**SOBRE SEPARAÇÃO EM VARIEDADES POR
MERGULHOS E IMERSÕES**

José Roberto Nogueira

Orientador: Prof. Dr. Carlos Biasi.

Dissertação apresentada ao Instituto
de Ciências Matemáticas de São Carlos,
para obtenção do Título de Mestre em
Matemática.

São Carlos

1990

ABSTRACT.

This work studies the problem of separation in manifolds by using embeddings and immersions. It consists of 3 chapters and a appendix.

The first chapter contains the most important and useful mathematical concepts for the development of the work. In the second one we present separation theorems by embeddings, giving also a geometric idea of the problem. In the third and final chapter, we study and present the techniques used in the demonstration of a separation theorem by immersion. Such a theorem was stated by Mark E. Feighn in the article: "Separation Properties of Codimension-1 Immersion". Then in the appendix, some applications of the separation theorems are shown.

RESUMO

Este trabalho trata do problema de Separação em Variedades por Mergulhos e Imersões. Consiste de três capítulos e o apêndice.

O primeiro contém os conceitos matemáticos mais importantes e úteis para o desenvolvimento do trabalho. No segundo apresentamos teoremas sobre Separação por meio de mergulhos, dando também uma idéia geométrica do problema. No terceiro e último capítulo, estudamos e apresentamos as técnicas usadas na demonstração de um Teorema de Separação por imersões. Tal teorema foi enunciado por Mark E. Feighn em um artigo intitulado: "Separation Properties of Codimension-1 Immersions" [4]. Para finalizar, no apêndice são mostradas algumas aplicações dos teoremas de separação.

A SOCORRO E BRUNO, PELO AMOR
E PELO DIA A DIA.

AO MEU GRANDE PAI , MINHA LINDA MÃE
E A DEUS , POIS SEM ELES NADA DISSO
EXISTIRIA.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao brilhante matemático e meu orientador pela orientação segura.

Aos amigos que encontrei por estes caminhos da vida , os quais tanto me incentivaram e me ajudaram a galgar todos os obstáculos até aqui . Aos amigos da graduação , da pós-graduação e a todos com os quais convivi durante este breve espaço de tempo.

Ao meu grande amigo e mestre Prof. Hermes pelo apoio e incentivo durante a graduação.

Ao meu irmão Antonio Carlos pela ajuda nos trabalhos de datilografia . A todos os meus irmãos pelo grande apoio e incentivo que sempre me deram.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO I

1 - VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS	4
2 - VARIEDADES COM FRONTEIRA	7
3 - TRANSVERSALIDADE	9
4 - TEORIA DE INTERSECÇÃO MÓDULO 2	14
5 - FUNÇÕES DE MORSE	22
6 - HOMOLOGIA SINGULAR	26
7 - NÚMEROS DE BETTI E CARACTERÍSTICA DE EULER	28
8 - ORIENTAÇÃO EM VARIEDADES	29
9 - COHOMOLOGIA SINGULAR	31
10 - DUALIDADE	33

CAPÍTULO II

1 - SEPARAÇÃO	34
2 - TEOREMAS DE SEPARAÇÃO	35

CAPÍTULO III

1 - PRELIMINARES	48
2 - GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE SEPARAÇÃO	57

APÊNDICE	65
----------------	----

BIBLIOGRAFIA	67
--------------------	----

INTRODUÇÃO

Vamos iniciar o nosso trabalho motivado pelo seguinte resultado:

Teorema de Jordan-Brouwer: Seja Δ_{n-1} um subespaço de S^n (esfera) homeomorfo a S^{n-1} . Então $S^n - \Delta_{n-1}$ consiste de duas componentes conexas, ambas tendo Δ_{n-1} como fronteira.

GEOMETRICAMENTE:

FIGURA 1.

Num caso mais particular, quando $n = 2$, o teorema acima reduz-se ao famoso "Teorema da Curva de Jordan", o qual foi demonstrado por Camille Jordan em 1887.

Já por volta de 1910, L.E.J. Brouwer deu uma elegante demonstração do teorema de Jordan e, dois anos mais tarde, demonstrou o caso mais geral acima.

Vejamos a seguinte versão do teorema:

TEOREMA: Seja $f : M^{n-1} \longrightarrow N^n$, uma aplicação entre variedades, tal que:

- 1) M e N são fechadas e conexas,
- 2) f é mergulho.

Então $f(M)$ separa N em duas componentes conexas. ■

Esta versão generaliza um pouco mais o resultado anterior no sentido de que M e N são duas variedades quaisquer.

A pergunta que surge é a seguinte:

" Dada $f: M^{n-1} \longrightarrow N^n$ imersão entre variedades, será que $f(M)$ separa N ?".

A resposta a esta questão é o tema principal do nosso trabalho, onde apresentaremos o estudo de um artigo publicado em 1988 [Topology - Vol.27 (págs.319/321)], sob o título "Separation Properties of Codimension-1 Immersions ". Neste artigo é provado o seguinte teorema:

TEOREMA: Seja $f : M^{n-1} \longrightarrow N^n$ uma imersão própria de classe C^2 , onde M e N são variedades. Então, se $H_1(N; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$, $N - f(M)$ não é conexo. ■

Notamos, então, que sob certas condições a resposta a nossa questão é afirmativa.

O fato da função f ser de classe C^2 é essencial, pois demonstra-se que o teorema acima é falso na categoria das PL-imersões, através da apresentação de uma PL-imersão da esfera S^2

sobre a " Casa de duas salas " (fig.2), que não separa o $\mathbb{R}^3$.(ver [15]).

FIGURA 2.

A condição de f ser de classe C^2 , pode ser retirada desde que se tome f uma imersão com Normal Crossing .(ver [11]).

Nosso trabalho consiste de tres capítulos. No primeiro capítulo apresentamos os conceitos matemáticos necessários, de uma maneira bem rápida. No segundo capítulo apresentamos os teoremas de separação, dando também uma idéia geométrica do problema. No terceiro capítulo passamos ao estudo do artigo citado acima, mostrando as técnicas usadas pelo autor. Apresentamos também algumas aplicações dos teoremas de separação.

CAPÍTULO I

1 - VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

(1.1) DEFINIÇÃO: Dado M um espaço topológico, dizemos que M é uma variedade de dimensão n se M for localmente homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Em outras palavras existe uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de M tal que para cada $i \in I$, existe $\varphi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo sobre a imagem. ■

FIGURA 1.1.

OBSERVAÇÕES:

- 1) O par (φ_i, U_i) é chamado de carta
- 2) O conjunto $\Phi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ é chamado de atlas de M .

(1.2) DEFINIÇÃO: Dadas duas cartas (φ_i, U_i) e (φ_j, U_j) , elas serão chamadas de C^r -overlap se a mudança de coordenadas dada por :
 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ for de classe C^r em $\mathbb{R}^n$. ■

FIGURA 1.2.

(1.3) DEFINIÇÃO: Um atlas $\Phi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ de M é chamado de atlas C^r se todo par de cartas for C^r -overlap. ■

OBSERVAÇÃO: Podemos garantir que existe um único atlas maximal C^r denotado por Ψ que contém Φ . ■

(1.4) DEFINIÇÃO: Um atlas maximal α de classe C^r sobre M é chamado de C^r estrutura diferenciável. ■

(1.5) DEFINIÇÃO: O par (M, α) é chamado de variedade diferenciável de classe C^r ($r \geq 1$). ■

EXEMPLOS:

a) A esfera S^2 .

FIGURA 1.3

b) O Toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

FIGURA 1.4.

- c) $\mathbb{R}^n$: Espaço Real de dimensão n
- d) $\mathbb{RP}(n)$: Espaço Projetivo de dimensão n .
- e) "Garrafa de Klein ".

FIGURA 1.5.

2 -VARIEDADES COM FRONTEIRA

(2.1) DEFINIÇÃO: Chamaremos de semi-espço $H^n \subset \mathbb{R}^n$, ao conjunto : $H^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0 \}$ ■

FIGURA 2.1

OBSERVAÇÃO: A fronteira de H^n é um mergulho usual de $\mathbb{R}^{n-1}$ dada por $\partial H^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \}$. ■

(2.2) DEFINIÇÃO: Dado um espaço topológico M , M será uma variedade de dimensão n com fronteira se M for localmente homeomorfa a um aberto de H^n . A fronteira de M será denotada por ∂M . ■

FIGURA 2.2.

Como fizemos para as variedades diferenciáveis, podemos dar uma estrutura diferenciável em uma variedade com fronteira e assim, definirmos variedade diferenciável com fronteira.

Exemplo: D^2 : disco fechado . $\partial D^2 = S^1$

FIGURA 2.3.

3 - TRANSVERSALIDADE

(3.1) DEFINIÇÃO: Sejam M e N variedades diferenciáveis C^∞ , e $f: M \longrightarrow N$ de classe C^∞ . Seja $W \subset N$ subvariedade de N . Então:

a) Dado $x \in M$, f intercepta W transversalmente em x , e denotamos $f \pitchfork_x W$, se: $y = f(x) \notin W$ ou se $y = f(x) \in W$ for tal que, $T_y N = T_y W \oplus T_x f(T_x M)$. onde $T_y N$, $T_y W$, $T_x M$ são os espaços tangentes e $T_x f$ derivada de f em x .

b) Se $A \subset M$ então diremos que f intercepta W transversalmente em A , $f \pitchfork_x W$, se: $f \pitchfork_x W, \forall x \in A$.

c) Dizemos que f intercepta W transversalmente, $f \pitchfork W$, se $f \pitchfork_x W, \forall x \in M$. ■

EXEMPLOS:

a) Suponha $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R} \times \{0\} \subset N$.

Consideremos $f(t) = (t, t^2)$.

f é transversal a W , $\forall t \neq 0$, pois $f(M) \cap W = \emptyset$.

Se $t=0$ temos que:

$$T_0 f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\} = W = T_{(0,0)} W \quad \text{e} \quad T_0 f(\mathbb{R}) + T_{f(0)} W \subsetneq T_{(0,0)} \mathbb{R}^2.$$

Logo f não é transversal a W no ponto $t=0$.

