Medidas transversas, correntes e sistemas dinâmicos

Jorge Luis Crisostomo Parejas

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

Medidas transversas, correntes e sistemas dinâmicos

Jorge Luis Crisostomo Parejas

Orientador: **Prof. Dr. Ali Tahzibi**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Fevereiro de 2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P227m

Parejas, Jorge Luis Crisostomo
Medidas transversas, correntes e sistemas dinâmicos / Jorge Luis Crisostomo Parejas; orientador Ali Tahzibi. -- São Carlos, 2013.
100 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

1. Medidas transversas. 2. Correntes. 3. Medida de máxima entropia. I. Tahzibi, Ali, orient. II. Título.

À minha família.

Não conseguimos encontrar respostas para todo os nossos problemas. As que encontramos apenas nos levaram a formular novas questões. De uma certa maneira sentimo-nos tão confusos como antes, mas acreditamos que agora estamos confusos num nível mais alto e sobre coisas mais importantes.

Encontrado na porta do Instituto de
Matemática na Universidade de
Tromso-Noruega

Agradecimentos

Ao meu orientador Ali Tahzibi, pelos momentos de discussão frutífera e pelo enriquecimento da minha experiencia matemática.

Aos meus pais, Herminio e Julia, ao meus irmãos e irmas, por terem sempre me apoiado nas minhas decisões, por terem contribuído de forma fundamental na minha formação pessoal.

À minha noiva Luz, por ter sido compreensiva com minha ausência durante o período do mestrado e por ter me dado ânimos para prosseguir diante das intempéries.

Ao meus amigos peruanos e brasileiros, meus orientadores da graduação. Graças a eles, descobri o meu interesse pela matemática e pude receber um treinamento na minha graduação que me permitiu estar aqui hoje.

Aos professores do instituto que, com toda certeza, contribuíram para meu crescimento profissional, em especial para os professores: Ederson, Tengan e Carlos Maquera.

À CNPQ pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho, fazemos um estudo das correntes e das medidas transversas invariantes por holonomia, e mostraremos o resultado de D. Sullivan [23] sobre a correspondência biunívoca entre estes dois objetos. Em particular mostraremos um resultado conhecido de J. Plante [17] sobre a existência de medidas transversas invariantes sob a hipótese de crescimento sub-exponencial.

Apresentamos também, o resultado devido a Ruelle-Sullivan [19] de que a medida de máxima entropia de um difeomorfismo topologicamente mixing pode-se expressar como o produto de duas medidas transversas invariantes para as folheações estáveis e instáveis. Por último, mostramos que os difeomorfismos de Anosov topologicamente mixing, que preservam a orientação das folhas estáveis e folhas instáveis induzem elementos da cohomologia de DeRham.

Palavras-chaves: Medidas transversas invariantes, cohomologia de DeRham, correntes, difeomorfismos e medida de máxima entropia.

Abstract

In this work, we make a study of currents and holonomy invariant transverse measure, and we will show the result of D. Sullivan [23] about the biunivocal correspondence between these two objects. In particular we show a known result of J. Plante [17] about the existence of invariant transverse measures under the hypothesis of sub-exponential growth.

Also we will present, the result due to Ruelle-Sullivan [19] that the maximum entropy measure of a diffeomorphism topologically mixing can be expressed as the product of two invariant transverse measures for stable and unstable foliations. Finally, we show that the Anosov diffeomorphisms topologically mixing, which preserve the orientation of the leaves stable and unstable induce elements DeRham cohomology.

Keywords: Invariant transverse measure, DeRham cohomology, currents, diffeomorphism and maximum entropy measure.

Sumário

Agradecimentos **i**

Resumo **iii**

Abstract **v**

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Folheações 5

1.2 Espaços fibrados 7

1.3 Dinâmica hiperbólica 9

1.4 Partições de Markov 11

1.5 Entropia 14

1.5.1 Entropia com respeito a uma medida 14

1.5.2 Entropia topológica 15

1.6 Medida de Markov 17

2 Medidas transversas invariantes por holonomia **21**

2.1 Medida transversa invariante 21

2.2 Crescimento de funções 29

2.3 Condições suficientes para a existência de uma medida invariante 31

2.4 Crescimento em folheações 39

2.4.1 Crescimento de folhas desde um ponto de vista geométrico 41

3 Correntes **47**

3.1 Correntes 47

3.2 Corrente Folheada e ciclos folheados 54

3.3 As medidas transversas invariantes são ciclos folheados 58

4 Exemplos Dinâmicos **65**

4.1 Thom-Arnold map 65

4.2 Ferradura de Smale 69

4.2.1 Dinâmica simbólica 69

4.2.2 Ferradura de Smale 71

5 Correntes e Difeomorfismos **77**

5.1 Medida de máxima entropia 77

5.2 Medidas transversas e Sistemas dinâmicos 85

A Seminormas que geram uma topologia **95**

Referências Bibliográficas **99**

Introdução

As medidas invariantes por um fluxo é um objeto de grande importância e utilidade para estudar a dinâmica dos fluxos. A generalização destas medidas em folheações é chamada *medidas transversas invariantes por holonomia* e é obtida considerando medidas no espaço transverso à folheação, onde se identificam os pontos que pertencem a uma mesma folha e pedindo que sejam invariantes sob o "fluxo das folhas". As medidas transversas têm sido objeto de estudo desde os anos 50 e demostraram ser muito úteis para a compreensão da dinâmica das folheações. No capítulo 2, fazemos um estudo destas medidas seguindo o artigo de J. Plante [17]. Neste capítulo, definiremos rigorosamente as medidas transversas invariantes por holonomia, demonstraremos um bonito teorema, que pode ser pensado com um teorema abstrato de Poincaré-Bendixson para folheações, e mostraremos também que a existência de uma medida transversa invariante induz uma aplicação linear o qual é chamada "corrente". Um dos objetivos deste trabalho, é mostrar um resultado conhecido de J. Plante [17] sobre a existência de medidas transversas invariantes sob a hipótese de crescimento sub-exponencial, especificamente mostramos o seguinte teorema.

Teorema 0.1 (J. Plante, [17])**:** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão k de uma variedade compacta M. Se L é uma folha de $\mathcal{F}$ que tem crescimento não exponencial, então existe uma medida não trivial invariante pelo pseudogrupo de holonomia que é finito em conjuntos compactos e que tem suporte contido no fecho de L.*

Para o qual introduzimos os conceitos de crescimento de funções e crescimento em folheações, este último é definido de duas maneiras, uma que é puramente algébrica e a outra geométrica, e demonstraremos que são equivalentes.

A teoria de correntes de DeRham [8] elaborada nos anos 50 é um análogo da teoria de distribuições de Schwartz [20] criada nos finais de 1940. As distribuições são funcionais contínuas definidas no espaço das funções com suporte compacto. Da mesma maneira,

as p-correntes se definem como funcionais contínuas definidas no espaço das p-formas diferenciais com suporte compacto Ω_c^p; e.g., as distribuições são 0-correntes. Munido com uma topologia adequada, a derivada exterior torna-se um operador linear continuo, pelo que podemos definir seu operador adjunto e a partir deste definir a homologia de DeRham. No capítulo 3, fazemos uma apresentação das correntes seguindo os livros [7] e [8]. Neste capítulo o resultado principal é provar o teorema de D. Sullivan [23] de que as medidas transversas invariantes estão em correspondência biunívoca com as correntes(ciclos folheados), especificamente mostramos o seguinte teorema.

Teorema 0.2 (D. Sullivan, [23])**:** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão p, transversalmente orientável e de classe C^1 de uma n-variedade compacta M de classe C^∞. Então as medidas transversas invariantes por holonomia e os ciclos folheados estão em correspondência canônica um a um.*

O conhecido Principio Variacional afirma que se $f : X \to X$ é uma aplicação continua do espaço métrico compacto X, então o supremo das entropias métricas sobre o conjunto, das medidas de probabilidade invariantes coincidem com a entropia topológica.

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu \in M_f(X)} h_\mu(f)$$

onde $M_f(X)$ é o conjunto de medidas de probabilidade invariantes. É um problema antigo e muito importante em saber se o supremo é um máximo, e neste caso se o máximo é alcançado em uma única medida de probabilidade ou não. R. Bowen, dá condições suficientes para responder positivamente a esta questão. De fato o R. Bowen [3] mostra que se X é um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ um homeomorfismo expansivo com a propriedade de especificação, existe uma única medida de probabilidade $f-$invariante que maximiza a entropia métrica.

Neste trabalho, apresentaremos a prova deste resultado, também devido R. Bowen [4], [5], para difeomorfismos topologicamente mixing, para o qual relacionamos o difeomorfismo hiperbólico com o shifts de tipo finito usando partições de Markov.

Nosso objetivo principal deste trabalho é apresentar o trabalho de Ruelle-Sullivan [19], onde se prova que a medida que maximiza a entropia métrica, pode-se expressar como o produto de duas medidas transversas invariantes para as folheações estáveis e instáveis. Para ser mais precisos mostramos o seguinte teorema.

Teorema 0.3 (D. Ruelle, D. Sullivan, [19])**:** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico. Se $f|_\Lambda$ que é topologicamente mixing. Então para cada*

$x \in \Lambda$ existe uma medida μ_x^s em $W_\epsilon^s(x)$ e uma medida μ_x^u em $W_\epsilon^u(x)$ tal que:

i) $supp\mu_x^s \subset W_\epsilon^s(x) \cap \Lambda$, $supp\mu_x^u \subset W_\epsilon^u(x) \cap \Lambda$.

ii) Se $d(x, x') < \delta$, então

$$(P_{x,x'}^s)_*(\mu_{x'}^s \mid_{W_\delta^s(x') \cap \Lambda}) = \mu_x^s \mid_{P_{x,x'}^s(W_\delta^s(x') \cap \Lambda)}$$

analogamente

$$(P_{x,x'}^u)_*(\mu_{x'}^u \mid_{W_\delta^u(x') \cap \Lambda}) = \mu_x^u \mid_{P_{x,x'}^u(W_\delta^u(x') \cap \Lambda)}$$

iii)

$$(f_*^{-1}\mu_x^s - \lambda^{-1}\mu_{f^{-1}(x)}^s) \mid_{W_\epsilon^s(f^{-1}(x))} = 0$$

e

$$(f_*\mu_x^u - \lambda^{-1}\mu_{f(x)}^u) \mid_{W_\epsilon^u(f(x))} = 0$$

iv) Seja $[.,.] : (W_\epsilon^u(x) \cap \Lambda) \times (W_\epsilon^s(x) \cap \Lambda) \to \Lambda$ definida por $\{[y, z]\} = W_\epsilon^s(y) \cap W_\epsilon^u(z)$ então

$$[.,.]_*(\mu_x^u \times \mu_x^s) \mid_{(W_\epsilon^u(x) \times W_\epsilon^s(x)) \cap \Lambda} = \rho \mid_{(W_\epsilon^u(x) \times W_\epsilon^s(x)) \cap \Lambda}$$

onde ρ é a medida de Bowen em Λ.

Um último objetivo deste trabalho é juntar os três conceitos estudados neste trabalho: medidas transversas, correntes e sistemas dinâmicos. Especificamente provamos o seguinte teorema devido a Ruelle-Sullivan [19].

Teorema 0.4 (D. Ruelle, D. Sullivan, [19])**:** *Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo de Anosov topologicamente mixing, preservando a orientação das folhas estáveis e folhas instáveis, então existem C^s k-corrente e C^u $(n-k)$-corrente tal que*

i) C^s e C^u são fechados e definem classes de cohomologia de DeRham $[C^s]$ e $[C^s]$ em $H^{n-k}(M)$ e $H^k(M)$ respectivamente.

ii) $f_*C^s = \frac{1}{\lambda}C^s$ e $f_*C^u = \lambda C^u$ onde $\log \lambda$ é a entropia topológica de f.

No capítulo 4, apresentamos dois exemplos de sistemas dinâmicos básicos: Thom-Arnold map e a ferradura de Smale e estudamos suas riqueza dinâmica. No capitulo 5, estudamos os dois objetivos principais deste trabalho, mencionados acima. O trabalho contém um apêndice, onde fazemos uma apresentação de topologia gerado por uma família de semi-normas.

Capítulo

1

Preliminares

1.1 Folheações

Esta seção em sua maioria é extraída de [6]. Uma folheação de dimensão p de uma variedade M^n é, a grosso modo, uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão p chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ com segunda coordenada constante.

Definição 1.1: Seja M uma variedade de dimensão n e classe C^∞. Uma folheação de classe C^r e dimensão p em M, é um atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe C^r em M com as seguintes propriedades:

a) Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^p$ e de $\mathbb{R}^{n-p}$ respectivamente.

b) Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é da forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$. As cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ são chamadas cartas trivializadoras de $\mathcal{F}$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^r e dimensão p de M. Consideremos uma carta local $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Os conjuntos de forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados placas de U. Fixado $c \in U_2$, a aplicação $f = \varphi^{-1} |_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \to U$ é um mergulho de classe C^r, por tanto as placas são subvariedades conexas de dimensão p e classe C^r. Além disto se α e β são placas de U então $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Um caminho de placas de $\mathcal{F}$ é uma sequencia $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \cdots, k-1\}$. Como M é recoberta pelas placas de $\mathcal{F}$,

podemos definir em M a seguinte relação de equivalência:$p \sim q$ se existe um caminho de placas $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. As classes de equivalência da relação " $\sim$ " são chamadas folhas de $\mathcal{F}$.

Da definição segue que uma folha L de $\mathcal{F}$ é um subconjunto de M conexo por caminhos. Outro fato importante é que toda folha L de $\mathcal{F}$ possui uma estrutura de variedade C^r de dimensão p imersa em M naturalmente induzida pelas cartas de $\mathcal{F}$. Em geral as folhas não são subvariedades de M.

Definição 1.2: Seja Σ uma subvariedade de M. Dizemos que Σ é transversal a $\mathcal{F}$ quando Σ é transversal a todas as folhas de $\mathcal{F}$ que ela encontra. Quando $\dim(\Sigma) + \dim(\mathcal{F}) = \dim(M)$, dizemos que Σ é uma seção transversal a $\mathcal{F}$.

Dado $p \in M$ sempre existe uma seção transversal de $\mathcal{F}$ passando por p. Com efeito basta considerarmos uma carta local $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ como $p \in U$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, $\varphi(p) = (c_1, c_2)$ e tomarmos $\Sigma = \varphi^{-1}(\{c_1\} \times U_2)$. Como $\{c_1\} \times U_2$ é transversal às placas $U_1 \times c$, $c \in U_2$, é claro que Σ é seção transversal de $\mathcal{F}$.

Teorema 1.3 (Uniformidade transversal de $\mathcal{F}$)**:** *Seja L uma folha de $\mathcal{F}$. Dados $q_1, q_2 \in L$, existem seções transversais de $\mathcal{F}$, Σ_1 e Σ_2 com $q_i \in \Sigma_i$(i=1,2) e um difeomorfismo C^r, $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ tal que para toda folha L' de $\mathcal{F}$ tem-se $f(L' \cap \Sigma_1) = L' \cap \Sigma_2$.*

Observação 1.4: Da prova do Teorema anterior(ver $[6, p.49]$) segue que. Se (U, φ) e (V, ψ) são cartas locais de $\mathcal{F}$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$ e $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ e $\psi(V) = V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Sejam P placa em U e Q placa em V talque $P \cap Q \neq \emptyset$. Se $p \in P$, $q \in Q$; $\varphi(p) = (c_1, c_2)$, $\psi(p) = (d_1, d_2)$ e consideramos as seções transversais $\Sigma = \varphi^{-1}(\{c_1\} \times U_2)$ e $\Sigma' = \psi^{-1}(\{d_1\} \times V_2)$, então existe um difeomorfismo entre partes de Σ e Σ' ao longo das folhas de $\mathcal{F}$.

Teorema 1.5: *Seja L uma folha de uma folheação $\mathcal{F}$ de M. As afirmações abaixo são equivalentes:*

a) L é folha fechada.

b) Se (U, φ) é uma carta trivializadora de $\mathcal{F}$ tal que $\overline{U}$ é compacto então $U \cap L$ contém um número finito de placas de U.

A prova pode ser encontrada em [6].

1.2 Espaços fibrados

Os resultados de esta seção serão unicamente usados na demostração do Teorema 2.8.

Um espaço fibrado (E, B, F, π), consiste de variedades diferenciáveis E, B, F e de uma aplicação diferenciável $\pi : E \to B$. Além disso E possui uma estrutura de produto local definida por uma cobertura $\{V_i\}_{i\in J}$ de B e por difeomorfismos $\phi_i : \pi^{-1}(V_i) \to V_i \times F$, $i \in J$, que torna o seguente diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(V_i) \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "\pi"] & V_i \times F \arrow[dl, "P_1"] \\ V_i & \end{tikzcd}$$

esto é, $\pi = P_1 \circ \phi_i$, onde P_i é a projeção na primeira coordenada. Em particular, π é uma submersão sobre B e E é localmente difeomorfo ao produto de um aberto em B por F.

O espaço E é chamado espaço total, B a base e F a fibra. A aplicação π é chamada projeção. Se $x \in B$, a subvariedade $F_x = \pi^{-1}(x) \simeq F$ é chamada fibra de E sobre x. Se $\pi^{-1}(x)$ tem estrutura de espaço vetorial dizemos que é fibrado vetorial.

Definição 1.6: Sejam $\{V_i\}_{i\in J}$ uma cobertura aberta de uma variedade B e $(G, \bullet)$ um grupo de Lie. Uma família de funções C^∞, $\delta_{ij} : V_i \cap V_j \to G$ satisfazendo a condição

$$\delta_{ik}(x) = \delta_{ij}(x) \bullet \delta_{jk}(x) \ \forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k$$

é chamada um cociclo de B com valores no grupo G.

Lembremos que uma ação de um grupo topológico G sobre uma variedade F é um homomorfismo

$$\rho : G \to \mathrm{Diff}^\infty(F)$$

tal que a aplicação $\begin{array}{ccc} G \times F & \longrightarrow & F \\ (g, x) & \mapsto & \rho(g)(x) \end{array}$ é C^∞

Definição 1.7: Dizemos que um espaço fibrado (E, B, F, π) tem grupo estrutural G(G grupo topológico), se G age pela esquerda em F e existe um cociclo de B com valores em G com respeito à cobertura $\{V_i\}_{i\in J}$ de B que trivializa o fibrado tal que o difeomorfismo

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : (V_i \cap V_j) \times F \longrightarrow (V_i \cap V_j) \times F$$

satisfaz

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x,y) = (x, (\rho\delta_{ij}(x))y), \forall (x,y) \in (V_i \cap V_j) \times F$$

Observação 1.8: É claro que dado um fibrado (E, B, F, π) algumas vezes pode-se dotar com distintos tipos de grupos estruturais.

Exemplo 1.9: Seja M^m uma variedade

i) O fibrado tangente de uma variedade $(TM, M, \mathbb{R}^m, \pi)$, onde

$$TM = \{(x,v) : x \in M, v \in T_xM\}$$

e a projeção é definida

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \longrightarrow & M \\ & (x,v) & \mapsto & x \end{array}$$

Tem grupo estrutural $GL(m, \mathbb{R})$.

ii) O fibrado normal de uma variedade $(\mathcal{V}(N), N, \mathbb{R}^{m-n}, \pi)$, onde N^n é uma subvariedade de M,

$$\mathcal{V}(N) = \{(p, v_p) : p \in N, v_p \in T_pN^{\perp}\}$$

e a projeção é

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathcal{V}(N) & \longrightarrow & N \\ & (p, v_p) & \mapsto & p \end{array}$$

é um fibrado vetorial que tem grupo estrutural $GL(m-n, \mathbb{R})$.

Definição 1.10: Um fibrado vetorial de posto n é um fibrado com fibras $\mathbb{R}^n$ e grupo estrutural $GL(n, \mathbb{R})$.

Proposição 1.11: *O grupo estrutural de um fibrado vetorial real de posto n pode sempre ser reduzido para as matrizes ortogonais reais $\mathcal{O}(n)$.*

Demonstração. Ver([1, p.64])

□

Teorema 1.12 (Teorema da vizinhança tubular)**:** *Seja $N \subset M$ uma subvariedade $C^r (r \geq 1)$. Existem uma vizinhança aberta $T(N) \supset N$ e uma submersão C^r $\pi : T(N) \to N$, tais que $\pi(q) = q$ para todo $q \in N$. Se a codimensão de N é k, então $T(N)$ pode ser obtida de tal forma $(T(N), N, \mathbb{R}^k, \pi)$ seja um espaço fibrado.*

Demonstração. Ver([13]) □

Definição 1.13: Sejam os fibrados $\xi_i = (E_i, B, F_i, \pi_i)$, $i = 1, 2$. Dizemos que ξ_1 é equivalente a ξ_2 se existe um difeomorfismo $h : E_1 \to E_2$ tal que cada fibra $\pi_1^{-1}(p)$ é levado de forma difeomorfo em $\pi_2^{-1}(p)$.

Teorema 1.14: *Seja $N \subset M$ uma subvariedade compacta de M. Então N tem uma vizinhança tubular $\pi : T(N) \to N$ em M que é equivalente ao fibrado normal de N em M*

Demonstração. Ver([22, p.468]) □

1.3 Dinâmica hiperbólica

Nesta seção faremos um breve recorrido por alguns resultados principais desta teoria, para um estudo detalhado e ver as provas dos resultados que são enunciados nesta seção, se recomenda os livros [12], [21] e [18]. Daqui em diante M denotará uma variedade riemanniana compacta, conexa e sem bordo.

Definição 1.15 (Algumas Propiedades Topologicas)**:** Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo.

a) Dizemos que f é transitivo se dados $U, V \subset M$ abertos quaisquer, existe $m > 0$ tal que $f^{-m}(U) \cap V \neq \emptyset$.

b) Dizemos que f é topologicamente mixing se dados $U, V \subset M$ abertos quaisquer, existe $m > 0$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ $\forall n \geq m$.

c) Dizemos que f é expansivo se existe $\alpha > 0$ tal que se $d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ então $x = y$(α é chamado constante de expansividade).

Definição 1.16: Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo. Um conjunto compacto e invariante Λ se diz que é hiperbólico se para cada $x \in \Lambda$ existem subespaços $E^s(x) \subset T_xM$ e $E^u(x) \subset T_xM$ que verificam:

i) $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$.

ii) $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ e $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$.

iii) Existem contantes $c > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tal que

   a) $\|Df_x^n(v)\| \leq c\lambda^n \|v\|$, $\forall v \in E^s(x)$ e $n \geq 0$.

   b) $\|Df_x^{-n}(v)\| \leq c\lambda^n \|v\|$, $\forall v \in E^u(x)$ e $n \geq 0$.

Definição 1.17: Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $x \in M$. Se define o conjunto estável de x como

$$W^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\}$$

e o instável como

$$W^u(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \longrightarrow_{n\to-\infty} 0\}$$

Para $\epsilon > 0$ definimos o conjunto estável e instável local(de tamanho ϵ) como

$$W^s_\epsilon(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \forall n \geq 0\}$$

$$W^u_\epsilon(x) = \{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \epsilon, \forall n \geq 0\}$$

Observação 1.18: $f(W^s_\epsilon(x)) \subset W^s_\epsilon(f(x))$ e $f(W^u_\epsilon(x)) \supset W^u_\epsilon(f(x))$. De fato, seja $z \in f(W^s_\epsilon(x))$, existe $y \in W^s_\epsilon(x)$ tal que $z = f(y)$ e $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$, $\forall n \geq 0$. Logo, se $m = n - 1$ temos que,

$$d(f^m(f(x)), f^m(\underbrace{f(y)}_{z})) < \epsilon, \ \forall m \geq 0$$

por tanto $z \in W^s_\epsilon(f(x))$. De forma análoga se mostra $f(W^u_\epsilon(x)) \supset W^u_\epsilon(f(x))$.

Teorema 1.19 (Teorema da variedade estável)**:** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^r e Λ um conjunto hiperbólico. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para quaisquer $x \in \Lambda$ se verifica que:*

i) $W^s_\epsilon(x)$ e $W^u_\epsilon(x)$ são subvariedades mergulhadas de classe C^r com $T_xW^s_\epsilon(x) = E^s(x)$ e $T_xW^u_\epsilon(x) = E^u(x)$.

ii) $d(f^n(x), f^n(y)) < \lambda^n d(x, y)$ para $y \in W^s_\epsilon(x)$, $n \geq 0$ e $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \lambda^n d(x, y)$ para $y \in W^u_\epsilon(x)$, $n \geq 0$.

iii) $W^s(x) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(f^n(x)))$ e $W^u(x) = \cup_{n\geq 0} f^n(W^u_\epsilon(f^{-n}(x)))$. $W^s(x)$ e $W^u(x)$ são subvariedades imersas de classe C^r que variam continuamente(como subvariedades C^r y em subconjuntos compactos) com x.

Observação 1.20: Do teorema anterior, se deduz que existe $\delta > 0$ se $x, y \in \Lambda$ com $d(x, y) < \delta$ então $W^s_\epsilon(x)$ e $W^u_\epsilon(y)$ se intersectam transversalmente num único ponto.

Corolário 1.21: *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^r e Λ um conjunto hiperbólico. Então $f|_\Lambda$ é expansivo.*

Definição 1.22: Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^r e Λ um conjunto hiperbólico. Dizemos que Λ tem estrutura de produto local se existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in \Lambda$ com $d(x, y) < \delta$ então $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \in \Lambda$.

O importante da definição anterior é que o ponto de interseção pertença a Λ, já que pela observação anterior sabemos que variedades estáveis e instáveis de pontos cercanos se cortam transversalmente. A definição diz que efetivamente Λ localmente é um produto:

$$\Lambda \cap B(x, \delta) \approx W^s_\epsilon(x) \cap \Lambda \times W^u_\epsilon(x) \cap \Lambda.$$

Proposição 1.23: *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e suponhamos que $\overline{Per(f)}$ é um conjunto hiperbólico. Então $\overline{Per(f)}$ tem estrutura de produto local.*

Proposição 1.24: *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^r e Λ um conjunto hiperbólico com produto local. Então a aplicação*

$$[\cdot, \cdot] : \Lambda \times \Lambda \to \Lambda$$

dado por $[x, y] = W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ é contínua.

Definição 1.25: Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ dois transformações continuas em espaços topológicos compactos. Dizemos que g é um fator topológico de f se existe uma aplicação contínua e sobrejetiva $\phi : M \to N$ tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$. ϕ é chamado semi-conjugação de f e g.

Definição 1.26: Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ dois difeomorfismos. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas se existe $\pi : M \to N$ homeomorfismo tal que $\pi \circ f = g \circ \pi$.

Proposição 1.27: *Se $f : M \to M$ e $g : N \to N$ são topologicamente conjugados pelo homeomorfismo $\pi : M \to N$. Então,*

i) x é um ponto periódico de f se, e somente se, $\pi(x)$ é ponto periódico de g.

ii) f é topologicamente mixing se, e somente se, g é topologicamente mixing.

1.4 Partições de Markov

Nesta seção definimos o que é uma partição de Markov e enunciamos alguns resultados desta teoria que precisaremos ao longo deste trabalho, para ver as provas e fazer um

estudo detalhado se recomenda o livro [2]. No capítulo 4, apresentamos explicitamente as partições de Markov dos sistemas dinâmicos Thom-Arnold map e da ferradura de Smale. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^r e Λ um conjunto hiperbólico com estrutura de produto local. Seja $\epsilon > 0$ como no teorema 1.19 e $\delta > 0$ como na observação 1.20.

Definição 1.28: Dizemos que um conjunto $R \subset \Lambda$ não vazio é um retângulo para $f|_\Lambda$ se tem diâmetro menor que $\min\{\delta, \epsilon\}$ e

$$[x, y] = W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(x) \in R$$

para todo x e y em R. O retângulo é chamado próprio se R é fechado e $R = \overline{int(R)}$. Para $x \in R$ definimos os conjuntos

$$W^s(x, R) = W^s_\epsilon(x) \cap R$$

$$W^u(x, R) = W^u_\epsilon(x) \cap R$$

Proposição 1.29: *Sejam $x, y \in R$, R retângulo. Então*

$$y \in W^s(x, R) \Leftrightarrow W^s(x, R) = W^s(y, R)$$

analogamente

$$y \in W^u(x, R) \Leftrightarrow W^u(x, R) = W^u(y, R)$$

Definição 1.30: Se chama bordo estável de um retângulo R ao conjunto

$$\partial^s(R) = \{x \in R : x \notin \text{int}W^u(x, R) \text{ em } W^u_\epsilon(x) \cap \Lambda\}$$

Se chama bordo instável de um retângulo R ao conjunto

$$\partial^u(R) = \{x \in R : x \notin \text{int}W^s(x, R) \text{ em } W^s_\epsilon(x) \cap \Lambda\}$$

Para justificar o nome de bordo estável, demostraremos que $\partial^s(R)$ esta formado pela união de $\epsilon-$variedades estáveis em R. Analogamente tem-se com $\partial^u(R)$

Proposição 1.31: *$y \in \partial^s R$ implica $W^s(y, R) \subset \partial^s R$. analogamente $y \in \partial^u R$ implica $W^u(y, R) \subset \partial^u R$.*

A proposição seguente mostra que para retângulos R fechados, o bordo topológico de R é a união do bordo estável e instável. .

Proposição 1.32: *Se R é um retângulo fechado então $\partial R = \partial^s R \cup \partial^u R$.*

Definição 1.33: Uma partição de Markov de Λ é uma cobertura finita $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ de Λ por retângulos próprios fechados tais que:

i) $\text{int}R_i \cap \text{int}R_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

ii) Se $x \in \text{int}R_i \cap f^{-1}(\text{int}R_j)$ então

a) $f(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f(x), R_j)$,

b) $f(W^u(x, R_i)) \supset W^u(f(x), R_j)$.

Teorema 1.34: *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e Λ um conjunto hiperbólico com estrutura de produto local. Se $f|_\Lambda$ é transitivo, então Λ possui uma partição de Markov.*

Definição 1.35: Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ uma partição de Markov. Se chama bordo de $\mathcal{R}$ ao conjunto

$$\partial\mathcal{R} = \cup_{j=1}^m \partial R_j$$

Se chama bordo estável de $\mathcal{R}$ a

$$\partial^s\mathcal{R} = \cup_{j=1}^m \partial^s R_j$$

e se chama bordo instável de $\mathcal{R}$ a

$$\partial^u\mathcal{R} = \cup_{j=1}^m \partial^u R_j$$

Se observa da Proposição (1.32) que

$$\partial\mathcal{R} = \partial^s\mathcal{R} \cup \partial^u\mathcal{R}$$

Proposição 1.36: *Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ uma partição de Markov. Então*

1) $\partial\mathcal{R}$ tem interior vazio e é fechado.

2) $\cup_{j=1}^m intR_j$ é aberto e denso em Λ

3) $\Lambda \setminus \cup_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(\partial\mathcal{R})$ é denso em Λ e invariante por f.

A seguinte proposição que será fortemente utilizado no Capítulo 5, permite aplicar as condições (a) e (b) da definição de partição de Markov a outros pontos $x \in \Lambda$ que não estão necessariamente em $\text{int}R_i \cap f^{-1}(\text{int}R_j)$.

