PROBLEMA DE CAUCHY PARA OPERADORES SETORIAIS

Janete Crema

Orientador: Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

S Ã O C A R L O S - SP

1990

Trabalho realizado com Auxílio do CNPq e da CAPES.

A B S T R A C T

In this work we study the initial value problem

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ax + f(t,x) \\ x(t_o) = x_o, \end{cases}$$

where A is a setorial operator.

Using properties of fractional powers of operators, it is shown that the above initial value problem has, under mild conditions, a unique classical solution.

R E S U M O

Neste trabalho estudou-se o problema de valor inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(t,x) \\ x(t_o) = x_o, \end{cases}$$

onde A é operador setorial.

Usando propriedades de potências fracionárias de operadores foi mostrado que, acrescentando-se algumas condições, o P.V.I. acima tem solução clássica única.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO ..... (i)

CAPÍTULO I

PRELIMINARES 1

CAPÍTULO II

POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS DE OPERADORES 13

CAPÍTULO III

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE CAUCHY 39

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO A UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA 71

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 77

INTRODUÇÃO

O objetivo desta dissertação é estudar o problema de valor inicial:

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + f(t,x) \\ x(t_o) = x_o \ , \end{cases}$$

quando A é operador setorial densamente definido em um espaço de Banach X.

Assim começamos enunciando os resultados básicos de análise funcional e da teoria geral de semigrupos destacando-se o teorema sobre analiticidade de um semigrupo gerado por operador setorial densamente definido.

No segundo capítulo damos condições para que existam as potências fracionárias de um operador e definimos $A^{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda$ onde $\alpha > 0$ e γ é caminho, contido no plano, em torno do semi-eixo real negativo.

Mais adiante mostramos que para $\alpha \in (0,1)$ $A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(s+A)^{-1}\,ds$. Demonstramos algumas propriedades de A^α, como por exemplo o fato de ser um operador fechado com domínio denso em X se $\alpha > 0$ e limitado se $\alpha \leqq 0$.

Destacamos nesse capítulo o teorema que dá inclusões contínuas de $D(A^\alpha)$ em $W^{k,q}(\Omega)$ quando $k - \frac{n}{q} < m\alpha - \frac{n}{p}$ $(p \leqq q)$ e $D(A^\alpha)$ em $C^\gamma(\Omega)$ quando $\gamma \leqq m\alpha - \frac{n}{p}$ onde A é operador definido sobre $X = L_p(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ domínio regular Lipschitziano e $D(A) \subset W^{m,p}(\Omega)$.

No terceiro capítulo demonstramos basicamente que:

Se X é espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ é operador setorial densamente definido e $f : U \subset R \times X^\alpha \to X$, U aberto, é localmente Hölder contínua na primeira variável e localmente lipschitziana na segunda

variável então existe uma única solução maximal de (1) e ela será dada por

$$x(t) = e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds,$$

definida sobre intervalo (t_o,t_1).

Além disso se $x_o \in X^\alpha$, $x(t)$ será diferenciável também em x_o.

Mais adiante verificamos como se dá a dependência de $x(t;\tau,\xi,\lambda,\mu)$, solução de $\dot{x} + Ax = f(t,x,\lambda)$ com $x(\tau) = \xi$, com relação à τ,ξ,λ e μ.

Finalmente, no quarto capítulo estudamos a equação

$$u_t + u_{xx} = f(x,t,u,u_x)$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

para f contínua em x, localmente Hölder contínua em t e localmente lipschitziana em suas duas últimas variáveis.

Mostramos que $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ com $D(A) = H_o^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$ é operador setorial densamente definido em $L_2(0,\pi)$ e que $F(t,u)(x) = f(x;t,u(x,t),u_x(x,t))$ é aplicação localmente Hölder contínua em t e localmente lipschitziana em u; nessas condições, dado (t_o,u_o) vai existir uma única solução maximal u definida sobre (t_o,t_1), aproximando-se de u_o em $C^1(0,\pi)$ quando $t \to t_{o_+}$ desde que $u_o \in D(A^\alpha)$ e $3/4 < \alpha < 1$.

Melhorando um pouco as condições sobre f a solução obtida será duas vezes continuamente diferenciável em x e uma vez continuamente diferenciável em t, uma solução clássica portanto.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados os resultados que usaremos nos próximos capítulos. Apenas alguns deles serão acompanhados de demonstração.

I_1 Teorema:

Suponhamos X, Y espaços de Banach, U um aberto em X e $f : U \to Y$ é tal que para cada $x_o \in U$

$$f(x+h) = \sum_{K=0} a_k(x)h^K + o(||h||^m)$$

quando $h \to 0$, uniformemente para $||x-x_o|| \leq ||h||$ onde $a_K(x)$ é polinômio homogêneo de ordem K, limitado, $a_K : X \to Y$. Então f é m vezes continuamente diferenciável e sua K-ésima derivada é dada por:

$$f^K(x)(h_1,\ldots,h_K) = \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_K\}=\{1,\ldots,K\}} a_K(x)h_{i_1},\ldots,h_{i_K}$$

$$= K!a_K(x)h_1,\ldots,h_K \quad \text{se } a_K(x) \text{ for simétrica.}$$

I_2 Lema:

Suponhamos X, Y espaços de Banach, U um aberto em X e J um intervalo compacto em R.

a) Se $F : J \times U \to Y$ é contínua, a aplicação $x \to F(.,x(.))$, $F : C(J,U) \to C(J,Y)$ também será.

b) Se $(t,x) \to (\frac{\partial}{\partial x})^K F(t,x)$ é contínua sobre $J \times U$ para $K = 0,1,\ldots,r$ então a aplicação $x \to F(.,x(.))$ será r vezes continuamente diferenciável.

Se F for analítica em x, ou seja, se o item b for válido para todo r natural e a série de Taylor de $x \to F(t,x)$ convergir uniformemente em $t \in J$ perto de cada $x \in U$ então $x \to F(.,x(.))$ também será analítica.

Prova:

a) Seja x_n, x pertencente a $C(J,U)$ e $x_n(t) \to x(t)$ uniformemente em J quando $n \to \infty$; Suponhamos $||F(.,x_n(.))-F(.,x(.))||_{C(J,U)} \geqq$ $\geqq \varepsilon > 0$; então $\exists\ t_n \in J$ tal que

$$||F(t_n,x_n(t_n))-F(t_n,x(t_n))|| \geqq \varepsilon/2$$

para n grande.

Desta forma obtemos subsequência $t_n' \to t^*$, $t^* \in J$, contradizendo continuidade da F em $(t^*,x(t^*))$.

b) $(t,x) \to (\frac{\partial}{\partial x})^K F(t,x)$ é contínua em $J \times U$ para $K = 0,1,\ldots,r$.

Seja $x(.) \in C(J,U)$ e $I_x = \{x(t),\ t \in J\}$, conjunto compacto de U.

Para cada $t \in J$, $\exists\ \delta_t > 0$ tal que se $|h_t| < \delta_t$ tem-se:

$$F(t,x(t) + h_t) = \sum_{K=0}^{m} (\frac{\partial}{\partial x})^K F(t,x(t))h_t^K + r(h_t) \quad \text{onde}$$

$$\lim_{h_t \to 0} \frac{r(h_t)}{|h_t|^m} = 0.$$

$C = \bigcup_{t \in J} B(x(t),\delta_t)$ é cobertura por bolas abertas, de I_x. Assim existem $t_1,t_2,\ldots,t_n \in J$ tal que $\bigcup_{i=1\ldots n} B(x(t_i),\delta_{t_i})$ é cobertura aberta finita de I_x.

Tomaremos cobertura finita de I_x de forma que para $i = 1,,,n-1$, $B(x(t_i), \delta_{t_i}) \cap B(x(t_{i+1}), \delta_{t_{i+1}}) \supset B(x(\tilde{t}_i), \delta_{\tilde{t}_i})$ com $\tilde{t}_i \in J$, $x(\tilde{t}_i) \in I_x$ e $\delta_{\tilde{t}_i} > 0$.

Se F for analítica em x, ou seja, se o item b for válido para todo r natural e a série de Taylor de $x \to F(t,x)$ convergir uniformemente em $t \in J$ perto de cada $x \in U$ então $x \to F(.,x(.))$ também será analítica.

Prova:

a) Seja x_n, x pertencente a $C(J,U)$ e $x_n(t) \to x(t)$ uniformemente em J quando $n \to \infty$; Suponhamos $||F(.,x_n(.))-F(.,x(.))||_{C(J,U)} \geq$ $\geq \varepsilon > 0$; então $\exists\ t_n \in J$ tal que

$$||F(t_n,x_n(t_n))-F(t_n,x(t_n))|| \geq \varepsilon/2$$

para n grande.

Desta forma obtemos subseqüência $t_n' \to t^*$, $t^* \in J$, contradizendo continuidade da F em $(t^*,x(t^*))$.

b) $(t,x) \to (\frac{\partial}{\partial x})^K F(t,x)$ é contínua em $J \times U$ para $K = 0,1,\ldots,r$.

Seja $x(.) \in C(J,U)$ e $I_x = \{x(t),\ t \in J\}$, conjunto compacto de U.

Para cada $t \in J$, $\exists\ \delta_t > 0$ tal que se $|h_t| < \delta_t$ tem-se:

$$F(t,x(t) + h_t) = \sum_{K=0}^{m} (\frac{\partial}{\partial x})^K F(t,x(t))h_t^K + r(h_t) \quad \text{onde}$$

$$\lim_{h_t \to 0} \frac{r(h_t)}{|h_t|^m} = 0.$$

$C = \bigcup_{t \in J} B(x(t),\delta_t)$ é cobertura por bolas abertas, de I_x. Assim existem $t_1,t_2,\ldots,t_n \in J$ tal que $\bigcup_{i=1\ldots n} B(x(t_i),\delta_{t_i})$ é cobertura aberta finita de I_x.

Tomaremos cobertura finita de I_x de forma que para $i = 1,,,n-1$, $B(x(t_i), \delta_{t_i}) \cap B(x(t_{i+1}), \delta_{t_{i+1}}) \supset B(x(\tilde{t}_i), \delta_{\tilde{t}_i})$ com $\tilde{t}_i \in J$, $x(\tilde{t}_i) \in I_x$ e $\delta_{\tilde{t}_i} > 0$.

Tomamos $\delta = \min\limits_{i=1,\dots,n-1} \{\delta_{t_i}^{\sim}\} > 0.$

Neste caso, $\forall\, t \in J$ se $||h_t|| < \delta$ teremos

$$F(t,x(t) + h_t) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^K F(t,x(t))h_t^K + r(h_t) \quad \text{com} \quad r(h_t) = o\,||h_t||^m$$

se $h_t = h(.) \in C(J,U)$ e $||h(.)|| < \delta$ então $r(h(t))$ será contínua e portanto $r(h(.))$ será contínua também. Logo $r(h(.)) = o||h(.)||^m$ e o resultado segue.

c) $(t,x) \to \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^K F(t,x)$ é contínua sobre $J \times U$ para $\forall K \in N$ e $x \to F(t,x)$ converge uniformemente em $t \in J$ perto de cada $x \in U$.

Pelo item b) $F(.,x(.))$ é C^∞.

Queremos agora mostrar que dado $x(.) \in C(J,U)$, $\exists\, \delta > 0$ tal que se $||h(.)|| \leq \delta$ e $h(.) \in C(J,U)$ então

(*) $F(.,x(.) + h(.)) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} a_K(.,x(.))h^K(.)$ converge uniformemente, onde a_K é como no teorema I_1.

Como no item b) construímos cobertura aberta para I_x e extraímos subcobertura aberta e finita.

Tomamos $\delta = \min\{\delta_{t_i}^{\sim}\}$ também como no item b).

Para esse δ teremos (*), como queríamos.

I_3 Teorema:

Seja F um subconjunto fechado de um espaço de Banach X, S um subconjunto de um espaço de Banach Y, $T_y : F \to F$, $y \in S$ uma contração sobre F.

Além disso suponhamos que F e S sejam fechos de conjuntos abertos F^o, S^o e $T_y x$ tenha primeiras derivadas contínuas, então o único ponto fixo $g(y)$ de T_y terá primeira derivada contínua em $y \in S^o$.

Ver [7], p. 7.

I_4 Teorema:

Seja X espaço de Banach.

$A : D(A) \to X$ operador linear fechado e $D(A) \subset D(B)$ onde B é operador linear $B : D(B) \to X$.

Se existem $a>0$ e $0<b<1$ tais que $||Bx|| \leq a||x|| + b||Ax||$ para todo $x \in D(A) \Rightarrow A+B$ é fechado.

Prova:

$$||(A+B)x_n|| \geq ||Ax_n|| - ||Bx_n|| \geq (1-b)||Ax_n|| - a||x_n||$$

Logo $||Ax_n|| \leq (||(A+B)x_n|| + a||x_n||)(1-b)^{-1}$ e se $x_n \to x$ e $(A+B)x_n \to y \Longrightarrow ||x_n - x_m|| \to 0$ e $||(A+B)(x_n - x_m)|| \to 0$.

Portanto $||A(x_n - x_m)|| \to 0$, logo $x \in D(A)$ e $Ax_n \to Ax$ pois A é fechado; mas se $x \in D(A) \subset D(B)$ teremos:

$$||(A+B)(x_n - x)|| \leq ||A(x_n - x)|| + ||B(x_n - x)|| \leq$$

$$\leq a||x_n - x|| + (1+b)||A(x_n - x)|| \to 0$$

como queríamos.

I_5 Teorema:

Suponhamos $a,b \geq 0$; $0 \leq \alpha,\beta < 1$ e $u : [0,T] \to R$ integrável com $0 \leq u(t) \leq at^{-\alpha} + b\int_0^t (t-s)^{-\beta} u(s)ds$ a.e sobre $0 < t < T$.

Existe uma constante K dependendo somente de b, β e T tais que $u(t) \leq \frac{K}{1-\alpha} at^{-\alpha}$ a.e sobre $(0,T)$.

Prova:

Definimos uma aplicação B linear,

$$B : \phi \to \{b\int_0^t (t-s)^{-\beta}\phi(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T\}$$

Note que B preserva ordem, ou seja se $\phi \leqq \psi$ então $B\phi \leqq B\psi$.

Se $u_o t = at^{-\alpha}$ e $0 \leqq u(t) \leqq u_o + Bu(t) \Rightarrow B(u(t)) \leqq$

$\leqq B(u_o(t) + Bu(t)) \therefore u \leqq u_o + Bu \leqq u_o + Bu_o + B^2u.$

Seguindo o raciocínio:

$$u \leqq \sum_{k=0}^{m-1} B^k u_o(t) + B^m u(t), \quad t \in (0,T) .$$

Mostremos que $B^m\phi(t) \to 0$ quando $m \to \infty$ para cada $t \in (0,T)$.

Para isso mostremos primeiramente que

$$B^m\phi(t) = [b(-\beta)!]^m \int_o^t \frac{(t-u)^{m(1-\beta)-1}\phi(u)}{(m(1-\beta)-1)!} .$$

Mostremos o resultado por indução.

$$m = 1, \quad B\phi(t) = b\int_o^t (t-s)^{-\beta}\phi(s)ds = [b(-\beta)!]\int_o^t \frac{(t-s)^{1(1-\beta)-1}}{(1(1-\beta)-1)!}\phi(s)ds$$

Suponhamos

$$B^{m-1}\phi(s) = [b(-\beta)!]^{m-1}\int_o^s \frac{(s-u)^{(m-1)(1-\beta)-1}\phi(u)}{((m-1)(1-\beta)-1))} du$$

$$B^m\phi(t) = B(B^{m-1}\phi(t)) = b\int_o^t (t-s)^{-\beta}B^{m-1}\phi(s)ds =$$

$$= b\int_o^t (t-s)^{-\beta}[b(-\beta)!]^{m-1}(\int_o^s \frac{(s-u)^{(m-1)(1-\beta)-1}\phi(u)}{((m-1)(1-\beta)-1)!} du)ds$$

$$= \frac{b^m[(-\beta)]^{m-1}}{((m-1)(1-\beta)-1)!} \int_o^t \int_o^s (t-s)^{-\beta}(s-u)^{(m-1)(1-\beta)-1}\phi(u)duds$$

Trocando a ordem de integração teremos:

$$B^m\phi(t) = \frac{b^m[(-\beta)!]^{m-1}}{((m-1)(1-\beta)-1)!} \int_o^t\int_u^t (t-s)^{-\beta}(s-u)^{(m-1)(1-\beta)-1}\phi(u)dsdu$$

Seja $K(m,b,\beta) = \dfrac{b^m[(-\beta)!]^{m-1}}{((m-1)(1-\beta)-1)!}$ e

$$\int_u^t (t-s)^{-\beta}(s-u)^{(m-1)(1-\beta)-1}\,ds = \tilde{B}(\beta,(m-1)(1-\beta)-1)$$

se $s = v+u$

$$\tilde{B}(\beta,(m-1)(1-\beta)-1) = \int_o^{t-u} (t-v-u)^{-\beta}v^{(m-1)(1-\beta)-1}\,dv$$

e se $v = \dfrac{(t-s)}{2s}(x+s)$

$$\tilde{B}(\beta,(m-1)(1-\beta)-1) = \int_{-s}^{s} \frac{(t-u)^{m(1-\beta)-1}}{(2s)^{m(1-\beta)-1}}(x+s)^{(m-1)(1-\beta)-1}(s-x)^{-\beta}\,dx$$

Assim $\displaystyle\int_o^A \left(\frac{t-u}{2s}\right)^{1-m(1-\beta)} e^{-2s}\tilde{B}(\beta,(m-1)(1-\beta)-1)\,ds =$

$$= \int_o^A e^{-2s}\int_{-s}^{s}(s-x)^{-\beta}(s+x)^{(m-1)(1-\beta)-1}\,dx\,ds$$

Fazendo $\begin{cases} s-x = \tau \\ s+x = \sigma \end{cases}$ $\qquad s = \dfrac{\tau+\sigma}{2}$

ficaremos com $\displaystyle\iint_{R_A} e^{-\tau-\sigma}\tau^{-\beta}\sigma^{(m-1)(1-\beta)-1}\,\frac{1}{2}\,d\tau d\sigma$ onde R_A é região do plano limitada por $\tau = 0$, $\sigma = 0$ e $\tau+\sigma = 2A$.

Assim

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\iint_{R_A} e^{-\tau-\sigma}\tau^{-\beta}\sigma^{(m-1)(1-\beta)-1}\,d\tau d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\int_o^\infty\int_o^\infty e^{-\tau-\sigma}\tau^{-\beta}\sigma^{(m-1)(1-\beta)-1}\,d\tau d\sigma = \frac{1}{2}(-\beta)![(m-1)(1-\beta)-1]!$$

$$= \int_o^\infty e^{-2s}\left[\frac{t-u}{2s}\right]^{1-m(1-\beta)}\tilde{B}(\beta,(m-1)(1-\beta)-1)\,ds$$

$$\therefore \quad \tilde{B}(\beta,(m-1)(1-\beta)-1) = \frac{\frac{1}{2}(-\beta)![(m-1)(1-\beta)-1]!(t-u)^{m(1-\beta)-1}}{\int_0^\infty e^{-2s}(2s)^{m(1-\beta)-1}\,ds}$$

$$= (t-u)^{m(1-\beta)-1}\,\frac{(-\beta)![(m-1)(1-\beta)-1]!}{\int_0^\infty e^{-u}u^{m(1-\beta)-1}\,du} =$$

$$= (t-u)^{m(1-\beta)-1}\,\frac{(-\beta)![(m-1)(1-\beta)-1]!}{[m(1-\beta)-1]!}$$

$$\therefore \quad B^m\phi(t) = K(m,b,\beta)\int_0^t \phi(u)\tilde{B}(\beta,(m-1)(1-\beta)-1)du =$$

$$= \frac{b^m[(-\beta)!]^m}{(m(1-\beta)-1)!}\int_0^t (t-u)^{m(1-\beta)-1}\phi(u)du$$

$$= B^m\phi(t) \quad \text{como queríamos.}$$

Temos $u(t) \leqq \sum_{k=0}^{m-1} B^k u_o(t) + B^m u(t)$, convencionando-se $B^o u_o = u_o$.

Assim mostraremos que a série acima converge e com o mesmo argumento mostraremos que $B^m u(t) \to 0$ quando $m \to \infty$.

Em primeiro lugar $u_o(t) = at^{-\alpha}$ é integrável em $[0,T]$. Assim

$$B^m u_o(t) = \frac{b^m[(-\beta)!]^m}{(m(1-\beta)-1)!}\int_0^t (t-u)^{m(1-\beta)-1}au^{-\alpha}\,du$$

$$\leqq \frac{b^m[(-\beta)!]^m}{(m(1-\beta)-1)!}\,t^{m(1-\beta)-1}\int_0^t au^{-\alpha}\,du$$

para $m > \frac{1}{1-\beta}$

Pelo teste da razão, se

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\dfrac{[b(-\beta)]^{m+1}}{((m+1)(1-\beta)-1)!} \cdot t^{(m+1)(1-\beta)-1}}{\dfrac{[b(-\beta)!]^{m}}{(m(1-\beta)-1)!} \cdot t^{m(1-\beta)-1}} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} [b.t^{1-\beta}] . \frac{(-\beta)!(m(1-\beta)-1)!}{((m+1)(1-\beta)-1)!}$$

for menor que 1, $\sum_{m=0}^{\infty} B^m u_o(t)$ converge. Conseqüentemente $B^m u(t) \to 0$ quando u for integrável (pelo mesmo motivo que $B^m u_o(t) \to 0$ quando $m \to \infty$).

