{M} \text{ tem dimensão fractal finita,}$$

$$iii) \quad \text{existem constantes positivas } c_0 \text{ e } c_1 \text{ tais que}$$

$$\text{dist}_H(S^n X, \mathcal{M}) \leq c_0 e^{-c_1 n}, \quad \forall n \geq 1$$

Definição 4.0.14. Fixemos $\alpha \in \mathbb{R}$. Dizemos que S tem a propriedade squeezing em X se para algum $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ existe uma projeção ortogonal $P = P(\delta)$ de posto igual a $N_0(\delta)$ tal que para $u, v \in X$, tais que

$$\|Su - Sv\|_H > \sqrt{1 + \alpha^2} \|P(Su - Sv)\|_H$$

então

$$\|Su - Sv\|_H \leq \delta \|u - v\|.$$

Para podermos construir atratores exponenciais fractais, vamos considerar subconjuntos de $S^k(X)$ que são maximais com respeito à *propriedade do cone*

$$\|u - v\|_H \leq \sqrt{1 + \alpha^2} \|P(u - v)\|_H. \quad (4.0.1)$$

Para isto, definimos

$$Z = S(\bar{B}_r^H(a) \cap X). \quad (4.0.2)$$

Lema 4.0.15. Existe um subconjunto E de Z que é maximal com relação à propriedade do cone

$$\|u - v\|_H \leq \sqrt{1 + \alpha^2} \|P(u - v)\|_H, \quad \forall u, v \in E.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{V}$ a família de todos os subconjuntos $A \subset Z$ que satisfazem a propriedade do cone. Claramente $\mathcal{V}$ é não-vazio, uma vez que $\{x\} \in \mathcal{V}$ para cada $x \in Z$, e é parcialmente ordenado pela relação de inclusão. Seja $\mathcal{G}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{V}$. Então, $\cup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{V}$ é um limitante superior para $\mathcal{G}$. Segue do Lema de Zorn que existe um elemento maximal $E \in \mathcal{V}$. ■

Notemos que o conjunto E é fechado, e logo, compacto. Além disso, P é injetiva em E . Portanto, toda cobertura de E pode ser obtida através de uma cobertura de PE . Usando a injetividade de P em E , podemos estimar o número de ρ -bolas necessárias para cobrir Z em termos de N_0 e ρ .

Lema 4.0.16. Para cada $\rho > 0$, existe um número $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo subconjunto $B \subset PE$ com mais que K elementos existem $x, y \in B$, com $x \neq y$, tal que $\|x - y\| < \rho$.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que seja falso, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe

um subconjunto $B_n \subset PE$ com mais do que n elementos tal que

$$\|x - y\| \geq \rho, \text{ para todo } x, y \in B_n, \text{ com } x \neq y.$$

Assim, para cada n , conseguimos um conjunto $\{x_1^n, \dots, x_n^n\}$ tais que $\|x_i^n - x_j^n\| \geq \rho$, para todo $1 \leq i, j \leq n$ com $i \neq j$. Vamos construir agora uma sequência que não possui nenhuma subsequência convergente, contrariando a compacidade de PE .

Temos a sequência $\{x_1^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset PE$ e como PE é compacto, $\{x_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{x_1^{n_k}\}$ convergente para, digamos, x_1^∞ . Agora, temos a sequência $\{x_2^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset PE$, e considere $\{x_2^{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Da mesma forma $\{x_2^{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{x_2^{n_{k_j}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para x_2^∞ , e como $\|x_1^{n_{k_j}} - x_2^{n_{k_j}}\| \geq \rho$, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos $\|x_1^\infty - x_2^\infty\| \geq \rho$.