FIGURA 3.1.

OBSERVAÇÃO: Notemos que uma leve perturbação de f , faz com que ela se torne transversal a W (FIG.3.2).

FIGURA 3.2.

b) Seja $M=\mathbb{R}$, $N=\mathbb{R}^3$ e $W = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$. Podemos notar que qualquer curva $f:M \longrightarrow N$ será transversal a W se e somente se $f(M) \cap W = \emptyset$.

Analogamente se f não for transversal a W em algum ponto não é difícil notar que f pode ser *levemente perturbada* , de tal maneira que resulte transversal em todos os pontos.

FIGURA 3.3.

(3.2) **DEFINIÇÃO:** Sejam $f : M^m \longrightarrow N^n$ e $g : Q^q \longrightarrow N^n$ duas aplicações entre variedades. Dizemos que f é transversal a g se e somente se a aplicação $F : M \times Q \longrightarrow N \times N$ dada por :

$$F(x, q) = (f(x) , g(q))$$

for transversal a diagonal $\Delta = \{ (z, w) \in N \times N \text{ tal que } z = w \}$. ■

Um teorema importante em topologia diferencial é o seguinte:

(3.3) **TEOREMA:** Sejam M, N variedades diferenciáveis e $W \subset N$ subvariedade. Se $f : M \longrightarrow N$ diferenciável tal que $f \pitchfork W$ então $f^{-1}(W)$ é uma subvariedade de M com $\text{codim}_M(f^{-1}(W)) = \text{codim}_N(W)$. ■

(3.4) **COROLÁRIO:** Sejam $f : M^m \longrightarrow N^n$ e $g : Q^q \longrightarrow N^n$ duas aplicações entre variedades . Se f for transversal a g , então temos que $F(x, q) = (f(x) , g(q))$ é transversal a Δ e portanto $F^{-1}(\Delta)$ é uma subvariedade de $M \times Q$ de dimensão $m + q - n$. ■

(3.5) **DEFINIÇÃO:** Dada $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação entre variedades, onde M é uma variedade com fronteira definiremos como sendo ∂f a restrição de f a fronteira de M . Em outras palavras temos que $\partial f = f|_{\partial M}$.

(3.6) **TEOREMA DA TRANSVERSALIDADE:** Suponha $F : X \times S \longrightarrow Y$ diferenciável e seja $Z \subset Y$ subvariedade sem fronteira. Suponhamos que X seja variedade com fronteira. Se F e ∂F são transversais a Z então para quase todo $s \in S$, $f_s (\equiv F|_{X \times \{s\}})$ e ∂f_s são transversais a Z . ■

(3.7) **TEOREMA DE TRANVERSALIDADE DE HOMOTOPIA:** Seja $f: X \longrightarrow Y$ diferenciável com $Z \subset Y$ subvariedade sem fronteira, onde Y é uma variedade sem fronteira e X variedade com fronteira. Então existe $g: X \longrightarrow Y$ uma aplicação homotópica a f tal que g transversal a Z e ∂g transversal a Z . ■

(3.8) **TEOREMA DE EXTENSÃO:** Suponhamos Z subvariedade fechada de Y e $C \subset X$ um conjunto fechado. Seja $f: X \longrightarrow Y$ diferenciável com f transversal a Z sobre C . Então existe uma função diferenciável $g: X \longrightarrow Y$ homotópica a f tal que g transversal a Z e sobre uma vizinhança de C temos $f = g$. ■

OBSERVAÇÃO: As demonstrações destes teoremas se encontram em [6]. ■

Considerando X com fronteira então ∂X é fechado em X . Assim do teorema acima temos:

(3.9) **COROLÁRIO:** Seja $f: X \longrightarrow Y$ tal que X seja uma variedade com fronteira. Se tivermos $\partial f: \partial X \longrightarrow Y$ transversal a Z , então existe $g: X \longrightarrow Y$ homotópica a f tal que g é transversal a Z e $\partial f = \partial g$. ■

4 - TEORIA DE INTERSECÇÃO MÓDULO 2.

Usando a noção de "Transversalidade", vamos definir aqui uma ferramenta matemática que nos permitirá entre outras coisas classificar funções entre variedades. Iniciemos com a seguinte definição:

(4.1) DEFINIÇÃO: Duas subvariedades X e Z de uma variedade Y , são ditas de dimensão complementar se $\dim X + \dim Z = \dim Y$. ■

(4.2) DEFINIÇÃO: Dizemos que $X \pitchfork Z$ se a função inclusão for transversal á Z , onde $i : X \longrightarrow Y$. ■

Podemos mostrar que $X \pitchfork Z$ então $X \cap Z$ é uma subvariedade de Y tal que $\text{codim}_Y(X \cap Z) = \text{codim}_Y X + \text{codim}_Y Z$. Assim se X e Z tem dimensões complementares, isto implica que a dimensão de $X \cap Z$ é igual a zero, ou seja $X \cap Z$ é uma variedade de dimensão zero.

Consideremos agora a seguinte situação, em que uma das subvariedades, digamos X , seja compacta e que ambas sejam fechadas, no sentido de conjunto fechado topológico. Nestas condições temos que $X \cap Z$ é um conjunto finito de pontos. Podemos falar então em número de intersecção entre X e Z , ou seja, podemos calcular a cardinalidade de $X \cap Z$.

$$\#(X \cap Z) = 4.$$

FIGURA 4.1.

A pergunta que surge é a seguinte: Será que podemos generalizar esta discussão e definirmos "número de intersecção" de uma subvariedade compacta com uma subvariedade fechada arbitrária de dimensão complementar ?

Inicialmente notemos que a hipótese de transversalidade é muito importante, pois sem ela a intersecção $X \cap Z$ poderia ser apenas um amontoado de pontos

FIGURA 4.2.

Vimos no parágrafo 3 que se uma função f não for transversal a uma variedade W , podemos "perturbar" a função de maneira a torna-la transversal a W . Aqui do mesmo modo, se X "não for transversal à Z ", podemos deformar um pouco X de maneira que $X \pitchfork Z$. Dada duas variedades quaisquer poderíamos definir "Número de Intersecção" como sendo o número obtido depois de feita a deformação de X . Porém um problema que surge é que diferentes deformações de X poderiam produzir diferentes números de intersecção.

Como podemos notar na fig.(4.2), as diferentes deformações de X podem alterar o seu número de intersecção com Z mas podemos perceber também que os diferentes números que aparecem são todos pares, ou seja são todos congruentes módulo 2.

Consideremos agora a seguinte situação mais geral:

Suponhamos X uma variedade compacta e $f: X \longrightarrow Y$ uma aplicação diferenciável com $f \pitchfork Z$, onde Z é uma subvariedade fechada de Y tal que $\dim X + \dim Z = \dim Y$. Nestas condições podemos mostrar que $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X de dimensão zero, portanto um conjunto finito de pontos, já que X é compacta.

(4.3) DEFINIÇÃO: Definimos número de intersecção de f com Z módulo 2, denotamos por $I_2(f, Z)$, como sendo $\#f^{-1}(Z) \bmod 2$. ■

OBSERVAÇÃO: Se $g: X \longrightarrow Y$ for uma função arbitrária, então para encontrarmos $I_2(g, Z)$, basta procedermos da seguinte maneira: selecionamos uma função f homotópica a g , com $f \pitchfork Z$ (Teorema 3.4) e definimos $I_2(g, Z) = I_2(f, Z)$. O próximo

teorema nos garante que $I_2(g, Z)$ está bem definida, pois não depende da escolha de f .

(4.4) TEOREMA: Se f e f são duas funções homotópicas de X sobre Y e ambas transversais a Z então vale que:

$$I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z). \blacksquare$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $F : X \times I \longrightarrow Y$ homotopia entre f_0 e f_1 . Pelo Teorema (3.5) podemos assumir que $F \pitchfork Z$, pois $\partial(X \times I) = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$ e ∂F nada mais é que $f / X \times \{0\}$ unido com $f_1 / X \times \{1\}$ e portanto temos que $\partial F \pitchfork Z$ (Corolário 3.6). Portanto, se F for transversal a Z , $F^{-1}(Z) \subset X \times I$ é uma subvariedade com fronteira dada por:

$$\partial [F^{-1}(Z)] = F^{-1}(Z) \cap \partial(X \times I) = f^{-1}(Z) \times \{0\} \cup f^{-1}(Z) \times \{1\}.$$

Sendo X e Z de dimensões complementares, $F^{-1}(Z)$ é uma variedade compacta com fronteira de dimensão 1. Logo implica que $\# \partial F^{-1}(Z)$ é par. Segue que $\# f_0^{-1}(Z) \equiv \# f_1^{-1}(Z) \pmod{2}$. $\blacksquare$

(4.5) COROLÁRIO: Sendo homotopia uma relação de equivalência, então dadas $f \cong g$, vale $I_2(f, Z) = I_2(g, Z)$. $\blacksquare$

Para definirmos então Número de Intersecção módulo 2 entre duas subvariedades X e Z de Y , de dimensão complementar, basta considerar $i : X \longrightarrow Y$ a inclusão e calcular $I_2(i, Z)$. Portanto se $X \pitchfork Z$ definimos como sendo $I_2(X, Z) = I_2(i, Z)$. É fácil notar que $I_2(X, Z)$ coincidirá com $\#(X \cap Z) \pmod{2}$

EXEMPLOS:

a) Considere $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e Z uma curva fechada simples em $\mathbb{R}^2$. Suponha que $X \not\subset Z$. Assim temos que $\#(X \cap Z) = 0 \pmod{2}$.

$$I_2(X, Z) = 0.$$

FIGURA 4.3.

b) Consideremos $Y = T^2 = S^1 \times S^1$ (Toro) e $X = S^1 \times \{1\}$ e $Z = \{1\} \times S^1$ (onde 1 é pensado como o n^o complexo).

$$I(X, Z) = 1.$$

FIGURA 4.4.