Proposição 1.37: *Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ uma partição de Markov de Λ. Se $intR_i \cap f^{-1}(intR_j) \neq \emptyset$, então para todo $y \in R_i \cap f^{-1}(R_j)$ tem-se:*

i) $f(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f(x), R_j)$,

ii) $f(W^u(x, R_i)) \supset W^u(f(x), R_j)$.

Proposição 1.38: *Seja* $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ *uma partição de Markov de* Λ *então*

$$f(\partial^s \mathcal{R}) \subset \partial^s \mathcal{R} \text{ e } f(\partial^u \mathcal{R}) \supset \partial^u \mathcal{R}$$

1.5 Entropia

A palavra entropia foi inventada em 1865 pelo físico e matemático alemão Rudolf Clausius um dos primeiros fundadores da termodinâmica. A entropia pode interpreta-se como uma medida do grau de "desordem"de um sistema. Se diz que um sistema altamente distribuído ao azar tem entropia alta. Nesta seção apresentaremos alguns resultados desta teoria que precisaremos ao longo deste trabalho, para um estudo detalhado o autor recomenda os livros [16] e [14]. Na primeira sub-seção definimos a entropia de uma transformação relativa a uma probabilidade invariante que foi proposto por Kolmogorov-Sinai. Na seguente sub-seção definimos a entropia topológica que foi proposto por R. Alder, A. Konhein e McAndrew, inspirados na entropia de Kolmogorov-Sinai, esta noção se aplica a qualquer transformação continua num espaço topológico compacto. Logo enunciamos o Teorema de Principio Variacional que faz a ligação dos dois conceitos. No capítulo 5, calculamos as entropias de Thom-Arnold map e a ferradura de Smale.

1.5.1 Entropia com respeito a uma medida

Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Neste capítulo, por partição sempre entenderemos uma família finita ou enumerável $\mathcal{P}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos dois-a-dois e cuja união tem medida total. A soma $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ de duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é a partição cujos elementos são as interseções $P \cap Q$ com $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$. Mais geralmente, dada qualquer família enumerável de partições $\mathcal{P}_n$, definimos

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \{\bigcap_n P_n : P_n \in \mathcal{P}_n \text{ para cada } n\}$$

Definição 1.39: Seja $\mathcal{P}$ uma partição finita do espaço de probabilidade $(M, \mathcal{B}, \mu)$. Seja $\phi(x) = x \log x$ se $0 < x \leq 1$ e $\phi(0) = 0$.
Definimos a entropia de $\mathcal{P}$ como

$$H(\mathcal{P}) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \phi(\mu(P))$$

Seja $f : M \to M$ uma transformação que preserva medida e seja $\mathcal{P}$ uma partição de M, então $f^{-j}\mathcal{P} = \{f^{-j}(P) : P \in \mathcal{P}\}$ é também uma partição de M.

Definição 1.40: Suponhamos que $f : M \to M$ que preserva medida e seja $\mathcal{P}$ uma partição, definimos a entropia $h(f, \mathcal{P})$ de f respeito a $\mathcal{P}$ como

$$h(f, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{P}))$$

Definição 1.41: A entropia de uma transformação $f : (M, \mathcal{B}, \mu) \to (M, \mathcal{B}, \mu)$ que preserva medida se define como

$$h_\mu(f) = \sup\{h(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição finita}\}$$

Definição 1.42: Sejam μ e ν medidas de probabilidade invariantes por transformações $f : M \to M$ e $g : N \to N$, respectivamente. Dizemos que os sistemas (f, μ) e (g, ν) são ergodicamente equivalentes se podemos escolher conjuntos mensuráveis $X \subset M$ e $Y \subset N$ com $\mu(X) = 1$ e $\nu(Y) = 1$, e uma bijeção mensurável $\phi : X \to Y$ com inversa mensurável, de tal forma que

$$\phi_*\mu = \nu \quad \text{e} \quad \phi \circ f = g \circ \phi.$$

Proposição 1.43: *Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações preservando probabilidades μ em M e ν em N. Se (f, μ) é ergodicamente equivalente a (g, ν), então*

$$h_\mu(f) = h_\nu(g).$$

1.5.2 Entropia topológica

Seja M um espaço topológico compacto. Chamamos cobertura aberta de M qualquer família $\mathcal{U}$ de abertos cuja união é todo o M. Dadas as coberturas abertas $\mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_m$ de M denotamos por $\mathcal{U}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{U}_m$ a sua soma, isto é, a cobertura aberta cujos elementos são as interseções $A_1 \cap \cdots \cap A_m$ com $A_j \in \mathcal{U}_j$ para cada j.
Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua. Se $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M, então $f^{-j}(\mathcal{U}) = \{f^{-j}(A) : A \in \mathcal{U}\}$ também é uma cobertura. Para cada $n \geq 1$, denotamos

$$\mathcal{U}^n = \mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{n-1}(\mathcal{U})$$

Definição 1.44: Seja M um espaço topológico compacto. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M, e $f : M \to M$ uma transformação continua.

a) Definimos a entropia de $\mathcal{U}$ por

$$H(\mathcal{U}) = \log N(\mathcal{U})$$

onde $N(\mathcal{U})$ denota a mínima cardinalidade de uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$.

b) Definimos a entropia de f com respeito $\mathcal{U}$

$$h(f,\mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U}^n)$$

Definição 1.45: Seja M um espaço topológico compacto. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M, e $f : M \to M$ uma transformação continua, definimos a entropia topologia de f como

$$h_{top}(f) = \sup\{h(f,\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ é uma cobertura aberta de } M\}$$

Observação 1.46: A entropia topológica é usualmente definida por meio de conjuntos $(n,\epsilon)-$separador, esta definicao é equivalente à definição 1.45 e foi proposta por Efim Dinaburg e Rufus Bowen. Neste caso a entropia topológica é a taxa de crescimento exponencial do número de orbitas que são distinguíveis dentro de um certo grau de precisão arbitrariamente pequeno.

Proposição 1.47: *Se $T_2 : X_2 \to X_2$ é um fator topológico de $T_1 : X_1 \to X_1$ então*

$$h_{top}(T_2) \leq h_{top}(T_1)$$

O seguente teorema é um dos teoremas importantes da teoria ergódica, ele relaciona o dois conceitos de entropia.

Teorema 1.48 (Principio Variacional)**:** *Sejam X um espaço métrico compacto, $T : X \to X$ continua. Então*

$$h_{top}(T) = \sup\{h_\mu(T) : \mu \in \mathcal{M}_T(X)\}$$

Um problema antigo e muito importante é em saber se o supremo é um máximo, e neste caso se o máximo é alcançado em uma única medida de probabilidade ou não. R. Bowen, dá condições suficientes para dar uma resposta positiva a esta questão. De fato o R. Bowen [3] mostra que se X é um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ um homeomorfismo expansivo com a propriedade de especificação, existe uma única medida de probabilidade $f-$invariante que maximiza a entropia métrica. No capitulo 5, apresentaremos a prova deste resultado, também devido R. Bowen [4], [5], para difeomorfismos topologicamente mixing(ver Teorema 5.4).

1.6 Medida de Markov

Nesta seção definimos a medida de Markov e enunciamos alguns resultados que precisaremos, para ver as provas dos resultados enunciados e fazer um profundo estudo desta seção se recomenda os livros [14] e [16].

Seja $\Sigma = \{1, \cdots, n\}^{\mathbb{Z}}$ e $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ a transformação de deslocamento à esquerda. A dinâmica de este sistema (Σ, σ) é estudado na seção 4.2 do capitulo 4.

Definição 1.49: Uma matriz $P = (P_{ij})$ é estocástica se os coeficientes P_{ij} satisfazem:

i) a) $P_{ij} \geq 0$ $1 \leq i, j \leq n$

b) $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$, $1 \leq i \leq n$.

ii) Existe um vetor $p = (p_1, \cdots, p_n)$, chamado vetor de probabilidade tal que

a) $p_j > 0$ $1 \leq j \leq n$

b) $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$

c) $\sum_{i=1}^{n} p_i P_{ij} = p_j$

Seja $P = (P_{ij})$ uma matriz estocástica e $p = (p_i)_i$ um vetor de probabilidade. Definimos a seguinte medida μ sobre os conjuntos de Borel de Σ por

$$\mu([m, \alpha_m, \cdots, \alpha_l]) = p_{\alpha_m} P_{\alpha_m \alpha_{m+1}} \cdots P_{\alpha_{l-1}\alpha_l} \tag{1.1}$$

onde $[m, \alpha_m, \cdots, \alpha_l] = \{\theta \in \Sigma : \theta_m = \alpha, \cdots, \theta_l = \alpha_l\}$ é um cilindro.

A medida μ é chamada medida de Markov associada a la matriz estocástica $P = (P_{ij})$ e ao vetor de probabilidade $p = (p_i)_i$.

Observação 1.50:

i) A medida de Markov associada à matriz estocástica $P = (P_{ij})$ e ao vetor de probabilidade $p = (p_i)_i$ é invariante pelo deslocamento σ.

ii) Esta medida é uma generalização das medidas de Bernoulli.

Da definição 1.49$-ii$ temos que $P^* p = p$, onde P^* representa a transposta da matriz P. Em outras palavras, as medidas de Markov correspondem precisamente aos autovetores da matriz transposta para o autovalor 1. O seguinte resultado clássico permite mostrar que tais autovetores sempre existem.

Teorema 1.51 (Perron-Frobenius [15]): *Seja B uma matriz $k \times k$ não negativa aperiódica (i.e., $B_{ij} \geq 0$ para cada $1 \leq i, j \leq k$ e existe $n > 0$ tal que $B^n > 0$). Então*

i) Existe um autovalor $\lambda > 0$ tal que $|\beta| < \lambda$ para todos os demais autovalores.

ii) λ é de multiplicidade 1.

iii) Existe um único autovetor à esquerda $u = (u_1, \cdots, u_k)$ tal que $u_j > 0$, $\sum u_j = 1$ e $uB = \lambda u$.

iv) Existe um único autovetor à direita $v = (v_1, \cdots, v_k)$ tal que $v_j > 0$, $\sum v_j = 1$ e $Bv = \lambda v$.

v) Autovetores correspondentes a autovalores distintos de λ são não positivos; i.e., ao menos uma coordenada é positiva e ao menos uma coordenada é negativa.

Dada uma matriz $n \times n$, A com coeficientes 0 ou 1 definimos o conjunto Σ_A como: $\Sigma_A = \{\theta \in \Sigma : A_{\theta_i \theta_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}$ onde $\Sigma = \{1, \cdots, n\}^{\mathbb{Z}}$ e $A = (Aij)$.

Proposição 1.52: *Σ_A é compacto em Σ e $\sigma(\Sigma_A) \subset \Sigma_A$.*

Denotaremos por $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ a restrição do deslocamento σ a este compacto invariante. Ela é chamado do deslocamento de tipo finito.

Proposição 1.53: *$\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ é topologicamente mixing se, e somente se, A é aperiódica (i.e., existe $m > 0$ tal que $A^m_{ij} > 0$ onde $A^m = (A^m_{ij})$).*

Proposição 1.54: *Seja P uma matriz estocástica e p um vetor de probabilidade associado a P. O suporte da medida de Markov associado a P e p é Σ_A, onde A é definido como $A_{ij} = 1$ se $P_{ij} > 0$ e $A_{ij} = 0$ se $P_{ij} > 0$.*

Dado P uma matriz estocástica e p um vetor de probabilidade sempre podemos definir uma medida de Markov em Σ, então existem infinitas medidas de Markov em Σ e em particular em Σ_A. Em 1966 Parry demonstrou que existe uma delas caracterizado pela propriedade de dar o máximo valor possível à entropia de $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ e que descreve a forma em que os pontos periódicos de σ se distribuem no espaço Σ_A.

Se $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ é topologicamente mixing, então pela Proposição 1.53 A estocástica e pelo Teorema de Perron-Frobenius, existe $\lambda > 0$ autovalor dominante de A.

Teorema 1.55 (Parry [14])**:** *Se $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ é topologicamente mixing e λ é o autovalor dominante de A então*

$$h_\nu(\sigma) \leq \log \lambda$$

Para todo $\nu \in M_\nu(\Sigma_A)$ e existe uma única medida $\mu \in M_\nu(\Sigma_A)$ tal que

$$h_\mu(\sigma) = \log \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#Fix(\sigma^n) \tag{1.2}$$

esta medida μ é uma medida de Markov positiva sobre abertos de Σ_A.

Observação 1.56: Pelo Teorema de Perron-Frobenius, existem únicos autovetores $u = (u_1, \cdots, u_n)$ e $v = (v_1, \cdots, v_n)$ a esquerda e direita respectivamente associados a λ tal que $\sum_i u_i = 1 = \sum_i v_i$. Definimos

$$P_{ij} = \frac{A_{ij} v_j}{\lambda v_i}$$

$$p_i = \frac{u_i v_i}{c}$$

onde $c = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. Parry prova que P é uma matriz estocástica e p um vetor de probabilidade associado a P; e que a única medida de Markov que satisfaz (1.2) é definia por P e p.

Capítulo

2

Medidas transversas invariantes por holonomia

As medidas invariantes por um fluxo é um objeto de grande importância e utilidade para estudar a dinâmica dos fluxos. A generalização destas medidas em folheações é chamada *medidas transversas invariantes por holonomia* e é conseguida considerando medidas no espaço transverso à folheação em onde se identificam os pontos que pertencem a uma mesma folha e pedindo que sejam invariantes baixo o "fluxo das folhas". As medidas transversas têm sido objeto de estudo desde os anos 50 e demostraram ser muito úteis para a compreensão da dinâmica das folheações. O resultado principal deste capítulo, é mostrar um resultado conhecido de J. Plante [17] sobre a existência de medidas transversas invariantes sob a hipótese de crescimento sub-exponencial. Este capítulo é baseada no artigo de J. Plante [17].

2.1 Medida transversa invariante

Nesta seção $\mathcal{F}$ será uma folheação de dimensão p de uma variedade M de dimensão n e classe C^∞.

As propriedades da definição de folheação e a observação 1.3 podem ser resumidos como: Existe uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ de M com as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{U}$ é localmente finita.

2. Cada aberto U_α é conexo e $\mathcal{F}\mid_{U_\alpha}$ é a folheação trivial; i.e., existem difeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ que levam a $\mathcal{F}$ na folheação horizontal de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} = \mathbb{R}^n$.

3. Estos difeomorfismos φ_α satisfazem que $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ e $\{\varphi_\alpha^{-1}((-1,1)^n)\}_\alpha$ é uma coberta de M.

4. Em cada U_α temos um disco imerso $\mathbb{D}^{n-p} = \Sigma_\alpha \subset \varphi_\alpha^{-1}((-1,1)^n)$, que é transversal às placas de $\mathcal{F}\mid_{U_\alpha}$ e parametriza este espaço de placas.

5. Cada folha de $\mathcal{F}$ corta algum disco transversal Σ_α e se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ segue que cada placa de $\mathcal{F}\mid_{U_\alpha}$ encontra no máximo uma placa de $\mathcal{F}\mid_{U_\beta}$ definindo um difeomorfismo C^∞, $\gamma_{\alpha\beta} : D(\gamma_{\alpha\beta}) \subset \Sigma_\alpha \to R(\gamma_{\alpha\beta}) \subset \Sigma_\beta$ com a propriedade de que, em cada interseção $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\pi_\beta = \gamma_{\alpha\beta} \circ \pi_\alpha$ com π_α a projeção de U_α sobre Σ_α ao longo das placas.

A coberta $\mathcal{U}$ é chamado cobertura folheada regular de $\mathcal{F}$. Quando $\mathcal{U}$ é uma cobertura folheada regular temos que o conjunto $\Sigma = \bigsqcup_\alpha \Sigma_\alpha$, onde $\sqcup$ indica que a soma é disjunta, tem estrutura de variedade diferenciável de codimensão a dimensão de $\mathcal{F}$, esta variedade é chamada o espaço transverso de $\mathcal{F}$.

Observação 2.1: Os difeomorfismos $\gamma_{\alpha\beta}$ satisfazem a condição de cociclo; i.e., se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \Rightarrow \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}^{-1}$ e se $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\delta \neq \emptyset \Rightarrow \gamma_{\alpha\beta} \circ \gamma_{\beta\delta} = \gamma_{\alpha\delta}$ sobre os domínios correspondentes.

Agora lembremos a definição de pseudogrupo.

Definição 2.2: Seja X um espaço topológico e seja Γ uma coleção de homeomorfismos entre subconjuntos de X. Se $\gamma \in \Gamma$ denotamos por $D(\gamma)$ e $R(\gamma)$ ao domínio e ao imagem de γ, respectivamente. Dizemos que Γ é um pseudogrupo se as seguentes condições satisfazem.

i) A identidade $id : X \to X$ pertence a Γ.

ii) Se $\gamma \in \Gamma$ então $\gamma^{-1} \in \Gamma$, onde

$$D(\gamma^{-1}) = R(\gamma) \text{ e } R(\gamma^{-1}) = D(\gamma)$$

iii) Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, então $\gamma_1 \circ \gamma_2 \in \Gamma$, onde

$$D(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \gamma_2^{-1}(D(\gamma_1) \cap R(\gamma_2) \text{ e } R(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \gamma_1(D(\gamma_1) \cap R(\gamma_2))$$

iv) Para $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ com $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ para todo $x \in D(\gamma_1) \cap D(\gamma_2)$ definimos

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(x) = \begin{cases} \gamma_1(x) & \text{se } x \in D(\gamma_1) \\ \gamma_2(x) & \text{se } x \in D(\gamma_2) \end{cases}$$

Logo, se $\gamma_1 \cup \gamma_2 : D(\gamma_1) \cup D(\gamma_2) \to R(\gamma_1) \cup D(\gamma_2)$ é um homeomorfismo, então $\gamma_1 \cup \gamma_2 \in \Gamma$

v) Se $\gamma \in \Gamma$ e $S \subset D(\gamma)$, então a restrição de γ a S é um elemento se Γ.

Temos então a definição do pseudogrupo de holonomia.

Definição 2.3: Definimos o pseudogrupo de holonomia de $\mathcal{F}$ para a cobertura regular $\mathcal{U}$ como o pseudogrupo $\Gamma_{\mathcal{U}}$ de difeomorfismos locais C^∞, gerado pelos difeomorfismos locais $\gamma_{\alpha\beta}$ de Σ.

Seja $\tilde{\mathcal{U}}$ outra cobertura regular folheada, vamos supor que $\tilde{\mathcal{U}}$ é mais fina que $\mathcal{U}$(i.e., para cada j existe $k(j)$ tal que $\tilde{U_j} \subset U_{k(j)}$) e também $\tilde{U_j}$ é uniforme em $U_{k(j)}$(i.e., cada placa de $U_{k(j)}$ encontra no máximo uma placa de $\tilde{U_j}$)) então obtemos uma natural identificação entre os correspondentes pseudogrupos de holonomia $\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathcal{U}}$. Assim temos o resultado cuja prova pode ser consultada em $[10, p.76]$.

Lema 2.4: *Todos os pseudogrupos de holonomia $\Gamma_{\mathcal{U}}$, onde $\mathcal{U}$ é uma cobertura regular de M para a folheação $\mathcal{F}$, são equivalentes de maneira natural.*

Agora podemos definir uma medida transversa invariante como segue.

Definição 2.5: Uma medida transversa invariante por holonomia (para $\mathcal{F}$), ou simplesmente uma **medida transversa invariante** (para $\mathcal{F}$), é uma medida μ definida no espaco transverso Σ tal que:

i) É finita em compactos.

ii) É invariante sobre o pseudogrupo de holonomia; i.e.,

$$\mu(\gamma(B)) = \mu(B)$$

para todo $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}}$ e mensurável $B \subset D(\gamma)$.

Se existe uma medida invariante para $\mathcal{F}$, dizemos que $\mathcal{F}$ admite uma medida transversa invariante. Definimos o suporte de uma medida transversa invariante, como o conjunto de pontos de $x \in M$ tais que, dado Σ' um disco transversal a $\mathcal{F}$ que contem a x, tem-se que $\mu(\Sigma') > 0$. Denotamos ao suporte de μ por $\text{supp}(\mu)$.

Exemplo 2.6: Se L é uma folha fechada de $\mathcal{F}$ e N é uma q-variedade transversal a $\mathcal{F}$, então podemos definir uma medida μ em N como segue. Para qualquer conjunto $A \subset N$ mensurável seja $\mu(A)$ o número de elementos de $L \cap A$ e que é finito pelo Teorema 1.5 quando A é compacto, e claramente por Teorema 1.4 μ é $\mathcal{F}$-invariante.

Exemplo 2.7: Seja ω uma 1-forma fechada não singular de classe C^r. Sabemos que ω induz uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão 1 de classe C^r(ver $[6, p.82]$), então para todo disco transversal Σ de $\mathcal{F}$, a restrição de $\omega \mid_{\Sigma}$ é uma forma de volumem que é positiva em abertos; por tanto, ω induz uma medida no espaço transverso de $\mathcal{F}$ que é finita em compactos e como ω é fechado segue-se que dita forma é invariante pelo pseudogrupo de holonomia de $\mathcal{F}$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação p-dimensional orientável de M que vamos supor que é compacta. Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ um atlas regular folheado, $\Sigma = \bigsqcup \Sigma_\alpha$ o espaço transverso, $\gamma_{\alpha\beta} : D(\lambda_{\alpha\beta})\Sigma_\alpha \to R(\lambda_{\alpha\beta})\Sigma_\beta$ os difeomorfismos, $\pi_\alpha : U_\alpha \to \Sigma_\alpha$ a projeção canônica para cada $\alpha \in I$ e $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{U}}$ o pseudogrupo de holonomia gerado por $\Gamma_1 = \{\gamma_{\alpha\beta}; \alpha, \beta \in I\}$.

Seja μ uma medida em Σ transversa invariante por holonomia. Então, para qualquer $U_\alpha \in \mathcal{U}$, podemos integrar uma p-forma ω sobre cada placa $\pi_\alpha^{-1}(x)$. Esto define uma função continua de Σ_α a $\mathbb{R}$, que ao ser integrada com respeito à medida $\mu \mid_{\Sigma_\alpha}$ se obtêm uma aplicação linear real C_μ do conjunto das p-formas, como segue:

Se $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma partição da unidade associada a $\mathcal{U}$, definimos a aplicação linear

$$< \Phi_\mu, \omega >:= \sum_{\alpha \in I} \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} \lambda_\alpha \omega) d\mu(x) \tag{2.1}$$

Notemos que esta definição não depende da partição da unidade escolhida, já que se $\mathrm{supp}(\omega) \subset U_\beta$ para algum $\beta \in I$, como os difeomorfismos locais $\gamma_{\alpha\beta} \in \Gamma$, são invariantes sobre μ, então

$$\begin{aligned} < \Phi_\mu, \omega > &= \sum_{\alpha \in I} \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} \lambda_\alpha \omega) d\mu(x) \\ &= \sum_{\alpha \in I} \int_{\Sigma_\beta} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(\gamma_{\beta\alpha}(y))} \lambda_\alpha \omega) d\mu(y) \\ &= \sum_{\alpha \in I, U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset} \int_{\Sigma_\beta} (\int_{\pi_\beta^{-1}(y)} \lambda_\alpha \omega) d\mu(y) \\ &= \int_{\Sigma_\beta} (\int_{\pi_\beta^{-1}(y)} \omega) d\mu(y) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, se $\{\delta_\alpha\}$ é outra partição da unidade associada $\mathcal{U}$, como $supp(\delta_\beta\omega) \subset U_\beta$, logo pelo anterior temos que

$$< \Phi_\mu, \delta_\beta\omega >= \int_{\Sigma_\beta} (\int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \delta_\beta\omega) d\mu(x)$$

e segue-se que

$$< \Phi_\mu, \omega >= \sum_{\beta\in I} < \Phi_\mu, \delta_\beta\omega >= \sum_{\beta\in I} \int_{\Sigma_\beta} (\int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \delta_\beta\omega) d\mu(x)$$

De forma análoga se mostra que a corrente é independente da escolha da cobertura. Por outro lado se ω é uma p-forma exata temos que $< \Phi_\mu, \omega >= 0$, pois se $\omega = d\eta$ e $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma partição da unidade associada a $\mathcal{U}$ então $\eta = \sum_\alpha \lambda_\alpha\eta \Rightarrow d\eta = \sum_\alpha d(\lambda_\alpha\eta)$. Logo desde que $\text{supp}(d(\lambda_\alpha\omega)) \subset U_\alpha$ segue de (2.2) que

$$< \Phi_\mu, \omega >=< \Phi_\mu, d\eta >=< \Phi_\mu, \sum_\alpha d(\lambda_\alpha\eta) >= \sum_{\alpha\in I} \int_{\Sigma_\alpha} (\underbrace{\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} d(\lambda_\alpha\eta))}_{(*)} d\mu(x)$$

e usando o Teorema de Stokes na integral $(*)$ temos que $\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} d(\lambda_\alpha\eta) = 0 \Rightarrow < \Phi_\mu, \omega >= 0$. Em outras palavras temos bem definido uma aplicação linear

$$\begin{array}{rccl} \Phi_\mu : & H_c^p(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \displaystyle\sum_{\alpha\in I} \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} \lambda_\alpha\omega) d\mu(x) \end{array}$$

Assim pelo Lema de Poincaré μ induz um elemento no $(n-p)$-ésimo grupo de cohomologia DeRham, pois

$$\Phi_\mu \in (H_c^p(M))^* \simeq H^{n-p}(M)$$

O seguente Teorema é o primeiro resultado principal de este capítulo, ele é um bonito teorema por que em seu enunciado e sua prova faz uso de varias áreas da matemática. Pode ser pensado como um Teorema abstrato de Poincaré-Bendixson para folheações.

Teorema 2.8: *Seja M^n uma variedade diferenciável de classe C^∞ e $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente orientável de classe C^r $(r \geq 1)$ e codimensão k em M. Se N é uma subvariedade compacta de dimensão k sem bordo, transversal a $\mathcal{F}$ e que intersecta o suporte de uma medida transversa invariante por holonomia μ, então N representa um elemento não nulo de $H^{n-k}(M)$.*

Demonstração. Vamos construir uma $(n-k)$-forma fechada representado por N. Seja T uma vizinhança tubular de N em M então ele define um fibrado onde as fibras são as folhas que estão em T(ver figura(2.1)).

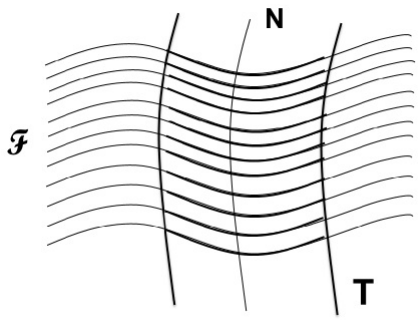

Figura 2.1: T vizinhança tubular da subvariedade N.

Como N é compacto, pela Teorema 1.14 a vizinhança tubular T é equivalente a fibrado normal, i.e., as fibras do fibrado normal são levados difeomorficamente nas fibras da vizinhança tubular. Então podemos olhar a vizinhança tubular como o fibrado normal. Seja $\{V_i\}_{i\in I}$ uma cobertura de N tal que trivializa o fibrado, esto é, para cada i existe ϕ_i difeomorfismo que faz comutar o seguente diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(V_i) \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "\pi"] & V_i \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[dl, "P_1"] \\ V_i & \end{tikzcd}$$

onde π e P_1 são como na definição de espaço fibrado. Seja $f : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = g(\|x\|^2)$ onde

$$g(t) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{1-t^2}) & \text{se } |t| < 1 \\ 0 & \text{se } |t| \geq 1 \end{cases}$$

então f tem as seguentes propriedades:

i) Tem suporte compacto.

ii) É invariante sob a ação das matrizes ortogonais $\mathcal{O}(n-k)$; i.e., $f(Ax) = f(x)$ se $A \in \mathcal{O}(n-k)$

iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f = 1$

Assim temos em $V_i \times \mathbb{R}^{n-k}$ a seguinte $(n-k)$-forma fechada

$$\omega = f(x_{k+1}, \cdots, x_n) dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Logo $\eta_i = \phi_i^*(\omega)$ é uma $(n-k)$-forma fechada em $\pi^{-1}(V_i)$ para cada $i \in I$.
Afirmação 1: $\eta_i = \eta_j$ em $\pi^{-1}(V_i) \cap \pi^{-1}(V_j)$. De fato, sabemos que o fibrado normal é

um fibrado vetorial com grupo estrutural $GL(\mathcal{R}^{n-k})$, mas pela Proposição 1.11 podemos reduzir este grupo estrutural a $\mathcal{O}(n-k)$. Logo pela definição 1.7 existe um cociclo $\delta_{ij} : V_i \cap V_j \to \mathcal{O}(n-k)$ tal que

$$\begin{array}{rccc} \phi_i \circ \phi_j^{-1} : & (V_i \cap V_j) \times \mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & (V_i \cap V_j) \times \mathbb{R}^{n-k} \\ & (z, w) & \mapsto & (z, (\rho \circ \delta_{ij} z)w) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathcal{O}(n-k) & \longrightarrow & Diff^{\infty}(\mathbb{R}^{n-k}) \\ & A & \mapsto & \rho(A)w = Aw \end{array}$$

é a ação de $\mathcal{O}(n-k)$ em $\mathcal{R}^{n-k}$. Logo

$$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})^*(\overbrace{f(x_{k+1}, \cdots, x_n)}^{f_1(z, x_{k+1}, \cdots, x_n)} dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n) =$$

$$\begin{array}{rl} = & f_1 \circ (\phi_i \circ \phi_j^{-1})(z, w)(\phi_i \circ \phi_j^{-1})^*(dx_{k+1}) \wedge \cdots \wedge (\phi_i \circ \phi_j^{-1})^*(dx_n) \\ = & f_1(z, (\rho \circ \delta_{ij} z)w) d((\phi_i \circ \phi_j^{-1})^* x_{k+1}) \wedge \cdots \wedge d((\phi_i \circ \phi_j^{-1})^* x_n) \\ = & f((\underbrace{\rho \circ \delta_{ij} z}_{\in \mathcal{O}(m-k)})w) d(x_{k+1} \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z, w)) \wedge \cdots \wedge d(x_n \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z, w)) \end{array}$$

como f é invariante sob a ação das matrizes ortogonais $\mathcal{O}(n-k)$ segue do anterior que

$$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})^*(\omega) = f(w_{k+1}, \cdots, w_n) dw_{k+1} \wedge \cdots \wedge dw_n$$

Por tanto $\phi_i^* \omega = \phi_j^* \omega$ o qual conclui a afirmação. Assim podemos definir a $(n-k)$-forma fechada em T como

$$\eta = \bigsqcup_i \eta_i$$

o qual esta bem definida pela afirmação anterior, tem suporte compacto pois f tinha suporte compacto e pode ser estendido a M como

$$\eta = \begin{cases} \eta & \text{em } T \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Afirmação 2: $\langle \Phi_\mu, \eta \rangle = \mu(N)$. De fato, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura regular folheada e $U_\beta \in \mathcal{U}$ tal que $U_\beta \cap T \neq \emptyset$ que podemos supor que é como na figura 2.2.