Indutivamente, construímos assim uma sequência $\{x_k^\infty\}_{k \in \mathbb{N}}$ que não possui nenhuma subsequência convergente. ■

Lema 4.0.17. *Para qualquer $2\delta < \theta < 1$, existe uma cobertura de Z , definido em (4.0.2), por K_0 θr -bolas, centradas em $y_j \in E$, com $j = 1, \dots, K_0$; mais ainda, K_0 pode ser estimado por*

$$K_0 \leq \left(\frac{3L\sqrt{1+\alpha^2}}{\theta - 2\delta} + 1 \right)^{N_0}. \quad (4.0.3)$$

onde δ é como dado na Definição (4.0.14).

Demonstração: Como $PE \subseteq PZ \subseteq P\mathcal{H}$, temos

$$\text{diam}(PE) \leq \text{diam}(PZ) = \sup_{u,v \in Z} |Pu - Pv| \leq \sup_{u,v \in Z} |u - v| = \text{diam}(Z),$$

pois como P é ortogonal, $\|P\| = 1$. Assim, se $\Omega = \bar{B}_r^H(a) \cap X \bar{B}_r^H(a) \cap X$

$$\begin{aligned} \text{diam}(PE) \leq \text{diam}(Z) &= \sup_{u,v \in Z} \|u - v\| = \sup_{x,y \in \Omega} \|Sx - Sy\| \\ &\leq \sup_{x,y \in \Omega} L\|x - y\| \leq 2Lr. \end{aligned}$$

Agora, dado $\rho > 0$ arbitrário, podemos cobrir PE com K_0 bolas $B_\rho^{P\mathcal{H}}(Py_j)$ com $y_j \in E$ e $j = 1, \dots, K_0$, uma vez que PE é compacto. Note que a injetividade de P em E garante que os pontos Py_j são pontos distintos em $P\mathcal{H}$ para diferentes índices j . Para podermos estimar K_0 , usaremos o fato de que $\text{diam}(PE) \leq 2Lr$. Observemos que, se K é o número máximo de pontos em PE separados por uma distância maior que ρ , então as ρ -bolas

centradas nestes pontos cobrem PE , logo $K_0 \leq K$. Por outro lado, $\frac{\rho}{2}$ -bolas centradas em Py_j , $j = 1, \dots, K$ são disjuntas e

$$\cup_{j=1}^K B_{\frac{\rho}{2}}^{P\mathcal{H}}(Py_j) \subseteq \mathcal{O}_{\frac{\rho}{2}}^{P\mathcal{H}}(PE) := \left\{ y \in P\mathcal{H} : \text{dist}(y, PE) < \frac{\rho}{2} \right\}$$

Como $\text{diam}(B_{\frac{\rho}{2}}^{P\mathcal{H}}(PE)) \leq 2Lr + \rho$, por uma comparação de volumes obtemos

$$K\omega_{N_0} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{N_0} \leq \omega_{N_0} \left(Lr + \frac{\rho}{2} \right)^{N_0},$$

onde ω_{N_0} é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^{N_0}$. Consequentemente, obtemos

$$K_0 \leq K \leq \left(\frac{2Lr}{\rho} + 1 \right)^{N_0}.$$

Afirmamos que simplesmente expandindo o raio desta cobertura de PE podemos obter uma cobertura para E . De fato, dada esta cobertura de PE , temos

$$\|Py - Py_j\|_H < \|y - y_j\|_H \rightarrow \|y - y_j\|_H < \sqrt{2}\rho, \text{ para todo } y \in E,$$

e portanto, $\mathcal{U} = \{B_{\sqrt{2}\rho}^H(y_j)\}_{j=1}^{K_0}$ é uma cobertura de E .

Nos resta mostrar que conseguimos de fato uma cobertura para Z . Se $y \in E$, então $Py \in PE$ e assim $\|Py - Py_i\| < \rho$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, K_0\}$. Se, por outro lado, $z \in Z \setminus E$, então, por definição de Z e E , existem $u, v \in \bar{B}_r(a) \cap X$ tais que

$$z = Su \text{ e } y = Sv \in E, \text{ com } \|z - y\| > \sqrt{1 + \alpha^2} \|P(z - y)\|.$$