(4.6) **TEOREMA DA FRONTEIRA** : Suponhamos que X seja fronteira de uma variedade compacta W e que $g: X \longrightarrow Y$ possa ser estendida a W . Então $I_2(g, Z) = 0$ para qualquer subvariedade Z de Y de dimensão complementar. ■

Consideremos agora duas variedades X e Y de mesma dimensão com X compacta e Y conexa. Sabemos que se $y \in Y$ é um ponto regular de $f: X \longrightarrow Y$ então $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de X de dimensão zero com um número finito de pontos. Podemos calcular então $I_2(f, \{y\})$, que está bem definido. Vejamos o teorema:

(4.6) **TEOREMA**: Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação diferenciável de uma variedade compacta X sobre uma variedade fechada e conexa Y , com dimensão de X igual a dimensão de Y , então vale que $I_2(f, \{y\})$ é o mesmo para todo $y \in Y$. ■

OBSERVAÇÕES:

a) A este valor comum dito no teorema , damos o nome de grau módulo 2 de f e denotamos por $\deg_2(f)$.

b) Para calcular $\deg_2(f)$, basta então escolher y um valor regular de f e calcular $\#f^{-1}(y) \text{ mód. } 2$.

EXEMPLO:

Consideremos a seguinte função complexa, $f : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $f(z) = z^n$. Dado $y \in S^1$ um valor regular de f , temos que $f^{-1}(y) = \{ z_1, z_2, \dots, z_n \}$. Segue que $\deg_2(f) = n \text{ mód. } 2$. ■

Sendo $\deg_2(f)$ definido como sendo um número de intersecção, temos o seguinte teorema:

(4.7) TEOREMA: Funções homotópicas tem o mesmo grau módulo 2. ■

(4.8) TEOREMA: Se $X = \partial W$ e $f : X \longrightarrow Y$ pode ser estendida a todo W , então $\deg_2(f) = 0$. ■

APLICAÇÃO:

Consideremos $p: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ um polinômio complexo. Vamos utilizar o $\deg_2$ para investigar os zeros deste polinômio. Seja W uma região compacta no plano complexo (variedade de dimensão dois com fronteira). Poderíamos perguntar o seguinte: será que existe $z \in W$, tal que $p(z) = 0$?

Vamos assumir que p não tenha zeros sobre ∂W e assim consideremos a aplicação $\bar{p} : \partial W \longrightarrow S^1$ definida por:

$$\bar{p}(z) = \frac{p(z)}{\|p(z)\|}.$$

Agora $\bar{p}$ é uma função entre variedades de dimensão um. Logo se p não tem zeros no interior de W então $\bar{p}$ está bem definida para todo W . Concluimos daí que se $\deg_2(\bar{p}) \neq 0$ então p tem um zero no interior de W .

5 - FUNÇÕES DE MORSE

Faremos aqui neste parágrafo um rápido e breve estudo sobre Funções de Morse. Para maiores detalhes ver [10].

Consideremos $f:M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável com valores reais, onde M é uma variedade diferenciável de dimensão n .

(5.1) DEFINIÇÃO: Um ponto $p \in M$ é dito ponto crítico de f se $T_p f: T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ é a aplicação nula. Em outras palavras, se tomarmos um sistema de coordenadas locais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em uma vizinhança U de p (carta local) então isto quer dizer que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0. \blacksquare$$

(5.2) DEFINIÇÃO: O ponto $p \in M$ é ponto crítico não degenerado se e somente se a matriz :

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right]$$

é não singular. $\blacksquare$

Vamos construir aqui funções que tenham somente pontos críticos não degenerados.

Dado $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto fixado, seja a aplicação $L_p: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $L_p(q) = \|p - q\|^2$. Mostraremos que para quase todo $p \in \mathbb{R}^n$, L_p só tem pontos críticos não degenerados.

(5.3) DEFINIÇÃO: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão k ($k < n$) diferenciavelmente mergulhada em $\mathbb{R}^n$. Definimos como **FIBRADO NORMAL** DE M , denotamos por νM ao conjunto dado por :

$$\nu M = \{ (q, v) ; q \in M \text{ e } v \in \mathbb{R}^n \text{ com } v \perp M \}$$

OBSERVAÇÃO: Pode-se provar que νM é uma variedade diferenciável de dimensão n .

Consideremos agora a aplicação :

$$E : \nu M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$E(q, v) = q + v$$

FIGURA 5.1.

(5.4) DEFINIÇÃO: Um ponto $e \in \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto focal de M em q , com multiplicidade μ se $e = q + v$ onde $(q, v) \in \nu M$ e o Jacobiano de E ou $J(E)$ em (q, v) tem nulidade $\mu > 0$. ■

OBSERVAÇÃO: O ponto e é ponto focal se for valor crítico de E .

(5.5) TEOREMA DE SARD: Se M_1 e M_2 são variedades diferenciáveis com bases enumeráveis e de mesma dimensão e seja $f:M_1 \longrightarrow M_2$ de classe C^1 , então a imagem do conjunto dos pontos críticos tem medida nula em M_2 . ■

(5.6) COROLÁRIO - TEOREMA DE BROWN . O conjunto dos valores regulares de uma aplicação $f:M \longrightarrow N$ de classe C^∞ , é um conjunto denso de N .

EXEMPLO : Uma aplicação do Teorema de Sard.

Se $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é aplicação de classe C^1 e se y é um valor regular de f , então $f'(t) \neq 0$. A reta horizontal $\mathbb{R} \times \{y\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ não é tangente ao $\text{GRAF}(f)$.

FIGURA 5.2.

Através do Teorema de Brown podemos afirmar que o conjunto dos pontos regulares é denso e daí como consequência afirmar que *quase todas as retas horizontais não são tangentes ao* $\text{GRAF}(f)$.

(5.7) TEOREMA: Para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, o ponto x não é ponto focal de M . ■

DEMONSTRAÇÃO: Sendo νM é uma variedade de dimensão n e como $E : \nu M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 temos que $x \in \mathbb{R}^n$ é ponto focal se e somente se x é valor crítico de E . Daí pelo Teorema de Sard, $x \in E(\text{crit}(E))$ que é um conjunto de medida nula. Assim para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, x não é ponto focal de M . ■

Consideremos agora a seguinte função :

$$f = L_p : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L_p(q) = \| p - q \|^2$$

onde $p \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos $x : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ onde :

$$x(u_1, u_2, \dots, u_k) = (x_1(u_1, u_2, \dots, u_k), \dots, x_n(u_1, u_2, \dots, u_k))$$

Assim em coordenadas f será da forma:

$$f(x(u_1, u_2, \dots, u_k)) = \| x(u_1, u_2, \dots, u_k) - p \|^2 =$$

$$= \langle x, x \rangle - 2 \langle x, p \rangle + \langle p, p \rangle. \blacksquare$$

(5.8) LEMA: O ponto $q \in M$ é ponto crítico degenerado de $f = L_p$ se e somente se p é ponto focal de M em q . ■

Combinando este resultado com o Teorema de Brown nós temos imediatamente o teorema:

(5.9) TEOREMA : Para quase todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$ a função $L_p : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tem somente pontos críticos não degenerados. ■

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema de Broun vimos que para quase todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$, p não é ponto focal de M em q . Assim q é ponto crítico não degenerado de L_p . ■

(5.10) COROLÁRIO: Se M é uma variedade compacta então existe um campo de vetores $\bar{X}$ tal que a soma dos índices dos pontos críticos de $\bar{X}$ é igual a Característica de Euler de M denotada por $\chi(M)$. ■

6 - HOMOLOGIA SINGULAR.

Vamos citar neste parágrafo os resultados mais importantes sobre a Teoria de Homologia e apresentar também grupos de homologia de alguns espaços importantes.

$H_q(X; R)$ denotará o q -ésimo módulo de homologia com coeficientes em R , onde R é um módulo. Quando $R = \mathbb{Z}$, denotaremos apenas por $H_q(X)$.

EXEMPLOS:

$$a) H_q(\{p\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 0. \\ \{0\} & \text{se } q > 0. \end{cases}$$

b) Se M é um subconjunto convexo do $\mathbb{R}^n$, então temos que $H_q(M) = \{0\} \quad \forall q > 0$.

$$c) \quad H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = n \text{ ou } q = 0. \\ \{0\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$d) \quad H_q(\mathbb{CP}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q \in \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n\} \\ \{0\} & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

(6.1) PROPOSIÇÃO: Seja $\{X_k\}$ as componentes conexas por caminhos de um espaço X . Então existe um isomorfismo canônico:

$$H_q(X) \cong \bigoplus H_q(X_k) \quad \forall q \geq 0. \blacksquare$$

(6.2) PROPOSIÇÃO: $H_0(X)$ é um módulo livre gerado por tantos geradores quantas são as componentes conexas de X . ■

Segue que se X for conexo então $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

(6.3) DEFINIÇÃO: Dada $f: X \longrightarrow Y$ contínua existe uma aplicação induzida $f_*: H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$. ■

(6.4) TEOREMA: Se f e g são duas funções homotópicas então $\forall q \geq 0, f_* = g_*$. ■

(6.5) PROPOSIÇÃO: Se $f: X \longrightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia então a induzida em homologia $f_*: H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$ é um isomorfismo $\forall q \geq 0$. ■

Dado um par de espaços $(X;A)$, $A \subset X$, podemos falar também em homologia relativa do par (X,A) . Assim $H_q(X,A)$ representará o q -ésimo grupo de homologia de par (X,A) .

Um resultado importante é a existência de um homomorfismo de conexão entre $H_q(X,A)$ e $H_{q-1}(A)$ dando origem a uma sequência longa exata dada por:

$$\dots \longrightarrow H_q(A) \longrightarrow H_q(X) \longrightarrow H_q(X,A) \longrightarrow H_{q-1}(A) \longrightarrow \dots$$

Esta sequência é chamada de Sequência de homologia do par (X,A) .

7 - NÚMEROS DE BETTI E CARACTERÍSTICA DE EULER

(7.1) DEFINIÇÃO: A dimensão de $H_q(M)$ é chamada de q -ésimo NÚMERO DE BETTI β_q do espaço M quando esta dimensão é finita. ■

NOTAÇÃO: $\beta_q = \dim H_q(M)$.