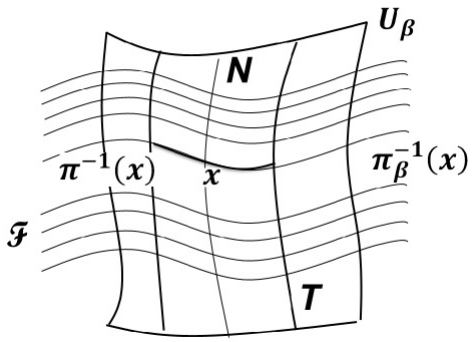

Figura 2.2:

então

$$\int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \eta = 1 \tag{2.3}$$

pois

$$\int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \eta = \int_{\pi^{-1}(x)} \eta = \int_{\pi^{-1}(x)} \phi_i^*(f dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n) \text{ para algum } i \in I$$

como $\pi^{-1}(x) \simeq \{x\} \times \mathcal{R}^{n-k}$ por ϕ_i então segue da ultima linha

$$\begin{aligned} \int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \eta &= \int_{\{x\}\times\mathcal{R}^{n-k}} (\phi^{-1})^* \circ \phi_i^*(f dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &= \int_{\{x\}\times\mathcal{R}^{n-k}} f dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \int_{\mathcal{R}^{n-k}} f = 1 \end{aligned}$$

Por outro lado de (2.1)

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\mu, \eta \rangle &= \sum_\beta \int_{\Sigma_\beta} (\int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \lambda_\beta \eta) d\mu(x) \\ &= \sum_{U_\beta \cap N \neq \emptyset} \int_{\Sigma_\beta} (\int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \lambda_\beta \eta) d\mu(x) \end{aligned}$$

Como já foi provado que o lado direito da igualdade anterior não depende da escolha da partição da unidade, então podemos tomar uma partição da unidade tal que $\text{supp}\lambda_\alpha \cap \text{supp}\lambda_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$; i.e., $\lambda_\beta \mid_{\text{supp}\lambda_\beta} = 1$, então

$$\langle \Phi_\mu, \eta \rangle = \sum_\beta \int_{U_\beta \cap N} (\underbrace{\int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \eta}_{1 \text{ por } (2.3)}) d\mu(x) = \sum_\beta \int_{U_\beta \cap N} d\mu(x) \tag{2.4}$$

Ainda mais, fazendo uma refinação dos abertos U_β tal que $U_\alpha \cap U_\beta$ seja como máximo uma placa, então de (2.4) segue-se a afirmação.
Como N intersecta o suporte de μ, então por definição de suporte $\mu(N) > 0$ e pela afirmação 2 temos que $\langle \Phi_\mu, \eta \rangle > 0$. Logo η não é uma forma exata. Assim η é um elemento não nulo de $H^{n-k}(M)$.

□

Uma pergunta natural que surge é a seguente: Dada uma folheação $\mathcal{F}$ ele sempre admite uma medida transversa invariante pela holonomia?. A resposta é que geral não é certo. Um exemplo de uma folheação que não admite medida invariante pode ser encontrado na tésis doutoral de [9], este exemplo não é exibido neste trabalho devido, que para seu entendimento precisamos de pré-requisitos que escapam do objetivo deste trabalho. Assim agora nos podemos perguntar. Quais são as condições suficientes e necessárias para a existência de uma medida transversa invariante?. Nas seguintes seções desenvolveremos tópicos para dar as condições suficientes.

2.2 Crescimento de funções

Definição 2.9: Sejam $G, H : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ duas funções não decrescentes.

a) Se diz que G domina a H o qual denotamos por $G \succeq H$ se existem inteiros positivos α, β e γ tais que

$$\alpha G(\beta r) \geq H(r), \forall r \geq \gamma$$

b) Se $G \succeq H \succeq G$, dizemos que G e H tem o mesmo tipo de crescimento.

c) Se $G \succeq H$ e $H \not\succeq G$, dizemos que G domina estritamente a H e escrevemos $G \succ H$.

Observação 2.10:

1. A relação $G \succeq H \succeq G$ é de equivalência no conjunto das funções $G : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$.
2. A classe de equivalência de G será denotado por $gr(G)$ que é chamado tipo de crescimento de G.

Exemplo 2.11: As funções exponenciais $r \mapsto a^r$, $a > 1$ tem todas o mesmo tipo de crescimento, pois se $a, b > 1$, seja $\beta > \log_a b$ então

$$a^{\beta r} > b^r, \forall r \geq 1$$

i.e. $a^r \succeq b^r$, a relação inversa é análogo.

Exemplo 2.12: Seja $P(r), Q(r)$ polinômios de grau p e q respectivamente, com coeficientes positivos, se $p > q \Rightarrow P \succ Q$, pois $\lim_{r\to+\infty} \frac{P(r)}{Q(r)} = +\infty$ e segue que $\exists C > 0$ tal que $P(r) \geq Q(r)$, $\forall r > C$. Por outro lado suponha que $Q \succeq P \Rightarrow \exists \alpha, \beta$ e γ tal que $\alpha Q(\beta r) \geq P(r)$ $\forall r > \gamma \Rightarrow \lim_{r\to+\infty} \frac{P(r)}{\alpha Q(\beta r)} \leq 1$, logo $p \leq q$ o qual é uma contradição. Assim segue-se que

$$P \succeq Q \succeq P \Longleftrightarrow p = q$$

Definição 2.13: Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$, dizemos que f tem crescimento exponencial se $gr(f) = gr(e^r)$ e se $f \prec e^r$ dizemos que f tem crescimento sub-exponencial ou não exponencial.

Definição 2.14: Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ não decrescente , dizemos que f tem crescimento polinomial de grau p, se existe $P(r)$ polinômio de grau p com coeficientes positivos tal que $gr(f) = gr(P)$.

Proposição 2.15: *Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ não decrescente. $f \succeq e^r$ se, e somente se,*

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\log f(r)}{r} > 0.$$

Demonstração. Como $\liminf_{r\to+\infty} \frac{\log f(r)}{r} > 0 \Rightarrow \exists a, C > 0$ tal que

$$\frac{\log f(r)}{r} > a, \forall r \geq C \Rightarrow \log f(r) > ar, \forall r \geq C$$

se $b = e^a > 1 \Rightarrow f(r) \geq e^{ar} = b^r$, $\forall r \geq C$. Logo $f \succeq b^r$. Reciprocamente, se existem α, β e $\gamma \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$f(\beta r) \geq \frac{e^r}{\alpha}, \forall r \geq \gamma$$

Considerando inteiros k no intervalo $\beta r \leq k \leq \beta(r+1)$, concluirmos que

$$f(k) \geq f(\beta r) \geq \frac{e^r}{\alpha} \geq \frac{e^{k-\beta}}{\alpha}, \forall k \geq \beta\gamma$$

aplicando log temos que

$$\frac{\log f(k)}{k} \geq \frac{1}{\beta} - \frac{1 + \log \alpha}{k}, \forall k \geq \beta\gamma$$

Assim

$$\lim_{k\to\infty} \inf \frac{\log f(k)}{k} \geq \frac{1}{\beta} > 0.$$

□

Corolário 2.16: $\liminf_{r\to+\infty} \dfrac{\log f(r)}{r} = 0 \Longleftrightarrow f$ *tem crescimento sub-exponencial.*

Exemplo 2.17: A função $r \mapsto r^{r^s}$, não tem crescimento polinomial nem exponencial. Além disso se $s \neq s'$, então $gr(r^{r^s}) \neq gr(r^{r^{s'}})$.

2.3 Condições suficientes para a existência de uma medida invariante

Seja X um espaço topológico e Γ um pseudogrupo de homeomorfismos locais de X. Dizemos que Γ é gerado por um subconjunto $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, se cada elemento de Γ pode ser obtido de elementos de Γ_1 por um número finito de operações dados na definição 2.2. Γ_1 é chamado um conjunto gerador para Γ. Dizemos que Γ é finitamente gerado e enumeravelmente gerado se Γ_1 é finito e enumerável. Dizemos que o conjunto gerador Γ_1 é simétrico se $\gamma \in \Gamma_1$ temos que $\gamma^{-1} \in \Gamma_1$. De aqui em diante vamos assumir que todo conjunto gerador é simétrico.

Definição 2.18: Dado $x \in X$ definimos a órbita de x sobre Γ como o conjunto

$$\Gamma(x) = \{y \in X : y = \gamma(x), \text{para algúm } \gamma \in \Gamma\}$$

Observação 2.19: Se $y \in \Gamma(x)$, então $\Gamma(x) = \Gamma(y)$.

Seja Γ é finitamente gerado e Γ_1 um conjunto gerador finito e simétrico, definimos

$$\Gamma^n(x) = \{y \in X : y = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_r}(x), r \leq n \text{ e } \gamma_{j_i} \in \Gamma_1\} \subset \Gamma(x) \tag{2.5}$$

Assim podemos definir a seguinte função

$$G_x : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$$

dado por $G_x = |\Gamma^n(x)|$, onde $|.|$ denota a cardinalidade de um conjunto. Esta função é chamada função de crescimento de Γ em x associado a Γ_1 ou função de crescimento da orbita de x sobre Γ associado a Γ_1.

O seguinte lema mostra que o tipo de crescimento da função de crescimento de Γ não depende do ponto.

Lema 2.20: *Se $y \in \Gamma(x)$, então $gr(G_x) = gr(G_y)$.*

Demonstração. Como $y \in \Gamma(x) \Rightarrow y = \gamma(x)$, para algum $\gamma \in \Gamma$. Como Γ_1 gera Γ

$$\Rightarrow \gamma = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_s}, \text{ com } \gamma_{j_i} \in \Gamma_1.$$

Se $z \in \Gamma^k(y)$, por (2.5) temos que $z = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_r}(y)$. Logo,

$$z = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_r} \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_s}(x) \Rightarrow z \in \Gamma^{k+s}$$

Assim

$$\Gamma^k(y) \subset \Gamma^{k+s}(x), \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

de onde segue,

$$G_y(k) \leq G_x(k+s) \leq G_x(2k), \forall k \geq s$$

Por tanto $G_y \preceq G_x$. De forma análoga temos que $G_x \preceq G_y$. O que conclui a prova. □

Nosso seguinte objetivo é mostrar que a função de crescimento de Γ em x, é independente do conjunto gerador.

Lema 2.21: *Se $\Gamma_1' = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ é outro conjunto gerador de Γ finito e simétrico. Se $\Gamma_1 \subset \Gamma_1'$, então $G_x(k) \leq G_x'(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ onde G_x, G_x' são as funções de crescimento associadas a Γ_1, Γ_1' respectivamente.*

Demonstração. Desde que $\Gamma_1 \subset \Gamma_1'$ e por (2.5), temos que $\Gamma^k(x) \subset (\Gamma')^k(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$. Logo $G_x(k) \leq G_x'(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$.

□

Observação 2.22:

1. O conjunto $\Gamma_N = \{\gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_r} / r \leq N, \gamma_{j_i} \in \Gamma_1\}$ com $N \geq 1$ é um conjunto gerador de Γ finito e simétrico tal que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_N$.
2. Se G_x^N é a função de crescimento de Γ associado a Γ_N, então temos $G_x^N(k) \leq G_x(Nk)$.

Agora, sejam Γ_1 e Γ_1' dois conjuntos geradores finitos e simétricos de Γ, tomando N inteiro positivo tal que $\Gamma_1' \subset \Gamma_N$, segue-se do Lema (2.21) e da observação (2.22) que $G_x'(k) \leq G_x^N(k) \leq G_x(Nk)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ Assim $G_x' \preceq G_x$. Analogamente $G_x \preceq G_x'$, por tanto

$$gr(G_x) = gr(G_x')$$

Assim temos a seguinte definição, que pelos argumentos anteriores esta bem definido.

Definição 2.23: Se Γ é um pseudogrupo de homeomorfismos locais em X e $x \in X$, então o crescimento de Γ em x se define como $gr(G_x)$.

Observação 2.24: G_x sempre é dominado por uma função exponencial, pois se Γ_1 é um conjunto gerador finito de Γ com m elementos, segue de (2.5) que

$$|\Gamma^k(x)| \leq m + m^2 + \cdots + m^k \leq (m+1)^k$$

Se Γ é enumeravelmente gerado, dizemos que tem crescimento não exponencial em $x \in X$, se pode-se escrever

$$\Gamma = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \text{ com } \Gamma_m \subset \Gamma_{m+1}$$

onde Γ_m são pseudogrupos finitamente gerados cada um das quais tem crescimento não exponencial em x

O seguinte resultado é clave para mostrar nosso segundo objetivo deste capítulo. Este Teorema fornece as condições suficientes para a existência de uma medida invariante pelo pseudogrupo de holonomia.

Teorema 2.25: *Seja Γ um pseudogrupo enumerável gerado de homeomorfismos de um espaço métrico compacto X. Se Γ tem crescimento sub-exponencial em $x \in X$, então existe uma medida de Borel μ em X com as seguintes propriedades:*

i) μ *é* Γ*-invariante.*

ii) $\mu(X) = 1$

iii) $supp(\mu) \subseteq \overline{\Gamma(x)}$

Demonstraremos o teorema no primeiro caso quando Γ é finitamente gerado. Empezaremos demonstrando dois lemas.

Lema 2.26: *Existe uma sequencia de inteiros positivos $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ com $n_k \to +\infty$ tal que*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\Gamma^{n_k+1}(x) \setminus \Gamma^{n_k-1}(x)|}{|\Gamma^{n_k}(x)|} = 0$$

Demonstração. Por absurdo; i.e., $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{|\Gamma^{k+1}(x) \setminus \Gamma^{k-1}(x)|}{|\Gamma^k(x)|} > a > 0$. Então $\exists N > 0$ tal que

$$\text{se } k \geq N \Rightarrow |\Gamma^{k+1}(x) \setminus \Gamma^{k-1}(x)| > a|\Gamma^k(x)| \geq a|\Gamma^{k-1}(x)|$$

logo

$$|\Gamma^{k+1}(x) \setminus \Gamma^{k-1}(x)| + |\Gamma^{k-1}(x)| \geq (1+a)|\Gamma^{k-1}(x)|$$

$$\Rightarrow |\Gamma^{k+1}(x)| \geq (1+a)|\Gamma^{k-1}(x)|, \forall k \geq N \tag{2.6}$$

De (2.6), para todo $s > 0$ temos que

$$|\Gamma^{N-2s-1}(x)| \geq (a+1)^s|\Gamma^{N-1}(x)| \text{ e } |\Gamma^{N-2s}(x)| \geq (a+1)^s|\Gamma^N(x)|$$

assim, tomando $s > N$ temos que

$$|\Gamma^{3s}(x)| \geq (1+a)^s|\Gamma^{N-1}(x)| \geq |\Gamma^{N-1}(x)| \Rightarrow G_x(3s) \geq (1+a)^s, \forall s > N$$

desta ultima linha, da definição (2.23) da Observação (2.24), segue-se que Γ tem crescimento exponencial em x o qual é uma contradição com a hipótese.

□

Definição 2.27: Dado $\gamma \in \Gamma$ e $f \in C(X)$ com $\text{supp}(f) \subseteq R(\gamma)$ defina $f_\gamma \in C(X)$ por

$$f_\gamma(y) = \begin{cases} f(\gamma(y)) & \text{se } y \in D(\gamma) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Observação 2.28: Como o crescimento de Γ em x não depende do conjunto gerador, então vamos supor que Γ_1 é um conjunto gerador de Γ tal que

$$\text{se } \gamma \in \Gamma_1 \setminus Id_X \text{ então } D(\gamma) \cap R(\gamma) = \emptyset.$$

Lema 2.29: *Seja Γ_1 um conjunto gerador finito de Γ. Se $\gamma \in \Gamma_1$ e $f \in C(X)$ com supp$(f) \subset R(\gamma)$ e $n \geq 1$ inteiro, então*

$$\sum_{y \in \Gamma^n(x)} (f(y) - f_\gamma(y)) = \sum_{z \in \Gamma^n(x) \triangle \gamma\Gamma^n(x)} \epsilon_z f(z)$$

onde

$$\epsilon_z(y) = \begin{cases} 1 & \textit{se } z \in \Gamma^n(x) \\ -1 & \textit{se } z \in \gamma\Gamma^n(x) \end{cases}$$

Demonstração. Se $\gamma = Id_X$ é obvio. Então vamos supor que $\gamma \neq Id_X$. Por Observação (2.28)

$$\text{se } y \in D(\gamma) \Rightarrow y \notin R(\gamma) \Rightarrow f(y) = 0, \text{ pois supp}(f) \subset R(\gamma)$$

além disso,

$$\text{se } y \notin D(\gamma) \Rightarrow f_\gamma(y) = 0$$

assim,

$$\begin{aligned}\sum_{y\in\Gamma^n(x)}(f(y)-f_\gamma(y)) &= \sum_{y\in\Gamma^n(x)\cap D(\gamma)}(f(y)-f_\gamma(y))+\sum_{y\in\Gamma^n(x)\setminus D(\gamma)}(f(y)-f_\gamma(y))\\ &= \sum_{y\in\Gamma^n(x)\cap D(\gamma)}-f_\gamma(y)+\sum_{y\in\Gamma^n(x)\setminus D(\gamma)}f(y)\end{aligned} \tag{2.7}$$

desde que

$$z\in\gamma\Gamma^n(x)\Leftrightarrow\exists! y\in\Gamma^n(x)\cap D(\gamma)\text{ tal que }z=\gamma(y)$$

segue que

$$\sum_{y\in\Gamma^n(x)\cap D(\gamma)}-f_\gamma(y)=\sum_{y\in\Gamma^n(x)\cap D(\gamma)}-f(\gamma(y))=\sum_{z\in\gamma\Gamma^n(x)}-f(z)=\sum_{z\in\gamma\Gamma^n(x)}\epsilon_z f(z) \tag{2.8}$$

e desde que $\mathrm{supp}(f)\subset R(\gamma)$ temos

$$\sum_{y\in\Gamma^n(x)\setminus D(\gamma)}f(y)=\sum_{y\in\Gamma^n(x)\setminus D(\gamma)}f(y)+\underbrace{\sum_{y\in D(\gamma)}f(y)}_{0}=\sum_{y\in\Gamma^n(x)}f(y)=\sum_{z\in\Gamma^n(x)}\epsilon_z f(z) \tag{2.9}$$

Logo de (2.8), (2.9) e (2.7) segue que

$$\sum_{y\in\Gamma^n(x)}(f(y)-f_\gamma(y))=\sum_{z\in\Gamma^n\triangle\gamma\Gamma^n(x)}\epsilon_z f(z)$$

□

Definição 2.30: Seja $\phi:C(X)\to\mathbb{R}$ uma funcional linear, dizemos que ϕ é Γ-invariante se para cada $\gamma\in\Gamma_1$ e $f\in C(X)$ com $\mathrm{supp}(f)\subset R(\gamma)$ temos que $\phi(f_\gamma)=\phi(f)$. Dizemos que ϕ é normalizada se $\phi(1)=1$.

Demostração do Teorema 2.25. Estamos supondo que Γ é finitamente gerado.
Afirmação 1: Existe $I:C(X)\to\mathbb{R}$ um funcional linear Γ-invariante e normalizada. De fato, seja $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequencia como no lema 2.26, então para cada $k\geq 1$, definimos a aplicação linear $I_k:C(X)\to\mathbb{R}$ dado por

$$I_k(f)=\frac{1}{|\Gamma^{n_k}(x)}\sum_{y\in\Gamma^{n_k}(x)|}f(y) \tag{2.10}$$

Assim definidas estas funcionais lineares são normalizados e limitadas. Como $C(X)$ é separável, então pelo por um teorema analise funcional, existe uma subsequencia de $\{I_k\}$ tal que converge na topologia fraca* para uma aplicação linear, sem perda de generalidade vamos tomar a subsequencia como toda a sequencia, então $\exists I:C(X)\to\mathbb{R}$ aplicação linear tal que $I_k\overset{*}{\to}I$ quando $k\to+\infty$; i.e.,

$$I_k \overset{*}{\to} I \text{ quando } k \to +\infty \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} I_k(f) = I(f), \forall f \in C(X) \tag{2.11}$$

Assim temos que I é normalizado, pois os I_k são. Agora mostraremos que I é Γ-invariante. Seja $\gamma \in \Gamma_1$ e $f \in C(X)$ com $\text{supp}(f) \subset R(\gamma)$, então

$$\{z \in \Gamma^{n_k-1}(x) : f(z) \neq 0\} \subset \gamma\Gamma^{n_k}(x) \tag{2.12}$$

pois, se $z \in \{z \in \Gamma^{n_k-1}(x) : f(z) \neq 0\} \Rightarrow z \in R(\gamma)$, logo $z \in \Gamma^{n_k-1}(x) \cap R(\gamma) \Rightarrow z = \gamma\gamma^{-1}(z) \in \gamma\Gamma^{n_k}(x)$ e de (2.12) temos que

$$\Gamma^n(x) \triangle \gamma\Gamma^n(x) \subset \Gamma^{n+1}(x) \setminus \{z \in \Gamma^{n-1}(x); f(z) \neq 0\} \tag{2.13}$$

Por outro lado, de (2.10) e (2.11) temos que

$$|I(f) - I(f_\gamma)| = |\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{|\Gamma^{n_k}(x)|} \sum_{y\in\Gamma^{n_k}(x)} (f(y) - f_\gamma(y))|$$

e pelo Lema 2.29 segue-se que

$$|I(f) - I(f_\gamma)| = |\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{|\Gamma^{n_k}(x)|} \sum_{y\in\Gamma^{n_k}(x)\triangle\gamma\Gamma^{n_k}(x)} \epsilon_y f(y)|$$

e usando a expressão (2.13) temos

$$\begin{aligned} |I(f) - I(f_\gamma)| &\leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{|\Gamma^{n_k}(x)|} \sum_{y\in\Gamma^{n_k+1}(x)\setminus\Gamma^{n_k-1}} (x)|f(y)| \\ &\leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{|\Gamma^{n_k}(x)|} \sup_{y\in X} |f(y)||\Gamma^{n_k+1}(x) \setminus \Gamma^{n_k-1}(x)| \end{aligned}$$

assim, pelo Lema 2.26 segue-se que $I(f) = I(f_\gamma)$. Logo, pelo Teorema de representação de Riesz, temos que existe uma única medida μ de Borel em X tal que

$$I(f) = \int_X f d\mu, \text{ para todo } f \in C(X)$$

como $I(1) = 1$, segue-se $\mu(X) = 1$, desde que I é Γ-invariante temos que μ é Γ-invariante. Mostraremos que $\text{supp}(\mu) \subseteq \overline{\Gamma(x)}$, como

$$\text{supp}(\mu) = \{z \in X; \text{para toda vizinhança } V_z \text{ de } z,\ \mu(V_z) > 0\}$$

seja $z \in \text{supp}(\mu)$, como X é métrico, as bolas abertas $B_{\frac{1}{r}}(z)$ são vizinhanças de z com $r \in \mathbb{N}$, então $\mu(B_{\frac{1}{r}}(z)) > 0$. Como $\mu(B_{\frac{1}{r}}(z)) = I(\chi_{B_{\frac{1}{r}}(z)})$ e $\lim_{k\to+\infty} I_k(\chi_{B_{\frac{1}{r}}(z)}) = I(\chi_{B_{\frac{1}{r}}(z)})$. Por outro lado temos

$$I_k(\chi_{B_{\frac{1}{r}}(z)}) = \frac{1}{|\Gamma^{n_k}(x)|} \sum_{y\in\Gamma^{n_k}(x)} \chi_{B_{\frac{1}{r}}(z)})(y)$$

assim, para cada r, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $I_k(B_{\frac{1}{r}}(z)) > 0$, logo existe $z_r \in B_{\frac{1}{r}}(z) \cap \Gamma^{n_k}(x)$ para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, então $\lim\limits_{r \to +\infty} z_r = z$ e como $z_r \in \Gamma(x)$ segue-se $z \in \overline{\Gamma(x)}$. Assim conclui-se a prova no caso quando Γ é finitamente gerado.

Agora mostraremos o caso geral, como Γ é enumeravelmente gerado e tem crescimento não exponencial em x, então podemos escrever

$$\Gamma = \cup_{m=1}^{\infty} \Gamma_m$$

onde, os Γ_m são finitamente gerado como crescimento não exponencial em x e tal que $\Gamma_m \subset \Gamma_{m+1}$. Assim pelo caso já provado temos que para cada m existe $I_m : C(X) \to \mathbb{R}$ funcional linear normalizado Γ_m-invariante, desde que $\Gamma_m \subset \Gamma_{m+k}$ para todo $k \geq 0$ então I_{m+k} é Γ_m-invariante para todo $k \geq 0$ e pela forma como foram construídos os I_m segue-se $\{I_{m+k}\}_{k \geq 0}$ é uma sequencia de funcionais lineares limitados, então por um teorema de analise funcional,

$$\exists I : C(X) \to \mathbb{R} \text{ aplicação linear tal que } I_{m+k} \overset{*}{\to} I \text{ quando } k \to \infty$$

pelas mesmas contas feitas anteriormente temos que I é Γ_m-invariante e normalizado, como m é arbitrário, então I é Γ-invariante. Pelo Teorema de representação de Riesz, existe uma única medida μ em X, que fazendo as mesmas contas do caso anterior temos que $\mu(X) = 1$ e $\text{supp}(\mu) \subset \overline{\Gamma(x)}$. Assim conclui-se a prova. $\square$

O seguinte resultado será enunciado como um lema, por que usaremos este resultado na seguinte seção, na prova do segundo resultado principal deste capítulo.

Lema 2.31: *Seja Γ um pseudogrupo de homeomorfismos de um espaço de Hausdorff X, seja $K \subset X$ um compacto e $\Gamma_K \subset \Gamma$ a restrição de Γ para K. Assumindo que Γ_K preserva uma (finitamente aditiva) medida finita μ_K definida no anel gerado pelos conjuntos compactos. Suponha que X é coberto por conjuntos abertos da forma $D(\gamma)$ onde $\gamma \in \Gamma$ e $R(\gamma) \subset K$. Então μ_K tem uma única extensão para uma medida μ que é definida no anel gerado pelos conjuntos compactos de X e é finito em conjuntos compactos.*

Demonstração. Seja

$$R' = \{A \subset X : A \subset \bigcup_{i \in I} K_i \text{ , } I \text{ finito e } K_i \text{ são compactos em } X\}$$

então temos que R' é um anel em X que contém a todos os conjuntos compactos de X. Logo, se R é o anel gerado por os conjuntos compactos de X então $R \subset R'$. Seja $A \in R \Rightarrow A \in R' \Rightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} K_i \Rightarrow \overline{A} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{K_i}$ como X é Hausdorff e K_i compacto,

segue que K_i é fechado, então $\overline{A} \subset \bigcup_{i\in I} K_i \Rightarrow \overline{A}$ é compacto em X. Como X é coberto por conjuntos abertos da forma $D(\gamma)$ onde $\gamma \in \Gamma$ e $R(\gamma) \subset K$. Assim

$$A = \biguplus_{i=1}^{m} A_i \text{ onde } A_i \subset D(\gamma_i) \text{ e } R(\gamma_i) \subset K$$

definamos a seguinte medida em R,

$$\begin{array}{rccc} \mu: & R & \longrightarrow & [0, +\infty > \\ & A & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mu_K(\gamma_i(A_i)) \end{array}$$

Afirmação 1: μ é bem definida. De fato,

i) Se $B \subset D(\gamma)$, com $R(\gamma) \subset K$ e $B \subset D(\gamma')$, com $R(\gamma') \subset K$, então $\mu_K(\gamma'(B)) = \mu_K(\gamma(B))$, pois

$$\gamma(B) \xrightarrow{\gamma^{-1}} B \xrightarrow{\gamma} \gamma'(B)$$

então $\gamma' \circ \gamma^{-1} \in \Gamma_K$ e como μ_K é Γ_K-invariante, temos que

$$\mu_K(\gamma'(B)) = \mu_K(\gamma' \circ \gamma^{-1} \circ \gamma'(B)) = \mu_K(\gamma(B))$$

ii) Se $A = \biguplus_{j=1}^{n} B_j$ onde $B_j \in D(\gamma'_j)$ e $R(\gamma'_j) \subset K$, assim $A_i = \biguplus_{j=1}^{n}(A_i \cap B_j)$. Desde que μ_K finita aditiva e por (i) temos que

$$\begin{aligned} \mu_K(\gamma_i(A_i)) &= \sum_{j=1}^{n} \mu_K(\gamma_i(A_i \cap B_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mu_K(\gamma'_i(A_i \cap B_j)) \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_K(\gamma_i(A_i)) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mu_K(\gamma'_j(A_i \cap B_j)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \mu_K(\gamma'_i(A_i \cap B_j)) = \sum_{j=1}^{n} \mu_K(\gamma'_i(B_j))$$

Afirmação 2: μ é Γ-invariante. De fato, seja $A \in R$ tal que $A \in D(\gamma)$ com $\gamma \in \Gamma$. Se $A = \biguplus_{i=1}^{m} A_i$ onde $A_i \in D(\gamma_i)$ e $R(\gamma_i) \subset K$, então $\gamma(A) = \biguplus_{i=1}^{m} \gamma(A_i) \Rightarrow \mu(\gamma(A)) = \sum_{i=1}^{m} \mu(\gamma(A_i))$. $\mu(\gamma(A_i)) = \mu(A_i)$, pois, vamos supor por simplicidade que $\gamma(A_i) \subset D(\alpha')$ e $R(\gamma')$, para algum γ', então por definição de μ temos que

$$\mu(\gamma(A_i)) = \mu_K(\gamma'(\gamma A_i)) \qquad e \qquad \mu(A_i) = \mu_K(\gamma_i(A_i)) \tag{2.14}$$

$$\begin{tikzcd} \gamma'(\gamma(A_i)) \arrow[r, "(\gamma')^{-1}"] \arrow[dr] & \gamma(A_i) \arrow[r, "\gamma^{-1}"] & A_i \arrow[dl, "\gamma_i"] \\ & \gamma_i(A_i) & \end{tikzcd}$$

como $\gamma'(\gamma(A_i))$, $\gamma_i(A_i) \subset K$, então $\gamma_i \circ \gamma^{-1} \circ (\gamma')^{-1} \in \Gamma_K$. Logo,

$$\mu_K(\underbrace{\gamma_i \circ \gamma^{-1} \circ (\gamma')^{-1})(\gamma'(\gamma}_{\gamma_i}(A_i))) = \mu_K(\gamma'(\gamma(A_i))) \Rightarrow \mu_K(\gamma_i(A_i)) = \mu_K(\gamma'(\gamma A_i))$$

e de (2.14) segue que $\mu(A_i) = \mu(\gamma(A_i))$. O qual prova que $\mu(\gamma(A)) = \mu(A)$.