Seja $B(x,y) = \int_o^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ a função Beta. Temos de resultados de Análise que $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ onde $\Gamma(x) = \int_o^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ é a função gama e $\Gamma(x) = (x-1)!$

Assim

$(-\beta)! = ((1-\beta)-1)! = \Gamma(1-\beta)$ e

$$\frac{(-\beta)!(m(1-\beta)-1)!}{((m+1)(1-\beta)-1)!} = B(1-\beta,m(1-\beta)) =$$

$$\int_o^1 t^{-\beta}(1-t)^{m(1-\beta)-1}\, dt.$$

Mas $0 \leq 1-t \leq 1$ para $t \in [0,1]$, desta forma $(1-t)^{m(1-\beta)-1} \to 0$ uniformemente quando $m \to \infty$ em qualquer intervalo $[t_o,1] \subset (0,1]$. Além disso escolhendo t_o pequeno o suficiente teremos que $B(1-\beta,m(1-\beta)) \leq$
$\leq \frac{t_o^{1-\beta}}{1-\beta} < 1$ para $m > \frac{1}{1-\beta}$.

Logo o limite acima é menor que 1, como queríamos.

E assim $\sum_{m=0}^{\infty} B^m u_o(t)$ converge e $B^m u(t) \to 0$, para u integrável, quando $m \to \infty$.

Temos então que $u(t) \leq \sum_{m=0}^{\infty} B^m u_o(t) =$

$$= u_o(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^m[(-\beta)!]^m}{(m(1-\beta)-1)!} \int_o^t u_o(s)(t-s)^{m(1-\beta)-1}ds \quad \text{mas}$$

$$(t-s)^{m(1-\beta)-1} = (t-s)^{(m-1)(1-\beta)-\beta}$$

e $\sum_{m=1}^{\infty} B^m u(t)$ converge $\forall u$ integrável, logo se $u(t) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^m[-\beta!]^m}{(m(1-\beta)-1)!} t^{m(1-\beta)-1} \leq C'.$$

$$E\int_0^t t^{-\alpha}(t-s)^{-\beta}ds = \int_0^{t/2} u^{-\alpha}(t-s)^{-\beta}d + \int_{t/2}^t t^{-\alpha}(t-s)^{-\beta}ds \leq$$

$$\leq (\tfrac{t}{2})^{-\beta}(\tfrac{t}{2})^{1-\alpha}.\frac{1}{1-\alpha} + (\tfrac{t}{2})^{-\alpha}(\tfrac{t}{2})^{1-\beta}\frac{1}{1-\beta} \leq$$

$$\leq \frac{t^{-\alpha}}{1-\alpha}(t^{1-\beta}.2^{\beta+\alpha-1}(1+\frac{1}{1-\beta})) \quad \therefore \quad u(t) \leq K\frac{at^{-\alpha}}{1-K}, \; K = K(\beta,T,b)$$

I_6 *Corolário:*

Se $a,b \geq 0$, $0 \leq \alpha,\beta < 1$ e $u : [t_o,T] \to R$ for integrável com $0 \leq u(t) \leq a(t-t_o)^{-\alpha} + b\int_{t_o}^t (t-s)^{-\beta}u(s)ds$ em $t_o < t < T$, então $u(t) \leq \frac{K}{1-\alpha} a(t-t_o)^{-\alpha}$, $t_o < t < T$ e K depende somente de b,β,T.

Prova:

De fato, $v(t) = u(t+t_o)$ está definida sobre intervalo $[0,T-t_o]$ e satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Logo $v(t) \leq$ $\leq \frac{K}{1-\alpha} at^{-\alpha}$.

Portanto $u(t) = v(t-t_o) \leq \frac{K}{1-\alpha} a(t-t_o)^{-\alpha}$ como queríamos.

I_7 *Teorema:*

Seja $\Omega \subset R^n$ um domínio regular Lipschitziano. Então nós teremos as seguintes inclusões contínuas:

a) $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,q}(\Omega)$ se $m - \frac{n}{p} \geq k - \frac{n}{q}$, $p \leq q < \infty$;

b) $W^{m,p}(\Omega) \subset C^{\gamma}(\Omega)$ se $m - \frac{n}{p} \geq \gamma \geq 0$

Ver [1], p. A.20.

I_8 *Teorema (Desigualdade de Nirenberg e Gagliardo):*

Seja $\Omega \subset R^n$ um domínio regular Lipschitziana. Então se $1 \leq p,r \leq \infty$, $0 \leq j < k$, $0 \leq a \leq 1$, existe constante C tal que:

a) $||D^j u||_{L_q(\Omega)} \leq C\,||u||^a_{W^{k,r}(\Omega)} \cdot ||u||^{1-a}_{L_p}$

se $j - \frac{n}{q} \leq a(k - \frac{n}{r}) + (1-a)(\frac{-n}{p})$ e $\frac{1}{q} \leq \frac{a}{r} + (\frac{1-a}{p})$ (excluindo apenas o caso $j = k - \frac{n}{r}$, $1 < r < \infty$, $q = \infty$, $a = 1$);

b) $||u||_{C^{j+\alpha}(\Omega)} \leq C\,||u||^a_{W^{k,r}(\Omega)}\,||u||^{1-a}_{L_p}$

se $j + \alpha \leq a(k - \frac{n}{r}) + (1-a)(\frac{-n}{p})$, $\alpha \geq 0$ (excluindo apenas o caso $j + \alpha = k - \frac{n}{r}$ = inteiro maior ou igual à j, $a = 1$). Ver [1] p. A.21.

I_9 *Definição:*

Seja X um espaço de Banach e $L(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : R^+ \to L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:

I) $S(0) = I$, I operador identidade de X.

II) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t,\ s \in R^+$

Se além dessas condições tivermos também

III) $\lim_{t \to 0_+} ||(S(t)-I)x|| = 0$ $\forall x \in X$ diremos que S é semigrupo de Classe C_o.

I_{10} *Definição:*

O operador $A : D(A) \to X$ definido por:

$$D(A) = \{x / \lim_{h \to 0} \frac{S(h)-I}{h} x \text{ existe}\} \quad \text{e} \quad Ax = \lim_{h \to 0} \frac{S(h)-I}{h} x, \forall x \in D(A)$$

é dito Gerador Infinitesimal do semigrupo S.

Se $S(t)$ é semigrupo de classe C_o e A seu gerador infinitesimal escreveremos $S(t) = e^{At}$.

I_{11} *Proposição:*

Seja e^{At} semigrupo de classe C_o.

a) Se $x \in D(A)$ então $e^{At}x \in D(A)$ $\forall t \geq 0$ e $\frac{de^{At}}{dt}x = Ae^{At}x =$
$= e^{At}Ax$;

b) Se $x \in D(A)$ então

$$e^{At}x - e^{As}x = \int_s^t Ae^{Au}x\,du = \int_s^t e^{Au}Ax\,du;$$

c) Se $x \in X$, então $\int_o^t e^{Au}x\,du \in D(A)$ e $e^{At}x - x = A\int_o^t e^{Au}x\,du$

Ver [4], p. 10.

I_{12} *Proposição:*

O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X. Ver [4], p. 12.

I_{13} *Proposição:*

Se e^{At} é semigrupo de classe C_o e A seu gerador infinitesimal então:

a) $D(A^n)$ é um subespaço de X com A^n operador linear de X e $D(A^n)$ é denso em X para $n \in N$;

b) Se $x \in D(A^n)$, $e^{At}x \in D(A^n)$ $n \in N$ e $t \geq 0$. Ver [4], p. 18.

I_{14} *Definição:*

Suponhamos $A : D(A) \subset X \to X$ satisfazendo para algum ψ em $(\pi/2\,,\,\pi]$ que $\Sigma = \{\lambda, |\arg \lambda| < \psi\}$ esteja contido no conjunto resolvente de A e $||(\lambda - A)^{-1}|| \leq \frac{C}{|\lambda|}$ quando $\lambda \in \Sigma$. se além disso A for

fechado e $D(A)$ denso, dizemos que $-A$ é um operador setorial.

I_{15} *Teorema:*

Suponhamos $A : D(A) \subset X \to X$ densamente definido e $-A$ operador setorial, com a, C e ψ reais tais que $\pi/2 < \psi \leqq \pi$ e $\Sigma = \{\lambda \ |\arg(\lambda-a) < \psi\} \subset \rho(A)$ e nesse conjunto Σ, $||(\lambda-A)^{-1}|| \leqq \dfrac{C}{|\lambda-a|}$.

Então A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $\{e^{At}, t \geqq 0\} \subset L(X)$; $t \to e^{At}$ estende-se a uma função analítica que vai de $\{t \in C : |\arg t| < \frac{\pi}{2} - \psi\}$ em $L(X)$.

Além disso $||e^{At}||_{L(X)} \leqq Me^{at}$ e $||Ae^{At}|| \leqq Mt^{-1}e^{at}$ para $t > 0$.

Ver [1], p. 27.

CAPÍTULO II

POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS DE OPERADORES

II_1 Teorema:

Seja A um operador fechado, densamente definido num espaço de Banach X cujo resolvente contenha $(-\infty,0]$ e tal que $||\lambda(\lambda-A)^{-1}|| \leq M$ quando $\lambda \leq 0$, para alguma constante M. Então $\exists\ \beta \in (0,\pi/2)$ tal que o conjunto $\Sigma = \{\lambda;\ |\arg \lambda| \geq \pi-\beta\} \subset \rho(A)$ e além disso $||(\lambda-A)^{-1}|| \leq \dfrac{\tilde{M}}{|\mathrm{Re}\lambda|}$, para alguma constante $\tilde{M}$.

Prova:

Seja $R > 0$ e $\lambda \in \rho(A)$, então $(\lambda-A)^{-1} - (R-A)^{-1} =$
$= (\lambda+R)(\lambda-A)^{-1}(-R-A)^{-1}$.

Logo $(\lambda-A)^{-1} = (-R-A)^{-1}[I+(\lambda+R)(\lambda-A)^{-1}]$.

Mas $(I-(\lambda+R)(-R-A)^{-1})(I+(\lambda+R)(\lambda-A)^{-1}) = I$, e se $|\lambda+R|\ ||(-R-A)^{-1}|| < \frac{1}{K}$, $K > 1$, $(I-(\lambda+R)(-R-A)^{-1})^{-1}$ será limitado e $||(I-(\lambda+R)(-R-A)^{-1})^{-1}|| \leq \dfrac{K}{K-1}$.

Teríamos então $(\lambda-A)^{-1} = (-R-A)^{-1}[I-(\lambda+R)(-R-A)^{-1}]^{-1}$.

Assim seja $\lambda = -R+iS$, R,S reais, $R > 0$ e $\psi = \arg \lambda$; então $|\mathrm{tg}\ \psi| = \dfrac{|\lambda+R|}{R}$.

Se impusermos que $\dfrac{|\lambda+R|}{R} < \dfrac{1}{KM}$ então $|\lambda+R|\ ||(-R-A)^{-1}|| < \frac{1}{K}$ já que $|\lambda+R|\ ||-R-A)^{-1}|| = \dfrac{|\lambda+R}{R}.R||(-R-A)^{-1}|| < \dfrac{1}{K.M}.M = \frac{1}{K}$.

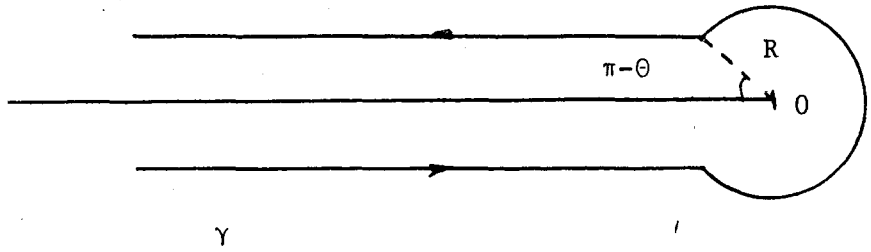
Desta forma $||(\lambda-A)^{-1}|| \leq ||(-R-A)^{-1}||.||I-(\lambda+R)(-R-A)^{-1})^{-1}|| \leq$
$\leq \dfrac{M}{R} \cdot \dfrac{K}{K-1} = \dfrac{\tilde{M}}{|\mathrm{Re}\ \lambda|}$ como queríamos.

II_2 Definição:

Seja A satisfazendo hipóteses do teoremsa II_1. Então para qualquer $\alpha > 0$ definimos:

$A^{-\alpha} = \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda$ onde γ é o seguinte contorno em $\rho(A)$:

$$\gamma = \begin{cases} x-iR\,\mathrm{sen}\Theta, & x \in (-\infty,-R\cos\Theta] \\ Re^{ix}, & x \in [\Theta-\pi,\pi-\Theta] \\ -x+iR\,\mathrm{sen}\Theta, & x \in [R\cos\Theta,\infty) \end{cases}, \quad \Theta \in (0,\tfrac{\pi}{2}] \quad \text{e} \quad R > 0 .$$



Observação:

$\int_\gamma \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda$ converge e é operador linear contínuo pois pelo teorema anterior, para λ dentro da região Σ, $||(\lambda-A)^{-1}|| \leq \frac{\tilde{M}}{\mathrm{Re}\,\lambda}$; assim se indicarmos por γ_Σ a parte de γ que intercepta a região Σ e por γ_β o restante de γ, para $x \in X$ teremos:

$$||\int_\gamma \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda|| \leq ||\int_{\gamma_\beta} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda|| + ||\int_{\gamma_\Sigma} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda||$$

$$\leq ||x||\,\mathrm{cte} + \int_{\gamma_\Sigma} \tilde{M}|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-1-\alpha}||x||\,|d\lambda| \leq \mathrm{cte}||x|| \quad \text{já que } |\mathrm{Re}\,\lambda|^{-1-\alpha} \to 0$$

quando $|\mathrm{Re}\,\lambda| \to +\infty$.

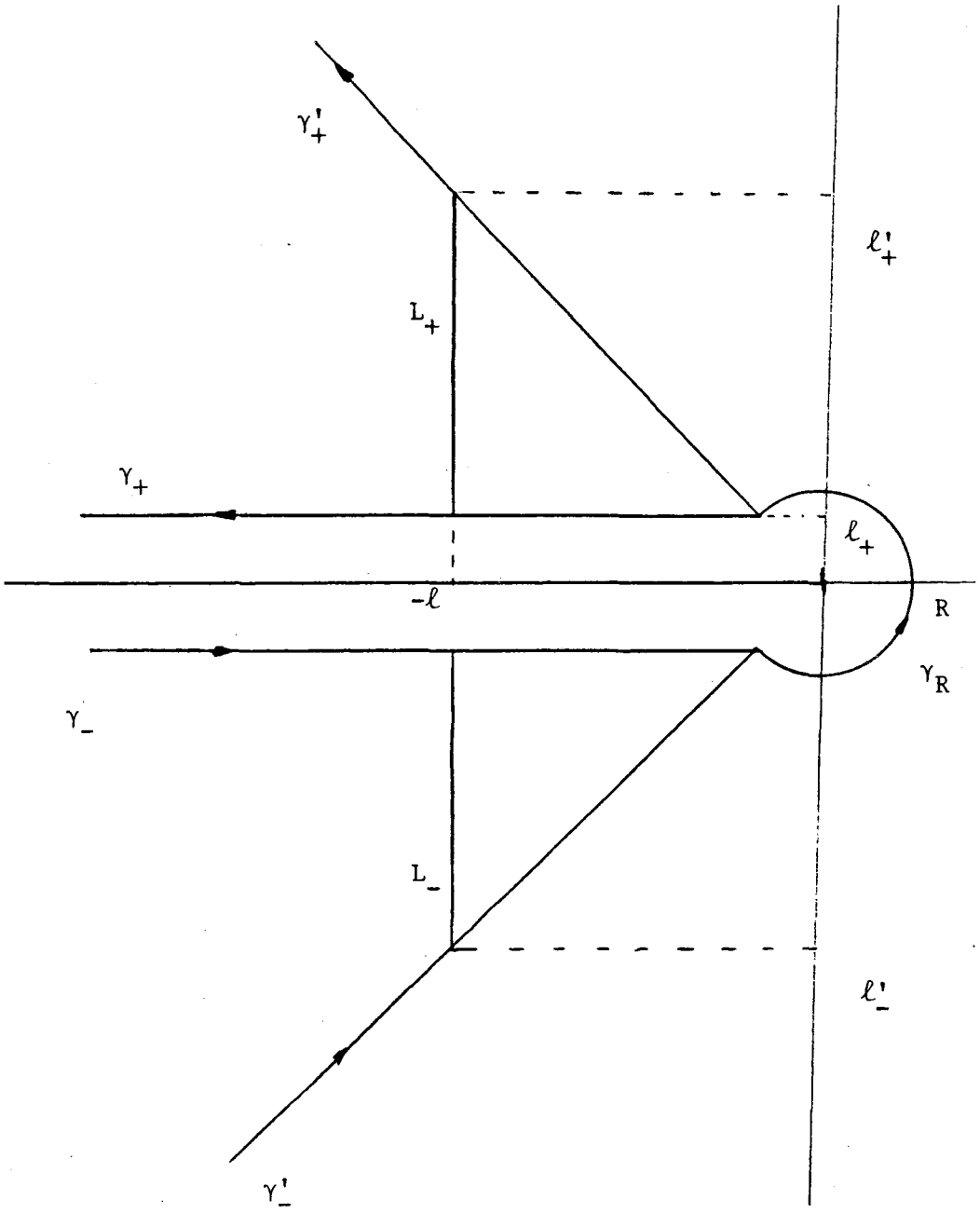
II_3 Teorema:

$$\text{Se} \quad \gamma' = \begin{cases} re^{i\Theta}, & r \in (-\infty,-R] \\ Re^{ix}, & x \in [\Theta-\pi,\pi-\Theta] \\ re^{i(\pi-\Theta)}, & r \in [R,\infty) \end{cases}$$

e $\gamma' \subset \Sigma$ então $\frac{-1}{2\pi i}\int_{\lambda'} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda = \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda$, onde γ é o caminho dado na definição II_2.

Prova:

Tomamos $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $|tg(\pi-\Theta)| < \frac{1}{KM}$ com $K > 1$ e M é a constante dada no Teorema II_1.



Seja $\gamma' = \gamma'_- \cup \gamma_R \cup \gamma'_+$ e $\gamma = \gamma_- \cup \gamma_R \cup \gamma_+$.

Unindo γ'_+ e γ_+ por semireta L_+ paralela ao eixo vertical teremos um caminho fechado dado por $L_+ \cup (-\gamma'_+) \cup \gamma_+$.

Seguindo esquema anterior teremos que:

$$||\int_{L_+} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}d\lambda|| \leq \int_{\ell_+}^{\ell'_+}(\sqrt{\ell^2+y^2})^{-\alpha}\frac{\tilde{M}}{\ell}dy \leq \int_{\ell_+}^{\ell'_+} M\ell^{-\alpha-1}dy =$$

$$= \tilde{M}(\ell'_+ - \ell_+).\ell^{-\alpha-1} \to 0 \quad \text{se} \quad \ell \to \infty.$$

Segue que $\int_{\gamma_+} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}d\lambda = \int_{\gamma'_+} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}d\lambda$ e analogamente

$\int_{\gamma_-} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}d\lambda = \int_{\gamma'_+} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}d\lambda$, como queríamos.

Observação:

Note que $A^{-\alpha}$ é invariante sobre qualquer caminho γ contornando eixo real negativo, desde que:

a) $\gamma \subset \rho(A)$

b) Somente uma parte limitada de γ esteja fora de Σ.

II_4 *Teorema:*

Se $\alpha \in (0,1)$ então:

$$A_x^{-x} = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(s+A)^{-1}x\,ds$$

Prova:

Temos que $A_x^{-x} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}d\lambda$ onde γ' é o contorno do teorema II_3.

Assim $\gamma' = \gamma'_- \cup \gamma_R \cup \gamma'_+$.

$$||\int_{\gamma'} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda|| \leq |\int_{\pi+\Theta}^{\pi-\Theta} R^{-\alpha+1}M\,d\Theta|\;||x|| \leq 2\Theta.M.||x||\,R^{1-\alpha} \to 0$$

quando $R,\Theta \to 0$.