(7.2) DEFINIÇÃO: A CARACTERÍSTICA DE EULER de uma variedade M , denotada por $\chi(M)$, é definida por:

$$\chi(M) = \sum (-1)^q \cdot \beta_q,$$

quando esta soma é finita. ■

EXEMPLOS:

a) Para S^n , $\beta_0 = \beta_n = 1$ e $\beta_q = 0$ se $q \neq 0$ e $q \neq n$. Assim

nós temos :

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ for ímpar.} \\ 2 & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

b) Para $\mathbb{RP}(n)$ (Espaço Projetivo Real) nós temos $\beta_0 = 1$ e $\beta_n = 1$ se n for ímpar e $\beta_q = 0$ caso contrário. Logo temos:

$$\chi(\mathbb{RP}(n)) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for par.} \\ 0 & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Podemos ainda definir Característica de Euler relativa a um par (X, A) . Prova-se também o seguinte lema:

(7.3) LEMA: Se $\chi(X, A)$ for bem definida, vale a seguinte relação $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X, A)$.■

8 - ORIENTAÇÃO EM VARIEDADES.

Consideremos $\mathbb{Z}$ o grupo cíclico infinito. Para cada $x \in M$, podemos mostrar que : $H_q(M; M-\{x\}) \cong H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-\{0\})$ é um grupo cíclico infinito para $q = n$ e é trivial $\{0\}$, se $q \neq n$.

(8.1) DEFINIÇÃO: Uma orientação local μ_x para M em x é uma escolha de um dos possíveis geradores de $H_n(M; M-\{x\})$.

Notemos que μ_x determina orientações locais μ_y para todos os pontos y em uma pequena vizinhança de x . Mais precisamente, se B é um entorno de x então para cada $y \in B$, o isomorfismo: $H_*(M; M - \{x\}) \cong H_*(M; M - B) \cong H_*(M; M - \{y\})$, determina uma orientação local μ

(8.2) DEFINIÇÃO: Uma orientação para uma variedade M é uma função que associa a cada $x \in M$ uma orientação local que varia continuamente com x , no seguinte sentido: Para cada $x \in M$, existe uma vizinhança compacta B e uma classe $\mu_B \in H_n(M; M - B)$ tal que $\rho_y(\mu_B) = \mu_y$, para cada $y \in B$. ■

OBSERVAÇÃO: Se $i : (M; M - B) \longrightarrow (M; M - \{x\})$ com $x \in B$, então ρ_x denota a induzida de i em homologia.

(8.3) TEOREMA: Para qualquer variedade orientada M e $K \subset M$ compacto, existe uma e somente uma classe $[K] \in H_n(M; M - K)$ tal que satisfaz $\rho_x([K]) = \mu_x$ para qualquer $x \in K$. ■

Se M for compacto temos a seguinte definição:

(8.4) DEFINIÇÃO: Se M é compacto existe uma e somente uma classe $[M] \in H_n(M)$ com a propriedade requerida. Esta classe é chamada de Classe Fundamental de Homologia em M . ■

(8.5) PROPOSIÇÃO: Seja M uma variedade compacta e conexa de dimensão n . Então vale que :

a) $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ se M for orientável.

b) $H_n(M) \cong \{0\}$ se M não for orientável. ■

EXEMPLOS:

- a) S^n é orientável , $\forall n > 1$.
- b) $RP(n)$, o Espaço Projetivo Real de dimensão n , não é orientável se n for par e é orientável se n for ímpar..
- c) O Toro T^2 é orientável
- d) A Faixa de Möebius , não é orientável.

OBSERVAÇÃO: Se o domínio dos coeficientes for $\mathbb{Z}_2$, pode-se definir a classe de homologia módulo 2 , $[K]_2$, independente da orientação de M . (ver [5] e [9]).

9 - COHOMOLOGIA SINGULAR.

Denotaremos por $H^q(M)$ o q -ésimo grupo de cohomologia de M e por $H^q(M;A)$ o q -ésimo grupo de cohomologia relativa do par $(M;A)$, onde $A \subset M$ é um subespaço.

A cohomologia tem as seguintes propriedades:

- (1) É contrafunctorial , isto é , se $f : M \longrightarrow N$ é uma função contínua então f induz um homomorfismo $f_*^q : H^q(N) \longrightarrow H^q(M)$.

- (2) O diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 H^q(A) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(M; A) \\
 \uparrow f_*^q & & \uparrow f_*^{q+1} \\
 H^q(B) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(N; B)
 \end{array}$$

- (3) Existe uma sequência longa exata de cohomologia:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & H^0(X; A) & \longrightarrow & H^0(X) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow H^q(X) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & H^q(A) \\
 & & & & & & \downarrow \delta \\
 & & & & & & H^{q+1}(X, A) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

- (4) É invariante por homotopia, ou seja f é homotópica a g então $f_*^q = g_*^q$.

- (5) Excisão: $U \subset A$ então $H^q(X, A)$ é isomorfo à $H^q(X-U, A-U)$.

- (6) Se $X = \{p\}$ então temos:

$$H^q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 0. \\ \{0\} & \text{se } q > 0. \end{cases}$$

EXEMPLOS:

$$\text{a) } H^q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 0 \text{ ou } q = n. \\ \{0\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$b) \quad H^q(\mathbb{CP}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q \text{ for par e } q \leq n. \\ \{0\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$c) \quad H^q(\mathbb{RP}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q \leq n. \\ \{0\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

10 - DUALIDADE.

Neste parágrafo M denotará um variedade diferenciável de dimensão n , compacta. Se M for $\mathbb{R}$ -orientada então fixaremos uma entre todas as $\mathbb{R}$ -orientações, digamos a $\mathbb{Z}$ -orientação. Caso M não seja orientada tomamos a $\mathbb{Z}_2$ -orientação que sempre existe. Com essas considerações, vamos enunciar os teoremas de dualidade.

As demonstrações destes teoremas se encontram em [5].

(10.1) **TEOREMA : DUALIDADE DE POINCARÉ.** Seja M uma variedade de dimensão n , fechada, orientada e conexa. Então existe um isomorfismo $D : H^q(M) \longrightarrow H_{n-q}(M)$, $\forall q$. ■

Se M não for orientada, temos o Teorema:

(10.2) **TEOREMA:** Se M é uma variedade de dimensão n , fechada e conexa então existe o isomorfismo:

$$D : H^q(M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_{n-q}(M; \mathbb{Z}_2). \blacksquare$$

(10.3) TEOREMA:DUALIDADE DE ALEXANDER. Seja M uma variedade compacta de dimensão n , orientada e $A \subset M$ uma subvariedade fechada. Então existe o isomorfismo:

$$D_A : H^q(A) \longrightarrow H_{n-q}(M ; M - A). \blacksquare$$

Podemos falar também em Dualidade de Alexander relativa, no seguinte sentido: seja (K,L) um par de subespaços compactos de uma variedade compacta M , então existe um isomorfismo:

$$H^q(K,L) \cong H_{n-q}(M - L; M - K) \blacksquare$$

CAPÍTULO II

1 - SEPARAÇÃO.

Dado um espaço X e um subespaço $A \subset X$, dizemos que o subespaço A separa X , se $X - A$ tem mais que uma componente conexa.

Tomemos por exemplo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e seja $A = \{0\}$. Podemos notar que $\mathbb{R} - A$ é a reunião de dois subconjuntos abertos e disjuntos, ou seja $\mathbb{R} - A$ tem duas componentes conexas, $C_1 = (-\infty, 0)$ e $C_2 = (0, +\infty)$

FIGURA 1.1.

Um outro exemplo seria considerarmos $\mathbb{R}^2$ e tomarmos A como sendo uma "curva" fechada. Podemos notar que $\mathbb{R}^2 - A$ tem mais que uma componente conexa.

FIGURA 1.2.

Este exemplo nada mais é que o resultado de uma famoso teorema chamado "Teorema da curva de Jordan".

Vamos apresentar aqui neste capítulo varios resultados neste sentido, os quais chamaremos de Teoremas de Separação.

FIGURA 1.3.

2 - TEOREMAS DE SEPARAÇÃO.

(2.1) TEOREMA DE JORDAN-BROUWER: Seja $\Delta_{n-1} \subset S^n$ uma subvariedade de S^n , tal que Δ_{n-1} é homeomorfa à esfera S^{n-1} . Então $S^n - \Delta_{n-1}$ é desconexo.

FIGURA 2.1.

Este teorema apresenta várias demonstrações interessantes. Uma bem elegante é a que usa os teoremas de dualidade da Teoria da Homologia. Vejamos tal demonstração.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1:

Consideremos a sequência exata do par (S^n, Δ_{n-1}) com coeficiente em $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow & H_n(\Delta_{n-1}; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_n(S^n; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_n(S^n; \Delta_{n-1}; \mathbb{Z}_2) & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & H_{n-1}(\Delta_{n-1}; \mathbb{Z}_2) & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & H_{n-1}(S^n; \mathbb{Z}_2) & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & \vdots & \end{array}$$

Temos que:

$$H_q(S^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se } q = n \\ 0, & \text{se } q \neq n \end{cases}$$

Como Δ_{n-1} é homeomorfa à S^{n-1} , então a sequência fica reduzida à:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow H_n(S^n; \Delta_{n-1}; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Logo, como a sequência é exata:

$$H_n(S^n; \Delta_{n-1}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Usando o teorema de Dualidade de Alexander, (10.3), temos:

$$H^0(S^{n-\Delta_{n-1}}; \mathbb{Z}_2) \simeq H_n(S^n; \Delta_{n-1}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Portanto, $S^n - \Delta_{n-1}$ tem duas componentes conexas. ■

Vejamos agora o teorema com o seguinte enunciado:

(2.2) TEOREMA: Seja M uma subvariedade compacta em $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$. Então $\mathbb{R}^n - M$ é desconexo.