Afirmação 3: μ é única. De fato, suponha que exista outra medida $\tilde{\mu}$ que é extensão de μ_K. Seja $A \in R$ e $A = \biguplus_{i=1}^{m} A_i$ onde $A_i \in D(\gamma_i)$ e $R(\gamma_i) \subset K$. Como $\tilde{\mu}$ é Γ-invariante, então

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{i=1}^{m} \mu_K(\gamma_i(A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \tilde{\mu}(\gamma_i(A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \tilde{\mu}(A_i) \\ &= \tilde{\mu}(A) \end{aligned}$$

□

2.4 Crescimento em folheações

Seja M uma variedade compacta e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão k e de classe C^r ($r \geq 0$ se $k = 1, r \geq 1$ em outro caso) e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{q}$ uma cobertura regular folheada e $\Sigma = \bigsqcup_\alpha \Sigma_\alpha$ o espaço transverso, $\gamma_{\alpha\beta} : \Sigma_\alpha \to \Sigma_\beta$ os difeomorfismos locais e Γ o pseudogrupo de holonomia finitamente gerado por $\Gamma_1 = \{\gamma_{\alpha\beta} : 1 \leq \alpha, \beta \leq q\}$ simétrico.

Definição 2.32: Seja $P_0 \in \Sigma$ uma placa e $L \in \mathcal{F}$ tal que $P_0 \in L$, dizemos que L tem crescimento exponencial ou sub-exponencial com respeito a $\mathcal{U}$ se Γ tem crescimento exponencial ou sub-exponencial em P_0.

Observação 2.33: Em outras palavras, a função de crescimento de uma folha com respeito $\mathcal{U}$ é a função que atribui a cada inteiro positivo n o número de distintas placas que podem ser alcançadas a partir de uma placa inicial por cadeias de comprimento $\leq n$.

Na seção anterior mostramos que o tipo de crescimento de Γ em um ponto x não depende do ponto que se toma em $\Gamma(x)$, assim o tipo de crescimento de uma folha não depende da placa que se tome em L. O seguente resultado mostra ainda que o tipo de crescimento da folha é independente da cobertura regular.

Proposição 2.34: *O tipo de crescimento de uma folha não depende da cobertura regular.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j=1}^{t}$ outra cobertura. Vamos supor que $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$. Sejam G e H as funções de crescimento de L com respeito a $\mathcal{U}$ e a $\mathcal{V}$ respectivamente. Seja $(P_1, \cdots, P_r)$ uma cadeia de placas de $\mathcal{U}$ então cada P_i interseca no máximo t placas de $\mathcal{V}$, logo existe uma cadeia de placas $(P_1', \cdots, P_s')$ em $\mathcal{V}$ tal que:

i) cada $P_i^{'}$ intersecta algum P_j.

ii) $P_s^{'} \subset P_r$.

iii) $s \leq tr$.

segue-se

$$G(n) \leq H(tn), \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Por outro lado, se $(P_1', \cdots, P_s')$ é uma cadeia de placas em $\mathcal{V}$ então existem placas P_i em $\mathcal{U}$ tal que $P_i' \subset P_i$, desde que $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$, $(P_1, \cdots, P_r)$ é uma cadeia de placas em $\mathcal{U}$ com $r \leq s$ e segue-se

$$H(n) \leq tG(n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

O qual conclui prova no caso que $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$. No caso geral é suficiente tomar uma cobertura que seja um refinamento de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ e aplicar o caso anterior. □

Agora mostraremos o resultado principal de este capítulo, sua demostração é baseada nos tópicos que foram apresentados neste capítulo.

Teorema 2.35 (J. Plante, [17])**:** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão k de uma variedade compacta M. Se L é uma folha de $\mathcal{F}$ que tem crescimento não exponencial, então existe uma medida não trivial invariante pelo pseudogrupo de holonomia que é finito em conjuntos compactos e que tem suporte contido no fecho de L.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{q}$ e $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha=1}^{q}$ dois coberturas regulares de M onde $\psi_\alpha : U_\alpha \to D^{n-k} \times D^k \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ e $\phi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ são as cartas coordenadas para $\mathcal{F}$ com $\overline{U_\alpha} \subset V_\alpha$ e ϕ_α é uma extensão de ψ_α, escolhamos k-discos compactos $\triangle_1, \cdots, \triangle_q$ transversais a $\mathcal{F}$ tal que

$$\psi_\alpha^{-1}(\{0\} \times D^k) \subset \triangle_i \subset \phi_\alpha^{-1}(\{0\} \times D_2^k) \text{ para } \alpha = 1, \cdots, q$$

é suficiente tomar $\triangle_\alpha = \overline{\psi_\alpha^{-1}(\{0\} \times D^k)}$, claramente toda folha de $\mathcal{F}$ intersecta o interior de algum $\triangle_\alpha$. Seja K_α o espaço de placas da cobertura $\{V_\alpha\}$ que passam por $\triangle_\alpha$, então K_α é compacto, logo $K = \bigcup_{\alpha=1}^{q} K_\alpha$ é um subconjunto compacto do espaço transverso e é

um subconjunto do espaço transverso gerado por $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha=1}^q$. Seja Γ o pseudogrupo de holonomia gerado por $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha=1}^q$ e Γ_K a restrição de Γ a K.
Se L é uma folha de $\mathcal{F}$ que tem crescimento não exponencial e $P_0 \in K$ é uma placa em L, então $\Gamma_K(P_0)$ tem crescimento não exponencial, então pelo Teorema 2.25 existe μ_K uma medida de Borel finita não trivial Γ_K-invariante em K, logo pelo Lema 2.31 μ_K tem uma única extensão para uma medida μ em Σ que é Γ-invariante e finita em conjunto compactos e segue-se também que $\text{supp}(\mu) \subset \overline{L}$, pois $\text{supp}(\mu_K) \subset \overline{\Gamma_K(P_0)}$.

□

2.4.1 Crescimento de folhas desde um ponto de vista geométrico

A definição de crescimento de uma folha foi feito de uma forma algébrica, mas se $\mathcal{F}$ for C^r com $r \geq 1$ existe outra forma de definir o crescimento de uma folha que é puramente geométrica, como se define a continuação.

Uma métrica Riemanniana numa variedade diferenciável M^n é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno em T_pM denotado por $<,>_p$ ou $g_p(.,.)$, o qual varia diferenciavelmente(continuamente) no seguente sentido.

Dado (U, φ) uma carta coordenada em M, associamos a função $g_{ij}^\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_{ij}^\varphi(p) =< \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) >_p$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(p) = D\varphi_p^{-1}(e_i)$, com $\{e_i\}_i$ a base trivial de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a métrica riemanniana g em M é de classe C^k se g_{ij}^φ é C^k para cada (U, φ). Ou equivalentemente $\forall X, Y \in \chi(V)$ a função $< X(p), Y(p) >_p$ é diferenciável em V, onde V é uma vizinhança em M.

O seguinte resultado é primordial para definir crescimento desde um ponto de vista geométrico, a prova pode ser encontrado em qualquer livro de geometria riemanniana.

Teorema 2.36: *Seja (M, g) uma variedade riemanniana orientável, então existe ω uma única n-forma tal que em cada (U, φ) coordenada tem a seguente representação*

$$\omega(p) = \sqrt{det(g_{ij}^\varphi(p))} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \ , \ \forall p \in U.$$

A n-forma do Teorema anterior induz o volume. Seja $\{\lambda_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$ e $R \subset M$ uma região, definimos o volume de R por

$$\text{vol}(R) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha \cap R} \lambda_\alpha \omega$$

Definição 2.37: Seja (M, g) uma variedade riemanniana, definimos a função de crescimento de M em x como a função $G_x : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ dado por

$$G_x(r) = vol(D_x(r))$$

onde $D_x(r) = \{y \in M; d(x, y) \leq r\}$ e d é a métrica induzida por g.

O seguinte resultado mostra que o crescimento de M independente do ponto x.

Proposição 2.38: *Se $x, y \in M$ então $gr(G_x) = gr(G_y)$*

Demonstração. Seja $r > d(x, y)$, então $D_x(3r) \supset D_y(r)$, pois se $z \in D_y(r)$ segue $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r + r < 3r$, logo

$$G_x(3r) \geq G_y(r), \forall r > d(x, y)$$

assim $G_x \succeq G_y$, de forma análoga temos que $G_y \succeq G_x$ o que conluie a prova.

□

Exemplo 2.39: O plano euclideano $\mathbb{R}^n$, com a métrica riemanniana usual tem tipo de crescimento polinomial, pois

$$(\frac{2r}{\sqrt{n}})^n \leq \text{vol}(D_r(0)) \leq (2r)^n.$$

Exemplo 2.40: O plano hiperbólico tem crescimento exponencial, pois, no modelo do disco de Poincare, a metrica esta dada por,

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

e o elemento volumem é

$$\sigma = \frac{dx \wedge dy}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

A bola $D_0(r)$ é neste caso a bola euclideana de centro 0 e radio $\tanh(r)$ e seu volumem é

$$\text{vol}D_0(r) = \pi(\sinh(r))^2 = \pi(\frac{\exp(-r) - \exp(r)}{2})^2$$

que é do mesmo tipo de crescimento que $\exp(r)$.

A definição 2.37 depende da métrica riemanniana, mas o seguinte resultado mostra que o crescimento de M é independente sobre métricas riemannianas quase-isométricas.

Definição 2.41: Sejam g e g' dois métricas Riemannianas em M, diz-se que g e g' são quase-isométricas se $\exists A$,$B > 0$ tal que

$$A\|u\|_p \leq \|u\|'_p \leq B\|u\|_p,\ \forall u, v \in T_pM,\ p \in M$$

onde $\| \ \|_p$ e $\| \ \|'_p$ são as normas induzidas em T_pM por $<,>_p$ e $<,>'_p$.

Observação 2.42:

i) A relação de quase-isometria é uma relação de equivalência.

ii) Se g e g' são quase-isométricas, então

$$A^n\sqrt{\det(g^{\varphi}_{ij}(p))} \leq \sqrt{\det((g'_{ij})^{\varphi}(p))} \leq B^n\sqrt{\det(g^{\varphi}_{ij}(p))},\ \forall p \in U.$$

Proposição 2.43: *Se g e g' são dois métricas riemannianas em M quase-isométricas, então*

$$gr(G_x) = gr(G'_x)$$

onde G_x e G'_x são as funções de crescimento de M associado a g e a g' respectivamente.

Demonstração. Como g e g' são quase-isométricas existem $A, B > 0$ tal que

$$A\|u\| \leq \|u\|' \leq B\|u\|\ ,\ \forall p \in M \text{ e } \forall u \in T_pM$$

Afirmação: $D'_x(Ar) \subset D_x(r) \subset D'_x(Br)$. De fato, seja $y \in D'_x(Ar)$ como

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|dt$$

então

$$Ad(x, y) = \inf_{\gamma} \int_0^1 A\|\dot{\gamma}\|dt \leq \inf_{\gamma} \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|'dt$$

assim $Ad(x, y) \leq d'(x, y) \leq Ar \Rightarrow D'_x(Ar) \subset D_x(r)$ a outra desigualdade é análogo. Sem perda de generalidade vamos supor que $D'_x(Br) \subset U$ onde (U, φ) é uma carta local, da afirmação segue que

$$A^n vol(D_x(r)) = A^n \int_{D_x(r)} \sqrt{g^{\varphi}_{ij}}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \leq A^n \int_{D'_x(Br)} \sqrt{g^{\varphi}_{ij}}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

e pela observação 2.42 temos

$$A^n \int_{D'_x(Br)} \sqrt{g^{\varphi}_{ij}}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \leq \int_{D'_x(Br)} \sqrt{g'^{\varphi}_{ij}}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = vol(D'_x(Br))$$

então $A^m G_x(r) \prec G'_n(Br)$. Assim $G_x \preceq G'_x$. Fazendo a mesmas contas obtemos que $G'_x \preceq G_x$. O que conclui a prova.

□

Teorema 2.44: *Se M^n é uma variedade compacta, então todas as métricas riemannianas definidas em M são quase-isométricas.*

Demonstração. Seja g e g' dois métricas riemannianas em M. Seja $p \in M$, como $T_pM \simeq \mathbb{R}^n$, então existem $A_p, B_p > 0$ tal que

$$A_p\|u\| \leq \|u\|'_p \leq B_p\|u\|_p,\ u \in T_pM$$

seja (U, φ) uma carta local e $X \in \chi(U)$, definimos $f : U \to \mathbb{R}$ por

$$f(q) = \sqrt{< X(q), X(q) >'_q} - A_p\sqrt{< X(q), X(q) >_q}$$

como a métrica é C^k e $f(p) \geq 0$, então existe V_p vizinhança de p tal que $f(q) \geq 0, \forall q \in V_p$; i.e.,

$$\|X(q)\|'_q \geq A_p\|X(q)\|_q,\ \forall q \in V_p$$

Como X é um campo qualquer, seja $q \in V_p$, $v \in T_pM$ e $X \in \chi(V_p)$ tal que $X(q) = v$, então

$$\|v\|'_q \geq A_p\|v\|_q,\ \forall q \in V_p,\ \forall v \in T_pM$$

Como M é compacto, então M pode ser coberto por um número finito de abertos do tipo V_p; i.e., $M = \bigcup_{i=1}^m V_{p_i}$. Tomando $A = \min\{A_i\}$, então

$$\|v\|'_q \geq A\|v\|_q,\ \forall q \in M,\ \forall v \in T_pM.$$

Da mesma forma se prova a outra desigualdade. □

Exemplo 2.45: Uma variedade compacta tem crescimento polinomial de grau zero. Isto é imediato desde que o volumem da variedade seja limitado.

Seja M uma variedade diferenciável compacta de classe C^k $(k \geq 1)$ e $\mathcal{F}$ uma folheação em M transversalmente orientável, se L é uma folha de $\mathcal{F}$, então L herda uma métrica riemanniana, como M é compacto então as métricas que L herda são quase-isométricas, então podemos definir a função de crescimento de L.

Assim temos dos definições de crescimento de uma folha, desde um ponto de vista geométrico e algebraico. Mas estas dois noções coincidem para folheações suaves, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 2.46: *Se $L \in \mathcal{F}$ e $P_0 \in L$, então*

$$gr(L) = gr(\Gamma(P_{0)})$$

onde $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{U}}$ é o pseudogrupo de holonomia.

Observação 2.47: Antes de fazer a prova da proposição temos que fazer as seguintes observações que são primordiais para a prova.

a) As folhas de $\mathcal{F}$ estão em correspondência biunívoca com as $\Gamma_{\mathcal{U}}$-orbitas no espaço transverso, de fato, dado uma folha L seja P qualquer placa contida em L, então associamos a orbita $\Gamma(P)$ a L. Por outro lado, dado uma orbita $\Gamma(P)$ associamos a folha L que contem a P, verificamos que estas formas de associar são bem definidas e são inversas uma da outra.
Sejam $P_1, P_2 \in T$ tal que $P_1, P_2 \in L$, sabemos que existe $\gamma : \sum_1 \to \sum_2$ difeomorfismo tal que $\gamma(P_1) = P_2$, então $P_2 \in \Gamma(P_1)$, segue-se $\Gamma(P_1) = \Gamma(P_2)$.

b) Tomemos $0 < \epsilon < 1$ tal que se $\alpha \neq \beta$ então $(P(\epsilon) \times Y_\alpha) \cap (P(\epsilon) \times Y_\beta)$. Fixemos uma métrica riemanniana em M, pela continuidade de esta métrica, a finitude e regularidade de $\{U_\alpha\}_\alpha$ e da compacidade de M temos o seguinte.

   1. Existe $a > 0$ tal que $a \leq vol_q(P(\epsilon) \times Y_\alpha)$, $\forall \epsilon -$ placa emU_α e $\forall \alpha$.
   2. Existe $b \in \mathbb{Z}^+$ tal que $vol_p(P \times Y_\alpha) \leq b$, $\forall P \times Y_\alpha$.
   3. Existe $B \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\text{diam}(P \times Y_\alpha) \leq B$, $\forall P \times Y_\alpha$.
   4. Existe um numero de Lebesgue $\delta > 0$, para a cobertura da folha por placas.

c) Se (M, g) uma variedade riemanniana compacta, então L é completa em g.

Demostração da Proposição 2.46. Fixe uma placa $P_0 \in T$, com o correspondente ϵ-placa $P_0(\epsilon) \subset P_0$ e $x_0 \in P_0(\epsilon)$. Temos que mostrar que a função de crescimento associado a métrica riemanniana G_{x_0} de L e a função de crescimento H_{P_0} da orbita $\Gamma(P_0)$ são mutuamente dominados.
Seja $(P_0, P_1, \cdots, P_k)$ uma cadeia de placas $0 \leq k \leq r$ e seja $y \in P_k$, por propriedade(3) da observação anterior temos

$$d(x, y) \leq Br$$

então da propriedade (1) e de esta ultima desigualdade segue-se

$$G_{x_0}(Br) \geq \sum_{i=0}^{k} vol(P_i(\epsilon)) \geq (k+1)a$$

tomando $A \in \mathbb{Z}^+$ tal que $A \geq \dfrac{1}{a}$, então

$$AG_{x_0}(Br) \geq (k+1), \forall k \leq r$$

como $H_{P_0}(r)$ é o número de distintas placas que podem ser alcançados por cadeias a partir de P_0 de comprimento $\leq r$, assim

$$AG_{x_0}(Br) \geq H_{P_0}(r) \Rightarrow G_{x_0} \succeq H_{P_0} \tag{2.15}$$

Agora mostraremos que $H_{P_0} \succeq G_{x_0}$. Fixamos $\eta \in (0, \delta)$, onde δ é da propriedade (4), seja $L \in \mathcal{F}$ tal que $x_0 \in L$, tomemos $r \in \mathbb{Z}^+$ e $y \in L$ tal que $d(x_0, y) \leq r$, pela observação (c) temos que L é completa na métrica riemanniana, então existe uma geodésica minimal σ em L de x_0 até y. Escolhamos $x_0, x_1, \cdots, x_k = y$ ao longo de σ tal que $\eta < d(x_i, x_{i-1}) < \delta$. Logo pela propriedade (4), existem placas P_i com $\{x_i, x_{i-1}\} \subset P_i$ para $1 \leq i \leq k$, então $P_i \cap P_{i-1} \neq \emptyset$, $y \in P_k$ e $r \geq d(x_0, y) = \sum_{i=1}^{k} d(x_i, x_{i-1} > k\eta$. Tomando $D \in \mathbb{Z}^+$ tal que $D > \frac{1}{\eta}$, então $Dr > k$. Como

$$H_{P_0} = \#\{(P_0, P_1, \cdots, P_k); k \leq Dr\}$$

e $G_{x_0}(r) = vol(D_{x_0}(r))$, então pelos argumentos anteriores temos que cada ponto de $y \in D_{x_0}(r)$ habita em uma placa P_k para algum k, assim pela propriedade (2) temos

$$G_{x_0}(r) \leq b\#\{(P_0, P_1, \cdots, P_k); k \leq Dr\} \leq bH_{P_0}(Dr) \tag{2.16}$$

de (2.15) e (2.16) fica concluída a prova. $\square$

Capítulo

3

Correntes

A teoria de correntes de DeRham [8] elaborada nos anos 50 é um análogo da teoria de distribuições de Schwartz [20] criada nos finais de 1940. As distribuições são funcionais contínuas definidas no espaço das funções com suporte compacto quando se dota a dito espaço com uma topologia adequada. Da mesma maneira, quando se dota com uma topologia conveniente ao espaço das formas diferenciais com suporte compacto Ω_c^p, as p-correntes se definem como funcionais contínuos definidos em Ω_c^p; e.g., as distribuições são 0-correntes. Além disso, dita topologia faz que a derivada exterior seja um operador linear continuo, pelo que podemos definir seu operador adjunto e a partir de este definir a homologia de DeRham. Neste capítulo o resultado principal é mostrar o teorema de D. Sullivan [23] que diz que as medidas transversas invariantes por holonomia estão em correspondência canônica um a um com ciclos folheados(um tipo especial de correntes). Este capítulo em sua maioria foi extraído e estudado do livro [7] e [8].

3.1 Correntes

Ao longo de esta seção M será uma variedade n-dimensional de classe C^∞. Introduziremos uma topologia no espaço $\Omega^{p,r} := \Omega^{p,r}(M)$ (resp. $\Omega^p := \Omega^p(M)$) das p-formas diferenciáveis de classe C^r (resp. de classe C^∞) sobre M.

Tomemos $U \subset M$ uma aberto coordenado. Para cada $\omega \in \Omega^{p,r}$ podemos escrever, em coordenadas locais, $\omega(x) = \sum_{|I|=p} \omega_I(x) dx_I$ para todo $x \in U$, onde $I = (i_1, \cdots, i_p)$ é um multi-índice com $i_1 < \cdots < i_p$, $i_1, \cdots, i_p \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Logo, para qualquer $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

e qualquer $K \subset U$ compacto definimos a seminorma $\|\cdot\|_K^r$ por

$$\|\omega\|_K^r = \sup_{x\in k} \sum_{|\alpha|\leq r, |I|=p} |D^\alpha \omega_I(x)| \tag{3.1}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$ e $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$ é a derivada de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

A família de seminormas $\{\|\cdot\|_K^r\}_{K,U}$ é separador(ver apêndice$A$), por tanto geram uma topologia $\mathcal{T}^r$ em $\Omega^{p,r}$ e que faz de $\Omega^{p,r}$ um espaço topológico de Hausdorff localmente convexo. Agora, notemos que $\mathcal{T}^r \subset \mathcal{T}^{r+1}$, então $\bigcup_{r\geq 0} \mathcal{T}^r$ geram uma topologia $\mathcal{T}$ para o espaço Ω^p que é a topologia definida pelas seminormas de 3.1 quando U, K e r variam. É claro que Ω^p com esta topologia também é um espaço de Hausdorff localmente convexo.

Definição 3.1:

a) Definimos o espaço $\mathcal{E}_p := \mathcal{E}_p(M)$ (resp. $\mathcal{E}_p^r := \mathcal{E}_p^r(M)$) como o espaço Ω^p (resp. $\Omega^{p,r}$) com a topologia $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}^r$).

b) Se $K \subset M$ é um compacto, definimos

$$\mathcal{D}_p(K) := \{\omega \in \mathcal{E}_p : \mathrm{supp}(\omega) \subset K\}$$

com a topologia induzida de $\mathcal{E}_p$. $\mathcal{D}_p := \mathcal{D}_p(M) := \bigcup_K \mathcal{D}_p(K)$, é dizer todas as p-formas com suporte compacto. Os espaços $\mathcal{D}_p^r(K)$ e $\mathcal{D}_p^r := \mathcal{D}_p^r(M)$ se definem de maneira similar.

Lema 3.2: *Dado um conjunto compacto $K \subset M$, uma sequencia $\{\omega_i\}$ converge a $\omega \in \mathcal{D}_p(K)$ se, e somente se, converge a $\omega \in \mathcal{D}_p^r(K)$ para todo $r \in \mathbb{Z}^+$.*

Demonstração. Desde que $\mathcal{T}^r \subset \mathcal{T}$, convergência em $\mathcal{D}_p(K)$ implica convergência em $\mathcal{D}_p^r(K)$. Reciprocamente, cada vizinhança aberta W de ω em $\mathcal{D}_p(K)$ contem uma vizinhança de ω da forma $W_{j_1} \cap \cdots \cap W_{j_q}$, para algum inteiro $q \geq 1$, onde W_{j_i} é uma vizinhança aberta de ω em $\mathcal{D}_p^{j_i}(K)$. A convergência em cada $\mathcal{D}_p^r(K)$ implica que os ω_i's excepto um numero finito estão em $W_{j_1} \cap \cdots \cap W_{j_q}$, assim em W. Desde que W foi vizinhança arbitraria de ω segue que $\omega_i \to \omega$ em $D_p(K)$.

□

Observação 3.3: Uma sequencia $\{\omega_i\}_i$ converge a $\omega \in \mathcal{D}_p$ se, e somente se, $\{\omega_i\}_i$ esta contida em $\mathcal{D}_p(K)$ para algum $K \subset M$ compacto tal que $\{\omega_i\}_i$ converge a ω em $\mathcal{D}_p(K)$.

Lema 3.4: *Um funcional $C : \mathcal{D}_p \to \mathcal{D}_q$ (resp. $C : \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$) é continuo se, e somente se, $\{C(\omega_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_p$ converge a $C(\omega)$ em $\mathcal{D}_q$ (resp. em $\mathbb{R}$) para toda sequencia $\{\omega_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_p$ converge a $\omega \in \mathcal{D}_p$.*

Demonstração. Vamos supor que $C : \mathcal{D}_p \to \mathcal{D}_q$ que não es continua em$\omega \in D_p$, existe uma vizinhança V de $C(\omega)$ em $\mathcal{D}_q$ tal que $C(W) \nsubseteq V$ para toda vizinhança W de ω em $\mathcal{D}_p$. Em particular, seja $W_r \in \mathcal{T}^r \subset \mathcal{T}$ as bolas centradas em ω de radio $\frac{1}{r}$ na norma $\|\cdot\|_K^r$ e escolhemos $\omega_r \in W_r$ tal que $C(\omega_r) \notin V$, $\forall r \geq 0$. Desde que

$$\|\omega_r - \omega\|_K^0 \leq \|\omega_r - \omega\|_K^1 \leq \cdots \|\omega_r - \omega\|_K^r \leq \frac{1}{r}, \forall r \geq 0$$

entao, $\omega_r \to \omega$ em D_p^r, $\forall r \geq 0$ e pelo Lema 3.2 temos que $\omega_r \to \omega$ em D_p, o qual é uma contradição. O reciproco é imediato, pois toda aplicação continua é sequencialmente continua. □

Proposição 3.5: *Um funcional linear $C : \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$ é continuo se, e somente se, para cada compacto $K \subset M$ existem $c > 0$ e $r \in \mathbb{Z}^+$ tais que*

$$| < C, \omega > | \leq c\|\omega\|_K^r, \forall \omega \in \mathcal{D}_p(K) \tag{3.2}$$

onde $| < C, \omega > |$ denota a avaliação de C na forma ω.

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema $A.3$.

□

Definição 3.6: Seja $S \subset \mathcal{D}_p$ dizemos que S é limitado, se é limitado relativo à norma $\|\cdot\|_K^r$ para todo $r \in \mathbb{Z}^+$ e todo compacto $K \subset M$. Da mesma maneira, uma aplicação linear C de $\mathcal{D}_p$ a $\mathcal{D}_q$ (resp. a $\mathbb{R}$) se diz que é limitada, se é limitada com respeito à norma $\|\cdot\|_K^r$, isto é, se para toda sequencia limitada em $\mathcal{D}_p$, a imagem da sequencia sobre C é uma sequencia limitada em $\mathcal{D}_q$ (resp. em $\mathbb{R}$).

Lema 3.7: *Uma aplicação linear limitado $C : \mathcal{D}_p \to \mathcal{D}_q$ é continua. Uma aplicação linear $C : \mathcal{D}_{p-1} \to \mathbb{R}$ é continua se e somente se é limitada.*

Demonstração. Se C é uma aplicação linear limitado; i.e., limitado relativo às normas $\| \|_K^r$, $\forall r, K$. Logo C é continua com respeito a estas normas, assim C é sequencialmente contínua na topologia $\mathcal{T}^r$, $\forall r \geq 0$. Logo pelo Lema 3.3 temos que C é sequencialmente continua na topologia $\mathcal{T}$ e pelo Lema 3.4 segue que C é contínua. Reciprocamente, se C não é limitado, existe uma sequencia $\{\omega_k\}_k$ em $\mathcal{D}_p$ limitado tal que $\langle C, \omega_k \rangle \geq k$, $1 \leq k < \infty$. Tomemos a sequencia $\{\lambda_k = \dfrac{\omega_k}{k}\}_k$, desde que $\{\omega_k\}_k$ é limitada temos

$\lim \lambda_k = 0$ na topologia $\mathcal{T}$. Por outro lado temos que $\langle C, \lambda_k \rangle \geq 1$, e pelo Lema 3.4 segue que C não é continua. $\square$

A derivada exterior $d : \mathcal{D}_{p-1} \to \mathcal{D}_p$ é limitada, pois os elementos de $\mathcal{D}_p$ são formas com suporte compacto cujos coeficientes são de classe C^∞, então a imagem de uma sequencia limitada sobre d é limitada. Assim temos o seguente corolário.

Corolário 3.8: *A derivada exterior $d : \mathcal{D}_{p-1} \to \mathcal{D}_p$ é uma aplicação linear continua.*

Agora já podemos definir o espaço das p-correntes.

Definição 3.9: Definimos o espaço das p-correntes em M como o espaço das aplicações lineares de $\mathcal{D}_p$ a $\mathbb{R}$, tais que sua restrição a $\mathcal{D}_p(K)$ é continua para todo $K \subset M$ compacto; i.e.,

$$\mathcal{D}_p^{'} = \{C : \mathcal{D}_p \to \mathbb{R} : C \text{ é linear e } C\,|_{\mathcal{D}_p(K)} \text{ é continuo } \forall K \subset M \text{ compacto}\}$$

Notemos que podemos definir uma corrente de maneira equivalente como uma função continua $C : \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$ que satisfaz (3.2).

Observação 3.10:

i) As correntes são uma generalização das distribuições, neste caso uma distribuição é um 0-corrente.

ii) Dado C uma n-corrente, podemos associar a ela uma distribuição T, da seguinte maneira

$$\langle T, f \rangle = \langle C, f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \rangle,\ f \in C_c^\infty(M)$$

Exemplo 3.11: Seja $x \in M$ e $v_x \in \Lambda_p(T_x M)$, definimos o funcional C_{v_x} por

$$< C_{v_x}, \omega >:= \omega(v_x), \forall \omega \in \mathcal{D}_p \tag{3.3}$$

este funcional linear define uma p-corrente de ordem 0 chamada corrente de Dirac.

Exemplo 3.12 (*Corrente de integração*)**:** Suponhamos que M é compacta e seja μ uma medida de probabilidade definida em M. Consideremos um campo continuo de p-vetores X em M. definimos $C_{X,\mu}$ por

$$< C_{X,\mu}, \omega >:= \int_M \omega(X) d\mu, \forall \omega \in \mathcal{D}_p \tag{3.4}$$

este funcional linear define uma p-corrente chamada corrente de integração.

Exemplo 3.13: Seja $Z \subset M$ uma subvariedade fechada e orientável de M de dimensão p e classe C^1. Definimos o funcional linear C_Z por

$$< C_Z, \omega >:= \int_Z \omega \tag{3.5}$$

que define uma p-corrente de ordem 0.

Exemplo 3.14: Suponhamos que M é orientável e seja η uma $(n-p)$-forma, definimos $C\eta$ por

$$< C_\eta, \omega >:= \int_M \omega \wedge \eta, \forall \omega \in \mathcal{D}_p \tag{3.6}$$

este funcional linear define uma p-corrente chamada corrente difusa.

O seguinte é um exemplo importante que faz a ligação das medidas transversas invariantes que foram estudadas no capítulo 2 com as correntes; para ser mais específicos com "ciclos folheados"que serão estudadas na seguinte seção.