Mostremos então que

$$\int_{\gamma'_+} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda \to e^{-i\pi\alpha}\int_0^\infty r^{-\alpha}(r+A)^{-1}x\,dr \quad \text{quando} \quad R,\Theta \to 0.$$

Em primeiro lugar

$$\int_{\gamma'_+} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}d\lambda = \int_R^\infty (re^{i(\pi-\Theta)})^{-\alpha}(re^{i(\pi-\Theta)}-A)^{-1}e^{-i(\pi-\Theta)}xdr$$

$$= \int_R^\infty r^{-\alpha}e^{i(\pi-\Theta)(1-\alpha)}(re^{i(\pi-\Theta)}-A)^{-1}xdr$$

e $||r^{-\alpha}e^{i(\pi-\Theta)(1-\alpha)}(re^{i(\pi-\Theta)}-A)^{-1}x|| \leq$

$$\leq \begin{cases} r^{-\alpha}\frac{M}{r}||x|| & \text{se } r > R_o \\ r^{-\alpha}\overline{M}||x|| & \text{se } 0 \leq r \leq R_o \end{cases}$$

$$\therefore \quad ||\int_{\gamma'_+} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}d\lambda \leq \int_R^{R_o} \overline{M}r^{-\alpha}||x||dr + \int_{R_o}^\infty Mr^{-\alpha-1}||x||dr < \infty \quad \text{se} \quad R \to 0.$$

Então $||\int_o^\infty r^{-\alpha}e^{i(\pi-\Theta)(1-\alpha)}(re^{i(\pi-\Theta)}-A)^{-1}xdr +$

$$+ \int_o^\infty e^{-i\pi\alpha}r^{-\alpha}(r+A)^{-1}xdr|| = ||\int_o^\infty e^{-i\pi\alpha}r^{-\alpha}(e^{-i\Theta(1-\alpha)}(re^{i(\pi-\Theta)}-A)^{-1} +$$

$$+ (r+A)^{-1})xdr|| \leq ||x|| \int_o^\infty r^{-\alpha}(||e^{-i\Theta(1-\alpha)}[re^{i(\pi-\Theta)}-A)^{-1}+(r+A)^{-1}]|| +$$

$$+ |e^{-i\Theta(1-\alpha)}-1| \, ||(r+A)^{-1}||)dr =$$

$$= \int_o^\infty ||x||r^{-\alpha}.(r|e^{-i\Theta}+1| \, ||(re^{i(\pi-\Theta)}-A)^{-1}(r+A)^{-1}|| +$$

$$+ |e^{-i\Theta(1-\alpha)}-1| \, ||(r+A)^{-1}||)dr.$$

Integrando de 0 a R_o e de R_o a ∞, teremos que essa integral vai para zero quando $\Theta \to 0$, $\forall x \in X$.

Usando o mesmo raciocínio teremos

$$\int_{\gamma'_-} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}xd\lambda \to e^{i\pi\alpha}\int_o^\infty r^{-\alpha}(r+A)^{-1}xdr \quad \forall x \in X,$$

quando $R \to 0$ e $\Theta \to 0$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda = \frac{-e^{-i\pi\alpha}+e^{i\pi\alpha}}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}r^{-\alpha}(r+A)^{-1}x\,dr =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_{0}^{\infty}r^{-\alpha}(r+A)^{-1}x\,dr \quad \text{como queríamos.}$$

II_5 Lema:

Se γ é o contorno dado na definição II_2 então:

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1}d\mu = \underset{\mu=\lambda}{\text{Resíduo}}\ \mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1} = \lambda^{-\alpha}$$

quando λ é um ponto à direita de γ e a integral será nula se λ estiver à esquerda de γ.

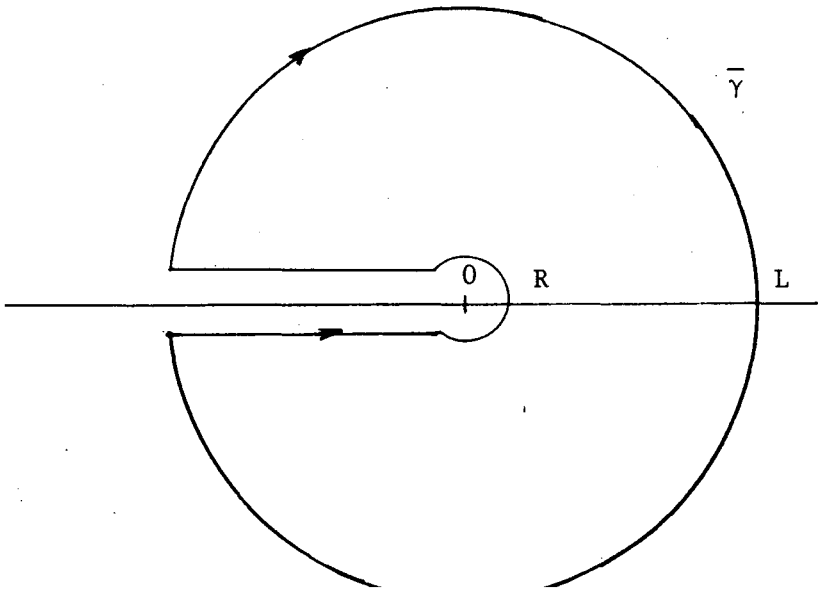
Prova:

Suponhamos λ à direita de γ.

Seja $\bar{\gamma}$ o seguinte contorno fechado.

$$\bar{\gamma} = \begin{cases} x - iR\operatorname{sen}\theta, & x \in [-L,-R\cos\theta] \\ Re^{ix} & x \in [\theta-\pi,\pi-\theta] \\ -x+iR\operatorname{sen}\theta, & x \in [R\cos\theta,L] \\ Le^{-ix}, & x \in [\psi-\pi,\pi-\psi] \end{cases}$$

onde L é real positivo e $\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-R\operatorname{sen}\theta}{L}\right)$.



Assim $\frac{-1}{2\pi i}\int_{\bar{\gamma}} \mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1}d\mu = \underset{\mu=\lambda}{\text{Resíduo}}\ \mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1} = \lambda^{-\alpha}$

Além disso se $\gamma_L = Le^{-ix}$, $x \in [\psi-\pi,\pi-\psi]$

$$\lim_{L\to\infty}\int_{\gamma_L} \mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1}d\mu = 0 \quad \text{pois} \quad |\mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1}| \leq (\frac{K-1}{K})|\text{Re}\mu|^{-\alpha-1}$$

para $L > K|\lambda|$ e $K > 1$.

Logo $\lim_{L\to\infty} \frac{-1}{2\pi i}\int_{\bar{\gamma}_L} \mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1}d\mu = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma} \mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1}d\mu = \lambda^{-\alpha}$

como queríamos.

Da mesma forma, se λ estiver à esquerda de γ, a integral será nula já que o integrando será analítico no interior de $\bar{\gamma}_L$, $\forall L$.

II$_6$ *Teorema:*

Para qualquer constantes positivas α e β, tem-se $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$.

Prova:

Suponhamos, sem perda de generalidade, γ' à esquerda de γ. Então

$$A^{-\beta}A^{-\alpha}x = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \lambda^{-\beta}(\lambda-A)^{-1}(\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma} \mu^{-\alpha}(\mu-A)^{-1}xd\mu)d\lambda=$$

Mas $(\mu-\lambda)^{-1}[(\lambda-A)^{-1}-(\mu-A)^{-1}] = (\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}$ quando $\lambda,\mu \in \rho(A)$, logo

$$A^{-\beta}A^{-\alpha}x = (\frac{-1}{2\pi i})^2\int_{\gamma'}\int_{\gamma} \lambda^{-\beta}\mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1}[(\lambda-A)^{-1}-(\mu-A)^{-1}]xd\mu d\lambda =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma'}[\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma} \mu^{-\alpha}(\mu-\lambda)^{-1}d\mu]\lambda^{-\beta}(\lambda-A)^{-1}xd\lambda +$$

$$+ (\frac{-1}{2\pi i})\int_{\gamma}[\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \lambda^{-\beta}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda]\mu^{-\alpha}(\mu-A)^{-1}xd\mu.$$

Pelo Lema II_5

$$A^{-\beta}A^{-\alpha}x = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)\int_{\gamma'} \lambda^{-\alpha}\lambda^{-\beta}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda = A^{-(\alpha+\beta)}x$$ como queríamos.

II_7 Teorema:

Se $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é operador injetivo.

Prova:

Se $A^{-\alpha}x = 0 \Rightarrow A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = 0$ para $n > \alpha$. Assim pelo teorema anterior $A^{-n+\alpha-\alpha}x = A^{-n}x = 0$; mas se n é inteiro positivo $x = 0$. Portanto $A^{-\alpha}$ é injetivo.

II_8 Definição:

Se $\alpha \geqq 0$, $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$ e $A^{\alpha} : D(A^{\alpha}) \subset X \to X$ é a inversa de $A^{-\alpha}$. Definimos $A^{o} = I$.

II_9 Teorema:

a) Para $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é operador contínuo;

b) Se $\alpha \geqq \beta$ então $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$;

c) Para $\forall\, \alpha > 0$, $D(A^{\alpha})$ é denso e A^{α} é fechado;

d) Se $x \in D(A^{\gamma})$ e $\gamma = \max(\alpha,\beta,\alpha+\beta)$ então $A^{\alpha}A^{\beta}x = A^{\beta}A^{\alpha}x = A^{\alpha+\beta}x$;

e) Se $x \in D(A^{\alpha})$ então $e^{-At}x \in D(A^{\alpha})$ e $e^{-At}A^{\alpha}x = A^{\alpha}e^{-At}x$;

f) Se $x \in D(A^{\alpha})$ e $\lambda \in \rho(A)$ então $A^{\alpha}(\lambda-A)^{-1}x = (\lambda-A)^{-1}A^{\alpha}x$

g) Se A é operador setorial então $R(e^{-At}) \subset D(A^{\alpha})$ para qualquer α.

Prova:

a) ver observação que segue definição II_2.

Suponhamos $A^{-\alpha}$ limitado quando $0 < \alpha < 1$.

b) $\alpha \geq \beta \Rightarrow D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$.

De fato

$x \in D(A^{\alpha})$ $\exists\, y$ tal que $x = A^{-\alpha}y$, mas por II_2
$A^{-\alpha+\beta}.A^{-\beta} = A^{-\beta}.A^{-\alpha+\beta} = A^{-\alpha}$ uma vez que β e $-\beta+\alpha$ são não negativos.
Logo $x = A^{-\beta}.A^{-\alpha+\beta}.y = A^{-\beta}(A^{-\alpha+\beta}y)$ $\therefore$ $x \in D(A^{\beta})$.

c) $D(A^{\alpha})$ é denso e A^{α} é fechado, $\alpha > 0$. De fato:

A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, portanto de classe C^{o} e $D(A)$ é denso, logo $D(A^{n})$ é denso $n \in N$. (ver I_{13}).

Mas para todo α positivo, $\exists\, n \in N$ tal que $\alpha \leq n$.

Pelo ítem b da demonstração

$D(A^{n}) \subset D(A^{\alpha})$

Portanto $D(A^{\alpha})$ é denso.

d) $A^{\alpha}A^{\beta}x = A^{\beta}A^{\alpha}x = A^{\alpha+\beta}x$ quando $x \in D(A^{\gamma})$ e $\gamma = \max(\alpha,\beta,\alpha+\beta)$

1) $\alpha,\beta < 0$ (teorema II_6)

2) $\alpha,\beta > 0$ $\gamma = \alpha+\beta$

Assim $x \in D(A^{\gamma})$ implica na existência de um $y \in X$ tal que $x = A^{-(\alpha+\beta)}y$; mas por II_6 $x = A^{-\beta}A^{-\alpha}y = A^{-\alpha}A^{-\beta}x$

Logo

$A^{\alpha+\beta}x = A^{\alpha+\beta}.A^{-(\alpha+\beta)}y = y$

$A^{\alpha}A^{\beta}x = A^{\alpha}A^{\beta}A^{-\beta}A^{-\alpha}y = y$

$A^{\beta}A^{\alpha}x = A^{\beta}A^{\alpha}A^{-\alpha}A^{-\beta}y = y$

$\therefore$ $A^{\alpha+\beta}x = A^{\alpha}A^{\beta}x = A^{\beta}A^{\alpha}x$ $\forall x \in D(A^{\gamma})$

3) $\alpha < 0 < \beta$ $\gamma = \beta$

Suponhamos $\alpha + \beta < 0$

Se $x \in D(A^{\beta}) \Rightarrow x \in D(A^{\alpha}) \cap D(A^{\alpha+\beta})$ pois $\alpha,\alpha+\beta < \beta$

Logo $A^{\alpha+\beta}x = A^{\alpha+\beta}A^{-\beta}y = A^{\alpha}y$ para algum $y \in X$.

Por outro lado $A^{\beta}A^{\alpha}x = A^{\beta}A^{\alpha}A^{-\beta}y = A^{\beta}A^{-\beta}A^{\alpha}y = A^{\alpha}y$

$\therefore$ $\forall x \in D(A^{\gamma})$, $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}A^{\alpha}$

Suponhamos $\alpha + \beta < 0$,

Assim se $x \in D(A^{\alpha}) \Rightarrow x = A^{-(\alpha+\beta)}z$

Então $A^{\alpha+\beta}x = A^{\alpha+\beta}A^{-\alpha-\beta}z = z$; pela parte anterior

$A^{\alpha}A^{\beta}x = A^{\alpha}A^{\beta}A^{-\alpha-\beta}z = A^{\alpha}A^{-\alpha}z = z$ e

$A^{\beta}A^{\alpha}x = A^{\beta}A^{\alpha}A^{-\alpha-\beta}z = z$

$\therefore \ \forall x \in D(A^{\gamma}), \ A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}A^{\alpha}$

e) Se $\alpha > 0$ e $x \in D(A^{\alpha})$

$$e^{-At}A^{-} x = e^{-At}\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)\int_{\gamma} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}x d\lambda).$$

Mas e^{-At} é operador limitado e comuta com o resolvente de A, logo:

$$e^{-At}A^{-\alpha}x = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma} \lambda^{-\alpha}e^{-At}(\lambda-A)^{-1}x d\lambda =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma} \lambda^{-\alpha}(\lambda-A)^{-1}\, e^{-At}x d\lambda = A^{-\alpha}e^{-At}x.$$

Ainda para $\alpha > 0$, se $x \in D(A^{\alpha})$ então $\exists\, y \in X$ tal que $x = A^{-\alpha}y$.

Agora se $x \in D(A^{\alpha})$ então $e^{-At}x = e^{-At}A^{-\alpha}A^{\alpha}x = A^{-\alpha}e^{-At}A^{\alpha}x$, o que significa que $e^{-At}x \in D(A^{\alpha})$; e mais, aplicando A^{α} em ambos os lados da igualdade tem-se $A^{\alpha}e^{-At}x = e^{-At}A^{\alpha}x$ como queríamos.

f) Se $\mu,\lambda \in \rho(A) \Rightarrow (\lambda-A)^{-1}$ e $(\mu-A)^{-1}$ são contínuas e comutam.

Logo se $\alpha < 0$ então $D(A^{\alpha}) = X$ e

$$A^{\alpha}(\lambda-A)^{-1}x = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma} \mu^{\alpha}(\mu-A)^{-1}(\lambda-A)^{-1}x d\mu =$$

$$= (\lambda-A)^{-1}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \mu^{\alpha}(\mu-A)^{-1}x d\mu\right) = (\lambda-A)^{-1}A^{\alpha}x$$

Se $\alpha > 0$ e $x \in D(A^{\alpha})$ $x = A^{-\alpha}y$, $y \in x$.

$\therefore \ A^{\alpha}(\lambda-A)^{-1}x = A^{\alpha}(\lambda-A)^{-1}A^{-\alpha}y = (\lambda-A)^{-1}y \quad (\lambda-A)^{-1}A^{\alpha}x$

g) $R(e^{-At}) \subset D(A^{\alpha})$ para $t > 0$ e $\alpha \geqq 0$ se A setorial.

De fato,

da proposição I_{11} temos $R(e^{-At}) \subset D(A)$.

Assim e^{-At} aplica X em D(A), $D(A^{K-1})$ em $D(A^K)$ para $K = 1,2,\ldots$ Se $x \in D(A^{K-1}) \Rightarrow x = A^{1-K}y$. Então $e^{-At}x = e^{-At}A^{1-K}y =$ $= A^{1-K}e^{-At}y$ (ver I_{11} a)).

Mas $e^{-At}y \in D(A)$ logo $e^{-At}y = A^{-1}z$

$\therefore$ $e^{-At}x = A^{1-K}A^{-1}z = A^{-K}z$ para $K = 2,3,\ldots$ como queríamos.

Assim escrevendo $e^{-At}x = (e^{-A\frac{t}{m}})^m x$ vemos que $e^{-At}x$ aplica X em $D(A^m)$ para $m = 0,1,2,\ldots$

Mas do item b temos $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ quando $\alpha \geqq \beta$ e qualquer real positivo está entre dois inteiros positivos. Logo $R(e^{-At}) \subset D(A^\alpha)$ $\forall\ \alpha \geqq 0$.

II_{10} Teorema:

Se $\alpha \in [0,1]$, $x \in X$ e $u > 0$ então $||(A+\mu)^{-1}x|| \leqq$ $\leqq K\mu^{\alpha-1}\,||A^{-\alpha}x||$.

Prova:

Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ trivial.

Se $\alpha \in (0,1)$ temos do teorema II_4 que

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(s+A)^{-1}ds$$

$||s(s+A)^{-1}|| \leqq M$ para $s \geqq 0$ e $||(A+s)(A+s)^{-1}|| = 1$

$\therefore$ $||A(s+A)^{-1}|| \leqq 1+M$ $s \geqq 0$.

$A^{-\alpha}$ é contínuo $\therefore$ $D(A^{-\alpha}) = X$ $\alpha \geqq 0$ e $(A+\mu)^{-1}x = (A+\mu)^{-1}A^\alpha A^{-\alpha}x$.

Por II_9 (f) $(A+\mu)^{-1}x = A^{\alpha}(A+\mu)^{-1}A^{-\alpha}x$ e

Por II_9 (d) $(A+\mu)^{-1}x = A^{\alpha-1}(A(A+\mu)^{-1}A^{-\alpha}x) =$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi(\alpha-1)}{\pi}\int_0^{\infty} s^{\alpha-1}(s+A)^{-1}A(A+\mu)^{-1}A^{-\alpha}x\, ds =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\left(\int_0^{\mu} + \int_{\mu}^{\infty}\right) s^{\alpha-1}(A+s)^{-1}A(A+\mu)^{-1}A^{-\alpha}x\, ds =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\mu} s^{\alpha-1}(A(A+s)^{-1})(A+\mu)^{-1}A^{-\alpha}x\, ds +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_{\mu}^{\infty} s^{\alpha-1}(s+A)^{-1}(A(A+\mu)^{-1})A^{-\alpha}x\, ds$$

Logo $||(A+\mu)^{-1}x|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\mu} s^{\alpha-1}||A(s+A)^{-1}||\,||(A+\mu)^{-1}||\,||A^{-\alpha}x||ds$

$$+ \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_{\mu}^{\infty} s^{\alpha-1}||(A+s)^{-1}||\,||A(A+\mu)^{-1}||\,||A^{-\alpha}x||ds \leq$$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\mu} s^{\alpha-1}(M+1)M\mu^{-1}||A^{-\alpha}x||ds +$$

$$+ \int_{\mu}^{\infty} s^{\alpha-1}Ms^{-1}(M+1)||A^{-\alpha}x||ds \leq$$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}(M+1)^2||A^{-\alpha}x||\left(\int_0^{\mu}\mu^{-1}s^{\alpha-1}ds + \int_{\mu}^{\infty} s^{\alpha-2}ds\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}(M+1)^2||A^{-\alpha}x||\,\frac{\mu^{\alpha-1}}{\alpha(1-\alpha)} \qquad 0 < \alpha < 1$$

mas se $\alpha \to 1$ então $\frac{\operatorname{sen}\pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)} \to 1$

e se $\alpha \to 0$ então $\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha} \to 1$

Logo $||(A+\mu)^{-1}x|| \leq K\mu^{\alpha-1}||A^{-\alpha}x||$ para $x \in X$ e $\alpha \in (0,1)$.

II$_{11}$ *Teorema*

a) Suponhamos $x \in D(A^{\alpha})$ para algum $\alpha \in (0,1]$. Então definimos $x_{\varepsilon} = (I+\varepsilon A)^{-1}x$ para $\varepsilon > 0$ e teremos:

$$||x_{\varepsilon} - x|| \leq K\varepsilon^{\alpha}||A^{\alpha}x||$$

$$||Ax_{\varepsilon}|| \leq K\varepsilon^{\alpha-1}||A^{\alpha}x|| \quad \forall\varepsilon > 0$$

Prova:

$$x_{\varepsilon} = (I+\varepsilon A)^{-1}x \quad x \in D(A^{\alpha})$$

$$Ax_{\varepsilon} = A(I+\varepsilon A)^{-1}A^{-\alpha}A^{\alpha}x$$

$$= AA^{-\alpha}(I+\varepsilon A)^{-1}A^{\alpha}x$$

$$= A^{-\alpha}A(I+\varepsilon A)^{-1}A^{\alpha}x$$

Note que $(I+\varepsilon A)^{-1}A^{\alpha}x \in D(A)$

Portanto

$$||Ax_{\varepsilon}|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-\alpha}||(s+A)^{-1}A(I+\varepsilon A)^{-1}A^{\alpha}x||ds \leq$$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\varepsilon^{-1}} s^{-\alpha}||A(s+A)^{-1}||\,||(I+\varepsilon A)^{-1}||\,||A^{\alpha}x||ds +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_{\varepsilon^{-1}}^{\infty} s^{-\alpha}||(s+A)^{-1}||\,||A(I+\varepsilon A)^{-1}||\,||A^{\alpha}x||ds \leq$$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\left(\int_0^{\varepsilon^{-1}} s^{-\alpha}(M+1)M||A^{\alpha}x||ds + \int_{\varepsilon^{-1}}^{\infty} s^{-\alpha}Ms^{-1}\varepsilon^{-1}(M+1)||A^{\alpha}x||ds\right)$$

$$\leq (M+1)^2\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}||A^{\alpha}x||\left(\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{1-\alpha} + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{\alpha}\right)$$

$$\therefore\ ||Ax_{\varepsilon}|| \leq K\varepsilon^{\alpha-1}||A^{\alpha}x|| \quad \text{onde} \quad K = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}(M+1)^2$$

Agora, $(x_\varepsilon - x) = (I+\varepsilon A)^{-1} x - x$ e

$(I+\varepsilon A)(I+\varepsilon A)^{-1}x = (I+\varepsilon A)x_\varepsilon = x$

$\therefore\ x_\varepsilon + \varepsilon A x_\varepsilon = x$

$x_\varepsilon - x = -\varepsilon A x_\varepsilon$

logo $||x_\varepsilon - x|| = \varepsilon ||Ax_\varepsilon|| = K\varepsilon^\alpha ||A^\alpha x||$

b) Suponha $x \in X$ e que para algum $\alpha, 0 < \alpha \leqq 1$ e $B < \infty$, existe x_ε em $D(A)$ para todo $\varepsilon > 0$, tal que

$||x_\varepsilon - x|| \leqq B\varepsilon^\alpha;\ ||x|| \leqq B$

$||Ax_\varepsilon|| \leqq B\varepsilon^{\alpha-1};\ \forall \varepsilon > 0$

Então $x \in D(A\ )$ para qualquer $\beta \in (0,\alpha)$ e $||A^\beta x|| \leqq K_{(\alpha,\beta)} \cdot B$ para uma constante $K_{(\alpha,\beta)}$ dependendo somente de A, α, β.