Segue da propriedade de squeezing que

$$\|z - y\| = \|Su - Sv\| \leq \delta \|u - v\| \leq 2r\delta.$$

Como $y \in E$, existe $y_j \in E$ tal que $\|Py - Py_j\| < \rho$ e portanto $\|y - y_j\| < \sqrt{1 + \alpha^2}\rho$, assim

$$\|z - y_j\| \leq \|z - y\| + \|y - y_j\| \leq 2r\delta + \sqrt{1 + \alpha^2}\rho < \theta r$$

se escolhermos $\rho = \frac{2(\theta-2\delta)r}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$. Portanto,

$$K_0 \leq \left(\frac{3L\sqrt{1+\alpha^2}}{\theta-2\delta} + 1 \right)^{N_0}.$$

Notemos também que $\sqrt{1+\alpha^2}\rho < \theta r$, e assim $\mathcal{U} = \{B_{\theta r}(y_j)\}_{j=1}^{K_0}$ é uma cobertura com as propriedades desejadas. ■

Observação 4.0.18. *i) Quando $\alpha = 1$ a estimativa pode ser simplificada, tomando $\rho = \frac{2(\theta-2\delta)r}{3}$, e toma a seguinte forma*

$$K_0 \leq \left(\frac{3L}{\theta-2\delta} + 1 \right)^{N_0};$$

ii) Quando δ pode ser tomado no intervalo $(0, \frac{1}{4})$, podemos escolher $2\delta < \theta = 4\delta < 1$, e a estimativa fica

$$K_0 \leq \left(\frac{3L\sqrt{1+\alpha^2}}{2\delta} + 1 \right)^{N_0} \leq \left(\frac{2L\sqrt{1+\alpha^2}}{\delta} + 1 \right)^{N_0}.$$

Agora vamos proceder indutivamente, a fim de construir uma cobertura para $S^{k+1}(X)$, para $k \geq 1$. Para começar este processo, seja $R > 0$ e $a \in X$ tais que $X \subseteq \bar{B}_R(a)$. Denotemos por E_1 um subconjunto maximal de $S(X \cap \bar{B}_R(a)) = S(X)$ para a propriedade do cone 4.0.1. Então do Lema 4.0.17, existem $\{a_{j_1}\}_{j_1=1}^{K_0} \subset E_1$ tais que

$$S(X) = S(X \cap \bar{B}_R(a)) \subseteq \bigcup_{j_1=1}^{K_0} \bar{B}_{\theta R}(a_{j_1}) \cap S(X),$$

onde K_0 pode ser estimado por 4.0.3.

Vamos agora construir uma cobertura para $S^2(X)$. Para isto, seja $E_{2;j_1}$ o subconjunto maximal de $S(\bar{B}_{\theta R}(a_{j_1}) \cap X)$ para a propriedade do cone, para $j_1 = 1, \dots, K_0$. Como no Lema 4.0.17, podemos cobrir cada um destes compactos com K_1 bolas $\bar{B}_{\theta^2 R}(a_{j_1;j_2}) \cap S(X)$, com $j_2 = 1, \dots, K_1$. Tomando na demonstração do Lema 4.0.17 $r = \theta R$ e $\rho = \frac{2(\theta-2\delta)\theta R}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$

temos

$$K_1 \leq \left(\frac{3L\sqrt{1+\alpha^2}}{\theta - 2\delta} + 1 \right)^{N_0}.$$

Assim, usando a mesma estimativa para K_0 e K_1 , podemos tomar $K_1 = K_0$. Ainda mais, notamos que

$$\bigcup_{j_1=1}^{K_0} E_{2;j_1} \subset \bigcup_{j_1=1}^{K_0} S(\bar{B}_{\theta R}(a_{j_1}) \cap SX) \subset S^2 X,$$

e

$$S^2 X \subset \bigcup_{j_1=1}^{K_0} S(\bar{B}_{\theta R}(a_{j_1}) \cap SX) \subset \bigcup_{j_1, j_2=1}^{K_0} \bar{B}_{\theta^2 R}(a_{j_1; j_2}) \cap S^2 X. \quad (4.0.4)$$