Exemplo 3.15 (*corrente associada a uma medida transversa invariante*)**:** Seja $\mathcal{F}$ uma folheação p-dimensional em M variedade diferenciável compacta. Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ um atlas regular folheado, $\Sigma = \bigsqcup_\alpha \Sigma_\alpha$ o espaço transverso, $\gamma_{\alpha\beta} : \Sigma_\alpha \to \Sigma_\beta$ os difeomorfismos locais, $\pi_\alpha : U_\alpha \to \Sigma_\alpha$ a projeção canônica para cada $\alpha \in I$ e $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{U}}$ o pseudogrupo de holonomia gerado por $\Gamma_1 = \{\gamma_{\alpha\beta}; \alpha, \beta \in I\}$. Seja μ uma medida em Σ transversa invariante por holonomia. Então, para qualquer $U_\alpha \in \mathcal{U}$, podemos integrar uma p-forma ω sobre cada placa $\pi_\alpha^{-1}(x)$. Isto define uma função continua de Σ_α a $\mathbb{R}$, que ao ser integrada com respeito à medida $\mu \mid_{\Sigma_\alpha}$ se obtêm uma aplicação linear real C_μ do conjunto das p-formas

$$< C_\mu, \omega >:= \sum_{\alpha \in I} \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} \lambda_\alpha \omega) d\mu(x) \tag{3.7}$$

Na seção 1, do capítulo 2, foi provado que a definição de C_μ não depende da partição da unidade escolhida e da cobertura regular folheada. Assim C_μ define uma p-corrente.

Seja $C \in \mathcal{D}'_p$ e $\beta \in \mathcal{D}_q$ com $q \leq p$. Definamos o produto wedge $C \wedge \beta$ por

$$\langle C \wedge \beta, \omega \rangle = \langle C, \beta \wedge \omega \rangle, \ \omega \in \mathcal{D}_{p-q}$$

i.e., que $C \wedge \beta$ é uma $(p-q)$-corrente. Definimos $\beta \wedge C = (-1)^{p-q} C \wedge \beta$.

O seguinte resultado diz que as correntes, podem ser pensados como formas diferenciais com coeficientes as distribuições. A prova de este resultado pode ser consultada em [8].

Teorema 3.16: *Seja C uma p-corrente em M^n. Então C pode ser escrito em uma única forma*

$$C = \sum_{|I|=n-p} C_I \wedge dx_I$$

onde os C_I são n-correntes em M.

Definição 3.17: O suporte de uma p-corrente C é o menor subconjunto fechado $\text{supp}(C)$ de M tal que C se anula em $M \setminus \text{supp}(C)$. Isto é, $\langle C, \omega \rangle = 0$ para todo $\omega \in \Omega^p$ com suporte em $M \setminus \text{supp}C$.

Sejam M, N duas variedades, C um p-corrente em M e $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^1 que é própria no suporte de C.

Definição 3.18: Definimos o push-forward de C por f denotado f_*C como

$$\langle f_*C, \omega \rangle = \langle C, f^*\omega \rangle, \forall \omega \in \mathcal{D}_p(N)$$

onde $f^*\omega$ é o pull-back de ω por f. Assim definido f_*C é uma p-corrente em N.

A continuação dotaremos de uma topologia ao espaço das correntes e definiremos a homologia de DeRham.

Por definição, o espaço das p-correntes é o dual continuo do espaço $\mathcal{D}_p$, o qual permite definir uma topologia $\mathcal{T}'$ em $\mathcal{D}_p'$ que o converte em um espaço de Hausdorff localmente convexo da maneira seguinte.

Para $\epsilon > 0$ e $B \subset \mathcal{D}_p$ limitado, definimos os conjuntos

$$V_{B,\epsilon} = \{C \in \mathcal{D}_p'; < C, B > \subset [-\epsilon, \epsilon]\}$$

Um subconjunto $S_0 \subset \mathcal{D}_p'$ é uma vizinhança de 0 se $V_{B,\epsilon} \subset S_0$ para algum B e $\epsilon > 0$. Se $C \in \mathcal{D}_p'$ a vizinhança de C na topologia $\mathcal{T}'$ sao os conjuntos da forma $S_C = C + S_0$. Um subconjunto $W \subset \mathcal{D}_p'$ é aberto se, para cada $C \in W$, existe uma vizinhança $S_C \subset W$.

Proposição 3.19: *Sejam $\{C_n\}_n$ uma sequencia em D_p' e $C \in D_p'$. Então,*

$$C_n \to C \Leftrightarrow \langle C_n, \omega \rangle \to \langle C, \omega \rangle, \forall \omega \in \mathcal{D}_p$$

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $C = 0$. Seja $\omega \in \mathcal{D}_p$ qualquer e $\epsilon > 0$. Logo, $V_{B,\epsilon}$ é uma vizinhança de 0 com $B = \{\omega\}$. Como $C_n \to 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \in V_{B,\epsilon}$ para todo $n \geq n_0$, assim

$$|\langle C_n, \omega\rangle| < \epsilon, \text{ para } n \geq n_0$$

Por tanto, $\langle C_n, \omega\rangle \to 0$.

□

Definição 3.20: Um conjunto $V \subset \mathcal{D}_p^{'}$ é limitado, se para cada $B \subset \mathcal{D}_p$ limitado o conjunto $\{< C, \omega >; C \in V, \omega \in B\} \subset \mathbb{R}$ é limitado.

Consideremos a aplicação bilinear

$$e : \mathcal{D}_p^{'} \times \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$$

definido por $e(C, \omega) :=< C, \omega >$. Esta aplicação permite identificar $\mathcal{D}_p$ com o espaço $\mathcal{D}_p^{''}$ de funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{D}_p^{'}$. i.e, $\mathcal{D}_p$ é identificado com seu doble dual $\mathcal{D}_p^{''}$ a prova de isto pode ser encontrada em [8].

Desde que a derivada exterior $d : \mathcal{D}_{p-1} \to \mathcal{D}_p$ é um operador limitado podemos definir seu operador adjunto.

Definição 3.21: Definimos o operador $\partial := \partial_p : \mathcal{D}_p^{'} \to \mathcal{D}_{p-1}^{'}$ por

$$< \partial C, \omega >:=< C, d\omega >, \forall \omega \in \mathcal{D}_{p-1}, C \in \mathcal{D}_p^{'} \tag{3.8}$$

i.e., ∂ é o operador adjunto de d.

Notemos que $\partial^2 = 0$, pois para qualquer $C \in \mathcal{D}_p^{'}$ e $\omega \in \mathcal{D}_p$ tem-se

$$< \partial^2 C, \omega >=< \partial C, d\omega >=< C, d^2\omega >= 0$$

Assim podemos definir a p-ésima homologia de DeRham de M como segue.

Definição 3.22: Definimos o espaço de p-correntes fechadas ou p-ciclos e o espaço de p-correntes exatas ou p-fronteiras, respectivamente, como

$$\mathscr{Z}_p := Ker\partial_p \text{ e } \mathscr{B}_p := Im\partial_{p+1}$$

A p-ésima homologia de Rham fica definida então como o espaço

$$H_p^{DR}(M) := \frac{\mathscr{Z}_p}{\mathscr{B}_p}$$

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} H_p^{DR}(M) \times H_c^p(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ([C],[\omega]) & \mapsto & \langle C, \omega \rangle \end{array}$$

induz o seguente isomorfismo(ver [8]) $H_p^{DR}(M) \simeq (H_c^p(M))^*$. Logo pelo Lema de Poincaré, temos

$$H_p^{DR}(M) \simeq (H_c^p(M))^* \simeq H^{n-p}(M) \tag{3.9}$$

Exemplo 3.23: Seja M compacto, orientável e sem bordo, definimos a p-corrente $C_M : \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$ por

$$\langle C_M, \omega \rangle = \int_M \omega$$

Afirmacao: $H_n^{DR} \simeq < C_M >$. De fato, como

$$\mathcal{D}_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{D}_n \xrightarrow{d_n} 0 \Rightarrow 0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{D}'_n \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{D}'_{n-1}$$

Logo, $\mathscr{B}_n = \{0\}$. Por outro lado, pela definição do operador adjunto e Teorema de Stokes temos que

$$\langle \partial C_M, \omega \rangle = \langle C_M, d\omega \rangle = \textstyle\int_M d\omega = 0, \forall \omega \in \mathcal{D}_p$$

assim $C_M \in \mathscr{Z}_n$. Logo, $H_p^{DR}(M) = \dfrac{\mathscr{Z}_p}{\mathscr{B}_p} = \mathscr{Z}_p$. Como $H^0(M) \simeq \mathbb{R}$ segue de (3.9) que $\dim(H_n^{DR}) = 1$, o que prova a afirmação.

3.2 Corrente Folheada e ciclos folheados

Nesta seção definiremos a corrente folheada e ciclos folheados. Provaremos que as correntes folheadas são correntes de integração como foi definido no exemplo 3.14, ainda mais, mostraremos que as correntes folheadas estão em correspondência biunívoca com as medidas limitadas e não negativas em M.

Daqui em diante consideremos uma variedade folheada $(M, \mathcal{F})$, onde M é uma variedade C^∞ compacta n-dimensional sem fronteira e $\mathcal{F}$ é uma folheação de dimensão p, transversalmente orientável e de classe C^1.

Tomemos $x \in M$ e seja $L \subset M$ a folha de $\mathcal{F}$ que contem a x. Consideremos o p-vetor

$$v_x = v_{1x} \wedge \cdots \wedge v_{px} \in \Lambda^p(T_xL) \tag{3.10}$$

onde $\{v_{1x}, \cdots, v_{px}\}$ é uma base ordenada de T_xL que dá a correta orientação; i.e., coincidem com a orientação de T_xL. Denotamos por C_{v_x} a sua corrente de Dirac associada(ver exemplo 3.11).

Definição 3.24:

a) Definimos o conjunto das correntes folheadas de Dirac(de $\mathcal{F}$) como o conjunto $\{C_{v_x}; x \in M\}$.

b) Uma p-forma $\omega \in \mathcal{D}_p$ se diz transversal a $\mathcal{F}$, se $\langle C_{v_x}, \omega\rangle = \omega(C_{v_x}) > 0$ para cada $v_x \neq 0$, $x \in M$.

O seguinte lema nos diz que sempre existe $\omega \in \mathcal{D}_p$ transversal a $\mathcal{F}$.

Lema 3.25: *Uma folheação admite formas transversais.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ um atlas regular folheado associado a $\mathcal{F}$. Para cada $\alpha \in I$ definimos $\omega_\alpha = dx_1^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_p^\alpha$, onde o vetor coordenado $(x_1^\alpha, \cdots, x_p^\alpha)$ coincide com a orientação de $\mathcal{F}|_U$. Logo $\omega_\alpha(v_x) = 1$ onde $v_x = (x_1^\alpha, \cdots, x_p^\alpha)$. Seja $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$, então $\omega = \sum \lambda_\alpha \omega_\alpha$ é uma p-forma transversal.

□

Definição 3.26:

a) Denotemos por $\mathcal{C}_\mathcal{F}$ o fecho topológico em $\mathcal{D}_p'$ das combinações lineares finitas com coeficientes positivos das correntes folheadas de Dirac; i.e.,

$$\mathcal{C}_\mathcal{F} = \overline{\{\sum_{i\in I} a_1 C_{v_{x_i}}; I \text{ finito}, a_i > 0\}}^{\mathcal{D}_p'}$$

seus elementos são chamados correntes folheadas.

b) Definimos os conjuntos

$$\mathcal{Z}_\mathcal{F} := \mathcal{C}_\mathcal{F} \cap \mathcal{Z}_p \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}_\mathcal{F} := \mathcal{C}_\mathcal{F} \cap \mathcal{B}_p$$

e são chamados ciclos folheados e de fronteiras folheadas respectivamente.

Demonstraremos agora que as correntes folheadas são correntes de integração como foi definido no exemplo 3.12 pela expressão (3.4). Isto é, demonstraremos que a uma corrente folheada podemos designar uma única medida limitada não negativa.

Seja ω uma p-forma transversal a $\mathcal{F}$ e X um campo continuo de p-vetores tangentes a $\mathcal{F}$ tal que $\omega(X) \equiv 1$. Dada $C \in \mathcal{C}_\mathcal{F}$ definimos o funcional linear continuo $J_C : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$J_C(f) = \langle C, f\omega\rangle \tag{3.11}$$

O seguinte lema diz que podemos associar uma única medida limitada não negativa a este funcional, dita medida será a que associamos a uma corrente folheada.

Lema 3.27: *Existe uma única medida ν_C limitada e não negativa sobre M, tal que*

$$J_C(f) = \int_M f d\nu_C, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \tag{3.12}$$

Demonstração. mostraremos a existência de ν_C.

caso i: Se $C = C_{X(x)}$ é uma corrente de Dirac.

$$\begin{array}{rcl} J_C(f) & = & \langle C, f\omega\rangle = \langle C_{X_x}, f\omega\rangle \\ & = & (f\omega)_x(X(x)) = f(x)\omega_x(X(x)) \\ & = & f(x) = \int_M f(x) d\nu_C \end{array}$$

onde ν_C é a medida de Dirac em x.

caso ii: $C = C_n = \sum_{i=1}^{n} a_i C_{X(x_i)}$, $a_i > 0$. Pelo caso i, é suficiente tomar a medida

$$\nu_C = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu_{C_i}.$$

caso iii: Se $C = \lim_{n\to\infty} C_n$, onde C_n é como no caso ii. Para cada C_n existe ν_{C_n} medida limitada e não negativa tal que

$$\langle C_n, f\omega\rangle J_{C_n}(f) = \int_M f d\nu_{C_n}, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \tag{3.13}$$

desde que $C_n \to C$ temos que $\{\nu_{C_n}\}_n$ é uma sequencia de medidas limitadas, então contém uma subsequencia $\{\nu_{C_n}\}_{n_k}$ convergente na topologia fraca*; i.e.,

$$\exists \nu_C \text{ medida em } M \text{ tal que } \nu_{C_{n_k}} \xrightarrow{*} \nu_C \text{ quando } k \to \infty$$

por definição de convergência na topologia fraca* temos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_M f d\nu_{C_{n_k}} = \int_M f d\nu_C, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \tag{3.14}$$

como $C_n \to C$ por Proposição 3.19 segue $\langle C_n, f\omega\rangle \to \langle C, f\omega\rangle$. Tomando limite em 3.13, segue o Lema de 3.14. Agora mostraremos a unicidade. Suponha que existe ν'_C tal que satisfaz 3.12. Logo, como $C^\infty(M)$ é denso em $C^0(M)$, então

$$\int_M f d\nu'_C = \int_M f d\nu_C, \forall f \in C^0(M)$$

segue-se $\nu'_C = \nu_C$. □

Dado $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ uma corrente folheada pelo Lema anterior mostramos que existe uma única medida satisfazendo (3.12). Assim podemos associar a esta medida uma corrente de integração C_{X,ν_C} que foi definida como,

$$\langle C_{X,\nu_C}, \eta \rangle = \int_M \eta(X) d\nu_C,\ \eta \in \mathcal{D}_p$$

Proposição 3.28: *Seja X um campo de p-vetores continuo e sem singularidades tangentes a $\mathcal{F}$. Então as correntes folheadas se correspondem um a um com as medidas limitadas e não negativas sobre M por*

$$C = C_{X,\nu_C}$$

onde ν_C é a medida dada pelo lema anterior.

Demonstração. Provaremos que $C = C_{X,\nu_C}$. Seja $C = \lim_{n\to\infty} C_n$ e ν_C, ν_{C_n} como na prova do Lema anterior; i.e., $\nu_{c_{n_k}} \xrightarrow{*} \nu_C$, então

$$\lim_{k\to\infty} \int_M f d\nu_{C_{n_k}} = \int_M f d\nu_C, \forall f \in C^0(M, \mathbb{R}) \tag{3.15}$$

Afirmação 1: Dado $\eta \in \mathcal{D}_p \Rightarrow \eta = \eta_0 + \eta(X)\omega$ onde $\eta_0(X) \equiv 0$. De fato, definamos $\eta_0 = \eta - \eta(X)\omega$, desde que $\omega(X) \equiv 1$, temos $\eta_0(X(x)) = \eta(X(x)) - \eta(X(x))\omega(X(x)) = 0$. Por outro lado, do Lema anterior

$$\langle J_{C_n}, \eta(X) \rangle = \int_M \eta(X) d\nu_{C_n}, n \geq 1 \tag{3.16}$$

mas $\langle J_{C_n}, \eta(X) \rangle = \langle C_n, \eta(X)\omega \rangle$ e da afirmação 1 segue $\langle J_{C_n}, \eta(X) \rangle = \langle C_n, \eta(X) - \eta_0 \rangle$. Desde que $C_n \to C$, por (3.15) e a definição de corrente de integração temos

$$\langle C_n, \eta(X) - \eta_0 \rangle = \int_M \eta(X) d\nu_C = \langle C_{X,\nu_C}, \eta \rangle \tag{3.17}$$

Afirmação 2: $\langle C, \eta_0 \rangle = 0$. De fato, como C é uma corrente folheada, então é suficiente mostrar que $\langle C_{X(x)}, \eta_0 \rangle = 0$, mas isto segue da afirmação 1, pois $\langle C_{X(x)}, \eta_0 \rangle = \eta_0(X(x))$. Logo da afirmação 2 e de (3.17) segue que

$$\langle C, \eta \rangle = \langle C_{X,\nu_C}, \eta \rangle,\ \forall \eta \in \mathcal{D}_p.$$

Sabemos que dado uma medida limitada não negativa ν em M, ela induz uma corrente de integração o qual é uma corrente folheada, pois ν pode-se aproximar arbitrariamente por combinações lineares finitas com coeficientes positivos de medidas de Dirac.

□

3.3 As medidas transversas invariantes são ciclos folheados

Nesta seção mostraremos que a cada ciclo folheado podemos associar uma medida transversa invariante por holonomia e vice-versa.

Proposição 3.29: *A corrente C_μ associada a uma medida μ transversa invariante por holonomia definida no exemplo* 3.15 *é um ciclo folheado; i.e., $C_\mu \in \mathcal{Z}_\mathcal{F}$.*

Demonstração. Temos que mostrar que $C_\mu \in \mathcal{Z}_p \cap \mathcal{C}_\mathcal{F}$. Afirmação 1: $C_\mu \in \mathcal{Z}_p$. De fato, provamos na seção 1 do capitulo 2, que se ω for uma p-forma exata, então

$$\langle C_\mu, \omega \rangle = 0 \tag{3.18}$$

Por outro lado, seja $\eta \in \mathcal{D}_{p-1}$ qualquer, segue de (3.18)

$$\langle \partial C_\mu, \eta \rangle = \langle C_\mu, d\eta \rangle = 0$$

o que prova a afirmação. Afirmação 2: $C_\mu \in \mathcal{C}_\mathcal{F}$. De fato, pela Proposição 3.28 é suficiente mostrar que C_μ é uma corrente de integração. Seja $\omega \in \mathcal{D}_p$, suponhamos que $\text{supp}(\omega) \subset U_\alpha$, para algum α. De (2.2) temos

$$\langle C_\mu, \omega \rangle = \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)}) d\mu(y) \tag{3.19}$$

Definamos uma medida λ_y em cada placa $\pi_\alpha^{-1}(y)$ por

$$\lambda_y(A) = m(\varphi_\alpha(A))$$

onde m é a medida de Lebesgue, se f é integrável em $\pi_\alpha^{-1}(y)$ com respeito a medida λ_y, então

$$\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} f(x) d\lambda_y(x) = \int_{\varphi_\alpha(\pi_\alpha^{-1}(y))} f \circ \varphi_\alpha dm \tag{3.20}$$

Definimos o funcional linear positivo

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & C^0(U_\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} h_y(x) d\lambda_y(x)) d\mu(y) \end{array}$$

Logo, pelo Teorema de representação de Riesz, existe uma única medida ν_α em U_α tal que

$$\Phi(h) = \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} h_y(x) d\lambda_y(x)) d\mu(y) = \int_{U_\alpha} h d\nu_\alpha, \ \forall h \in C^0(U_\alpha)$$

Em particular, se $h = \omega(X)$ com X um campo de p-vetores continuo, temos

$$\int_{U_\alpha} \omega(X) d\nu_\alpha = \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} \omega(X)_y(x) d\lambda_y(x)) d\mu(y) \tag{3.21}$$

Por outro lado, como $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I dx_I$ em U_α e $\omega \mid_{\pi_\alpha^{-1}(y)} = \omega_{I_0} dx_{I_0}$, então

$$\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} \omega = \int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} \omega_{I_0} dx_{I_0} = \int_{\varphi_\alpha(\pi_\alpha^{-1}(y))} \omega_{I_0} \circ \varphi_\alpha^{-1} dm \tag{3.22}$$

Como $\omega \mid_{\pi_\alpha^{-1}(y)} = \omega_{I_0} dx_{I_0} \Rightarrow \omega(X)_y = \omega_{I_0}$, então de (3.20) segue

$$\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} \omega(X)_y(x) d\lambda_y(x) = \int_{\varphi_\alpha(\pi_\alpha^{-1}(y))} \omega_{I_0} \circ \varphi_\alpha^{-1} dm \tag{3.23}$$

Logo, de (3.22), (3.24) e (3.21) temos que

$$\int_{U_\alpha} \omega(X) d\nu_\alpha = \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} \omega) d\mu(y) \tag{3.24}$$

Pela forma como foi construído ν_α, temos que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $\nu_\alpha = \nu_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$. Assim podemos definir a seguente medida em M, como a suma disjunta destas medidas; i.e.,

$$\nu := \coprod_\alpha \nu_\alpha$$

Logo, se consideramos $\{\delta_\alpha\}_\alpha$ partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}_\alpha$. Seja $\eta \in \mathcal{D}_p$ arbitrário, então

$$\begin{aligned} \int_M \eta(X) d\nu &= \int_M \sum_\alpha (\delta_\alpha \eta)(X) d\nu \\ &= \sum_\alpha \int_M (\delta_\alpha \eta)(X) d\nu \\ &= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (\delta_\alpha \eta)(X) d\nu_\alpha \end{aligned}$$

Como $\mathrm{supp}(\delta_\alpha \eta) \subset U_\alpha$ segue de (3.24) que

$$\int_M \eta(X) d\nu = \sum_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} \delta_\alpha \eta) d\mu(y)$$

Assim hemos provado que $\langle C_{X,\nu}, \eta \rangle = \langle C_\mu, \eta \rangle$; i.e., C_μ é uma corrente de integração. $\square$

Teorema 3.30 (D. Sullivan, [23])**:** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão p, transversalmente orientável e de classe C^1 de uma n-variedade compacta M de classe C^∞. Então as medidas transversas invariantes por holonomia e os ciclos folheados estão em correspondência canônica um a um.*

Observação 3.31: A correspondência canônica querê dizer o procedimento de associar uma corrente a uma medida transversa invariante como foi descrito no exemplo 3.15; isto é,

$$< C_\mu, \omega >:= \sum_{\alpha \in I} \int_{\Sigma_\alpha} (\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} \lambda_\alpha \omega) d\mu(x)$$

onde $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma partição da unidade associada à cobertura regular folheada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, Σ_α é o espaço transverso em cada U_α e $\pi_\alpha : U_\alpha \to \Sigma_\alpha$ é a projeção canônica.

A Proposição 3.29 mostra que C_μ é um ciclo folheado, então unicamente resta demostrar o recíproco. Mas antes de começar a demostração é necessário mostrar alguns resultados prévios.

Consideremos um ciclo folheado C não nulo de $\mathcal{F}$ e um campo continuo de p-vetores tangente a $\mathcal{F}$, que denotaremos por X. Suponhamos que para cada carta folheada $\varphi : U \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, regular de $\mathcal{F}$, o compacto $B = \varphi^{-1}(\mathbb{D}^p \times \mathbb{D}^{n-p})$ satisfaz que $B \cap \text{supp}(C) \neq \emptyset$, onde $\mathbb{D}^p$ e $\mathbb{D}^{n-p}$ são os discos fechados de raio um em $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$ respectivamente.

Pela Proposição 3.28, existe uma única medida limitada e não negativa ν sobre M tal que

$$< C, \omega >= \int_M \omega(X) d\nu, \ \forall \omega \in \mathcal{D}_p$$

Denotemos por $\overline{\nu} := \nu \mid_B$ a restrição de ν a B e por $\tilde{\pi}$ e π às projeções de B sobre $P := \mathbb{D}^p$, que identificaremos com as placas de $\mathcal{F}$ e $\Sigma = \mathbb{D}^{n-p}$ que identificaremos com o espaço transverso de $\mathcal{F}$ em B, respectivamente. Agora definamos $\tilde{\lambda}$ e λ as medidas imagens direta de $\tilde{\pi}$ e π respectivamente; i.e.,

$$\tilde{\lambda}(A_1) := \overline{\nu}(\tilde{\pi}^{-1}(A_1)) \text{ e } \lambda(A_2) := \overline{\nu}(\pi^{-1}(A_2))$$

onde $A_1 \subset P$ e $A_2 \subset \Sigma$ são subconjuntos de Borel.

Proposição 3.32: *Podemos desintegrar a medida $\overline{\nu}$ e encontrar uma família $(\nu_y)_{y \in \Sigma}$ de medidas de probabilidade sobre B tais que para todo $y \in \Sigma$ e toda função continua f sobre B tem-se:*

1) $supp(\nu_y) \subset \pi^{-1}(y)$.

2) A função $\displaystyle\int_{\pi^{-1}(y)} f d\nu_y$ sobre Σ é λ-mensurável.

3) $\displaystyle\int_B f d\overline{\nu} = \int_\Sigma (\int_{\pi^{-1}(y)} f d\nu_y) d\lambda$

Demonstração. Seja $Z \subset B$ um boreliano para o qual $\tilde{\lambda} \times \lambda(A) = 0$ com $A = \tilde{\pi} \times \pi(Z)$ onde $\tilde{\lambda} \times \lambda$ é a medida produto, desde que

$$\begin{aligned} 0 = (\tilde{\lambda} \times \lambda)A &= (\tilde{\lambda} \times \lambda)(\tilde{\pi}(Z) \times \pi(Z)) \\ &= \tilde{\lambda}(\tilde{\pi}(Z)) \times \lambda(\pi(Z)) \\ &= \overline{\nu}(\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(Z))).\overline{\nu}(\pi^{-1}(\pi(Z))) \end{aligned}$$

e $Z \subset \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(Z)), \pi^{-1}(\pi(Z))$ temos que $\overline{\nu}(Z) = 0$. Então, $\overline{\nu} << \tilde{\lambda} \times \lambda$; i.e., $\overline{\nu}$ é absolutamente contínua com respeito à medida $\tilde{\lambda} \times \lambda$, segue pelo Teorema de Radom-Nikodym que existe $h \in L^1(\overline{\nu})$ tal que

$$\int_B g d\overline{\nu} = \int_B ghd(\tilde{\lambda} \times \lambda), \ \forall g \ \overline{\nu}\text{-integrável.}$$

Logo pelo Teorema de Fubini e como P é identificado com as placas, tomando $P = \pi^{-1}(y)$ temos

$$\int_B g d\overline{\nu} = \int_B ghd(\tilde{\lambda} \times \lambda) = \int_\Sigma (\int_{\pi^{-1}(y)} (gh)_y(x) d\tilde{\lambda}(x)) d\lambda(y)$$

Tomando $\nu_y = h_y \tilde{\lambda} \Rightarrow \displaystyle\int_{\pi^{-1}(y)} g_y d\nu_y = \int_{\pi^{-1}(y)} (gh)_y(x) d\tilde{\lambda}(x)$. Assim

$$\int_B g d\overline{\nu} = \int_\Sigma (\int_{\pi^{-1}(y)} g_y d\nu_y) d\lambda(y) \tag{3.25}$$

Em particular temos (3.25) para f contínua em B. □

Observação 3.33: Se $\omega \in \mathcal{D}_p$, com $\text{supp}(\omega) \subset \text{int}(B)$, temos de (3.25)

$$\langle C, \omega \rangle = \int_M \omega(X) d\nu = \int_B \omega(X) d\overline{\nu} = \int_\Sigma (\int_{\pi^{-1}(y)} \omega(X) d\nu_y) d\lambda(y).$$

Para $y \in T$, denotamos por P_y a corrente integração definida por

$$\langle P_y, \omega \rangle = \int_{\pi^{-1}(y)} \omega(X) d\nu_y \tag{3.26}$$

Teorema 3.34: *Existe uma única medida não negativa μ sobre o espaço transverso Σ à folheação $\mathcal{F}$ em B, tal que no interior de B a corrente C pode ser representado por*

$$\int_\Sigma C_y d\mu$$

onde C_y é a corrente folheada $\langle C_y, \eta \rangle = \displaystyle\int_{\pi^{-1}(y)} \eta$, $\forall \eta$ com $supp(\eta) \subset int(B)$ com a orientação de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Afirmação 1: $P_y \in \mathcal{Z}_p$ para λ-q.t.p $y \in \text{int}(\Sigma)$; i.e., $\langle \partial P_y, \alpha \rangle = 0$ para λ-q.t.p $y \in \text{int}(\Sigma)$. De fato, como $C \in \mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$, $\langle C, d\alpha \rangle = \langle \partial C, \alpha \rangle = 0$, para todo $\alpha \in \mathcal{D}_{p-1}$, em particular para $\alpha \in \mathcal{D}_{p-1}(\text{int}(B))$, da Observação 3.33 segue que

$$\int_\Sigma (\int_{\pi^{-1}(y)} (d\alpha)(X) d\nu_y) d\lambda = 0 \tag{3.27}$$

Por outro lado, se g é uma função de classe C^1 com suporte compacto contido em Σ, podemos aproximar $(g \circ \pi)\alpha$ por formas diferenciáveis de classe C^∞ com suporte compacto contido em $\text{int}(B)$, então de (3.27) temos

$$\int_\Sigma (\int_{\pi^{-1}(y)} (d((g \circ \pi)\alpha))(X) d\nu_y) d\lambda = 0$$

logo, como $(g \circ \pi) \mid_{\pi^{-1}(y)}$ é constante, temos $(d(g \circ \pi) \wedge \alpha) \mid_{\pi^{-1}(y)} \equiv 0$. Assim,

$$0 = \int_\Sigma (\int_{\pi^{-1}(y)} (d((g \circ \pi)\alpha))(X) d\nu_y) d\lambda = \int_\Sigma g(y) (\int_{\pi^{-1}(y)} (d\alpha)(X) d\nu_y) d\lambda$$

como g é arbitrário, então $\displaystyle\int_{\pi^{-1}(y)} (d\alpha)(X) d\nu_y = 0$ para λ-q.t.p $y \in \text{int}(T)$. De (3.26) temos

$$\langle \partial P_y, \alpha \rangle = \langle P_y, d\alpha \rangle = 0 \text{ para } \lambda\text{-q.t.p } y \in \text{int}(\Sigma)$$

Em particular segue da afirmação que $\text{supp}(\partial P_y) \cap \text{int}(B) = \emptyset$ para λ-q.t.p $y \in \Sigma$.