Prova:

$\beta - 1 < 0\ \therefore\ \forall x,\ A^{\beta-1}x$ está definido.

Mostremos que $AA^{\beta-1}x$ existe e é igual a $A^\beta x$.

Vejamos primeiramente que $\int_0^\infty s^{\beta-1} A(s+A)^{-1} x\, ds$ converge.

Para todo $\mu > 0$

$||A(A+\mu)^{-1}x|| \leqq ||A(\mu+A)^{-1}(x-x_\varepsilon)|| + ||(\mu+A)^{-1}Ax_\varepsilon||$

mas $||A(\mu+A)^{-1}(x-x_\varepsilon)|| \leqq (M+1)||x-x_\varepsilon|| \leqq (M+1)B\varepsilon^\alpha$ e

$||(\mu+A)^{-1}Ax_\varepsilon|| \leqq M\mu^{-1}B\varepsilon^{\alpha-1} \leqq MB\mu^{-1}\varepsilon^{\alpha-1}$ tomamos $\varepsilon = \mu^{-1}$ e teremos:

$||A(\mu+A)^{-1}x|| \leqq (2M+1)B\mu^{-\alpha}.$

Por outro lado

$||A(A+\mu)^{-1}x|| \leqq (M+1)||x|| \leqq (2M+1)B$

$\therefore\ ||A(A+\mu)^{-1}x|| \leqq (2M+1)B\min\{\mu^{-\alpha}, 1\}$

Então $\int_0^\infty ||s^{\beta-1}A(s+A)^{-1}x||ds \leq$

$$\leq \int_0^1 s^{\beta-1}||A(s+A)^{-1}x||ds + \int_1^\infty s^{\beta-1}||A(s+A)^{-1}x||ds$$

$$\leq (2M+1)B(\int_0^1 s^{\beta-1}ds + \int_1^\infty s^{\beta-1}s^{-\alpha}ds) = B(2M+1)\frac{\beta}{\beta(\alpha-\beta)} = K_{(\alpha,\beta)}.B$$

Agora $\frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty s^{\beta-1}A(s+A)^{-1}x\,ds = \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty s^{\beta}(s+A)^{-1}x\,ds$

De fato,

Seja $J_\beta x = \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty s^{\beta-1}A(s+A)^{-1}x\,ds$

Já vimos que $||J_\beta x|| \leq K_{(\alpha,\beta)}.B$

Seja $y_R = \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^R s^{\beta-1}(s+A)^{-1}x\,ds$

$\lim_{R\to\infty} y_R = A^{\beta-1}x$; A é fechado e $\lim_{R\to\infty} Ay_R = J_\beta x$

$\therefore A^{\beta-1}x \in D(A)$

E para todo $y \in D(A)$ temos

$A^{-\beta}Ay = AA^{-\beta}y = A^{1-\beta}y$ pois $1 = \max\{1,1-\beta,-\beta\}$

$A^{-\beta+1}.A^{\beta-1}x = x$ e

$A^{-\beta}AA^{\beta-1}x = A^{-\beta}(AA^{\beta-1}x)$

$\therefore$ $x \in D(A^\beta)$ e $||A^\beta x|| = ||J_\beta x|| \leq K_{(\alpha,\beta)}.B$

II_{12} *Teorema:*

Existe uma constante K dependendo somente de A, tal que $||A^\alpha x|| \leq K||Ax||^\alpha||x||^{1-\alpha}$ para $0 \leq \alpha \leq 1$ (ou $||A^\alpha x|| \leq M_0 a^\alpha||x|| + M_1 a^{\alpha-1}||Ax||$ $\forall a > 0$)

Prova:

$x \in D(A)$ e $1 = \max\{1,\alpha,\alpha-1\}$

Logo $A^{\alpha}x = A^{\alpha-1}Ax$

$$A^{\alpha}x = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty} s^{\alpha-1}(s+A)^{-1}Ax\, ds =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\left(\int_0^{a} + \int_a^{\infty}\right)s^{\alpha-1}(s+A)^{-1}Ax\, ds \quad \forall a > 0$$

$$\text{logo} \quad A^{\alpha}x = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\left(\int_0^{a} s^{\alpha-1}A(s+A)^{-1}x\, ds + \int_a^{\infty} s^{\alpha-1}(s+A)^{-1}Ax\, ds\right)$$

$$\therefore \quad ||A^{\alpha}x|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}(M+1)\left(||x||\,\frac{a^{\alpha}}{\alpha} + ||Ax||\,\frac{a^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right)$$

$$= (M+1)\,\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\,a^{\alpha}||x|| + (M+1)\,\frac{\operatorname{sen}\pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\,a^{\alpha-1}||Ax||$$

que é uma das desigualdades requeridas.

Continuando o cálculo, se $a = \dfrac{||Ax||}{||x||}$ teremos

$$||A^{\alpha}x|| \leq \frac{(M+1)}{\alpha(1-\alpha)}\,\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\,||Ax||^{\alpha}||x||^{1-\alpha}$$

que é uniformemente limitado para $\alpha \in (0,1)$.

Logo $||A^{\alpha}x|| \leq K||Ax||^{\alpha}.||x||^{1-\alpha} \quad \alpha \in [0,1]$.

II_{13} Teorema:

Suponha $B : D(B) \subset X \to Y$ seja linear com $D(B) \supset D(A)$ e X e Y espaços de Banach.

Suponhamos $||Bx|| \leq C||Ax||^{\alpha}||x||^{1-\alpha}$ para todo $x \in D(A)$ e constantes C,α reais $\alpha \in [0,1)$.

Então BA^{-1} é limitado e para $\beta \in (\alpha,1]$

$||Bx|| \leq K_{(\alpha,\beta)}\, C||A^{\beta}x||$, $x \in D(A^{1+\beta})$

Prova:

$x \in D(A) \Rightarrow ||Bx|| \leq C||Ax||^{\alpha}||x||^{1-\alpha}$

Seja $x \in D(A^{1+\beta}) \subset D(A) \Rightarrow A^{1+\beta}x = A^{\beta}Ax$ logo $Ax \in D(A^{\beta})$

e $Bx = (BA^{-1})(Ax) = (BA^{-1})A^{-\beta}A^{\beta}Ax$ por $II_9 d$.

Como $1+\beta = \max\{1,\beta,1+\beta\}$ ainda por $II_9 d$ teremos

$Bx = (BA^{-1})A^{-\beta}(AA^{\beta}x)$

Mas BA^{-1} é limitado pois $\forall x \in X$, $A^{-1}x \in D(A)$.

Logo $||BA^{-1}x|| \leq C||A.A^{-1}x||^{\alpha}||A^{-1}x||^{1-\alpha}$

$$\leq C||x||^{\alpha}.||A^{-1}||^{1-\alpha}||x||^{1-\alpha}$$

$$= C_1||x||$$

Logo $||Bx|| = ||BA^{-1}(\frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-\beta}(s+A)^{-1}AA^{\beta}x ds)||$

$= ||\frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}(\int_0^1 + \int_1^{\infty})(s^{-\beta}BA^{-1}(s+A)^{-1}AA^{\beta}x)ds||$; mas

$||BA^{-1}(s+A)^{-1}AA^{\beta}x|| \leq C_1(M+1)||A^{\beta}x||$

Por outro lado

$||BA^{-1}(s+A)^{-1}AA^{\beta}x|| = ||BA^{-1}A(s+A)^{-1}A^{\beta}x|| =$

$= ||B(s+A)^{-1}A^{\beta}x|| \leq C||A(s+A)^{-1}||^{\alpha}||(s+A)^{-1}||^{1-\alpha}.||A^{\beta}x||$

$\leq C(M+1)^{\alpha}M^{1-\alpha}s^{\alpha-1}||A^{\beta}x||$

$\leq C(M+1).s^{\alpha-1}||A^{\beta}x||$

Logo $||Bx|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}(\int_0^1 s^{-\beta}C_1(M+1)||A^{\beta}x||ds +$

$$+ \int_1^{\infty} s^{-\beta}C(M+1)s^{\alpha-1}||A^{\beta}x||ds).$$

$\therefore ||Bx|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}(C_1+C)(M+1)\frac{(1-\alpha)}{(1-\beta)(\beta-\alpha)}||A^{\beta}x||$

$\leq CK_{(\alpha,\beta)}||A^{\beta}x||$ para $\alpha < \beta \leq 1$ e $x \in D(A^{1+\beta})$.

II_{14} Corolário:

Se além das hipóteses do teorema II_{13} tivermos que B é um operador fechado então $||Bx|| \leq K_{(\alpha,\beta)}C||A^{\beta}x||$ $x \in D(A^{\beta})$ e $BA^{-\beta}$ é limitado onde $\beta \in (\alpha,1]$.

Prova:

Se $x \in D(A^{\beta}) \Rightarrow X = A^{-\beta}A^{\beta}x$

Logo $||Bx|| \leq ||BA^{-\beta}||\,||A^{\beta}x||$ caso $BA^{-\beta}$ seja limitado.

Mas B é fechado, assim

$$||BA^{-\beta}x|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-\beta}||B(s+A)^{-1}A^{-\beta}x||ds \quad e$$

$(s+A)^{-1}y \in D(A)$ $\forall y \in X$.

Portanto $||B(s+A)^{-1}A^{-\beta}x|| \leq C||A(s+A)^{-1}A^{-\beta}x||^{\alpha}.||(s+A)^{-1}A^{-\beta}x||^{1-\alpha} \leq$

$\leq C(M+1)^{\alpha}M^{1-\alpha}s^{\alpha-1}||A^{-\beta}x|| \leq C(M+1)s^{\alpha-1}||A^{-\beta}x||.$

Por outro lado segue do teorema II_{13} que $||B(s+A)^{-1}A^{-\beta}x|| =$

$= ||BA^{-1}A(s+A)^{-1}A^{-\beta}x|| \leq ||BA^{-1}||(M+1)||A^{-\beta}x||$

$$\text{Logo} \quad ||BA^{-\beta}x|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^1 s^{-\beta}||BA^{-1}||(M+1)||A^{-\beta}x||ds +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_1^{\infty} s^{-\beta}C(M+1)s^{\alpha-1}||A^{-\beta}x||ds =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\,\frac{(1-\alpha)}{(1-\beta)(\beta-\alpha)}(M+1)C\,||A^{-\beta}||\,||x||$$

$\therefore\ ||BA^{-\beta}|| \leq C.K_{(\alpha,\beta)} \quad \alpha < \beta \leq 1$

II_{15} Teorema:

Suponhamos $B : D(B) \subset X \to X$ linear com $D(B) \supset D(A)$ e $BA^{-\alpha}$ limitado para algum $\alpha < 1$. Suponhamos ainda que $\rho(A+B) \supset (-\infty,0]$. Então para todo $\beta \in [0,1]$ $(A+B)^{\beta}$ está definido e $D(A^{\beta}) = D((A+B)^{\beta})$.

Prova:

se $\beta = 0$ $(A+B)^{0} = I$ e $D(A^{0}) = X = D((A+B)^{0})$

se $\beta = 1$ $D(A+B) = D(A) \cap D(B) = D(A)$

$\beta \in (0,1)$. Para $(A+B)^{\beta}$ existir precisamos definir $(A+B)^{-\beta}$ e para isso verificar se:

a) $\overline{D(A+B)} = X$;

b) $(-\infty,0] \subset \rho(A+B)$;

c) $A+B$ é fechado;

d) $||\lambda(\lambda-(A+B)^{-1})|| \leq N$ para $\lambda \leq 0$ e alguma constante N.

Mas

a) está verificado pois $D(A+B) = D(A)$

b) $(-\infty,0] \subset \rho(A+B)$ por hipótese

c) para algum $\alpha < 1$, $BA^{-\alpha}$ é limitado.

Logo $\forall x \in D(A^{\alpha})$ tem-se: $||Bx|| = ||BA^{-\alpha}A^{\alpha}x|| \leq$

$$\leq ||BA^{-\alpha}|| \, ||A^{\alpha}x||$$

Assim se $x \in D(A)$ tem-se por II_{12} que

$$||Bx|| \leq ||BA^{-\alpha}||(M_0 a^{\alpha}||x|| + M_1 a^{\alpha-1}||Ax||) \quad \forall a > 0.$$

Se escolhermos $a < 1$ temos pelo teorema I_4 que $A+B$ é fechado.

d) Verifiquemos que $||\lambda(\lambda-(A+B)^{-1})|| \leq N$ $\forall \lambda \geq 0$ ou $||s(s+A+B)^{-1}|| \leq N$ $s \geq 0$.

$$(s+A+B)^{-1} = ((I+B(s+A)^{-1})(s+A))^{-1} =$$

$$= (s+A)^{-1}(I+B(s+A)^{-1})^{-1}$$

Mostremos que $||B(s+A)^{-1}|| < 1$

$$||B(s+A)^{-1}|| \leq ||BA^{-\alpha}||\,||A^{\alpha}(s+A)^{-1}|| \leq$$

$$\leq K||BA^{-\alpha}||\,(M+1)^{\alpha}s^{\alpha-1}(M+1)^{1-\alpha} \leq$$

$$\leq K||BA^{-\alpha}||\,(M+1)\,s^{\alpha-1}$$

Logo $\exists\, s_o > 0$ tal que $||B(A+s)^{-1}|| \leq \frac{1}{2}$ $s \geq s_o$.

Portanto $||(s+A+B)^{-1}|| \leq 2||(s+A)^{-1}|| \leq 2Ms^{-1}$, $s \geq s_o$.

Mas $(-\infty,0] \subset \rho(A+B) \Rightarrow s \to ||(s+A+B)^{-1}||$ é contínua para $s \in (-\infty,0]$, logo $||(s+A+B)^{-1}|| \leq J$ $s \in [0,s_o]$.

Assim $||(s+A+B)^{-1}|| \leq 2Ms_o^{-1} + J$, $\forall s \geq 0$

$||s(s+A+B)^{-1}|| \leq 2M+Js_o = K_2$ $\forall s \geq 0$

Logo $(A+B)^{\alpha}$ está definido $\forall \alpha \in [0,1]$.

Mostraremos agora que $D(A+B)^{\beta}) = D(A^{\beta})$. Para isso veremos que $A^{\beta}(A+B)^{-\beta}$ e $(A+B)^{\beta}A^{-\beta}$ são limitados quando $\beta \in [0,1]$. Pois assim se $x \in D(A^{\beta})$ existiria $y \in X$ tal que $x = A^{-\beta}y =$

$$= (A+B)^{-\beta}(A+B)^{\beta}A^{-\beta}y = (A+B)^{-\beta}z$$

Analogamente teríamos $D((A+B)^{\beta}) \subset D(A^{\beta})$.

Mostrar a limitação de $A^{\beta}(A+B)^{-\beta}$ é equivalente a mostrar limitação de $I-A^{\beta}(A+B)^{-\beta} = A^{\beta}(A^{-\beta}-(A+B)^{-\beta})$

$$||I-A^{\beta}(A+B)^{-\beta}x|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty}||s^{-\beta}A^{\beta}((s+A)^{-1}-(s+A+B)^{-1}x)||ds =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty}||s^{-\beta}A^{\beta}(s+A+B)^{-1}B(s+A)^{-1}x||ds \leq$$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty}s^{-\beta}||A^{\beta}(s+A+B)^{-1}||\,||BA^{-1}||\,||A(s+A)^{-1}x||ds$$

$||BA^{-1}||$ é limitado e $||A(s+A)^{-1}||$ também é.

$R((s+A+B)^{-1}) \subset D(A+B) = D(A)$ e para $x \in D(A)$, $A^{\beta}x = A^{\beta-1}Ax$.

Logo $||A^{\beta}(s+A+B)^{-1}x|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty}s^{\beta-1}||(s+A)^{-1}A(s+A+B)^{-1}x||\,ds$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty}s^{\beta-1}||(s+A)^{-1}A||.||(s+A+B)^{-1}x||\,ds$$

Por um lado $||(s+A+B)^{-1}||$ é limitado para $s \in [0,s_o]$, por outro lado, $||(s+A+B)^{-1}|| \leq \frac{\overline{M}}{s^{-1}}$ $s \geq 0$, em particular para $s \geq s_o$.

Logo

$$||A^{\beta}(s+A+B)^{-1}x|| \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty}s^{\beta-1}||(s+A)^{-1}A||\,||(s+A+B)^{-1}x||\,ds$$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\Big(\int_0^{s_o}s^{\beta-1}(M+1)\sup_{s\in[0,s_o]}||(s+A+B)^{-1}||x||\,ds +$$

$$+\int_{s_o}^{\infty}s^{\beta-1}(M+1)\overline{M}s^{-1}||x||\,ds \leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}||x||\,K\Big(\frac{s_o^{\beta}}{\beta}+\frac{s_o^{\beta-1}}{1-\beta}\Big)$$

que é limitado para $\beta \in (0,1)$.

Note que o caso $\beta = 0$ é trivial e $A(A+B)^{-1}$ é operador linear fechado definido em todo X logo é limitado.

$\therefore$ $A^{\beta}(A+B)^{-\beta}$ é limitado para $\beta \in [0,1]$.

Verifiquemos que $(A+B)^{\beta}A^{-\beta}$ é limitado para $\beta \in [0,1]$.

$\beta = 0$ e $\beta = 1$ é trivial

Para $\beta \in (0,1)$ temos

$$||(I-(A+B)^{\beta}A^{-\beta})x|| = ||(A+B)^{\beta}((A+B)^{-\beta}-A^{-\beta})x|| =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-\beta}||(A+B)^{\beta}((s+A+B)^{-1}-(s+A)^{-1})x||ds$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-\beta}||(A+B)^{\beta}(s+A+B)^{-1}B(s+A)^{-1}x||ds$$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-\beta}||(A+B)^{\beta}(s+A+B)^{-1}||\ ||BA^{-\alpha}||\ ||A^{\alpha}(s+A)^{-1}x||ds$$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty} \bar{K}\, s^{-\beta}||(s+A+B)^{-1}||^{1-\beta}||(s+A)^{-1}||^{1-\alpha}||x||ds$$

$$\leq \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\Big(\int_0^{s_0} \bar{K}\, s^{-\beta} \sup_{s\in[0,s_0]} (||(s+A+B)^{-1}||^{1-\beta}||(s+A)^{-1}||^{1-\alpha})||x||\, ds$$

$$+ \int_{s_0}^{\infty} \bar{K}\, s^{-\beta} \left(\frac{\bar{M}}{s}\right)^{1-\beta} \left(\frac{M}{s}\right)^{1-\alpha} ||x||\, ds\Big)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi} K\left(\frac{s_0^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{s_0^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right) \quad \forall s_0 > 0$$

Logo $(A+B)^{\beta}A^{-\beta}$ é limitado $\beta \in [0,1]$.

Observação:

Se $c \geq 0$, $D(A+c)^{\beta} = D(A^{\beta})$ $\beta \in [0,1]$.

II_{16} *Teorema:*

Seja A setorial e $\rho(A) \supset (-\infty,0]$.

Então

1) se $\alpha \geq 0$

$$||A^{\alpha}e^{-At}|| \leq M_{\alpha}t^{-\alpha} \quad t \in (0,t_0], \quad t_0 > 0$$

2) $||(e^{-At}-1)A^{-\alpha}|| \leq M_{1-\alpha}\dfrac{t^{\alpha}}{\alpha}$ para $\alpha \in (0,1]$ e $t \in [0,t_0]$.

3) $\alpha \to M_{\alpha}$ é contínua sobre $[0,\infty)$.

Prova:

1) Segue de II_9 g) que $R(e^{-At}) \subset D(A^{\alpha})$, $\alpha \geqq 0$ e $t > 0$

Além disso para $m = 1,2,3,\ldots$ $e^{-At} = (e^{-A\frac{t}{m}})^m$

Logo

$$||A^m e^{-At}|| = ||(Ae^{-At/m})^m|| \leqq ||Ae^{-At/m}||^m \leqq$$

$$\leqq (M(\tfrac{t}{m})^{-1}c)^m = M^m t^{-m} m^m$$ para $t \in (0,t_o]$. Suponhamos $M \geqq 1$ s.p.g.