DEMONSTRAÇÃO:

Consideremos a sequência exata do par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - M)$ no nível zero dada:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_1(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n - M; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_0(\mathbb{R}^n - M; \mathbb{Z}_2) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}_2) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

Sendo $H_1(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}_2) = \{ 0 \}$ e $H_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ a sequência fica dada por:

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n - M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_0(\mathbb{R}^n - M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 .$$

Pelo Teorema da Dualidade de Alexander (10.3) e o Teorema de Dualidade de Poincaré (10.2), temos:

$$H_1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n - M; \mathbb{Z}_2) \simeq H^{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) \simeq H_0(M; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 .$$

Daí, concluimos que:

$$H_0(\mathbb{R}^n - M; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 ,$$

e portanto, $\mathbb{R}^n - M$ tem duas componentes conexas. ■

Podemos enunciar este mesmo teorema generalizando no seguinte sentido: em vez de tomarmos $\mathbb{R}^n$, tomamos N variedade fechada e conexa de dimensão n .

O enunciado fica então da seguinte maneira:

(2.3) **TEOREMA:** Seja N variedade fechada e conexa de dimensão n e $M \subset N$ subvariedade fechada e conexa de dimensão $n-1$. Suponhamos $H_1(N; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$. Neste caso, $N - M$ tem duas componentes conexas. ■

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a sequência exata do par $(N, N-M)$ no nível zero. Assim temos a sequência :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_1(N; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_1(N, N-M; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_0(N-M; \mathbb{Z}_2) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H_0(N; \mathbb{Z}_2) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \{0\} \end{array}$$

Usando nossas hipóteses , temos que a sequência fica da seguinte forma:

$$\{0\} \longrightarrow H_1(N, N-M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_0(N-M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \{0\}$$

Mas pelos teoremas de dualidade temos que vale:

$$H_1(N, N-M; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_0(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

Portanto temos que :

$H_0(N-M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ e temos que $N - M$ tem duas componentes conexas. ■.

OBSERVAÇÕES:

a) O fato de $H(N; \mathbb{Z}) = \{0\}$ foi de grande importância na demonstração dos teoremas anteriores . Vejamos o que acontece se $H_1(N; \mathbb{Z}_2) \neq \{0\}$. Consideremos então $N = T^2$ (a superfície doToro).

Tomemos num primeiro momento um mergulho da esfera S^1 , de tal maneira que $f: S^1 \longrightarrow T^2$ leve S^1 sobre um meridiano $M \subset T^2$. Podemos notar que $f(S^1)$ não separa T^2 em duas componentes conexas (FIG.2.2). Num segundo momento tomemos f de tal maneira que leve S^1 sobre uma curva que seja homotópica a zero em T . Neste caso, temos que $f(S^1)$ separa T^2 em duas componentes conexas (FIG.2.3).

FIGURA 2.2.

FIGURA 2.3.

b) Pode-se mostrar que no caso da figura 2.3, S^1 separa T^2 em duas componentes conexas onde uma delas é homeomorfa à um disco aberto do $\mathbb{R}^2$ e a outra não .

Vamos demonstrar agora o teorema de separação, só que usando recursos da Topologia Diferencial.

(2.4) TEOREMA: Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma variedade fechada (compacta e sem bordo) e conexa com fibrado normal trivial. Então M separa o $\mathbb{R}^{n+1}$ em duas componentes conexas. ■

DEMONSTRAÇÃO: Seja V uma vizinhança tubular de M . Como M tem fibrado normal trivial então existe um difeomorfismo $\varphi: V \longrightarrow M \times (-1,1)$. Sendo M difeomorfo a $M \times \{0\}$ então podemos afirmar que $V - M$ tem duas componentes conexas. Chamemos de V_+ o conjunto $M \times (0,1)$ e de V_- o conjunto $M \times (-1,0)$. V_+ e V_- são as duas componentes de $V - M$.

Tomemos $a \in \mathbb{R}^{n+1} - M$ e consideremos os seguintes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} - M, \text{ tal que existe um caminho } \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ com } \alpha(0) = x, \alpha(1) = a \text{ e } \alpha(I) \cap M = \emptyset \}$.

$B = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} - M, \text{ tal que para todo caminho } \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ com } \alpha(0) = x, \alpha(1) = a \text{ e } \alpha(I) \cap M \neq \emptyset \}$.

Notemos que $B^c = A$.

(1) Afirmamos que se $V_+ \cap A \neq \emptyset$ então $V_+ \subset A$. Com efeito: Se existir $x \in V_+ \cap A$, tomemos $y \in V_+$ um ponto qualquer. Como $x \in A$,

existe um caminho $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = x$ com $\alpha(I) \cap M = \emptyset$, ou seja, não intercepta M . Sendo V_+ um conjunto conexo, existe um caminho $\beta : I \longrightarrow V_+$ ligando x à y . Tomando agora o caminho $\gamma = \alpha * \beta$ (caminho justaposto) que liga a à y temos que γ não intercepta M . Portanto $y \in A$.

FIGURA 2.4.

(2) Afirmamos que A é aberto, conexo e não vazio. Com efeito: $A \neq \emptyset$ pois $a \in A$. Tomemos $x \in A$ e $\delta = d(x, M)$ (δ é finito já que M é compacto). Seja U a bola aberta de centro em x e raio δ , em $\mathbb{R}^{n+1}$. Podemos notar que $U \subset A$, pois se $y \in U$, então y pode ser ligado à x , já que U é conexo. Sendo $x \in A$, existe um caminho α ligando x à a que não intercepta M . Daí tomando o caminho justaposto, concluímos que $y \in A$. Portanto $U \subset A$ e temos que A é aberto. Analogamente mostra-se que B é aberto.

FIGURA 2.5.

Mostremos que A é conexo. Para isso tomemos x e y em A . Logo existem dois caminhos α e β que ligam a a x e a a y respectivamente e de tal maneira que α e β não interceptam M . Considerando o caminho $\alpha^{-1} * \beta$ temos um caminho que não intercepta M e esta inteiramente contido em A e além disso liga x à y . Portanto A é conexo.

FIGURA 2.6.

(3) Afirmamos que B é conexo e não vazio. Com efeito, podemos mostrar que $V_- \cap A \neq \emptyset$, pois se existir $x_0 \in V_- \cap A$ então, sendo M com fibrado normal trivial, podemos considerar um segmento de reta γ perpendicular a M começando em x_0 e com ponto final em $x_1 \in V_+$. Como $V_+ \subset A$, existe um caminho α ligando x_1 a a que não intercepta M e, pelo fato de $x_0 \in A$, temos que existe um caminho β ligando a a x_0 que não intercepta M . Tomando o caminho $\lambda = \gamma * \alpha * \beta$, temos que λ é um caminho fechado que intercepta M em apenas um ponto. Deste modo, podemos afirmar que $I_2(\lambda; M) = 1$ (onde I_2 é o número de intersecção de λ com M módulo 2). Sendo λ homotópico a qualquer caminho fechado que não intercepta M , temos por outro lado que $I_2(\lambda; M) = 0$. Mas isto é absurdo, pois funções homotópicas têm o mesmo número de

Intersecção módulo 2. Daí temos que $V_- \cap A = \emptyset$ o que implica que $V_- \subset B$. Assim $B \neq \emptyset$.

FIGURA 2.7.

Consideremos agora dois pontos x_1 e x_2 pertencentes a B e sejam λ_1 e λ_2 segmentos de reta normais a M começando em x_1 e x_2 respectivamente e terminando em y_1 e y_2 , dois pontos quaisquer de V_- . Assim λ_i não intercepta V_+ para $i = 1, 2$. Sendo $V_- \subset B$ um conjunto conexo, consideremos α um caminho ligando y_1 a y_2 totalmente contido em V_- e tomemos sua composição com os caminhos λ_1 e λ_2 . Obtemos assim um caminho unindo x_1 a x_2 totalmente contido em B . Portanto B é conexo.

FIGURA 2.8.

Por (1) , (2) e (3) podemos concluir que A e B são conexos , abertos não triviais e complementares. ■

Vejamos agora um resultado interessante. Primeiramente vamos denotar por $[M]_2$ a classe fundamental de M mod. 2. Seja $i : M^{n-1} \longrightarrow N^n$ a inclusão e $i_* : H_{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_{n-1}(N; \mathbb{Z}_2)$ a sua induzida em homologia.

Enunciamos assim a seguinte proposição:

(2.5) PROPOSIÇÃO: Seja N variedade fechada e conexa de dimensão n e $M \subset N$ subvariedade fechada conexa de dimensão n-1. Se $i_*([M]_2) = 0$ então $N - M$ tem duas componentes conexas. ■

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos a sequência exata do par (N,M) com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ dada por:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(M; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_n(N; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_n(N; M; \mathbb{Z}_2) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H_{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) \\ & & & & & & \downarrow i_* = 0 \text{ mód. 2} \\ & & & & & & H_{n-1}(N; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Sendo $\dim M = n - 1$, $H_n(M; \mathbb{Z}_2) = \{ 0 \}$. Temos assim a sequência curta exata:

$$0 \longrightarrow H_n(N; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n(N; M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_*} 0$$

Como toda variedade possui $\mathbb{Z}_2$ -orientação então temos que:

$$\begin{cases} H_n(N; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \\ H_{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2. \end{cases}$$

Logo, $H_n(N; M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Usando o Teorema da Dualidade de Poincaré vemos que:

$$H^0(N-M; \mathbb{Z}_2) \cong H_n(N; M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Portanto, $N - M$ tem duas componentes conexas. ■

OBSERVAÇÃO: Notamos que neste resultado, foi importante o fato de $i_*([M]_2) = 0$.

Até aqui, nos teoremas e resultados apresentados, M foi tomada como subvariedade de uma variedade N ou então mergulhada em N . Ou seja, mais geralmente, mostramos que sob certas condições, dada $f : M^{n-1} \longrightarrow N^n$ mergulho, $f(M)$ separa N em duas componentes conexas.

Pergunta-se agora:

"Será que se $f: M^{n-1} \longrightarrow N^n$ for uma imersão, $f(M)$ separa N em duas componentes conexas?"

Iniciemos com algumas ilustrações:

a) $M = S^1$ e $N = T^2$.

FIGURA 2.9.

b) $M = S^1$ e $N = T^2$.