Por outro lado, do Exemplo 3.23 temos que $Z_p = \langle C_y \rangle$. Logo, da afirmação 1, para cada $y \in \Sigma$ existe $k(y) \in \mathbb{R}$ tal que $P_y = k(y) C_y$, assim $k : \Sigma \to \mathbb{R}$ define uma função λ-mensurável. Tomando a medida $\mu = k\lambda$ em $\text{int}(\Sigma)$. Para $\omega \in \mathcal{D}_p(\text{int}(B))$ temos

$$\begin{aligned}
\langle C, \omega \rangle &= \int_\Sigma (\underbrace{\int_{\pi^{-1}(y)} \omega(X) d\nu_y}) d\lambda(y) \qquad \text{(Obs. 3.33)} \\
&= \int_\Sigma \langle P_y, \omega \rangle d\lambda \\
&= \int_\Sigma \langle k(y) C_y, \omega \rangle d\lambda \\
&= \int_\Sigma k_y \langle C_y, \omega \rangle d\lambda \\
&= \int_\Sigma \langle C_y, \omega \rangle d\mu
\end{aligned}$$

Afirmação 2: μ é finita em compactos. De fato, seja η uma p-forma em $\text{int}(B)$ com suporte compacto na x-coordenada mas não na y-coordenada tal que $\displaystyle\int_{\pi^{-1}(y)} \eta(X) d\nu_y = 1$, para

cada $y \in T$. Se $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ com suporte compacto. $h \circ \pi$ é uma função em $\text{int}(B)$ tal que $(h \circ \pi)\mid_{\pi^{-1}(y)}=$ cte, logo $(h \circ \pi)\eta \in \mathcal{D}_p(\text{int}(B))$ e da Observação 3.33 temos

$$\begin{aligned}
\infty > \langle C, (h \circ \pi)\eta \rangle &= \int_\Sigma (\int_{\pi^{-1}(y)} ((h \circ \pi)\eta)(X) d\nu_y) d\mu \\
&= \int_\Sigma h(\underbrace{\int_{\pi^{-1}(y)} \eta(X) d\nu_y}_{1}) d\mu \\
&= \int_\Sigma h d\mu
\end{aligned}$$

como h foi arbitrário, segue que μ é finita em compactos.

Afirmação 3: μ é única. De fato, suponhamos que existe outra medida μ' que satisfaz com as hipóteses do teorema. Pela afirmação 2, μ e μ' são finitas em compactos, assim podemos considerar a medida $\mu - \mu'$, então

$$\int_\Sigma (\int_{\pi^{-1}} \eta) d(\mu - \mu') = 0, \forall \eta \in \mathcal{D}_p(\text{int}(B))$$

pelos mesmos argumentos da afirmação 2, temos que

$$0 = \int_\Sigma h d(\mu - \mu'), \; h \in C^\infty \text{ com suporte compacto em } \Sigma$$

assim, $\mu - \mu' = 0$ em conjuntos compactos. Por tanto $\mu = \mu'$. □

Demostração do Teorema 3.30. O teorema anterior nos proporciona a maneira de construir uma medida transversa a partir de um ciclo folheado em um compacto B contido em uma carta regular folheada. Seja $\{B_1, \cdots, B_m\}$ uma cobertura de M, com B_α compacto como acima, tais que $\mathcal{U} = \{\text{int}(B_\alpha)\}_{\alpha=1}^m$ é uma cobertura aberta de M e denotamos por Σ_α o espaço transverso em cada B_α. Pela proposição anterior podemos expressar C em cada B_α como

$$\int_{\Sigma_\alpha} C_y d\mu_i \tag{3.28}$$

onde C_y é a corrente de integração em $\pi^{-1}(y)$ e μ_i é a única medida dado pelo teorema anterior que permite expressar (3.28). Da teoria das folheações podemos supor(ver [7]) que se $\text{int}(B_\alpha) \cap \text{int}(B_\beta) \neq \emptyset$, existe uma carta regular folheada W tal que $B_\alpha \cup B_\beta \subset W$. Pela unicidade das μ'_αs elas coincidem $\text{int}(B_\alpha) \cap \text{int}(B_\beta)$, assim são invariantes pelos difeomorfismos locais $\gamma_\alpha : \Sigma_\alpha \to \Sigma_\beta$ que geram o pseudogrupo de holonomia $\Gamma_{\mathcal{U}}$. Por tanto, podemos definir a medida em $\Sigma = \bigsqcup_\alpha \Sigma_\alpha$ de maneira natural como

$$\mu = \coprod_\alpha \mu_\alpha$$

Se $\{\lambda_\alpha\}$ é uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$, para cada $\omega \in \mathcal{D}_p$, temos que $\lambda_\alpha\omega \in \mathcal{D}_p(\mathrm{int}(B_\alpha))$ e $\omega = \sum_\alpha \lambda_\alpha\omega$. Logo

$$\begin{aligned}
\langle C, \omega\rangle &= \langle C, \sum_\alpha \lambda_\alpha\omega\rangle \\
&= \sum_\alpha \langle C, \lambda_\alpha\omega\rangle \\
&= \sum_\alpha \int_\Sigma \langle C_y, \lambda_\alpha\omega\rangle d\mu_\alpha(y) \\
&= \sum_\alpha \int_\Sigma (\int_{\pi_\alpha^{-1}(y)} \lambda_\alpha\omega) d\mu(y) \\
&= \langle C_\mu, \omega\rangle
\end{aligned}$$

o que conclui a prova. $\square$

Capítulo

4

Exemplos Dinâmicos

Neste capitulo estudaremos dois exemplos básicos, mas importantes da dinâmica hiperbólica.

4.1 Thom-Arnold map

Consideremos $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ i.e, uma matriz com entradas inteiras e determinante ± 1, resulta que a matriz induz um difeomorfismo no toro $\mathbb{T}^n = \dfrac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$.

Definição 4.1: Seja $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ hiperbólica. O difeomorfismo induzido $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ definida por

$$f \circ \pi = \pi \circ A$$

onde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ é a projeção canônica é chamado difeomorfismo de Anosov linear.

Vamos a estudar sua riqueza dinâmica.

Teorema 4.2: *Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um difeomorfismo de Anosov linear, então*

1. $\overline{Per(f)} = \mathbb{T}^n$
2. *f é transitivo e topologicamente mixing.*
3. *f é expansivo.*
4. *Para qualquer $z \in \mathbb{T}^n$, as variedades $W^s(z)$ e $W^u(z)$ são densas em $\mathbb{T}^n$.*

Demonstração: A prova sera feita para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ neste caso f é chamado Thom-Arnold map

1) Seja $q \in \mathbb{Z}$ e consideremos o conjunto $C_q = \{(\frac{m}{q}, \frac{n}{q}); m, n \in \mathbb{Z}\}$, então $A(C_q) = C_q$ e como $f \circ \pi = \pi \circ A$ temos $f(\pi(C_q)) = \pi(C_q)$. Além disso $\pi(C_q)$ é um conjunto finito e como f é injetiva temos que cada ponto de $\pi(C_q)$ é um ponto periódico. Por outro lado $\bigcup_{q\in\mathbb{Z}} C_q$ é denso em $\mathbb{R}^2$, assim $\bigcup_{q\in\mathbb{Z}} \pi(C_q)$ é denso em $\mathbb{T}^2$, pois tomemos U aberto em $\mathbb{T}^2$ então $\pi^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^2$, logo

$$\pi^{-1}(U) \cap \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} C_q \neq \emptyset$$

então

$$U \cap \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} \pi(C_q) \neq \emptyset$$

e como $\bigcup_{q\in\mathbb{Z}} \pi(C_q) \subset Per(f) \subset \mathbb{T}^2$ segue-se a afirmação.

2) Os autovalores de A são $\lambda = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\mu = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, assim

$$E^s = \{(x, -(\frac{1+\sqrt{5}}{2})x; x \in \mathbb{R}\} \text{ e } E^u = \{(x, (\frac{\sqrt{5}-1}{2})x; x \in \mathbb{R}\}$$

Afirmação 1: $\pi(E^s)$ e $\pi(E^u)$ são densos em $\mathbb{T}^2$. De fato, como $\mathbb{T}^2 = \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ seja $p \in \mathbb{T}^2$, $p = (p_1, p_2)$ e considere o circulo

$$S_p = \{(p_1, y) : y \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\}$$

por outro lado como $E^s = \{(x, -(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})x; x \in \mathbb{R}\}$ então

$$\pi(E^s) = \{(x, -(\frac{1+\sqrt{5}}{2})x \bmod \mathbb{Z}^2, x \in \mathbb{R}\}$$

seja $k = -\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, logo $(p_1, kp_1) \in S_p \cap \pi(E^s)$. Consideremos a aplicação $T_{(1,k)} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por

$$T_{(1,k)}(x, y) = (x+1, y+k) \bmod \mathbb{Z}^2$$

como

$$\mathcal{O}_+(p_1, kp_1) = \{T^i_{(1,k)}(p_1, kp_1); i \geq 0\}$$

note que $T_{(1,k)}(p_1, kp_1) = (p_1+1, kp_1+k) \bmod \mathbb{Z}^2 = (p_1+1, k(p_1))$

$$\begin{aligned} T_{(1,k)}(p_1, kp_1) &= (p_1+1, kp_1+k) \bmod \mathbb{Z}^2 \\ &= (p_1+1, k(p_1+1)) \bmod \mathbb{Z}^2 \in \pi(E^s) \\ &= (p_1, k(p_1+1)) \bmod \mathbb{Z}^2 \in S_p \end{aligned}$$

Assim em geral temos que $T^n_{(1,k)}(p_1, kp_1) \in \pi(E^s) \cap S_p$, para $n \geq 0$ e segue-se

$$\mathcal{O}_+(p_1, kp_1) \subset \pi(E^s) \cap S_p \tag{4.1}$$

Por outro lado, consideremos $h : S_p \to S^1$ dado por $h(p_1, y) = y$. Assim h é uma homeomorfismo e

$$R_k \circ h = h \circ T_{(1,k)}$$

onde R_k é a rotação de angulo k. Como $k \in \mathbb{I}$, então toda orbita de R_k é densa e como $T_{(1,k)}$ é topologicamente conjugado com R_k, segue-se que $\mathcal{O}_+(p_1, kp_1)$ é densa em S_p. Por outro lado seja U um aberto arbitrário em $\mathbb{T}^2$, seja $p \in U$, então pelo anterior temos que $\mathcal{O}_+(p_1, kp_1) \cap (S_p \cap U) \neq \emptyset$ e de (4.1) temos $\pi(E^s) \cap U \neq \emptyset$, o que prova que $\pi(E^s)$ é denso em $\mathbb{T}^2$. De forma análoga se mostra a densidade de $\pi(E^u)$.

Afirmação 2: Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^2$ tal que $U \cap E^u \neq \emptyset$ e $V \cap E^s \neq \emptyset$ então existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $U \cap A^n(V) \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. De fato, como $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$ e seja uma norma adaptada em $\mathbb{R}^2$. Como $V \cap E^s \neq \emptyset$ tomemos $(x_0, 0) \in V \cap E^s$ desde que V é aberto existe $\epsilon > 0$ tal que

$$Q = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \subset V$$

como A é hiperbólico e $\dim E^s = \dim E^u = 1$, então

$$A^n(Q) = (A^n x_0 - \epsilon_n, A^n x_0 + \epsilon_n) \times (-\delta_n, \delta_n)$$

onde existe $\lambda > 1$ tal que $\delta_n \geq \lambda^n \epsilon$ e $|\epsilon_n| \leq \lambda^{-n}\epsilon$, e $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x_0 = 0$. Por outro lado, como $U \cap E^u \neq \emptyset$ existe $(0, y_0) \in U \cap E^u$ e $\beta > 0$ tal que

$$Q_1 = (-\beta, \beta) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$$

escolha n_1 tal que se $n \geq n_1$, então

$$(A^n x_0 - \epsilon_n, A^n x_0 + \epsilon_n) \subset (-\beta, \beta) \tag{4.2}$$

e n_2 tal que $n \geq n_2$, logo

$$(y_0 - \beta, y_0 + \beta) \subset (-\delta_n, \delta_n) \tag{4.3}$$

tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então se $n \geq n_0$ vale (4.2) e (4.3) isto é $A^n(Q) \cap Q_1 \neq \emptyset$, de onde segue-se a afirmação.

Agora utilizando as duas afirmações anteriores provaremos que f é topologicamente mixing. Sejam U, V abertos qualquer em $\mathbb{T}^2$. Logo pela afirmação 1 temos $\pi(E^s) \cap U \neq \emptyset$ e $\pi(E^u) \cap V \neq \emptyset$. Sejam $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ componentes conexas de $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ respectivamente(sem perdida de generalidade podemos supor que $\pi^{-1}(U) = \tilde{U}$ e $\pi^{-1}(V) = \tilde{V}$) tais que $E^s \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ e $E^u \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, pela afirmação 2, existe $n_0 \geq 0$ tal que

$$A^n(\tilde{U}) \cap \tilde{V} \neq \emptyset, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e como $\pi(A^n(\tilde{U}) \cap \tilde{V}) \subset f^n(U) \cap V$, então $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

3) É Suficiente provar que $\mathbb{T}^2$ é um conjunto hiperbólico, pois se $\mathbb{T}^2$ é hiperbólico segue-se do corolário 1.21 que é expansivo. Sabemos que

$$D\pi_x : T_x\mathbb{R}^2 \to T_{[x]}\mathbb{T}^2$$

é um isomorfismo linear. Como $T_x\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$, definamos $E^s_{[x]} := D\pi_{[x]}(E^s)$ e $E^u_{[x]} := D\pi_{[x]}(E^u)$. Então

$$T_{[x]}\mathbb{T}^2 = E^s_{[x]} \oplus E^u_{[x]}$$

Seja $v \in E^s_{[x]} \cap E^u_{[x]} \Rightarrow \exists u_1 \in E^s$ e $\exists u_2 \in E^u$ tal que

$$v = D\pi_{[x]}(u_1) = D\pi_{[x]}(u_2)$$

como $D\pi_{[x]}$ é um isomorfismo, segue que $u_1 = u_2$. Como $E^s \cap E^u = \{0\}$ segue que $u_1 = u_2 = 0$ e $v = [0]$, logo $E^s_{[x]} \cap E^u_{[x]} = \{0\}$. Reciprocamente, seja $v \in T_{[x]}\mathbb{T}^2$, então $\exists! u = D\pi_x^{-1}(v) \in \mathbb{R}^2$. Desse modo

$$u = u_1 + u_2 \text{ com } u_1 \in E^s \text{ e } u_2 \in E^u$$

Logo, $v = D\pi_x(u) = D\pi_x(u_1) + D\pi_x(u_2)$. Onde $D\pi_x(u_1) \in E^s_{[x]}$ e $D\pi_x(u_2) \in E^u_{[x]}$. As outras condições de conjunto hiperbólico segue imediatamente do fato que $D\pi_x$ é isomorfismo linear e que A é uma matriz hiperbólica.

4) Para provar que $\overline{W^s(\pi(x))} = \mathbb{T}^2$ é suficiente observar que $W^s(\pi(x)) = \pi(x + E^s)$ e como $\pi(E^s)$ é denso em $\mathbb{T}^2$, então $\pi(x + E^s)$ é denso em $\mathbb{T}^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.
Afirmação: $W^s(\pi(x)) = \pi(x + E^s)$ e $W^u(\pi(x)) = \pi(x + E^u)$. De fato, se $y \in x + E^s \Rightarrow y - x \in E^s$, então

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n(y - x)\| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|A^n(y) - A^n(x)\| = 0$$

assim

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(\pi(x)), f^n(\pi(y))) = 0$$

logo $\pi(x + E^s) \subset W^s(\pi(x))$. A volta se prova semelhantemente.

4.2 Ferradura de Smale

4.2.1 Dinâmica simbólica

Consideremos $A = \{1, 2, \cdots, m\}$ um conjunto finito e $\Sigma = A^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todas as sequencias bilaterais com entradas elementos de A, isto é

$$\Sigma = \{\theta = (\cdots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots) : \theta_i \in A, \text{para } i \in \mathbb{Z}\}$$

Agora definamos shift de Bernoulli ou também chamada deslocamento à esquerda $\Sigma \to \Sigma$, dado por

$$\sigma(\theta) = \theta' \text{ e } \theta'_i = \theta_{i+1}$$

Consideremos em A a topologia discreta o qual é gerado pela métrica

$$d_A(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ 1 & \text{se } a \neq b \end{cases}$$

e dotando a Σ com a topologia produto, temos que Σ é compacto. Definimos

$$d(\theta, \theta') = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{d_A(\theta_i, \theta'_i)}{2^{|i|}}$$

obtemos uma métrica em Σ compatível com a topologia produto. Assim temos que σ é um homeomorfismo, pois

$$\begin{aligned} d(\sigma(\theta), \sigma(\theta') &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{d_A(\sigma(\theta)_i, \sigma(\theta')_i)}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{d_A(\theta_{i+1}, \theta'_{i+1})}{2^{|i|}} \leq \frac{1}{2} d_A(\theta, \theta') \end{aligned}$$

Teorema 4.3: *Seja $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ o shift de Bernoulli, então:*

1. $\overline{Per(\sigma)} = \Sigma$

2. *σ é topologicamente mixing.*

3. *σ é expansivo.*

4. $W^s(\alpha)$ e $W^u(\alpha)$ são densos em Σ para todo $\alpha \in \Sigma$

Demonstração.

1) Seja U um aberto em Σ, tomemos $\theta \in U$ então existe $\epsilon > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(\theta) \subset U$ e $\sum_{i\in\mathbb{Z}, i>p} \frac{1}{2^{|i|}} < \epsilon$. Agora definamos

$$\theta' = (\cdots, \underbrace{\theta_{-p}, \cdots, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_p}, \underbrace{\theta_{-p}, \cdots, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_p}, \cdots)$$

então $\theta' \in Per(\sigma)$ e tem período $2p+1$. Assim

$$d(\theta, \theta') = \sum_{i\in\mathbb{Z}, |i|>p} \frac{d_A(\theta_i, \theta'_i)}{2^{|i|}} < \sum_{i\in\mathbb{Z}, i>p} \frac{1}{2^{|i|}} < \epsilon$$

e segue-se que $\theta' \in B_\epsilon(r)$ o que prova que $U \cap Per(\sigma) \neq \emptyset$.

2) Sejam $\alpha, \alpha' \in \Sigma$ e os abertos básicos

$$B_{N_1} = \{\theta \in \Sigma : \theta_i = \alpha_i, \forall |i| \leq N_1\}$$

e

$$B_{N_2} = \{\theta \in \Sigma : \theta_i = \alpha'_i, \forall |i| \leq N_2\}$$

tomemos $m > N_1 + 2N_2 + 1$ fixo, então para todo $k \geq m$ definimos $\theta \in \Sigma$ tal que

$$\theta_i = \alpha_i,\ \forall |i| \leq N_1 \text{ e } \theta_{i+k} = \alpha'_i,\ \forall |i| \leq N_2$$

e temos que $\theta \in B_{N_1}$ e $\sigma^{-k}(\theta) \in B_{N_2}$, o que significa

$$B_{N_1} \cap \sigma^k(B_{N_2}) \neq \emptyset$$

.

3) Seja $\delta < 1$ e $\theta, \theta' \in \Sigma$ tal que

$$d(\sigma^n(\theta), \sigma^n(\theta')) < \delta,\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Suponha que $\theta \neq \theta'$, então existe $m > 0$ tal que $\theta_m \neq \theta'_m$, logo

$$1 \leq d(\sigma^{-m}(\theta), \sigma^{-m}(\theta'))$$

o que é uma contradição.

4) É suficiente observar que

$$W^s(\alpha) = \{\theta \in \Sigma : \theta_i = \alpha_i, \forall i \geq k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$$

e

$$W^u(\alpha) = \{\theta \in \Sigma : \theta_i = \alpha_i, \forall i \leq k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$$

pois, seja $B_N = \{\theta \in \Sigma : \theta_i = \alpha_i, \text{para } |i| \leq N\}$ o aberto básico para algum $N \in \mathbb{N}$, então $W^s(\alpha) \cap B_N \neq \emptyset$.

□

4.2.2 Ferradura de Smale

Consideremos um difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que age no quadrado unitário Q como passamos a descrever. Primeiro contrai linearmente o quadrado na direção horizontal por um fator $\delta < \frac{1}{2}$ e expande-o na direção vertical por um fator >2 obtemos um retângulo que é dobrado na forma de $\bigcap$ ("ferradura") e colocado sobre o quadrado original Q como mostra a figura 4.1.

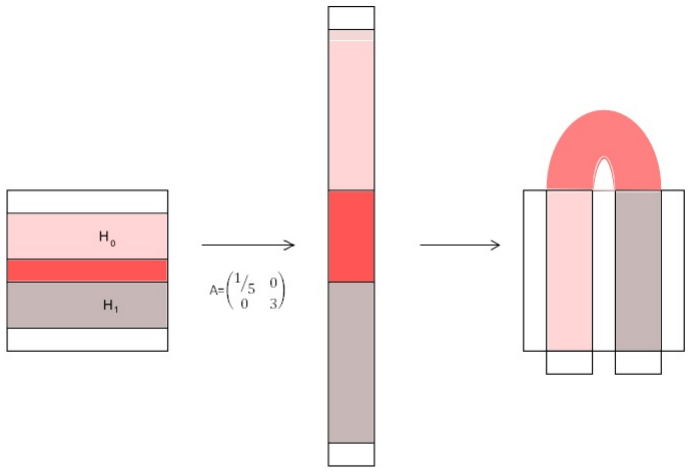

Figura 4.1: ferradura de Smale

Agora consideremos o seguente conjunto $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(Q)$. Nos estamos interessados em estudar a dinâmica de f neste conjunto.

Proposição 4.4: *Λ é um conjunto hiperbólico.*

Demonstração. Segue imediato que Λ é compacto e invariante por f. Por outro lado segue-se o seguinte gráfico da forma como f age em Q.

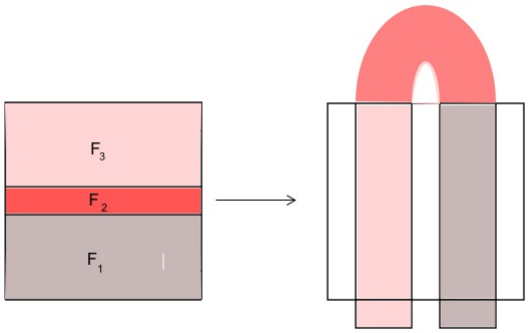

Figura 4.2:

Assim, temos o seguente:

. $\Lambda \cap F_2 = \emptyset$.

. $f|_{F_1}(x) = Ax + c$, (é uma transformação linear e uma translação).

. $f|_{F_3}(x) = -Ax + c$, (é uma transformação linear,uma rotação e uma translação).

Então, para qualquer $x \in F_1 \cup F_3$, escolha

$$E^s(x) = \langle (1,0) \rangle \text{ e } E^u(x) = \langle (0,1) \rangle$$

de onde segue que $\mathbb{R}^2 = E^s(x) \oplus E^u(x)$. Como $D(f|_{F_1})_x = A$ e $D(f|_{F_3})_x = -A$, então

$$D(f|_{F_1})_x(E^s(x)) = E^s(f(x)) \text{ e } D(f|_{F_1})_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$$

Se $v \in E^s(x)$ então $\|D(f|_{F_1})_x v\| = \dfrac{1}{5}\|v\|$ e se $v \in E^u(x)$ então $\|D(f|_{F_1})_x^{-1} v\| = \dfrac{1}{3}\|v\|$. O mesmo temos para $D(f|_{F_3})_x$ e $D(f|_{F_3})_x^{-1}$. Como $\Lambda \subset F_1 \cup F_3$, segue-se que Λ é um conjunto hiperbólico. □

O teorema seguinte mostra que este conjunto é um conjunto totalmente desconexo.

Teorema 4.5: $\Lambda = K_1 \times K_2$, *onde* K_1 *e* K_2 *são conjuntos de cantor em* $[0,1]$.

Demonstração. Pela forma como foi construído a função, temos que

· $Q \cap f(Q)$ =duas faixas verticais cada uma de largura $\frac{1}{5}$

· $f^{-1}(Q) \cap Q$ =duas faixas horizontais cada uma de altura $\frac{1}{3}$.

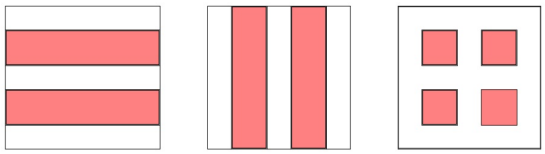

Figura 4.3: $f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q)$

Como $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = f(f(Q) \cap V_0) \cup f(f(Q) \cap V_1)$, então:

- $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = 4$ faixas verticais cada uma com largura $\frac{1}{5^2}$. E também temos
- $f^{-2}(Q) \cap f^{-1}(Q) \cap Q = 4$ faixas horizontais cada uma de altura $\frac{1}{3^2}$.

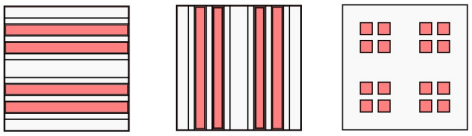

Figura 4.4: $\cap_{i=-2}^{2} f^{-i}(Q)$

Assim procedendo de forma indutiva se mostra que:

- $\bigcap_{i=0}^{n} f^i(Q) = 2^n$ faixas verticais com largura $\dfrac{1}{5^n}$, e cada faixa vertical contém exatamente 2 faixas do próximo. Então temos que

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(Q) = K_1 \times [0,1], \text{ onde } K_1 \text{ é um conjunto de Cantor em [0,1].}$$

De forma análoga segue-se
$\bigcap_{i=-n}^{0} f^i(Q) = 2^n$ faixas horizontais com altura $\dfrac{1}{3^n}$, e cada faixa horizontal contém exatamente 2 faixas do próximo. Então temos que

$$\bigcap_{i=\infty}^{0} f^i(Q) = [0,1] \times K_2, \text{ onde } K_2 \text{ é um conjunto de Cantor em [0,1].}$$

De onde se conclui o teorema.

□

Definamos a seguente aplicação $h : \Lambda \to \Sigma_2$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f^i(x) \in H_0 \\ 1 & \text{se } f^i(x) \in H_1 \end{cases}$$

onde $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e H_0, H_1 são como na figura 4.1.

Proposição 4.6: *h é uma conjugação topológica entre $f\mid_\Lambda$ e o shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$.*

Demonstração. **Afirmação 1:** $h \circ f\mid_\Lambda = \sigma \circ h$. De fato, consideremos um ponto $q \in \Lambda$, e ponhamos $\alpha = h(q)$ e $\theta = h(f(q))$. Deste modo, $f^{j+1}(q) \in H_{\alpha_{j+1}}$ e $f^{j+1}(q) = f^j(f(q)) \in H_{\theta_j}$. Assim $\alpha_{j+1} = \theta_j$ e, por tanto, $\sigma(\alpha) = \theta$, isto é, $\sigma(h(q)) = h(f(q))$.
Afirmação 2: h é continua. De fato, seja $q \in \Lambda$, $\alpha = h(q)$. Seja N fixo e consideremos

$$B = \{\theta : \theta_j = \alpha_j \text{ para } |j| < N\}$$

uma vizinhança de α. A continuidade f garante que existe $\delta > 0$ tal que para $p \in \Lambda$ com $\|p-q\| < \delta$, $f^j(p) \in H_{\alpha_j}$ para $j \in \{-N, \cdots, N\}$. Assim, se $\theta = h(p)$ e $\|p-q\| < \delta$ tem-se $\theta \in B$, o que prova a continuidade de h.
Afirmação 3: h é sobrejetiva. De fato, Seja $\alpha \in \Sigma_2$, vamos construir um elemento $q \in \Lambda$ tal que $h(q) = \alpha$. Vamos mostrar por indução que $\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{\alpha_{-j}})$ é uma faixa vertical de largura $\dfrac{1}{5^n}$, para todo $\alpha \in \Sigma_2$.
Para $n = 1$, $f(H_{\alpha_{-1}}) = V_{\alpha_{-1}}$ é uma faixa vertical de largura $\dfrac{1}{5}$. Vamos supor que é valido para $n-1$, como

$$\bigcap_{j=1}^{n} f^j(H_{\alpha_{-j}}) = f(\bigcap_{j=2}^{n} f^j(H_{\alpha_{-j}}) \cap f(H_{\alpha_{-1}})$$

Pela hipótese indutiva $\bigcap_{j=2}^n f^j(H_{\alpha_{-j}})$ é uma faixa vertical de largura $\dfrac{1}{5^{n-1}}$ e $f(H_{\alpha_{-1}})$ é uma faixa vertical de largura $\dfrac{1}{5}$, o que prova nossa afirmação. Assim, quando $n \to +\infty$, concluímos que $\bigcap_{j=1}^\infty f^j(H_{\alpha_{-j}})$ é um segmento de reta vertical.
De forma análoga mostra-se que $\bigcap_{j=-\infty}^0 f^j(H_{\alpha_{-j}})$ é um segmento de reta horizontal. Assim, o conjunto

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f^j(H_{\alpha_{-j}})$$

é formado apenas por um ponto q.
Afirmação 4: h é injetiva. De fato, suponhamos que $h(p) = h(q) = \alpha$. Para qualquer j, temos que $f^{-j}(p), f^{-j}(q) \in H_{\alpha_{-j}}$, pelo que $p, q \in f^j(H_{\alpha_{-j}})$. Como j é qualquer, resulta que $p, q \in \bigcap_{j=1}^\infty f^j(H_{\alpha_{-j}})$,e, portanto, p e q estão no mesmo segmento de reta vertical; da mesma forma, p, q estão na mesma reta horizontal. Assim, e porque o conjunto $\bigcap_{j=-\infty}^\infty f^j(H_{\alpha_{-j}})$ é um conjunto singular, concluímos que $p = q$.
Afirmação 5: h^{-1} é continua. De fato, isto segue imediatamente da afirmação 1 e do fato que Λ e Σ_2 são compactos e Hausdorff. □

$f\mid_\Lambda$ é chamado ferradura de Smale.

Teorema 4.7: *Seja* $f\mid_{\Lambda}: \Lambda \to \Lambda$ *a ferradura de Smale. Então*

i) $\overline{Per(f\mid_{\Lambda})} = \Lambda$.

ii) $f\mid_{\Lambda}$ *é topologicamente mixing.*

iii) $f\mid_{\Lambda}$ *é expansivo.*

iv) $W^s(x) \cap \Lambda$ *e* $W^u(x) \cap \Lambda$ *são densos em* Λ*, para todo* $x \in \Lambda$.

Demonstração. A prova segue-se imediatamente da Proposição 1.27 e Proposição 4.6.

□

Capítulo

5

Correntes e Difeomorfismos

R. Bowen [4], [5] mostra que se $f : M \to M$ é um difeomorfismo topologicamente mixing, então existe uma medida de Bowen μ em M; isto é, a única medida que máxima a entropia métrica de f. Neste capítulo nós apresentamos a prova deste resultado, para o qual relacionamos o difeomorfismo hiperbólico com o shifts de tipo finito usando partições de Markov. Mas o resultado principal deste capítulo é a apresentação o trabalho de Ruelle-Sullivan [19], eles mostram que a medida de Bowen pode ser expressado como o produto de duas medidas transversas invariantes para as folheações estáveis e instáveis(ver Teorema 5.8). Por último, mostramos que os difeomorfismos de Anosov topologicamente mixing, que preservam a orientação das folhas estáveis e folhas instáveis induzem elementos da cohomologia de DeRham(ver Teorema 5.9).