Se $0 \leqq \alpha \leqq 1$ e $0 < t \leqq t_o$, por II_{12}

$$||A^{\alpha}e^{-At}|| \leqq \tilde{K}||Ae^{-At}||^{\alpha}.||e^{-At}||^{1-\alpha}$$

$$\leqq \tilde{K}M^{\alpha}t^{-\alpha}M^{1-\alpha} = KM^{\alpha}t^{-\alpha}$$

Logo $||A^{m+\alpha}e^{-At}|| = ||A^m A^{\alpha}e^{-At}|| =$

$$= ||A^m A^{\alpha}(e^{-A(t/m+1)})^{m+1}|| =$$

$$= ||[Ae^{-A(t/m+1)}]^m A^{\alpha} e^{-A(t/m+1)}|| \leqq$$

$$\leqq (M(m+1))^m t^{-m}\tilde{K}M^{\alpha}t^{-\alpha}(m+1)^{\alpha}$$

$$\leqq KM^{m+\alpha}(m+\alpha+1)^{m+\alpha}t^{-(m+\alpha)} = M_{m+\alpha}t^{-(m+\alpha)}$$

Como $\forall$ β real positivo, $\beta = m+\alpha$ então

$$||A^{\beta}e^{-At}|| \leqq M_{\beta}t^{-\beta} \qquad t \in [0,t_o]$$
$$\beta \geqq 0 .$$

Note que M_{β} é função contínua para $\beta \geqq 0$ o que demonstra o item 3.

2) $||(e^{-At}-1)A^{-\alpha}|| \leqq M_{1-\alpha}\dfrac{t^{\alpha}}{\alpha}$

$$e^{-At}-1 = \int_o^t -Ae^{-As}\,ds$$

A^{α} é fechado por II_9 c) então

$$(e^{-At}-1)A^{-\alpha} = \int_0^t -A^{-\alpha}Ae^{-As}\,ds =$$

$$= \int_0^t -A^{1-\alpha}e^{-As}\,ds$$

$$E||(e^{-At}-1)A^{-\alpha}|| \leq \int_0^t ||A^{-\alpha+1}e^{-As}||ds \leq$$

$$\leq \int_0^t M_{1-\alpha}\,s^{\alpha-1}\,ds = M_{1-\alpha}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}$$ como queríamos.

II_{17} *Corolário:*

Se A é setorial e $\rho(A+a) \supset (-\infty,0]$ para algum $a \in R$ então:

1) $R(e^{-At}) \subset D(A+a)^{\alpha}$ e $||(A+a)^{\alpha}e^{-At}|| \leq N_{\alpha}t^{-\alpha}$ quando $\alpha \geq 0$ e $t \in [0,t_o]$.

Além disso $\alpha \to N_{\alpha}$ é contínua em $[0,\infty)$.

2) $||(e^{-At}-I)(A+a)^{-\alpha}|| \leq \overline{N}_{1-\alpha}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}$ $\alpha \in (0,1]$ e $t \in [0,t_o]$.

Prova:

1) $R(e^{-(A+a)t}) \subset D((A+a)^{\alpha})$ mas e^{-at} é real, logo

$R(e^{-At}) \subset D((A+a)^{\alpha})$ $\forall\alpha$.

$||(A+a)^{\alpha}e^{-(A+a)t}|| \leq M_{\alpha}t^{-\alpha}$ $t \in [0,t_o]$

$$\therefore\ ||(A+a)^{\alpha}e^{-At}|| \leq M_{\alpha}t^{-\alpha}e^{at}$$

$$\leq cM_{\alpha}t^{-\alpha} =$$

$$= N_{\alpha}t^{-\alpha}$$

e naturalmente $\alpha \to N_{\alpha}$ contínua em $\alpha \geq 0$.

2) $||(e^{-(A+a)t}-1)(A+a)^{-\alpha}|| \leq M_{1-\alpha}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}$

Assim $||(e^{-At}-1)(A+a)^{-\alpha}|| \leq$

$$\leq ||(e^{-At}-e^{-(A+a)t} + e^{-(A+a)t}-1)(A+a)^{-\alpha}|| \leq$$

$$\leq ||e^{-At}(1-e^{-at})(A+a)^{-\alpha}|| + ||(e^{-(a+A)t}-1)(A+a)^{-\alpha}||$$

mas $||e^{-At}||$ e $||(A+a)^{-\alpha}||$ são limitados, logo o resultado segue.

II_{18} *Teorema:*

Se $X = L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, Ω é uma região lipschitziana regular no R^n e $A : D(A) \subset X \to X$ satisfaz as seguintes condições:

a) A é setorial

b) $D(A) \subset W^{m,p}(\Omega)$ para algum $m \geq 1$.

Então para $\alpha \in [0,1]$

$D(A^\alpha) \subset W^{k,q}(\Omega)$ se $k-n/q < m\alpha-n/p$ $p \leq q$

$D(A^\alpha) \subset C^\gamma(\Omega)$ se $\gamma < m\alpha-n/p$

Prova:

A^{-1} é operador contínuo e $(\frac{\partial}{\partial x})^k$ é operador fechado, sobre $W^{m,p}(\Omega)$ portanto $(\frac{\partial}{\partial x})^K A^{-1}$ é também fechado.

E mais seu domínio é todo $L_p(\Omega)$ logo, pelo teorema do gráfico fechado, $(\frac{\partial}{\partial x})^K A^{-1} : L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$ é contínuo para $|K| \leq m$.

Assim $\forall u \in D(A)$ teremos

$$||(\frac{\partial}{\partial x})^m u|| = ||(\frac{\partial}{\partial x})^m A^{-1}Au|| \leq C||Au||$$

ou melhor,

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C||Au|| \quad \forall u \in D(A).$$

Pelo teorema I_7, $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ quando $m - \frac{n}{p} \geq k-n/q$, $p \leq q$.

Assim seja B a inclusão de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{k,q}(\Omega)$.

$$\text{Se} \quad K - \frac{n}{q} \leqq \Theta(m - \frac{n}{p}) + (1-\Theta)(-\frac{n}{p}) =$$

$$= m\Theta - \frac{n}{p} \quad \text{para} \quad K \leqq \Theta m \leqq m \,,\, p \leqq q,$$

pela desigualdade de Nirenberg-Gagliardo (ver I_8)

$$||Bu|| = ||u||_{W^{k,q}} \leqq C_1 \, ||u||^{\Theta}_{W^{m,p}} \cdot ||u||^{1-\Theta}_{L_p}$$

$$\leqq C_1 C^{\Theta} \, ||Au||^{\Theta}_{L_p} \cdot ||u||^{1-\Theta}_{L_p} \quad \text{para} \quad u \in D(A).$$

Logo pelo teorema II_9, existe uma única extensão de B que aplica A^{α} em $W^{k,q}(\Omega)$ desde que $\Theta < \alpha \leqq 1$ ou seja, $D(A^{\alpha}) \subset W^{k,q}$ desde que $k - \frac{n}{q} < m\alpha - \frac{n}{p}$.

Da mesma forma, se $\gamma < m\alpha - \frac{n}{p}$, $D(A^{\alpha}) \subset C^{\gamma}(\Omega)$.

CAPÍTULO III

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE CAUCHY

III_1 Definição:

Seja X um espaço de Banach. A um operador setorial. $X^\alpha = D((A+a)^\alpha)$, onde $\alpha \in [0,1)$ com a norma do gráfico $||x||_\alpha = ||(A+a)^\alpha x||$. Além disso, a é uma constante escolhida de modo que $\rho(A+a) \supset (-\infty,0]$.

Seja U um conjunto aberto contido em $R \times X^\alpha$ e $f : U \to X$ contínua.

Uma solução de $\frac{dx}{dt} = -Ax + f(t,x)$ definida em (t_o,t_1) é uma função continuamente diferenciável $x : (t_o,t_1) \to X$ tal que:

a) $(t,x(t)) \in U$

b) $x(t) \in D(A)$

c) $t \to Ax(t) \in X$ é contínua e a equação diferencial é satisfeita para $t \in (t_o,t_1)$.

Se um valor inicial $x(t_o)$ for especificado, pedimos que $x(t) \to x(t_o)$ em X^α quando $t \to t_{o_+}$.

Suponhamos X,A,α,U como na definição III_1. Mostraremos que se f satisfizer ainda a condição de ser localmente Hölder contínua em relação a t, e localmente lipschitziana com relação a x então $x(t)$ será solução de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -Ax + f(t,x) & t \in (t_o,t_1) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

se e somente se,

$$\begin{cases} x(t) \text{ é contínua}, \\ (t,x(t)) \in U, \\ x(t) = e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds \end{cases}.$$

Mostraremos esse resultado por partes.

Para simplificar a notação onde deveria aparecer $(A+a)^{\beta}$ usaremos A^{β}.

III_2 Lema:

Seja $g : [t_o,t_1] \to X$ contínua satisfazendo $||g(t) - g(s)|| \leq$ $\leq K(t-s)^{\Theta}(s-t_o)^{-\Theta}$ para algum $\Theta > 0$. Seja A operador setorial como na definição III_1.

Então $G(t) = \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}g(s)ds$ pertence a $D(A)$ e $AG(t)$ é contínua em $(t_o,t_1]$.

Prova:

Para que $G(t) \in D(A)$ precisamos mostrar que $\lim_{h\to 0} \frac{e^{-Ah} - I}{h} G(t)$ existe.

Assim $h^{-1}(e^{-Ah}-I)G(t) = \int_{t_o}^{t} h^{-1}(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}g(s)ds$ pois $(e^{-Ah}-I)$ é operador contínuo para $h \geq 0$.

Dividindo em duas partes essa integral será:

$$\int_{t_o}^{t} h^{-1}(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}g(t)ds + \int_{t_o}^{t} h^{-1}(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))ds$$

$$= (I) + (II).$$

Sabemos da proposição I_{11} que para $\forall x \in X$

$$\int_{o}^{t} e^{-As}xds \in D(A) \text{ e } -A\int_{o}^{t} e^{-As}xds = (e^{-At}-I)x, \quad t \geq 0$$

Assim (I) converge para $(e^{-A(t-t_o)}-I)g(t)$ quando $h \to 0$ pois:

$$(I) = \int_{t_o}^{t} h^{-1}(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}g(t)ds = \int_{o}^{t-t_o} h^{-1}(e^{-Ah}-I)e^{-As}g(t)ds.$$

E mais $g(t)$ é contínua em $[t_o,t_1]$ e e^{-At} é analítico para $t > 0$ $\therefore$ $(e^{-A(t-t_o)}-I)g(t)$ é contínua para $t \in (t_o,t_1]$.

Mostraremos que (II) converge para $(II') = \int_{t_o}^{t} -Ae^{-A(t-s)}g(t)-g(s))ds$ quando $h \to 0$. Mas antes disso vejamos que (II') é limitado em qualquer intervalo fechado de $(t_o,t_1]$.

$$||\int_{t_o}^{t} Ae^{-A(t-s)}(g(t)-g(s))ds|| \leqq \int_{t_o}^{t} M(t-s)^{-1}K(t-s)^{\Theta}(s-t_o)^{-\Theta}ds \leqq$$

$$\leqq MK\int_{t_o}^{t} (t-s)^{\Theta-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds = MK(\int_{t_o}^{\bar{t}} + \int_{\bar{t}}^{t})(s-t_o)^{-\Theta}(t-s)^{\Theta-1}\, ds$$

$\forall\ \bar{t} \in (t_o,t)$. Escolheremos para cada $t > t_o$ um $\bar{t} = \frac{t+t_o}{2}$ e desta forma teremos:

$$(II') \leqq \frac{MK}{1-\Theta}(t-\bar{t})^{\Theta-1}(\bar{t}-t_o)^{1-\Theta} + \frac{MK}{\Theta}(t-\bar{t})^{\Theta}(\bar{t}-t_o)^{-\Theta} \leqq \frac{MK}{\Theta(1-\Theta)}$$

para t em qualquer compacto de $(t_o,t_1]$.

Mostremos então que

$$\int_{t_o}^{t} h^{-1}(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))ds \quad \text{converge para}$$

$$\int_{t_o}^{t} -Ae^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))ds \quad \text{para} \quad t \in [t_o,t_1], \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

$$||\int_{t_o}^{t} (h^{-1}(e^{-Ah}-I)+A)e^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))ds|| \leqq$$

$$\leqq \int_{t_o}^{t} ||(h^{-1}(e^{-Ah}-I)+A)e^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))||ds.$$

Usando o fato de que $\int_{o}^{h} -Ae^{-Au}\,du = e^{-Ah} - I$ a expressão acima será escrita como:

$$\int_{t_o}^{t} ||h^{-1}(\int_{o}^{h} -Ae^{-Au} + A\,du)e^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))||ds =$$

$$= \int_{t_o}^{t} ||h^{-1}(\int_{o}^{h} e^{-Au} - I\,du)Ae^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))||ds = (III)$$

Usando II_9 e II_{17} e $0 < \beta < \Theta$ teremos:

$$(III) \leq \int_{t_o}^{t} ||h^{-1}\int_o^h (e^{-Au}-I)A^{-\beta}du|| \; ||A^{1+\beta}e^{-A(t-s)}(g(t)-g(s)||ds$$

$$\leq \int_{t_o}^{t} (h^{-1}\int_o^h M_{1-\beta} \frac{u^\beta}{\beta} du)M_{1+\beta}(t-s)^{-1-\beta}K(t-s)^{\Theta}(s-t_o)^{\Theta}ds =$$

$$= \int_{t_o}^{t} M_{1-\beta} \frac{M_{1+\beta}K}{\beta(1+\beta)} h^\beta (t-s)^{\Theta-\beta-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds$$

Assim para $t \in [t_o^*,t_1] \subset (t_o,t_1)$ $\forall t_o^* \in (t_o,t_1)$, teremos que (III) tende à zero uniformemente quando $h \to 0$.

Logo $h^{-1}(e^{-Ah}-I)G(t)$ $AG(t)$ quando $h \to 0$.

Mas $G(t) = \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}g(s)ds$ é contínua em $[t_o,t_1]$ pois:

$$||G(t+h)-G(t)|| \leq \int_{t_o}^{t} ||e^{-A(t-s)}(e^{-Ah}-I)g(s)||ds +$$

$$+ \int_t^{t+h} ||e^{-A(t+h-s)}g(s)||ds \leq \int_{t_o}^{t} ||A^\beta e^{-A(t-s)}(e^{-Ah}-I)A^{-\beta}g(s)||ds +$$

$$+ \int_t^{t+h} ||e^{-A(t+h-s)}g(s)||ds, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

E g é contínua em $[t_o,t_1]$ logo $||g(s)|| \leq$ constante; e mais $||e^{-At}|| \leq Me^{-at}$ $t \geq 0$; usando II_{17} teremos:

$$||G(t+h)-G(t)|| \leq \frac{M_\beta M_{1-\beta}}{\beta(1-\beta)} \text{cte } h^\beta (t-t_o)^{1-\beta} + M \text{cte } h,$$

e o resultado segue. Além disso $(\frac{e^{-Ah}-I}{h})G(t)$ converge uniformemente para $AG(t)$ quando $t \in [t_o^*,t_1]$ $(t_o,t_1]$, $\forall t_o^* \in (t_o,t_1)$.

Logo $AG(t)$ é contínua em (t_o,t_1).

Observação:

Caso tivéssemos $||g(t)-g(s)|| \leq K(t-s)^\Theta$ para $t,s \in [t_o,t_1]$ então $AG(t)$ seria contínua em $[t_o,t_1]$.

III_3 Teorema:

Suponhamos X um espaço de Banach; A setorial com $\rho(A) \supset$

$\supset (-\infty,0]$, $\alpha \in [0,1)$, U um aberto de $R \times X^{\alpha}$, $f : U \to X$ contínua e tal que para cada $(t,x) \in U$, E vizinhança $N \subset U$ e constantes Θ e K tal que $||f(t,x)-f(s,y)|| \leq K(|t-s|^{\Theta} + ||x-y||^{\Theta})$.

Se $x : [t_o,t_1] \to X^{\alpha}$ é contínua, $(t,x(t)) \in U$ sobre $[t_o,t_1]$ e $x(t) = e^{-A(t-t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds$ para $t \in [t_o,t_1]$, então x é uma solução de $\dot{x} = -Ax + f(t,x)$ sobre (t_o,t_1) contínua em $t = t_o$.

Prova:

Para mostrar que $x(t)$ é uma solução de $\dot{x} = -Ax+f(t,x)$, devemos verificar que $x(t)$ é continuamente diferenciável, $x(t) \in D(A)$, $Ax(t)$ é contínua e a equação diferencial é satisfeita, tudo isto para $t \in (t_o,t_1)$. Já temos a hipótese de $(t,x(t)) \in U$ para $t \in [t_o,t_1]$.

Mostraremos que $x(t) \in D(A)$ e que $Ax(t)$ é contínua. Para isso, verificaremos que $x(t)$ é Hölder contínua e concluíremos que $g(t) = f(t,x(t))$ satisfaz as condições do lema III_2, obtendo o resultado desejado.

Façamos $x_o = x(t_o)$

$$||x(t+h)-x(t)||_{\alpha} = ||\int_{t_o}^{t+h} e^{-A(t+h-s)}f(s,x(s))+e^{-A(t+h-t_o)}x_o ds -$$

$$- \int_{t_o}^{t} e^{-A(t+h)}f(s,x(s))ds - e^{-A(t-t_o)}x_o ds||_{\alpha} =$$

$$||(e^{-Ah}-I)(e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds) +$$

$$+ \int_{t}^{t+h} e^{-A(t+h-s)}f(s,x(s))ds||_{\alpha} \leq ||(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-t_o)}x_o||_{\alpha} +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}f(s,x(s))||_{\alpha} ds + \int_{t}^{t+h} ||e^{-A(t+h-s)}f(s,x(s))||_{\alpha} ds$$

Mas $||f(t,x(t))|| \leq \beta$ $t \in [t_o,t_1]$, A^{α} comuta com e^{-At} e $x_o \in D(A^{\alpha})$.

Assim

$$||x(t+h)-x(t)||_\alpha \leq ||(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-t_o)} A^\alpha x_o|| +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||(e^{-Ah}-I)A^\alpha e^{-A(t-s)} f(s,x(s))||ds +$$

$$+ \int_{t}^{t+h} ||A^\alpha e^{-A(t+h-s)} f(s,x(s))||ds.$$

Por II_{16} $R(e^{-At}) \subset D(A^\gamma)$ $\gamma > 0$.

Assim

$$||x(t+h)-x(t)||_\alpha \leq ||(e^{-Ah}-1)A^{-\gamma}|| \, ||A^\gamma e^{-A(t-t_o)}|| \, ||A^\alpha x_o|| +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||(e^{-Ah}-I)A^{-\gamma}|| \, ||A^{\gamma+\alpha} e^{-A(t-s)}||f(s,x(s)||ds +$$

$$+ \int_{t}^{t+h} ||A^\alpha e^{-A(t+h-s)}||f(s,x(s))||ds \leq M_{1-\gamma} \frac{h^\gamma}{\gamma} M_\gamma (t-t_o)^{-\gamma}||x_o||_\alpha +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} M_{1-\gamma} \frac{h^\gamma}{\gamma} M_{\gamma+\alpha} (t-s)^{-\gamma-\alpha} B ds + \int_{t}^{t+h} M_\alpha (t+h-s)^{-\alpha} B \, ds =$$

$$= \frac{M_{1-\gamma} M_\gamma}{\gamma} ||x_o||_\alpha h^\gamma (t-t_o)^{-\gamma} + \frac{M_{1-\gamma} M_{\gamma+\alpha} B}{\gamma(1-\gamma-\alpha)} h^\gamma (t-t_o)^{1-\gamma-\alpha} +$$

$$+ BM_\alpha h^{1-\alpha} \qquad \text{se} \quad 1-\gamma-\alpha > 0$$

Logo $||x(t+h)-x(t)||_\alpha = O(h^\gamma (t-t_o)^{-\gamma})$ quando $h \to 0_+$

Assim se $g(t) = f(t,x(t))$ então

$$||g(t+h)-g(t)|| \leq K(h^\Theta + ||x(t+h)-x(t)||_\alpha^\Theta) \leq$$

$$\leq K(h^\Theta + \bar{K} h^{\gamma\Theta} (t-t_o)^{-\gamma\Theta}).$$

Mas γ pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, portanto

$$||g(t+h)-g(t)|| \leq K^* h^\delta (t-t_o)^{-\delta}$$

com $\delta = \gamma\theta$ e $K^* > 0$.

Logo pelo lema III_2

$$G(t) = \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)} g(s)ds \in D(A)$$

e $AG(t)$ é contínua em (t_o,t_1) mas $x(t) = e^{-A(t-t_o)}x_o + G(t)$ e como A é setorial, segue por I_{11} e I_{15} que $x(t) \in D(A)$ e $Ax(t)$ é contínua em (t_o,t_1).

III_4 Teorema:

Se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = -Ax + f(t,x)$ com $x(t_o) = x_o$ para $t \in (t_o,t_1)$, A e f estiverem nas condições do teorema anterior então $x(t) = e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)} f(s,x(s))ds$.