FIGURA 2.10.

c) $M = S^1$ e $N = \mathbb{R}^2$.

FIGURA 2.11.

Pelas ilustrações anteriores vimos que em alguns casos a resposta é afirmativa (ver também figuras 2.2 e 2.3 do parágrafo 2).

O seguinte teorema dá uma condição suficiente para uma resposta afirmativa a nossa questão. Este teorema foi enunciado e demonstrado por Mark E. Feighn .

(2.6) TEOREMA: Seja $f:M^{n-1} \longrightarrow N^n$ uma imersão própria de classe C^2 onde M e N são variedades. Se $H_1(N;\mathbb{Z}_2) = \{ 0 \}$ então $N - f(M)$ não é conexo. ■

Como foi citado na introdução o fato de f ser de classe C^2 é crucial, pois P-L categoria tal teorema é falso. (Ver [14]). Podemos retirar a hipótese C^2 , porém temos que acrescentar que f seja uma imersão com Normal Crossing. (Ver [11]).

No próximo capítulo passaremos ao estudo deste teorema fazendo antes a apresentação de alguns conceitos , definições e lemas preliminares .Gostaríamos de ressaltar que daremos a demonstração do teorema acima para o caso particular em que as variedades M e N são fechadas (compactas e sem bordo) que são as mais interessantes. Tal demonstração não difere muito do caso mais geral do teorema 2.6. Em seguida daremos uma idéia de como podemos retirar a hipótese de $H_1(N;\mathbb{Z}_2) = \{0\}$ e por fim daremos algumas aplicações dos teoremas de separação.

CAPÍTULO 3

1 - PRELIMINARES:

(1.1) DEFINIÇÃO: Dada $f: M \longrightarrow N$, dizemos que f é própria se a imagem inversa de compacto em N é um compacto em M . ■

(1.2) LEMA: Seja $f: M^{n-1} \longrightarrow N^n$ imersão própria e $y \in N$ e $f^{-1}(y) = \{ x_1, x_2, \dots, x_s \}$. Então existe uma vizinhança V de y e vizinhanças U_i de x_i , $1 \leq i \leq s$, tais que:

$$(a) U_i \cap U_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j;$$

$$(b) f|_{U_i} \text{ é mergulho, } \forall i;$$

$$(c) f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^s U_i. \blacksquare$$

DEMONSTRAÇÃO: Sendo $f: M^{n-1} \longrightarrow N^n$ imersão, então para cada $x_i \in f^{-1}(y)$ temos que $Tf_{x_i}: T_{x_i}M \longrightarrow T_yN$ é injetiva. Assim para cada x_i , $\exists W_i \ni x_i$ vizinhança de x_i em M e $V_i \ni y$ vizinhança de y em N tal que $f|_{W_i}: W_i \longrightarrow V_i \cap f(M)$ é difeomorfismo. Sendo M variedade diferenciável e de Hausdorff as vizinhanças W_i podem ser tomadas duas a duas disjuntas, ou seja, $W_i \cap W_j = \emptyset$, se $i \neq j$. Sendo $f|_{W_i}$ difeomorfismo então é mergulho. Tomando $V = \bigcup_{i=1}^s V_i$ temos $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^s W_i. \blacksquare$

FIGURA 1.1.

(1.3) DEFINIÇÃO: $CV(y) = \{ V, U_1, U_2, \dots, U_s \}$ é chamado de conjunto de vizinhanças padrão associados ao ponto y . ■

(1.4) DEFINIÇÃO: Dizemos que $x \in M$ está em um bom conjunto de f , denotamos por $G(f)$, se existir um conjunto de vizinhanças padrão associados a $f(x)$ de tal maneira que satisfaçam a seguinte condição adicional:

$$f(U_i) = f(U_j), \forall i, j \in \{ 1, 2, \dots, s \}. \blacksquare$$

FIGURA 1.2.

OBSERVAÇÃO: Na figura acima $x \in G(f)$, enquanto que $x_1, x_2 \notin G(f)$. ■

(1.5) LEMA: O conjunto $G(f)$ é aberto e denso em M se f for imersão própria. ■

DEMONSTRAÇÃO: Mostremos inicialmente que $G(f)$ é um conjunto aberto. Para isso seja $x \in G(f)$. Logo como f é imersão própria então existe um sistema de vizinhanças padrão associadas a $f(x)$ de tal maneira que satisfaz as condições dadas pelo Lema anterior e além disso seja válida a condição :

$$f(U_i) = f(U_j), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Consideremos como sendo U_1 o aberto que contém x . Mostremos que $U_1 \subset G(f)$. Seja $y \in U_1, y \neq x$. Como $f(U_1) = f(U_j)$ para todo $j = 2, 3, \dots, s$ então $f(y)$ pertence a $f(U_j)$ qualquer que seja j . Como $f(U_j)$ é um conjunto aberto temos existe uma vizinhança W_j contendo $f(y)$ totalmente contida em $f(U_j)$ para cada j de $1, 2, 3, \dots, s$. Assim $f^{-1}(W_j) = \bigcup_{j=1}^s A_j$ onde $A_j \subset U_j$ para j . Assim podemos concluir facilmente que $y \in G(f)$. Portanto $G(f)$ é um conjunto aberto.

Mostremos que $G(f)$ é um conjunto denso. Seja então a um ponto de M tal que $a \notin G(f)$. Assim consideremos um sistema de vizinhanças padrão associados a $b = f(a)$ dado por :

$$CV(b) = \{ V, U_1, U_2, \dots, U_r \}$$

tais que as seguintes condições são verificadas :

- (i) $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$
- (ii) f/U_i é um mergulho para $i=1, 2, \dots, r$

$$(iii) \quad f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^r U_i$$

Podemos supor que $a = a_1 \notin G(f)$ podemos afirmar que :

$V \cap f(M) = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_s$ onde $1 < s \leq r$ e os W_i s são distintos e $\bigcap_{i=1}^r W_i \neq \emptyset$ (Ver fig.1.3)

FIGURA 1.3

Consideremos agora :

$$f^{-1}(W_1) = Z_{11} \cup Z_{12} \cup \dots \cup Z_{1r_1}$$

$$f^{-1}(W_2) = Z_{21} \cup Z_{22} \cup \dots \cup Z_{2r_2}$$

$\vdots$

$$f^{-1}(W_s) = Z_{s1} \cup Z_{s2} \cup \dots \cup Z_{sr_s}$$

com $r_1 + r_2 + \dots + r_s = r$ e cada $Z_{ij} \in \{U_1, U_2, \dots, U_r\}$. Como os U_i s são dois a dois disjuntos então cada os Z_{ij} também o são.

Podemos supor sem perda de generalidade que $Z_{11} = U_1$ e que $a = a_1 \in Z_{11}$. Seja assim $c \in f(M)$ tal que $c \in W_1$ mas não esteja na intersecção $\cap W_i$. Como W_1 é aberto em $f(M)$ então existe $A_1 \subset W_1$ com $c \in A_1$ e $A_1 \cap (\cap W_i) = \emptyset$ ou seja A_1 não intercepta a intersecção dos W_i s. Assim temos que :

$$f^{-1}(A_1) = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{r_1}$$

onde cada $H_i \subset U_{1i}$ $i = 1, 2, \dots, r_1$. Como os Z_{1i}' s são dois a dois disjuntos temos que os conjuntos H_i' s também o são. Podemos afirmar então que $c_1 \in G(f)$, onde $c_1 \in f^{-1}(c) = \{c_1, c_2, \dots, c_{r_1}\}$.

Considerando então uma vizinhança qualquer de $a = a_1 \in U_1$ contida em U_1 , basta escolher então um ponto c nesta vizinhança tal que $f(c)$ esteja contido em $f(U_1)$ e não esteja na intersecção dos W_i' s e teremos que $c \in G(f)$. Logo temos que $G(f)$ é um conjunto denso em M . ■

Tomemos agora duas aplicações:

$$f: M^m \longrightarrow N^n$$

$$g: Q^1 \longrightarrow N^n,$$

onde $\partial Q \neq \emptyset$ e $\partial M = \partial N = \emptyset$.

Suponhamos que $f \pitchfork g$ e $f \pitchfork \partial g$, onde $\partial g = g|_{\partial Q}$. Vamos construir a seguinte aplicação:

$$F: M \times Q \longrightarrow N \times N \text{ dada por:}$$

$$F(x, q) = (f(x), g(q)).$$

Como $f \pitchfork g$ e $f \pitchfork \partial g$, temos (Cap. II, 3.3) que $F \pitchfork \Delta$ (diagonal de $N \times N$). Logo podemos afirmar que:

$$F^{-1}(\Delta) = \{ (x, q) \in M \times Q \mid f(x) = g(q) \}$$

é uma subvariedade de $M \times Q$ de dimensão $m + 1 - n$.

Temos ainda que fronteira de $F^{-1}(\Delta)$ é dada por:

$$\partial F^{-1}(\Delta) = F^{-1}(\Delta) \cap \partial(M \times Q) = \{ (x, q) \mid f(x) = \partial g(q) \}.$$

OBSERVAÇÕES:

a) $F^{-1}(\Delta)$ é chamado de Pullback de f e g e será denotado por $P = P(f, g)$. Assim $\partial P = P(f, \partial g) = \partial F^{-1}(\Delta)$.

b) Dadas $f: M \longrightarrow N$ e $g: Q \longrightarrow N$ existem aplicações induzidas $\bar{f}: P \longrightarrow Q$ e $\bar{g}: P \longrightarrow M$ dadas por:

$$\bar{f}(x, q) = q \quad \text{e} \quad \bar{g}(x, q) = x.$$

c) Temos a comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{f}} & Q \\ \bar{g} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

(1.6) PROPOSIÇÃO: Se f é imersão própria $\bar{f}$ também será.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $K \subset Q$ compacto. Temos que

$$\bar{f}^{-1}(K) = \{ (x, q) \in P \mid q \in K \} = P(f, g|_K).$$

O conjunto $\bar{f}^{-1}(K)$ é fechado, pois K é fechado. Como K é compacto, $g(K) \subset N$ é compacto e, sendo $f: M \longrightarrow N$ imersão própria, temos que $f^{-1}(g(K))$ é um subconjunto compacto de M .