Procedendo iterativamente podemos cobrir $S^{k+1}(X)$, isto é, existem $a_{j_1; j_2; \dots; j_k} \in E_{k+1; j_1; \dots; j_k}$, onde $E_{k+1; j_1; \dots; j_k}$ é o subconjunto maximal de $S(\bar{B}_{\theta^k R}(a_{j_1; \dots; j_k}) \cap S^k(X))$ com relação à propriedade do cone, tais que

$$\bigcup_{j_1, \dots, j_k=1}^{K_0} E_{k+1; j_1, \dots, j_k} \subset \bigcup_{j_1, \dots, j_k=1}^{K_0} S(\bar{B}_{\theta^k R}(a_{j_1; \dots; j_k}) \cap S^k(X)) \subset S^{k+1}(X)$$

e

$$S^{k+1}(X) \subset \bigcup_{j_1, \dots, j_{k+1}=1}^{K_0} \bar{B}_{\theta^{k+1} R}(a_{j_1, \dots, j_{k+1}}) \cap S^{k+1}(X).$$

Vamos agora passar de fato para a construção de um atrator exponencial fractal $\mathcal{M}$ para S . Para tanto, vamos nos munir de vários lemas, até chegarmos de fato em uma expressão para $\mathcal{M}$. Mas antes, vamos definir

$$E^{(k)} = \bigcup_{j_1, \dots, j_k=1}^{K_0} \{a_{j_1, \dots, j_k}\}.$$

Lema 4.0.19. *O atrator global $\mathcal{A}$ tem dimensão fractal $c(\mathcal{A})$ finita, que pode ser estimada por $\kappa(\mathcal{A}) = \frac{\log K_0}{\log(1/\theta)}$.*

Demonstração: Seja $N(\rho, \mathcal{A})$ o número mínimo de bolas de raio ρ que são necessárias para cobrir $\mathcal{A}$, que é compacto. Então, se $\theta < 1$, usando a idéia do Lema 4.0.17, para $X = \mathcal{A}$, e lembrando que $s(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, obtemos uma cobertura de $\mathcal{A}$ por bolas de raio $\theta\rho$,

onde

$$N(\theta\rho, \mathcal{A}) = N(\theta\rho, S(\mathcal{A})) \leq K_0 N(\rho, \mathcal{A}).$$

Agora, por meio de iterações,

$$N(\theta^j \rho, \mathcal{A}) \leq K_0^j N(\rho, \mathcal{A}), \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Se escolhermos $\epsilon > 0$ tal que $\theta^{j+1}\rho < \epsilon \leq \theta^j \rho$, e usando o fato de que $N(\epsilon, \mathcal{A})$ é uma função decrescente de ϵ obtemos

$$N(\epsilon, \mathcal{A}) \leq N(\theta^{j+1}\rho, \mathcal{A}) \leq K_0^{j+1} N(\rho, \mathcal{A}).$$

Como $\log(1/\epsilon) \geq -\log(\theta^j \rho)$, temos que

$$\frac{\log N(\epsilon, \mathcal{A})}{\log(1/\epsilon)} \leq \frac{\log(K_0^{j+1} N(\rho, \mathcal{A}))}{-\log(\theta^j \rho)}.$$

Portanto,

$$c(\mathcal{A}) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon, \mathcal{A})}{\log(1/\epsilon)} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(K_0^{j+1} N(\rho, \mathcal{A}))}{-\log(\theta^j \rho)} = \kappa(\mathcal{A}).$$