Prova:

$x(t)$ é solução portanto $x : (t_o,t_1) \to X$ é continuamente diferenciável e para este intervalo:

a) $(t,x(t)) \in U$, um aberto de $R \times X^\alpha$;

b) $x(t) \in D(A)$ e $t \to Ax(t) \in X$ é contínua;

c) além disso $x(t)$ satisfaz a equação diferencial $x = -Ax+f(t,x)$ e $x(t) \to x_o$ em X^α quando $t \to t_{o_+}$.

Bem, se $x(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ax + f(t,x) & t \in (t_o,t_1) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

em particular $x(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ax + g(t) \ , \quad t \in (t_o,t_1) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

onde $g(t) = f(t,x(t))$ contínua em $[t_o,t_1)$.

Segue das afirmações anteriores que: $t \to \langle\xi,x(t)\rangle$ é diferenciável em (t_o,t_1) e portanto satisfaz a relação abaixo

$$\frac{d}{dt}\langle\xi,x(t)\rangle = -\langle A^*\xi,x(t)\rangle + \langle\xi,g(t)\rangle \quad \text{quando} \quad \xi \in D(A^*).$$

Chamaremos este último fato de condição e). Mostraremos que quaisquer duas funções contínuas em X no intervalo (t_o,t_1), convergindo para x_o em X^α quando $t \to t_{o_+}$ e satisfazendo a condição e), serão coincidentes.

Mostraremos ainda que

$$x(t) = e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}g(s)ds$$

satisfaz as condições do parágrafo acima, concluindo o que queríamos.

Assim sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ contínuas em (t_o,t_1), satisfazendo condição e) com $x_1(t)$, $x_2(t) \to x_o$ quando $t \to t_{o_+}$ em X^α. Então

$u(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é portanto contínua em (t_o,t_1) e $u(t) \to 0$ quando $t \to t_{o_+}$, em X^α, portanto em X.

Assim $u(t)$ é contínua em $[t_o,t_1)$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle\xi,u(t)\rangle = -\langle A^*\xi,u(t)\rangle \\ u(t_o) = 0 \end{cases}$$

para $t \in (t_o,t_1)$ e $\xi \in D(A^*)$.

Seja $U(t) = \int_{t_o}^{t} u(s)ds$ função diferenciável em (t_o,t_1), contínua em t_o.

$$<\xi,u(t)> = \int_{t_o}^{t} -<A^*\xi,u(s)>ds \quad e$$

$$<\xi, \frac{d}{dt}U(t)> = -<A^*\xi,U(t)>.$$

Mas $(e^{-At})^*D(A^*) \subset D(A^*)$ para $t \geqq 0$ e $<(e^{-At})^*\xi,Ax> = <A^*\xi,e^{-At}x>$ para $x \in D(A)$ e $\xi \in D(A^*)$.

Assim para cada $\bar{t} \in (t_o,t_1)$ tem-se:

$$<\xi,e^{-A(\bar{t}-t)} \frac{d}{dt}U(t)> = <(e^{-A(\bar{t}-t)})^*_{\xi}, \frac{d}{dt}U(t)> =$$

$$= -<A^*(e^{-A(\bar{t}-t)})^*_{\xi}, U(t)> = -<A^*_{\xi},e^{-A(\bar{t}-t)}U(t)>.$$

Desta forma $\frac{d}{dt}<\xi,e^{-A(\bar{t}-t)}U(t)> = 0$ para $t \in (t_o,\bar{t}]$.

Portanto $t \to <\xi,e^{-A(\bar{t}-t)}U(t)>$ é constante em $(t_o,\bar{t}]$.

Mas essa aplicação é contínua em $[t_o,\bar{t}]$ e em t_o ela se anula, logo $<\xi,e^{-A(\bar{t}-t)}U(t)> = 0$ em $[t_o,\bar{t}]$ $\forall\, \bar{t} \in (t_o,t_1)$.

$$\Rightarrow <\xi,U(\bar{t})> = 0 \quad \forall\, \bar{t} \in (t_o,t_1)$$

$$\Rightarrow U(\bar{t}) = 0 \quad \forall\, \bar{t} \in (t_o,t_1)$$

$\therefore$ $u(t) = 0$ em (t_o,t_1) como queríamos.

Seja $x(t) = e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}g(s)ds.$

$g(t)$ é contínua em $[t_o,t_1)$ e e^{-At} é operador analítico para $t > 0$, assim

$$||x(t_o+h)-x(t_o)||_\alpha \leqq ||(e^{-Ah}-I)x_o||_\alpha +$$

$$+ \int_{t_o}^{t_o+h} ||e^{-A(t_o+h-s)}g(s)||_\alpha ds \leqq$$

$$\leq ||(e^{-Ah}-I)A^{\alpha}x_o|| + \int_{t_o}^{t_o+h} M_{\alpha}(t_o+h-s)^{-\alpha}||g(s)||ds \leq$$

$$\leq ||(e^{-Ah}-I)A^{\alpha}x_o|| + \frac{M_{\alpha}}{1-\alpha}||g||h^{1-\alpha}$$ que tende a zero quando $h \to 0$.

E mais, se $t \in (t_o,t_1) \Rightarrow t \in [t_o^*,t_1^*] \subset (t_o,t_1)$; nesse intervalo fechado $||g(t)|| \leq B$ e $||e^{-At}|| \leq M$.

Assim $||x(t+h)-x(t)|| \leq ||(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-t_o)}x_o|| +$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}g(s)||ds + \int_{t}^{t+h}||e^{-A(t+h-s)}g(s)||ds \leq$$

$$\leq ||(e^{-Ah}-I)A^{-\Theta}||\ ||A^{\Theta}e^{-A(t-t_o)}x_o|| +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||(e^{-Ah}-I)A^{-\Theta}||\ ||A^{\Theta}e^{-A(t-s)}g(s)||ds + \int_{t}^{t+h} MB\,ds \leq$$

$$\leq \frac{M_{1-\Theta}}{\Theta}\, h^{\Theta}\ M_{\Theta}(t-t_o)^{-\Theta}||x_o|| + \frac{M_{1-\Theta}}{\Theta}\, h^{\Theta}BM_{\Theta}\int_{t_o}^{t}(t-s)^{-\Theta}ds + MB\,h \leq$$

$$\leq \text{cte } h^{\Theta} + \text{cte } h^{\Theta} + \text{cte } h, \quad t \in [t_o^*,t_1^*] \subset [t_o,t_1].$$

Logo x é contínua em (t_o,t_1).

E mais, $x(t)$ satisfaz condição e), pois:

A é setorial, logo $\frac{d}{dt}<\xi,e^{-A(t-t_o)}x_o> =$

$$\frac{d}{dt}<(e^{-A(t-t_o)})^*_{\xi},x_o> = <-A^*(e^{-A(t-t_o)})^*_{\xi},x_o> =$$

$$= -<A^*_{\xi},e^{-A(t-t_o)}x_o> \quad \forall\, \xi \in D(A^*)$$

E mais,

$$\frac{d}{dt}<\xi,\int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}g(s)ds> = \frac{d}{dt}\int_{t_o}^{t}<\xi,e^{-A(t-s)}g(s)>ds$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{t_o}^{t}<(e^{-A(t-s)})^*_{\xi},\ g(s)>ds = <\xi,g(t)>-<A^*_{\xi},\int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}g(s)ds>$$

Portanto

$$x(t) = e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}g(s)ds \quad \text{é a solução.}$$

III_5 Teorema:

Se A é operador nas condições do teorema III_3, f é localmente lipschitziana em x e localmente Hölder contínua em t, ou seja, para qualquer (t,x) em U, existe uma vizinhança contida em U tal que $||f(t,x)-f(s,y)|| \leq cte(|t-s|^{\Theta} + ||x-y||_{\alpha})$ para qualquer ponto dessa vizinhança, $x(t)$ é solução de $\dot{x} = -Ax+f(t,x)$ para $t \in (t_o,t_1)$ com $x(t_o) = x_o$ e $\dfrac{||f(t,x(t))||}{B + ||x(t)||_{\alpha}}$, é limitado em qualquer $[t_o^*,t_1) \subset (t_o,t_1)$ então:

$x(t)$ é limitada em X^{α} para qualquer intervalo $[t_o^*,t_1)$ contido em (t_o,t_1).

Prova:

Se $x(t)$ é solução, temos por III_4 que

$$x(t) = e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds$$

logo $||x(t)||_{\alpha} \leq ||A^{\alpha}e^{-A(t-t_o)}x_o||+\int_{t_o}^{t} ||A^{\alpha}e^{-A(t-s)}f(s,x(s))||ds$.

Mas para $\forall\ [t_o^*,t_1) \subset (t_o,t_1)$, $t_o^* \in (t_o,t_1)$, temos

$||f(s,x(s))|| \leq B + ||x(s)||_{\alpha}$, B constante.

Então

$$||x(t)||_{\alpha} \leq M_{\alpha}(t-t_o)^{-\alpha}||x_o|| + BM_{\alpha}\frac{(t-t_o)^{1-\alpha}}{1-\alpha} +$$

$$+ M_{\alpha}K\int_{t_o}^{t} (t-s)^{-\alpha}||x(s)||_{\alpha}ds \leq L_1(t-t_o)^{-\alpha}+L_2\int_{t_o}^{t} (t-s)^{-\alpha}||x(s)||_{\alpha}ds$$

Pelo Corolário I_6

$$||x(t)||_\alpha \leq \frac{L_1}{1-\alpha} L(t-t_o)^{-\alpha} \quad t \in (t_o,t_1).$$

Logo $||x(t)||_\alpha$ é limitado para qualquer $[t_o^*,t_1) \subset (t_o,t_1)$.

III_6 Teorema:

Suponhamos X um espaço de Banach, A e f como no Teorema III_5. Então:

a) Dado $\forall(t_o,x_o) \in U$, $\exists$! solução maximal $x : [t_o,t_1) \to X$ de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -Ax+f(t,x), & t \in (t_o,t_1) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

b) Se $x_o \in D(A)$ a derivada é contínua em t_o;

c) Se $t_1 < \infty$ então quando $t \to t_1$ ou $(t,x(t))$ tende a algum ponto de $\partial U \subset R \times X^\alpha$ ou $\dfrac{||f(t,x(t))||}{1+||x(t)||_\alpha}$ é não limitado ou ambos.

Prova:

Mostraremos primeiramente a existência local de soluções através de uma contração G definida sobre uma bola $B_r \subset C([t_o,t_o+T],X^\alpha)$, utilizando o Teorema do Ponto Fixo.

Assim seja $G[x(t)] = e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds$ para $x(.) \in \overline{B_r(x_o)} \subset C([t_o,t_o+T],X^\alpha)$, onde $\overline{B_r(x_o)}$ é o fecho da bola aberta centrada em x_o e com raio r.

1) $G(x(t)) \in B_r(x_o)$, de fato,

$$||G(x(t))-x_o||_\alpha \leq ||(e^{-A(t-t_o)}-I)x_o||_\alpha + \int_{t_o}^{t} ||e^{-A(t-s)}f(s,x(s))||_\alpha ds$$

Já foi visto em III_4 que a primeira parcela tende a zero quando $t \to t_{o_+}$. Logo podemos tomar $||(e^{-A(t-t_o)}-1)x_o||_\alpha \leq \frac{r}{2}$ para t suficientemente próximo de t_o, por exemplo, $t \in [t_o,t_o+T]$.

Além disso, para $x(.) \in \overline{B_r(x_o)}$ e $t \in [t_o,t_o+T]$, $||f(t,x(t))|| \leq B$ já que f é localmente Hölder contínua em t e localmente lipschitziana em x.

Assim $\int_{t_o}^{t} ||e^{-A(t-s)}f(s,x(s))||_\alpha ds \leq \frac{BM_\alpha}{1-\alpha}(t-t_o)^{1-\alpha} \leq$

$\leq \frac{BM_\alpha}{1-\alpha} T^{1-\alpha} \leq \frac{r}{2}$. Ou seja escolhemos T de forma que em $t \in [t_o,t_o+T]$, $||(e^{-A(t-t_o)}-I)x_o||_\alpha$ e $\frac{BM_\alpha}{1-\alpha} T^{1-\alpha}$ sejam limitados por $\frac{r}{2}$.

2) $t \to G(x(t))$ é contínua; de fato, como no teorema III_3 $||G(x(t+h))-G(x(t))||_\alpha \leq \bar{K} h^\gamma (t-t_o)^{-\gamma}$ para $t \in [t_o,t_o+T]$ desde que $0 < \gamma < 1-\alpha$.

Portanto $G(x(t))$ é contínua em $t \in [t_o,t_o+T]$.

Portanto $G : B_r \to B_r$, onde $B_r = B_r(x_o) \subset C([t_o,t_o+T],X^\alpha)$.

3) $G : B_r \to B_r$ é contração, de fato, sejam $x(.)$ e $y(.)$ em B_r.

$$||G(x(t))-G(y(t))||_\alpha = ||\int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}(f(s,x(s))-f(s,y(s))\,ds||_\alpha \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{t} M_\alpha (t-s)^{-\alpha} \text{ cte } ||x(s)-y(s)||_\alpha^\Theta ds.$$

Assim se $||x(.)-y(.)||_\alpha < \delta$

$$||G(x(t))-G(y(t))||_\alpha \leq \frac{M_\alpha \text{ cte}}{1-\alpha} T^{1-\alpha} \delta^\Theta$$

Se necessário for, diminuímos T tal que $\frac{M_\alpha \text{ cte } T^{1-\alpha}}{1-\alpha} < 1$ e G será uma contração.

Pelo teorema do Ponto Fixo para contrações, existe uma única $x(.) \in B_r$ tal que $G(x(t)) = x(t)$.

Pelo teorema III_3, $x(t) = e^{-A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}f(s,x(s))ds$ é solução de:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -Ax+f(t,x) & t \in [t_o,t_o+T] \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

Mostraremos agora, unicidade de soluções para $t \in [t_o,t_1]$.

Seja x e $\tilde{x}$ duas soluções distintas do problema de Cauchy acima, definidas num intervalo $[t_o,t_1]$ com $[t_o,t_2]$ intervalo máximo onde elas coincidem, ou seja, $x(t) \neq \tilde{x}(t)$ para $t \in (t_2,t_1]$. Tomamos $t^* \in (t_2,t_1]$ tal que se $x_2 = x(t_2) = \tilde{x}(t_2)$ então $||\tilde{x}(t) - x_2|| \leq r$ e

$$||x(t)-x_2|| \leq r \quad \text{quando} \quad t \in [t_2,t^*]$$

Mas se x e $\tilde{x}$ são soluções, pelo Teorema III_4, x e $\tilde{x}$ são pontos fixos da aplicação G, que é uma contradição.

Assim tomaremos $t_1 = \sup\{T > t_o;$ existe solução definida sobre $[t_o,T)$ passando por $(t_o,x_o)\}$ e definimos $x(t)$ igual ao valor em t de uma solução y do problema de Cauchy onde

$$\begin{cases} y : [t_o,T) \to X^{\alpha} & t < T \\ y(t_o) = x_o \end{cases}$$

Segue da unicidade de soluções que $x(t)$ está bem definida; claramente $x(t)$ é solução maximal definida em $[t_o,t_1)$.

b) $x_o \in D(A)$

Logo $||x(t+h)-x(t)||_\alpha \leq ||(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-t_o)}x_o||_\alpha +$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}f(s,x(s))||_\alpha ds + \int_{t}^{t+h} ||e^{-A(t+h-s)}f(s,x(s))||_\alpha ds$$

Mas $||(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-t_o)}x_o||_\alpha \leq ||(e^{-Ah}-I)A^{\alpha-1}e^{-A(t-t_o)}Ax_o|| \leq$

$$M_\alpha \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} M||Ax_o||.$$

Em III_3, já vimos que escolhendo $\gamma > 0$ tal que $1-\gamma-\alpha > 0$ a segunda mais a terceira parcela são majoradas por cte $h^\gamma(t-t_o)^{1-\gamma-\alpha}$ + cte $h^{1-\gamma}$.

Assim diminuindo γ, se necessário, teremos $||x(t+h)-x(t)||_\alpha \leq$ $\leq \tilde{K}\, h^\gamma$ para $t \in [t_o,t_1]$.

Logo $g(t) = f(t,x(t))$ satisfaz $||g(t+h)-g(t)|| \leq L\, h^\gamma$, para $t_o \leq t < t+h \leq t_1$.

Assim pela observação do Lema III_2, $\frac{dx}{dt}$ será contínua em t_o.

c) Suponhamos agora $t_1 < \infty$ e $x_1 = \lim_{t\to t_1^-} x(t)$.

Se $(t_1,x_1) \in U$, existe uma solução $\tilde{x} : [t_1,t_1+\delta] \to X^\alpha$ para algum $\delta > 0$ com $x(t_1) = x_1$.

Então $x_1(t) = \begin{cases} x(t) & , \ t \in [t_o,t_1) \\ \tilde{x}(t) & , \ t \in [t_1,t_1+\delta] \end{cases}$

Assim $x_1(t)$ seria uma solução definida em $[t_o,t_1+\delta]$ com $x(t_o) = x_o$, o que contradiz o item a).

Logo $(t_1,x_1) \in \partial U$.

Agora se $\frac{||f(t,x(t))||}{1 + ||x(t)||_\alpha} \leq B_1 < \infty$, pelo Teorema III_5,

$||x(t)||_\alpha$ será limitada em qualquer intervalo $[t_o^*,t_1) \subset (t_o,t_1)$.

Logo $||f(t,x(t))|| \leqq B$ em $[t_o^*,t_1)$.

Queremos mostrar que existe $\lim\limits_{t\to t_1^-} x(t)$ em X^α.

Assim seja $t_1 - \delta \leqq t,s < t_1$. E tomemos t^* tal que $t_o < t^* \leqq t_1 - \delta \leqq s,t < t_1$, $\delta > 0$, $t > s$

$$x(t) = e^{-A(t-t^*)}x(t^*) + \int_{t^*}^{t} e^{-A(t-u)}f(u,x(u))du$$

$$||x(t)-x(s)||_\alpha = ||e^{-A(t-t^*)}x(t^*) - e^{-A(s-t^*)}x(t^*) +$$

$$+ \int_{t^*}^{t} e^{-A(t-u)}f(u,x(u))du - \int_{t^*}^{s} e^{-A(s-u)}f(u,x(u))du||_\alpha \leqq$$

$$\leqq ||A^\alpha e^{-A(s-t^*)}(e^{-A(t-s)}-I)x(t^*)|| + \int_{t^*}^{t} ||A^\alpha e^{-A(t-u)}f(u,x(u))||du +$$

$$+ \int_{t^*}^{s} ||A^\alpha e^{-A(s-u)}f(u,x(u))||du.$$

A primeira parcela é majorada por

$$M_\alpha(s-t^*)^{-\alpha}||(e^{-A(t-s)}-I)x(t^*)|| \leqq$$

$$\leqq M_\alpha(t_1-t^* - \delta)^{-\alpha}||(e^{-A(t-s)}-I)x(t^*)|| \leqq \varepsilon/2$$

para $|t-s| < \delta$, para algum $\delta > 0$.

A segunda parcela é majorada por

$$\int_{t^*}^{t} M_\alpha(t-u)^{-\alpha}B\,du = \frac{M_\alpha B(t-t^*)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

e a terceira por $\dfrac{M_\alpha B(s-t^*)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Assim se $\delta_1 = t_1 - t^*$, $|t-s| < \delta < \delta_1$, $|t-t^*| < \delta_1$.

Logo $||x(t)-x(s)||_\alpha \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2BM_\alpha}{1-\alpha}\,\delta_1^{1-\alpha} < \varepsilon$

se $\delta_1 = \min\{\delta, (\frac{(1-\alpha)\varepsilon}{4BM_\alpha})^{\alpha-1}\}$

III_7 Teorema:

Suponhamos X,A,α,U como no teorema III_6, f localmente lipschitziana em x e localmente Hölder contínua em t com expoente $\Theta \leqq 1$. Então a solução $x(.)$ de $\frac{dx}{dt} + Ax = f(t,x)$, $t \in (t_o,t_1)$ com $x(t_o) = x_o$ satisfaz:

a) $t \to \frac{dx}{dt}(t) \in X^\gamma$ é aplicação localmente Hölder contínua em (t_o,t_1) $\forall\gamma \in [0,\Theta)$,

b) $||\frac{dx}{dt}||_\gamma = 0(t-t_o)^{\alpha-\gamma-1}$ quando $t \to t_{o_+}$ se $x(t)$ for contínua em X^α para $t \to t_{o_+}$.

Prova:

$x(t) \in X^\alpha$ $t \in (t_o,t_1)$. Suponhamos então $x_o \in X^\alpha$ e trabalharemos num intervalo compacto, que denotaremos ainda por $[t_o,t_1]$.

Nesse intervalo $g(t) = f(t,x(t))$ será limitada, $||g(t)|| \leqq B$ e para algum $h_o > 0$ e $t_o \leqq t \leqq t+h \leqq t$, com $0 \leqq h \leqq h_o$, $||g(t+h)-g(t)|| \leqq$ $\leqq L(h^\Theta + ||x(t+h)-x(t)||_\alpha||$.