5.1 Medida de máxima entropia

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^r e Λ um conjunto hiperbólico com estrutura de produto local. Suponhamos que Λ possui uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$.

Definição 5.1: A matriz de transição A da partição de Markov $\mathcal{R}$ é uma matriz $m \times m$ definido como

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathrm{int}R_i \cap f^{-1}(\mathrm{int}R_j) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \mathrm{int}R_i \cap f^{-1}(\mathrm{int}R_j) = \emptyset \end{cases}$$

Assim podemos considerar $\Sigma_A = \{\theta \in \Sigma : A_{\theta_i\theta_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}$ o conjunto compacto e invariante pelo shift σ. Assim temos a seguinte proposição .

Proposição 5.2: *Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ uma partição de Markov de Λ. Então para todo $\theta \in \Sigma_A$ o conjunto*

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{\theta_j})$$

contém um único ponto de Λ *e a aplicação* $\pi : \Sigma_A \to \Lambda$ *definida como*

$$\pi(\theta) = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{\theta_j})$$

satisfaz:

i) π *é uma semi-conjugação de* σ *e* $f\,|_\Lambda$*; i.e.,*

a) π *é contínua e sobrejetiva.*

b) $f \circ \pi = \pi \circ \sigma$.

ii) π *é injetiva em* $\pi^{-1}(\Lambda \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R})$.

iii) Para toda medida $\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)$ *ergódica e positiva sobre abertos, temos*

$$\mu(\pi^{-1}(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R})) = 0.$$

iv) Se $f\,|_\Lambda$ *é topologicamente mixing, então* σ *é topologicamente mixing.*

Antes de fazer a prova da Proposição, mostraremos o seguinte Lema.

Lema 5.3: *Dado* $N \in \mathbb{N}$*, então o conjunto*

$$K_N(\theta) = \bigcap_{j=-N}^{N} f^{-j} R_{\theta_j}$$

é um retângulo fechado, para todo $\theta \in \Sigma_A$.

Demonstração. Suponhamos no primeiro lugar que $K_N(\theta) \neq \emptyset$, então mostraremos que $K_N(\theta)$ é um retângulo. Seja $x, y \in K_N(\theta)$, então $f^j(x), f^j(y) \in R_{\theta_j}$ para $|j| \leq N$, assim $w = [x, y] \in R_{\theta_0}$, $w \in W^s(x, R_{\theta_0})$ e $w \in W^u(y, R_{\theta_0})$, segue-se da Proposição 1.37 que

$$f(w) \in W^s(f(x), R_{\theta_1}) \text{ e } f^{-1}(w) \in W^u(f^{-1}(y), R_{\theta_{-1}})$$

pois $x \in R_{\theta_0} \cap f^{-1}(R_{\theta_1})$ e $f^{-1}(y) \in R_{\theta_{-1}} \cap f^{-1}(R_{\theta_0})$. Assim, de forma geral temos que

$$f^j(w) \in W^s(f^j(x), R_{\theta_j}) \text{ e } f^{-j}(w) \in W^u(f^{-j}(y), R_{\theta_{-j}}), \text{ para } 0 \leq j \leq N.$$

Observe-se que para aplicar a Proposição 1.37 faz uso que $\theta \in \Sigma_A$. De onde segue que $f^{-j}(w) \in R_{\theta_j}$ para $|j| \leq N$. Por tanto $w \in K_N(\theta)$. Agora mostraremos que $K_N(\theta) \neq \emptyset$, como

$$\begin{aligned} K_N(\theta) &= f^N R_{\theta_{-N}} \cap f^{N-1} R_{\theta_{-N+1}} \cap \cdots \cap f^{-N+1} R_{\theta_{N-1}} \cap f^{-N} R_{\theta_N} \\ &= f^N (R_{\theta_{-N}} \cap f^{-1} R_{\theta_{-N+1}} \cap \cdots \cap f^{-2N} R_{\theta_N}) \end{aligned}$$

então é suficiente demostrar que para todo $\alpha \in \Sigma_A$ e todo $n \geq 0$

$$R_{\alpha_0} \cap f^{-1} R_{\alpha_1} \cap \cdots \cap f^{-n} R_{\alpha_n} \neq \emptyset$$

isto provaremos por indução.
Para $n = 0 \Rightarrow R_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Suponhamos que $R_{\alpha_1} \cap f^{-1} R_{\alpha_2} \cap \cdots \cap f^{-n+1} R_{\alpha_n} \neq \emptyset$. Agora mostraremos que vale para n. Seja $y \in R_{\alpha_1} \cap f^{-1} R_{\alpha_2} \cap \cdots \cap f^{-n+1} R_{\alpha_n}$. Como

$$\alpha \in \Sigma_A \Rightarrow \mathrm{int} R_{\alpha_0} \cap f^{-1} \mathrm{int} R_{\alpha_1} \neq \emptyset \Rightarrow \exists f^{-1}(x) \in R_{\alpha_0} \cap f^{-1} R_{\alpha_1}$$

Seja $z = [y, x]$, então $z \in R_{\alpha_1}$ e $z \in W^s(y, R_{\alpha_1})$. Desde que $y \in R_{\alpha_1} \cap f^{-1} R_{\alpha_2}$ segue da Proposição 1.37 que

$$f W^s(y, R_{\alpha_1}) \subset W^s(f(y), R_{\alpha_2}) \Rightarrow f(z) \in W^s(f(y), R_{\alpha_2})$$

De forma análoga se prova que

$$f^2(z) \in W^s(f^2(y), R_{\alpha_3}), \cdots, f^{n-1}(z) \in W^s(f^{n-1}(y), R_{\alpha_n})$$

assim,

$$z \in R_{\alpha_1} \cap f^{-1} R_{\alpha_2} \cap \cdots \cap f^{-n+1} R_{\alpha_n}$$

Por outro lado, desde que $f^{-1}(x) \in R_{\alpha_0} \cap f^{-1} R_{\alpha_1}$, segue da Proposição 1.37 que

$$f W^u(f^{-1}, R_{\alpha_0}) \supset W^u(x, R_{\alpha_1})$$

então $f^{-1}(z) \in W^u(f^{-1}, R_{\alpha_0})$ pois $z \in W^u(x, R_{\alpha_1})$. Pelo tanto

$$f^{-1}(z) \in R_{\alpha_0} \cap f^{-1} R_{\alpha_1} \cap \cdots \cap f^{-n} R_{\alpha_n}$$

□

Demostração da Proposição 5.2. Para cada $N \in \mathbb{N}$ seja o conjunto $K_N(\theta) = \bigcap_{j=-N}^{N} f^{-j} R_{\theta_j}$, no lema anterior vimos que $K_N(\theta)$ é fechado não vazio em Λ. Como Λ é compacto, então $K_N(\theta)$ é compacto. Por construção temos

$$K_N(\theta) \supset K_{N+1}(\theta)$$

então

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f^{-j}R_{\theta_j} = \bigcap_{N=1}^{\infty} K_N(\theta) \neq \emptyset$$

o qual prova que existe $x \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}R_{\theta_j}$ e é único, pois se $x, y \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}R_{\theta_j}$ então $f^j(x), f^j(y) \in R_{\theta_j}$ $\forall j \in \mathbb{Z}$. Mas R_{θ_j} tem diâmetro menor que a constante de expansividade de f, resultando $x = y$. Agora provaremos os seguintes itens.

i) Provamos que π é uma semi-conjugação de σ e $f\mid_\Lambda$.

$$\pi(\sigma(\theta)) = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}R_{\theta_{j+1}} = f(\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j-1}R_{\theta_{j+1}}) = f(\pi(\theta))$$

então

$$\pi \circ \sigma(\theta) = f \circ \pi(\theta) \ \forall \theta \in \Sigma_A$$

pelo tanto é comutativo o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma_A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"] & \Sigma_A \arrow[d, "\pi"] \\ \Lambda \arrow[r, "f|_\Lambda"] & \Lambda \end{tikzcd}$$

Afirmação: π é continua. De fato, se $\theta^n \to \theta \in \Sigma_A$, chamando $\pi(\theta^n) = x_n \in \Lambda$ e como Λ é compacto $(x_n)_n$ admite uma subsequencia convergente, sem perda de generalidade vamos supor que $x_n \to x \in \Lambda$ e além disso

$$x_n = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}R_{\theta_j^n}$$

Como $\theta^n \to \theta$, dado $p > 0$ existe $N > 0$ tal que $\theta_j^n = \theta_j$ $\forall n > N$, $\forall |j| \leq p$. Logo para todo $n > N$ o ponto $x_n = \bigcap_{j=-p}^{p} f^{-j}R_{\theta_j}$. Como $\bigcap_{j=-p}^{p} f^{-j}R_{\theta_j}$ é fechado e $x_n \to x$. Então

$$x \in \bigcap_{j=-p}^{p} f^{-j}R_{\theta_j} \ \forall p > 0 \Rightarrow x \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}R_{\theta_j} = \pi(\theta)$$

Afirmação: π é sobrejetiva, pois, se $x \in \Lambda \backslash \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R}$ a orbita por x não corta ao bordo $\partial\mathcal{R}$. Então para cada j, seja $\theta_j(x)$ o único subíndice tal que $f^j(x) \in \mathrm{int}R_{\theta_j(x)}$. Assim

$$f^j(x) \in \mathrm{int}R_{\theta_j(x)} \cap f^{-1}\mathrm{int}R_{\theta_{j+1}(x)}$$

logo,

$$A_{\theta_j\theta_{j+1}} = 1 \Rightarrow \theta_j(x) \in \Sigma_A \Rightarrow x \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j} R_{\theta_j(x)}$$

Assim temos provado que $\Lambda \backslash \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R} \subset \pi(\Sigma_A)$. Por outro lado da Proposição 1.36 temos que $\Lambda \backslash \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R}$ é denso, e desde que $\pi(\Sigma_A)$ é fechado pois Σ_A é compacto, segue que

$$\pi(\Sigma_A) = \overline{\pi(\Sigma_A)} \supset \overline{\Lambda \backslash \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R}} = \Lambda.$$

ii) Sejam $\theta, \theta' \in \pi^{-1}(\Lambda \backslash \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R})$ tal que

$$x = \pi(\theta) = \pi(\theta') \in \Lambda \backslash \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R}$$

então $f^j(x) \in \mathrm{int}R_{\theta_j} \cap \mathrm{int}R_{\theta'_j}$ $\forall j \in \mathbb{Z}$, assim $\theta_j = \theta'_j$ $\forall j \in \mathbb{Z}$.

iii) Como

$$\pi^{-1}(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R}) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \pi^{-1} \circ f^{-j}\partial\mathcal{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \sigma^{-j} \circ \pi^{-1}\partial\mathcal{R}$$

e desde que μ é invariante por σ, então é suficiente mostrar que $\mu(\pi^{-1}\partial\mathcal{R}) = 0$. Como

$$\partial\mathcal{R} = \partial^s\mathcal{R} \cup \partial^u\mathcal{R} \Rightarrow \pi^{-1}(\partial\mathcal{R}) = \pi^{-1}(\partial^s\mathcal{R}) \cup \pi^{-1}(\partial^u\mathcal{R})$$

Afirmação: $\mu(\pi^{-1}(\partial^s\mathcal{R})) = 0$ e $\mu(\pi^{-1}(\partial^u\mathcal{R})) = 0$. De fato, observe que

$$\mu(\pi^{-1}(\partial^s\mathcal{R})) = \mu(\sigma\pi^{-1}(\partial^s\mathcal{R})) = \mu(\pi^{-1}f\partial^s\mathcal{R})$$

por outro lado

$$\sigma\pi^{-1}f\partial^s\mathcal{R} = \pi^{-1}f(f\partial^s\mathcal{R}) \subset \pi^{-1}f\partial^s\mathcal{R}$$

pois, da Proposição 1.38 temos que $f(\partial^s\mathcal{R}) \subset \partial^s\mathcal{R}$, logo como μ é ergódica, tem-se

$$\mu(\pi^{-1}f\partial^s\mathcal{R}) = 0 \text{ ou } 1.$$

Se $\mu(\pi^{-1}f\partial^s\mathcal{R}) = 1$, e como $f\partial^s\mathcal{R}$ é fechado $\Rightarrow \Sigma_A \backslash \pi^{-1}(f\partial^s\mathcal{R})$ é aberto, logo por hipótese temos $\mu(\Sigma_A \backslash \pi^{-1}(f\partial^s\mathcal{R})) > 0$ o qual é um absurdo.

iv) Sejam $U, V \subset \Sigma_A$ abertos não vazios, então tomando $\alpha \in U$ e $\beta \in V$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_1 = \{\theta \in \Sigma_A : \theta_j = \alpha_j \text{ para} |j| \leq N\} \subset U \text{ e}$$

$$V_1 = \{\theta \in \Sigma_A : \theta_j = \beta_j \text{ para} |j| \leq N\} \subset V$$

do Lema 5.3, temos que $K_N(\theta)$ é um retângulo fechado, então

$$\text{int} f^{-n} R_{\theta_j} = f^{-n} \text{int} R_{\theta_j}$$

assim

$$\emptyset \neq \text{int}(K_N(\alpha)) = \bigcap_{-N}^{N} f^{-j} \text{int} R_{\alpha_j} = U_2$$

$$\emptyset \neq \text{int}(K_N(\beta)) = \bigcap_{-N}^{N} f^{-j} \text{int} R_{\beta_j} = V_2$$

Afirmação: $\pi^{-1}(U_2) \subset U_1$ e $\pi^{-1}(V_2) \subset V_1$. De fato,

$$\theta \in \pi^{-1}(U_2) \Rightarrow x = \pi(\theta) \in U_2 \Rightarrow f^j(x) \in R_{\theta_j} \text{ e } f^j(x) \in \text{int} R_{\alpha_j}$$

logo, $\theta_j = \alpha_j$ para $|j| \leq N$. De forma análoga se mostra $\pi^{-1}(V_2) \subset V_1$.
Por outro lado, como f é topologicamente mixing existe m_0 tal que

$$f^m(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset \text{ para } m \geq m_0$$

usando a afirmação e a última linha segue que

$$\sigma^m(U) \cap V \supset \sigma^m \pi^{-1}(U_2) \cap \pi^{-1}(V_2) = \pi^{-1} f^m(U_2) \cap \pi^{-1}(V_2) = \pi^{-1}(f^m(U_2) \cap V_2) \neq \emptyset$$

para $m \geq m_0$.

□

Teorema 5.4 (R. Bowen)**:** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico com estrutura de produto local. Se $f|_\Lambda$ que é topologicamente mixing, então existem $\lambda > 0$ e uma única medida de probabilidade ρ em Λ invariante por f tais que*

$$h_{top}(f|_\Lambda) = h_\rho(f|_\Lambda) = \log \lambda$$

Demonstração. Desde $f\,|_\Lambda$ é transitivo segue-se do Teorema 1.34 que Λ possui uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ e da Proposição anterior temos que

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_A \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \Lambda & \xrightarrow{f|_\Lambda} & \Lambda \end{array}$$

o diagrama comuta. Por outro lado como $f\mid_\Lambda$ é topologicamente mixing segue da Proposição anterior e da Proposição 1.53 que A é Aperiódica. Logo, pelo Teorema Perron-Frobenius existe $\lambda > 0$ autovalor dominante de A, assim pelo Teorema de Parry, existe ν uma única medida de Markov que é ergódica e positiva em abertos de Σ_A tal que

$$h_\nu(\sigma) = \log \lambda = h_{top}(\sigma) \tag{5.1}$$

assim de (ii) e (iii) da Proposição anterior temos que π é bijectiva em um conjunto de medida total. Se consideramos $\rho = \pi_*\nu$ então ρ é uma medida de probabilidade em Λ invariante por $f|_\Lambda$, por tanto (σ, ν) e $(f\mid_\Lambda, \rho)$ são ergodicamente equivalentes e segue-se da Proposição 1.43 que

$$h_u(\sigma) = h_\rho(f\mid_\Lambda) \tag{5.2}$$

Por outro lado, desde que σ e $f|_\Lambda$ são semi-conjugados segue da Proposição 1.47 que

$$h_{top}(\sigma) \geq h_{top}(f|_\Lambda) \tag{5.3}$$

Assim, de (5.1), (5.2), (5.3) e o Principio Variacional conclui-se a Prova do Teorema. □

Exemplo 5.5: Do capítulo 4, temos que o Thom-Arnold map satisfaz com as hipótese do teorema anterior. Vamos construir uma partição de Markov para Thom-Arnold map. Se observa na figura 5.1 que temos uma partição de $\mathbb{T}^2$ em dois conjuntos R_1, R_2.

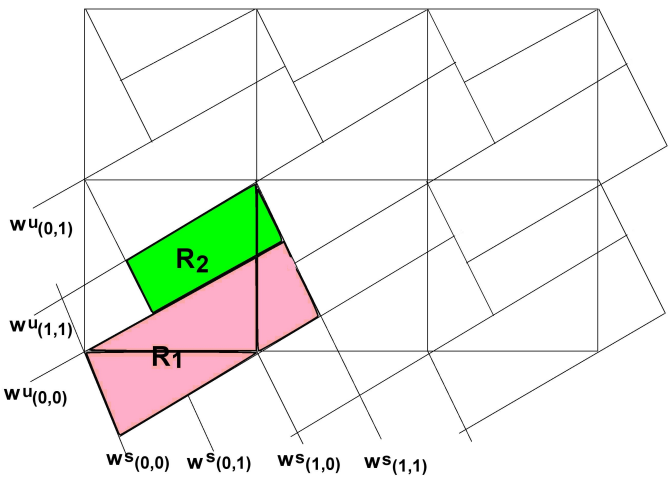

Figura 5.1: Partição de Thom-Arnold map em dois retângulos

A interseção de estos retângulos com seus imagens sobre f fornecem 5 retângulos(ver figura 5.2). Se observa que $\{R_1, R_2\}$, não pode ser considerado uma partição de Markov

para $\mathbb{T}^2$, pois $f(R_1)$ cruza mais de uma vez R_1. Logo o conjunto $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ forma uma partição de Markov.

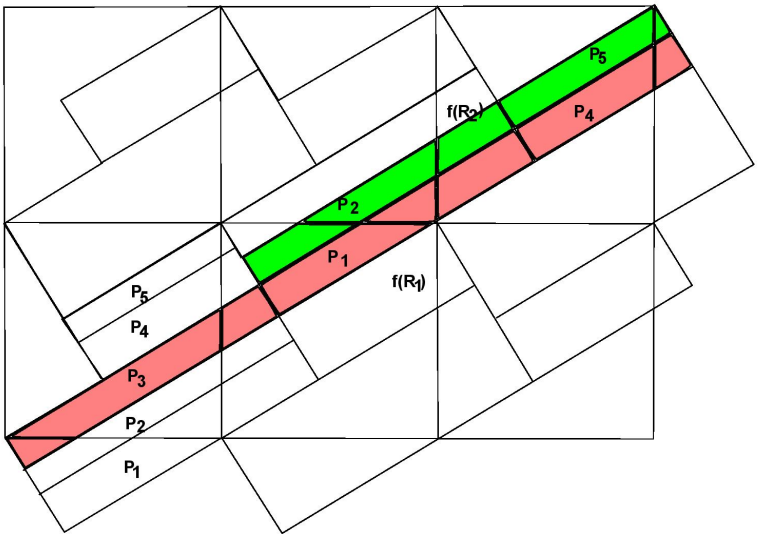

Figura 5.2: Imagem de R_1 e R_2

e temos que sua matriz de transição é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se observa que esta matriz é aperiódica. O autovalor dominante de A é $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, logo a entropia topologica de Thom-Arnold map é $\log \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Seja $u = (1, \lambda - 2, 1, 1, \lambda - 2)$ e $v = (1, 1, 1, \lambda - 2, \lambda - 2)$ o autovetor à esquerda e à direita respetivamente associado λ.

Da observação 1.56 temos que a matriz estocástica é

$$P = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5.6: A ferradura de Smale, também satisfaz com as hipótese do teorema anterior. Uma partição de Markov da Ferradura de Smale é dada por $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ como mostra a figura 5.3

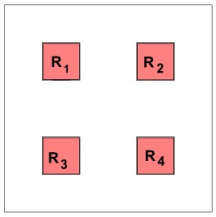

Figura 5.3: Partição de Markov da Ferradura de Smale

a matriz de transição é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que esta matriz é aperiódica. O autovalor dominante de A é $\lambda = 2$, logo a entropia topologica da ferradura de Smale é $\log 2$. Seja $u = (1,1,1,1)$ e $v = (1,1,1,1)$ o autovetor à esquerda e à direita respetivamente associado λ. Da observação 1.56 temos que a matriz estocástica é

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e o vetor de probabilidade é $p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

5.2 Medidas transversas e Sistemas dinâmicos

Sejam $x, x' \in \Lambda$ tal que $d(x, x') < \delta$ então podemos definir o homeomorfismo canônicos entre as partes de $W^s_\epsilon(x')$ e $W^s_\epsilon(x)$ denotado por $P^s_{x,x'}$ definido pela projeção ao longo das

variedades instáveis locais, isto é,

$$\begin{array}{rccc} P^s_{x,x'}: & W^s_\epsilon(x') & \longrightarrow & W^s_\epsilon(x) \\ & y & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

De forma análoga definimos o homeomorfismo $P^u_{x,x'}$ entre as partes de $W^u_\epsilon(x')$ e $W^u_\epsilon(x)$ definido pela projeção ao longo das variedades estáveis locais, esto é,

$$\begin{array}{rccc} P^u_{x,x'}: & W^u_\epsilon(x') & \longrightarrow & W^u_\epsilon(x) \\ & y & \mapsto & [y,x] \end{array}$$

Observação 5.7: Da observação 1.56 temos que a medida de Parry, da demostração do teorema anterior é dado por

$$\nu([k,\alpha_k,\cdots,\alpha_l]) = \lambda^{-(l-k)} u_{\alpha_k} A_{\alpha_k\alpha_{k+1}} \cdots A_{\alpha_{l-1}\alpha_l} v_{\alpha_l}$$

onde $[k,\alpha_k,\cdots,\alpha_l] = \{\theta \in \Sigma : \theta_k = \alpha_k, \cdots, \theta_l = \alpha_l\}$. Seja Σ^+_A(resp. Σ^-_A) definidos com Σ_A como $\mathbb{Z}$ trocando por $\mathbb{Z}^+$(resp. $\mathbb{Z}^-$). Definimos $\sigma^+ : \Sigma^+_A \to \Sigma^+_A$ e $\sigma^- : \Sigma^-_A \to \Sigma^-_A$ de forma obvia. Assim, temos que existem medidas ν^+ em Σ^+ e ν^- em Σ^- tal que para cada $k \geq 0$ tem-se

$$\cdot\ \nu^+(\{\theta \in \Sigma^+ : \theta_0 = \alpha_0, \cdots, \theta_k = \alpha_k\}) = \lambda^{-k} A_{\alpha_0\alpha_1} \cdots A_{\alpha_{k-1}\alpha_k} v_{\alpha_k}$$

$$\cdot\ \nu^-(\{\theta \in \Sigma^- : \theta_{-k} = \alpha_{-k}, \cdots, \theta_0 = \alpha_0\}) = \lambda^{-k} u_{\alpha_{-k}} A_{\alpha_{-k}\alpha_{-k+1}} \cdots A_{\alpha_{-1}\alpha_0}$$

Teorema 5.8 (D. Ruelle, D. Sullivan)**:** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico com estrutura de produto local. Se $f|_\Lambda$ é topologicamente mixing, então para cada $x \in \Lambda$ existe uma medida μ^s_x em $W^s_\epsilon(x)$ e uma medida μ^u_x em $W^u_\epsilon(x)$ tal que:*

i) $supp(\mu^s_x) \subset W^s_\epsilon(x) \cap \Lambda$, $supp(\mu^u_x) \subset W^u_\epsilon(x) \cap \Lambda$.

ii) Se $d(x,x') < \delta$, então

$$(P^s_{x,x'})_*(\mu^s_{x'} \mid_{W^s_\delta(x')\cap\Lambda}) = \mu^s_x \mid_{P^s_{x,x'}(W^s_\delta(x')\cap\Lambda)}$$

analogamente

$$(P^u_{x,x'})_*(\mu^u_{x'} \mid_{W^u_\delta(x')\cap\Lambda}) = \mu^u_x \mid_{P^u_{x,x'}(W^u_\delta(x')\cap\Lambda)}$$

iii)

$$(f_*^{-1}\mu^s_x - \lambda^{-1}\mu^s_{f^{-1}(x)}) \mid_{W^s_\epsilon(f^{-1}(x))} = 0$$

e

$$(f_*\mu^u_x - \lambda^{-1}\mu^u_{f(x)}) \mid_{W^u_\epsilon(f(x))} = 0$$

iv) Seja $[.,.] : (W^u_\epsilon(x) \cap \Lambda) \times (W^s_\epsilon(x) \cap \Lambda) \to \Lambda$ *definida por* $\{[y,z]\} = W^s_\epsilon(y) \cap W^u_\epsilon(z)$ *então*

$$[.,.]_*(\mu^u_x \times \mu^s_x) \mid_{(W^u_\epsilon(x) \times W^s_\epsilon(x)) \cap \Lambda} = \rho \mid_{(W^u_\epsilon(x) \times W^s_\epsilon(x)) \cap \Lambda}$$

onde ρ *é a medida de Bowen em* Λ.

Demonstração. Seja $y \in \Lambda$, como π é sobrejetiva existe $\alpha \in \Sigma_A$ tal que

$$y = \pi(\alpha) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^{-j} R_{\alpha_j}$$

definamos $\pi^+_{y,R_{\alpha_0}} : \{\theta \in \Sigma^+ : \theta_0 = \alpha_0\} \to W^u_\epsilon(y) \cap R_{\alpha_0}$ por

$$\pi^+_{y,R_{\alpha_0}}(\theta) = \pi(\cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \theta_1, \theta_2, \cdots)$$

Afirmação I: $\{\pi^+_{y,R_{\alpha_0}}(\theta)\} = W^u_\epsilon(y) \cap (\bigcap_{j \in \mathbb{Z}^+} f^{-j} R_{\theta_j})$. De fato, por definição temos

$$\{\pi^+_{y,R_{\alpha_0}}(\theta)\} \subset W^u_\epsilon(y) \cap (\bigcap_{j \in \mathbb{Z}^+} f^{-j} R_{\theta_j})$$

Reciprocamente, seja $z \in W^u_\epsilon(y) \cap (\bigcap_{j \in \mathbb{Z}^+} f^{-j} R_{\theta_j})$. Como

$$y = \pi(\alpha) \Rightarrow y \in R_{\alpha_0} \cap f(R_{\alpha_{-1}}) \Rightarrow f^{-1}(y) \in R_{\alpha_{-1}} \cap f^{-1}(R_{\alpha_0})$$

e pela Proposição 1.37 temos

$$fW^u(f^{-1}(y), R_{\alpha_{-1}}) \supset W^u(y, R_{\alpha_0}) \Rightarrow z \in fW^u(f^{-1}(y), R_{\alpha_{-1}}) \text{ e } f^{-1}(z) \in R_{\alpha_{-1}}$$

de forma análoga se prova que

$$f^{-1}(z) \in fW^u(f^{-2}(y), R_{\alpha_0}) \text{ e } f^{-2}(z) \in R_{\alpha_{-2}}$$

pois $f^{-2}(y) \in R_{\alpha_{-2}} \cap f^{-1}(R_{\alpha_{-1}})$. E em geral $f^{-j}(z) \in R_{\alpha_{-j}}$ para $j \geq 0$. Assim $\pi^+_{y,R_{\alpha_0}}(\theta) = z$ o que conclui a afirmação.

Agora definamos a seguinte medida em $W^u_\epsilon(y) \cap R_{\alpha_0}$

$$\mu^u_{y,R_{\alpha_0}} := (\pi^+_{y,R_{\alpha_0}})_* \nu^+ |_{\{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_0 = \alpha_0\}}$$

a medida $\mu^s_{y,R_{\alpha_0}}$ é definida semelhantemente em $W^s_\epsilon(y) \cap R_{\alpha_0}$.
Afirmação II: Dado $\theta \in \{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_0 = \alpha_0\}$ tem-se

$$f \circ \pi^+_{y,R_{\alpha_0}}(\theta) = \pi^+_{y^*(R_{\theta_1}),R_{\theta_1}} \circ \sigma^+(\theta)$$

para qualquer $y^*(R_{\theta_1}) \in R_{\theta_1} \cap f(W^u_\epsilon(y) \cap R_{\alpha_0})$. De fato,

$$\begin{aligned} f \circ \pi^+_{y,R_{\alpha_0}}(\theta) &= f \circ \pi(\cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \theta_1, \theta_2, \cdots) \\ &= \pi \circ \sigma(\cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \theta_1, \theta_2, \cdots) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Por outro lado, seja $y^* = y^*(R_{\theta_1}) \in R_{\theta_1} \cap f(W^u_\epsilon(y) \cap R_{\alpha_0})$ arbitrário, então existe $z \in W^u_\epsilon(y) \cap R_{\alpha_0} = W^u(y, R_{\alpha_0})$, desde que $y = \pi(\alpha) = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j} R_{\alpha_j}$ e fazendo as mesmas contas da prova da afirmação I, temos que

$$z \in \bigcap_{j\leq 0} f^{-j} R_{\alpha_j} \Rightarrow y^* = f(z) \in \bigcap_{j\leq 0} f^{-j+1} R_{\alpha_j}$$

Assim $y^* = \pi(\beta)$ com $\beta_0 = \theta_1$, $\beta_j = \alpha_{j+1}$ para $j \leq -1$. Logo por definição tem-se

$$\begin{aligned} \pi^+_{y^*,R_{\alpha_1}} \circ \sigma^+(\theta) &= \pi^+_{y^*,R_{\alpha_1}}(\theta_1, \theta_2, \cdots) \\ &= \pi(\cdots, \beta_{-3}, \beta_{-2}, \beta_{-1}, \beta_0, \theta_2, \theta_3, \cdots) \\ &= \pi(\cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \theta_1, \theta_2, \cdots) \end{aligned} \tag{5.5}$$

de (5.4) e (5.5) segue a afirmação.