■

Lema 4.0.20. Defina $C_\infty = \overline{\cup_{k=1}^\infty E^{(k)}}$, então

$$c(C_\infty) \leq \kappa(\mathcal{A}).$$

Demonstração: De fato, sabemos que

$$C_\infty \subset \overline{\cup_{k=1}^n E^{(k)}} \cup S^{n+1}(X),$$

e se $\epsilon > 0$ é tal que $\theta^{n+1} < \epsilon \leq \theta^n$ então existe $\rho \in [1, 1/\theta]$ tal que $\epsilon = \theta^{n+1}\rho$. Assim

$$\begin{aligned}
N(\epsilon, C_\infty) &\leq \sum_{k=1}^n N(\epsilon, E^{(k)}) + N(\epsilon, S^{n+1}(X)) \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^n K_0^k + K_0^{n+1} N(\rho, X) \leq \\
&\leq K_0^{n+1} (n + N(\rho, X)),
\end{aligned}$$

pois cada $E^{(k)}$ é um conjunto finito com K_0^k pontos e $K_0 \leq 1$. Assim

$$\frac{\log N(\epsilon, c(C_\infty))}{\log(1/\epsilon)} \leq \frac{\log[K_0^{n+1} (n + N(\rho, X))]}{-\log(\theta^n \rho)},$$

e portanto $c(C_\infty) \leq \kappa(\mathcal{A})$. ■

Lema 4.0.21. *Se W é um subconjunto compacto de X e $c(W) \leq \kappa(\mathcal{A})$ então*

$$\Gamma_\infty^W = \overline{\bigcup_{j=0}^\infty S^j(W)}$$

tem dimensão fractal finita e $c(\Gamma_\infty^W) \leq \kappa(\mathcal{A})$.

Demonstração: Notemos que

$$\Gamma_\infty^W \subseteq \overline{\bigcup_{j=0}^n S^j(W) \cup S_{n+1}(X)}.$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $\theta^{n+1} < \epsilon \leq \theta^n$ e $\rho \in [1, 1/\theta]$ tal que $\theta^{n+1}\rho = \epsilon$. Logo

$$\begin{aligned}
N(\epsilon, \Gamma_\infty^W) &\leq \sum_{j=0}^n N(\epsilon, S^j(W)) + K_0^{n+1} N(\rho, X) \leq \\
&\leq \sum_{j=0}^n K_0^j N(\epsilon \theta^{-j}, W) + K_0^{n+1} N(\rho, X).
\end{aligned}$$

Como $c(W) \leq \kappa(\mathcal{A})$, para todo $d > \kappa(\mathcal{A})$ existe $\delta_0 = \delta_0(d) > 0$ tal que $N(\delta, W) < \left(\frac{1}{\delta}\right)^d$

para $\delta \leq \delta_0$. Agora, para $\delta_0 < \delta < 1$ temos

$$N(\delta, W) \leq N(\delta_0, W) \leq \left(\frac{1}{\delta_0}\right)^d = \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^d \left(\frac{1}{\delta}\right)^d = c_d \left(\frac{1}{\delta}\right)^d,$$

onde $c_d = \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^d \geq 1$. Assim, para qualquer $\delta \in (0, 1)$ temos $N(\delta, W) \leq c_d \left(\frac{1}{\delta}\right)^d$, e a estimativa acima assume a forma

$$N(\epsilon, \Gamma_\infty^W) \leq c_d \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^d \sum_{j=0}^n (K_0 \theta^d)^j + K_0^{n+1} N(\rho, X).$$

Afirmamos que $K_0 \theta^d \leq 1$, pois caso contrário, teríamos $\log K_0 > d \log(1/\theta)$, o que implica que $d < \kappa(\mathcal{A})$, contradizendo a escolha de d . Logo, temos

$$N(\epsilon, \Gamma_\infty^W) \leq c_d \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^d n + K_0^{n+1} N(\rho, X).$$