Mas $||x(t+h)-x(t)||_\alpha \leqq ||(e^{-Ah}-I)A^{-\Theta}A^\Theta e^{-A(t-t_o)}A^\alpha x_o|| +$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||A^\alpha e^{-A(t-s)}(g(s+h)-g(s))||ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t_o+h} ||A^\alpha e^{-A(t+h-s)}g(s)||ds.$$

A primeira parcela será majorada por

$$M_{1-\Theta}\frac{h}{\Theta}M_{\Theta}(t-t_o)^{-\Theta}||x_o||_\alpha = \frac{M_{1-\Theta}M_{\Theta}}{\Theta}||x_o||_\alpha h^{\Theta}(t-t_o)^{-\Theta}$$

A segunda por:

$$\int_{t_o}^{t} M_\alpha(t-s)^{-\alpha}L(h^{\Theta} + ||x(s+h)-x(s)||_\alpha)ds \leqq LM_\alpha h^{\Theta}\int_{t_o}^{t}(t-s)^{-\alpha}ds +$$

$$+ M_\alpha L\int_{t_o}^{t}(t-s)^{-\alpha}||x(s+h)-x(s))||_\alpha ds \leqq \frac{LM_\alpha h^{\Theta}}{1-\alpha}(t-t_o)^{1-\alpha} +$$

$$+ LM_\alpha\int_{t_o}^{t}(t-s)^{-\alpha}||x(s+h)-x(s)||_\alpha ds.$$

E a terceira parcela será majorada por:

$$M_\alpha B\int_{t_o}^{t_o+h}(t+h-s)^{-\alpha}ds = M_\alpha B\, h(t-t_o)^{-\alpha}$$

Logo se $\alpha \leqq \Theta$,

então $||x(t+h)-x(t)||_\alpha \leqq K\, h^{\Theta}(t-t_o)^{-\Theta} +$

$$+ M_\alpha L\int_{t_o}^{t}(t-s)^{-\alpha}||x(s+h)-x(s)||_\alpha ds$$

Pelo Corolário I_6,

$$||x(t+h)-x(t)||_\alpha \leqq \tilde{K}\frac{h^{\Theta}}{1-\Theta}(t-t_o)^{-\Theta} \quad t \in (t_o,t_1).$$

Logo $||g(t+h)-g(t)|| \leqq \bar{L}\, h^{\Theta}(t-t_o)^{-\Theta}$.

Temos da demonstração do Teorema III_3 que

$$A\int_{t_o}^{t} e^{-A(t-s)}g(s)ds = g(t) - e^{-A(t-t_o)}g(t) + \int_{t}^{t} Ae^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))ds$$

Logo $\frac{dx}{dt} = -Ax(t) + f(t,x(t)) = -Ae^{-A(t-t_o)}x_o + e^{-A(t-t_o)}g(t) -$

$$- \int_{t_o}^{t} Ae^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))ds.$$

Mostremos primeiramente que $\frac{dx}{dt} \in X^{\gamma}$, $\gamma \in [0,\Theta)$ e $t \in (t_o,t_1)$

Assim $\left|\left|\int_{t_o}^{t} A^{\gamma}Ae^{-A(t-s)}(g(s)-g(t))ds\right|\right| \leq \int_{t_o}^{t} M_{\gamma+1}(t-s)^{-\gamma-1}K(t-s)^{\Theta}(s-t_o)^{-\Theta}ds$

$$\leq M_{\gamma+1}K\int_{t_o}^{t} (t-s)^{\Theta-\gamma-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds.$$

Mas $\int_{t_o}^{(t+t_o)/2} (t-s)^{\Theta-\gamma-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds \leq$

$$\leq \left(\frac{t-t_o}{2}\right)^{\Theta-\gamma-1}\left(\frac{t-t_o}{2}\right)^{1-\Theta}\frac{1}{1-\Theta} = \frac{2^{\gamma}}{1-\Theta}(t-t_o)^{-\gamma} \quad \text{e}$$

$$\int_{(t+t_o)/2}^{t} (t-s)^{\Theta-\gamma-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds \leq \left(\frac{t-t_o}{2}\right)^{-\Theta}\left(\frac{t-t_o}{2}\right)^{\Theta-\gamma}\frac{1}{\Theta-\gamma} =$$

$$= \frac{2^{\gamma}}{\Theta-\gamma}(t-t_o)^{-\gamma}.$$

Assim $\left|\left|\frac{dx}{dt}(t)\right|\right|_{\gamma} \leq K\, M_{\gamma+1}\left(\frac{1}{1-\Theta} + \frac{1}{\Theta-\gamma}\right)2\,(t-t_o)^{-\gamma} +$

$$+ \left|\left|Ae^{-A(t-t_o)}x_o\right|\right|_{\gamma} + \left|\left|e^{-A(t-t_o)}g(t)\right|\right|_{\gamma} \leq$$

$$\leq cte(t-t_o)^{-\gamma} + M_{\gamma+1-\alpha}(t-t_o)^{\alpha-\gamma-1}\left|\left|x_o\right|\right| + BM_{\gamma}(t-t_o)^{-\gamma} \leq$$

$\leq cte(t-t_o)^{\alpha-\gamma-1}$ como queríamos.

Caso tivéssemos $\Theta \leq \alpha$, ainda assim

$\left|\left|\frac{dx}{dt}(t)\right|\right|_{\gamma} \leq cte\,(t-t_o)^{\alpha-\gamma-1}$.

Vejamos agora que $\frac{dx}{dt}$ é localmente Hölder com expoente $\sigma = \min\{\Theta-\gamma,\alpha\}$.

De fato,

$$||\frac{dx}{dt}(t+h) - \frac{dx}{dt}(t)||_\gamma \leq || - A(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-t_o)}x_o||_\gamma +$$

$$+ ||e^{-A(t+h-t_o)}g(t+h)-e^{-A(t-t_o)}g(t)||_\gamma + ||G(t) - G(t+h)||_\gamma =$$

$$= (I) + (II) + (III).$$

Analisemos a parcela (I)

$$(I) = ||A^{\gamma+1}(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-t_o)}x_o|| =$$

$$= ||A^{\gamma+1}(e^{-Ah}-I)A^{-\alpha}A^{\alpha}e^{-A(t-t_o)}x_o|| =$$

$$= ||A^{\gamma+1}e^{-A(t-t_o)}(e^{-Ah}-I)A^{-\alpha}A^{\alpha}x_o|| \leq$$

$$M_{\gamma+1}(t-t_o)^{-\gamma-1}\frac{h^\alpha}{\alpha}||x_o||_\alpha \cdot M_{1-\alpha}.$$

$$(II) = ||A^\gamma(e^{-A(t+h-t_o)}g(t+h) - e^{-A(t-t_o)}g(t+h) +$$

$$+ e^{-A(t-t_o)}g(t+h) - e^{-A(t-t_o)}g(t))|| \leq$$

$$\leq ||A^\gamma(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-t_o)}g(t+h)|| + ||A^\gamma e^{-A(t-t_o)}(g(t+h)-g(t))||$$

$$\leq ||A^{\gamma+\delta}e^{-A(t-t_o)}(e^{-Ah}-I)A^{-\delta}g(t+h)|| +$$

$$+ ||A^\gamma e^{-A(t-t_o)}(g(t+h)-g(t))|| \leq M_{\gamma+\delta}(t-t_o)^{-\gamma-\delta}M_{1-\delta}\frac{h^\delta}{\delta}B +$$

$$+ M_\gamma(t-t_o)^{-\gamma}K\,h^\Theta(t-t_o)^{-\Theta}.$$

Tomando-se $\delta = \Theta$

$$(II) \leq (M_{\gamma+\Theta}M_{1-\Theta}\frac{B}{\Theta} + M_\gamma K)h^\Theta(t-t_o)^{-\gamma-\Theta}$$

Quanto a parcela (III) temos

$$(III) = ||G(t+h)-G(t)||_\gamma = ||\int_{t_o}^{t+h}A^\gamma Ae^{-A(t+h-s)}(g(t+h)-g(s))ds -$$

$$- \int_{t_o}^{t}A^\gamma Ae^{-A(t-s)}(g(t)-g(s))ds||$$

Mas $\int_{t_o+h}^{t+h} A^{\gamma}Ae^{-A(t+h-s)}(g(t+h)-g(s))ds =$

$$= \int_{t_o}^{t} A^{\gamma+1}e^{-A(t-s)}g(t+h)-g(s+h)ds$$

Logo $(III) \leqq \int_{t_o}^{t_o+h} ||A^{\gamma+1}e^{-A(t+h-s)}(g(t+h)-g(s))||ds +$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||A^{\gamma+1}e^{-A(t-s)}(g(t+h)-g(s+h)-g(t)+g(s))||ds.$$

A primeira integral é menor ou igual a

$$2B\int_{t_o}^{t_o+h} M_{\gamma+1}(t+h-s)^{-\gamma-1}ds \leqq$$

$$2BM_{\gamma+1}(t+h-t_o-h)^{-\gamma-1}h = 2BM_{\gamma+1}(t-t_o)^{-\gamma-1}h.$$

Agora, $||g(t+h)-g(s+h)-g(t)+g(s)|| \leqq 2h^{\Theta}(s-t_o)^{-\Theta}$

$$\text{ou} \leqq 2(t-s)^{\Theta}(s-t_o)^{-\Theta}$$

Logo a segunda integral é menor ou igual a

$$2h^{\Theta}\int_{t_o}^{t-h} M_{\gamma+1}(t-s)^{-\gamma-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds + \int_{t-h}^{t} M_{\gamma-1}(t-s)^{-\gamma-1+\Theta}(s-t_o)^{-\Theta}ds$$

Mas $\int_{t_o}^{t-h}(t-s)^{-\gamma-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds = \int_{t_o}^{t^*}(t-s)^{-\gamma-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds$

$$+ \int_{t^*}^{t-h}(t-s)^{-\gamma-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds \leqq (t-t^*)^{-\gamma-1}\frac{(t^*-t_o)^{1-\Theta}}{1-\Theta} +$$

$$+ (t^*-t_o)^{-\Theta}[(t-t^*)^{-\gamma} - h^{-\gamma}].$$

Como estamos interessados em h bem pequeno tomaremos

$t^* = \frac{t+t_o}{2}$ com $t^* < t-h$;

Assim

$$\int_{t_o}^{t-h} (t-s)^{-\gamma-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds \leqq \frac{1}{1-\Theta}\left(\frac{t-t_o}{2}\right)^{-\gamma-\Theta} +$$

$$+ \left(\frac{t-t_o}{2}\right)^{-\gamma-\Theta} - h^{-\gamma}\left(\frac{t-t_o}{2}\right)^{-\Theta} \leqq cte\ (t-t_o)^{-\gamma-\Theta}\ h^{-\gamma}\ , \text{ e}$$

$$\int_{t-h}^{t} M_{\gamma+1}(t-s)^{\Theta-\gamma-1}(s-t_o)^{-\Theta}ds \leqq M_{\gamma+1}(t-h-t_o)^{-\Theta}\ \frac{h^{\Theta-\gamma}}{\Theta-\gamma} \leqq$$

$$\leqq cte\left(\frac{t-t_o}{2}\right)^{-\Theta}\ h^{\Theta-\gamma}$$

$$\therefore\ \left|\left| \frac{dx}{dt}(t+h) - \frac{dx}{dt}(t)\right|\right|_\gamma \leqq cte(h^\sigma(t-t_o)^{-\gamma-1}),$$

onde $\sigma = \min\{\Theta-\gamma,\alpha\}$.

III_8 Teorema:

Suponhamos que A seja um operador setorial.

Seja $\{f_n(t,x),\ n = 0,1,\ldots\}$ uma seqüência de funções definidas sobre um conjunto aberto $U \subset R \times X^\alpha$ (para algum α em $[0,1)$).

Cada $f_n(t,x)$ é localmente lipschitziana em x e localmente Holderiana em t para $(t,x) \in U$ com $\lim_{n\to\infty} f_n(t,x) = f_o(t,x)$ convergindo uniformemente em uma vizinhança de cada ponto de U. Suponhamos ainda que $\mu_n \to \mu_o > 0$ e $||x_n - x_o||_\alpha \to 0$ quando $n \to \infty$ com $(t_o,x_n) \in U$.

Seja $\phi_n(t)$ solução maximal de:

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{d\phi_n}{dt} + \mu_n A\phi_n = f_n(t,\phi_n) \\ \phi_n(t_o) = x_n, \quad t > t_o \end{cases}$$

definida sobre (t_o,t_o+T_n).

Então $T_o \geq \limsup_{n\to\infty} T_n$ e $||\phi_n(t) - \phi_o(t)||_\alpha$ converge uniformemente para zero sobre compactos de $[t_o, t_o+T_o)$.

Prova:

Suponhamos

$t_o = 0$

$x_o = 0$

$\mu_o = 1 \quad 1 < \mu_n < 2$

$f_o(t,0) = 0$

$\phi_o(t) = 0$ sobre $[0,T_o)$

Escolhemos t_1 em $(0,T_o)$;

$[0,t_1] \times \{0\}$ é um compacto em U e f é localmente lipschitziana em X.

Assim existem δ, $L > 0$ tais que:

$||f_o(t,x_1)-f_o(t,x_2)|| \leq L||x_1-x_2||_\alpha$ para $||x_1||_\alpha \leq \delta$; $||x_2||_\alpha \leq \delta$ e $0 \leq t \leq t_1$; e mais $||f_n(t,x)-f_o(t,x)|| \to 0$ $t \in [0,t_1]$ e $||x||_\alpha \leq \delta$.

Para n suficientemente grande ϕ_n está definido em $[0,t_1]$. De fato:

$\phi_n(0) = x_n \to 0$ logo $||\phi_n(0)|| \leq \delta$, para n maior que algum n_o.

Tomemos então intervalo máximo $[0,t_n]$, para o qual $||\phi_n(t)|| \leq$ $\leq \delta$ e então teremos:

$$||\phi_n(t)||_\alpha = ||e^{-A\mu_n t}x_n + \int_o^t e^{-\mu_n A(t-s)} f_n(s,\phi_n(s))ds||_\alpha$$

$$\leq M||x_n||_\alpha + \int_o^t ||A^\alpha e^{-\mu_n A(t-s)} f_n(s,\phi_n(s))||ds$$

$$\leq M||x_n||_\alpha + \int_o^t ||A^\alpha e^{-\mu_n A(t-s)} f_o(s,\phi_n(s))||ds +$$

$$+ \int_o^t ||A^\alpha e^{-\mu_n A(t-s)}(f_n(s,\phi_n(s))-f_o(s,\phi_n(s)))||ds$$

Mas $f_o(s,0) = 0$, portanto $||f_o(s,\phi_n(s))-f_o(s,0)|| =$

$= ||f_o(s,\phi_n(s))|| \leqq L\,||\phi_n(s)||_\alpha$

Logo $||\phi_n(t)||_\alpha \leqq M||x_n||_\alpha + M_\alpha \mu_n^{-\alpha} L\int_o^t (t-s)^{-\alpha}\,||\phi_n(s)||_\alpha\,ds +$

$+ M_\alpha \mu_n^{-\alpha}\,\Delta_n \int_o^t (t-s)^{-\alpha} ds$ onde

$\Delta_n = \sup ||f_n(s,x)-f_o(s,x)||$ para $||x||_\alpha \leqq \delta$ e $0 \leqq s \leqq t_1$.

Mas $1 < \mu_n < 2$ portanto

$||\phi_n(t)||_\alpha \leqq M||x_n||_\alpha + M_\alpha L\int_o^t (t-s)^{-\alpha}||\phi_n(s)||_\alpha\,ds$

$+ M_\alpha \Delta_n \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqq C_1(||x_n||_\alpha + \Delta_n) + C_2\int_o^t (t-s)^{-\alpha}||\phi_n(s)||_\alpha\,ds.$

Pela desigualdade de Gronwall

$||\phi_n(t)||_\alpha \leqq C(||x_n||_\alpha + \Delta_n)\exp(\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})$

quando $t \in [0,t_1]$ e $||x_n||_\alpha \leqq \delta$

$||\phi_n(t)||_\alpha \leqq \overline{C}(||x_n||_\alpha + \Delta_n)$

Mas para n suficientemente grande

$\overline{C}(||x_n||_\alpha + \Delta_n) \leqq$

Assim $||\phi_n(t)|| \leqq \delta$ para $[0,T_n)$, mas pelo Teorema III_6, se $T_n < \infty$ ou $(t,\phi_n(t)) \to \partial U$ quando $t \to T_{n_-}$ ou

$\dfrac{||f(t,\phi_n(t))||}{1 + ||\phi_n(t)||_\alpha}$ é não limitado ou ambos.

$$E \quad \frac{||f_n(t,\phi_n(t))||}{1+||\phi_n(t)||_\alpha} \leq ||f_n(t,\phi_n(t))|| \leq B,$$

logo $(t,\phi_n(t)) \to \partial U$ quando $t \to T_{n_-}$.

Assim $(t,\phi_n(t))$ escapa de qualquer compacto em U.

Logo $\phi_n(t)$ está definida sobre $[0,T_o)$ e em qualquer compacto desse intervalo $||\phi_n(t)||_\alpha \to 0$ uniformemente quando $n \to \infty$ como queríamos.

Note que as suposições feitas no começo da demonstração não particularizam o resultado.

De fato,

Se $\mu_n \to \mu_o > 1$ tomamos $\bar{\mu}_n = \dfrac{\mu_n}{\mu_o}$

$\tilde{A} = \mu_o A$ continua setorial.

Se $\phi_n(t_o) = x_n \to x_o \neq 0$ então tomamos $\psi_n(t) = \phi_n(t) - \phi_o(\bar{\mu}_n t)$ que converge para $\psi_o(t) \equiv 0$ quando $n \to \infty$; e

$$\frac{d\psi_n}{dt} + \bar{\mu}_n \tilde{A}\psi_n = f_n(t,\psi_n(t) + \phi_o(\mu_n t)) - \mu_n f_o(\mu_n t, \phi_o(\mu_n(t))$$

$$\text{Assim} \begin{cases} \dfrac{d\psi_n}{dt} + \bar{\mu}_n \tilde{A}\psi_n = g_n(t,\psi_n(t)) \\ \psi_n(t_o) = \phi_n(t_o) - \phi_o(\bar{\mu}_n t_o) = \bar{x}_n \end{cases}$$

com $g_o(t,0) = f_o(t,\phi_o(\mu_o t)) - \mu_o f_o(t,\phi_o(\mu_o t)) = 0.$

Caso $t_o \neq 0$ então tomamos $z(t) = \psi_n(t+t_o)$.

III_9 Lema:

Suponhamos A operador setorial em X, $0 < T < \infty$ e $0 \leq \beta \leq \alpha < 1+\beta$.

Então as aplicações:

(I) $(\mu,\xi) \to e^{-\mu At}\xi$ com $t \in [0,T]$

$R^+ \times X^\alpha \to C([0,T],X^\alpha)$;

(II) $(\mu,g) \to \int_0^t e^{-\mu A(t-s)}g(s)ds$; $t \in [0,T]$

$R^+ \times C([0,T],X^\beta) \to C([0,T],X^\alpha)$

são ambas analíticas.

Prova:

Tanto em ξ quanto em g teremos analiticidade, uma vez que nessas variáveis cada aplicação é linear e contínua.

Mostraremos primeiramente analiticidade da aplicação (I) em μ.

Para $t > 0$ fixo tem-se:

$$e^{-(\mu+\delta)At}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-At\delta)^n e^{-\mu At}\xi$$

convergindo para $|\delta|$ pequeno. De fato, por I_{15}, sobre intervalo $[0,T]$ $||e^{-At}|| \leq M$ e $||Ae^{-At}|| \leq Mt^{-1}$.

E $t^n \delta^n A^n e^{-\mu At}\xi \subset X^\alpha$ pois $R(e^{-At}) \subset X^s$ $\forall s \geq 0$

Assim

$$||\frac{1}{n!} A^n t^n \delta^n e^{-A\mu t}\xi||_\alpha = \frac{t^n|\delta|^n}{n!} ||A^n e^{-\mu At}\xi||_\alpha$$

$$= \frac{(t|\delta|)^n}{n!} ||(Ae^{-\mu At/n})^n\xi||_\alpha \leq \frac{(t|\delta|)^n}{n!} ||Ae^{-At\frac{\mu}{n}}||^n ||\xi||_\alpha \leq$$

$$\leq \frac{(t|\delta|)^n}{n!} (M(\frac{t.\mu}{n})^{-1})^n ||\xi||_\alpha = \frac{(M|\delta|)^n n^n}{\mu^n n!} ||\xi||_\alpha$$

Mas $\frac{n^n}{n!} \leq \sum_{K=0}^{\infty} \frac{n^K}{K!} = e^n$

Portanto

$$\left|\left|\frac{1}{n!} A^n t^n \delta^n e^{-A\mu t}\xi\right|\right|_\alpha \leq \left(\frac{M|\delta|e}{\mu}\right)^n ||\xi||_\alpha.$$

Assim, desde que $|\delta| < \frac{\mu}{eM}$, (I) será analítica.