Afirmação III: $(\sigma^+)_*\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma^+_A:\theta_0=\alpha_0,\theta_1=\alpha_1\}} = \lambda^{-1}\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma^+_A:\theta_0=\alpha_1\}}$.
De fato, é suficiente mostrar para cilindros

$$C = \{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_1 = \beta_1, \cdots, \theta_l = \beta_l\}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma^+_A:\theta_0=\alpha_1\}}(C) &= \lambda^{-1}\nu^+(\{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_0 = \alpha_1, \theta_1 = \beta_1, \cdots, \theta_l = \beta_l\}) \\ &= \lambda^{-1}\lambda^{-l} A_{\alpha_1\beta_1} A_{\beta_1\beta_2} \cdots A_{\beta_{l-1}\beta_l} v_{\beta_l} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Por outro lado, como $(\sigma^+)^{-1}(C) = \{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_2 = \beta_1, \cdots, \theta_{l+1} = \beta_l\}$, então

$$\begin{aligned} (\sigma^+)_*\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma^+_A:\theta_0=\alpha_0,\theta_1=\alpha_1\}}(C) &= \nu^+|_{\{\theta\in\Sigma^+_A:\theta_0=\alpha_0,\theta_1=\alpha_1\}}((\sigma^+)^{-1}(C)) \\ &= \nu^+(\{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_0 = \alpha_1, \theta_1 = \alpha_2, \theta_2 = \beta_1, \cdots, \theta_{l+1} = \beta_l\}) \\ &= \lambda^{-(l+1)} A_{\alpha_0\alpha_1} A_{\alpha_1\beta_1} A_{\beta_1\beta_2} \cdots A_{\beta_{l-1}\beta_l} v_{\beta_l} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Como $A_{\alpha_0\alpha_1} = 1$ pois $\alpha \in \Sigma_A$. Logo a afirmação segue de (5.6) e (5.7).
Afirmação IV: $f_*\mu^u_{y,R_{\alpha_0}} = \lambda^{-1} \sum_{\beta_1} A_{\alpha_0\beta_1} \mu^u_{y^*(R_{\beta_1}),R_{\beta_1}}$. De fato,

$$\begin{aligned} f_*\mu^u_{y,R_{\alpha_0}}(B) &= \mu^u_{y,R_{\alpha_0}}(f^{-1}(B)) \\ &= (\pi^+_{y,R_{\alpha_0}})_*\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma^+_A:\theta_0=\alpha_0\}}(f^{-1}B) \\ &= \nu^+|_{\{\theta\in\Sigma^+_A:\theta_0=\alpha_0\}}((\pi^+_{y,R_{\alpha_0}})f^{-1}(B)) \\ &= \sum_{\beta_1} \nu^+|_{\{\theta\in\Sigma^+_A:\theta_0=\alpha_0,\theta_1=\beta_1\}}(f \circ \pi^+_{y,R_{\alpha_0}})^{-1}(B) \end{aligned}$$

e das Afirmações (II) e (III), temos

$$\begin{aligned}
f_*\mu^u_{y,R_{\alpha_0}}(B) &= \sum_{\beta_1} \nu^+|_{\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0,\theta_1=\beta_1\}}(\pi^+_{y^*(R_{\beta_1}),R_{\beta_1}}\circ\sigma^+)^{-1}(B)\\
&= \sum_{\beta_1} \underbrace{\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0,\theta_1=\beta_1\}}(\sigma^+)^{-1}}\circ(\pi^+_{y^*(R_{\beta_1}),R_{\beta_1}})^{-1}(B)\\
&= \sum_{\beta_1,R_{\alpha_0}\cap f^{-1}R_{\beta_1}} \underbrace{\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\beta_1\}}(\pi^+_{y^*(R_{\beta_1}),R_{\beta_1}}\circ\sigma^+)^{-1}}(B)\\
&= \sum_{\beta_1} A_{\alpha_0\beta_1}\lambda^{-1}\mu^u_{y^*(R_{\beta_1}),R_{\beta_1}}(B)
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação. Para cada $x\in\Lambda$, definamos μ^u_x em $W^u_\epsilon(x)$ como segue: para cada $R\subset\Lambda$ retângulo da partição de markov $\mathcal{R}$ de Λ tal que $W^u_\epsilon(x)\cap R\neq\emptyset$ temos que

$$\mu^u_x|_{W^u_\epsilon(x)\cap R}=\mu^u_{y,R}$$

para qualquer $y\in W^u_\epsilon(x)\cap R$. Para que μ^u_x esteja bem definida precisamos mostrar que

a) Se $y'\in W^u_\epsilon(x)\cap R$, $y\neq y'\Rightarrow\mu^u_{y,R}=\mu^u_{y',R}$

b) Se $W^u_\epsilon(x)\cap R\cap R'\neq\emptyset\Rightarrow\mu^u_{y,R}=\mu^u_{y,R'}$ em $W^u_\epsilon(x)\cap R\cap R^{'}$ com $y\in R\cap R^{'}$

da Proposição 1.29 temos $W^u_\epsilon(y)\cap R=W^u_\epsilon(y')\cap R=W^u_\epsilon(x)\cap R$, se $y=\pi(\alpha)$ e fazendo as mesmas contas da prova da afirmação (I) temos que $f^{-j}y'\in R_{\alpha_{-j}}$ para $j\geq 0$ de onde segue que $\pi^+_{y',R}=\pi^+_{y,R}$ o qual prova (a). A parte (b) segue-se de $\mu^u_{y,R}(W^u_\epsilon(y)\cap\partial R\cap\partial R')=\mu^u_{y,R'}(W^u_\epsilon(y)\cap\partial R\cap\partial R')=0$, mas isto segue de (5.8). Agora mostraremos que estas medidas assim definidas satisfazem as condições do teorema:

ii) Para mostrar que

$$(P^u_{x,x'})_*(\mu^u_{x'}\ |_{W^u_\delta(x')\cap\Lambda})=\mu^u_x\ |_{P^u_{x,x'}(W^u_\delta(x')\cap\Lambda)}$$

pela forma como foi definido a medida só es preciso mostrar

$$(P^u_{y,y'})_*\mu^u_{y',R'}=\mu^u_{y,R}\text{ em }(W^u_\epsilon(y)\cap R)\cap P^u_{y,y'}(W^u_\epsilon(y')\cap R')$$

seja $y=\pi(\alpha)$ e $y'=\pi(\alpha')$; $R=R_{\alpha_0}$ e $R'=R_{\alpha'_0}$.

caso 1: Se $R=R^{'}$

$$\begin{tikzcd}
\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0\} \arrow[r, "\pi^+_{y',R}"] \arrow[dr, "\pi^+_{y,R}"'] & W^u_\epsilon(y')\cap R \arrow[d, "P^u_{y,y'}"] \\
& W^u_\epsilon(y)\cap R
\end{tikzcd}$$

Afirmação: $P^u_{y,y'} \circ \pi^+_{y',R} = \pi^+_{y,R}$. De fato,

$$\begin{aligned} P^u_{y,y'} \circ \pi^+_{y',R}(\theta) &= P^u_{y,y'}(\underbrace{\pi(\cdots, \alpha'_{-2}, \alpha'_{-1}, \alpha'_0, \theta_0, \theta_2, \cdots)}_{z}) \\ &= W^s_\epsilon(z) \cap W^u_\epsilon(y) = w \end{aligned}$$

Por outro lado, se $z' = \pi^+_{y,R}(\theta) \Rightarrow z' \in W^s_\epsilon(z) \cap W^u_\epsilon(y)$, pois, por definição $z' \in W^u_\epsilon(y)$. Como $z' = \pi^+_{y,R}(\theta) = \pi(\cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \theta_0, \theta_2, \cdots)$ e $z = \pi(\cdots, \alpha'_{-2}, \alpha'_{-1}, \alpha'_0, \theta_0, \theta_2, \cdots)$, então $f^j(z), f^j(z') \in R_{\theta_j}$ para $j \leq 0$, e desde que o diâmetro de R_{θ_j} é menor que ϵ segue que $z' \in W^s_\epsilon(z)$, logo $z' = w$ o qual prova a afirmação.

E segue imediatamente da afirmação o caso 1.

caso 2: Se $R \neq R'$

$$\begin{tikzcd} \{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_0 = \alpha'_0\} \arrow[r, "\pi^+_{y',R'}"] & W^u_\epsilon(y') \cap R' \arrow[d, "P^u_{y,y'}"] \\ \{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_0 = \alpha_0\} \arrow[r, "\pi^+_{y,R}"] & W^u_\epsilon(y) \cap R \end{tikzcd}$$

Seja Y^+ o conjunto de pontos de $\theta \in \Sigma^+_A$ tal que $\theta_0 = \alpha'_0$ e existe $\beta \in \Sigma^+_A$ tal que

a) $\beta_0 = \alpha_0$

b) $P^u_{y,y'} \circ \pi^+_{y',R'}(\theta) = \pi^+_{y,R}(\beta)$

c) $\theta_i \neq \beta_i \ \forall i \in \mathbb{Z}^+$

neste caso é suficiente mostrar que

$$\nu^+(Y^+) = 0 \tag{5.8}$$

$\nu^+(Y^+) = 0$ segue imediatamente se $\nu(Y) = 0$ onde Y é o conjunto de pontos $\theta \in \Sigma_A$ tal que $\theta_0 = \alpha'_0$ e existe $\beta \in \Sigma^+_A$ tal que

a) $\beta_0 = \alpha_0$

b) $P^u_{y,y'} \circ \pi(\theta) = \pi^+_{y,R}(\beta)$

c) $\theta_i \neq \beta_i \ \forall i \in \mathbb{Z}^+$

agora mostraremos que $\nu(Y) = 0$. Seja $z \in \pi(Y) \Rightarrow \exists \theta \in Y$ tal que $z = \pi(\theta)$, logo $\exists \beta \in \Sigma^+_A$ tal que $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \ \theta_k \neq \beta_k$, $f^k(z) \in R_{\theta_k}$ e $\lim_{k\to\infty} d(f^k z, R_{\beta_k}) = 0$ uniformemente em z, pois $P^u_{y,y'}(z) = \pi^+_{y,R}(\beta) \Rightarrow f^k(P^u_{y,y'}(z)) \in R_{\beta_k}$ $k \geq 0 \Rightarrow$ $d(f^k(z), R_{\beta_k}) \leq d(f^k(z), f^k(P^u_{y,y'}(z))) < \epsilon \ \forall k \geq 0$

Como $\rho = \pi_* \nu$ é invariante por f segue

$$\nu(Y) = \rho(\pi(Y)) = \lim \rho(f^k(\pi(Y))) \tag{5.9}$$

Afirmação: Para k suficientemente grande $f^k z \in \partial R_{\theta_k}$. De fato, vamos supor que $f^k z \notin \partial R_{\theta_k} \Rightarrow \in \text{int} R_{\theta_k} \Rightarrow \exists r > 0$ tal que $B(f^k z, r) \subset R_{\theta_k}$. Como $\lim_{k\to\infty} d(f^k z, R_{\beta_k}) = 0 \Rightarrow d(f^k z, R_{\beta_k}) < \dfrac{r}{2}$ para k suficientemente grande. Logo, para $\dfrac{r}{2}$, $\exists y \in R_{\beta_k}$ tal que $y \notin R_{\theta_k}$ e

$$d(f^k z, y) < d(f^k z, R_{\beta_k}) + \frac{r}{2}$$

assim, $y \in R_{\theta_k}$ o qual é uma contradição. Por tanto segue-se a afirmação.

Segue da afirmação que $f^k(\pi(Y)) \subset \partial\mathcal{R}$ para k suficientemente grande, e temos pela Proposição 5.2 que $\nu(\pi^{-1}(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}\partial\mathcal{R})) = 0$. Então de (5.9) segue-se que

$$\nu(Y) = \rho(\pi(Y)) = \lim \rho(f^k(\pi(Y))) = 0.$$

iii) Pela forma como foi definido a medida μ^u_x, temos que mostras que se R é um retângulo tal que $W^u_\epsilon(x) \cap R \neq \emptyset$ e se $y \in W^u_\epsilon(x) \cap R$ então

$$f_*\mu^u_{y,R} = \lambda^{-1} \sum_{R\cap f^{-1}R' \neq \emptyset} \mu^u_{y^*,R'}$$

com $y^* \in R' \cap f(W^u(y,R))$, mas isto já foi provado na Afirmação IV.

iv) Seja R um retângulo da partição de Markov $\mathcal{R}$ tal que $W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(x) \cap R \neq \emptyset$ e seja $y \in W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(x) \cap R$, temos que mostrar que

$$[,]_*(\mu^u_{y,R} \times \mu^s_{y,R}) = \rho \text{ em } R \cap (W^u_\epsilon(x) \times W^s_\epsilon(x))$$

Seja $y = \pi(\alpha)$ com $\alpha \in \Sigma_A$ e $R = R_{\alpha_0}$. Definamos a aplicação
$\Phi : \{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_0 = \alpha_0\} \times \{\theta \in \Sigma^-_A : \theta_0 = \alpha_0\} \to \{\theta \in \Sigma_A : \theta_0 = \alpha_0\}$ por

$$\Phi((\theta_0, \theta_1, \cdots) \times (\cdots, \theta_{-1}, \theta_0)) = (\cdots, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \cdots)$$

Afirmação: $\Phi_*(\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma^+_A:\theta_0=\alpha_0\}} \times \nu^-|_{\{\theta\in\Sigma^-_A:\theta_0=\alpha_0\}}) = \nu|_{\{\theta\in\Sigma_A:\theta_0=\alpha_0\}}$. De fato, é suficiente provar para cilindros. Seja o cilindro

$$B = \{\theta \in \Sigma_A : \theta_{-k} = \alpha_{-k}, \cdots, \theta_0 = \alpha_0, \cdots, \theta_l = \alpha_l\}$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(B) = \{\theta \in \Sigma^+_A : \theta_0 = \alpha_0, \cdots, \theta_l = \alpha_l\} \times \{\theta \in \Sigma^-_A : \theta_{-k} = \alpha_{-k}, \cdots, \theta_0 = \alpha_0\} \tag{5.10}$$

da Observacao 5.7 e (5.10) segue que

$$\Phi_*(\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0\}}\times\nu^-|_{\{\theta\in\Sigma_A^-:\theta_0=\alpha_0\}})(B)=\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0\}}\times\nu^-|_{\{\theta\in\Sigma_A^-:\theta_0=\alpha_0\}}(\Phi^{-1}(B))$$

$$\begin{aligned}
&= \nu^+(\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0,\cdots,\theta_l=\alpha_l\})\nu^-(\{\theta\in\Sigma_A^-:\theta_{-k}=\alpha_{-k},\cdots,\theta_0=\alpha_0\})\\
&= \lambda^{-l}A_{\alpha_0\alpha_1}\cdots A_{\alpha_{l-1}\alpha_l}v_{\alpha_l}\lambda^{-k}u_{\alpha_{-k}}A_{\alpha_{-k}\alpha_{-k+1}}\cdots A_{\alpha_1\alpha_0}\\
&= \lambda^{-(l+k)}u_{\alpha_{-k}}A_{\alpha_{-k}\alpha_{-k+1}}\cdots A_{\alpha_{l-1}\alpha_l}v_{\alpha_l}\\
&= \nu(B)
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação. Por outro lado, vemos que o seguente diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0\}\times\{\theta\in\Sigma_A^-:\theta_0=\alpha_0\} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi^+_{y,R_{\alpha_0}}\times\pi^-_{y,R_{\alpha_0}}"] & \{\theta\in\Sigma_A:\theta_0=\alpha_0\} \arrow[d, "\pi"] \\
(W^u_\epsilon(y)\cap R_{\alpha_0})\times(W^s_\epsilon(y)\cap R_{\alpha_0}) \arrow[r, "{[,]}"] & R_{\alpha_0}
\end{tikzcd}$$

i.e., $\pi\circ\Phi=[,]\circ(\pi^+_{y,R_{\alpha_0}}\times\pi^-_{y,R_{\alpha_0}})$. De fato,

$$\pi\circ\Phi(\theta_0,\theta_1,\cdots)\times(\cdots,\theta_{-1},\theta_0)=\pi(\cdots,\theta_{-1},\theta_0,\theta_1,\cdots) \tag{5.11}$$

Por outro lado

$[,]\circ(\pi^+_{y,R_{\alpha_0}}\times\pi^-_{y,R_{\alpha_0}})(\theta_0,\theta_1,\cdots)\times(\cdots,\theta_{-1},\theta_0)=$

$$\begin{aligned}
&= [,](\underbrace{\pi^+_{y,R_{\alpha_0}}(\theta_0,\theta_1,\cdots)}_{z_1}\times\underbrace{\pi^-_{y,R_{\alpha_0}}(\cdots,\theta_{-1},\theta_0)}_{z_2})\\
&= [z_1,z_2]=W^s_\epsilon(z_1)\cap W^u_\epsilon(z_2)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

se $w=\pi(\cdots,\theta_{-1},\theta_0,\theta_1,\cdots)\Rightarrow w\in W^s_\epsilon(z_1)\cap W^u_\epsilon(z_2)$, pois, $\pi(\cdots,\theta_{-1},\theta_0,\theta_1,\cdots)=\bigcap_{j\in\mathbb{Z}}f^{-j}R_{\theta_j}\Rightarrow f^j(w)\in R_{\theta_j}\ \forall j\in\mathbb{Z}$. Mas da Afirmação I, temos que $z_1=W^u_\epsilon\cap(\bigcap_{j\in\mathbb{Z}^+}f^{-j}R_{\theta_j})\Rightarrow f^j(z_1)\in R_{\theta_j}$ para $j\geq 0$. Então $f^j(w),f^j(z_1)\in R_{\theta_j}$ para $j\geq 0$ e desde que o diâmetro dos retângulos é menor que ϵ temos que $d(f^j(w),f^j(z_1))<\epsilon$ para $j\geq 0\Rightarrow w\in W^s_\epsilon(z_1)$. De forma análoga se prova que $w\in W^u_\epsilon(z_2)$. Como $W^s_\epsilon(z_1)$ e $W^u_\epsilon(z_2)$ se intersectam em um unico ponto segue que $w=W^s_\epsilon(z_1)\cap W^u_\epsilon(z_2)$. Assim de (5.11) e (5.12) segue que o diagrama comuta.

Da afirmação anterior e do fato que o diagrama anterior comuta segue-se que

$$\begin{aligned}
[,]_*(\mu^u_{y,R}\times\mu^s_{y,R})(B) &= (\mu^u_{y,R}\times\mu^s_{y,R})([,]^{-1}B)\\
&= (\pi^+_{y,R_{\alpha_0}})_*\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0\}}\times(\pi^+_{y,R_{\alpha_0}})_*\nu^-|_{\{\theta\in\Sigma_A^-:\theta_0=\alpha_0\}}([,]^{-1}B)\\
&= (\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0\}}\times\nu^-|_{\{\theta\in\Sigma_A^-:\theta_0=\alpha_0\}})(\pi^+_{y,R_{\alpha_0}}\times\pi^-_{y,R_{\alpha_0}})^{-1}\circ([,]^{-1}B)\\
&= (\nu^+|_{\{\theta\in\Sigma_A^+:\theta_0=\alpha_0\}}\times\nu^-|_{\{\theta\in\Sigma_A^-:\theta_0=\alpha_0\}})\Phi^{-1}\circ\pi^{-1}B\\
&= \nu(\pi^{-1}B)\\
&= \rho(B)
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do item (iv).

□

O seguente resultado relaciona as correntes e os sistemas dinâmicos. Este resultado é nosso segundo objetivo deste trabalho.

Teorema 5.9 (D. Ruelle, D. Sullivan)**:** *Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo de Anosov topologicamente mixing, preservando a orientação das folhas estáveis e folhas instáveis, então existem C^s k-corrente e C^u $(n-k)$-corrente tal que*

i) C^s e C^u são fechados e definem classes de cohomologia de DeRham $[C^s]$ e $[C^u]$ em $H^{n-k}(M)$ e $H^k(M)$ respectivamente, onde k é a dimensão das variedades estáveis e n é a dimensão da variedade M.

ii) $f_*C^s = \frac{1}{\lambda}C^s$ e $f_*C^u = \lambda C^u$ onde $\log\lambda$ é a entropia topológica de f.

Demonstração. Desde que $f : M \to M$ é topologicamente mixing, temos do Teorema anterior que para cada $x \in M$ existe uma medida μ^s_x em $W^s_\epsilon(x)$ e uma medida μ^u_x em $W^u_\epsilon(x)$. Denotemos por $\mathcal{W}^s$ a folheação gerada pelas variedades estáveis $W^s(x)$ e por $\mathcal{W}^u$ a folheação gerada pelas variedades instáveis $W^u(x)$, $x \in M$. Vamos supor que a dimensão da folheação $\mathcal{W}^s$ é k. Como M tem estrutura de produto local, temos que $W^s_\epsilon(x) \times W^u_\epsilon(x)$ é uma vizinhança aberta. Por tanto, se $x, x' \in M$ tal que $d(x, x') < \delta$ os homeomorfismos locais $P^u_{x,x'} : W^u_\epsilon(x') \to W^u_\epsilon(x)$ geram o pseudorgrupo de holonomia Γ de $\mathcal{W}^s$(ver definição 2.3). Logo pelo item (ii) do Teorema anterior, as medidas μ^u_x definem uma μ_s medida transversa invariante por holonomia, no espaço transverso de $\mathcal{W}^s$, assim pelo Teorema 3.30 temos que μ_s induz uma k-corrente que denotamos por C^s. De forma análoga se mostra a existência de C^u uma $(n-k)$-corrente. Agora mostraremos que as correntes C^s e C^u satisfazem as condições do teorema.

i) Pela Proposição 3.29 temos que C^s é fechado; i.e.,

$$[C^s] \in H^{DR}_k(M) \simeq H^{n-k}(M) \simeq (H^k)^*.$$

ii) Desde que $W^s_\epsilon(x) \times W^u_\epsilon(x)$ é um aberto, podemos escolher um conjunto finito de pontos $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ tal que $f(W^s_\epsilon(x_i) \times W^u_{\delta_1}(x_i)) = W^s_{\delta_2}(f(x_i)) \times W^u_\epsilon(f(x_i))$ e $\{\underbrace{W^s_\epsilon(x_i) \times W^u_{\delta_1}(x_i)}_{U_i}\}_{i=1}^m$, $\{\underbrace{W^s_{\delta_2}(f(x_i)) \times W^u_\epsilon(f(x_i))}_{U'_i}\}_{i=1}^m$ são coberturas de M. Seja $\{\lambda_i\}_i$ uma partição da unidade subordinada a $\{U'_i\}_i$, então $\{\beta_i = \lambda_i \circ f\}_i$ é uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_i$. Consideremos a seguente função g :

$W^u_\epsilon(f(x_i)) \to \mathbb{R}$ definido por

$$g(y) = \int_{W^s_{\delta_2}(z)} \lambda_i \omega$$

onde ω é uma k-forma em M. Desde que $f_* \mu^u_{x_i} = \lambda^{-1} \mu^u_{fx_i}$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{W^u_{\delta_1}(x_i)} (\underbrace{\int_{W^s_{\delta_2}(fy)} \lambda_i \omega}_{\int_{W^s_\epsilon(y)} f^*(\lambda_i \omega)}) d\mu^u_{x_i} &= \int_{W^u_{\delta_1}(x_i)} g \circ f(y) d\mu^u_{x_i} \\
&= \int_{W^u_\epsilon(f(x_i))} g(z) d(f_* \mu^u_{x_i})(z) \\
&= \lambda^{-1} \int_{W^u_\epsilon(f(x_i))} g(z) d\mu^u_{fx_i}(z) \\
&= \lambda^{-1} \int_{W^u_\epsilon(f(x_i))} (\int_{W^s_{\delta_2}(z)} \lambda_i \omega) d\mu^u_{fx_i}(z)
\end{aligned}$$

assim temos que

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_i \int_{W^u_{\delta_1}(x_i)} (\int_{W^s_\epsilon(y)} (\lambda_i \circ f) f^* \omega) d\mu^u_{x_i}(y)}_{\langle C^s, f^*(\omega) \rangle} &= \sum_i \underbrace{\int_{W^u_{\delta_1}(x_i)} (\int_{W^s_\epsilon(y)} f^*(\lambda_i \omega)) d\mu^u_{x_i}(y)} \\
&= \sum_i \lambda^{-1} \int_{W^u_\epsilon(f(x_i))} (\int_{W^s_{\delta_2}(z)} \lambda_i \omega) d\mu^u_{fx_i}(z) \\
&= \lambda^{-1} \underbrace{\sum_i \int_{W^u_\epsilon(f(x_i))} (\int_{W^s_{\delta_2}(z)} \lambda_i \omega) d\mu^u_{fx_i}(z)}_{\langle C^s, \omega \rangle}
\end{aligned}$$

logo, da definição 3.18 segue-se $f_* C^s = \lambda^{-1} C^s$. De forma análoga se mostra que $f_* C^u = \lambda C^u$.

$\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Seminormas que geram uma topologia

Um espaço vetorial topológico X é chamado localmente convexo, se existe uma base de vizinhanças $\{U_\alpha\}$ de 0 de conjuntos convexos, equilibrados($cx \in U$ se $x \in U$ e $|c| < 1$) e absorção(se $x \in X$ então existe $t > 0$ tal que $x \in tU$). Uma seminorma em um espaço vetorial X é uma aplicação $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $p(cx) = |c|p(x)$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in X$
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in X$

Uma família $\mathcal{P}$ de seminormas em X é chamado de separação, se para cada $x \in X$, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$. Seja dado uma tal família e seja B a coleção dos conjuntos da forma

$$\{x : p(x) < \epsilon \text{ e } \epsilon > 0\} \tag{A.1}$$

e da interseção de um numero finito de conjuntos de tais conjuntos. Então não é difícil provar que B é uma base de vizinhanças de 0 de um espaço vetorial topológico localmente convexo em X. Esta topologia é chamada topologia gerada pela seminormas pertencentes a $\mathcal{P}$. Reciprocamente, seja X um espaço vetorial topológico localmente convexo. Se U é uma vizinhança de 0 convexo, equilibrados e absorção, então

$$p_U(x) = \inf\{t > 0 : x \in tU\}$$

é chamado a funcional de Minkowski de U, é fácil mostrar que esto é uma seminorma e deduz-se que a topologia de X pode ser gerado pela família de estas seminormas.

Proposição A.1: *Seja X um espaço vetorial topológico localmente convexo, e seja $\mathcal{P}$ uma família de seminormas que geram a topologia de X. Então a semi-norma $q : X \to$*

$\mathbb{R}$ é continua se, e somente se, existem um numero finito de semi-normas $p_1, \cdots, p_N$ pertencentes a $\mathcal{P}$, e uma constante $C > 0$ tal que

$$q(x) \leq C \max\{p_1(x), \cdots, p_N(x)\}, x \in X \tag{A.2}$$

Demonstração. Se q é continua, então $q^{-1}(-1, 1)$ é uma vizinhança aberta de 0, e também contém uma interseção finita de conjuntos da forma $(A.1)$, e existem semi-normas $p_1, \cdots, p_N \in \mathcal{P}$, e números positivos $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_N$; tal que $q(y) < 1$ se $p_j(y) < \epsilon_j$ para $j = 1, \cdots, N$. Seja $x \in X$ qualquer, definimos $y = tx$, onde $t > 0$, então pode-se ver que

$$tq(x) < 1 \quad \text{se} \quad tp_j(x) < \epsilon_j, j = 1, \cdots, N \tag{A.3}$$

Se $\max\{p_1(x), \cdots, p_N(x)\} > 0$, tomando $t = \dfrac{1}{2} \min\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_N\} / \max\{p_1(x), \cdots, p_N(x)\}$ temos que $tp_j(x) < \epsilon_j$ para $j = 1, \cdots, N$, então de $(A.3)$ segue-se que $(A.2)$ é valido com $C = 2/\min\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_N\}$.
Se $p_j(x) = 0$, para todo $j = 1, \cdots, N$ então $tp_j(x) < \epsilon_j$, $\forall t > 0$. Logo, $q(x) = 0$ e $(A.2)$ é valido trivialmente, com o mesmo C.
Reciprocamente, é obvio que q é continua em 0 quando $(A.2)$ é verdadeiro. Por outro lado, desde que q é uma seminorma temos que

$$|q(x) - q(y)| \leq q(x - y) \quad x, y \in X$$

Assim a seminorma que é continua em 0 é continua em X. □

Como um corolário imediato desta proposição temos

Corolário A.2: *A topologia de X também é gerado pela família de todas as seminormas continuas.*

Proposição A.3: *Suponha que a família $\mathcal{P}$ de seminormas que geram a topologia de X tem a seguente propriedade. Se $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, então existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p_1(x) \leq p(x)$ e $p_2(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$. Então uma forma linear φ em X é continua se, e somente se, existe $p \in \mathcal{P}$ e uma constante $C > 0$ tal que*

$$|\langle \varphi, x \rangle| \leq Cp(x), x \in X \tag{A.4}$$

Demonstração. Como φ é contínua, temos que aplicação $x \to |\langle \varphi, x \rangle|$ é uma semi-norma contínua. Logo, pela Proposição $A.1$ temos que existem seminormas $p_1, \cdots, p_N \in \mathcal{P}$ e $C > 0$ tal que

$$q(x) \leq C \max\{p_1(x), \cdots, p_N(x)\}, \; x \in X$$

logo, pela propriedade que tem $\mathcal{P}$, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p_j(x) \leq p(x)$, para $j = 1, \cdots, N$ e $x \in X$. Por tanto segue-se $(A.4)$. O recíproco é imediato. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Bott, R.; Tu, L.; Diferential Forms in Algebraic Topology. Graduate Texts in Mathematics, No. 82. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York. (1991).

[2] Bowen, R.; Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes in Math. 470. Springer-Verlag 1975.

[3] Bowen, R.; Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc., 154:377?397, 1971.

[4] Bowen, R.; Topological Entropy and Axiom A. Proc. of Symp. on Pure Math. XIV (1968), 23-41.

[5] Bowen, R.; Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer. Journal of Math. 92 (1970), 907-918.

[6] Camacho, C.; Lins Neto, A.; Teoria geométrica das folheações. Projeto Euclides, IMPA. Rio de Janeiro, 1979.

[7] Candel, A. y Conlon, L. Foliations I. American Mathematical Society. EUA, 2000.

[8] DeRham, G.; Variétés différentiables. Formes, courantes, formes harmoniques. Herman. Paris, 1955.

[9] Garnett, L.; Foliations and mesuares harmonic along the leaves of a foliations and the ergodic theorem. Tesis, I.H.E.S. Bures-sûr-Yvette, 1980. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. (1969).

[10] Godbillon, C.; Feuilletages. Études géométriques. Birkhäuser verlag. Basel-Boston-Berlin, 1991.

[11] Guillemin, V.; Pollack, A.; Diferential Topology. Prentice-Hall, 1974.

[12] Katok, A.,Hasselblatt, B.; Intoduction to the modern theory of Dynamical Systems Cambridge Univ. Press, 1995.

[13] Lima, E.; Variedades Diferenciaveis, Monografias de Matemática #15, IMPA, 1973.

[14] Mañe, R.; Ergodic theory and differentiable dynamics. Springer Verlag, 1987.

[15] Meyer, C.; Matriz analysis and applied linear algebra. Society for Industrial and Applied Mathematics, (SIAM), 2000.

[16] Oliveira, K.; Viana, M.; Fundamentos da Teoria Ergodica. (Preprint).

[17] Plante, J. F.; Foliations with mesuare preserving holonomy, Ann. of Math. 102, 327-361, 1975.

[18] Robinson, C.; Dynamical Systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos, CRC Press, 1995.

[19] Ruelle, D.; Sullivan, D.; Currents, flows and diffeomorphisms, Topology 14, 319-324, 1975.

[20] Schwartzmann, S. Asymptotic cycles. Ann. of Math. 66 (1957), 270-284.

[21] Shub, M.; Global Stability of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1987.

[22] Spivak, M.; A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd ed.,Publish or Perish, Houston, 2005.

[23] Sullivan, D.; Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. Inv. Math., 36, 1976, pp. 225-255.