Substituindo $n + 1 = \frac{\log(\rho/\epsilon)}{\log(1/\theta)}$, temos

$$\begin{aligned} N(\epsilon, \Gamma_\infty^W) &\leq \frac{c_d}{\rho^d} \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^d \frac{\log(\rho/\epsilon)}{\log(1/\theta)} + N(\rho, X) K_0^{\frac{\log(\rho/\epsilon)}{\log(1/\theta)}} \leq \\ &\leq \frac{c_d}{\rho^d} \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^d \frac{\log(\rho/\epsilon)}{\log(1/\theta)} + N(\rho, X) \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^{\frac{\log K_0}{\log(1/\theta)}} \leq \\ &\leq \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^d \left[\frac{c_d}{\rho^d} \frac{\log(\rho/\epsilon)}{\log(1/\theta)} + N(\rho, X) \right], \end{aligned}$$

pois $\kappa(\mathcal{A}) < d$. Portanto

$$c(\Gamma_\infty^W) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon, \Gamma_\infty^W)}{\log(1/\epsilon)} \leq d,$$

e como $d > \kappa(\mathcal{A})$ foi tomado arbitrário temos $c(\Gamma_\infty^W) \leq \kappa(\mathcal{A})$. ■

Definição 4.0.22. *Sejam $\mathcal{A}$ o atrator global de S e $\Gamma_\infty = \Gamma_\infty^{C_\infty}$. Defina $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \Gamma_\infty$.*

Segue diretamente da definição que $\mathcal{M}$ é fechado e $S(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Agora o seguinte lema se refere à dimensão fractal de $\mathcal{M}$.

Lema 4.0.23. $c(\mathcal{M}) \leq \kappa(\mathcal{A})$.

Demonstração: Como ambas $c(\mathcal{A})$ e $c(\Gamma_\infty)$ são majoradas por $\kappa(\mathcal{A})$, para qualquer $d > \kappa(\mathcal{A})$ existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\epsilon \leq \epsilon_0$ implica em

$$N(\epsilon, \mathcal{A}) \leq (1/\epsilon)^d \text{ e } N(\epsilon, \Gamma_\infty) \leq (1/\epsilon)^d.$$

Portanto

$$N(\epsilon, \mathcal{M}) \leq N(\epsilon, \mathcal{A}) + N(\epsilon, \Gamma_\infty) \leq 2(1/\epsilon)^d.$$

Usando a definição de $c(\mathcal{M})$, temos

$$c(\mathcal{M}) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon, \mathcal{M})}{\log(1/\epsilon)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2 + d \log(1/\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} = d.$$

Portanto, $c(\mathcal{M}) \leq \kappa(\mathcal{A})$. ■

Lema 4.0.24. Para todo $x \in X$, $\text{dist}_H(S^k(x), \mathcal{M}) \leq R\theta^k$.

Demonstração: Notemos que $S^k(x) \in S^k(X)$ e portanto existe $a_{j_1, \dots, j_k}$ em $E^{(k)}$ tal que

$$\|S^k(x) - a_{j_1, \dots, j_k}\| < R\theta^k.$$

Como $E^{(k)} \subset \mathcal{M}$ por construção, segue que

$$\text{dist}_H(S^k(x), \mathcal{M}) = \inf_{m \in \mathcal{M}} \|S^k(x) - m\| \leq R\theta^k,$$

e como a escolha de x é arbitária

$$\text{dist}_H(S^k(X), \mathcal{M}) = \sup_{x \in X} \inf_{m \in \mathcal{M}} \|S^k(x) - m\| \leq R\theta^k.$$

■

Construímos assim um atrator exponencial fractal $\mathcal{M}$ para S , o que nos dá o teorema principal deste capítulo

Teorema 4.0.25. O conjunto $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \Gamma_\infty$ é um atrator exponencial fractal para a aplicação S .