Tomemos o seguinte conjunto $A = f^{-1}(g(K)) \times K$ que é compacto. Afirmamos que $\bar{f}^{-1}(K) \subset A$. Com efeito, dado $(x, q) \in \bar{f}^{-1}(K)$ temos $(x, q) \in M \times K$ e $f(x) = g(q)$, donde $x \in f^{-1}(g(q)) \subset f^{-1}(g(K))$. Logo,

$$(x, q) \in f^{-1}(g(K)) \times K = A.$$

Como $\bar{f}^{-1}(K)$ é fechado no compacto A segue que $\bar{f}^{-1}(K)$ é

compacto.

Mostremos que $\bar{f}$ é imersão. Com efeito:

Notemos primeiro que se $v \in TP$, então podemos escrever $v = (v_1, v_2) \in TM \times TQ$, de modo que $T\bar{f}(v) = v_2$. Suponhamos $v \neq 0$. Então se mostrarmos que $v_2 \neq 0$ a afirmação estará provada.

Se $v_1 \neq 0$ então $(Tf \circ T\bar{g})(v) = Tf(v_1) \neq 0$, pois f é imersão. Mas $f \circ \bar{g} = g \circ f$ e daí:

$$0 \neq (Tf \circ T\bar{g})(v) = (Tg \circ Tf)(v) = Tg(v_2).$$

Portanto, $v_2 \neq 0$. ■

A proposição seguinte desempenha papel crucial na demonstração do teorema.

(1.7) PROPOSIÇÃO: Seja $f: P \longrightarrow Q$ uma imersão própria. Suponhamos P compacto e $H \subset P$ um subconjunto aberto denso. Então existe uma função $\mu: Q \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- a) $\mu \circ f$ é uma função de Morse;
- b) $\text{crit}(\mu \circ f) \subset H$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathbb{R}_+^k = \{v \in \mathbb{R}^k \mid v_k > 0\}$ e $i: Q \longrightarrow \mathbb{R}_+^k$ um mergulho próprio (Whitney). Consideremos a aplicação $L_w: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $L_w(v) = \|v - w\|^2$.

A composição $i \circ f: P \longrightarrow \mathbb{R}_+^k$ é uma imersão própria de P em $\mathbb{R}_+^k$. A aplicação $L_w \circ i \circ f: P \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse se e

somente se $w \notin E(\text{crit } E)$, onde E é de classe C^1 e é chamada de aplicação ponto final.

Como P é compacto e E é de classe C^1 então pelo "Teorema de Sard" o conjunto $E(\text{crit } E) = V$ é um conjunto cujo complementar é aberto denso. (Assim para quase todo $w \in V^c$, $L_w \circ i \circ f$ é de Morse).

Se $p \in P$, então p será ponto crítico de $L_w \circ i \circ f$ se e somente se $w \in E(\nu_p)$, onde ν_p é a fibra sobre p . De fato, de acordo com [9] p é ponto crítico de $L_w \circ i \circ f$ se e somente se $w - p$ for normal a P em p , ou seja existe $v \in \nu_p$ tal que $w - p = v$, o que implica $w = p + v = E(p, v)$. Daí $w \in E(\nu_p)$.

Sendo $H \subset P$ aberto denso então $\bigcup_{p \notin H} \nu_p$ é fechado de interior vazio, daí como E é de classe C^1 , $W = E\left(\bigcup_{p \notin H} \nu_p\right)$ também é. Logo W^c é aberto denso. Considerando $w \in U = V^c \cap W^c$ que é aberto denso, temos que a função $\mu = L_w \circ i$ satisfaz as condições (a) e (b). ■

Suponhamos P variedade compacta de dimensão 1 com fronteira e $f: P \longrightarrow \mathbb{R}$ função de Morse. Se cada $p \in \partial P$ é máximo local não crítico então a característica de Euler de P , $\chi(P)$, pode ser calculada por:

$$\chi(P) = \sum_{p \in \text{crit}(f)} i(p) ,$$

onde $i(p) = 1$ se p é mínimo local e $i(p) = -1$ se p é máximo local.

Com esta definição de $\chi(P)$ que desempenhará papel importante na demonstração do teorema central, passemos ao seu enunciado seguido de sua demonstração.

2 - GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE SEPARAÇÃO:

Vamos agora ver a demonstração do Teorema de Feighn, só observando que, tomaremos como hipótese o fato de M e N serem variedades fechadas, fato esse que não descaracteriza o resultado.

(2.1) TEOREMA: Seja $f: M^{n-1} \longrightarrow N^n$ imersão de classe C^2 , com M , N fechadas e conexas e $H_1(N; \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}$. Então $N - f(M)$ não é conexo. ■

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos ao contrário que $N - f(M)$ seja conexo. Tomemos $y \in f(M)$ tal que $\#f^{-1}(y) = 2^\alpha r$, com α minimal e r um número ímpar. Consideremos agora $g: I \longrightarrow N$ um mergulho transversal a f tal que $g(I) \cap f(M) = \{y\}$ (I é um intervalo fechado).

FIG. (2.1)

Como $N - f(M)$ é conexo, g_1 pode ser estendido à mergulho $g_2: S^1 \longrightarrow N$ tal que $g_2(S^1) \cap f(M) = \{y\}$ e g_2 ainda transversal a f .

FIG. (2.2)

Sendo $H_1(N; \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}$ então, de acordo com [3], g_2 é restrição de uma função $g: Q \longrightarrow N$ onde Q é uma variedade de dimensão 2 tendo S^1 como fronteira ($\partial Q \cong S^1$). Podemos dizer que g também é transversal a f .

Tomemos agora o Pullback de f e g que será uma variedade compacta $P = P(f, g)$ de dimensão 1 com fronteira. Consideremos $\bar{f}$ a induzida de f , que é uma imersão própria de P em Q . Pela construção podemos afirmar que $\chi(P) = \frac{1}{2} \# \partial P$. Como $\partial P = P(f, \partial g) = f^{-1}(y)$, temos $\# \partial P = \# f^{-1}(y)$. Logo, $\chi(P) = 2^{\alpha-1} r$.

Voltando um pouco ao início da demonstração podemos afirmar que $\alpha > 0$, ou seja, se existisse $y \in f(M)$ com $\# f^{-1}(y)$ ímpar ($\alpha = 0$) então o teorema estaria demonstrado pois $\# \partial P$ é sempre par por ser P compacta de dimensão 1. E, pelo fato de $\# \partial P = \# f^{-1}(y)$ teríamos um absurdo.

Supondo então $\alpha > 0$, nosso próximo passo será construir uma função de Morse sobre P . Para isso consideremos $i: Q \longrightarrow \mathbb{R}_+^k$ um

mergúlio próprio de Q em $\mathbb{R}_+^k$ (Q compacta com fronteira).

Usando a proposição anterior, temos que existe um subconjunto aberto denso de escolhas de $w \in \mathbb{R}_+^k$ tal que:

- (a) $L_w \circ i \circ \bar{f}$ é de Morse;
- (b) $\text{crit}(L_w \circ i \circ \bar{f}) \subset G(\bar{f})$ (aberto denso).

Podemos ainda dizer que existe um subconjunto aberto não vazio de escolhas para w tal que satisfaça a seguinte condição adicional:

- (c) $L_w \circ i \circ \bar{f}$ tem máximo local não crítico em cada $p \in \partial P$.

Com efeito, consideremos para cada $p \in \partial P$ (finita) e $v \in T_p P$, os seguintes semi-espacos abertos dados por:

$$S_p = \{ w \mid \langle w - i \circ \bar{f}(p), T_p(i \circ \bar{f})(v) \rangle > 0 \}$$

Como a fronteira ∂P é um conjunto finito então a intersecção destes subespacos é um conjunto aberto. O vetor $v \in T_p P$ tem que ser tomado de maneira que seja um vetor externo a P .

Tomemos então w tal que $L_w \circ i \circ \bar{f}$ satisfaça (a), (b) e (c). Desde que cada ponto crítico p de $L_w \circ i \circ \bar{f}$ está em $G(\bar{f})$ então todos os pontos críticos de $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(p))$ tem o mesmo índice. Observe figura 2.3.

FIG. (2.3)

Para todo $q \in Q$ temos que:

$$\# \bar{f}^{-1}(q) = \# f^{-1}(g(q)).$$

Portanto concluímos que 2^α divide $\bar{f}^{-1}(q)$, qualquer que seja $q \in Q$. Assim 2^α divide $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(p))$, $\forall p \in P$. Usando o fato de todo ponto crítico de $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(p))$ ter o mesmo índice então 2^α divide $\sum i(p)$, com $p \in \text{crit}(L_w \circ f) \cap \bar{f}^{-1}(f(p))$.

Logo 2^α divide $\chi(P) = \sum i(p)$, p ponto crítico. Mas, isto contradiz o fato de $\chi(P) = 2^{\alpha-1}r$ que mostramos anteriormente. Assim, segue-se a conclusão do teorema. ■

Vamos agora enunciar um resultado que generaliza o um pouco o teorema anterior no seguinte sentido. Em vez de tomarmos $H_1(N; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$, tomaremos apenas $f: M \longrightarrow N$ uma imersão tal que a sua induzida de homologia f_* seja nula.

Antes porém, façamos algumas considerações.

Dada uma função $f: M^m \longrightarrow N^n$ uma aplicação de classe C^2 e K^k uma subvariedade de N , tal que $f \pitchfork K$, temos que $S = f^{-1}(K)$ é uma subvariedade de M de dimensão $s = m - n + k$. Denotemos por $[K]_2 \in H_k(K; \mathbb{Z}_2)$ a classe fundamental K e por μ_K como sendo a imagem de $[K]_2$ através de $i_*: H_k(K; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_k(N; \mathbb{Z}_2)$ ou seja:

$$\mu_K = i_*([K]_2) \in H_k(N; \mathbb{Z}_2).$$

Denotemos também por U^K o dual de μ_K , ou seja:

$$U^K = D(\mu_K) \in H^{n-k}(N; \mathbb{Z}_2).$$

(D é o isomorfismo da Dualidade de Poincaré).