Verifiquemos agora analiticidade de (II).

$$(\mu,g) \to \int_0^t e^{-\mu A(t-s)} g(s)ds, \quad t \in [0,T]$$

Mostremos que $\int_0^t e^{-(\mu+\delta)A(t-s)} g(s)ds =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t (-A(t-s)\delta)^n e^{-\mu A(t-s)} g(s)ds.$$

$$(II') = \left|\left|\frac{(-A(t-s)\delta)^n}{n!} e^{-A\mu(t-s)} g(s)\right|\right|_\alpha \leq$$

$$\leq \left|\left|A^{\alpha-\beta}\left(\frac{A(t-s)|\delta|}{n}\right)^n e^{-A\mu(t-s)} A^\beta g(s)\right|\right|,$$

e $g(.) \in C([0,T],X^\beta) \therefore ||A^\beta g(s)|| \leq K$ em $[0,T]$.

Se $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{n}$ teremos:

$$(II') \leq \left|\left|A^{\alpha-\beta} \frac{(A(t-s)|\delta|)^n}{n!} e^{-A\mu(t-s)}\right|\right| K \leq$$

$$\leq K\left|\left|(A^\gamma)^n \frac{(A(t-s)|\delta|)^n}{n!} (e^{-A\mu(t-s)/n})^n\right. \leq$$

$$\leq K\left(\frac{|\delta|^n (t-s)^n}{n!}\right)\left|\left|A^{\gamma+1} e^{-A\mu(t-s)/n}\right|\right|^n \leq$$

$$\leq K \frac{|\delta|^n (t-s)^n}{n!} \left(M_{\gamma+1} (\mu(t-s)/n)^{-(\gamma+1)}\right)^n =$$

$$= K\left(\frac{|\delta| M_{\gamma+1}}{\mu}\right)^n \frac{n^n}{n!} \left(\frac{n}{\mu(t-s)}\right)^{\alpha-\beta}.$$

Mas $0 \leqq \beta \leqq \alpha < 1+\beta$, logo $0 \leqq \alpha-\beta < 1$ e

$$\frac{n^n\, n^{\alpha-\beta}}{n!} \leqq \frac{n^n}{n!}\, n \leqq \frac{n^n}{n!}\ \frac{n^n}{n!} \leqq e^{2n}$$

E mais, segue do teorema II_{16} que $\alpha \to M_\alpha$ é contínua em $[0,\infty)$ e $\frac{\alpha-\beta+n}{n} \to 1$ quando $n \to \infty$.

Portanto $M_{\gamma+1} \leqq \overline{M}$.

e $\quad (II') \leqq K[\mu(t-s)]^{\beta-\alpha}\left(\frac{|\delta|\overline{M}e^2}{\mu}\right)^n.$

Assim para $|\delta| < \frac{\mu}{\overline{M}e^2}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \frac{(-A\delta(t-s))^n}{n!}\, e^{-A\mu(t-s)}g(s)ds$ converge uniformemente em $[0,T]$.

III_{10} Teorema:

Suponhamos A um operador setorial num espaço de Banach X, $0 \leqq \alpha < 1$, $U \subset R \times X^\alpha$ aberto, Ω aberto de um espaço de Banach L e $f : U \times \Omega \to X$ contínua com $t \to f(t,x,\lambda), (t,x) \to D_\lambda f(t,x,\lambda)$ e $(t,x) \to D_x f(t,x,\lambda)$ localmente Hölder contínuas.

Para $\mu > 0$, $\lambda \in \Omega$, $(t,\xi) \in U$ seja $x(t) = x(t;\tau,\xi,\lambda,\mu)$ solução maximal de:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \mu Ax = f(t,x,\lambda)\ , & t > \tau \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Então $(\xi,\lambda,\mu) \to x(t;\tau,\xi,\lambda,\mu)$ é continuamente diferenciável, indo de $X^\alpha \times \Omega \times R^+$ em X^α, para t dentro do domínio de definição da solução.

E $u(t) = D_\xi(x(t))$ é solução de:

$$\frac{du}{dt} + \mu Au = D_x f(t,x(t),\lambda)u, \quad u(\tau) = I.$$

$v(t) = D_\lambda(x(t))$ é solução de:

$$\frac{dv}{dt} + \mu Av = D_x f(t,x(t),\lambda)v + $$
$$+ D_\lambda f(t,x(t),\lambda), \; v(\tau) = 0.$$

$w(t) = D_\mu(x(t))$ é solução de:

$$\frac{dw}{dt} + \mu Aw = D_x f(t,x(t),\lambda)w - Ax(t), \; w(\tau) = 0.$$

Prova:

Consideremos, sem perda de generalidade, $\tau = 0$ e tomemos $[0,T]$ um pequeno intervalo dentro do intervalo de definição da solução.

Tomamos $G : C([0,T],X^\alpha) \to C([0,T],X^\alpha)$.

$$G(x;\xi,\lambda,\mu)(t) = e^{-\mu At}\xi + \int_0^t e^{-\mu A(t-s)} f(s,x(s),\lambda)ds, \quad t \in [0,T].$$

Para (ξ,λ,μ) numa vizinhança de (ξ_0,λ_0,μ_0), $(0,\xi_0,\lambda_0,\mu_0) \in U \times \Omega \times R^+$, e para r e T suficientemente pequenos, G será uma contração de uma bola $B_r \subset C[0,T],X^\alpha)$ nela própria. Como no teorema III_6, portanto:

$$x(t;\xi,\lambda,\mu) = e^{-\mu At}\,\xi + \int_0^t e^{-A\mu(t-s)} f(s,x(s),\lambda)ds$$

será solução maximal de $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \mu Ax = f(t,x,\lambda) \\ x(0) = \xi, \quad t > 0 \end{cases}$.

f, $D_x f$ e $D_\lambda f$ são contínuas, pelo Lema I_2, $f(.,x(.),\lambda)$ será continuamente diferenciável.

Usando também o lema III_9 teremos que G será composição de funções analíticas com função continuamente diferenciável, portanto G será C^1. Logo seu ponto fixo também será C^1, é o que diz o teorema I_3, e

$$u(t) = D_\xi x(t) = e^{-\mu At}I + \int_0^t e^{-\mu A(t-s)} \frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s),\lambda)D_\xi x(s)ds$$

$$= e^{-\mu At} + \int_0^t e^{-\mu A(t-s)} \frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s),\lambda)u(s)ds$$

$$u(0) = I.$$

Logo pelo teorema III_3 $u(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \mu Au = D_x f(t,x(t)\lambda)u \\ u(0) = I \end{cases}$$

De modo análogo obtemos resultados para $v(t) = D_\lambda(x(t))$ e $w(t) = D_\xi(x(t))$.

III_{11} *Corolário:*

Se além das hipóteses do teorema III_{10} tivermos que $(x,\lambda) \to f(t,x,\lambda)$ é C^r, $r \geq 1$, com derivadas contínuas em $U \times \Omega$, ou analítica uniformemente em t para (t,x,λ) numa vizinhança de cada ponto de $U \times \Omega$, então a aplicação:

$$(\xi,\lambda,\mu) \to x(t;\tau,\xi,\lambda,\mu) \quad \text{é} \quad C^r$$

ou analítica no intervalo de existência da solução.

Prova:

Nessas condições, G será composição de uma função analítica com outra C^r ou analítica. Logo o resultado segue.

III_{12} Corolário:

Se além das hipóteses de III_{10} tivermos $(t,x,\lambda) \to f(t,x,\lambda)$ aplicação de $U \times \Omega$ em X, C^r ou analítica então:

$(t,\tau,\xi,\lambda,\mu) \to x(t,\tau,\xi,\lambda,\mu)$ será C^r ou analítica, respectivamente, para $t > \tau$ no domínio de existência da solução.

Prova:

Para qualquer $m > 0$ definimos $y(s) = y(s;0,\xi,\hat{\lambda},\mu/m)$ como solução de:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{ds} + (\frac{\mu}{m})Ay = g(s,y,\hat{\lambda}) \\ y(0) = \xi \end{cases}$$

onde $g(s,y,\hat{\lambda}) = \frac{1}{m} f(\tau + \frac{s}{m}, y,\lambda)$ e $\hat{\lambda} = (\lambda,m,\tau)$

$z(t) = y(m(t-\tau); 0,\xi,\hat{\lambda}, \frac{\mu}{m})$ satisfaz:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{ds}(m(s-\tau);0,\xi,\hat{\lambda},\frac{\mu}{m})\, m = m[-\frac{\mu}{m}Az(t) + g(m(s-\tau),y,\hat{\lambda})] =$$

$$= -\mu Az(t) + f(\tau + \frac{m(s-\tau)}{m},y,\lambda) = -\mu Az(t) + f(s,y,\lambda).$$

Além disso $z(\tau) = y(0) = \xi$.

Logo segue da unicidade de soluções que $z(t) = x(t,\tau,\xi,\lambda,\mu)$ $t > \tau$, no domínio da solução x, $\forall m > 0$.

Tomando-se $m = (t-\tau)^{-1}$, em particular tem-se:

$$x(t;\tau,\xi,\lambda,\mu) = y(1,0,\xi,(\lambda,(t-\tau)^{-1},\tau), \mu(t-\tau))$$

Mas $(\xi,(\lambda,m,\tau), \frac{\mu}{m}) \to y(s;0,\xi,(\lambda,m,\tau),\frac{\mu}{m})$ é C^r (ou analítica), para s no intervalo de definição da solução, já que:

$$(y,\hat{\lambda}) = (y,(\lambda,m,\tau)) \to g(s,y,\hat{\lambda}) = \frac{1}{m} f(s + \frac{\tau}{m},y,\lambda)$$

é C^r (ou analítica) pelo resultado anterior.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO A UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA

Consideremos a seguinte equação:

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t,u,u_x) \\ u(0) = 0 = u(\pi) \end{cases} \qquad x \in (0,\pi),$$

Interessa-nos ver esta equação como

$$(2)\qquad \begin{cases} \dot{u} = -Au + F(t,u) \\ u(t_o) = u_o \end{cases}$$

Assim definimos $Au = -u_{xx}$ para $u \in D(A) = H^1[0,\pi] \cap H^2[0,\pi]$ e para cada $x \in [0,\pi]$, $F(t,u)(x) = f(x,t,u(x,t),u_x(x,t))$.

Mostraremos que A é operador setorial, e, depois de impormos algumas condições sobre f, mostraremos que $F : R^+ \times D(A\ ) \to L^2[0,\pi]$, $\alpha \in (3/4,1)$ é localmente hölder contínua na primeira variável e localmente lipschitziana na segunda variável.

Obteremos então uma única solução maximal para (2) para cada $(t_o,u_o) \in R^+ \times X^\alpha$.

Mostremos então que o operador $Au = -u_{xx}$, com $D(A) = H_o^1[0,\pi] \cap H^2[0,\pi]$, é setorial.

Para isto faremos uso do seguinte teorema:

IV_1 Teorema:

Seja X um espaço de Hilbert e A operador linear fechado densamente definido sobre X. Se $\rho(A) \cap \{\lambda \in C;\ \mathrm{Re}\ \lambda > 0\} \neq \phi$ e se $w(A) = \{\langle Au,u\rangle;\ u \in D(A)$ e $||u|| = 1\} \subset \{\lambda;\ |\arg \lambda| \geq \pi-\beta\} \cup \{0\}$ quando $\beta \in [0,\frac{\pi}{2})$ então $-A$ é operador setorial.

Prova:

Seja $X = L_2(0,\pi)$ e $Au = u_{xx}$ quando $u \in H_o^1 \cap H^2(0,\pi)$. Mostremos que $-A$ é setorial.

a) $D(A)$ é denso em X pois contém $C_o^\infty(0,\pi)$

b) A é operador fechado

De fato,

Suponhamos $f_n \in D(A)$ tal que $f_n \to f$ e $f_n'' \to g \in L_2(0,\pi)$.

Seja $\psi \in C_o^\infty(0,\pi)$; temos

$$\int_o^\pi f_n''(x)\psi(x)dx = \int_o^\pi f_n(x)\psi''(x)dx$$

Logo $\left|\int_o^\pi (f_n(x)-f(x))\psi''(x)ds\right| \leq ||f_n-f||_{L_2(0,\pi)}||\psi''||_{L_2(0,\pi)}$ que vai a zero quando $n \to \infty$ $\forall\psi \in C_o^\infty(0,\pi)$.

Mas $f_n'' \to g$, portanto $\left|\int_o^\pi (f_n''(x)-g(x)\psi(x)ds)\right. \leq$

$\leq ||f_n''-g||_{L_2(0,\pi)}||\psi||$ também vai a zero quando $n \to \infty$.

Pela unicidade do limite $f''(x) = g(x) \in L_2(0,\pi)$. Logo $f \in H^2$.

Da mesma forma temos que $Lu = u_x$ é fechado em $H^1(0,\pi)$, ou seja, se $f_n \to f$ e $f_n' \to h \Longrightarrow h = f'$ e $f \in H^1(0,\pi)$.

Assim temos $f_n \to f$ e $f_n'' \to f''$ com $f \in H^2(0,\pi)$ e $f_n \in H_o^1(0,\pi)$.

Mostremos então que $f_n' \to f'$.

$$f_n'(x) = \int_o^x f_n''(s)ds \quad e \quad f_m'(x) = \int_o^x f_m''(s)ds.$$

Mas $\left|\left|\int_o^x f_n''(s) - f_m''(s)ds\right|\right|_{L_2(0,\pi)} \leq \pi||f_n'' - f_m''||_{L_2(0,\pi)}$.

Logo f_n' é seqüência convergente em $L_2(0,\pi)$ e portanto $f'(x)$ é o limite desta seqüência.

- $f : R^+ \times R^3 \to R$ contínua,
- $t \to f(\cdot,t,u,p) \in L_2(0,\pi)$ é localmente Hölder contínua,
- f é localmente lipschitziana em u e p,
- $|f(x,t,u,p)| \leq h(x)g(t,|u|,|p|)$ com $h \in L_2(0,\pi)$, g contínua e também crescente nas duas últimas variáveis.

Escolhendo α tal que $\frac{3}{4} < \alpha < 1$ temos $X^\alpha = D(A^\alpha) \subset C^1(0,\pi)$. Para esse α definimos $U = \{(t,u);\ u \in X^\alpha \text{ e } t > 0\}$.

Seja $F(t,u)(x) = f(x,t,u(x),u_x(x))$, $x \in [0,\pi]$.

Queremos que F seja localmente Hölder contínua em t e localmente lipschitziana em u.

Assim seja $(t,u) \in U$.

Como $u \in X^\alpha$, então u e u_x são contínuas para $x \in [0,\pi]$.

Logo $\{(x,t,u(x),u_x(x));\ x \in [0,\pi]\}$ é conjunto compacto e portanto admite uma ε-vizinhança tal que para todos os pontos (x,t,u,p) e (x,s,v,q) nela contidos tem-se $|f(x,t,u,p) - f(x,s,v,q)| \leq L(|t-s|^\Theta + |u-v| + |p-q|)$.

Assim existe vizinhança V de (t,u) em $R^+ \times X^\alpha$ tal que $||f(\cdot,t,w,w_x) - f(\cdot,s,v,v_x)|| \leq \bar{L}(|t-s|^\Theta + ||u-v||_\alpha)$ para $s \in R^+$ e $w,v \in X^\alpha$.

Logo pelo teorema III_6 dado (t_o, u_o), $t_o > 0$ e $u_o \in X^\alpha$, $\exists$ solução maximal $u : [t_o,t_1) \to X^\alpha$ da equação

$$u_t = -Au + F(t,u) \quad t \in (t_o,t_1).$$

$$u(t_o) = u_o.$$

e $t \to u(t) \in X^\alpha$ é contínua em (t_o,t_1).

Mas u e u_x são contínuas em t uniformemente em $x \in [0,\pi]$ e além disso u e u_x são contínuas em x.

Logo $(x,t) \to u(x,t)$ e $(x,t) \to u_x(x,t)$ são aplicações contínuas.

Pelo teorema III_7 se Θ é o expoente de Hölder da f e $\gamma < \Theta$ então:

$t \to u_t \in X^\gamma$ é contínua em (t_o,t_1).

Assim temos $f_n \to f$, $f_n' \to f'$ e $f_n'' \to f''$ em $L_2(0,\pi)$.

Portanto $f_n \to f$ em $H^2(0,\pi)$ e conseqüentemente em $C^1(0,\pi)$. Logo a convergência é pontual e $f(0) = f(\pi) = 0$, como queríamos.

c) $1 \in \rho(A)$

Seja $f \in L_2(0,\pi)$. Queremos $u \in D(A)$ tal que $(A-I)u = f$, ou seja, $u_{xx} - u = f$.

Mas $u(x) = \int_0^\pi G(x,s)f(s)ds$, onde

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{senh} x \operatorname{senh}(s-\pi)}{\operatorname{senh} \pi} & \text{se } x \in [0,s] \\[2ex] \dfrac{\operatorname{senh} s \operatorname{senh}(x-\pi)}{\operatorname{senh} \pi} & \text{se } x \in [s,\pi], \end{cases}$$

é solução da equação.

Portanto $u_{xx} = f + u \in L_2(0,\pi)$. E mais $G(0,s) = G(\pi,s) = 0$. Logo $u \in H_0^1 \cap H^2(0,\pi)$.

Portanto o operador $(A-I)$ é sobrejetivo.

Além disso $A-I$ é operador fechado. Assim $(A-I)^{-1}$ também é fechado.

Logo $(A-I)^{-1}$ é limitado em $L_2(0,\pi)$ e portanto $1 \in \rho(A)$.

d) A é dissivativo, ou seja, para cada $u \in D(A)$,

$$\langle Au,u\rangle = \int_0^\pi u_{xx}(s)u(s)ds = -\int_0^\pi u_x^2(s)ds \leq 0.$$

Assim $w(A) \subset (-\infty,0] \subset \{\lambda;\ |\arg \lambda| \geq \pi-\beta\} \forall\ \beta \in [0,\pi/2)$.

Portanto A satisfaz todas as hipóteses do teorema IV_1 e $-A$ é setorial.

Vamos agora impor as seguintes condições sobre f:

Vamos a partir desse instante supor que $t \to f(x,t,u,p)$ seja localmente lipschitziana, ou seja, $\Theta = 1$. Desta forma escolhendo $\gamma = \alpha$, a aplicação

$t \to u_t \in X^\alpha$ será contínua em (t_o,t_1). Assim

$(x,t) \to u_t(x,t)$ e $(x,t) \to u_t$ são contínuas em (t_o,t_1).

Se além das hipóteses anteriores supusermos ainda que $x \to f(x,t,u,p)$ seja lipschitziana, a aplicação:

$x \to u_{xx} = u_t(x,t) - f(x,t,u(x,t),u_x(x,t)$ será também lipschitziana e então $u_{xx} \in C^\mu(0,\pi)$ para qualquer μ em $(0,1)$.

Logo $u(x,t) \in C^{2+\mu}(0,\pi)$, $t \in (t_o,t_1)$.

Além disso $||u(.,t)-u_o||_{C^1(0,\pi)} \leq cte\, ||u(.,t) - u_o||_\alpha$ e tende à zero quando $t \to t_{o_+}$.

Assim esta solução é clássica já que $(x,t) \to \{u(x,t),u_{xx}(x,t),u_t(x,t)\}$ são contínuas.

Quanto à t_1, ou é infinito ou $||u(.,t)||_\alpha \to \infty$ quando $t \to t_{1_-}$.

De fato,

Sabemos do teorema III_6 que se $t_1 < \infty$ e $t \to t_{1_-}$ ou

$$||u(.,t)||_\alpha \to \infty \quad \text{ou} \quad \frac{||F(t,u(.,t)||}{1 + ||u(.,t)||_\alpha} \quad \text{é não limitado ou ambos.}$$

Mas temos por hipótese que $|f(x,t,u,v)| \leq h(x)g(t,|u|,|v|)$.

Como $1 > \alpha > \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$, $X^\alpha \subset H^1(0,\pi)$, temos

$$||u(.,t)||_{L_2(0,\pi)} \leq K_1||u(.,t)||_{H^1(0,\pi)} \leq K_2||u||_\alpha$$

Logo $g(t,||u(.,t)||_{L^2}, ||u_x(.,t)||_{L_2}) \leq g(t,K_2||u||_\alpha, cte\, ||u||_\alpha)$.

Desta forma

$$||F(t,u)|| \leqq ||h||_{L_2(0,\pi)}\, g(t,cte||u||_\alpha,cte||u||_\alpha)$$

Assim se $||u(.,t)||_\alpha < \infty$ quando $t \to t_{1_-}$, então

$$\frac{||F(t,u)||}{1+||u(.,t||_\alpha} \leqq ||F(t,u)|| \leqq cte \quad \text{quando} \quad t \to t_{1_-},$$

o que é uma contradição.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] HENRY, D. - Evolution Equations in Banach Space-Notas não publicadas IME-USP, 1981.

[2] HENRY, D. - Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations - Lecture Notes in Mathematics, 840, Springer-Verlag, 1981.

[3] PAZY, A. - Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations - Applied Mathematical Sciences, 44 - Springer-Verlag, 1983.

[4] GOMES; A.M. - Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução - Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1985.

[5] KREIN, S.G. - Linear Differential Equations in Banach Space - Translations of Mathematical Monographs, Vol. 29, American Mathematical Society, 1971.

[6] MARTIN Jr, R.H. - Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces - Wiley - Interscience, 1976.

[7] HALE, J.K. - Ordinary Differential Equations - Wiley - Interscience 1969.

[8] TAYLOR, A.E. - Introduction to Functional Analysis - John Wiley & Sons, Inc., 1958.

[9] GOLDBERG, S. - Unbounded linear operators - McGraw-Hill, 1966.