Referências Bibliográficas

- [1] Babin, A.V., Vishik, M.I., *Attractors in Evolutionary Equations* Studies in Mathematics and its Applications **25**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992.
- [2] Bollobás, B. *Linear Analysis: Introductory Course*. Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, Cambridge UK (1990).
- [3] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, (2) (1987).
- [4] Carvalho, A.N., Langa, J.A., *An extension of the concept of gradient systems which is stable under perturbation*. Journal of Differential Equations, 246 (7) 2646-2668 (2009)
- [5] Carvalho, A.N., Langa, J.A., Robinson, J.C., Suárez, A., *Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system*. Journal of Differential Equations, 236 (2007) 570–603.
- [6] Carvalho, A.N., Langa, J.A., Robinson, J.C., *Finite-dimensional global attractors in Banach spaces*, Royal Society of Mathematics.
- [7] Chepyzhov, V.V., Vishik, M.I. *Attractors for Equations of Mathematical Physics* (2002) (Providence, AMS Colloquium Publications vol. 49, A.M.S).
- [8] Deimling, K. *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag (1985).
- [9] Eden, A., Foias, C., Nicolaenko, B., Temam, R., *Exponential Attractor for Dissipative Evolution Equations*, Research in Applied Mathematics, John Wiley & Sons (1994).
- [10] Falconer, K.J., *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics **85**, Cambridge University Press (1985).

-
- [11] Folland, G.B., *Real Analysis: Modern techniques and their applications*, Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons (1984).
- [12] Hale, J.K., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs Number 25 (American Mathematical Society, Providence, RI) (1988).
- [13] Hale, J.K., Raugel, G., *Lower semicontinuity of attractors of gradient systems and applications*, Ann. Mat. Pura Appl. **154** (4) (1989), 281–326.
- [14] Kahane, J.P., *Measures et dimensions, Turbulence and the Navier Stokes equation*, Lecture Notes in Mathematics **565** Springer-Verlag, New York, (1976).
- [15] Krasnosel'skii, M.A., Zabreiko, P.P. *Geometrical methods of nonlinear analysis*. Translated from the Russian by Christian C. Fenske. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 263. Springer-Verlag, Berlin, 1984. xix+409 pp.
- [16] Ladyzhenskaya, O.A., *Attractors for semigroups and evolution equations*, Lezioni Lincee, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1991)
- [17] Mañé, R. *On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps*, Lecture Notes in Mathematics **898** 230-242 Springer-Verlag, New York, 1981.
- [18] Munkres, J.R. *Topology*, Second Edition, Prentice Hall (2000).
- [19] Robinson, J.C. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems, From Basic Facts to Actual Calculations*, Cambridge University Press, Cambridge UK (2001).
- [20] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill (1976).
- [21] Temam, R. *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. New York: Springer.

Índice Remissivo

- absorção, 9
- atração, 9
- atrator
 - do tipo gradiente, 25
 - exponencial, 40
 - exponencial fractal, 72
 - global, 14
- base de Auerbach, 58
- conjunto
 - α -limite, 8
 - μ^* -mensurável, 49
 - ω -limite, 8
 - estável, 38
 - instável, 23, 38
 - invariante, 9
 - negativamente invariante, 9
 - positivamente invariante, 9
- dimensão
 - de Hausdorff, 51
 - fractal, 52
 - topológica, 48
- distância de Banach-Mazur, 58
- ϵ -cadeia, 27
- estrutura homoclínica, 30
- função de Liapunov, 22
- medida
 - de não-compacidade de Kuratowski, 9
 - exterior, 48
- órbita
 - positiva, 6
 - global, 7
 - negativa, 7
 - para trás, 7
 - parcial, 6
- ponto
 - de equilíbrio, 10
 - fixo, 10
 - recorrente por cadeias, 27
- Princípio da Contração de Banach, 5
- projeção, 54
- propriedade
 - do cone, 73
 - squeezing, 73
- semi-distância de Hausdorff, 9
- semicontinuidade
 - inferior, 19
 - superior, 19
- semigrupo discreto, 6
 - com atrator do tipo gradiente, 25
 - condicionalmente eventualmente compacto, 13
 - assintoticamente compacto, 12

- coletivamente assintoticamente compacto, 32
- compacto dissipativo, 13
- eventualmente compacto, 13
- eventualmente limitado, 16
- gradient-like, 28
- gradiente, 22
- limitado, 7
- limitado dissipativo, 13
- ponto dissipativo, 13
- solução, 7
 - de equilíbrio, 10
 - estacionária, 10
 - global, 7
 - para trás, 7
- Teorema do Gráfico Fechado, 5