Assim $\mu_S = i_*([S]_2)$ e $U^S = D(\mu_S)$. Com isso podemos enunciar o seguinte lema:

(2.2) LEMA: $f^*(U^K) = U^S \in H^{n-k}(M; \mathbb{Z})$. ■

DEMONSTRAÇÃO: Como K é de classe C^2 , existe $W \subset N$ vizinhança tubular de K . Consideremos (E, E_0) o espaço total do fibrado Normal. Temos os seguintes isomorfismos:

$$H^{n-k}(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(W, W-K; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(N, N-K; \mathbb{Z}_2)$$

Podemos considerar a CLASSE DE THOM do fibrado (E, E_0) em $H^{n-k}(N, N-K; \mathbb{Z}_2)$ a menos de isomorfismos. Representemos por $\tau(\nu_k)$ a CLASSE DE THOM de (E, E_0) . Pelo Teorema da Dualidade de Alexander temos que existe um isomorfismo:

$$D_K : H^{n-k}(N, N-K; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\sim} H_k(K; \mathbb{Z}_2)$$

Pode-se mostrar que (Ver [13]) $D_K(\tau(\nu_k)) = [K]_2$, ou seja a CLASSE DE THOM do fibrado é levada sobre a classe fundamental de K módulo 2.

Tomemos agora $f : M^m \longrightarrow N^n$ uma aplicação de classe C^2 , com M e N variedades fechadas e $f \pitchfork K$ onde K é uma subvariedade de N e $f^{-1}(K) = S$ é uma subvariedade de M de dimensão $m + k - n$. Consideremos $V = f^{-1}(W)$. Pode se mostrar que V é uma vizinhança tubular de S .

Consideremos $G : (V, V-S) \longrightarrow (W, W-K)$ onde $G = f/V$ e $G_1 : (M, M-S) \longrightarrow (N, N-K)$ onde $G_1 = f$.

A induzida de cohomologia de G e G_1 são dadas por:

$$G^* : H^{n-k}(W, W-K; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{n-k}(V, V-S; \mathbb{Z}_2)$$

$$G_1^* : H^{n-k}(N, N-K; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{n-k}(M, M-S; \mathbb{Z}_2)$$

Usando a excisão temos os isomorfismos :

$$H^{n-k}(W, W-K; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(N, N-K; \mathbb{Z}_2)$$

$$H^{n-k}(V, V-S; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(M, M-S; \mathbb{Z}_2)$$

De acordo com MILNOR , ver [9] podemos mostrar que :

$$G_1^*(\tau(\nu_k)) = \tau(\nu_s)$$

ou seja G_1^* leva a Classe de Thom de ν_k sobre a Classe de Thom de ν_s .

Consideremos agora o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & H_k(K; \mathbb{Z}_2) & H_{m+k-n}(S; \mathbb{Z}_2) \\
 & \uparrow D_k & \uparrow D_s \\
 & H^{n-k}(N, N-K; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{G_1^*} H^{n-k}(M, M-S; \mathbb{Z}_2) \\
 & \uparrow j^* & \uparrow j^* \\
 & H^{n-k}(N; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{f^*} H^{n-k}(M; \mathbb{Z}_2) \\
 & \uparrow D_p & \uparrow D_p \\
 & H_k(N; \mathbb{Z}_2) & H_{m+k-n}(M; \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

i_* i_*

Seja $U^K \in H^{n-k}(N; \mathbb{Z}_2)$ e $U^S \in H^{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ definidos

anteriormente em (I) e (II) temos que :

$$U^K = D_p \circ i_* \circ D_K (\tau(\nu_K))$$

$$U^S = D_p \circ i_* \circ D_S (\tau(\nu_S))$$

Usando a comutatividade do diagrama temos que:

$$U^K = j^*(\tau(\nu_K)) \quad e \quad U^S = j^*(\tau(\nu_S))$$

e

$$f^*(U^K) = f^*(j^*(\tau(\nu_K))) = j^*(G_1^*(\tau(\nu_K))) = j^*(\tau(\nu_S)) = U^S$$

$$\text{Portanto } f^*(U^K) = U^S. \quad \blacksquare$$

Podemos enunciar e demonstrar o seguinte teorema :

(2.3) **TEOREMA :** Seja $f : M^{n-1} \longrightarrow N^n$ uma imersão de classe C^2 , com M e N variedades fechadas e conexas e de tal maneira que $f_* = 0$. Se existir $y \in f(M)$ e $f^{-1}(y) \subset G(f)$ com $\#f^{-1}(y)$ um número ímpar, então $N - f(M)$ não é conexo. ■

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $N - f(M)$ seja conexo e seja $y \in f(M)$ com $\#f^{-1}(y)$ ímpar. Seja $g_1: I \longrightarrow N$ um mergulho transversal a f tal $g_1(I) \cap f(M) = \{y\}$. Sendo $N - f(M)$ conexo então g_1 pode ser estendida a um mergulho $g: S^1 \longrightarrow N$ ainda transversal a f com $g(S^1) \cap f(M) = \{y\}$. $K = g(S^1)$ é uma subvariedade de N de dimensão 1 e $S = f^{-1}(K)$ é uma subvariedade de M de dimensão zero. Assim como M é compacta S será um conjunto finito de pontos tal que $\#S$ é ímpar. Daí $U^S \neq 0$. Usando o fato de $f_* = 0 \pmod{2}$ então temos $f^* = 0 \pmod{2}$ e, daí, $0 = f^*(U^K) = U^S \neq 0$, o que é absurdo. Segue-se então o teorema. ■

(2.4) COROLÁRIO: Nas condições do teorema acima , se $f:M \longrightarrow N$ for um mergulho então $f(M)$ separa N . ■

DEMONSTRAÇÃO: Sendo f um mergulho então existe $y \in f(M)$ tal que $\#f^{-1}(y) = 1$ e o resultado segue. ■

OBSERVAÇÃO: O Teorema (2.4) generaliza um pouco mais o Teorema (2.1) pois retiramos a hipótese de que $H_1(N; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ e acrescentamos o fato de $f_* = 0 \text{ mod. } 2$. Isto foi ilustrado quando apresentamos o exemplo citado no capítulo anterior (C.II ,fig.2.3).

(3.2) COROLÁRIO: $\mathbb{RP}(n)$ não pode ser mergulhado em S^{n+1} para n um número par ■

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $\mathbb{RP}(n)$ possa ser mergulhado em S^{n+1} para n um número par. Assim pelo Teorema 2.3 (cap.2), teríamos que $S^{n+1} - \mathbb{RP}(n)$ teria duas componentes e pela proposição anterior isto nos permitiria concluir que $\mathbb{RP}(n)$ é orientável, para n um número par, o que é um absurdo. Segue então o corolário. ■

O Teorema de Jordan-Brouwer pode ser usado para mostrar o seguinte resultado conhecido:

" S^2 não é homeomorfo a S^3 ."

DE FATO: Seja $\alpha : S^1 \longrightarrow S^3$ o mergulho trivial de S^1 em S^3 dado por $\alpha(x,y) = (x,y,0,0)$. Observemos que $\alpha(S^1)$ não separa S^3 , isto é, $S^3 - \alpha(S^1)$ é um conjunto conexo. Supondo agora $f : S^3 \longrightarrow S^2$ seja um homeomorfismo entre S^3 e S^2 , temos então que $f \circ \alpha : S^1 \longrightarrow S^2$ é um mergulho de S^1 em S^2 . Pelo Teorema de Jordan-Brouwer temos que $S^2 - f \circ \alpha(S^1)$ tem duas componentes conexas. Mas daí temos o absurdo pois $f(S^3 - \alpha(S^1)) = S^2 - f \circ \alpha(S^1)$, e sendo f homeomorfismo leva conjunto conexo em conexo. A contradição está então no fato de supor que existe um homeomorfismo entre S^3 e S^2 . ■

BIBLIOGRAFIA:

- [1] BRÖCKER , Theodor and JÄNICH , Klaus - Introduccion a la Topologia Diferencial - Springer Verlag - 1973. ■
- [2] CONDE, Antonio - Introdução a Topologia Diferencial - 9^o Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA 1973.■
- [3] CONNER, P.E. and FLOYD , D.E. - Differentiable Periodic Maps - Springer Verlag - 1964 .■
- [4] FEIGHN, Marck E. - Separation Properties of Codimension-1 immersions - Topology - Vol.27 (pgs.319/321). 1968.■
- [5] GREENBERG , Marvin - Lectures on Algebraic Topology - W.A.Benjamin, Inc.-1967.■
- [6] GUILLEMIN , V. & POLLACK , A. - Differential Topology - Prentice -Hall - 1974 - New Jersey .■
- [7] HIRSCH, M. - Differential Topology - Springer Verlag - GTM - number 33 - 1976.■
- [8] LIMA, E.LAGES - Duas Novas Demonstrações do Teorema de Jordan-Brouwer no caso Diferenciável - Revista Matemática Universitária - Número 4 - 12/86 - SBM.■
- [9] MILNOR , J. and STACHEFF , J.D. - Characteristic Classes - Annals of Mathematics Studies - Number 76 - Princeton University Press- 1974 .■
- [10] MILNOR , J. - Morse Theory - Ann.Math.Stud. - number 51 - Princeton University Press - Princeton - 1969.■

- [11] NUÑO BALLESTEROS, J.J. e ROMERO FUSTER ,M.C. -
Topologically Immersed Surfaces With Normal Crossings Separate
3-spheres.- Preprint.
- [12] PITOMBEIRA, J.Bosco - Topologia Algébrica - 8^o Colóquio
Brasileiro de Matemática - IMPA - 1971.■
- [13] THOM, R. - Quelques Propriétés Globales des Variétés
Differentiables - Comm.Math. Helv.28 (1954), 109-181.
- [14] VICK , James W. - Homology Theory - Academic Press-
Mathematics , 53 .■
- [15] VACCARO, M. - Proprietà Topologiche delle
Rappresentazioni Localmente Biunivoche - Math. Ann. - 133 -1957.■